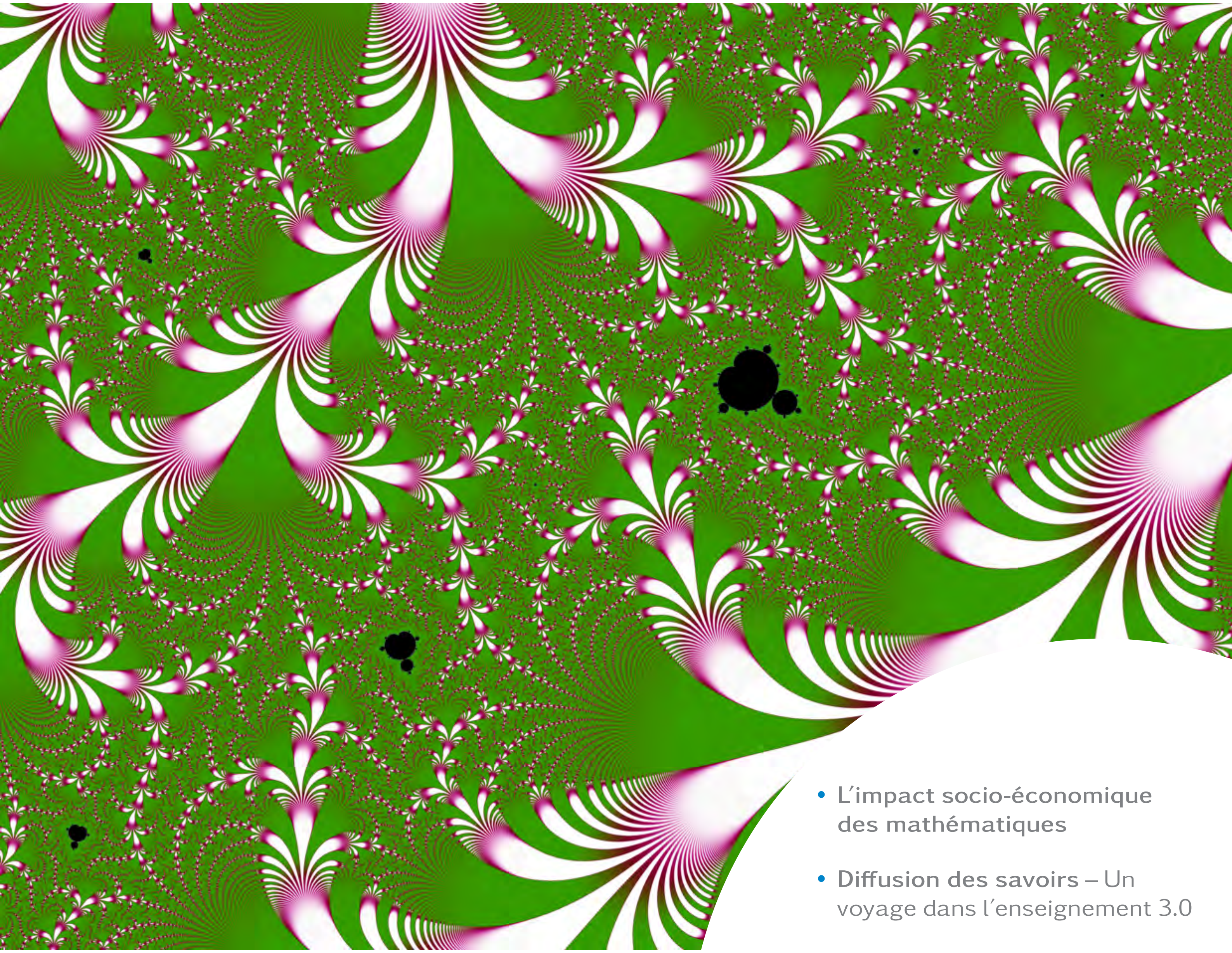
JUILLET 2015 – N° 145

la Gazette des Mathématiciens



- **L'impact socio-économique des mathématiques**
- **Diffusion des savoirs** – Un voyage dans l'enseignement 3.0
- **Parité** – Juste un verre, et plus si affinités
- **Raconte-moi...** – la dimension fractale

Société Mathématique de France
SMF

la Gazette des Mathématiciens

Secrétariat de rédaction :
SMF – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@dma.ens.fr – http://smf.emath.fr

Directeur de la publication : Marc Peigné

ISSN : 0224-8999

Classe LaTeX : Denis Bitouzé (denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (n.lozanne@free.fr)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.

Société Mathématique de France

À propos de la couverture. À tout $a \in \mathbb{C}$ on associe le système dynamique $z_{n+1} = az_n e^{z_n}$. Un paramètre est dit *stable* si, en le perturbant, on peut suivre continûment le système par une conjugaison en z. Ces paramètres forment un ouvert dense, représenté ici en vert, rose et blanc. On voit apparaître des exemplaires de l'ensemble de Mandelbrot associé au système $z_{n+1} = z_n^2 + a$, ce qui est une manifestation spectaculaire d'universalité. (crédit : Arnaud Chéritat).

Nº 145

Éditorial

Chères lectrices, chers lecteurs,

Vous vous trouvez à la plage, en montagne, en voyage à l'autre bout du monde, ou bien, plus banalement, sur votre lieu de travail : peu importe, la *Gazette* ne vous oublie pas en cette période estivale ! Mieux que les mots flêchés…

Comment mesurer l'impact des mathématiques sur notre économie ? Que l'on soit ou non directement concerné par les liens qu'entretiennent entreprises et mathématiques, cette question est importante. Ne serait-ce qu'afin d'être capable d'indiquer les débouchés possibles aux étudiants des filières mathématiques et susciter de futures vocations. Une enquête sur l'impact socio-économique des mathématiques en France a justement été récemment commandée à un cabinet d'audit par AMIES (agence pour les mathématiques en interaction avec l'entreprise et la société), en partenariat avec la Fondation Sciences Mathématiques de Paris, la Fondation Mathématique Jacques Hadamard, et avec le soutien de la plupart des LabEx de mathématiques. La *Gazette* consacre un dossier aux résultats de cette enquête, ainsi qu'à la présentation d'AMIES.

Du côté de nos universités, le cours magistral serait-il en péril ? Menacé par une horde d'acronymes tels que MOOCS, WIMS, MOODLE ? Pour quelques éléments de réponse, nous vous invitons à un petit voyage dans l'enseignement 3.0.

Réunir des femmes scientifiques autour d'un thé, d'un dîner, ou d'un cocktail, mais dans quel but ? La rubrique *Parité* vous offre, à travers un témoignage personnel, un regard sur des pratiques apparemment bien plus répandues outre-Atlantique que dans notre cher Hexagone.

Au programme de la rubrique *Mathématiques* : le problème de Kadison–Singer et, davantage de saison, l'étude de la propagation de rayons lumineux à travers un système optique.

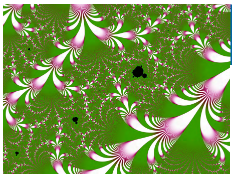
Qu'elle soit fractale, d'Hausdorff, métrique, capacitaire, ou encore de boîtes… la dimension est à l'honneur dans la rubrique *Raconte-moi*.

Pour finir avec une pointe de sel, jetez donc un coup d'œil dans le *rétroviseur*. En 1973, Jean Dieudonné livrait à la *Gazette* sa vision des mathématiques : réfléchie, sans compromis... et un tantinet provocatrice !

En vous souhaitant une agréable lecture,

Boris Adamczewski

la Gazette des Mathématiciens



N° 145

Sommaire

la Gazette des Mathématiciens

Société Mathématique de France SMF

Nº 145

Mot du président

Chères et chers collègues

Je viens d'être élu président de la SMF pour une troisième et dernière année. Le rapport moral que vous trouverez dans ce numéro fait état d'une amélioration du fonctionnement de la SMF, et notamment d'un retour à l'équilibre financier, ce dont je me réjouis ; le travail entamé depuis quelques années porte ses fruits !

Pour cette troisième année à la présidence de la SMF, je serai entouré de quatre vice-président(e)s qui m'épauleront sur l'ensemble des dossiers : Alain Grigis et Cyril Imbert rejoignent ainsi Aviva Szpirglas et Gérald Bourgeois. Le bureau est complété par Lucy Moser-Jauslin, Étienne Matheron et Stéphane Seuret. Plusieurs « chargés de mission » m'accompagneront aussi : Yves Aubry, Valérie Berthé, Gérard Grancher, Laurent Guillopé, Angela Pasquale, François Apéry... sans compter tous les bénévoles qui œuvrent discrètement pour la SMF et que je remercie sincèrement.

Les retards de parution de nos publications et d'accès aux archives sont clairement derrière nous aujourd'hui, le personnel de la SMF s'est fortement investi dans ce redressement et je tiens à l'en remercier. Il y a 3 ans, Daniel Barlet prenait les rênes du secteur « publications », les choix éditoriaux qu'il a alors proposés ont permis de le redresser, même si l'avenir reste incertain ; je le remercie sincèrement pour le temps et l'énergie qu'il y a consacrés. Laurent Guillopé a mis à jour nos archives, en lien étroit avec Numdam ; travail discret mais très important pour notre crédibilité.

En étroite collaboration avec la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI), la Société Française de Statistique (SFDS) et plus récemment la Société Informatique de France (SIF), la SMF a répondu présent sur les questions de l'enseignement des mathématiques, en s'impliquant en particulier fortement dans le nouveau « Zoom des métiers des Mathématiques et de l'Informatique », outil essentiel pour convaincre les jeunes générations de s'engager dans des filières scientifiques. L'actualité est riche dans ce secteur avec notamment le plan « Stratégie mathématiques » annoncé en fin d'année 2014 ; de nombreuses questions demeurent, la SMF essaye de peser en particulier sur celles concernant les volumes horaires de notre discipline et l'articulation entre l'enseignement de l'informatique et des mathématiques.

Côté « actions vers le grand public », l'activité est toujours intense, en lien étroit avec les autres sociétés savantes et de nombreux acteurs sur le terrain. Le consortium Cap'Maths traverse une période très difficile, la SMF est très concernée par ce dossier ; dans les mois à venir, elle va œuvrer au mieux pour épauler l'équipe d'Animath dans la structuration des actions de Cap'Maths et essayer de faire émerger un mode de fonctionnement viable sur le long terme. Pierre Pansu n'a pas ménagé ses efforts sur tous ces dossiers durant les trois années passées, il quitte le bureau aujourd'hui, qu'il soit assuré de notre reconnaissance.

Le fonctionnement harmonieux de la SMF et de ses instances ne pourrait se faire sans le travail silencieux mais ô combien important de nombreux acteurs. Je tiens à remercier tout particulièrement Angela Pasquale qui était la secrétaire du bureau depuis deux ans et qui a désiré passer la main.

L'exercice qui se termine a été marqué par la nouvelle ligne éditoriale et le nouveau format de la *Gazette* ; l'accueil de nos adhérents est très enthousiaste, je tiens à remercier tout le comité éditorial pour ce travail remarquable, et tout particulièrement son rédacteur en chef Boris Adamczewski... ainsi que Valérie Berthé qui a mené une réflexion approfondie pour que cette mutation soit un succès.

L'année 2016 sera celle du premier congrès SMF, manifestation fortement attendue par notre communauté. Il aura lieu du 6 au 10 juin prochain à Tours et sera l'occasion de mettre en valeur la riche palette de l'école mathématique française, des fondements aux applications les plus variées. Je vous invite d'ores et déjà à bloquer ces dates sur votre agenda pour faire de ce nouveau rendez-vous un grand succès.

Je vous souhaite de bonnes vacances d'été.

Le 1er juillet 2015

Marc Peigné, président de la SMF

1. Affaires générales

1.1 – Situation générale

La SMF a traversé ces dernières années une période difficile, avec des déficits importants de l'ordre de 75 000 € en 2011, 2012 et 2013, expliqués en partie par la crise économique et celle plus spécifique de l'édition scientifique.

Le personnel salarié a été très sollicité ; les retards dans le secteur des publications sont aujourd'hui résorbés et plusieurs projets importants, en lien notamment avec les autres sociétés savantes, ont été menés. La restructuration du fonctionnement interne de la SMF, amorcée depuis plusieurs années, a franchi de nouvelles étapes en 2014, avec notamment une baisse du nombre de postes permanents ; les fiches de postes des différents personnels ont été affinées pour améliorer l'articulation entre les différents acteurs. Le profil d'un poste sur le site de Marseille a été totalement repensé pour améliorer la diffusion de nos publications en profitant au maximum du rayonnement du CIRM qui voit passer plus de 3500 mathématiciens chaque année.

1.2 – Adhérents

Le nombre des adhérents baisse régulièrement depuis plusieurs années : 2027 en 2012, 1914 en 2013 et 1891 en 2014. Plusieurs raisons expliquent cette baisse : les difficultés économiques actuelles, la difficulté à intégrer les jeunes générations au sein de structures existantes,... La cotisation 2015 n'a pas été augmentée, il en sera de même pour celle de 2016. Une réflexion est menée au sein du conseil sur les moyens de susciter de nouvelles adhésions.

1.3 – Prises de position

Les trois sociétés savantes, SFDS [1], SMAI [2], SMF travaillent en étroite concertation sur plusieurs sujets, notamment en 2014 sur celui de la réforme des programmes en cours. La SMF a participé à plusieurs réunions au MENESR [3] autour du socle des connaissances et des programmes à venir. Le président de la SMF et le vice-président enseignement faisaient notamment partie de la délégation qui accompagnait la ministre Madame Vallaud-Belkacem au Palais de la découverte début décembre 2014 pour l'annonce du plan stratégie pour les mathématiques.

1.4 – Rencontres et colloques

Journée des lauréats de l'Académie des sciences. Le cycle « Des mathématiciens primés par l'Académie des Sciences » est organisé chaque année en partenariat avec l'Académie des Sciences. Cette année, la journée a eu lieu le 3 décembre 2014 à l'université Montpellier 2 [4] et a été organisée par V. Durand-Guerrier, L. Nyssen et P.-É. Paradan.

Journée annuelle 2015. La journée annuelle [5], organisée par P. Pansu, aura lieu le 26 juin 2015 à l'IHP, sur le thème « Des mathématiques au monde socio-économique ». Cette journée comportera aussi l'Assemblée Générale de la SMF et une table ronde intitulée « L'impact socio-économique des mathématiques ».

Rencontres scientifiques de la SMF. La SMF organise de manière régulière les sessions « États de la Recherche » [6]. Deux sessions vont se dérouler en 2015 : l'une, à Montpellier, sur les « Aspects géométriques de la relativité générale », et l'autre sur la « Supraconductivité, superfluidité, vortex », à l'IHP.

1. Société Française de Statistiques.
2. Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles.
3. Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche.
4. `smf.emath.fr/content/des-mathématiciens-primés-par-lacadémie-des-sciences-2014`
5. `smf.emath.fr/content/journee-annuelle-2015-paris`
6. `smf.emath.fr/content/etats-de-la-recherche-presentation`

1.5 – Relations avec les autres sociétés savantes et associations

Les échanges avec la SFDS et la SMAI sont réguliers, de façon informelle ou non, et concernent tous les domaines d'activité de nos sociétés (notamment les questions d'enseignement et les actions Grand Public). Les contacts avec la SIF [7] se sont poursuivis en 2014, en particulier autour du projet de la nouvelle édition du *Zoom des Métiers* ; cette brochure consacrée aux métiers des mathématiques et de l'informatique est parue en mars 2015, fruit d'un travail en étroite collaboration des 3 sociétés savantes et autres partenaires, que ce soit pour la levée de fonds ou l'élaboration des contenus ; un projet de films présentant certains métiers est en cours. Par ailleurs, un numéro commun *MATAPLI/-Gazette des mathématiciens* en hommage à M. Yor a été élaboré et est sorti au printemps 2015.

La SMF a travaillé avec la SFP [8] et la SCF [9], en organisant notamment la journée « Sciences et media » qui a eu lieu le 21 janvier 2014 au CNAM.

Les contacts entre les présidences de l'EMS [10] et de la SMF sont permanents. La réunion annuelle des présidents des sociétés membres de l'EMS s'est tenue en avril 2014 à Istanbul ; la SMF y était représentée par G. Allaire. Le Conseil de l'EMS a eu lieu en juin 2014 à San Sebastian, le président de la SMF y était.

La SMF travaille toujours en étroite collaboration avec *Animath* et *Cap'Maths*, ainsi qu'avec *femmes et mathématiques*. Les pages web consacrées aux « Promenades mathématiques », hébergées sur le site de la SMF, ont été modernisées.

1.6 – Vie interne de la Société

Personnel salarié. La SMF emploie pour ses activités propres (hors CIRM) l'équivalent de 5 emplois à temps plein. Il faut souligner la forte mobilisation des salariés au sein de la SMF et une coordination qui s'améliore peu à peu, afin d'éviter le cloisonnement de certains dossiers.

Sous-traitants, bénévoles. La SMF fait appel à des sous-traitants, pour la composition et l'impression des revues et des livres, pour les opérations de routage, mais aussi pour la gestion du parc informatique. De nombreux bénévoles participent aussi à ces tâches diverses. Les procédures de validation des travaux effectués et de la mise en paiement ont été actualisées, afin que le personnel de la SMF soit moins exposé.

Informatique, système de gestion. Le système de gestion du processus éditorial a été finalisé en 2013 et mis en place en 2014 ; cela a permis de juguler les retards et d'augmenter le nombre de pages de certaines revues et collections.

L'intégration des séries en version numérique de la SMF dans l'archive Numdam se poursuit, en collaboration étroite avec la Cellule Mathdoc de Grenoble. Après le rattrapage du dépôt de ses revues (*Annales de l'ÉNS*, *Bulletin* et *Revue d'Histoire des Mathématiques*) au printemps 2014, l'ensemble des *Mémoires* a été rendu accessible aux abonnés sur le serveur de la SMF fin 2014, avant leur accessibilité prochaine sur l'archive Numdam. La mise à jour annuelle de toutes les métadonnées pour chaque série numérique de la SMF dans l'archive Numdam est engagée, y compris pour la sous-série *Séminaire Bourbaki* de *Astérisque* : les documents pdf sont accessibles sans restriction autre que celle d'une barrière mobile d'accès visant à préserver l'équilibre économique des séries (5 ans pour les revues). L'affectation d'un identifiant DOI à l'ensemble des articles et ouvrages numériques de la SMF a été décidée et sera mise en œuvre durant l'année 2015, améliorant à terme l'accès et le signalement de la production éditoriale de la maison d'édition SMF.

Une réflexion sur le site Web de la SMF a été coordonnée par V. Berthé et A. Pasquale, en lien étroit avec C. Ropartz ; la nouvelle présentation du site de la SMF est opérationnelle depuis janvier 2015. Le site côté publications a évolué en 2012 et 2013 et a gagné en lisibilité, ceci grâce au travail bénévole de L. Koelblen ; une réflexion de plus longue haleine est menée actuellement pour un accès plus aisé aux collections, en lien avec le projet de l'INSMI de maison éditoriale mathématique française.

1.7 – Actions de communication

L'envoi d'une lettre mensuelle d'information aux membres continue. Ces lettres sont largement dif-

7. Société Informatique de France.
8. Société Française de Physique.
9. Société Chimique de France.
10. European Mathematical Society.

fusées dans les laboratoires de mathématiques, via le réseau des correspondants. Le mot du président dans la *Gazette* permet aussi d'évoquer les actions en cours et de les situer dans un contexte plus global.

Le travail sur les plaquettes et dépliants présentant les activités de la SMF s'est poursuivi en 2014 : ces documents sont diffusés lors des événements dans lesquels la société est impliquée.

Le serveur web continue d'évoluer selon les besoins.

Le compte twitter SMF, ouvert en 2012, poursuit sa croissance avec actuellement 550 abonnés et permet de par sa nature de toucher un public différent.

L'INSMI [11], la SFDS, la SMAI, et la SMF ont édité une lettre d'information (4 numéros entre janvier ey août) présentant la délégation française des conférenciers invités au congrès international des mathématiciens d'août 2014 à Séoul : cette lettre a été largement diffusée vers la presse généraliste. La SMF a été représentée à Séoul par P. Foulon sur le stand du CIRM ; une interview filmée de M. Peigné, évoquant la délégation française et la vie de la SMF, a été projetée plusieurs fois lors du congrès.

1.8 – Soutien et parrainage de prix

Prix AMIES. L'AMIES [12] a lancé en 2013 un prix destiné à promouvoir les thèses *Mathématiques Entreprises* soutenues en 2012. Ce prix est parrainé par les trois sociétés savantes SFDS, SMAI et SMF. La proclamation des résultats du Prix AMIES 2014 a eu lieu courant septembre ; les lauréats sont R. Prévost (université Paris-Dauphine), et L. Cohen (Philips research).

Prix Hamidoune. Ce prix a été créé en 2011 à l'initiative d'amis et collègues du mathématicien Y. Ould Hamidoune et vise à encourager l'enseignement et la recherche en Mauritanie. Il est soutenu par les autorités académiques mauritaniennes ainsi que par divers partenaires étrangers. La SMF a donné son parrainage pour le prix 2014 et soutenu la dotation de ce prix en offrant des livres. Le prix a été décerné (au niveau scolaire) à Sidi Mohamed Aleyia de l'École spéciale polytechnique de Nouakchott.

Prix Maurice Audin. Ce prix a été créé en 2004 par l'Association Maurice Audin, avec le soutien de la SMF et de la SMAI pour la France et par l'AMA en Algérie. À chaque session, le jury dont fait partie le Président de la SMF, désigne deux lauréats, l'un exerçant ses activités en Algérie, l'autre en France. La remise du prix a eu lieu le 18 juin 2014 à l'IHP, à Paris. Les lauréats pour 2014 sont Kouatar Ghomari, maître de conférences à l'université d'Oran et San Vu-Ngoc, professeur à l'université Rennes 1.

Prix S. Mandelbrojt. L'institut français de Pologne et l'Ambassade de France en Pologne, en partenariat avec la SMF, ont décidé de créer à partir de 2015 le Prix Szolem Mandelbrojt, visant à récompenser des recherches polonaises d'excellence dans le domaine des mathématiques. Ce prix s'adresse aux chercheurs polonais de moins de 45 ans conduisant des recherches dans le domaine des mathématiques fondamentales ou appliquées. Le chercheur sélectionné bénéficiera d'un séjour de recherche en France d'une durée d'un mois dans le laboratoire de son choix et sera amené à effectuer quelques exposés avec le parrainage de la Société Mathématique de France. Le premier lauréat de ce prix est A. Langer (géométrie algébrique), il sera invité au Laboratoire J. Dieudonné à Nice et recevra son prix le 1er juin à Varsovie.

Prix Ibni. Le prix Ibni Oumar Mahamat Saleh 2014 a été décerné à David Jaurès Fotsa Mbogne et annoncé le 3 février 2015 par les président(e)s des trois sociétés savantes. Pour plus d'informations, à la fois sur la personnalité d'Ibni Oumar Mahamat Saleh et les conditions de sa disparition, le 3 février 2008, on pourra consulter le site `http://smf4.emath.fr/PrixIbni/`

2. Gazette

En décembre 2013, un comité pour faire évoluer la *Gazette* a été mis en place sous la responsabilité de V. Berthé, qui en a assuré la coordination avec le comité de rédaction. Guidée par les propositions émises par ce comité et les réactions des lecteurs au questionnaire de satisfaction qui leur a été soumis, la *Gazette* a connu plusieurs évolutions importantes cette année.

11. Institut National des Sciences Mathématiques et de leur Interactions.
12. Agence pour les Mathématiques en Interaction avec les Entreprises et la Société.

Le comité de rédaction a été élargi et partiellement renouvelé avec les arrivées de B. Adamczewski, succédant à B. Helffer en tant que rédacteur en chef, J. Déserti, D. Gayet, S. Gouezël et S. Seuret.

Un nouveau format de la *Gazette*, de type magazine et en couleur, a vu le jour à partir de janvier 2015. L'élaboration de cette nouvelle maquette a été rendue possible grâce au concours d'une graphiste, N. Lozanne, ainsi que d'un développeur de classes LaTeX, D. Bitouzé. Ce chantier a été mené en étroite collaboration avec C. Ropartz et B. Adamczewski.

Une évolution de fond a également accompagné ce changement de format. Plusieurs nouvelles rubriques ont été testées. De grands dossiers ont par exemple été consacrés au congrès international des mathématiciens, à la théorie des types et à la révolution du big data. La *Gazette* s'est également fait l'écho des questions de parité qui se trouvent au cœur des préoccupations de notre communauté. Une rubrique intitulée *Raconte-moi...*, inspirée des classiques *What is...* publiés dans les Notices de l'AMS, présente au lecteur non initié une notion ou un théorème de façon très concise. La rubrique *Rétroviseur* se propose de rééditer quelques pages amusantes glanées dans les anciens numéros. Un effort particulier est fait afin d'obtenir des textes plus concis et accessibles à un large public de mathématiciens. Une plus grande place est également accordée aux entretiens.

Enfin, un numéro spécial en l'honneur de M. Yor, élaboré en partenariat avec *MATAPLI* et donc la SMAI, a été publié au printemps.

3. Conseil scientifique

Composition actuelle. Le Conseil Scientifique a été renouvelé partiellement. Il a vu l'arrivée de M.-C. Arnaud (Systèmes dynamiques, Avignon), V. Bonnaillie-Noël (EDP, Paris), J. Garnier (Analyse, Paris), et T. Rivoal (Théorie des nombres, Grenoble). Le secrétariat du conseil a été assuré par M.-F. Roy.

Propositions. Le Conseil Scientifique a approuvé les propositions de nouveaux membres pour les comités de rédaction de *Bulletin et Mémoires* et de la *Revue d'Histoire des Mathématiques*. À cette occasion, le conseil a noté la présence d'une seule femme au comité de rédaction du *Bulletin et Mémoires* de la SMF et a posé une question : « N'y aurait-il pas de femmes compétentes pour travailler à la rédaction de cette revue ? » Il a souhaité que lors des prochains renouvellements des membres de ce comité cette remarque soit prise en compte.

La SMF peut accorder son soutien scientifique à des colloques sur avis de son conseil scientifique. Dans ce cadre, la SMF a donné un avis favorable à la demande de soutien des rencontres suivantes :

- « Modélisation mathématique des systèmes complexes » ;
- « Les journées du PGMO » ;
- « Metric and variational structures in singular varieties » ;
- « Analyse microlocale et applications » ;
- « Colloque Inter'Actions 2014 » ;
- « Rencontres du 3e cycle Bordeaux » ;
- « Euro Mini Conference on Stochastic Programming » ;
- « Revisiting Decades of Conservation Laws » ;
- « MaxEnt'14 ».

Signalons que, puisque le CIRM est un établissement de la SMF (en commun avec le CNRS et subventionné par le ministère), tout colloque dépendant en partie du CIRM (sélectionné par un comité scientifique nommé conjointement par la SMF) bénéficie du soutien scientifique et moral de la SMF et n'a donc pas à demander notre parrainage.

4. Le pôle de Luminy

4.1 – La maison de la SMF

Son rôle est de prendre en charge les publications de la SMF envoyées par les imprimeurs (réception, stockage, expédition, vente au numéro,...). L'effort pour rattraper les retards de publication a été poursuivi cette année encore. La cellule de diffusion travaille en étroite collaboration avec le secteur des publications, celui des publicités, les services généraux et celui de la comptabilité. L'équipe est dirigée par C. Munusami. Jusqu'en avril 2014, l'équipe était constituée de l'équivalent de 2,5 temps pleins ; actuellement, l'équipe est constituée de l'équivalent de 1,5 temps pleins. Une nouvelle salariée, M.-F. Koussémon, a été engagée en décembre 2014. Celle-ci présente la SMF aux nouveaux congressistes en début de semaine. Elle tient un stand de vente des publications de la SMF chaque mardi et jeudi. Enfin, elle contribue à une bonne présentation de nos ouvrages dans l'enceinte du CIRM. Il en résulte une amélioration substantielle de nos ventes locales depuis son arrivée, début décembre 2014, à savoir, ventes 2013 : 2985 €, ventes du 1-1-2014 au

30-11-2014 : 2688 €, ventes du 1-12-2014 au 15-5-2015 : 4068 €. Signalons qu'entre 8000 et 10000 ouvrages arrivent à la cellule de diffusion chaque année. Il faut donc songer à gérer ce stock de façon plus rationnelle dès 2015. On constate cette année encore une forte implication dans la gestion et la production de statistiques ; de plus un travail d'évaluation des frais d'envoi et de manutention a été fait par C. Munusami.

4.2 – cirm 2014

Fréquentation

En terme du nombre de visiteurs, le cirm est devenu le plus grand centre mondial d'accueil de conférences. 3449 participants y sont passés en 2014, soit une croissance supérieure à 10% par rapport à l'année 2009 (et 1583 visiteurs en 1999 !). Le cirm poursuit son développement en renforçant chaque année ses moyens d'accueil et sa notoriété. Il bénéficie aujourd'hui d'un soutien renforcé de l'insmi, d'une dotation du menesr et de financements des laboratoires d'excellence carmin et archimede qui apportent un complément financier important et nécessaire lui permettant d'être au niveau des meilleurs centres d'accueil internationaux. La Chaire Jean-Morlet a eu un effet levier dans le nombre de visiteurs étrangers au cirm et dans le nombre de contacts reçus au niveau des services rencontres et relations internationales au cirm. Par ailleurs, la pression scientifique a fortement cru cette année. C'est un signe encourageant mais à gérer avec précaution.

Bilan des activités scientifiques

- 38 conférences et écoles dont deux de 2 semaines ;
- 9 petits groupes ;
- 21 recherches en binôme ;
- 11 semaines de sessions thématiques : cemracs (6 semaines) et mois thématique (5 semaines) ;
- 2 semestres de Chaire Jean-Morlet.

La Chaire Jean-Morlet [13]

- Août 2014 à janvier 2015 : Hans Feichtinger (university of Vienna) et Bruno Torresani (I2M) Thème : Computational Time Frequency and Coorbit Theory.
- Février à juillet 2015 : Herwig Hauser (university of Vienna) et Guillaume Rond (I2M) Thème : Artin Approximation and Singularity Theory.
- Lancement d'une co-édition Springer et smf « Jean-Morlet Series » : publications des travaux de recherche menés au cirm par les différents porteurs de la Chaire. Premier livre consacré aux Probabilités (Chaire Gayrard/-Kistler).

LabEx CARMIN

- 3 rencontres cirm-ihp, 1 session thématique, 3 formations doctorales, 9 rencontres « jeunes chercheurs ».
- Ouverture de la Bibliothèque Mathématique Audiovisuelle en octobre 2014. 5 conférences filmées chaque semaine et déjà plus de 300 films mis en ligne (exposés de recherche avec indexation par mots clés, films et interviews grand public, films thématiques) .

LabEx ARCHIMEDE

- 16 rencontres, mois thématique, Chaire Jean-Morlet.

Immobilier : projet 2R cirm

Afin de s'adapter au développement de ses activités scientifiques et aux demandes croissantes d'accueil et pour également donner plus de cohérence et d'unité au site, le cirm a lancé un projet dans le cadre du cper [14] pour agrandir et restructurer son bâtiment « Annexe ».

- Le projet est en cours de lancement (maîtrise d'ouvrage cnrs).
- Début envisagé des travaux : deuxième semestre 2015.
- Coût : 2100 k€ (construction) et 500 k€ (équipement).

De la préparation à la valorisation des événements scientifiques

- Préparation professionnalisée des événements scientifiques : le cirm a revu en profondeur l'ensemble des outils numériques mis

13. www.chairejeanmorlet.com
14. Contrat de plan État-Région.

à la disposition des organisateurs sur l'ensemble de la chaîne qui conduit à la réalisation d'une rencontre scientifique (nouveau dossier de candidature/réalisation d'un minisite web propre à chaque rencontre/mise en place d'une inscription hôtelière distincte de l'inscription scientifique).
– Développement d'actions visibles à l'international (présentation des activités du CIRM lors de l'ICM 2014 à Séoul/participation active aux réseaux de réflexion des centres internationaux, ERCOM, IMSI, etc.).
– Construction d'une communication digitale efficace (finalisation du nouveau site web, développement de l'e-réputation du CIRM aux niveaux local, national et international, etc.).

Conclusion

On peut conclure en soulignant que l'année a été scientifiquement riche avec un développement fort de nouveaux outils pour la préparation des rencontres.

5. Secteur grand public

La SMF continue à avoir une activité intense dans ce secteur : cycles de conférences, participations au fonctionnement d'institutions partenaires, événements, publications.

Un texte, un mathématicien. Ce cycle de conférences rencontre un vif succès. Les conférences sont filmées et montées par les soins de la BnF [15]. Le comité scientifique, présidé par D. Harari, est constitué de N. Anantharaman, S. Cantat, G. Pagès, plus M. Andler et C. Imbert. Le 10e anniversaire du cycle a été célébré le 21 mars, à l'occasion du *Forum Mathématiques Vivantes*, devant une audience un peu ténue. Par ailleurs, un documentaire suivant une classe est en cours de réalisation.

Un texte, un mathématicien en province. Deux conférences, à Besançon et à Clermont-Ferrand sont prévues. Celle de Clermont-Ferrand s'inscrit dans une journée organisée par le laboratoire de mathématiques et destinée à présenter ses activités aux entreprises, collectivités et grand public de la région.

Une question, un chercheur. Ce cycle de conférences a eu lieu hors les murs, à Dauphine en novembre et à l'Institut d'Astrophysique de Paris en janvier, et chaque fois, un nouveau public s'est présenté. L'idée de varier le lieu semble bonne, et sera poursuivie.

Promenades Mathématiques. Les pages du site web ont été modernisées. Le catalogue est devenu plus attrayant, avec une photo du conférencier, parfois une petite notice, des fonctionnalités de recherche améliorées.

Cap'Maths. En avril 2014, *Cap'Maths* a fait l'objet d'un audit et essuyé des critiques auxquelles il a été remédié, notamment par le recrutement d'un responsable administratif et financier. En mai 2015, après plus d'une année consacrée à la réorganisation et en négociation avec les tutelles, *Cap'Maths* redémarre pour 2 ans, jusqu'en décembre 2016 ; les difficultés administratives perdurent mettant en danger certaines actions de long terme. Une fondation, qui devra réunir des fonds, prendra sa suite comme organe national de structuration de la diffusion de la culture mathématique. La SMF doit jouer un rôle moteur dans cette aventure.

Journée Sciences et Médias, l'enjeu du numérique. À l'initiative de la SFP, des journées sur l'impact des nouveaux médias sur l'information scientifique du public ont été organisées en décembre 2012 et en janvier 2014. Une troisième journée se prépare pour 2016.

Semaine des mathématiques. La SMF a participé au pilotage de cette action de la DEGESCO [16], et a contribué à l'événement de clôture de la semaine des mathématiques : le Forum Mathématiques Vivantes à la BnF.

Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques. Dans l'édition 2015 du salon, les sociétés savantes ont renoncé à avoir un stand en propre, et vont contribuer au stand *Animath/Cap'Maths*. Néanmoins, l'organisation de séances de speed-meeting pour lycéens (sur inscription) est maintenue.

15. Bibliothèque nationale de France.
16. Direction Générale de l'Enseignement Scolaire.

Brèves de maths, mathématiques de la planète Terre. Suite à l'opération « Un jour, une brève » menée en 2013 et la publication en ligne de 5 textes par semaine sur les mathématiques de la planète Terre, la maison d'édition *Nouveau Monde* a publié une sélection d'une centaine de textes sous la forme d'un petit ouvrage grand public. Sorti fin octobre 2014, il s'en était déjà vendu un millier en janvier 2015. Par ailleurs, le blog « Brèves de Maths »[17] a été refondu dans le cadre d'un appel à projet *Cap'Maths* 2014.

Brochure « Mathématiques, l'explosion continue ». Publiée en partenariat avec la SMAI et la SFDS, avec le concours de la FSMP[18] et de *Cap'Maths*, elle est parue le 10 octobre 2013. La totalité des 20000 exemplaires tirés initialement a été distribuée en 2 mois. Un nouveau soutien du consortium *Cap'Maths* a été obtenu pour faciliter (augmenter le tirage pour en baisser le prix de revient) une réédition payante. Toutefois, en raison des difficultés rencontrées par *Cap'Maths*, cette subvention n'a pas été encore utilisée, et seul un retirage de 500 exemplaires a été effectué et vendu à 9 € pièce. Après avoir obtenu des 29 auteurs une cession de leurs droits au profit des trois sociétés, la SMF négocie la cession des droits de traduction en chinois avec Shanghai Educational Publishing House (4000 € pour un tirage de 10000 exemplaires). Les droits de traduction en italien ont été cédés gratuitement à l'Unione Matematica Italiana. Des collègues se sont portés volontaires pour des traductions en arabe (sous les auspices de la Société Marocaine de Mathématiques Appliquées), en croate et en mongol.

6. Enseignement

L'année 2014/2015 a été marquée par une activité importante pour tenter de répondre aux questions que pose la difficulté de pourvoir les postes proposés tant au CAPES qu'à l'agrégation de mathématiques. C'est en collaboration avec ses partenaires (CFEM[19], SMAI, SFDS, SIF, ...) que la SMF a travaillé tout au long de cette année pour la popularisation des mathématiques, attirer des étudiants vers les études de mathématiques.

- Réalisation du « Zoom des métiers des mathématiques et de l'informatique »[20].
- Réalisation d'une plaquette à destination des lycéennes et lycéens sur les études de maths et les métiers des maths[21].
- Participation, au sein de la CFEM, aux rencontres avec le cabinet du MENESR sur l'enseignement des mathématiques et leur popularisation[22]. Ces discussions ont été suivies par l'annonce par le MEN du « Plan Stratégie mathématiques » à laquelle la SMF a réagi[23].
- Participation au Comité de suivi de la « Stratégie mathématiques »[24].
- Contribution de la Commission Enseignement au débat sur le Socle Commun et les programmes des cycles 2, 3 et 4, participation aux rencontres avec le CSP[25] pendant l'élaboration de ces programmes.
- Co-organisation du Forum des Mathématiques Vivantes fin mars 2015[26].
- Rencontre avec la SIF à propos de l'informatique au lycée.

Par ailleurs la Commission Enseignement a travaillé sur l'enseignement des mathématiques en licence (texte en cours de finalisation). Elle étudie également la question de la nature des mathématiques discrètes qui pourraient être enseignées en licence de mathématiques (texte de réflexion en cours d'écriture).

Elle prépare une analyse argumentée des propositions du CSP publiées mi-avril et permet à la SMF de participer à la consultation en cours sur les programmes des cycles 2, 3 et 4.

7. Publications

Le fait le plus marquant de cette année est la création d'un abonnement électronique pour *Astérisque* (toutes nos autres revues ayant déjà une version électronique depuis plusieurs années). Il est

17. breves-de-maths.fr
18. Fondation Sciences Mathématiques de Paris.
19. Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques
20. Voir http://smf.emath.fr/files/zoom2.pdf
21. voir http://smf.emath.fr/content/plaquette-pourquoi-faire-des-études-de-maths
22. voir à ce sujet le texte préparatoire à ces réunions http://www.cfem.asso.fr/cfem/programme-strategique
23. http://smf.emath.fr/content/041214-palais-de-la-découverte-straté-mathématiques
24. http://www.cfem.asso.fr/liaison-cfem/lettre-cfem-mars
25. Conseil Supérieur des Programmes.
26. voir le compte rendu http://www.cfem.asso.fr/actualites/forum-mathematiques-vivantes

trot tôt pour faire un bilan de cette opération, mais elle a eu lieu de façon satisfaisante à ce jour. Nous sommes maintenant très proches d'une sortie régulière des revues, ce qui était un objectif programmé depuis longtemps et qui est atteint grâce à de sérieux efforts. Nos séries de livres se portent bien, en particulier *Documents Mathématiques* qui vient de publier rapidement les deux volumes de la correspondance Serre-Tate mais aussi la série *Panoramas et Synthèses*, malgré une diffusion encore insuffisante. Le retour à un équilibre financier est évidemment un signe très encourageant. Il faut cependant rester très vigilant sur l'évolution de l'édition scientifique qui reste incertaine voire problématique.

	Parutions 2015
Annales de l'Éns (Tome 48)	F.1, février F. 2, mai version en ligne le 29/04/2015 F. 3, été F. 4, automne F. 5, 6, décembre
Astérisque	367-368, paru 369, 370, 371, mai 372, 373, juin
Bulletin	F. 1, février F. 2, mai F. 3, automne
Mémoires	140-141, juin 142, septembre
Panoramas et Synthèses	44, mai 45, juin 46, été 47, été
Revue d'histoire des mathématiques Tome 21	F. 1, juin F. 2, novembre
Cours spécialisés	Cours Langevin automne
Documents mathématiques (2014)	13 &14 (Serre-Tate), parus Douady-Hubbard, automne Thom (œuvres complètes) vol. 1, automne
Série T	Gispert, juin Berezin, automne
Séminaires et Congrès 29	juin

8. Rapport financier, année 2014

Pour l'année 2014, l'ensemble SMF-CIRM affiche un résultat net comptable de +473 k€. Le total du chiffre d'affaires est de 2044 k€, et le montant total des subventions s'élève à 422 k€.

Pour comparaison, le résultat net était de +100 k€ en 2013 avec 1844 k€ de chiffre d'affaire et 484 k€ de subventions. Cette forte croissance du résultat cumulé doit être lue à la lumière de deux évènements majeurs relatés dans le paragraphe consacré au CIRM.

Dans les paragraphes suivants, nous présentons d'abord les finances des activités de la SMF de manière assez détaillée, puis celles des activités du CIRM de façon beaucoup plus succincte.

8.1 – La SMF

La vocation de la SMF est de mener à bien des missions que nous répartissons en trois catégories :

- assurer des services aux membres ;
- produire et vendre des livres et des revues ;
- communiquer sur les mathématiques auprès du grand public.

Le total des produits s'élève à 938 k€ (864 k€ en 2013). Le total des produits d'exploitation est de 931,5 k€, avec un chiffre d'affaires de 641 k€ (contre 576 k€ en 2013) incluant les ventes et cotisations pour 587 k€ (510 k€ en 2013). Le montant total des subventions est de 13 k€. Le total des charges est de 882 k€ (937 k€ en 2013).

La SMF présente donc un résultat positif de 56 k€ en 2014, alors que les 3 années précédentes elle était déficitaire pour plus de 70 k€. Si on fait abstraction des « opérations de régularisation » (dotations et reprises sur amortissements, variations de stock) on obtient un résultat d'exploitation de + 89,5 k€.

Dans la suite, nous détaillons un peu plus les comptes.

Produits d'exploitation et produits financiers

1. *Ventes de revues et de livres*. Le montant global est de 502 k€, contre 431 k€ en 2013. Cette forte progression est en partie due à la hausse des tarifs des abonnements et à une augmentation de la production de livres en 2013. Elle n'avait pas été complètement anticipée dans le budget prévisionnel.
2. *Cotisations et abonnements*. Le montant global est de 85 k€, contre 79 k€ en 2013. Cette augmentation est due à la hausse des tarifs : le nombre d'adhérents continue malheureusement de diminuer.
3. *Subvention*. Il s'agit d'une subvention INSMI de 13 k€. En 2013, le total des subventions était beaucoup plus important (54 k€) en raison de subventions « exceptionnelles » pour la fabrication et la diffusion de la brochure « Mathématiques, l'explosion continue ».

4. *Refacturations diverses.* Le montant global est de 42,5 k€, contre 59 k€ en 2013.
5. *Produits divers.* Le montant global de cette ligne hétéroclite est de 54,5 k€. La plus grosse partie provient de dons (37 k€, dont 25 k€ d'un particulier).
6. *Transfert de charges.* Cela correspond au reversement des salaires des personnels du CIRM détachés à la SMF. Le montant global est de 176 k€, contre 166 k€ en 2013.
7. *Produits financiers.* Il s'agit de la rémunération des fonds placés. Le montant global est de 6 k€, contre 9 k€ en 2013.
8. *Variation du stock et des encours.* Le montant global est de 59 k€, contre 41 k€ en 2013.

Charges d'exploitation

1. *Masse salariale.* Le montant des salaires et indemnités – hors charges – de l'ensemble du personnel (SMF +CIRM) est de 316 k€, contre 332 k€ en 2013. La différence s'explique par des départs à la cellule de Marseille. Il faut ajouter 127,5 k€ de charges (contre 143 k€ en 2013). Les salaires du personnel SMF détaché au CIRM nous sont intégralement remboursés (176 k€).
2. *Frais de fabrication et composition.* Tous ouvrages confondus, les frais de fabrication s'élèvent à 97,5 k€, contre 149 k€ en 2013. La différence s'explique par le passage à l'impression numérique de certaines revues, et par le coût occasionné par la fabrication de la brochure « Mathématiques, l'explosion continue » en 2013. Les frais de composition sont de 30 k€, contre 34 k€ en 2013. Le montant global de cette ligne est donc de 127,5 k€, contre 183 k€ en 2013.
3. *Honoraires, assurances, loyers.* Cette ligne comprend les honoraires pour le commissaire aux comptes et l'expert comptable (15 k€), les assurances (2 k€), les loyers versés à l'IHP et à Luminy (12,5 k€), et des « honoraires divers » (3 k€). Ces chiffres sont essentiellement les mêmes qu'en 2013. Au total, la ligne s'élève à 32,5 k€.
4. *Affranchissements et routage.* Tous envois confondus, le montant global des affranchissements est de 76,5 k€, contre 80 k€ en 2013.
5. *Impôts et taxes.* Suite à l'allègement de la taxe sur les salaires, ce poste est en nette diminution : 13 k€, contre 29 k€ en 2013.
6. *Frais bancaires et téléphone.* Le montant global est de 7 k€, contre 6 k€ en 2013.
7. *Achat de fournitures.* Le montant global est de 9,5 k€, contre 14 k€ en 2013.
8. *Vie de l'Association.* Cette ligne inclut les soutiens aux opérations scientifiques, les frais de déplacement, et divers « frais de mission ». Le montant global est de 22 k€, contre 14 k€ en 2013. La différence s'explique par une augmentation des frais de déplacement, et de plus grosses dépenses pour les « réceptions » (4 k€ contre moins d'1 k€ en 2013).
9. *Entretien, réparation, maintenance.* Le montant global est de 16,5 k€, contre 12 k€ en 2013.
10. *Dépenses diverses.* Cette« ligne » très hétéroclite inclut entre autres la sous-traitance générale (9 k€), la publicité (6 k€), diverses cotisations (5,5 k€) et les engagements de subventions (6,5 k€). Le montant global est de 33 k€.
11. *Amortissements sur immobilisations.* Cela correspond essentiellement à l'amortissement du matériel informatique. Le montant global est de 20 k€, contre 22 k€ en 2013.
12. *Provisions diverses.* Le montant total est de 81 k€, contre 51 k€ en 2013. La plus grosse partie provient de la dépréciation du stock (72 k€, contre 47 k€ en 2013). Il semble donc plus que jamais nécessaire de produire les ouvrages en un moins grand nombre d'exemplaires.

8.2 – Le CIRM

Depuis 2000, le CIRM est une Unité Mixte de Service placée sous la responsabilité conjointe du CNRS-INSMI et de la SMF. Une convention signée le 7 décembre 2010 a eu pour objet de fixer la répartition des domaines d'intervention entre l'unité CNRS et la SMF : par l'intermédiaire du CNRS, le CIRM apporte le contenu scientifique des rencontres mathématiques, par ailleurs le CIRM confie à la SMF l'organisation et la gestion des rencontres mathématiques.

L'exercice 2014 du CIRM est excédentaire de 417 k€, contre 173 k€ en 2013. Toutefois, si on fait abstraction des « produits exceptionnels », le résultat d'exploitation n'est que de 16 k€.

Traditionnellement, les excédents éventuels sont mobilisés pour autofinancer l'entretien des installations (investissements non couverts entièrement par les subventions). Ces excédents contribuent aussi à alimenter le fonds de roulement du CIRM.

Cependant, l'essentiel des excédents de 2014 va être affecté à deux projets de grande ampleur. (C'est le premier des « évènements majeurs » mentionnés dans l'introduction du rapport financier.)

D'une part, le CIRM s'est engagé à contribuer à hauteur de 300 k€ au projet 2R-CIRM, qui vise à la restructuration et à la rénovation de l'Annexe (bâtiment CNRS). Ce projet est inscrit au Contrat de Plan État Région (le budget total est de 2,6 M€). L'engagement du CIRM dans le projet a été voté au bureau de la SMF le 3 octobre 2014.

D'autre part, le CIRM a prévu d'investir 120 k€ pour la construction d'un local technique (livraison prévue en 2017).

Les produits d'exploitation s'élèvent à 1843 k€ en 2014 (contre 1821 k€ en 2013), auxquels il faut rajouter 4,5 k€ de produits financiers et 543 k€ de « produits exceptionnels » (216 k€ en 2013). Ces derniers s'expliquent essentiellement par 222 k€ de quote-part de subvention d'investissement et 320 k€ de reprise de provision suite à la résolution du litige PARFIP (le deuxième des « évènements majeurs » mentionnés dans l'introduction).

Les produits comprennent des ressources propres – 1403 k€ de chiffre d'affaires – ainsi que des subventions de différents organismes (Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, université d'Aix-Marseille, Conseil Régional, Ville de Marseille) s'élevant à 409 k€. Le chiffre d'affaires est en hausse par rapport à 2013 (1359 k€), mais les subventions sont en baisse (434 k€ en 2013).

Les charges d'exploitation s'élèvent à 1827 k€ contre 1868 k€ en 2013. Il faut y ajouter 146 k€ de « charges exceptionnelles ». Celles-ci proviennent essentiellement de la résolution du litige PARFIP, qui s'est soldé par le versement d'une indemnité de 140 k€.

8.3 – Conclusion

L'ensemble CIRM-SMF affiche un résultat positif de 473 k€. Hors « produits exceptionnels », le résultat d'exploitation du CIRM est de +16 k€. La SMF est quant à elle excédentaire pour 56 k€. Le redressement des comptes de la SMF (après 3 années de déficit) s'explique par plusieurs facteurs : un allègement de 30 k€ de la masse salariale, des ventes d'ouvrages plus importantes que prévu, une augmentation des tarifs, des économies réalisées sur certaines lignes (dont 51,5 k€ sur les frais de fabrication), et un don de 25 k€ d'un particulier. Il importe cependant de rester très vigilants : le nombre d'adhésions continue de diminuer, et l'équilibre financier du secteur des publications reste fragile.

Le rapport moral fait le bilan de l'ensemble des activités menées au sein de la SMF depuis un an. Il est le reflet du travail effectué par le personnel de la SMF et de très nombreux bénévoles, que nous remercions. Citons en particulier les membres du Bureau, du Conseil d'Administration et du Conseil Scientifique de la SMF, les directeurs et les membres de nos comités de rédaction, et tous ceux que nous sollicitons, ponctuellement ou régulièrement, et qui offrent leur temps et leurs compétences avec une très grande générosité. La SMF tient tout particulièrement à remercier D. Barlet et P. Pansu qui quittent le conseil après des mandats de 3 ans bien remplis et entamés sous la présidence d'Aline Bonami ; leur compétence et leur dévouement sont pour beaucoup dans le redressement de la SMF qui est amorcé et qui doit se poursuivre.

Ce rapport a été rédigé par B. Adamczewski, D. Barlet, G. Bourgeois, P. Foulon, L. Guillopé, A. Grigis, C. Imbert, É. Matheron, P. Pansu, A. Pasquale, M.-F. Roy, S. Seuret, A. Szpirglas avec l'aide de S. Albin, N. Christiaën, C. Munusami et C. Ropartz. Remercions enfin F. Petit pour sa relecture bienveillante.

L'IMPACT SOCIO-ÉCONOMIQUE DES MATHÉMATIQUES

Les maths, un moteur de l'économie ? Encore faut-il le prouver. Une enquête récente fait un pas dans ce sens. Au-delà des chiffres qui ont attiré l'attention des médias, l'enquête est une plongée dans la relation complexe qu'ont les entreprises avec les mathématiques. L'AMIES la complète grâce à son expérience acquise sur le terrain.

Étude d'impact : les mathématiciens communiquent

• P. Pansu

Mercredi 27 mai 2015, 11h, Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche. Conférence de presse. Les représentants de la communauté mathématique sont présents, mais où sont passés les journalistes ? Moment d'angoisse pour Richard Fontanges, chargé de projet à Agence pour les Mathématiques en Interaction avec l'Entreprise et la Société (AMIES) et maître de cérémonie. Heureusement, les journalistes arrivent. Ils sont vingt-deux à s'être inscrits – de Radio France à l'Obs en passant par La Croix ou le JDD. La séance peut commencer.

Figure 1 – Les journalistes étaient devant, au centre

© MENESR – XR Pictures

1. Une enquête nécessaire

C'est Cédric Villani qui présente le scoop du jour : la sortie des résultats de l'Enquête sur l'Impact Socio-Économique des Mathématiques (EISEM) en France, commandée au cabinet d'audit CMI par AMIES, en partenariat avec la Fondation Sciences Mathématiques de Paris (FSMP) et la Fondation Mathématique Jacques Hadamard (FMJH) et avec le soutien de la plupart des *LabEx* de mathématiques. En quelques mots soigneusement pesés, il explique pourquoi cette enquête était nécessaire. Pour attirer des vocations, pour obtenir des financements (directeur de l'Institut Henri Poincaré, Cédric Villani est bien placé pour savoir qu'ils n'arrivent pas tout seuls), la mathématique (c'est son mot) a besoin d'un regard extérieur positif. Ce regard évolue, les succès de l'école mathématique française y sont pour quelque chose, mais aussi, la perception naissante de l'utilité des mathématiques, de leur rôle dans les technologies qui touchent le grand public. Au-delà d'un catalogue d'exemples, des études quantitatives et économiques sont nécessaires pour convaincre. Par exemple, pour convaincre des entreprises d'embaucher des mathématiciens.

Cédric Villani souligne la difficulté de l'exercice. Il s'agit de mesurer l'immatériel, on est obligé de délimiter un périmètre alors que mathématique et informatique, par exemple, sont en interaction constante. Il cite les études qui ont précédé l'EISEM dans d'autres pays. Notamment celle de Deloitte, en

Angleterre, dont CMI s'est inspiré pour pouvoir faire des comparaisons. Par exemple, la France est-elle très en-dessous du Royaume-Uni en matière d'impact économique ? C'est un pays où l'incitation à la recherche finalisée est très forte et un paradis de la finance. De mauvaises nouvelles auraient pu sortir de l'EISEM, la communauté mathématique a pris ce risque, en laissant le cabinet CMI entièrement libre de ses conclusions.

Ce dernier les présente après avoir fourni des détails sur la méthodologie et les précautions à prendre dans l'interprétation (voir plus loin notre analyse détaillée).

Figure 2 – J. Koeltz, J. Dolbeault, S. Cordier, B. Desjardins, R. Fontanges

© MENESR – XR Pictures

2. Florilège de questions et de réponses

Après la présentation des résultats de l'étude par CMI, vient la séance de questions, qui, comme de coutume, a un peu de peine à démarrer. Les premières viennent plutôt de scientifiques. Julie Koeltz (CMI), Stéphane Cordier (AMIES), Jean Dolbeault (FSMP) et Benoît Desjardins (FMJH) apportent des réponses variées – parfois complétées par l'intervention de mathématiciens présents dans l'amphithéâtre –, associant résultats de l'étude, comparaisons internationales et exemples d'actions en cours.

Est-ce leur côté « tête bien faite » (plutôt que « tête bien pleine ») qui fait que les jeunes formés en mathématiques intéressent les entreprises ?

Stéphane Cordier. C'est ce qui semble se produire en Allemagne, où l'industrie sait recruter des mathématiciens de profils divers (dont deux sur les trois lauréats du prix de thèse AMIES).

Julie Koeltz. Mais des savoirs et compétences mathématiques spécifiques sont de plus en plus recherchés.

Comment envisagez-vous de développer l'interaction entre mathématiques et informatique ?

Jean Dolbeault. En recherche, l'imbrication est déjà très forte.

Fatiha Alabau (présidente de la SMAI). Dans les métiers, c'est encore plus vrai. C'est pourquoi l'ONISEP vient, avec le concours de quatre sociétés savantes [1], de publier un *Zoom sur les métiers des mathématiques et de l'informatique*.

Sur certains points (compter les personnes ayant une formation avancée en mathématiques), le périmètre de l'étude est tellement vaste qu'il inclut toutes les sciences. On s'étonne même que l'impact ne soit pas plus fort.

Julie Koeltz. Certains secteurs sont peu pénétrés par les mathématiques : certains types de services, par exemple. Le périmètre est large car, comme Deloitte, on a compté les postes et examiné les parcours de formation qui y conduisent. Ils sont très variés.

Les journalistes se lancent à leur tour, mais plutôt que de se tourner vers le panel, ils adressent leurs questions directement à Cédric Villani, qui répond, tout en rendant la parole au panel et à la salle (Fatiha Alabau, Martin Andler, président d'Animath, et Pierre Arnoux, vice-président de la Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques, en particulier).

Quel était l'objectif de l'étude ? Voir si les mathématiques sont rentables ? L'étude ne semble pas mesurer une évolution

Cédric Villani. L'enquête est une photo, un instantané. C'est la première faite en France, elle ne permet pas de mesurer l'évolution, mais je peux témoigner que cette dernière est sensible. Quant à l'objectif de l'étude, il ne s'agissait pas de recenser tous les métiers utilisant des mathématiques, mais ceux sur lesquels l'impact est fort. Là, la diversité est grande (voir le *Zoom* [2]). En outre, on voulait savoir ce qu'il faut faire pour augmenter l'impact. La photo instantanée est nécessaire, pour indiquer des tendances, des domaines porteurs. On en a besoin

1. La SFdS, la SIF, la SMAI et la SMF
2. Zoom sur les métiers des mathématiques et de l'informatique

pour demander aux entreprises comment elles font des mathématiques un atout.

Une étude récente sur les compétences des collégiens m'inquiète. Les collégiens accrochent-ils aux maths ?

Martin Andler. Oui, le niveau moyen des jeunes français en mathématiques est faible, même parmi ceux que la discipline intéresse. On sait faire émerger quelques centaines de personnes capables de faire de la recherche. L'étude montre qu'il faut préparer une population bien plus grande à des études et des métiers à composante mathématique. On y travaille.

Pierre Arnoux. Le cours de maths est, après l'Éducation Physique et Sportive, le plus apprécié des collégiens [3]. On n'a pas de problème d'attractivité, mais un problème d'enseignement, corrélé à la formation des enseignants. La grande majorité des enseignants du primaire n'ont aucune formation scientifique. La mention de licence qui permettait aux universités d'attirer des scientifiques vers ce métier rencontre de très grandes difficultés avec le ministère. En outre, une grande partie des candidats au CAPES de mathématiques ne proviennent pas d'une licence de mathématiques.

Quels sont les besoins en mathématiciens ?

Julie Koeltz. L'enquête n'a pas permis de les quantifier, car les entreprises elles-mêmes en sont incapables actuellement. Néanmoins, des équipes de mathématiques se montent à Safran, Bell Labs, Veolia, Huawei ...

Stéphane Cordier. Quant aux start-up fondées par des mathématiciens, c'est un phénomène qui s'amplifie : il y en a eu 20% de plus en 2014.

3. Attirer l'attention des décideurs

C'est Laurent Gouzènes, président du comité Développement et Valorisation de la Recherche du MEDEF, qui a le mot de la fin.

Pour lui, la question de savoir si, en France, on sait alimenter tous les besoins en mathématiques est essentielle. Son organisation souhaite porter le message que les mathématiques sont un outil capacitif, i.e. qui permet aux jeunes de trouver un emploi intéressant. Elles ne doivent pas être réduites à un simple exercice intellectuel, ni à un outil de sélection. Il offre de se déplacer dans les régions pour convaincre universitaires, enseignants et petites et moyennes entreprises, en partenariat avec AMIES.

FIGURE 3 – Laurent Gouzènes

© MENESR – XR Pictures

La conférence de presse n'est qu'un élément d'une campagne. Il s'agissait de faire date pour attirer l'attention de la presse et, par contrecoup, des décideurs politiques et industriels. AMIES a pris la précaution de remettre un dossier à l'avance, sous embargo, à des journalistes intéressés, ce qui a permis la parution de plusieurs articles de qualité dans la presse écrite et sur internet dès le soir du 27 mai. Un petit effet sur le monde politique a pu être mesuré le lendemain même : au salon de la Culture et des Jeux Mathématiques, les représentantes de la Mairie de Paris et du Conseil Régional d'Île-de-France ont inséré dans leurs discours des données tirées de l'enquête, en citant la presse écrite. Toutefois, ce 27 mai, c'était la consultation sur les programmes de l'école et du collège qui faisait la une. L'interférence a peut-être été constructive.

4. C'était ma première conférence de presse

Je n'aurais jamais pensé que la communauté mathématique m'offrirait un jour un tel spectacle, un peu cocasse mais touchant. Ce jour-là, ses représentants étaient ponctuels, appliqués, et surtout, sincères. Chacun faisait de son mieux, persuadé que si le message passait bien, il y aurait un effet sur les emplois futurs de nos étudiants et doctorants.

3. Voir par exemple `http://educ-eval.pleiade.education.fr/pdf/dossier104/dossier104.pdf`

Rapport national sur l'impact socio-économique des mathématiques en France : que dit l'enquête ?

• P. Pansu

Commandée par AMIES, en partenariat avec la FMJH, et la FSMP, et avec le soutien des LabEx de mathématiques, l'Étude d'Impact Socio-économique des Mathématiques en France (EISEM) a enfin été rendue publique le 27 mai dernier.

Ce document de soixante et une pages a été élaboré par CMI [1], un cabinet de conseil en stratégie. Il s'adresse aux décideurs, politiques et industriels. Le style s'en ressent : c'est une série de messages brefs et percutants. CMI n'a eu que quatre mois pour réunir les éléments du rapport. Le cabinet a fouillé dans les données statistiques de l'INSEE et a procédé à une quarantaine d'entretiens avec des experts dont la liste, fournie en annexe, comporte des personnes occupant des fonctions élevées dans le monde académique et l'industrie, ainsi que des mathématiciens, académiques et industriels.

Le rapport comporte quatre parties. La première décrit en quelques chiffres le potentiel français en mathématiques avancées : recherche, collaborations industrielles existantes, formations. La seconde produit à partir des données statistiques une mesure de l'impact, deux chiffres que la presse a abondamment repris. La troisième, plus qualitative, synthétise les entretiens. La quatrième apporte des recommandations. Des annexes donnent des détails méthodologiques. En tête du document figure le traditionnel résumé. Le dossier de presse téléchargeable sur le site d'AMIES [2] comprend en outre des synthèses dans plusieurs formats.

1. L'excellence de la recherche confirmée

Bien que tournée vers l'extérieur (les décideurs), la première partie de l'étude contient des données bien utiles au mathématicien lorsqu'il s'aventure à parler de mathématiques et de métiers devant un large public.

La place de l'école française dans la planète mathématique est enviable : entre 2e et 3e. Au sens de la bibliométrie, elle a reculé ces dix dernières années, du fait de la montée en puissance des pays émergents, mais d'autres indicateurs, comme les invitations aux congrès internationaux, indiquent plutôt un renforcement.

Notre école est bien présente dans toutes les sous-disciplines imaginables, y compris sur le front des collaborations industrielles. Le rapport estime à un dixième la fraction des mathématiciens impliqués dans de telles collaborations, et de 1 à 5% leur contribution aux budgets des laboratoires. C'est beaucoup (plus que la moyenne des organismes de recherche) pour certains laboratoires, mais trop peu pour beaucoup d'autres. Cela traduit le manque de moyens et les nombreux autres obstacles à la collaboration entre laboratoires et entreprises, notamment les plus petites d'entre elles, je reviendrai sur ce point. Il y a tout de même de belles réussites, je pense aux structures récemment créées pour leur faciliter l'accès à de l'expertise mathématique, comme la Maison de la Modélisation et de la Simulation en Nanosciences et Environnement [3] à Grenoble et le Centre de Modélisation et de Simulation de Strasbourg [4].

1. http://www.cmi-strategies.fr
2. http://www.agence-maths-entreprises.fr/a/eisem
3. http://www.maimosine.fr/
4. http://www.cemosis.fr/

2. Une assurance contre le chômage

Un chiffre inattendu, sans doute un peu surestimé, c'est le nombre de personnes en activité ayant un niveau master en mathématiques : 99000. Une petite moitié sont enseignants, ce qui laisse beaucoup de non-enseignants. Le mathématicien est un oiseau rare (on estime à 4000 le nombre de personnes ayant une activité de recherche académique en maths en France), mais il fait des petits. Cette partie de la population constitue le vivier naturel des associations professionnelles et des sociétés savantes de mathématiques.

Le grand public voit les mathématiques avancées comme une voie très étroite. Ce n'est pas faux, mais on compte tout de même 3300 diplômés par an, qui, pour les trois quarts, choisissent un emploi dans le privé. Les masters de mathématiques se classent en tête de toutes les disciplines en matière d'employabilité (le taux de chômage des diplômés est très faible) et de salaire médian à l'embauche [5]. Ces données reposent certes sur des enquêtes sous-traitées aux universités, avec des taux de réponse assez faibles. Toutefois, d'une année à l'autre, le score élevé persiste, ce qui incite à la confiance : avoir un master de maths en poche, c'est une assurance contre le chômage. En outre, seuls 17% des diplômés déclarent que leur métier dans l'entreprise est informaticien. Cela va à l'encontre d'une idée reçue, celle que la demande en ingénieurs informaticiens est telle qu'elle absorbe une bonne part des diplômés pour chacune des disciplines scientifiques.

On dispose d'une enquête précieuse sur les débouchés des docteurs de 2013 en Île-de-France, avec un taux de réponse élevé [6]. En 2015, AMIES a obtenu les résultats pour les docteurs en mathématiques [7]. Pour eux aussi, le taux de chômage est faible. Toutefois, la grande majorité d'entre eux est en postdoc. Il faudrait donc prolonger le suivi de cette cohorte jusqu'à stabilisation dans une profession pour avoir une idée de l'insertion professionnelle des quelque 500 docteurs en mathématiques formés chaque année.

3. Comment ça se mesure ?

Comment compter le nombre d'emplois ayant un rapport avec les mathématiques ? Dans la deuxième partie de l'étude, CMI suit la méthode inaugurée par Deloitte au Royaume-Uni en 2012 : compter les personnes ayant suivi au moins quatre heures de cours de maths par semaine, pendant une année, dans l'enseignement supérieur. Le mérite de ce choix, c'est qu'il permet des comparaisons internationales, avec le Royaume-Uni, et aussi les Pays-Bas et l'Australie où des enquêtes similaires ont été faites. On peut cependant objecter que ce qui est mesuré ainsi, c'est le poids des mathématiques dans les formations plutôt que dans l'activité quotidienne des salariés. Que les mathématiques pèsent lourd dans le système éducatif français, ce n'est pas un scoop. CMI a affiné son calcul en appliquant une pondération à chaque profession, et en répartissant les professions dans quatre grandes classes en fonction de la nature de l'activité : Mathématiques avancées (manipulation dans le cadre professionnel d'outils mathématiques issus de la recherche), Finance, Informatique, Autres. La pondération est fabriquée (un peu à l'estime) à partir de l'activité et du poids de la formation mathématique. Enfin, pour évaluer la valeur ajoutée apportée par les mathématiques, CMI a combiné sa pondération avec des données publiées par l'INSEE :

- nombre d'emplois par profession (traduire « catégorie socio-professionnelle ») ;
- distribution de chaque catégorie socio-professionnelle suivant les secteurs et sous-secteurs de la Nomenclature des Activités en France,
- contribution de chaque sous-secteur à la valeur ajoutée.

4. Bonnes pour l'économie

Avec la méthode Deloitte, on trouve que 9% des emplois sont impactés par les mathématiques, ce qui place la France à peu près au même niveau que le Royaume-Uni (10%). Autrement dit, dans un wagon de RER bondé à 18h, on trouve une cinquantaine de personnes pour qui les maths comptent. Les 2,4 millions d'emplois en question se répartissent presque également entre les quatre classes définies

5. `http://www.letudiant.fr/etudes/fac/enquete-2015-comment-s-inserent-les-diplomes-apres-la-fac.html` et le lien vers les donnés brutes.
6. `http://adoc-tm.com/2014rapport.pdf`
7. `http://www.agence-maths-entreprises.fr/a/?q=fr/node/489`

ci-dessus : Mathématiques avancées, Finance, Informatique, Autres. Les utilisateurs de mathématiques avancées (hors finance et informatique, donc) sont 700000 dans le pays. Si les mathématiques ne jouent jamais seules, elles ont donc un impact en propre, qui n'est pas entièrement recouvert par ceux de l'informatique ou de la finance. D'après l'étude, la valeur ajoutée apportée par les mathématiques représente 15% du produit intérieur brut, chiffre en constante progression de 2009 à 2012. Le chiffre britannique est un peu plus élevé (16%), ce qui reflète la part plus grande occupée par la finance et l'assurance dans l'économie outre-Manche. Depuis des années, devant toutes sortes de publics, je clame que les maths sont partout [8], mais invisibles. C'est évidemment faux. Les maths ne sont pas partout, mais elles sont indirectement dans 15% de l'économie du pays.

5. Au cœur des technologies futures

Des entretiens qu'il a réalisés, CMI a tiré un riche portrait des modes d'intervention des mathématiques dans les problèmes industriels et de la façon dont les entreprises s'en emparent. Le panel d'experts a considéré que 37 des 85 technologies identifiées comme cruciales pour l'avenir dépendaient de progrès en mathématiques. Le rapport détaille deux de ces technologies : les réseaux électriques intelligents et les objets communicants. Plus loin, il développe, dans cinq secteurs d'activité, les domaines traditionnellement consommateurs de mathématiques, les nouveaux enjeux, et la nature des problèmes mathématiques en jeu. On y apprend que l'accroissement de la masse des données à protéger et leur hétérogénéité constituent un nouveau défi pour la cryptographie. Que la manipulation d'objets nanométriques nécessite de fusionner les mesures faites par plusieurs caméras et capteurs, ce qui relève de l'apprentissage statistique.

Même s'il a un petit air de plaidoyer pro domo, cet argumentaire est précieux pour le mathématicien qui doit répondre à la question : à quoi servent la recherche et la formation en mathématiques avancées ? Les champs d'application retenus dans le rapport touchent la vie quotidienne et sont aisés à décrire. Tout le monde peut comprendre que les objets connectés ne sont pas que des gadgets, mais vont devenir des assistants de vie d'une population vieillissante. Les mathématiques jouent un rôle dans la collecte et l'analyse des données qu'ils fournissent, puis, à plus long terme, dans leur exploitation pour personnaliser des traitements médicaux.

6. Où faire porter les efforts ?

Le panel d'experts a identifié cinq champs de compétences à dominante mathématique qui reviennent dans de nombreux secteurs :

- le traitement du signal et l'analyse d'images ;
- la fouille de données (data mining) [9] ;
- la modélisation, la simulation et l'optimisation ;
- le calcul intensif (high performance computing) ;
- la sécurité des systèmes d'informations et la cryptographie.

Dans la suite de ce dossier, on verra comment les centres d'intérêt des entreprises dans le cadre des programmes AMIES se répartissent entre ces champs.

7. La relation aux mathématiques des entreprises

La relation aux mathématiques des entreprises est diverse : du simple recours à des logiciels truffés de maths à la constitution de véritables équipes de mathématiciens au service de l'ensemble de la R&D. Le rapport en dresse une typologie saisissante, qui donne au profane l'impression que chaque entreprise a sa culture, et qu'il est malaisé d'apporter des réponses à ses besoins. On lit aussi un portrait robot du jeune expert rêvé, à la fois très pointu en maths et capable de parler la langue des ingénieurs et de gérer un projet. Où trouver la perle rare ? C'est là que la diversité thématique et géographique des formations universitaires leur nuit : face à cette offre multiforme, les recruteurs se rabattent sur les filières qu'ils connaissent. Je ne rends pas suffisamment justice à cette partie du rapport, véritable exploration des stratégies d'entreprises sous l'angle de l'utilisation des mathématiques.

8. `https://www.scientipole-savoirs-societe.fr/Des-Maths-partout/Exposition`
9. Voir le dossier La révolution des big data de la *Gazette* 144.

8. Conseil en stratégie

CMI conclut par un diagnostic et des recommandations, c'est son fond de commerce.

Pour le cabinet, les points faibles de la situation française sont

- la structuration dans la relation recherche-industrie ;
- la lisibilité du dispositif d'enseignement supérieur et de recherche ;
- l'attractivité des filières d'enseignement en mathématiques et des parcours en entreprise pour les docteurs ;
- le suivi des carrières mathématiques en entreprises.

Ses recommandations sont nombreuses et détaillées, en voici un échantillon.

Pour renforcer les relations recherche-industrie, CMI préconise de multiplier les structures comme MaiMoSiNE, et d'encourager les mathématiciens à participer aux Instituts Carnot, aux sociétés d'accélération du transfert de technologies, aux pôles de compétitivité régionaux. Le rapport souligne un point qui concerne l'ensemble des mathématiciens appelés à faire des évaluations : l'importance de la prise en compte par les instances qui évaluent les chercheurs et les laboratoires du travail accompli en collaboration avec le monde économique.

Les labels décernés aux docteurs, comme le Certificat de Compétences en Calcul Intensif [10] pourraient être généralisés à d'autres compétences répondant à des besoins.

Les dispositifs comme les bourses Conventions Industrielles de Formation par la Recherche (CIFRE) ou le doctorat-conseil ne demandent qu'à être davantage utilisés en mathématiques (il en a été question lors de la dernière journée annuelle de la SMF). Cela ne doit pas être si simple, mon département (pourtant gros) a un contrat CIFRE par an, et n'a jamais eu de doctorant-conseil.

Pour les entreprises qui le peuvent, le suivi des compétences mathématiques consiste à identifier les personnes stratégiques par leur savoir-faire et à leur donner les moyens d'entretenir le niveau d'expertise nécessaire.

9. Cela n'arrive pas qu'aux autres

Tout mathématicien peut trouver des enseignements dans le rapport sur l'impact socio-économique des mathématiques. Même lorsque l'on n'a pas l'occasion de travailler sur des problèmes d'intérêt industriel, on peut être amené à enseigner dans des filières professionnalisantes, dans des formations d'ingénieurs. Plus couramment, on peut être sollicité pour parler des formations (qui n'a jamais fait les journées portes ouvertes dans son université ou son lycée ?) et des métiers (qui n'a jamais pris la parole dans un forum d'orientation ?). Sans aller jusqu'à donner des chiffres précis et à jour, on peut difficilement éviter d'esquisser le paysage des études, des métiers et de leur utilité sociale, car le public en est friand. Qui sait, c'est parfois ainsi qu'on donne envie à un lycéen de tenter sa chance en maths...

Pierre Pansu

Université Paris-Sud

Pierre Pansu est professeur. Il a été vice-président de la SMF de 2012 à 2015.

Ce texte a été rédigé avec l'aide de Gaël Octavia, responsable de la communication de la FSMP.

10. http://www.genci.fr/fr/content/promotion-du-calcul

Pour en savoir plus sur l'Agence Maths-Entreprises française (AMIES)

• R. Fontanges
• H. Pajot

L'AMIES est un réseau national s'appuyant sur les laboratoires de recherche en mathématiques au sein des universités ou des grandes écoles, pour mettre en correspondance les problématiques industrielles et leur formalisation et résolution en termes mathématiques. Créée au moment du programme d'investissement d'avenir PIA1, l'Agence Maths-Entreprises, LabEx piloté par le CNRS en partenariat avec l'université de Grenoble et Inria, conduit deux missions principales :

- proposer et soutenir des programmes, en formation et en recherche, visant à une meilleure mobilisation des mathématiciens vers les entreprises,
- offrir aux entreprises, aux chercheurs et aux étudiants une visibilité des opportunités et des interactions qui existent dans ce domaine.

1. Des initiatives nombreuses pour un rôle de facilitateur

AMIES encourage les entreprises à présenter des sujets d'étude auxquels les mathématiques tenteront d'apporter des réponses, et les aide dans la démarche. Ceci permet de mieux appréhender quantitativement et qualitativement les problématiques industrielles émergentes et d'en déduire les expertises mathématiques à mobiliser dès aujourd'hui pour contribuer aux innovations de demain. Les formats des projets entre mathématiciens en milieu académique et les entreprises sont divers pour permettre de s'adapter aux besoins de ces dernières : d'une question de pertinence scientifique qui peut être résolue lors d'un simple échange avec un facilitateur AMIES, à l'amorçage d'un projet de collaboration de quelques mois, ou un sujet de thèse qui dure 3 ans, voire un recrutement qui s'inscrit dans la durée de l'entreprise. AMIES propose ainsi différents programmes :

- les journées de Rencontres Maths-Industrie, en lien avec la SMAI, ou avec Inria, qui permettent d'exposer un problème devant un panel de chercheurs et de doctorants, en vue d'obtenir des conseils en « live »,
- les Semaines d'Étude Maths-Entreprise (SEME), qui offrent une formule de réflexion plus longue à des groupes de doctorants qui s'attachent à un problème une semaine durant pour en faire une restitution le cinquième jour devant les industriels,
- les Projets Exploratoires Premier Soutien (PEPS) pour réaliser une étude approfondie sur un sujet bien défini.

La mission ainsi couverte par un laboratoire de mathématiques va du conseil scientifique, à la mise en place d'un stage, d'une thèse, ou d'un partenariat spécifique. AMIES peut prendre partiellement en charge le coût d'intervention académique. Les moyens mis en œuvre par AMIES sont multiples.

- Les facilitateurs AMIES interprètent en termes mathématiques la problématique industrielle, qui sera soit déjà couverte par des outils accessibles, soit nécessitera des travaux spécifiques, soit abordera des horizons nouveaux requérant des travaux de recherche.
- Des ressources spécialisées sont mobilisées ponctuellement (doctorants-conseil, chercheurs, stagiaires) ou sur la durée (Thèses, Post-Doc, CDD, CDI).
- Des vitrines sur l'offre mathématique sont déployées (Forum Maths-Entreprises, Publications, Études, Formations). C'est dans cette dernière rubrique que l'on peut citer l'EISEM, qui a été rendue publique en mai 2015. Commanditée par AMIES, l'étude a été réalisée de façon indépendante, suite à un appel d'offre public, par le cabinet de conseil en stratégie CMI [1].

1. voir la page Facebook EISEM2015.

Toutes ces actions mobilisent à la fois des chercheurs, des ingénieurs en entreprise – ou responsables R&D –, et des doctorants et étudiants. En encourageant et en suivant ces différents projets, il devient ainsi possible d'identifier les domaines scientifiques générant un impact économique au sein de l'entreprise, impact au présent ou dans un avenir proche. Cela provoque également un regard différent de tous ces acteurs sur le rôle que peuvent jouer les mathématiques appliquées ou fondamentales sur la société. Ainsi à mi-2015, et depuis sa création, AMIES a participé au financement de 39 projets exploratoires (PEPS), et le nombre par année est en augmentation. La qualité scientifique y est exigée, ainsi que l'implication effective de l'entreprise et l'évaluation de l'impact économique pour cette dernière. Il est ainsi possible d'observer en direct les compétences mathématiques permettant de répondre aux attentes d'innovation et de compétitivité des entreprises. Quant aux SEME, elles font le tour des universités de France et depuis la création jusqu'à mi-2015, treize ont été organisées, avec une cadence moyenne d'une par trimestre universitaire. La prochaine se déroulera fin septembre à Besançon. Encadrant ou doctorants, venez vous rendre compte !

Figure 1 – Tour de France des projets AMIES

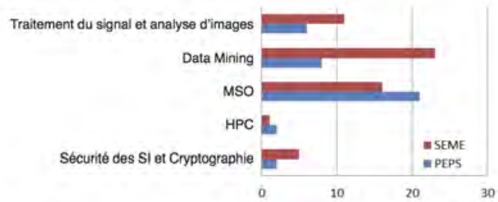
2. AMIES et l'étude EISEM

Il est intéressant de situer les thèmes d'étude avancés par les entreprises sur une échelle de comparaison nationale, ce que permet maintenant l'étude EISEM. Au cœur de son analyse, ce rapport souligne le rôle essentiel des mathématiques dans le développement des entreprises, un rôle appelé à se renforcer via la maîtrise par les entreprises de tout ou partie de cinq champs de compétences stratégiques embarquant des mathématiques fondamentales et appliquées (listés ici sans valeur hiérarchique) :

- traitement du signal et analyse d'images ;
- Data Mining (statistiques, analyse de données et apprentissage) ;
- MSO (Modélisation - Simulation - Optimisation) ;
- HPC (« High Performance Computing » ou calcul haute performance) ;
- sécurité des systèmes d'informations et cryptographie.

Ces domaines sont naturellement en interaction mutuelle et ouverts à toutes les disciplines scientifiques. La maîtrise de ces champs de compétences par les entreprises est vue comme essentielle pour leur permettre de relever les défis industriels actuels et futurs, spécifiques ou non à leur secteur d'activité, et rester compétitives. Grâce au retour d'expérience apporté par les PEPS et les SEME initiés par AMIES, il est possible de rattacher les demandes des entreprises à ces domaines. Sur 39 PEPS expertisés et soumis depuis la création d'AMIES en 2011, et sur 57 sujets proposés par des entreprises lors des 13 SEME écoulées depuis 2011, les répartitions sont les suivantes :

Figure 2 – Ventilation des domaines d'expertise dans les projets AMIES.



Les PEPS reflètent essentiellement des préoccupations actuelles de développement et de production au sein des entreprises, alors que les SEME, qui par nature dévoilent des sujets plus « amont » que les PEPS, montrent clairement l'intérêt présent et nouveau pour le « Big Data » [2].

Le constat d'AMIES rejoint celui de l'étude réalisée par CMI : les mathématiques sont un formidable vecteur de croissance pour les entreprises !

2. Voir le dossier dans la *Gazette* 144.

3. Quelques exemples de sujets présentés lors des Semaines d'Étude Maths-Entreprises

Ces travaux sont par nature des réflexions « amont » des entreprises. Les sujets ont été publiés sur les sites des laboratoires organisateurs et peuvent être cités à titre d'exemple de l'utilité reconnue des mathématiques pour répondre à des problèmes industriels. Il ne s'agit bien entendu que d'un échantillon, qui reste néanmoins représentatif des attentes fortes des entreprises :

- conception d'un modèle statistique de freinage d'une voiture, proposé par Automotive Data Access ;
- étude du niveau vibratoire et des températures d'huile d'un moteur turbofan d'avion civil en conditions opérationnelles, proposé par Safran ;
- classification de courbes et de données issues de l'aéronautique, proposé par Airbus ;
- application du compressed sensing hors du cadre classique du traitement d'images, proposé par Airbus ;
- optimisation de trajectoire pour la navigation bathymétrique, proposé par iXBlue ;
- pattern matching appliqué à un processus markovien, proposé par IBM France ;
- identification de la solution incompressible issue d'un calcul pseudo-compressible, proposé par Hydrocéan ;
- définition d'un schéma numérique robuste et précis pour l'approximation d'un modèle de désorption transitoire, proposé par l'IFPEN ;
- modèles de prévision à très court terme de la disponibilité de vélos offerts en libre service dans les villes, proposé par Qucit ;
- analyse, critique et amélioration d'un modèle mathématique de décharge à bioréacteur, proposé par See-∂.

Il est à noter la représentativité pour moitié des PME, face aux grands groupes industriels. Si l'on compare cette quote-part aux projets présentés pour la France dans le rapport de l'European Science Foundation en 2011 [3], ceux-ci étaient trustés par les grands groupes.

4. Quelles mathématiques et quels mathématiciens pour les entreprises ?

Il faut d'abord faire attention à certains préjugés. Collaborer avec une entreprise n'est pas pour un mathématicien vendre son âme au diable, ou plutôt vendre la recherche publique au privé. Quand un collègue accepte de collaborer avec une entreprise, il le fait parce que cela l'intéresse scientifiquement. Il ne perd pas sa liberté de faire de la recherche comme il lui plait. Il a accepté de relever un défi (avec le concours des ingénieurs ou chargés de R&D de l'entreprise) et de résoudre les problèmes posés avec les idées et techniques qui lui semblent les plus appropriées. Le but n'est pas de faire financer la recherche fondamentale par des sociétés privées, mais de faire bénéficier de notre savoir-faire les entreprises (petites ou grosses) qui ont besoin de mathématiques afin de faire sauter des verrous technologiques.

Par ailleurs, les mathématiques applicables ne sont pas les seules mathématiques appliquées. Des théories abstraites comme la topologie algébrique peuvent être utiles pour résoudre des problèmes industriels, voir le survol de R. Ghrist Barcodes : *The persistent topology of data* [4]. Un autre exemple a été donné lors de la journée annuelle de la SMF, comment la géométrie des sphères de Lie et l'analyse sur les groupes de Lie peuvent aider pour la conception des vélos du tour de France… Évidemment, de tels exemples sont limités par la frilosité des entreprises (allez expliquer à un industriel que ses problèmes peuvent se résoudre en calculant des groupes d'homologie !) ou des mathématiciens (démontrer nos théorèmes nous suffit bien, pourquoi s'embêter à les appliquer ?). Sur ce dernier point, il faut être lucide. Si certains problèmes posés sont d'un grand intérêt pour la recherche mathématique, tous ne le sont pas, mais ils peuvent avoir pour l'entreprise une valeur ajoutée énorme (améliorer un algorithme existant peut faire prendre de l'avance à une entreprise par rapport à ses concurrents). Les jeunes docteurs (ou diplômés de licence/master) travaillant en entreprise n'utilisent pas tant leurs connaissances mathématiques, que le savoir-réfléchir qu'ils ont acquis pendant leur formation mathématique. Cependant, nos étudiants et nos formations ont beaucoup à gagner dans ces collaborations. Le nombre d'étudiants en maths stagne

3. `https://www.ceremade.dauphine.fr/FLMI/FLMI-frames-index.html`
4. Bull. Amer. Math. Soc. 45 (2008), 61-75.`http://dx.doi.org/10.1090/S0273-0979-07-01191-3`

(pour ne pas dire qu'il baisse). Les métiers de l'enseignement ont été dévalorisés et n'attirent plus assez de candidats, le CAPES et l'agrégation de maths étant les plus touchés. Les postes d'enseignants-chercheurs diminuent de façon drastique [5]. Il serait bien, dans ce contexte, pour attirer plus d'étudiants vers les formations en mathématiques, de développer les débouchés possibles pour nos étudiants dans les entreprises. Là encore, il y a tout un travail pédagogique à faire pour expliquer au milieu académique l'intérêt d'un métier en entreprise et aux entreprises l'intérêt d'engager des mathématiciens. Ceux-ci peuvent aussi créer leur propre start-up ! Dans un exposé au Forum Incuballiance en octobre 2014, ou dans le dernier numéro de la *Gazette*, David Bessis a expliqué comment il est passé de CR CNRS en groupes finis à chef d'entreprise dans le domaine du « big data ». Il n'a pas hésité à engager de jeunes mathématiciens qui, par goût, ont préféré cette voie plutôt qu'une carrière académique (comme Artem Kozhevnikov qui vient de soutenir une très bonne thèse sur la théorie géométrique de la mesure dans les groupes de Carnot). On peut penser que David Bessis est un cas particulier, mais pourquoi ne ferait-il pas école ?

5. Encourager les jeunes

AMIES a été récemment sollicitée par des organisateurs de colloques organisés pour ou par des doctorants pour participer à des tables rondes avec témoignages de docteurs en maths (pures ou appliquées) qui travaillent en entreprises. Il y a un vrai questionnement sur leur avenir de la part de nos étudiants en thèse. Il faut les encourager à se frotter au monde des entreprises en participant aux SEME ou en ayant une mission complémentaire en tant que doctorant-conseil [6]. En développant nos relations avec le monde socio-économique, nous augmentons le champ des débouchés pour nos étudiants et nous rendons nos formations plus attractives. Les plus jeunes (au collège et au lycée) s'interrogent sur l'intérêt de faire des maths. Il est important que soient diffusées auprès de leurs enseignants (souvent désarmés face à la question : à quoi ça sert ?) des brochures comme *Zoom sur les métiers des mathématiques et de l'informatique* ou Mathématiques, *l'explosion continue* car ces publications contiennent beaucoup d'exemples concrets d'application des mathématiques. Il faudrait aussi que les mathématiciens aillent parler dans les classes pour expliquer que les maths sont belles et utiles.

Richard Fontanges

Richard Fontanges est chef de projet – relations avec les entreprises à AMIES.

Hervé Pajot

Université de Grenoble

Hervé Pajot est professeur. Il est facilitateur AMIES. Depuis 2015, il est chargé des relations entre AMIES et la SMF.

5. Voir l'article d'Yves Coudène dans la dernière *Gazette*.
6. Pour en savoir plus, consulter le dossier sur le sujet à `http://www.sciencesmaths-paris.fr/fr/doctorants-conseil-724.htm`

Le Problème de Kadison-Singer

• É. Matheron

1. Introduction

Le « Problème de Kadison-Singer » ne date pas d'hier ; mais il n'a été résolu que très récemment. À l'origine, il s'agit d'une question relevant de la théorie des algèbres d'opérateurs, posée en 1959 par Richard Kadison et Isadore Singer ([12]) : *Est-il vrai que tout état pur sur* $\mathcal{D}(\ell^2)$*, l'algèbre des opérateurs diagonaux sur l'espace de Hilbert* $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$*, admet un unique prolongement en un état sur* $\mathcal{B}(\ell^2)$*, l'algèbre de tous les opérateurs bornés sur* ℓ^2 *?* Voilà qui semble assez pointu, et n'incite peut-être pas à poursuivre la lecture. On aurait cependant tort de ne pas persévérer un peu, car le Problème de Kadison-Singer est en réalité tout à fait fascinant : il se trouve en effet qu'il admet une multitude de formulations équivalentes, dont certaines sont très élémentaires et semblent n'avoir absolument aucun rapport avec la question initiale. Cet aspect des choses a été popularisé par Pete Casazza et ses co-auteurs, *cf.* en particulier le très ambitieux « survol » [9].

Son caractère polymorphe rend le Problème de Kadison-Singer attaquable de bien des façons ; et de fait, il a subi de nombreux assauts depuis 1959 avant d'être finalement résolu en 2013... par des informaticiens, Adam Marcus, Daniel Spielman et Nikhil Srivastava ([14]). Il est très remarquable que certaines des idées de [14] aient permis aux trois mêmes compères de résoudre un problème célèbre de théorie des graphes, en démontrant l'existence de *graphes de Ramanujan de degré arbitraire* ([13]). (Pour un survol des idées en question, on pourra consulter [15].)

Dans le présent article, je vais en fait assez peu parler de la solution trouvée par Marcus, Spielman et Srivastava, mais plutôt passer du temps à expliquer, avec des indications de preuves raisonnablement détaillées, quelques-unes des diverses formulations équivalentes du Problème de Kadison-Singer. (En caricaturant un peu, l'objectif est de rendre intelligible le diagramme de la Section 7.) Je montrerai tout de même à la fin comment le résultat principal de [14] permet de résoudre le Problème, mais ce n'est pas le but premier. Ainsi, un titre plus approprié pourrait être : « Le Problème de Kadison-Singer, *avant sa solution* » ; mais même un tel titre paraît bien présomptueux car les pages qui suivent sont très loin d'épuiser la question. Pour en savoir plus, il faudra se plonger dans [9] [1].

2. La formulation initiale

2.1 – La propriété d'extension unique

Le cadre naturel du Problème de Kadison-Singer est la théorie de C^*-algèbres. Pour nous, une **C^*-algèbre** sera simplement une sous-algèbre unitale, fermée et auto-adjointe de $\mathcal{B}(H)$, l'algèbre des opérateurs linéaires continus sur un certain espace de Hilbert complexe H.

Un élément T d'une C^*-algèbre $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ est dit **positif** si c'est un opérateur positif au sens usuel, *i.e.* $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in H$. Il revient au même de dire que T est de la forme A^*A avec $A \in \mathcal{A}$, où A^* est l'adjoint de l'opérateur A.

Une forme linéaire φ sur une C^*-algèbre $\mathcal{A}$ est dite **positive** si on a $\varphi(T) \geqslant 0$ pour tout élément positif T de $\mathcal{A}$. Une telle forme linéaire est nécessairement continue, et on a $\|\varphi\| = \varphi(Id)$. Un **état** sur $\mathcal{A}$ est une forme linéaire positive φ telle que $\varphi(Id) = 1$. Par exemple, il est évident que si H est un espace de Hilbert et si $v \in H$ est un vecteur uni-

1. Il existe également une « version longue » du présent article, qui reprend le contenu d'un mini-cours donné à Clermont en juin 2014 dans le cadre du GdR « Analyse Fonctionnelle, Harmonique et Probabilités ». Cette version longue paraîtra dans un volume spécial des Annales Mathématiques Blaise Pascal.

taire, alors on définit un état Φ_v sur $\mathcal{B}(H)$ en posant $\Phi_v(T) = \langle Tv, v\rangle$. Un état φ sur $\mathcal{A}$ est dit **pur** si c'est un point *extrémal* de l'ensemble de tous les états sur $\mathcal{A}$ (lequel est visiblement convexe) ; autrement dit, si on ne peut pas écrire φ comme combinaison convexe d'états différents de φ. Par exemple, on peut montrer que tout « état vectoriel » Φ_v sur $\mathcal{B}(H)$ est pur.

Soient $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(H)$ des C^*-algèbres. D'après la version « espaces vectoriels ordonnés » du Théorème de Hahn-Banach, tout état φ sur $\mathcal{A}$ peut se prolonger en un état Φ sur $\mathcal{B}$. On dit que la paire $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ possède la **propriété d'extension unique** si tout état *pur* sur $\mathcal{A}$ se prolonge *de manière unique* en un état sur $\mathcal{B}$. (Le prolongement est alors nécessairement un état pur ; on le voit à l'aide du Théorème de Krein-Milman.)

Un cas particulier important est celui de la paire $(L^\infty, \mathcal{B}(L^2))$, où $L^2 = L^2(\Omega, \mathfrak{T}, \mu)$ pour un certain espace mesuré $(\Omega, \mathfrak{T}, \mu)$, et $L^\infty = L^\infty(\Omega, \mathfrak{T}, \mu)$ est considéré(e) comme une sous-algèbre de $\mathcal{B}(L^2)$ en identifiant une « fonction » $\theta \in L^\infty$ avec l'opérateur de multiplication M_θ agissant sur L^2 qui lui est naturellement associé ($M_\theta f = \theta f$ pour toute $f \in L^2$).

Dans le cas où l'espace mesuré sous-jacent est $\Omega = \mathbb{N}$ avec la mesure de comptage, l'espace L^2 est simplement $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ (l'espace de toutes les suites complexes de carré sommable), et l'espace L^∞ est $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N})$ (l'espace de toutes les suites complexes bornées). La sous-algèbre de $\mathcal{B}(\ell^2)$ correspondant à ℓ^∞ ne sera pas notée ℓ^∞ mais $\mathcal{D}(\ell^2)$. C'est l'algèbre de tous les opérateurs $D \in \mathcal{B}(\ell^2)$ qui sont **diagonaux** sur la « base canonique » $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$D e_n = \theta_n e_n \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

À ce stade, une précision s'impose : contrairement à l'usage francophone, l'ensemble des entiers naturels commencera à 1, *i.e.* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Une raison est que la base canonique... de $\mathbb{C}^d$ ne se note pas $(e_0, \ldots, e_{d-1})$, mais bien $(e_1, \ldots, e_d)$.

Dans [12], Kadison et Singer montrent que la paire $\big(L^\infty, \mathcal{B}(L^2)\big)$ *ne possède pas* la propriété d'extension unique lorsque l'espace mesuré est l'intervalle $[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue. Très naturellement, ils posent la question de savoir ce qu'il en est dans le « cas discret », *i.e.* pour la paire $\big(\mathcal{D}(\ell^2), \mathcal{B}(\ell^2)\big)$: c'est précisément le Problème de Kadison-Singer tel qu'il a été énoncé dans l'introduction.

Remarque. Kadison et Singer pensaient que la réponse à leur problème était en fait négative (mais contrairement à d'autres par la suite, ils sont restés fort prudents dans leur pronostic, écrivant simplement : *we incline to the view that such extension is not unique*). Pour autant, dans toute la suite on désignera par (KS) l'énoncé « la réponse au Problème de Kadison-Singer est *positive* ». La mèche est donc vendue !

2.2 – Pourquoi ?

Dans [9], on explique que le Problème de Kadison-Singer aurait été initialement motivé par un passage « problématique » du livre classique de Paul Dirac [10] sur les fondements de la mécanique quantique. Essayons d'en dire un peu plus. « Comme chacun sait », dans le formalisme de la mécanique quantique, l'espace des configurations possibles d'un système quantique est modélisé par un certain espace de Hilbert H. Le comportement du système est analysé à partir de la mesure de certaines *quantités observables*, et dans le formalisme adopté, une quantité observable est modélisée par un *opérateur auto-adjoint* $T \in \mathcal{B}(H)$. Un état Φ sur $\mathcal{B}(H)$ s'interprète alors comme une « distribution de probabilité sur l'espace des quantités observables » : si un opérateur T représente une certaine quantité observable, alors la probabilité « sous l'état Φ » que (le résultat de la mesure de) la quantité représentée par T appartienne à un certain intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ est égale à $\mu_\Phi(T, I) := \Phi(\mathbf{1}_I(T))$, où l'opérateur $\mathbf{1}_I(T)$ est défini par « calcul fonctionnel ».

Si maintenant on fixe une base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'espace de Hilbert H, alors certaines quantités observables deviennent plus observables que les autres : ce sont celles qui correspondent à des opérateurs D *diagonaux* sur la base (e_n). Dirac semble dire que si, sous un certain état Φ, on sait déterminer la distribution de probabilité des observables diagonaux D, alors on sait aussi déterminer la distribution de probabilité de *tous* les observables T. On voit donc apparaître « naturellement » quelque chose qui ressemble au Problème de Kadison-Singer.

En réalité, dans [10] les choses ne sont pas très claires ; mais il semble tout de même que les seuls « états » considérés par Dirac soient les états vectoriels de la forme $\Phi(T) = \langle Te_n, e_n\rangle$. Donc la question soulevée par le passage incriminé du livre de Dirac semble être un cas très particulier du Problème de Kadison-Singer ; lequel est expédié dès les premières pages de [12].

2.3 – Intervention des ultrafiltres

Il se trouve qu'on sait décrire « explicitement » les états purs sur $\mathcal{D}(\ell^2)$, ce qui permet de reformuler légèrement le Problème de Kadison-Singer. Mais il faut d'abord rappeler quelques faits de base concernant des objets étranges nommés ultrafiltres.

Rappelons qu'un **filtre** sur $\mathbb{N}$ est une famille $\mathcal{F}$ de parties *non vides* de $\mathbb{N}$ stable par intersections finies et close par sur-ensembles (si $I \in \mathcal{F}$ et $J \supseteq I$, alors $J \in \mathcal{F}$). Par exemple, l'ensemble des parties *cofinies* de $\mathbb{N}$ est un filtre, qu'on appelle le *filtre de Fréchet* et qu'on notera $\mathcal{F}_\infty$. Un **ultrafiltre** sur $\mathbb{N}$ est un filtre $\mathcal{U}$ qui est maximal pour l'inclusion, *i.e.* le seul filtre contenant $\mathcal{U}$ est $\mathcal{U}$ lui même. Par exemple, si $n \in \mathbb{N}$ est fixé, alors $\mathcal{U}_n := \{I \subseteq \mathbb{N};\ I \ni n\}$ est un ultrafiltre. Les ultrafiltres de la forme $\mathcal{U}_n$ sont qualifiés de triviaux. Ce sont les seuls que l'on puisse exhiber sans recourir à un avatar du Lemme de Zorn ; mais il en existe beaucoup d'autres : par une « zornification » immédiate, on voit que tout filtre $\mathcal{F}$ est contenu dans un ultrafiltre. Les ultrafiltres contenant le filtre de Fréchet $\mathcal{F}_\infty$ sont précisément les ultrafiltres non triviaux.

À tout filtre $\mathcal{F}$ de parties de $\mathbb{N}$ est naturellement associée une notion de convergence pour les suites : on dit qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vivant dans un espace topologique X **converge le long de** $\mathcal{F}$ vers un point $a \in X$ si, pour tout voisinage V de a, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \in V\}$ appartient à $\mathcal{F}$. Lorsque l'espace topologique X est séparé, on a « unicité de la limite » et on peut donc légitimement écrire $a = \mathcal{F}\text{-}\lim a_n$. Par exemple, une suite (a_n) converge le long du filtre de Fréchet si et seulement si elle converge au sens usuel, et on a alors $\mathcal{F}_\infty\text{-}\lim a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$. À l'autre extrême, si $n_0 \in \mathbb{N}$, alors toute suite (a_n) converge le long de l'ultrafiltre trivial $\mathcal{U}_{n_0}$, et on a $\mathcal{U}_{n_0}\text{-}\lim a_n = a_{n_0}$.

Il n'est pas très difficile de voir que si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$, alors toute suite (a_n) vivant dans un espace topologique *compact* converge le long de $\mathcal{U}$ (en un sens, les ultrafiltres « sont là pour ça »). En particulier, si (a_n) est une suite *bornée* de nombres complexes, *i.e.* $(a_n) \in \ell^\infty$, alors $\mathcal{U}\text{-}\lim a_n$ existe dans $\mathbb{C}$.

On voit ausitôt que si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$, alors la formule

$$\varphi_{\mathcal{U}}(D) := \mathcal{U}\text{-}\lim \langle De_n, e_n\rangle$$

définit un état sur $\mathcal{D}(\ell^2)$. De plus, on peut montrer que tous les $\varphi_{\mathcal{U}}$ sont des états purs et qu'inversement *tout état pur sur* $\mathcal{D}(\ell^2)$ *est de la forme* $\varphi_{\mathcal{U}}$.

Par ailleurs, l'état $\varphi_{\mathcal{U}}$ a un prolongement $\Phi_{\mathcal{U}}$ évident à $\mathcal{B}(\ell^2)$, défini par la même formule :

$$\Phi_{\mathcal{U}}(T) = \mathcal{U}\text{-}\lim \langle Te_n, e_n\rangle,\ T \in \mathcal{B}(\ell^2).$$

Ainsi, on voit que le Problème de Kadison-Singer revient à la question suivante : *Est-il vrai que si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$, alors $\Phi_{\mathcal{U}}$ est le seul prolongement de $\varphi_{\mathcal{U}}$ à $\mathcal{B}(\ell^2)$? Autrement dit, si Φ est un état sur $\mathcal{B}(\ell^2)$ tel que $\Phi(D) = \mathcal{U}\text{-}\lim\langle De_n, e_n\rangle$ pour tout opérateur* diagonal *D, a-t-on $\Phi(T) = \mathcal{U}\text{-}\lim\langle Te_n, e_n\rangle$ pour* tout *opérateur $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$?*

Remarque. Cette approche directe du Problème de Kadison-Singer a été en fait assez peu considérée. Cependant, Kadison et Singer ont observé « dès l'origine » qu'on a bien extension unique pour tous les ultrafiltres *triviaux* ; et Reid a montré ([17]) que c'est encore le cas lorsque l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ est ce qu'on appelle parfois un *q*-**point**, ce qui signifie que pour toute partition de $\mathbb{N}$ en intervalles bornés J_k, il existe un ensemble $I \in \mathcal{U}$ qui rencontre chaque J_k en exactement 1 point. Pour des résultats plus généraux, voir le très intéressant [5].

3. Kadison-Singer, Feichtinger et Bourgain-Tzafriri

Dans cette section, on va voir que (KS) est équivalent à la très célèbre *Conjecture de Feichtinger*. Cette dernière appartient à ce qu'on appelle en anglais la théorie des *frames*, qui n'a *a priori* pas grand chose à voir avec les C^*-algèbres. On va également montrer que (KS) est équivalent à ce qui est appelé dans [9] la *Conjecture de Bourgain-Tzafriri* ; laquelle est relative à une propriété d'« inversibilité restreinte » pour les matrices à colonnes normalisées.

3.1 – Suites de Bessel, repères et suites de Riesz

Soit $(f_i)_{i\in I}$ une suite finie ou infinie dans un espace de Hilbert séparable H, éventuellement de dimension finie. On dit que (f_i) est une **suite de Bessel** s'il existe une constante $B < \infty$ telle que

$$\forall f \in H\ :\ \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leqslant B\,\|f\|^2\,;$$

et la meilleure constante B possible s'appelle la constante de Bessel de (f_i). On dit que (f_i) est un

repère de H (pour les anglophones : une **frame**) s'il existe deux constantes $A > 0$ et $B < \infty$ telles que

$$\forall f \in H \ : \ A\|f\|^2 \leqslant \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leqslant B\,\|f\|^2.$$

Enfin, on dit que (f_i) est une **suite de Riesz** s'il existe deux constantes $c > 0$ et $C < \infty$ telles que

$$c\sum_{i\in I}|a_i|^2 \leqslant \Big\|\sum_{i\in I} a_i\, f_i\Big\|^2 \leqslant C\sum_{i\in I}|a_i|^2$$

pour toute suite à support fini $(a_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{C}$.

Par exemple, toute suite orthonormale est une suite de Riesz ; toute réunion finie de suites orthonormales est une suite de Bessel ; et toute réunion finie de bases orthonormales de H est un repère de H. Le mot « réunion » est ici à prendre au sens de « réunion en disjointisant les ensembles d'indices » ; par exemple, la suite $(f_i) \cup (f_i)$ est la suite (f_i) où chaque terme est répété deux fois. (Cette précision est assez importante : typiquement, dans un repère on autorise les « redondances ».)

La notion de repère a été introduite par Duffin et Schaeffer en 1952 ([11]), qui en avaient besoin pour des questions d'échantillonnage et d'analyse de Fourier « non harmonique » (où typiquement on s'intéresse à des « séries de Fourier » $\sum c_n\, e^{i\lambda_n x}$ sur $[0, 2\pi]$ avec des λ_n non entiers).

La théorie des repères est en croissance au moins exponentielle depuis quelques années, en partie parce que les repères sont devenus très populaires dans le milieu des « ondelettistes ». Une raison est la grande souplesse de la notion de repère : si on a besoin d'ondelettes vérifiant certaines propriétés sympathiques (par exemple, des ondelettes impaires et à support compact), il se peut qu'il soit essentiellement impossible de construire une base orthonormée de telles ondelettes mais très facile de construire un repère, lequel rendra presque les mêmes services qu'une base orthonormée.

Par ailleurs, les suites de Bessel et les suites de Riesz apparaissent inévitablement dans toutes les questions relatives aux « suites d'échantillonnage » et aux « suites d'interpolation » pour les espaces de Hilbert de fonctions holomorphes ; voir par exemple [16].

Cette parenthèse refermée (merci à Stéphane Jaffard !), tout ce ce qu'on aura besoin de savoir sur les repères et les suites de Bessel tient en quelques lignes.

Proposition 1. *Soit $(f_i)_{i\in I}$ une suite d'éléments de H.*

1. *(f_i) est une suite de Bessel si et seulement si il existe un (unique) opérateur borné $S : \ell^2(I) \to H$ tel que $Se_i = f_i$ pour tout $i \in I$. Dans ce cas, la constante de Bessel de (f_i) est égale à $\|S\|^2$. L'opérateur $S : \ell^2(I) \to H$ s'appelle l'**opérateur de synthèse** associé à (f_i).*
2. *(f_i) est une suite de Riesz si et seulement si c'est une suite de Bessel dont l'opérateur de synthèse $S : \ell^2(I) \to H$ est* injectif à image *fermée.*
3. *(f_i) est un repère de H si et seulement si c'est une suite de Bessel dont l'opérateur de synthèse $S : \ell^2(I) \to H$ est* surjectif.

Preuve. Supposons que (f_i) soit une suite de Bessel, avec une constante au plus égale à B :

$$\sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leqslant B\,\|f\|^2 \quad \text{pour tout } f \in H.$$

On peut alors définir un opérateur $A : H \to \ell^2(I)$ (qu'on appelle l'**opérateur d'analyse** associé à (f_i)) par

$$Af = (\langle f, f_i\rangle)_{i\in I}.$$

L'opérateur A est borné, avec $\|A\|^2 \leqslant B$. On a par définition

$$\langle f, A^* e_i\rangle = \langle Af, e_i\rangle = \langle f, f_i\rangle$$

pour tout $i \in I$ et tout $f \in H$; donc $S := A^*$ vérifie $Se_i = f_i$, $i \in I$.

Inversement, supposons qu'il existe un opérateur $S : \ell^2(I) \to H$ tel que $Se_i = f_i$, $i \in I$. Pour $f \in H$, on a alors

$$\sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 = \sum_{i\in I} |\langle S^* f, e_i\rangle|^2 = \|S^* f\|^2 \leqslant \|S^*\|^2\,\|f\|^2 ;$$

donc (f_i) est une suite de Bessel de constante $B \leqslant \|S^*\|^2 = \|S\|^2$.

Enfin, il est clair d'après les calculs précédents que si (f_i) est une suite de Bessel et si $S : \ell^2(I) \to H$ est l'opérateur de synthèse associé, alors sa constante de Bessel est égale à $\|S^*\|^2 = \|S\|^2$. Ceci termine la preuve de (1).

Le point (2) est évident : par définition, (f_i) est une suite de Riesz si et seulement si il existe un isomorphisme $J : \ell^2(I) \to [f_i;\ i \in I]$ tel que $Je_i = f_i$ pour tout $i \in I$; ce qui est une autre façon d'écrire (2).

La preuve de (3) est laissée en exercice (passer à l'adjoint...) ; sans scrupule car on n'aura en fait pas besoin du résultat. □

3.2 – Feichtinger

Comme toute réunion de suites de Bessel est visiblement encore de Bessel, la Proposition 1 montre que toute réunion finie de suites de Riesz est une suite de Bessel. La **Conjecture de Feichtinger**, que l'on notera (F), est la réciproque de ce fait évident : *toute suite de Bessel normalisée dans un espace de Hilbert est réunion finie de suites de Riesz*. Il semble en fait que cette conjecture ait été énoncée pour la première fois (par écrit) dans [8], et non pas dans les travaux de Feichtinger lui-même. Notons également que dans (F), on peut remplacer « suite de Bessel normalisée » par « suite de Bessel (f_i) telle que $\inf_i \|f_i\| > 0$ ». (Et on peut aussi remplacer « suite de Bessel » par « repère », car toute suite de Bessel devient un repère si on lui ajoute une base orthonormée.)

Remarque. De source sûre (à nouveau merci à Stéphane Jaffard !), Feichtinger a eu l'idée de sa conjecture à propos des « repères de Gabor », c'est-à-dire des repères de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme $f_{m,n}(x) = g(x-ma)e^{inx}$, où $g \in L^2(\mathbb{R})$ et les constantes $a, b > 0$ sont fixées et m, n varient dans $\mathbb{Z}$. Intuitivement, si le réseau $\Lambda = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}^2$ est « trop dense », alors $(f_{m,n})$ risque de ne pas être une suite de Bessel. À l'inverse, si les points de Λ sont « suffisamment éloignés les uns des autres », alors $(f_{m,n})$ va être une suite de Riesz.

Maintenant, il est géométriquement plausible que si le réseau Λ n'est pas trop dense, alors on peut le décomposer en un nombre fini de paquets dont chacun est formé de points suffisamment éloignés les uns des autres. D'où la conjecture de Feichtinger dans ce contexte.

Le résultat suivant, que l'on trouve dans [8], est *a priori* très surprenant.

Proposition 2. *La Conjecture de Feichtinger* (F) *est équivalente à* (KS).

Pour la preuve, on a besoin d'un assez long détour : on y reviendra à la fin de la section 5.

Remarque. Énormément de résultats ont été obtenus ces dernières années concernant la Conjecture de Feichtinger. Parmi les plus beaux se trouvent à mon avis ceux de Baranov et Dyakonov sur les suites de « noyaux reproduisants normalisés » dans certains espaces de Hilbert de fonctions holomorphes ([3]).

3.3 – Bourgain-Tzafriri

Dans [6], Bourgain et Tzafriri s'intéressent à des questions d'« inversibilité restreinte », et démontrent en particulier le résultat suivant. Pour $I \subseteq [d] := \{1,\dots,d\}$ on notera E_I le sous-espace de $\mathbb{C}^d$ engendré par les e_i, $i \in I$, où $(e_1,\dots,e_d)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^d$.

Théorème 1. *Il existe deux constantes $c > 0$ et $A < \infty$ telles que la propriété suivante ait lieu : pour tout opérateur $S \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$, $d \geqslant 1$ vérifiant $\|Se_i\| = 1$ pour $i = 1,\dots,d$, on peut trouver $I \subseteq [d]$ de cardinalité $|I| \geqslant \frac{c}{\|S\|^2} d$ tel que l'opérateur $S_{|E_I}$ est inversible sur son image, avec $\|(S_{|E_I})^{-1}\| \leqslant A$; autrement dit, $\|Sx\| \geqslant \frac{1}{A}\|x\|$ pour tout $x \in E_I$.*

Avec moins de symboles mathématiques : toute matrice S de taille d dont les colonnes sont de norme 1 est inversible sur un sous-espace de dimension proportionnelle à d engendré par certains vecteurs de la base canonique, avec une constante de proportionnalité dépendant uniquement de $\|S\|$ et une estimation « absolue » sur la norme de l'inverse. La preuve donnée dans [6] est assez longue et repose sur des arguments probabilistes. Une preuve « élémentaire » et beaucoup plus courte a été donnée récemment par Spielman et Srivastava dans [18] (voir aussi [23] pour un résultat plus général).

On déduit assez facilement de ce résultat que pour tout opérateur $S \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$, $d \geqslant 1$ vérifiant $\|Se_i\| = 1$ pour $i = 1,\dots,d$, on peut trouver une partition $(I_1,\dots,I_r)$ de $[d]$ en un nombre de morceaux $r \leqslant 1 + C(\|S\|)\ln(d)$, telle que $S_{|E_{I_k}}$ est inversible avec $\|(S_{|E_{I_k}})^{-1}\| \leqslant A$ pour $k = 1,\dots,r$.

Évidemment, il est très naturel de se demander si on peut en fait trouver une partition en un nombre r de morceaux *indépendant de la dimension d*. C'est précisément ce qui dans [9] est appelé la **Conjecture de Bourgain-Tzafriri**, et qu'on notera bien entendu (BT) : *Pour tout $M > 0$, il existe un entier $r = r(M) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout opérateur $S \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$, $d \geqslant 1$ vérifiant $\|S\| \leqslant M$ et $\|Se_i\| = 1$ pour $i = 1,\dots,d$, on peut trouver une partition $(I_1,\dots,I_r)$ de $[d]$ telle que $\|(S_{|E_{I_k}})^{-1}\| \leqslant A$ pour $k = 1,\dots,r$, où A est une constante absolue.*

Dans [9], plusieurs versions « infinidimensionnelles » de (BT) sont considérées. Celle qui est formellement la plus faible, qu'on notera $(\mathrm{BTf})_\infty$, s'énonce comme suit : *pour tout opérateur $S \in \mathcal{B}(\ell^2)$ vérifiant $\|Se_i\| = 1$ pour $i \in \mathbb{N}$, on peut trouver une partition $(I_1,\dots,I_r)$ de $\mathbb{N}$ telle que les opérateurs $S_{|E_{I_k}}$ sont inversibles sur leur image.*

Par des « arguments généraux » (cf. la preuve de la Proposition 5), on voit facilement que (BT) entraîne $(\mathrm{BTf})_\infty$. Que les deux conjectures soient en fait équivalentes n'est pas complètement évident, mais guère surprenant non plus. C'est la partie la moins intéressante de la proposition suivante.

Proposition 3. *Les Conjectures* (BT) *et* $(\mathrm{BTf})_\infty$ *sont équivalentes à* (KS).

Preuve. Comme on vient de dire que (BT) et $(\mathrm{BTf})_\infty$ sont équivalentes (entre elles !), il suffit de montrer que $(\mathrm{BTf})_\infty$ est équivalente à la Conjecture de Feichtinger (F). Mais ceci est *évident*, en vertu du fait suivant.

Fait. Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de Bessel dans $H = \ell^2(\mathbb{N})$, et soit $S : \ell^2 \to \ell^2$ l'opérateur de synthèse associé, $Se_i = f_i$. Si $I \subseteq \mathbb{N}$, alors $S_{|E_I}$ est inversible (sur son image) si et seulement si $(f_i)_{i\in I}$ est une suite de Riesz.

Le Fait lui-même est clair puisque $S_{|E_I}$ s'identifie à l'opérateur de synthèse associé à $(f_i)_{i\in I}$, et qu'une suite de Bessel est une suite de Riesz précisément quand son opérateur de synthèse est un isomorphisme sur son image, d'après la Proposition 1. □

4. Compressibilité et propriété de pavage

Dans cette section, on revient à (KS) lui-même, dont on va donner deux reformulations non triviales. On utilisera la notation suivante : si I est une partie de $\mathbb{N}$, on note P_I la « projection diagonale » associée à I, *i.e.* la projection orthogonale de ℓ^2 sur le sous-espace fermé de ℓ^2 engendré par les vecteurs e_n, $n \in I$. Ce sous-espace sera noté E_I, ou $[e_n;\ n \in I]$.

4.1 – Compressibilité

Si $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ et $I \subseteq \mathbb{N}$, la **compression** de T au sous-espace E_I est l'opérateur $P_I T P_I$. Les opérateurs du type $P_I T P_I$ vont jouer un rôle essentiel dans ce qui suit.

Pour tout opérateur $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$, on notera $\mathbb{D}(T)$ l'opérateur diagonal défini par

$$\mathbb{D}(T)e_n = \langle Te_n, e_n\rangle \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Autrement dit, si on note (t_{ij}) la matrice de T dans la base canonique de ℓ^2, alors $\mathbb{D}(T)$ est l'opérateur dont la matrice est $\mathrm{diag}(t_{11}, t_{22}, \dots)$. Il est important de garder en tête qu'on a

$$\Phi_{\mathcal{U}}(T) = \varphi_{\mathcal{U}}(\mathbb{D}(T)) \quad \text{pour tout ultrafiltre } \mathcal{U}.$$

Un ultrafiltre $\mathcal{U}$ étant donné, on dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ est **compressible** *modulo* $\mathcal{U}$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $I \in \mathcal{U}$ tel que $\|P_I\big(T - \mathbb{D}(T)\big)P_I\| \leqslant \varepsilon$.

Le théorème suivant est dû à Anderson ([2]). En réalité Anderson démontre un résultat beaucoup plus général, mais cette version nous suffira.

Théorème 2. *Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$, et soit $\varphi_{\mathcal{U}}$ l'état pur associé sur $\mathcal{D}(\ell^2)$. Alors $\varphi_{\mathcal{U}}$ admet un unique prolongement en un état sur $\mathcal{B}(\ell^2)$ si et seulement si tout opérateur $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ est compressible modulo $\mathcal{U}$.*

Preuve (abrégée). Le fait que la compressibilité entraîne l'unicité du prolongement est « facile ». Le point clé est que si $I \in \mathcal{U}$, alors $\varphi_{\mathcal{U}}(P_I) = 1$ par définition de $\varphi_{\mathcal{U}}$. On utilise alors le fait général suivant (qui n'est pas difficile à démontrer) : *Si Ψ est un état quelconque sur une C^*-algèbre $\mathcal{A}$ et si $P \in \mathcal{A}$ vérifie $\Psi(P) = 1 = \|P\|$, alors $\Psi(AP) = \Psi(A) = \Psi(PA)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$*. Dans la situation présente, on en déduit que si Φ est un état sur $\mathcal{B}(\ell^2)$ prolongeant $\varphi_{\mathcal{U}}$, alors $\Phi(P_I(T - \mathbb{D}(T))P_I) = \Phi(T - \mathbb{D}(T))$ pour tout $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ et pour tout $I \in \mathcal{U}$. Si T est compressible *modulo* $\mathcal{U}$, cela entraîne que $\Phi(T - \mathbb{D}(T)) = 0$, donc $\Phi(T) = \Phi(\mathbb{D}(T)) = \varphi_{\mathcal{U}}(\mathbb{D}(T)) = \Phi_{\mathcal{U}}(T)$. Ainsi, la compressibilité *modulo* $\mathcal{U}$ de tous les opérateurs $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ entraîne que le seul état prolongeant $\varphi_{\mathcal{U}}$ est $\Phi = \Phi_{\mathcal{U}}$.

Supposons maintenant que $\varphi_{\mathcal{U}}$ admette un unique prolongement en un état sur $\mathcal{B}(\ell^2)$. Alors ce prolongement ne peut être que $\Phi_{\mathcal{U}}$. Pour démontrer que tout opérateur sur ℓ^2 est compressible *modulo* $\mathcal{U}$, on se ramène sans difficulté au cas des opérateurs *auto-adjoints et de diagonale nulle*. On fixe donc un opérateur T auto-adjoint vérifiant $\mathbb{D}(T) = 0$, et $\varepsilon > 0$. Il s'agit de trouver $I \in \mathcal{U}$ tel que $\|P_I T P_I\| \leqslant \varepsilon$.

Comme $\Phi_{\mathcal{U}}$ est supposée être la seule forme linéaire positive sur $\mathcal{B}(\ell^2)$ prolongeant $\varphi_{\mathcal{U}}$, la version « espaces vectoriels ordonnés » du Théorème de Hahn-Banach permet d'affirmer qu'on a

$$\begin{aligned} \inf\{\varphi_{\mathcal{U}}(D);\ D \in \mathcal{D}(\ell^2),\ D \geqslant T\} &= \Phi_{\mathcal{U}}(T) \\ &= \sup\{\varphi_{\mathcal{U}}(D');\ D' \in \mathcal{D}(\ell^2),\ D' \leqslant T\}. \end{aligned}$$

Comme de plus $\Phi_{\mathcal{U}}(T) = \varphi_{\mathcal{U}}(\mathbb{D}(T)) = 0$, on peut donc trouver deux opérateurs diagonaux D et D' tels que $D \leqslant T \leqslant D'$ et $-\varepsilon < \varphi_{\mathcal{U}}(D) \leqslant \varphi_{\mathcal{U}}(D') < \varepsilon$. Alors, par définition de $\varphi_{\mathcal{U}}$, l'ensemble

$$I := \{n \in \mathbb{N};\ -\varepsilon < \langle De_n, e_n\rangle \leqslant \langle D'e_n, e_n\rangle < \varepsilon\}$$

appartient à $\mathcal{U}$.

Comme les opérateurs D et D' sont diagonaux, la définition de I montre qu'on a $\|P_I D' P_I - P_I D P_I\| \leqslant \varepsilon$; et comme $D \leqslant T \leqslant D'$ (il est temps de s'en servir), on en déduit $\|P_I T P_I\| \leqslant \varepsilon$, ce qui achève la preuve.

□

4.2 – Pavages

Le Théorème 2 est un résultat « individuel » : l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ est fixé. Si on l'applique à *tous* les ultrafiltres $\mathcal{U}$, on obtient avec un peu de travail supplémentaire une première reformulation du Problème de Kadison-Singer. Ce résultat se trouve en fait déjà dans [12].

On dira qu'un opérateur $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ est **pavable** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition finie $(I_1, \dots, I_r)$ de $\mathbb{N}$ telle que

$$\|P_{I_k}(T - \mathbb{D}(T))P_{I_k}\| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } k = 1, \dots, r.$$

En termes peut-être plus imagés, cela signifie que T admet des « décompositions matricielles » de la forme

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & * & * \\ * & \ddots & * \\ * & * & T_r \end{pmatrix}$$

pour lesquelles l'opérateur $T_1 \oplus \cdots \oplus T_r$ est « presque diagonal ».

Proposition 4. *La paire* $(\mathcal{D}(\ell^2), \mathcal{B}(\ell^2))$ *possède la propriété d'extension unique, i.e.* (KS) *est vrai, si et seulement si tout opérateur* $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ *est pavable.*

Preuve. La preuve est plus limpide si on la rend la plus abstraite possible. Tout repose sur le fait suivant.

Fait. Soit (P) une propriété relative aux parties de $\mathbb{N}$, que l'on suppose *héréditaire* : si $J \subseteq \mathbb{N}$ a (P) et si $I \subseteq J$, alors I a (P). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ admet un élément I possédant la propriété (P) ;
- (ii) on peut partitionner $\mathbb{N}$ en un nombre fini d'ensembles ayant (P).

Pour $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ et $\varepsilon > 0$, on peut appliquer le Fait à la propriété (P_ε) suivante : un ensemble $I \subseteq \mathbb{N}$ a (P_ε) si et seulement si $\|P_I T P_I\| \leqslant \varepsilon$. (C'est bien une propriété héréditaire car $\|P_I T P_I\| = \|P_I(P_J T P_J)P_I\| \leqslant \|P_J T P_J\|$ si $I \subseteq J$.) En faisant varier ε, le résultat est que l'opérateur T est pavable si et seulement si il est compressible *modulo* tout ultrafiltre $\mathcal{U}$; d'où la proposition.

La preuve du Fait n'est pas compliquée. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) vient de la propriété générale suivante des ultrafiltres (facile à démontrer) : si $I_1, \dots, I_r$ sont des parties de $\mathbb{N}$ et si $I_1 \cup \cdots \cup I_r$ appartient à un certain ultrafilftre $\mathcal{U}$, alors l'un des I_k doit appartenir à $\mathcal{U}$. L'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii) découle de la *compacité* de l'espace $\beta\mathbb{N}$ de tous les ultrafiltres sur $\mathbb{N}$ muni de sa topologie naturelle, laquelle est engendrée par les ensembles de la forme $\beta_I := \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N};\, \mathcal{U} \ni I\}$, où $I \subseteq \mathbb{N}$. □

Dans la suite, on notera (A) l'énoncé « tout opérateur sur ℓ^2 est pavable ». Ainsi, on vient de voir que (KS) est équivalent à (A). Il s'est donc subrepticement passé quelque chose : (KS) a été remplacé par un énoncé bien plus élémentaire qui ne fait intervenir ni ultrafiltres, ni états. On peut aussi remarquer que par définition, un opérateur T est pavable si et seulement si $T - \mathbb{D}(T)$ l'est. Donc, pour démontrer (A), il suffit de prouver que tous les opérateurs *de diagonale nulle* sont pavables.

Remarque. À mon avis, un des plus beaux résultats obtenus avant 2013 concernant la pavabilité des opérateurs sur ℓ^2 est dû à Berman, Halpern, Kaftal et Weiss ([4]) : *tout opérateur* $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ *dont la matrice dans la base canonique de* ℓ^2 *est à* coefficients positifs *est pavable.*

4.3 – Pavages fini-dimensionnels

L'énoncé (A) est de nature infini-dimensionnelle, car il concerne les opérateurs sur l'espace de dimension infinie $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$. Cependant, on va voir que (A) est en fait équivalent à un énoncé purement fini-dimensionnel.

Pour $\varepsilon > 0$ et $r \in \mathbb{N}$, on dira qu'un opérateur T agissant sur $\mathbb{C}^d$ est ε-pavable en r morceaux s'il existe une partition $(I_1, \dots, I_r)$ de $[d] := \{1, \dots, d\}$ telle que

$$\left\|P_{I_k}(T - \mathbb{D}(T))P_{I_k}\right\| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } k = 1, \dots, r.$$

Cette terminologie étant précisée, on notera $(\mathrm{A})_{<\infty}$ l'énoncé suivant : *pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un entier* $r = r(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tel que* pour tout $d \in \mathbb{N}$*, tout opérateur* $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ *vérifiant* $\|T\| \leqslant 1$ *et* $\mathbb{D}(T) = 0$ *est* ε*-pavable en* r *morceaux.*

Bien entendu, le point clé dans $(\mathrm{A})_{<\infty}$ est que l'entier $r = r(\varepsilon)$ doit être *indépendant de la dimension* d. (N'importe quel opérateur sur $\mathbb{C}^d$ est 0-pavable en d morceaux...). L'énoncé $(\mathrm{A})_{<\infty}$ est souvent appelé la **Conjecture de pavage d'Anderson**.

On peut l'abréger en disant que les opérateurs sur $\mathbb{C}^d$, $d \geqslant 1$ sont « uniformément pavables ».

Proposition 5. *Les énoncés* (A) *et* $(\mathrm{A})_{<\infty}$ *sont équivalents.*

Le fait que (A) entraîne $(\mathrm{A})_{<\infty}$ n'est pas difficile. Si $(\mathrm{A})_{<\infty}$ n'est pas vérifiée pour un certain $\varepsilon > 0$, on peut trouver pour tout $r \in \mathbb{N}$ un opérateur T_r agissant sur $\mathbb{C}^{d_r}$ pour un certain d_r, qui n'est pas ε-pavable en r morceaux. La « somme directe » de tous ces opérateurs T_r est alors un opérateur agissant sur $\bigoplus_r \mathbb{C}^{d_r} \simeq \ell^2$ qui n'est pas ε-pavable, donc (A) n'est pas vérifié.

Pour l'implication « délicate » $(\mathrm{A})_{<\infty} \implies (\mathrm{A})$, on utilise un résultat combinatoire très général qu'on appelle souvent le **Lemme de sélection de Rado**. Considérons une propriété (P) relative aux parties de $\mathbb{N}$, que l'on suppose *finiment déterminée*, ce qui signifie qu'un ensemble $I \subseteq \mathbb{N}$ a (P) si et seulement si toutes ses parties finies ont (P). Soit également $r \in \mathbb{N}$. Le Lemme de sélection de Rado s'énonce comme suit : *si toute partie* finie $J \subseteq \mathbb{N}$ *peut être partitionnée en r morceaux ayant la propriété* (P), *alors* $\mathbb{N}$ *lui-même peut être partitionné en r morceaux ayant* (P).

La preuve de ce lemme est en fait très simple : en identifiant de manière évidente une partition de $\mathbb{N}$ en r morceaux (éventuellement vides) avec un « coloriage de $\mathbb{N}$ en au plus r couleurs », *i.e.* simplement une application $c : \mathbb{N} \to \{1, \dots, r\}$, le résultat est une conséquence presque immédiate de la *compacité* de l'espace produit $\{1, \dots, r\}^{\mathbb{N}}$.

Si maintenant on suppose que $(\mathrm{A})_{<\infty}$ est vérifiée, on montre sans difficulté que tout opérateur $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ vérifiant $\|T\| \leqslant 1$ et $\mathbb{D}(T) = 0$ est pavable en appliquant, pour $\varepsilon > 0$ donné, le Lemme de sélection de Rado à la propriété (P_ε) suivante :

$$I \subseteq \mathbb{N} \ \text{ a } (\mathrm{P}_\varepsilon) \quad \text{si et seulement si} \quad \|P_I T P_I\| \leqslant \varepsilon .$$

Comme la pavabilité de tous les opérateurs est équivalente à la pavabilité de tous les opérateurs de diagonale nulle, cela prouve que $(\mathrm{A})_{<\infty}$ entraîne (A).

Remarque. Le résultat sans doute le plus profond concernant la Conjecture de pavage obtenu avant 2013 est dû à Bourgain et Tzafriri ([7]) : *Pour $\nu > 0$ donné et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $d(\nu, \varepsilon)$ tel que tout opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$, $d \geqslant d(\nu, \varepsilon)$ vérifiant $\|T\| = 1$ et $|\langle Te_i, e_j\rangle| \leqslant \frac{1}{(\ln d)^{1+\nu}}$ pour tous $i, j \in [d]$ est ε-pavable en un nombre $r = r(\varepsilon, \nu)$ de morceaux.* On peut par exemple en déduire que si $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ vérifie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(n)|^2 |n|^\tau < \infty$ pour un certain $\tau > 0$, alors l'opérateur de multiplication M_ϕ agissant sur $L^2(\mathbb{T})$ est pavable relativement à la base de Fourier. La preuve donnée dans [7] est extraordinairement difficile. Elle a été simplifiée dans [20], mais cela reste compliqué.

5. Là où les choses bifurquent : Akemann–Anderson

Dans cette section, on va voir que la Conjecture de pavage d'Anderson $(\mathrm{A})_{<\infty}$ est équivalente à une conjecture de « pseudo-pavage » pour les *projections orthogonales* de « petite diagonale », due à Akemann et Anderson ([1]). C'est cette reformulation qui va permettre de prouver l'équivalence de (KS) et de la Conjecture de Feichtinger (F).

5.1 – La « Conjecture AA(δ) »

Étant donné un nombre réel $\delta \in (0, 1)$, on notera $\mathrm{AA}(\delta)$ l'énoncé suivant : *il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ et une constante $\eta > 0$ tels que : pour tout $d \in \mathbb{N}$ et pour toute projection orthogonale P sur $\mathbb{C}^d$ vérifiant $\|\mathbb{D}(P)\| \leqslant \delta$, on peut trouver une partition $(I_1, \dots, I_r)$ de $[d]$ telle que $\|P_{I_k} P P_{I_k}\| \leqslant 1 - \eta$ pour $k = 1, \dots, r$.*

Comme on ne considère que des projections, on pourrait croire que $\mathrm{AA}(\delta)$ est un énoncé beaucoup moins fort que la Conjecture de pavage d'Anderson $(\mathrm{A})_{<\infty}$ ... mais ce n'est pas le cas :

Proposition 6. *L'énoncé* $\mathrm{AA}(\frac{1}{2})$ *est équivalent à* $(\mathrm{A})_{<\infty}$, *et donc à* (KS).

Preuve. Supposons $(\mathrm{A})_{<\infty}$ vérifié. On va en fait montrer que $\mathrm{AA}(\delta)$ est vrai pour tout $\delta \in (0, 1)$. Soit donc $\delta \in (0, 1)$ quelconque, et soit T un opérateur sur $\mathbb{C}^d$ vérifiant $\|T\| \leqslant 1$ et $\|\mathbb{D}(T)\| \leqslant \delta$. On ne suppose *pas* que T est une projection.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\delta + \varepsilon < 1$, et soit $\eta := 1 - (\varepsilon + \delta)$. Par $(\mathrm{A})_{<\infty}$, on peut trouver $r = r(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ et une partition $(I_1, \dots, I_r)$ de $[d]$ tels que $\|P_{I_k}(T - \mathbb{D}(T))P_{I_k}\| \leqslant \varepsilon$ pour $k = 1, \dots, r$. On a alors $\|P_{I_k} T P_{I_k}\| \leqslant \varepsilon + \|P_{I_k} \mathbb{D}(T) P_{I_k}\| \leqslant \varepsilon + \delta = 1 - \eta$ pour tout k, ce qui prouve $\mathrm{AA}(\delta)$.

Supposons maintenant que $\mathrm{AA}(\frac{1}{2})$ soit satisfait avec « témoins » $r \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$. Pour établir $(\mathrm{A})_{<\infty}$, on peut se contenter de prouver que les opérateurs *auto-adjoints et de diagonale nulle* sur $\mathbb{C}^d$, $d \geqslant 1$ sont uniformément pavables. Le point clé est le fait suivant.

Fait. Si $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ est auto-adjoint et vérifie $\mathbb{D}(T) = 0$, alors T est $(1 - \eta)\|T\|$-pavable en r^2 morceaux.

Preuve (Preuve abrégée du Fait). Par homogénéité, on peut supposer que $\|T\| \leqslant 1$. Soit S l'opérateur sur $\mathbb{C}^d \oplus \mathbb{C}^d = \mathbb{C}^{2d}$ défini comme suit :

$$S := \begin{pmatrix} T & \sqrt{1-T^2} \\ \sqrt{1-T^2} & -T \end{pmatrix}.$$

Cette définition a bien un sens car T est auto-adjoint et $\|T\| \leqslant 1$. De plus, un calcul immédiat montre que S est auto-adjoint et qu'on a $S^2 = Id$; autrement dit, S est une *symétrie orthogonale*. Donc les opérateurs $P^{\pm} := \frac{1}{2}(Id \pm S)$ sont des projections orthogonales ; et on a $\mathbb{D}(P^{\pm}) = \frac{1}{2}Id$ car $\mathbb{D}(S) = 0$. En appliquant $\mathrm{AA}(\frac{1}{2})$ aux projections P^+ et P^- et en observant que

$$P^{\pm} = \frac{1}{2}(Id \pm S) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(Id \pm T) & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

on montre alors sans difficulté majeure que T est $(1-\eta)$-pavable en r^2 morceaux. Le nombre r^2 apparaît parce qu'on a besoin de considérer le raffinement commun des partitions de $[2d]$ en r morceaux adaptées à P^+ et P^-.

□

La fin de la preuve de la proposition consiste en un argument facile d'« itération ». Soit $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ auto-adjoint vérifiant $\mathbb{D}(T) = 0$ et $\|T\| \leqslant 1$. Posons $s := r^2$ et $\alpha := 1-\eta$. Par le Fait, on peut trouver une partition $(I_1, \dots, I_s)$ de $[d]$ telle que $\|P_{I_l} T P_{I_l}\| \leqslant \alpha$ pour $l = 1, \dots, s$. En appliquant maintenant le Fait à chacun des opérateurs $P_{I_l} T P_{I_l}$, $1 \leqslant l \leqslant r$, on voit que T est α^2-pavable en s^2 morceaux ; et ainsi de suite. □

Remarque. La valeur $\delta = \frac{1}{2}$ semble cruciale… mais en fait ce n'est pas le cas : Akemann et Anderson ont montré que si $\mathrm{AA}(\delta)$ est vrai pour *un* $\delta \in (0,1)$, alors (KS) est vrai (et donc $\mathrm{AA}(\delta)$ aussi pour *tout* $\delta \in (0,1)$ d'après la preuve ci-dessus). Ce résultat est *bien plus difficile* que la Proposition 6 ; voir par exemple [5].

Pour $\delta \in (0,1)$ donné, il est très facile de formuler une version infini-dimensionnelle de $\mathrm{AA}(\delta)$, qu'on notera dans la suite $\mathrm{AA}(\delta)_\infty$: *pour toute projection $P \in \mathcal{B}(\ell^2)$ vérifiant $\|\mathbb{D}(P)\| \leqslant \delta$, on peut trouver une partition finie $(I_1, \dots, I_r)$ de $\mathbb{N}$ telle que $\|P_{I_k} P P_{I_k}\| < 1$ pour $k = 1, \dots, r$.* Au vu de la Proposition 5, le résultat suivant n'est pas très surprenant.

Proposition 7. *Pour tout $\delta \in (0,1)$ les énoncés $\mathrm{AA}(\delta)$ et $\mathrm{AA}(\delta)_\infty$ sont équivalents.*

Le fait que $\mathrm{AA}(\delta)_\infty$ entraîne $\mathrm{AA}(\delta)$ n'est pas difficile à voir ; *cf.* la preuve de la Proposition 5. Pour la réciproque, on commence par montrer (ce qui demande un peu de travail) que si $\mathrm{AA}(\delta)$ est vérifié par toutes les projections P sur $\mathbb{C}^d$, $d \geqslant 1$ avec « témoins » r et η, alors il est en fait vérifié *par tous les opérateurs T sur $\mathbb{C}^d$, $d \geqslant 1$ tels que* $0 \leqslant T \leqslant Id$, avec les mêmes témoins. On conclut alors par une application « immédiate » du Lemme de sélection de Rado.

5.2 – Retour à Feichtinger

On est maintenant en mesure de montrer que (KS) est équivalent à (F). La preuve est un peu alambiquée : on va montrer que la conjecture de pavage infini-dimensionnelle (A) entraîne la Conjecture de Feichtinger, et que (F) entraîne la validité de l'énoncé d'Akemann-Anderson $\mathrm{AA}(\delta)_\infty$ pour tout $\delta \in (0,1)$.

Supposons (A) vérifiée, *i.e.* tout opérateur sur ℓ^2 est pavable, et fixons une suite de Bessel normalisée $(f_i)_{i \in I}$ dans un espace de Hilbert séparable H. Sans perte de généralité, on peut supposer que $I = \mathbb{N}$. Fixons également $\varepsilon > 0$. On va montrer que (f_i) est réunion finie de suites ε-Riesz, c'est-à-dire Riesz avec constantes $c \geqslant 1-\varepsilon$ et $C \leqslant 1+\varepsilon$.

Soit $S : \ell^2(\mathbb{N}) \to H$ l'opérateur de synthèse associé à (f_i), et posons $R := S^*S$; l'opérateur R est l'**opérateur de repère** associé à (f_i). On a

$$\langle Re_i, e_i \rangle = \|Se_i\|^2 = \|f_i\|^2 = 1$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$, et donc $\mathbb{D}(R) = Id$. Par (A), on peut donc trouver une partition $(I_1, \dots, I_r)$ de $\mathbb{N}$ telle que $\|P_{I_k}(R - Id)P_{I_k}\| \leqslant \varepsilon$ pour $k = 1, \dots, r$, autrement dit

$$\left\| P_{I_k} R P_{I_k} - P_{I_k} \right\| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Par ailleurs, pour $k = 1, \dots, r$ et pour toute suite à support fini $(a_i)_{i \in I_k} \subseteq \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in I_k} a_i f_i \right\|^2 &= \left\langle SP_{I_k}\Big(\sum_{i \in I_k} a_i e_i\Big), SP_{I_k}\Big(\sum_{i \in I_k} a_i e_i\Big) \right\rangle \\ &= \left\langle P_{I_k} R P_{I_k}\Big(\sum_{i \in I_k} a_i e_i\Big), \sum_{i \in I_k} a_i e_i \right\rangle. \end{aligned}$$

Par (1), on en déduit

$$(1-\varepsilon)\left\| \sum_{i \in I_k} a_i e_i \right\|^2 \leqslant \left\| \sum_{i \in I_k} a_i f_i \right\|^2 \leqslant (1+\varepsilon)\left\| \sum_{i \in I_k} a_i e_i \right\|^2,$$

ce qui montre que la suite $(f_i)_{i \in I_k}$ est ε-Riesz, pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$.

Supposons maintenant (F) vérifiée, et fixons $\delta \in (0,1)$. Soit également $P \in \mathcal{B}(\ell^2)$ une projection vérifiant $\|\mathbb{D}(P)\| \leqslant \delta$. On cherche une partition $(I_1,\dots,I_r)$ de $\mathbb{N}$ telle que $\|P_{I_k}PP_{I_k}\| < 1$ pour $k = 1,\dots,r$.

Comme $\|\mathbb{D}(P)\| = \sup_{i\in\mathbb{N}}\langle Pe_i, e_i\rangle = \sup_{i\in\mathbb{N}}\|Pe_i\|^2$, les vecteurs $f_i := (Id-P)e_i$ vérifient $\|f_i\|^2 \geqslant 1-\delta$ et on a donc $\inf_i \|f_i\| > 0$. De plus, (f_i) est une suite de Bessel puisque $S := Id - P$ est un opérateur borné. Par (F), on peut donc trouver une partition $(I_1,\dots,I_r)$ de $\mathbb{N}$ telle que chaque suite $(f_i)_{i\in I_k}$ soit une suite de Riesz.

Il existe ainsi une constante $c > 0$ telle que

$$\Big\|\sum_{i\in I_k} a_i(Id-P)e_i\Big\|^2 \geqslant c\sum_{i\in I_k}|a_i|^2 = c\Big\|\sum_{i\in I_k} a_ie_i\Big\|^2$$

pour tout $k \in \{1,\dots,r\}$ et pour toute suite à support fini $(a_i)_{i\in I_k} \subseteq \mathbb{C}$; d'où

$$\Big\|P\Big(\sum_{i\in I_k} a_ie_i\Big)\Big\|^2 = \Big\|\sum_{i\in I_k} a_ie_i\Big\|^2 - \Big\|(Id-P)\Big(\sum_{i\in I_k} a_ie_i\Big)\Big\|^2 \leqslant (1-c)\Big\|\sum_{i\in I_k} a_ie_i\Big\|^2.$$

Dit autrement : pour $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_ie_i \in \ell^2$ quelconque, on a $\|PP_{I_k}x\|^2 \leqslant (1-c)\|P_{I_k}x\|^2 \leqslant (1-c)\|x\|^2$; et donc $\|PP_{I_k}\|^2 \leqslant 1-c$.

Comme $\|P_{I_k}PP_{I_k}\| = \|(PP_{I_k})^*(PP_{I_k})\| = \|PP_{I_k}\|^2$, on obtient donc finalement $\|P_{I_k}PP_{I_k}\| \leqslant 1-c < 1$ pour $k = 1,\dots,r$.

6. La solution

6.1 – La reformulation de Weaver

La preuve de la Proposition 2 a mis en lumière le rôle central de l'énoncé $\mathrm{AA}(\delta)_\infty$ de Akemann et Anderson. On va voir maintenant que la version finidimensionnelle de cet énoncé, *i.e.* ce qu'on a noté $\mathrm{AA}(\delta)$, se reformule de manière presque tautologique en termes de repères finis d'un type particulier. Cette observation est due à Weaver [22].

On dira qu'une suite $(f_i)_{i\in I}$ dans un espace de Hilbert H est un **repère C-Parseval**, pour une certaine constante $C > 0$, si on a

$$\forall f \in H \ :\ \sum_{i\in I}|\langle f, f_i\rangle|^2 = C\|f\|^2.$$

La terminologie officielle est en fait **repère serré avec constante C** ; et en anglais : **C-tight frame**. Par exemple, si $C \in \mathbb{N}$, alors une réunion de C bases orthonormées est un repère C-Parseval.

Voici un exemple beaucoup plus important : *si P est une projection orthogonale de $\mathbb{C}^d$ et si on pose $f_i = \sqrt{C}\,Pe_i$, alors la suite $(f_i)_{i\in[d]}$ est un repère C-Parseval de $H := P(\mathbb{C}^d)$.* C'est évident, car si $f \in H = P(\mathbb{C}^d)$, alors

$$\sum_{i\in[d]}|\langle f, f_i\rangle|^2 = C\sum_{i=1}^d|\langle f, Pe_i\rangle|^2 = C\sum_{i=1}^d|\langle Pf, e_i\rangle|^2 = C\|Pf\|^2 = C\|f\|^2.$$

L'importance de cet exemple vient du fait que c'est en réalité le seul : il n'est pas très difficile de montrer que *tout repère C-Parseval $(f_i)_{i\in[d]}$ d'un espace de Hilbert H est isométrique à un repère du type précédent* ; autrement dit, il existe un plongement isométrique $J : H \to \mathbb{C}^d$ tel que $Jf_i = \sqrt{C}\,Pe_i$ pour tout $i \in [d]$, où P est la projection (orthogonale) de $\mathbb{C}^d$ sur JH.

On en vient maintenant à la reformulation annoncée de $\mathrm{AA}(\delta)$. Pour $C > 0$, on notera $\mathrm{W}(C)$ l'énoncé suivant : *il existe $r \in \mathbb{N}$ et $\eta > 0$ tels que tout repère C-Parseval fini (f_i) avec $\|f_i\| \leqslant 1$ pour tout i est réunion de r suites de Bessel de constantes de Bessel n'excédant pas $(1-\eta)C$.*

Observation. Pour tout $C > 1$, l'énoncé $\mathrm{W}(C)$ est équivalent à $\mathrm{AA}(\frac{1}{C})$, avec les mêmes témoins r et η. Par conséquent, (KS) est vrai si et seulement si $\mathrm{W}(C)$ est vrai pour tout $C > 1$.

Preuve. C'est une conséquence *vraiment* immédiate du fait suivant.

Fait. Si $(f_i)_{i\in[d]}$ est un repère C-Parseval de H isométrique à $(\sqrt{C}Pe_i) \subseteq \mathbb{C}^d$, alors $\|\mathbb{D}(P)\| = \frac{1}{C}\max_i \|f_i\|^2$; et pour tout $I \subseteq [d]$, la constante de Bessel de $(f_i)_{i\in I}$ est égale à $C\|P_IPP_I\|$.

Pour démontrer l'observation, il suffit d'écrire $\mathrm{W}(C)$ et $\mathrm{AA}(\frac{1}{C})$ l'un à côté de l'autre et de relire tranquillement l'énoncé du Fait.

Quant au Fait lui-même, il est à peu près évident. Si $Jf_i = \sqrt{C}\,Pe_i$ pour $i = 1,\dots,d$, où $J : H \to \mathbb{C}^d$ est une isométrie, alors $\|\mathbb{D}(P)\| = \max_i\langle Pe_i, e_i\rangle = \max_i\|Pe_i\|^2 = \frac{1}{C}\max_{i\in[d]}\|f_i\|^2$. De plus, si $I \subseteq [d]$ alors, comme $f_i = \sqrt{C}PP_Ie_i$ pour $i \in I$, l'opérateur de synthèse associé à la suite $(Jf_i)_{i\in I}$ est $S := \sqrt{C}PP_I$; et donc la constante de Bessel de $(f_i)_{i\in I}$, qui est la même que celle de $(Jf_i)_{i\in I}$, est égale à $C\|PP_I\|^2 = C\|P_IPP_I\|$. □

6.2 – Marcus-Spielman-Srivastava

Rappelons une notation bien classique : si H est un espace de Hilbert et si $v \in H \setminus \{0\}$, on note $v \otimes v$ l'opérateur de rang 1 sur H défini par

$$(v \otimes v)(x) = \langle x, v\rangle\, v\,.$$

L'opérateur $v \otimes v$ est auto-adjoint ; et si $\|v\| = 1$, il s'agit simplement de la projection orthogonale de H sur $\mathbb{C}v$.

Les opérateurs du type $v \otimes v$ interviennent très naturellement dans la théorie des repères, en raison du fait suivant : *une suite finie $(f_i)_{i\in I}$ dans un espace de Hilbert H est un repère C-Parseval (pour un certain $C > 0$) si et seulement si*

$$\sum_{i\in I} f_i \otimes f_i = C\,Id\,.$$

C'est immédiat car on a pour pour tout $x \in H$:

$$\left\langle\left(\sum_{i\in I} f_i \otimes f_i\right)x, x\right\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, f_i\rangle\langle f_i, x\rangle = \sum_{i\in I}|\langle x, f_i\rangle|^2. \quad (2)$$

Dans [14], Marcus, Spielman et Srivastava démontrent le résultat suivant. Appelons vecteur aléatoire dans $\mathbb{C}^d$ toute variable aléatoire v à valeurs dans $\mathbb{C}^d$. Les variables aléatoires sont supposées définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$; et l'espérance d'une variable aléatoire réelle ou vectorielle ξ est notée $\mathbb{E}(\xi)$ ou $\mathbb{E}\xi$.

Théorème 3. *Soit $(v_i)_{i\in I}$ une suite finie de vecteurs aléatoires indépendants dans $\mathbb{C}^d$, chaque v_i ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Soit également $\varepsilon > 0$. On suppose qu'on a*

$$\mathbb{E}\|v_i\|^2 \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } i \in I, \text{ et } \mathbb{E}\left(\sum_{i\in I} v_i \otimes v_i\right) = Id\,.$$

Alors, on a avec probabilité positive *:*

$$\left\|\sum_{i\in I} v_i(\omega) \otimes v_i(\omega)\right\| \leqslant (1 + \sqrt{\varepsilon})^2\,.$$

En première lecture, ce résultat ne semble pas très spectaculaire et le lien avec le Problème de Kadison-Singer ne saute pas aux yeux. On en déduit pourtant assez facilement le résultat suivant.

Corollaire. *L'énoncé* $\mathrm{W}(C)$ *est vrai pour tout $C > 1$; et par conséquent,* (KS) *et toutes ses versions équivalentes sont vrais.*

Preuve. Fixons $C > 1$ et un repère C-Parseval fini $(f_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{C}^d$, avec $\|f_i\| \leqslant 1$. On a ainsi

$$\sum_{i\in I} f_i \otimes f_i = C\,Id\,.$$

Il s'agit de trouver une partition $(I_1, \dots, I_r)$ de I telle que chaque suite $(f_i)_{i\in I_k}$ ait une constante de Bessel au plus égale à $(1-\eta)C$, où l'entier r et la constante $\eta > 0$ dépendent uniquement de C. L'idée est on ne peut plus naturelle : on va choisir la partition $(I_1, \dots, I_r)$ « au hasard ».

Fixons un entier $r \geqslant 2$, et soit $(k_i)_{i\in I}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur l'ensemble $\{1, \dots, r\}$:

$$\mathbb{P}(k_i = k) = \frac{1}{r} \quad \text{pour } k = 1, \dots, r\,.$$

On définit des variables aléatoires v_i à valeurs dans $\mathbb{C}^{dr} = \mathbb{C}^d \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^d$ de la façon suivante :

$$v_i(\omega) := \sqrt{\frac{r}{C}}\,(0 \oplus \cdots \oplus f_i \oplus \cdots \oplus 0),$$

où f_i apparaît à la place $k_i(\omega)$.

Les vecteurs aléatoires v_i sont indépendants, et prennent chacun exactement r valeurs. De plus, comme $\|f_i\| \leqslant 1$, on a $\mathbb{E}\|v_i\|^2 \leqslant \frac{r}{C}$ pour tout $i \in I$. Enfin, comme $\sum_{i\in I} f_i \otimes f_i = C\,Id$, on vérifie sans difficulté qu'on a $\mathbb{E}\left(\sum_{i\in I} v_i \otimes v_i\right) = Id$.

Par le Théorème 3, on peut donc trouver au moins un $\omega \in \Omega$ (l'espace de probabilité sur lequel les variables aléatoires sont définies) tel que

$$\left\|\sum_{i\in I} v_i(\omega) \otimes v_i(\omega)\right\| \leqslant \left(1 + \sqrt{\frac{r}{C}}\right)^2.$$

Écrivons pour simplifier $\mathbf{v_i} := v_i(\omega)$ et $\mathbf{k_i} := k_i(\omega)$. Soit $(I_1, \dots, I_r)$ la partition de I définie par la suite $(\mathbf{k_i})_{i\in I}$:

$$I_k := \{i \in I;\ \mathbf{k_i} = k\} \quad \text{pour } k = 1, \dots, r\,.$$

Par définition des I_k, on a

$$\sum_{i\in I} \mathbf{v_i} \otimes \mathbf{v_i} = \frac{r}{C}\left(\sum_{i\in I_1} f_i \otimes f_i\right) \oplus \cdots \oplus \left(\sum_{i\in I_r} f_i \otimes f_i\right),$$

et donc

$$\left\|\sum_{i\in I} \mathbf{v_i} \otimes \mathbf{v_i}\right\| = \max\left(\left\|\sum_{i\in I_1} f_i \otimes f_i\right\|, \dots, \left\|\sum_{i\in I_r} f_i \otimes f_i\right\|\right).$$

Comme $\left\|\sum_{i\in I} \mathbf{v_i}\otimes\mathbf{v_i}\right\| \leqslant \left(1+\sqrt{\frac{r}{C}}\right)^2$, on obtient donc

$$\left\|\sum_{i\in I_k} f_i \otimes f_i\right\| \leqslant \frac{C}{r}\left(1+\sqrt{\frac{r}{C}}\right)^2 \quad \text{pour } k = 1, \dots, r.$$

D'après (2), cela signifie que chaque suite $(f_i)_{i\in I_k}$ a une constante de Bessel au plus égale à

$$B(r, C) := \frac{C}{r}\left(1+\sqrt{\frac{r}{C}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{C}}\right)^2 C.$$

Comme $C > 1$, on a $\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{C}} < 1$ si $r = r(C)$ est assez grand, de sorte qu'on peut écrire $B(r, C) = (1-\eta)\, C$, où $\eta = \eta(C) > 0$. Et ainsi, la démonstration est terminée. □

Remarque. Je ne ferai aucune tentative pour expliquer la preuve du Théorème 3. Il en existe déjà au moins 4 belles présentations : l'article original [14], celui d'Alain Valette ([21]) correspondant à son récent exposé au séminaire Bourbaki, les « notes en ligne » de Terence Tao, et l'article [19] de Dan Timotin.

7. Résumé

Le diagramme suivant récapitule ce que j'ai raconté dans cet article. Les sigles utilisés devraient être clairs.

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathrm{F}) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[ddl, Rightarrow] & (\mathrm{BTf})_\infty \arrow[r, Leftrightarrow] & (\mathrm{BT}) \\
 & \mathrm{W}(\forall C) \arrow[d, Leftrightarrow] & \boxed{\mathrm{MSS}} \arrow[l, Rightarrow] & \\
\mathrm{AA}(\forall\delta)_\infty \arrow[r, Leftrightarrow] & \mathrm{AA}(\forall\delta) \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{AA}(\frac{1}{2}) \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & (\mathrm{KS}) \arrow[r, Leftrightarrow] & (\mathrm{A}) \arrow[r, Leftrightarrow] & (\mathrm{A})_{<\infty} \arrow[uuu, Rightarrow] \arrow[ull, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Références

[1] C. A. Akemann et J. Anderson. « Lyapunov theorems for operator algebras ». *Mem. Amer. Math. Soc.* **94** (1991).

[2] J. Anderson. « Extensions, restrictions and representations of states on C^*-algebras ». *Trans. Amer. Math. Soc.* **249** (1979), p. 303–329.

[3] A. Baranov et K. Dyakonov. « The Feichtinger Conjecture for reproducing kernels in model subspaces ». *J. Geom. Anal.* **21** (2011), p. 276–287.

[4] K. Berman et al. « Matrix norm inequalities and the relative Dixmier property ». *Integral Equations Operator Theory* **11** (1988), p. 24–48.

[5] T. Bice. « Filters in C^*-algebras ». *Canad. J. Math.* **65** (2013), p. 485–509.

[6] J. Bourgain et L. Tzafriri. « Invertibility of "large" submatrices with applications to the geometry of Banach spaces and harmonic analysis ». *Israel J. Math.* **57** (1987), p. 37–224.

[7] J. Bourgain et L. Tzafriri. « On a problem of Kadison and Singer ». *J. Reine Angew. Math.* **420** (1991),

[8] P. Casazza et al. « Frames and the Feichtinger conjecture ». *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), p. 025–1033.

[9] P. Casazza et al. « The Kadison-Singer problem in mathematics and engineering: a detailed account ». *Contemp. Math.* **414** (2006), p. 299–355.

[10] P. Dirac. *The principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 1930.

[11] R. J. Duffin et A. C. Schaeffer. « A class of nonharmonic Fourier series ». *Trans. Amer. Math. Soc.* **71** (2013), p. 341–366.

[12] R. Kadison et I. M. Singer. « Extensions of pure states ». *Amer. J. Math.* **81** (1959), p. 383–400.

[13] A. W. Marcus, D. A. Spielman et N. Srivastava. « Interlacing families I: bipartite Ramanujan graphs of all degrees ». *Preprint en ligne sur arXiv* (2013).

[14] A. W. Marcus, D. A. Spielman et N. Srivastava. « Interlacing families II: mixed characteristic polynomials and the Kadison-Singer problem ». *Preprint en ligne sur arXiv* (2013).

[15] A. W. Marcus, D. A. Spielman et N. Srivastava. « Ramanujan graphs and the solution to the Kadison-Singer problem ». *Preprint en ligne sur arXiv* (2014).

[16] N. K. Nikol'skiĭ. *Treatise on the shift operator*. Springer, 1986.

[17] G. A. Reid. « On the Calkin representations ». *Proc. London Math. Soc.* **23** (1971), p. 547–564.

[18] D. A. Spielman et N. Srivastava. « An elementary proof of the restricted invertibility theorem ». *Israel J. Math.* **190** (2012), p. 83–91.

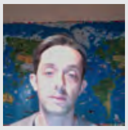
[19] D. Timotin. « The solution to the Kadison-Singer Problem - yet another presentation ». *Preprint en ligne sur arXiv* (2015).

[20] J. Tropp. « The random paving property for uniformly bounded matrices ». *Studia Math.* **185** (2008), p. 67–82.

[21] A. Valette. « Le Problème de Kadison-Singer (d'après A. Marcus, D. Spielman et N. Srivastava) ». *Preprint en ligne sur arXiv* (2014).

[22] N. Weaver. « The Kadison-Singer problem in discrepancy theory ». *Discrete Math.* **278** (), p. 227–239.

[23] P. Youssef. « Restricted invertibility and the Banach-Mazur distance to the cube ». *Mathematika* **60** (2014), p. 201–218.



Étienne Matheron

Laboratoire de Mathématiques de Lens, université d'Artois, rue Jean Souvraz S.P. 18, 62307 Lens, France.
etienne.matheron@univ-artois.fr

Étienne Matheron est professeur de mathématiques. Ses « domaines d'expertise » sont la théorie descriptive des ensembles et l'analyse fonctionnelle (géométrie des espaces de Banach, dynamique des opérateurs linéaires).

William Rowan Hamilton et le théorème de Malus-Dupin

• C.-M. Marle

1. Introduction

Les travaux sur la variation lente des éléments orbitaux des planètes, effectués de 1808 à 1810 par Joseph Louis Lagrange (1736-1813) et Siméon Denis Poisson (1781-1840), sont une des principales sources de la géométrie symplectique. Une autre source, aussi importante mais peut-être moins connue, se trouve dans les travaux sur l'optique de Pierre de Fermat (1601-1665), Christian Huygens (1629-1695), Étienne-Louis Malus (1775-1812), Charles François Dupin (1784-1873) et William Rowan Hamilton (1805-1865). Je parlerai surtout, dans ce qui suit, du théorème de Malus-Dupin de l'optique géométrique. Selon ce théorème, une famille de rayons lumineux dépendant différentiablement de deux paramètres qui, à l'entrée dans un système optique, possède une propriété (définie plus loin) appelée *rectangularité*, possède encore cette propriété à sa sortie du système. Le système optique considéré peut comporter un nombre quelconque de milieux transparents homogènes et isotropes d'indices de réfraction différents séparés par des surfaces réfractantes ainsi que des surfaces réfléchissantes, ces surfaces étant différentiables, mais pouvant être de formes quelconques.

En optique géométrique, un *rayon lumineux* dans un milieu homogène et isotrope est assimilé à un segment de droite orientée de l'espace physique $\mathcal{E}$, assimilé lui-même, une fois choisie une unité de longueur, à un espace affine euclidien de dimension 3. L'ensemble de toutes les droites orientées de $\mathcal{E}$ sera noté $\mathcal{L}$. Nous verrons plus loin que $\mathcal{L}$ possède une structure de variété symplectique de dimension 4. Les réflexions sur un miroir (assimilé à une surface lisse, c'est-à-dire différentiable de classe C^∞) ou les réfractions à travers une surface lisse séparant deux milieux d'indices de réfraction différents, peuvent être considérés comme des transformations de $\mathcal{L}$, c'est-à-dire des applications d'un ouvert de $\mathcal{L}$ sur un autre ouvert de cette variété, associant à la droite orientée qui porte le rayon incident la droite orientée qui porte le rayon réfléchi ou réfracté correspondant.

Définition 1. Une *famille de rayons dépendant différentiablement de n paramètres* $(1 \leqslant n \leqslant 4)$ est une sous-variété immergée (pas nécessairement plongée) $\mathcal{F}$ de dimension n de $\mathcal{L}$. Pour alléger nous dirons *famille de rayons à n paramètres*, la différentiabilité étant sous-entendue.

Définition 2. Un *point régulier* d'un rayon R_0 d'une famille $\mathcal{F}$ de rayons à 2 paramètres est un point m_0 de R_0 ayant la propriété suivante : pour toute surface différentiable S de l'espace $\mathcal{E}$ passant par m_0 et transverse en ce point au rayon R_0, il existe un voisinage ouvert U de R_0 dans $\mathcal{F}$ et un voisinage ouvert V de m_0 dans S, tels que chaque rayon $R \in U$ rencontre V en un point unique m et que l'application $R \mapsto m$ soit un difféomorphisme de U sur V.

Définition 3. Une famille de rayons à 2 paramètres est dite *rectangulaire* lorsque chaque point régulier d'un rayon de cette famille appartient à un petit morceau de surface différentiable traversé orthogonalement par ce rayon et par tous les rayons d'un voisinage, dans cette famille, du rayon considéré.

Je peux donner maintenant un énoncé formel précis du théorème de Malus-Dupin.

Théorème 1 (de Malus-Dupin). *Une famille rectangulaire de rayons lumineux qui entre dans un système optique comportant un nombre quelconque de surfaces lisses réfléchissantes ou réfractantes, reste rectangulaire tout au long de sa propagation, dans chacun des milieux transparents homogènes et isotropes qu'elle traverse.*

Commentaires 1. La régularité d'un point sur un rayon d'une famille $\mathcal{F}$ à 2 paramètres, et la rectangularité de cette famille, sont des propriétés locales. Il est facile de voir que si un point m_0 d'un rayon $R_0 \in \mathcal{F}$ est régulier, il existe un voisinage ouvert U de R_0 dans $\mathcal{F}$ et un voisinage ouvert W de m_0 dans $\mathcal{E}$ (non plus dans S !) tels que chaque rayon élément de U rencontre W, que chaque point de W soit situé sur un rayon élément de U unique et soit régulier sur ce rayon. À chaque point $m \in W$, associons le plan orthogonal au rayon $R \in U$ qui passe par m. Nous définissons ainsi une *distribution* de rang 2 sur l'ouvert W. La *rectangularité* de la famille $\mathcal{F}$ au voisinage du rayon R_0 équivaut à la *complète intégrabilité* de cette distribution ([14] Définition 5.2 p. 130), c'est-à-dire à l'existence d'une décomposition (appelée *feuilletage*) de W en surfaces immergées tangentes, en chacun de leurs points, au plan orthogonal au rayon élément de U passant par ce point.

Les familles de rayons à 2 paramètres rencontrées en pratique sont souvent telles qu'il existe une partie de l'espace physique $\mathcal{E}$ dans laquelle plusieurs nappes de la famille de rayons considérée se superposent. Les points non réguliers d'une famille de rayons à 2 paramètres forment les *surfaces caustiques* de la famille. Elles ont été étudiées par Hamilton dès 1824, alors qu'il n'avait que 19 ans [5] [1].

Exemples 1. Dans un milieu transparent homogène et isotrope, la famille de rayons issus d'un point lumineux est rectangulaire, car les sphères centrées sur le point lumineux sont orthogonales à tous les rayons. Il en est de même de la famille de rayons émis par une surface lumineuse différentiable dont chaque point émet un seul rayon dans la direction orthogonale à la surface lumineuse.

Soient D_1 et D_2 deux droites orthogonales de l'espace $\mathcal{E}$ ne se rencontrant pas, et $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les droites qui rencontrent à la fois D_1 et D_2 orientées dans le sens allant de D_1 vers D_2. Un calcul facile utilisant le théorème de Frobenius ([14] théorème 5.2 p. 134) montre que $\mathcal{F}$ n'est pas rectangulaire.

Après une brève présentation du contexte historique, je présenterai les grandes lignes de la preuve du théorème de Malus-Dupin due à Hamilton, puis je donnerai une autre preuve de ce théorème reposant sur la géométrie symplectique.

2. Contexte historique

Étienne Louis Malus de Mitry (1775-1812) est un militaire, mathématicien et physicien français qui a étudié les propriétés géométriques des familles de droites orientées de l'espace, en vue d'applications aux rayons lumineux. Il perfectionna la théorie ondulatoire de la lumière de Christian Huygens (1629-1695), découvrit et étudia les phénomènes de *polarisation* de la lumière et de *biréfringence*. Il participa à la désastreuse campagne de Napoléon en Égypte (1798-1801). Il y contracta une terrible maladie, la peste, et en guérit miraculeusement. Il devint directeur des études à l'École polytechnique

1. L'existence de points réguliers sur chaque rayon d'une telle famille est implicitement admise par Hamilton. Je ne donnerai pas la preuve de ce fait et n'aborderai pas l'étude des caustiques. Les lecteurs intéressés par ces questions délicates relevant de la théorie des singularités pourront consulter [1], chapitre 9, paragraphe 46, pages 248-258 et appendice 11, pages 438-439. Ils trouveront dans cet ouvrage et dans [4] (Introduction, pp. 1-150) des applications de la géométrie symplectique à l'optique géométrique bien plus élaborées que celles présentées ici.

en 1811. Affaibli par les maladies contractées en Égypte, il succomba à la tuberculose en 1812. Son journal, écrit durant la campagne d'Égypte, publié en 1892 [11], peut être téléchargé sur Gallica, le site internet de la Bibliothèque nationale.

Malus prouva [10] que la famille de rayons émise par une source lumineuse ponctuelle (qui est rectangulaire) reste rectangulaire après réflexion sur *un* miroir lisse ou réfraction à travers *une* surface lisse séparant deux milieux transparents d'indices de réfraction différents. Mais il doutait que cette propriété soit encore vraie pour *plusieurs* réflexions ou réfractions successives [12] [2]. Ses travaux sur les familles de droites orientées ont été plus tard utilisés et considérablement améliorés par Hamilton [5, 6].

Charles François Dupin (1784-1873) est un ingénieur du génie maritime et mathématicien français. Son nom est attaché à plusieurs objets mathématiques : les *cyclides de Dupin*, de remarquables surfaces qu'il découvrit alors qu'il était encore élève de Gaspard Monge (1746-1818) à l'École polytechnique, l'*indicatrice de Dupin* qui renseigne sur la forme d'une surface au voisinage d'un point [3]. Il passa plusieurs années à Corfou pour y rénover l'arsenal, tout en participant à la fondation puis aux travaux de l'Académie ionienne. Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, il consacra beaucoup d'efforts à l'éducation populaire. C'était un homme aux idées très avancées, même pour notre époque : il souhaitait qu'une bonne instruction soit donnée aux filles comme aux garçons et croyait aux effets bénéfiques, pour la société, d'une élévation générale du niveau d'éducation. Il donna une preuve géométrique très simple du théorème de Malus-Dupin pour les réflexions [3] et savait que ce théorème est vrai aussi pour les réfractions, mais n'a pas publié de preuve de ce résultat.

D'après [2], Adolphe Quetelet (1796-1874) et Joseph Diaz Gergonne (1771-1859) ont donné en 1825 une preuve du théorème de Malus-Dupin à la fois pour les réflexions et les réfractions. Indépendamment, le grand mathématicien irlandais William Rowan Hamilton (1805-1865) a lui aussi donné, un peu plus tard, une preuve complète de ce théorème [6]. Il cite Malus mais pas Dupin, ni Quetelet, ni Gergonne, ce qui explique peut-être pourquoi le théorème de Malus-Dupin, ainsi nommé dans les cours français d'optique, est plus souvent appelé *théorème de Malus* à l'étranger.

3. La démonstration de Hamilton

Je vais dans ce paragraphe présenter la preuve du théorème de Malus-Dupin donnée par Hamilton ([6]), d'abord pour une réflexion, puis pour une réfraction. Tout en respectant scrupuleusement les idées de Hamilton, j'utiliserai pour expliquer les deux variantes de cette preuve les notations vectorielles aujourd'hui familières aux mathématiciens et aux physiciens. De plus, j'illustrerai ses raisonnements par des figures, alors que les mémoires publiés par Hamilton n'en comportent aucune [4].

3.1 – Cas d'une réflexion

Considérons un rayon lumineux L_1 qui rencontre transversalement un miroir différentiable M du côté réfléchissant en un point P, et soit L_2 le rayon réfléchi correspondant. Notons $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ les vecteurs unitaires directeurs de L_1 et de L_2, et $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal au miroir M au point d'incidence P. Soit M_1 un point de L_1, M_2 un point de L_2 et O un point fixé quelconque de $\mathcal{E}$ (Figure 1). Nous supposerons que lorsque le rayon L_1 est affecté par une variation infinitésimale (qui entraîne bien sûr des variations infinitésimales parfaitement déterminées du point d'incidence P et du rayon réfléchi L_2) les points M_1 et M_2 sont eux aussi affectés par des variations infinitésimales (qui ne sont pas déterminées de manière unique) telles qu'ils restent toujours, respectivement, sur L_1 et sur L_2. Pour alléger l'écriture nous noterons $\overrightarrow{M_1}$, $\overrightarrow{M_2}$ et $\overrightarrow{P}$ les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ et $\overrightarrow{OP}$. Les lois de la réflexion montrent que les vecteurs $\vec{u}_2 - \vec{u}_1$ et $\vec{n}$ sont colinéaires tandis que pour toute variation infinitésimale de L_1, la

2. Voici une belle illustration du fameux théorème d'Arnold : *lorsqu'un théorème ou un objet mathématique porte le nom d'une personne, cette personne n'est pas celle qui a prouvé ce théorème ou créé cet objet.* Arnold ajoutait avec humour : *bien sûr, mon théorème s'applique à lui-même !*

3. Je ne pense pas que le théorème d'Arnold mentionné dans la note de bas de page précédente s'applique à ces objets, qui sont bien à lui.

4. Les éditeurs des Œuvres mathématiques de Hamilton attribuent l'absence de figure à l'influence de Lagrange, qui déclare fièrement dans la préface de son célèbre traité [7] : « On ne trouvera point de figure dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou méchaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse, verront avec plaisir la Méchanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu ainsi le domaine ».

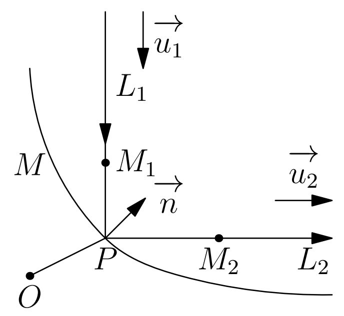
variation infinitésimale $\mathrm{d}\overrightarrow{P}$ du point d'incidence est tangente au miroir M, donc orthogonale à $\overrightarrow{n}$. Par suite

$$(\overrightarrow{u}_2-\overrightarrow{u}_1)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{P}=0, \qquad (*)$$

où le point · désigne le produit scalaire. Posons

$$\overline{M_1P}=\overrightarrow{u}_1\cdot\overrightarrow{M_1P}, \quad \overline{PM_2}=\overrightarrow{u}_2\cdot\overrightarrow{PM_2}.$$

Figure 1 – Une réflexion



Un calcul facile montre que pour toute variation infinitésimale du rayon incident L_1

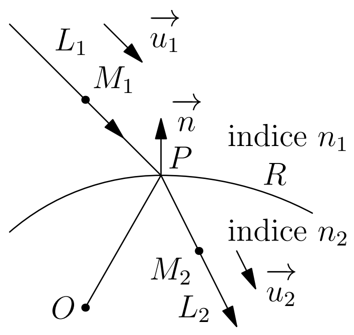
$$\overrightarrow{u}_2\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M}_2-\overrightarrow{u}_1\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M}_1=\mathrm{d}(\overline{M_1P}+\overline{PM_2}). \qquad (**)$$

Hamilton considère une famille à 2 paramètres rectangulaire $\mathcal{F}$ de rayons dont chaque élément rencontre le miroir M transversalement. Puisque $\mathcal{F}$ est rectangulaire, Hamilton peut sur chaque rayon $L_1\in\mathcal{F}$ choisir le point M_1 sur une petite surface traversée orthogonalement par les rayons éléments de $\mathcal{F}$ qui la rencontrent. Par suite $\overrightarrow{u}_1\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M}_1=0$. Il choisit, sur chaque rayon réfléchi L_2, le point M_2 de manière telle que $\overline{M_1P}+\overline{PM_2}$ ait, pour tous les rayons, une même valeur. L'égalité (**) ci-dessus montre alors que $\overrightarrow{u}_2.\mathrm{d}\overrightarrow{M}_2=0$. Au voisinage de chaque rayon réfléchi L_2 sur lequel le point M_2 est régulier, les variations infinitésimales de M_2 engendrent une petite surface traversée orthogonalement par tous les rayons réfléchis qui la rencontrent. La famille des rayons réfléchis est donc rectangulaire.

3.2 – Cas d'une réfraction

Considérons un rayon lumineux L_1 qui rencontre transversalement en un point P une surface différentiable R séparant le milieu transparent contenant ce rayon, d'indice de réfraction n_1, d'un autre milieu transparent d'indice de réfraction n_2, sous un angle d'incidence tel qu'il existe un rayon réfracté L_2 transverse à R (Figure 2). Les notations étant les mêmes que celles de 3.1, les lois de la réfraction de Snell-Descartes montrent que les égalités (*) et (**) du paragraphe 3.1 doivent être remplacées par

Figure 2 – Une réfraction



$$(n_1\overrightarrow{u}_1-n_2\overrightarrow{u}_2)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{P}=0,$$

$$n_2\overrightarrow{u}_2\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M}_2-n_1\overrightarrow{u}_1\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{M}_1=\mathrm{d}(n_1\overline{M_1P}+n_2\overline{PM_2}).$$

En utilisant la seconde égalité Hamilton montre, exactement comme dans le cas d'une réflexion, que si les rayons incidents forment une famille à 2 paramètres rectangulaire, la famille des rayons réfractés est elle aussi rectangulaire.

4. Une démonstration symplectique

Après un bref rappel concernant la forme de Liouville d'un fibré cotangent (4.1), je vais dans ce paragraphe montrer que l'ensemble $\mathcal{L}$ des droites orientées de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ possède une structure symplectique naturelle (Proposition 1) et que les familles rectangulaires en sont les sous-variétés immergées lagrangiennes (Proposition 2). Puis je montrerai que les réflexions et les réfractions sont des transformations symplectiques (Propositions 3 et 4).

4.1 – Rappels sur la forme de Liouville

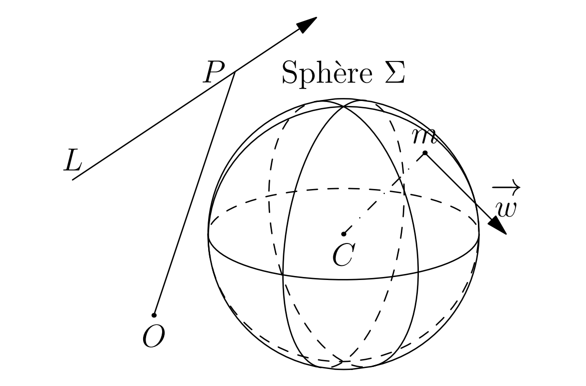
Sur le fibré cotangent T^*M à une variété différentiable M de dimension n, il existe ([9] p. 59, [8] p. 176) une 1-forme différentielle λ_M appelée *forme de Liouville*. Rappelons son expression : pour tout $\eta\in T^*M$, $\lambda_M(\eta)$ est la forme linéaire sur l'espace $T_\eta(T^*M)$

$$\lambda_M(\eta)(w)=\eta\Big(T\pi_M(w)\Big), \quad w\in T_\eta(T^*M),$$

où $\pi_M : T^*M \to M$ est la projection canonique du fibré cotangent sur sa base et $T\pi_M : T(T^*M) \to TM$ sa différentielle. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est le système de coordonnées locales dans une carte de M et $(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ le système de coordonnées locales dans la carte associée de T^*M, la forme de Liouville λ_M a pour expression locale

$$\lambda_M = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}x_i \,.$$

Figure 3 – Espace des droites orientées et fibré cotangent à une sphère



La différentielle extérieure $\mathrm{d}\lambda_M$ de la forme de Liouville est une forme symplectique, dite *forme symplectique canonique* du fibré cotangent T^*M. Son expression locale dans le système de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ utilisé ci-dessus est

$$\mathrm{d}\lambda_M = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}x_i \,.$$

Proposition 1. *Le choix d'un point O de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 détermine une bijection de l'ensemble $\mathcal{L}$ des droites orientées de $\mathcal{E}$ sur le fibré cotangent $T^*\Sigma$ à une sphère Σ de dimension 2. L'image réciproque par cette bijection de la différentielle extérieure de la forme de Liouville de $T^*\Sigma$ est une forme symplectique ω sur $\mathcal{L}$ qui ne dépend pas du choix de O.*

Preuve. Soit Σ une sphère de rayon R quelconque, par exemple $R = 1$, centrée en un point $C \in \mathcal{E}$, et soit O un autre point de $\mathcal{E}$. À chaque droite orientée $L \in \mathcal{L}$ faisons correspondre la forme linéaire η sur l'espace $T_m\Sigma$ tangent à Σ au point m tel que le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{Cm}$ soit parallèle à L et de même sens, ayant pour expression

$$\eta(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{w}\,, \quad \overrightarrow{w} \in T_m\Sigma\,,$$

où P est un point quelconque de la droite L et où $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{w}$ est le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{w}$ (Figure 3). La forme η est un *covecteur*, élément du fibré cotangent $T^*\Sigma$. L'application $\Phi_O : L \mapsto \eta$ ainsi définie est bijective, puisqu'un covecteur $\eta \in T^*\Sigma$, attaché à un point $m \in \Sigma$, est l'image par Φ_O de la droite orientée L, parallèle au vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{Cm}$ et de même sens, formée par tous les points $P \in \mathcal{E}$ qui vérifient $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{w} = \eta(\overrightarrow{w})$ pour tout $\overrightarrow{w} \in T_m\Sigma$. Il est facile de vérifier qu'elle ne dépend pas du choix du centre C de la sphère Σ. Par contre, si le point O est remplacé par un autre point $O' \in \mathcal{E}$, le covecteur $\eta \in T^*_m\Sigma$ attaché au point $m \in \Sigma$ qui correspond à une droite orientée donnée $L \in \mathcal{L}$ est remplacé par le covecteur $\eta' \in T^*_m\Sigma$, attaché au même point m, ayant pour expression $\eta'(\overrightarrow{w}) = \eta(\overrightarrow{w}) + \overrightarrow{O'O} \cdot \overrightarrow{w}$, où $\overrightarrow{w} \in T_m\Sigma$. Le covecteur η' s'écrit aussi $\eta' = \eta + \mathrm{d}f_{O'O}(m)$, où $f_{O'O} : \Sigma \to \mathbb{R}$ est la fonction différentiable $f_{O'O}(n) = \overrightarrow{O'O} \cdot \overrightarrow{Cn}$, avec $n \in \Sigma$. Les bijections $\Phi_{O'}$ et Φ_O sont donc liées par la relation $\Phi_{O'} = \Psi_{O'O} \circ \Phi_O$, où $\Psi_{O'O} : T^*\Sigma \to T^*\Sigma$ est le difféomorphisme $\eta \mapsto \eta + \mathrm{d}f_{O'O}\big(\pi_\Sigma(\eta)\big)$, $\pi_\Sigma : T^*\Sigma \to \Sigma$ étant la projection canonique du fibré cotangent sur sa base.

En identifiant $\mathcal{L}$ à $T^*\Sigma$ au moyen de la bijection déterminée par un point $O \in \mathcal{E}$, tous les objets mathématiques définis sur $T^*\Sigma$, notamment la forme de Liouville λ_Σ et sa différentielle extérieure $\mathrm{d}\lambda_\Sigma$, peuvent être transférés sur $\mathcal{L}$, qui est ainsi muni d'une 1-forme différentielle $\lambda_O = \Phi_O^*(\lambda_\Sigma)$ et d'une forme symplectique $\mathrm{d}\lambda_O = \Phi_O^*(\mathrm{d}\lambda_\Sigma)$. Lorsque le point O est remplacé par un autre point O' de $\mathcal{E}$, la définition de la forme de Liouville λ_Σ permet de montrer que

$$\Psi^*_{O'O}(\lambda_\Sigma) = \lambda_\Sigma + \pi^*_\Sigma(\mathrm{d}f_{O'O})\,,$$

donc que

$$\Psi^*_{O'O}(\mathrm{d}\lambda_\Sigma) = \mathrm{d}\lambda_\Sigma + \pi^*_\Sigma(\mathrm{d} \circ \mathrm{d}f_{O'O}) = \mathrm{d}\lambda_\Sigma\,,$$

puisque $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$. Par suite

$$\Phi^*_{O'}(\mathrm{d}\lambda_\Sigma) = \Phi^*_O\big(\Psi^*_{O'O'}(\mathrm{d}\lambda_\Sigma)\big) = \Phi^*_O(\mathrm{d}\lambda_\Sigma)\,,$$

ce qui prouve que $\omega = \Phi^*_O(\mathrm{d}\lambda_\Sigma)$ ne dépend pas du choix de O. □

4.2 – La variété des droites orientées pointées

Afin de donner à la forme symplectique ω de $\mathcal{L}$ une expression commode, adaptée aux notations vectorielles, il est utile de considérer l'ensemble $\widehat{\mathcal{L}}$ dont les éléments sont les droites orientées pointées, c'est-à-dire les couples (L,P) formés d'une droite orientée $L \in \mathcal{L}$ et d'un point P de L. C'est une variété différentiable de dimension 5 qui se projette sur la variété $\mathcal{L}$ de dimension 4, la projection $(L,P) \mapsto L$ consistant à « oublier » le point P. Soit O un point fixé quelconque de $\mathcal{E}$. Un élément (L,P) de $\widehat{\mathcal{L}}$ peut être représenté par le couple $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{u})$ formé par le vecteur $\overrightarrow{OP}$ et le vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{u}$ de L. Il existe[5] sur $\widehat{L}$ une 2-forme différentielle exacte $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ ayant pour expression

$$\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}(L,P) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}u_i = \mathrm{d}\,\overrightarrow{OP} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{u},$$

où (p_1,p_2,p_3) et (u_1,u_2,u_3) sont les composantes, dans une base orthonormée, des vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{u}$. Le signe $\wedge$ dans le membre de droite combine les produits scalaire et extérieur. La forme $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ est projetable sur $\mathcal{L}$ et a pour projection la forme symplectique ω de $\mathcal{L}$. Celle-ci admet donc pour expression

$$\omega(L) = \mathrm{d}\,\overrightarrow{OP} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{u}, \quad L \in \mathcal{L},$$

car le membre de droite ne dépend pas du choix du point P sur la droite orientée L.

Proposition 2. *Une famille de rayons dépendant différentiablement de 2 paramètres est rectangulaire au sens de la Définition 3 si et seulement si c'est une sous-variété lagrangienne immergée de la variété symplectique $(\mathcal{L},\omega)$ des droites orientées de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$.*

Preuve. Chaque élément L_0 d'une famille de rayons $\mathcal{F}$ à 2 paramètres possède un voisinage ouvert dans $\mathcal{F}$ image d'une application différentiable injective $L : (k_1,k_2) \mapsto L(k_1,k_2)$, définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$, à valeurs dans $\mathcal{L}$, telle que $L(0,0) = L_0$. Pour chaque élément $k = (k_1,k_2)$ du domaine de définition de L, notons $\overrightarrow{u}(k)$ le vecteur unitaire directeur de $L(k)$ et $P(k)$ un point de $L(k)$. Les points $P(k)$ ne sont pas déterminés de manière unique, mais il est possible de les choisir de manière telle que l'application $k \mapsto \big(P(k), \overrightarrow{u}(k)\big)$ soit différentiable. D'après 4.2,

$$\begin{aligned} L^*\omega &= \mathrm{d}\Big(\overrightarrow{P}(k)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{u}(k)\Big)\\ &= \mathrm{d}\Big(\mathrm{d}\big(\overrightarrow{P}(k)\cdot\overrightarrow{u}(k)\big) - \overrightarrow{u}(k)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{P}(k)\Big)\\ &= -\mathrm{d}\Big(\overrightarrow{u}(k)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{P}(k)\Big), \end{aligned}$$

où $\overrightarrow{P}(k)$ désigne le vecteur $\overrightarrow{OP}(k)$, O étant un point fixé quelconque de $\mathcal{E}$. La sous-variété immergée $\mathcal{F}$ est lagrangienne au voisinage de L_0 si et seulement si $L^*\omega = 0$ (voir [9] p. 92, ou [13] p. 123), donc si et seulement si la 1-forme différentielle $\overrightarrow{u}(k)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{P}(k)$ est fermée. D'après le lemme de Poincaré ([14], théorème 4.1 page 121), une 1-forme fermée est localement la différentielle d'une fonction. La sous-variété immergée $\mathcal{F}$ est donc lagrangienne au voisinage de L_0 si et seulement s'il existe une fonction différentiable $k \mapsto F(k)$ définie au voisinage de $(0,0)$ telle que

$$\overrightarrow{u}(k)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{P}(k) = \mathrm{d}F(k). \qquad (*)$$

Or pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, puisque $\overrightarrow{u}(k)$ est unitaire,

$$\mathrm{d}F(k) = \overrightarrow{u}(k)\cdot \mathrm{d}\Big(\big(F(k)+c\big)\overrightarrow{u}(k)\Big).$$

S'il existe une fonction différentiable F vérifiant $(*)$, elle vérifie donc aussi, pour toute constante $c \in \mathbb{R}$,

$$\overrightarrow{u}(k)\cdot \mathrm{d}\Big(\overrightarrow{P}(k) - \big(F(k)+c\big)\overrightarrow{u}(k)\Big) = 0. \qquad (**)$$

Supposons $\mathcal{F}$ lagrangienne au voisinage de L_0, et soit F une fonction différentiable définie au voisinage de $(0,0)$ qui vérifie $(*)$. Soit Q_0 un point régulier de L_0. Il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{P}(0,0) - \big(F(0,0)+c\big)\overrightarrow{u}(0,0) = \overrightarrow{Q}_0$, où $\overrightarrow{Q}_0$ désigne le vecteur $\overrightarrow{OQ_0}$. Les points voisins de Q_0 étant réguliers sur les rayons voisins de L_0 qui les traversent, les variations de $\overrightarrow{P}(k) - \big(F(k)+c\big)\overrightarrow{u}(k)$ pour les petites variations de k au voisinage de $(0,0)$ engendrent une surface différentiable passant par Q_0 qui, d'après l'égalité $(**)$, est traversée orthogonalement par les rayons $L(k)$ pour tous k assez voisins de $(0,0)$. La famille $\mathcal{F}$ est donc rectangulaire au voisinage de L_0.

Réciproquement, supposons $\mathcal{F}$ rectangulaire au voisinage de L_0. Comme Hamilton (qui fait tacitement cette hypothèse) nous supposerons qu'il

5. Le choix d'un point $O \in \mathcal{E}$ permet d'identifier $\widehat{\mathcal{L}}$ à la restriction $T^*_\Sigma\mathcal{E}$ du fibré cotangent $T^*\mathcal{E}$ à la sphère Σ. Dans cette identification $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ est la forme induite sur $T^*_\Sigma\mathcal{E}$ par la forme symplectique canonique $\mathrm{d}\lambda_{\mathcal{E}}$ de $T^*\mathcal{E}$.

existe un point régulier sur le rayon L_0. Il existe alors une surface différentiable passant par ce point traversée orthogonalement par L_0 et par les rayons $L(k)$ pour tous k assez voisins de $(0,0)$. Cette surface est engendrée par les points $P(k) - F(k)\vec{u}(k)$, lorsque k varie au voisinage de $(0,0)$, F étant une fonction différentiable. Cette fonction vérifie l'égalité $(*)$, donc $\mathcal{F}$ est lagrangienne au voisinage de L_0. □

Proposition 3. *Soit $M \subset \mathcal{E}$ une surface lisse réfléchissante. L'ensemble U des rayons qui rencontrent transversalement M du côté réfléchissant est un ouvert de $\mathcal{L}$ et l'application qui associe à chaque élément de U le rayon réfléchi correspondant est un difféomorphisme symplectique de U sur l'ouvert de $\mathcal{L}$ formé par les mêmes droites avec l'orientation opposée.*

Preuve. L'ensemble U est un ouvert de $\mathcal{L}$ car il est déterminé par des inégalités strictes. Notons L_1 un élément courant de U, et utilisons les notations de 3.1 (Figure 1). Comme dans ce paragraphe, le vecteur $\overrightarrow{OP}$ sera noté $\vec{P}$, O étant un point fixé, choisi de manière quelconque. L'expression de la forme symplectique ω indiquée en 4.2 montre qu'il suffit de prouver que $\mathrm{d}\vec{P} \wedge \mathrm{d}\vec{u}_2 = \mathrm{d}\vec{P} \wedge \mathrm{d}\vec{u}_1$. Compte tenu de l'égalité $\vec{u}_2 - \vec{u}_1 = 2(\vec{u}_1 \cdot \vec{n})\vec{n}$ qui exprime les lois de la réflexion,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{P} \wedge \mathrm{d}(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) &= 2\mathrm{d}\vec{P} \wedge \mathrm{d}\big((\vec{u}_1 \cdot \vec{n})\vec{n}\big)\\ &= -2\mathrm{d}\big((\vec{u}_1 \cdot \vec{n})(\vec{n} \cdot \mathrm{d}\vec{P})\big)\\ &= 0,\end{aligned}$$

car $\vec{n} \cdot \mathrm{d}\vec{P} = 0$, $\mathrm{d}\vec{P}$ étant tangent et $\vec{n}$ normal à M en P. □

Proposition 4. *Soit $R \subset \mathcal{E}$ une surface lisse séparant deux milieux transparents d'indices de réfraction différents n_1 et n_2. L'ensemble U des rayons qui rencontrent transversalement R du côté du milieu d'indice de réfraction n_1 et qui se réfractent dans le milieu d'indice de réfraction n_2 est un ouvert de $\mathcal{L}$, et l'application qui associe à chaque élément de U le rayon réfracté correspondant est un difféomorphisme symplectique de l'ouvert U de $(\mathcal{L}, n_1\omega)$ sur un ouvert de $(\mathcal{L}, n_2\omega)$.*

Preuve. Les notations étant les mêmes que dans la démonstration de la Proposition 3, soit $\vec{v}_1$ la projection orthogonale de $\vec{u}_1$ sur le plan tangent en P à R. D'après les lois de la réfraction de Snell-Descartes, le rayon réfracté correspondant L_2, s'il existe, a un vecteur unitaire directeur $\vec{u}_2$ dont la projection orthogonale $\vec{v}_2$ sur le plan tangent en P à R vérifie $n_2\vec{v}_2 = n_1\vec{v}_1$, ou $n_2\big(\vec{u}_2 - (\vec{u}_2 \cdot \vec{n})\vec{n}\big) = n_1\big(\vec{u}_1 - (\vec{u}_1 \cdot \vec{n})\vec{n}\big)$. Lorsqu'elle peut être satisfaite, cette égalité détermine $\vec{u}_2$, donc le rayon réfracté L_2. C'est toujours le cas lorsque $n_1 \leqslant n_2$, mais dans le cas contraire elle peut être satisfaite par un rayon L_2 transverse à R si et seulement si $(n_1/n_2)\|\vec{v}_1\| < 1$, c'est-à-dire si et seulement si l'angle α_1 que fait le rayon L_1 avec la normale en P à M vérifie $\sin\alpha_1 < n_2/n_1$ [6]. Étant défini par une inégalité stricte, l'ensemble U est ouvert. Pour établir le résultat annoncé il suffit, comme pour la preuve de la Proposition 3, de montrer que $n_2\mathrm{d}\vec{P} \wedge \mathrm{d}\vec{u}_2 = n_1\mathrm{d}\vec{P} \wedge \mathrm{d}\vec{u}_1$. Nous avons

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\vec{P} \wedge (n_2\mathrm{d}\vec{u}_2 - n_1\mathrm{d}\vec{u}_1)\\ &\quad = \mathrm{d}\vec{P} \wedge \mathrm{d}\big(n_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{n})\vec{n} - n_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{n})\vec{n}\big)\\ &\quad = -\mathrm{d}\Big(\big(n_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{n}) - n_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{n})\big)(\vec{n} \cdot \mathrm{d}\vec{P})\Big)\\ &\quad = 0,\end{aligned}$$

car $\vec{n} \cdot \mathrm{d}\vec{P} = 0$, $\mathrm{d}\vec{P}$ étant tangent à R et $\vec{n}$ normal à R en P. □

5. Conclusion

Puisque les réflexions sur (Proposition 3) et les réfractions à travers (Proposition 4) une surface lisse sont des difféomorphismes symplectiques et que l'application composée de plusieurs difféomorphismes symplectiques est un difféomorphisme symplectique, la propagation de la lumière à travers un système optique comportant un nombre quelconque de telles réflexions ou de réfractions est un difféomorphisme symplectique. L'image d'une sous-variété lagrangienne par un difféomorphisme symplectique est une sous-variété lagrangienne. Une famille de rayons rectangulaire étant une sous-variété lagrangienne immergée de $\mathcal{L}$, la Proposition 2 fournit une preuve du théorème de Malus-Dupin (Théorème 1) différente de celle de Hamilton.

6. Si celle condition n'est pas satisfaite le rayon incident subit une réflexion totale.

Références

[1] V. I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*. Second edition. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1978.

[2] A. Conway et J. Synge. *Appendix Editors to Sir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. I pp. 463–464*. Cambridge University Press, London, 1931.

[3] C. Dupin. *Applications de la géométrie*. Mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1816. Publié à Paris en 1822.

[4] V. Guillemin et S. Sternberg. *Symplectic techniques in physics*. Cambridge University Press, 1984.

[5] W. R. Hamilton. *On Caustics Part First. Manuscript 1824 in Sir William Rowan Hamilton mathematical Works.* **1, chapter XV**. Cambridge University Press, London, 1931.

[6] W. R. Hamilton. « Theory of systems of rays, Part First and Part Second (1827) ». *Part First: Transactions of the Royal Irish Academy* **15** (1828, pp. 69-74). Part Second: manuscript. In *Sir William Rowan Hamilton mathematical Works*, vol. I, chapter I, Cambridge University Press, London, 1931.

[7] J.-L. Lagrange. *Mécanique Analytique. Première édition chez la veuve Desaint, Paris 1808. Quatrième édition (la plus complète) dans Œuvres de Lagrange, Gauthier-Villars, Paris*. 1888.

[8] C. Laurent-Gengoux, A. Pichereau et P. Vanhaecke. *Poisson Structures*. Springer Verlag, Berlin, Heisenberg, 2013.

[9] P. Libermann et C.-M. Marle. *Symplectic geometry and analytical mechanics*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.

[10] É.-L. Malus. *Journal de l'École polytechnique* **7** (1808). p. 1–44 et, p. 84–159.

[11] É.-L. Malus. *L'agenda de Malus, Souvenirs de l'expédition d'Égypte, 1798–1801*. Honoré Champion, Paris, 1892.

[12] É.-L. Malus. *Traité d'optique*. Mémoires présentés à l'Institut par divers savants, 2, 1811, p. 214–302.

[13] J.-P. Ortega et T.-S. Ratiu. *Momentum maps and Hamiltonian reduction*. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2004.

[14] S. Sternberg. *Lectures on differential geometry*. Prentice-Hall, 1964.

Charles-Michel Marle

27 avenue du 11 novembre 1918, 92190 Meudon.

`http://marle.perso.math.cnrs.fr/`

Charles-Michel Marle est professeur honoraire à l'université Pierre et Marie Curie, en retraite depuis septembre 2000. Ses travaux concernent la géométrie symplectique et la mécanique.

Ce modeste travail est dédié à la mémoire des anciens élèves de l 'École polytechnique Étienne Louis Malus (X 1794) et Pierre Charles François Dupin (X 1801), dans l'espoir que dans l'avenir cette école formera, comme elle le fit brillamment autrefois, des scientifiques et des ingénieurs de haut niveau plutôt que des gestionnaires, des assureurs, des banquiers et des « traders ».

Je remercie chaleureusement Géry de Saxcé de m'avoir invité à faire un exposé au 58e colloque Souriau à Aix-en-Provence, et pour tous les efforts qu'il fait pour assurer le succès et la pérennité de ces colloques.

Je dois à Dominique Flament d'avoir cherché une preuve du théorème de Malus-Dupin utilisant la géométrie symplectique, après avoir présenté à son séminaire *Histoires de Géométries* un exposé sur les travaux de Hamilton en optique géométrique.

Je remercie très vivement Damien Gayet et le « referee » anonyme dont les observations et recommandations judicieuses m'ont permis d'améliorer notablement ce travail.

Plates-formes d'apprentissage et WIMS
Un voyage dans l'enseignement 3.0

• M. Kobylanski

WIMS est l'acronyme de Www Interactive Multipurpose Server. Il a été créé, loin des projecteurs et des plans de communication, par XIAO Gang (1950-2014)[1], professeur de mathématiques à l'université de Nice et auteur notamment de très beaux articles en géométrie algébrique. Il s'agit d'un serveur d'exercices sous licence libre, open source, dont la première version date de 1998 et qui est depuis 2007 développé par l'association WimsEdu de la manière la plus désintéressée[2].

Le serveur est traduit en sept langues. Il permet de créer des exercices de tout niveau, du cours préparatoire à l'université et n'est absolument pas spécifique aux mathématiques. On peut y trouver pas moins de 15 000 exercices à données aléatoires, majoritairement en français, et sans doute bien plus qui ne sont pas encore publiés.

Il existe de nombreux sites d'exercices en accès libre. La plupart proposent de suivre un parcours pré-défini et on en rencontre assez vite les limites. Je n'en connais pas d'autres qui permettent d'organiser les exercices selon sa convenance tout en donnant accès aux post-données. Il n'est jamais proposé de s'intégrer librement dans le dispositif pour modifier un exercice, ou en fabriquer un. Or c'est ce que Www Interactive Multipurpose Server (WIMS) permet de faire. Entre autres choses.

1. Comment j'ai découvert WIMS

J'ai connu WIMS fin 2011, grâce à Pascal Romon, maître de conférences à l'université de Paris-Est Marne-la-Vallée. Il nous a expliqué qu'en quelques clics il est possible de créer des classes virtuelles sur lesquelles les étudiants s'inscrivent. Dans ces classes, l'enseignant leur propose des exercices qu'il trouve sur le serveur ou qu'il crée. L'étudiant lit la question, y répond, a un retour immédiat sur sa réponse : si elle est juste ou fausse, avec éventuellement une explication ou un commentaire. C'est bien le moins que l'on puisse demander à un exercice interactif ! Autre avantage, les exercices sont à base aléatoire. Ainsi un étudiant, s'il recommence l'exercice, n'est pas face à la même version. Ce ne sera pas la même réponse, mais la même méthode. Bien sûr une note est calculée, dont les paramètres peuvent être réglés par l'enseignant. L'étudiant peut donc avancer à son rythme et de façon autonome. De son côté, l'enseignant a accès aux notes de la classe bien sûr, à d'autres indicateurs, nombres de succès et d'échecs par exercice et temps passé...

L'outil paraissait intéressant. En juin 2012 une journée de formation au numérique était organisée par les services de l'université. Son objectif était de présenter Moodle, notre nouvelle plate-forme d'enseignement numérique, mais aussi de sensibiliser les enseignants aux Massive Online Open Courses (MOOCs). Nous avons demandé d'avoir un atelier de formation à WIMS. C'est Marie-Joelle Ramage[3] qui a bien voulu venir assurer cette formation. Les membres de l'ufr de mathématiques s'y inscrivirent massivement. Au programme création d'une classe, choix des exercices...

1. Cf. André Hirschowitz *Xiao Gang : de l'ivoire au cambouis* publié dans WimsEdu `http://wimsedu.info` et `http://wims.unice.fr/xiao/xiao.html`.
2. En particulier par sa présidente, Bernadette Perrin-Riou, professeur de mathématiques à Paris-Sud.
3. Maître de conférences en chimie de l'université Paris-Sud et membre de WimsEdu.

2. Déprime ordinaire d'un enseignant de licence

Les promotions d'étudiants se succédaient et l'avenir de notre formation était loin d'être radieux.

J'enseignais depuis quinze ans un cours d'initiation aux mathématiques du supérieur en première année de licence de mathématiques et informatique. Au programme un peu de logique, apprentissage de ce qu'est une définition, une démonstration sur un contenu partant des ensembles et arrivant aux groupes en passant par les entiers. Très classique en somme. Je recommençais chaque année ce cours avec la même énergie et, en fin de semestre, les résultats étaient fort médiocres avec beaucoup de constance. Au cours des années j'avais progressé pédagogiquement. Le programme était très explicite, les attendus aussi. Un polycopié avait fini par voir le jour. Un contrôle continu comptant pas de moins de cinq devoirs surveillés avait été mis en place. Les résultats demeuraient uniformément décevants. Les rapports PISA annonçaient que la formation mathématique en France était de plus en plus inégalitaire et faiblissait. Les médailles Fields, quant à elles, continuaient de confirmer l'excellence de l'école mathématique française. Mais ne recrute-t-elle pas quasi-exclusivement sur le vivier des classes préparatoires. À l'université, dit-on, nous n'avons pas les meilleurs étudiants. Il n'y a pas moyen de lutter. C'est un combat perdu d'avance. Découragement passager, déprime ou réalité ?

Et puis depuis 2012 une nouvelle difficulté venait d'apparaître. Les capacités de calcul de nos étudiants – qui n'avaient jamais été extraordinaires – semblaient se dissoudre. Nous parvenions toujours avec un même succès (mitigé) à leur enseigner en quelques mois quelques rudiments de raisonnement mathématique et de savoir-faire pour rédiger une démonstration. Cependant lorsque, au détour d'un exercice sur le dénombrement il fallait calculer « $\frac{30}{210} = \frac{1}{7}$? », j'entendais des remarques comme « mais c'est difficile ! Vous n'allez tout de même pas nous poser une question avec des calculs aussi compliqués à l'examen ! » c'était nouveau, incontestablement ! Et pourtant nous avions travaillé, innové, dépensé de l'argent public. Quelques années plus tôt, un plan réussite en licence avait été mis en place et les préoccupations d'éducation se traduisaient encore par la création de postes à l'université. Grâce à ce plan, nous avions des heures supplémentaires dévolues au contrôle continu et un système de professeurs référents. Il s'agissait d'un dispositif pour améliorer le dialogue avec les étudiants entrants, les motiver... au cours de ces entretiens j'avais appris que la majorité des étudiants travaillaient essentiellement deux heures la veille d'un contrôle. Nous avons donc placé le contrôle le lundi matin, afin qu'ils aient tout le week-end pour réviser, et avons multiplié les contrôles.

J'ai pu aussi me rendre compte qu'être « coach » nécessitait une formation. Une année, j'avais essayé d'être un peu directive. Mal m'en a pris, j'ai atteint le contraire de l'objectif recherché : démotiver des étudiants...

3. Un mieux inespéré

Je me suis mise à WIMS au cours de l'année suivante, en septembre 2013, en l'intégrant directement à Moodle. Cette année-là, les informaticiens ont également investi Moodle et mis sur cette plateforme des éléments de cours. Pour la première fois, la courbe des notes de L1 s'est inversée, significativement. Nous n'étions pas loin de 70% de réussite au premier semestre de la licence (par rapport aux présents à l'examen). Il y avait surtout plus de bons étudiants. Nous n'avions pas touché au contenu, et même renforcé le chapitre sur les entiers en rajoutant plus de dénombrement et des calculs de sommes finies. Le chapitre sur les groupes s'était un peu allégé en contrepartie. Il s'était passé quelque chose. Était-ce grâce à WIMS ? Il y avait une piste qu'il fallait suivre. D'abord créer un projet. Les appels à projets ne manquent pas et, sur le sujet de l'enseignement numérique, le robinet du financement public s'ouvre relativement facilement. À une période de vache maigre, où, dans notre université, nous sommes amenés à réduire les options, à surcharger les TDs, où les départs à la retraite ne sont pas remplacés, c'est déjà bien. Cependant certains suspectent que l'on déshabille l'enseignement classique pour favoriser l'enseignement numérique afin, le coup d'après, de déshabiller encore plus l'enseignement classique... Si cet enseignement classique avait été particulièrement efficace je m'en serais sans doute inquiétée, mais quelque chose d'autre se passait.

La premier appel à projet, sur des fonds de notre université, fut refusé. Le second via l'ANR a pris un peu de temps mais a été accepté grâce notamment à une équipe de soutien à la rédaction des projets. Entre-temps j'avais découvert Khan-Academy, suivi des MOOCs, construit mes cours sur Moodle, croisé la problématique des classes inversées et rencontré la communauté WIMS.

4. Khan-Academy

Si vous souhaitez visiter cette plate-forme, préférez la version américaine. Cette plate-forme, à mi-chemin entre des cours, des jeux et des exercices en ligne, est centrée sur les maths. Parfois classée parmi les MOOCs, elle dispose aujourd'hui d'une place à part parmi les nouvelles ressources. L'histoire est jolie. C'est celle d'un jeune cadre travaillant aux États-Unis, Salman Khan, qui aidait souvent sa nièce en lui expliquant les maths. Son emploi dans la finance lui imposant un déménagement, il lui prépare des petites vidéos (juste avec sa voix et sur l'écran un tableau noir où apparaissent quelques lignes). Encouragé par un ami, il les poste sur You Tube. Et là surprise ! les cours de maths font un tabac. Le jeune Salman se lance dans l'aventure. Il a du talent. Il créé vidéos sur vidéos et bientôt de nombreux enseignants préfèrent laisser parler Salman Khan en classe, plutôt que de professer eux-mêmes (pendant ce temps, cela permet de séparer les effectifs et de faire des cours différenciés). Avec quelques millions de dollars procurés par de généreux sponsors, il lance en 2013 une très belle plate-forme basée sur le *common core*[4], qui permet à l'apprenant de progresser à son rythme tout en naviguant entre vidéos et exercices en ligne.

La plate-forme est ergonomique, organisée et efficace. Le système de notation encourage les bonnes pratiques, la régularité, l'attention, la persévérance, la précision, la résolution de problèmes et la souplesse intellectuelle. Le modèle financier repose sur le sponsoring et la plate-forme est libre. Sans doute disposerons-nous bientôt d'éléments statistiques validant le succès de la méthode.

Le seul défaut, à part celui de la traduction en français encore déficiente, c'est son côté figé. Nous n'avons pas la main ! Or ce qui nous intéresse, en tant qu'enseignant, c'est d'avoir de nombreuses ressources de qualité à disposition, mais aussi de pouvoir les organiser, de les adapter à notre public, de les modifier, d'en créer de nouvelles et éventuellement, de pouvoir ensuite les partager.

5. Les plates-formes de mise à disposition des ressources

Wikipedia, projet d'encyclopédie universelle créée en 2001, qui approche les 5 millions d'articles en anglais et 1,6 millions en français, est un outil extrêmement efficace. Côté organisation de la communauté, structure libre et mise à disposition libre des ressources. Les auteurs souvent anonymes sont identifiables en interne. La sélection de la valeur d'un article se fait par l'adhésion des lecteurs. C'est donc une encyclopédie, idéale pour le web, qui donne des articles de qualité et des références. C'est souvent un bon point de départ pour découvrir un sujet.

Concernant le programme scolaire français, on trouve sur la toile quantité de sites personnels, souvent de grande qualité. Il y a aussi des serveurs payants ou institutionnels. Les parcours sont fléchés de la sixième à la terminale et doivent donc s'adapter au gré des modifications de programmes. Un site semble aujourd'hui recevoir une grande adhésion de la part des collégiens et des lycéens, c'est le site *mathenpoche* devenu *labomep* développé par l'association *Sésamath*. Cette association fédère une communauté d'enseignants et fonctionne aujourd'hui suivant les modalités proches du logiciel libre. Les demandes de créations de documents ou d'exercices sont clairement identifiées. Les créateurs d'exercices travaillent librement. Un système de validation vérifie la qualité et valide la publication. *Sésamath* édite également des manuels et des livrets d'exercices que l'on peut trouver librement et gratuitement sur la toile. On peut aussi les acheter chez un libraire.

Un autre travail de regroupement de ressources, au niveau universitaire cette fois et bien plus institutionnel, est proposé par Université des sciences en ligne (Unisciel). Ce serveur met à disposition des licences types, des cours de qualité, des supports vidéos, et moissonne aussi quantités d'exercices enrichis de corrections, voire de corrections en vidéos. Les exercices proposés sont la plupart du temps classiques, mais on trouve aussi des exercices WIMS. Le site Exo7, soutenu par Unisciel, est centré sur les mathématiques de la licence. Il donne notamment accès en trois clics à tous les exercices (avec vue sur le texte et après sélection on récupère un fichier .pdf ou un fichier .tex ce qui est bien agréable).

Est-il besoin de souligner que la structuration au niveau des années post-bacs s'appuie sur les classes préparatoires. Celles-ci sont un point stable, un invariant de la culture française. Le formatage de nos élites passe par là. La qualité de notre recherche et de nos ingénieurs aussi sans doute...

4. Le *common core* est une initiative récente, associative, visant à élaborer un programme commun d'un très bon niveau aux USA. Quarante-quatre états sur cinquante y ont souscrit.

Les multiples réformes et refontes du programme dans le secondaire ne viennent qu'effleurer ce socle solide et quasi immuable. En ce qui concerne sa forme. Car la dernière réforme du collège et du lycée a conduit à supprimer des pans entiers du programme pour incorporer un premier semestre de « calculus » et introduire les probabilités.

Pour finir, il est impossible de ne pas mentionner GeoGebra. Cette plate-forme donne la possibilité de manipuler les figures géométriques de manière inégalée. Elle aussi repose sur le système des communauté de logiciels libres. Toutefois pour pouvoir être intégrée à des tablettes tactiles elle a dû faire évoluer sa licence.

6. Les plates-formes d'orchestration des ressources

Les structures collèges, lycées, académies, universités mettent de plus en plus souvent des plates-formes à disposition des enseignants et des étudiants. Ces environnement numériques de travail (ENT) reposent tous sur le même principe : permettre de structurer les promotions, les classes et surtout les cours. Celui que nous avons dans notre université s'appelle Moodle. Une fois de plus, le produit est sous licence libre. Il répond au besoin d'une plate-forme d'un établissement, proposant une interface de formation orchestrée par l'enseignant, où l'étudiant va pouvoir trouver tous ces cours, et dans chaque cours des ressources, documents, vidéos, que l'enseignant peut rendre apparentes en un clic, dévoiler pour un temps ou définitivement. Il y aussi un forum, très pratique pour transmettre des messages aux étudiants, avec la possibilité de faire des questionnaires, de récupérer des copies (un logiciel de vérification de plagia peut ensuite en contrôler l'origine). Toutefois, il y a un apprentissage à faire sur une bonne hygiène des devoirs. On se doute qu'il en faut suffisamment, mais trop devient chronophage et contre-productif. Si l'enseignant s'épuise, l'étudiant finit par en pâtir ! Reste que ces cours sont archivés d'année en année et la vie de l'enseignant est plus facile.

Moodle est aujourd'hui la plate-forme d'enseignement en ligne qui est la plus en vogue dans les universités du monde entier. Pourquoi ? Est-ce parce qu'elle est complètement modulaire dans ses fonctionnalités, simple d'utilisation, sous licence libre, animée par une communauté de développeurs ouverte et internationale ?

7. Et WIMS dans tout cela ?

Les étudiants et les enseignants qui l'utilisent l'apprécient beaucoup [5].

Le serveur permet d'organiser une classe en proposant aux élèves ou étudiants un parcours adapté. C'est donc une plate-forme d'orchestration de ressources. Il met à disposition une quantité considérable d'exercices déjà créés. C'est donc une plate-forme de mise à disposition des ressources. Des classes ouvertes proposent des parcours prédéfinis. Cela le rapproche d'une plate-forme de MOOCs. Sa fonctionnalité première reste la création d'exercices dont la structure (utilisation de l'aléatoire, de logiciels graphiques, ou de calculs formels) procure un potentiel sans doute inégalé. Il se prête à l'utilisation du CP à un niveau bien au delà de la terminale.

Pour l'élève ou l'étudiant, la stratégie du coup d'oeil sur l'écran du voisin ou l'appel à la mémoire sans avoir compris ne sert à rien, nous l'avons déjà dit. C'est aussi la possibilité d'aller vraiment à son rythme, de pouvoir répéter un exercice sans pour autant que ce soit vraiment le même. S'entraîner donc autant qu'il le faut. La correction est donnée par le logiciel, loin du regard du professeur. L'erreur n'est pas pénalisante, elle se dédramatise. Des blocages peuvent être ainsi levés.

Ce qui est très apprécié par de nombreux enseignants, c'est le côté souple de l'outil. N'étant pas institutionnel il n'est soumis à aucun cadre rigide. Et puis les sources des exercices sont disponibles, on peut modifier un exercice pour l'ajuster à ses besoins. On peut surtout créer les siens. Et cela rend l'outil unique. [6]

8. Notre projet

Notre projet [7] vise notamment à améliorer l'intégration de WIMS à Moodle. Ceci, nous l'espérons, va permettre d'ouvrir largement l'usage de WIMS à la communauté des utilisateurs de Moodle.

Nous développons des parcours adaptés à nos étudiants, en utilisant les exercices de la base WIMS mais aussi en en complétant certains et en en créant de nouveaux.

5. D'après une enquête bientôt disponible sur WimsEdu.
6. Pour plus de références voir l'article `https://www.projet-plume.org/fiche/wims`.
7. Projet IDEA-WIMS de la commue Paris-Est en partenariat UPEM et UPEC.

Au niveau pédagogique, la présence de l'aléa permet de répéter des exercices WIMS. Mais trop de répétitions d'un exercice déjà connu peut s'avérer contre-productif. Une grosse injection de temps en temps n'apporte pas grand chose à long terme. Un travail quotidien est bien plus efficace pour l'apprentissage. En mettant en place une validation par paliers, nous favorisons des répétitions espacées.

L'environnement de WIMS côté étudiant est assez austère. Nous souhaitons, tout en demeurant sobre, être un peu plus ludique et récompenser mieux les bonnes pratiques. Les statistiques que le serveur délivre aux enseignants sont déjà remarquablement fines mais peuvent être un peu améliorées.

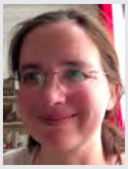
Le projet nous permettra surtout, par une pratique réflexive de cet outil, de trouver peut-être une méthodologie d'utilisation et de la proposer à la communauté.

9. En guise de conclusion

On apprend que l'histoire a commencé avec l'écriture, et que sans doute les premiers écrits représentaient des nombres. On peut considérer qu'une première phase de l'enseignement correspond à l'avènement de l'écrit. Le système éducatif n'a sans doute pas connu de grandes variations entre Rome et le début de la Renaissance, mis à part la création des universités. La seconde révolution est initiée par l'imprimerie. Le premier succès éditorial, tous temps confondus, est la Bible, mais le second, on le sait moins, est les *Éléments d'Euclide*. Une nouvelle ère commence. Les mathématiques s'ouvrent et renaissent. L'éducation a suivi le mouvement avec lenteur, l'école pour tous en est le fruit. La troisième révolution résulte de la naissance de l'informatique puis de l'avènement du web. L'éducation s'en trouve d'ores et déjà profondément modifiée.

Le cours magistral survivra-t-il à cette révolution ? Ne sera-t-il pas bientôt plus simple de s'imprégner chez soi des notions ? Pourquoi perdre du temps à se déplacer pour aller écouter le prof, alors que le cours est raconté, avec beaucoup plus de talent peut-être, par un autre en vidéo ? Encapsulé dans des grains beaucoup plus digestes que deux heures d'amphi... Oui certainement ! Cependant l'interaction réelle reste l'objectif. L'interaction numérique, via des forums ou même des exercices WIMS, n'est qu'une étape.

Les modalités de classes inversées permettent d'aller plus loin encore [8], accroître singulièrement le gain d'un cours et éviter la fatalité de l'évaporation en amphi. Certaines expériences semblent prometteuses. Mais cela c'est une autre histoire.



Magdalena Kobylanski

Université Paris-Est Marne-la-Vallée
magdalena.kobylanski@u-pem.fr

Magdalena Kobylanski, ancienne élève de l'Éns Lyon, est maître de conférences en mathématiques. Elle est porteuse du projet « Parcours wims ».

8. Marcel Lebrun – *le blog de m@rcel* http://lebrunremy.be/WordPress/ – Eric Mazur *Confessions of a Converted Lecturer* https://www.youtube.com/watch?v=WwslBPj8GgI

Juste un verre, et plus si affinités

• I. Chatterji

En matière d'efforts de parité, la première nouveauté américaine à laquelle j'ai été exposée a été le concept de la réunion informelle de femmes en maths ou en STEM (STEM étant l'acronyme américain qui désigne « science, technology, engineering and mathematics »), sans nécessairement de prétexte scientifique.

En 2002, fraîchement débarquée de Suisse où j'ai fait toutes mes études jusqu'à la thèse et où, malgré l'absence criante de femmes professeurs on ne parlait pas du tout de parité, je n'avais pas compris qu'il y avait un vrai problème de manque de femmes en maths ou plus généralement en STEM. Expat à Ithaca New York, postdoc à Cornell, une grosse université dans une ville minuscule à des heures de voiture de toute autre forme de civilisation, sans famille et peu d'amis dans le nouveau monde, j'ai volontiers participé à tous les événements de ce type car à un certain âge on n'a pas tellement d'occasions de se faire des nouveaux amis.

C'était au départ pour moi juste une manière de me faire des amitiés, mais il se trouve que j'en ai retiré beaucoup plus.

1. Comment ça marche ?

Le concept, plus ou moins gratuit, est le suivant : on réunit les femmes d'une conférence, d'un laboratoire de mathématiques ou d'un ensemble de disciplines autour d'un déjeuner, dîner ou cocktail, et on laisse les liens se créer (ou pas). Les exemples sont variés, pour en citer quelques-uns, le thé occasionnel pour les thésardes semble être relativement courant dans les grandes universités, le MSRI offre un dîner pour les participantes en début de programme, la pizza pour les femmes du club de mathématiques de l'université de l'Arkansas à l'occasion d'une conférence récurrente, ou encore la soirée entre filles de certaines conférences, organisée au dernier moment. Certaines organisatrices choisissent un thème afin de délier les langues, et d'autres préfèrent l'alcool, mais la plupart du temps le simple fait de se retrouver entre femmes suffit à faciliter le contact.

Je ne m'étalerai pas sur les échecs, comme le dîner canadien où, jeune postdoc avec un couteau sous la gorge je passais mon temps à travailler, je suis arrivée, cheveu gras et jogging troué avec une bouteille de vin et un paquet de chips, dans une assemblée de femmes qui occupaient majoritairement des postes hors recherche, qui avaient apporté des quiches fait maison et parlé de leurs gosses la plupart du temps.

J'ai bien aimé le Stem Women Happy Hour de OSU (Ohio State University), l'université dans laquelle j'ai eu un poste à caractère permanent en 2005. C'était simple : le dernier vendredi du mois à 16h, on allait boire un cocktail au bar de l'hôtel chic du campus. J'y ai rencontré des jeunes profs en physique et géologie avec lesquelles, dix ans plus tard et un continent plus loin, je suis encore amie. J'ai discuté avec des routardes qui m'ont donné toutes sortes de conseils, dont certains ont changé le cours de ma carrière. J'ai eu des discussions passionnantes qui n'avaient souvent absolument rien à voir avec des questions de parité. J'ai trouvé la socialisation qui, en période de travail intense, était nécessaire à ma santé mentale. J'y ai rencontré des femmes qui m'ont fait rêver, et d'autres qui m'ont fait cauchemarder, mais toutes celles que j'ai rencontrées m'ont aidée à me projeter dans l'avenir.

Le succès du Stem Women Happy Hour de OSU (du moins la plupart des fois où j'y suis allée) résidait en la diversité des femmes qu'on y rencontrait, tant en âge que en carrière : certaines étaient des chercheuses de pointe, et d'autres avaient des postes haut placé dans l'administration ; il y avait des jeunes en quête de conseils et enfin d'autres qui, plus rares, avaient levé le pied et venaient passer un peu de temps avec des vieilles copines. C'était une des femmes seniors qui organisait la rencontre, organisation légère qui consistait à envoyer un e-mail le jeudi soir, à une liste automatiquement fournie par les services informatiques du recteur, et à venir au bar de l'hôtel à l'heure dite. Dans les années fastes, la carte de crédit du recteur offrait la première consommation, et plus tard en période de vaches maigres chacun payait sa consommation.

Un point important pour obtenir une diversité suffisante au succès d'un tel événement, c'est que l'organisation doit être cautionnée soit par la direction soit par une association : en effet, il ne s'agit pas seulement d'aller boire une bière entre copines, il faut aussi réussir à inclure les jeunes timides et les vieilles surchargées de boulot, ce qui est difficile à obtenir sans aval extérieur.

2. Mais quel intérêt ont ce genre de rencontres ?

Selon Ruth Charney de Brandeis, ancienne présidente de l'AWM (Association for Women in Mathematics), ce genre de réunions informelles est très utiles pour développer, selon ses affinités, des relations amicales de mentorat entre mathématiciennes à des stades différents, et ainsi pour les plus jeunes recevoir des conseils cruciaux.

Afin d'avoir un autre son de cloche, j'ai posé la question à d'autres copines américaines. Toutes apprécient beaucoup ces réunions, et y passent un bon moment.

– « Ça renforce le sens communautaire », me répond Moon Duchin de Tufts, qui allait régulièrement au thé des thésardes de l'université de Chicago.

C'est un point important : selon le Harvard Business review, « un travailleur ayant le sens de la communauté sera plus productif et aura un comportement plus communautaire » (voir `https://hbr.org/2013/07/we-all-need-friends-at-work`). C'est un fait qu'il est plus facile de se lier d'amitié entre femmes (ou entre hommes j'imagine), et le manque de femmes a vite fait de nous isoler.

– « Recevoir des conseils professionnels personnalisés », me dit Katrin Wehrheim de Berkeley.

Encore un point important. C'est autour d'un gin tonic qu'une collègue plus âgée m'avait expliqué ce qui pesait dans la balance des promotions et m'avait mise en garde des dangers de dire oui à la surabondance de comités auxquels on allait me demander de participer. Certaines informations passent mieux de bouche à oreille.

– « Ça permet de partager plus librement doutes et problèmes, et de réaliser à quel point ils sont courants », me dit Sara Maloni de Brown, qui organise un thé hebdomadaire pour les thésardes de Brown.

Dans notre métier on passe la journée soit à faire chou blanc soit à péniblement essayer de comprendre des théorèmes de gens qui ont l'air tellement plus intelligents que nous, qu'on en vient à oublier que c'est le lot de la plupart des collègues.

– « Bien sûr, il y a eu des rencontres négatives où des femmes m'ont raconté des histoires horribles de discrimination sans me donner aucun conseil utile, mais j'y ai rencontré des gens qui m'ont soutenue plus tard dans ma carrière », me dit Tara Brendle de Glasgow en parlant de ses années de thèse à Columbia.

Les rencontres négatives ne le sont en fait pas tant que ça, pour autant qu'on rencontre suffisamment de collègues qui nous donnent une image positive des femmes dans le métier : elles nous permettent de mieux définir notre projection dans l'avenir et d'aller de l'avant.

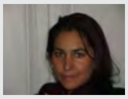
Pour conclure, comme dans toute profession, les conseils informels, les modèles et anti-modèles jouent un rôle crucial pour progresser. C'est dans des réseaux informels mi-amicaux et mi-professionnels qu'on récoltera certains conseils, qu'on se sentira suffisamment à l'aise pour poser certaines questions et aborder certains sujets. C'est pour ces raisons que ce type de rencontres, outre de passer un bon moment, a un vrai impact sur la vie des femmes concernées.

3. Pendant ce temps-là, en France...

Je réalise que mon sens d'appartenance à la communauté mathématique française a mis très longtemps à se développer, et ce malgré les conditions très favorables de mon arrivée en France en 2007 sur un poste de prof et une communauté mathématique très accueillante. Ma seule hypothèse est que j'ai manqué d'amies, car entre le peu de femmes en maths en France et ma situation personnelle j'ai surtout gardé mes amis américains (hommes et femmes mais en majorité femmes), qui avaient de la peine à comprendre ma situation (mais pourquoi tu ne négocies pas une augmentation de salaire ?). La division Pr/Mcf a été pour beaucoup dans l'isolement, les amitiés étant plus lentes à se lier à travers les grades.

J'avais pensé, une fois arrivée en France, à organiser un événement similaire, et puis je ne l'ai pas fait pour plein de raisons : d'une part dans un petit labo je n'avais pas vraiment de population évidente à inviter, mais aussi il y avait aussi la peur d'aller à l'encontre de la culture française et de m'attirer les moqueries des collègues.

J'espère que cet article va motiver les directeurs et directrices de labo suffisamment gros à subventionner de tels événements, inspirer les personnes motivées à organiser des rencontres de ce type, les collègues plus avancées à y participer malgré leur emploi du temps chargé, et les plus jeunes malgré leur timidité. En écrivant cet article et par la place qu'on m'a donnée pour le faire, je réalise que mes craintes étaient peut-être infondées et commence à me demander quelle serait la formule la plus adaptée à mon nouveau labo : pizza le premier mardi du mois ? Thé un jeudi sur deux ? Cocktails sur la plage ? À décider.



Indira Chatterji

Laboratoire J. A. Dieudonné, université de Nice

Indira Chatterji s'intéresse à la théorie géométrique des groupes.

… la dimension fractale

• C. TRICOT

On a inventé la notion de dimension pour classifier les ensembles négligeables de la droite. Selon É. Borel (1913), un ensemble de mesure nulle peut être inclus dans la réunion d'une infinité dénombrable d'intervalles u_n tels que la série $\sum u_n$ converge, et tout point de E appartient à une infinité de ces intervalles (nommés tout d'abord des *intervalles d'exclusion*). « … Pour ces diverses raisons la notion d'ensemble de mesure nulle est primordiale ; mais c'est en même temps une notion si générale qu'on ne peut espérer approfondir réellement cette notion qu'en étudiant de près cette notion générale, c'est-à-dire en ne confondant pas entre eux tous les ensembles de mesure nulle. La classification basée sur la décroissance asymptotique des intervalles d'exclusion me paraît être un premier pas dans cette étude qui s'impose aux analystes » [2]. En effet, la dimension sera toujours associée aux ordres de croissance des fonctions vers 0 ou vers l'infini.

1. Les indices associés à l'ensemble complémentaire

Borel y reviendra en 1948, à l'occasion d'un problème sur les fractions continues : à quelles conditions la somme de deux ensembles compacts de la droite est-elle de mesure nulle, ou bien au contraire contient-elle un intervalle ? Pour donner des conditions suffisantes, Borel définit divers indices de « raréfaction ». Le compact E est, dans un intervalle ouvert donné, le complémentaire d'une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts u_n. Si E est infini, et ne contient aucun intervalle, la suite (u_n) est infinie. Supposons les u_n rangés de façon que les longueurs $|u_n|$ forment une suite décroissante. La *raréfaction logarithmique* est

$$\rho = \limsup \frac{\ln n}{\ln n - \ln \sum_{i=n}^{+\infty} |u_i|}.$$

Plus tard, mais sans doute indépendamment, Besicovitch et Taylor utiliseront pour majorer la dimension de Hausdorff un indice presque identique :

$$\liminf \frac{\ln n}{\ln n - \ln \sum_{i=n}^{+\infty} |u_i|}.$$

Il existe bien d'autres indices du même type [11]. Le plus simple est sans doute

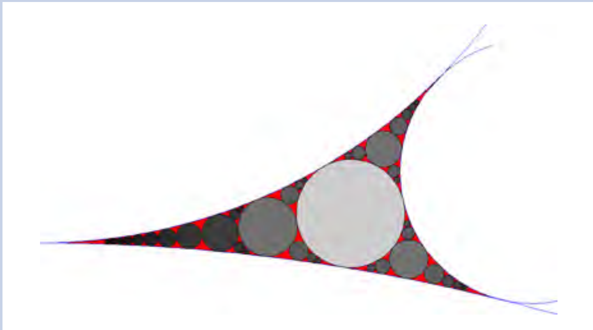
$$\limsup \frac{\ln n}{-\ln |u_n|},$$

qui peut aussi s'écrire comme l'*indice de Taylor-Besicovitch*

$$\inf\{\alpha : \sum_n |u_n|^\alpha < +\infty\}.$$

Ils seront généralisés au plan dans des études sur certaines *surfaces poreuses*. Par exemple, on a considéré l'ensemble résiduel de l'*empilement apollonien*, formé de cercles inscrits dans des triangles curvilignes. L'indice de Taylor-Besicovitch de la suite des diamètres peut être comparé à la dimension de Hausdorff (voir [12] pour des références générales).

FIGURE 1 – L'ensemble résiduel du *packing apollonien* a une dimension de Hausdorff égale à l'exposant de convergence des diamètres.

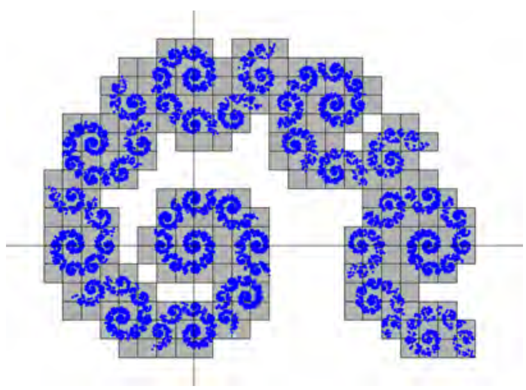


2. Et ceux associés aux recouvrements

Mais auparavant, Bouligand avait introduit des indices fondés sur les recouvrements de E par des intervalles [4]. Si ω_n désigne le nombre minimum d'intervalles de longueur l^n recouvrant E (en général on les prend dans un réseau), l'*ordre dimensionnel* de Bouligand est la limite, lorsqu'elle existe, du rapport

$$\frac{\ln \omega_n}{n \ln l}.$$

FIGURE 2 – La dimension de boîtes est l'ordre de croissance du nombre de carrés recouvrant l'ensemble.



On peut aussi compter le nombre minimum $N_\epsilon(E)$ de boules de rayon ϵ recouvrant E, ou le nombre maximum $M_\epsilon(E)$ de boules disjointes de rayon ϵ centrées sur E, et considérer les rapports

$$\frac{\ln N_\epsilon(E)}{-\ln \epsilon} \quad , \quad \frac{\ln M_\epsilon(E)}{-\ln \epsilon}.$$

Ces trois rapports ont le même ordre de grandeur lorsque n tend vers l'infini et ϵ vers 0. En cas de convergence la limite est la célèbre *dimension de boîtes*. L'avantage de ces indices de recouvrement, c'est qu'ils sont faciles à généraliser en dimension 2 ou 3. L'indice

$$\liminf \frac{\ln N_\epsilon(E)}{-\ln \epsilon}$$

a été utilisé par Pontrjagin et Schnirelmann (*ordre métrique*), pour comparaison avec la dimension topologique ; et la limite supérieure par Hawkes (*dimension d'entropie*). L'indice

$$\limsup \frac{\ln M_\epsilon(E)}{-\ln \epsilon}$$

est la *dimension métrique* de Kolmogorov. Il y a eu d'autres utilisations de ces indices, sous des vocables différents. Avons-nous donc affaire à une multitude de dimensions ? Non, car tous ces indices de recouvrement coïncident entre eux [11] ; et ils sont égaux à ceux associés aux intervalles complémentaires sur la droite, à condition que E soit de mesure nulle. Les références sont nombreuses, mais la notion mathématique est toujours la même... [12].

Un avantage de la dimension de boîtes, c'est qu'on peut en donner une approximation numérique à partir de données réelles, à condition de bien définir les échelles du calcul et de donner un sens à la notion de limite. Mais pour les théoriciens, elle a l'inconvénient de ne pas tenir compte des propriétés topologiques de l'ensemble. En particulier, la dimension d'un ensemble borné est égale à celle de son adhérence ! Bouligand avait lui-même remarqué que la dimension de l'ensemble $\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ est $\frac{1}{2}$. Vue comme une limite supérieure, la dimension de boîtes, notée Δ, a la propriété de *stabilité* [13] : $\Delta(E_1 \cup E_2) = \max\{\Delta(E_1), \Delta(E_2)\}$, mais non celle de *$\sigma$-stabilité* : elle n'est pas stable pour une réunion dénombrable.

3. La dimension de Hausdorff

C'est Hausdorff [6] en 1919 qui, s'inspirant de la théorie de la mesure de Caratheodory, précise le mieux à son époque la notion de dimension, du point de vue de la théorie de la mesure. On se donne un réel $\alpha > 0$. Pour tout $\epsilon > 0$, on considère *tous les recouvrements* possibles de E par des ensembles de diamètre $\leqslant \epsilon$:

$$H^\alpha_\epsilon(E) = \inf\{\sum_n \operatorname{diam}(E_n)^\alpha : E \subset \cup E_n, \operatorname{diam}(E_n) \leqslant \epsilon\}.$$

Cette quantité est une fonction décroissante de ϵ. Elle a donc une limite (éventuellement $+\infty$) lorsque ϵ tend vers 0. La *mesure de E en dimension α* est $H^\alpha(E) = \lim_{\epsilon \to 0} H^\alpha_\epsilon(E)$. Il s'agit d'une mesure extérieure au sens de Caratheodory. On observe qu'elle prend les valeurs 0 ou $+\infty$, sauf éventuellement pour une valeur de coupure qui est la *dimension de Hausdorff* :

$$\dim_H(E) = \inf\{\alpha : H^\alpha(E) = 0\} = \sup\{\alpha : H^\alpha(E) = +\infty\}.$$

Les mesures de Hausdorff forment toute une famille de mesures intermédiaires entre les mesures de longueur, d'aire, de volume, etc. Il suffit de changer la valeur de α. De même, $\dim_H(E)$ est une *dimension* fractionnaire, qui fait l'interpolation entre la dimension 1 du segment, 2 du disque, 3 de la sphère... Ce sera le point de départ de nombreux travaux de Besicovitch. On peut remarquer le commentaire, un peu critique, de Borel [3] à ce sujet : « Je dois tout d'abord faire observer que la méthode de M. Besicovitch présente avec la mienne une différence analogue entre ma définition de mesure des ensembles et la définition de M. Lebesgue ». En effet Borel était un adepte des *mathématiques constructives*. La dimension de Hausdorff, définie à partir de bornes inférieures, ne se construit pas numériquement. Il faudra donc distinguer entre deux types de dimensions : les dimensions théoriques, appréciées du mathématicien, et dont la valeur ne se calcule que sur des ensembles d'un type particulier ; et les dimensions de portée plus pratique, dont on peut donner des estimations sur les données numériques, mais qui s'insèrent mal dans un traité de Théorie Géométrique de la Mesure. Les unes sont σ-stables, car elles proviennent d'une famille de mesures ; et les autres non.

Dans [13] on trouvera une autre définition de dimension, qui provient également d'une famille de mesures : la *dimension d'empilement* (*packing dimension*). Au lieu de recouvrir l'ensemble E, on préfère considérer des boules disjointes centrées sur E (*empilements*) pour définir une autre famille de mesures. La dimension correspondante se comporte comme la symétrique de la dimension de Hausdorff dans de nombreux résultats (les $\liminf$ sont remplacées par des $\limsup$ etc.).

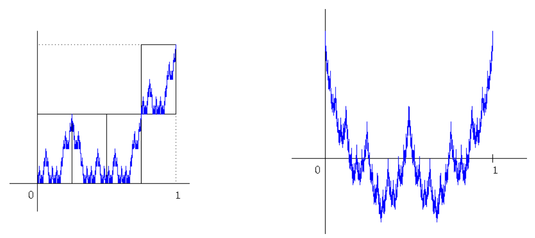
À l'époque où la mode des *fractales*, due à B. Mandelbrot, a décollé, il y a eu beaucoup de confusion sur ces notions de dimension. De nombreux chercheurs ont admis allègrement que la dimension de boîtes était une bonne approximation de la dimension de Hausdorff. L'inégalité $\dim_H(E) \leqslant \Delta(E)$ est toujours vraie, mais l'égalité ne se produit que sur des ensembles bien particuliers ; le type le plus connu est celui des ensembles *à similitude interne*, ou *auto-similaire* pour employer une mauvaise traduction du *self-similar* anglais. Ainsi la courbe de Von Koch est la réunion de 4 images d'elle-même par des similitudes de rapport $\frac{1}{3}$, et sa dimension (de boîtes, de Hausdorff, ...) vaut $\frac{\ln 4}{\ln 3}$. Mais dès qu'on étudie les ensembles *auto-affines*, les dimensions peuvent être différentes. Par exemple, pour la *courbe de McMullen* on trouve [8] $\Delta(E) = \frac{3}{2}$ et $\dim_H(E) = \ln(1+\sqrt{3})/\ln 2$.

Pour la courbe de la *fonction de Weierstrass*, définie pour tout x comme

$$W_H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^{nH} \cos(\omega^n x + \phi_n)$$

où $\omega > 1, 0 < H < 1$, et (ϕ_n) est une suite quelconque de phases, on peut vérifier que $\Delta(E) = 2 - H$. C'est aussi la valeur supposée de la dimension de Hausdorff, mais on n'a pu le démontrer que dans certains cas particuliers (par exemple, lorsque les phases sont nulles et ω est entier, voir [9]), ou presque sûrement lorsque les ϕ_n sont aléatoires [7]. L'égalité $\dim_H(E) = 2 - H$ est encore à vérifier dans toute sa généralité...

FIGURE 3 – Les courbes de McMullen et de Weierstrass.



4. Mesures portées par l'ensemble

Notons que pour calculer, de façon effective, une dimension de Hausdorff, un procédé très généralement utilisé consiste à étudier une mesure μ portée par E. La construction d'une telle mesure peut être suggérée par la construction même de E, comme dans le cas des ensembles à similitude interne. La dimension dépend alors des rapports $\alpha(x,\epsilon) = \ln \mu(B_\epsilon(x))/\ln \epsilon$. Si la mesure est bien équilibrée, c'est-à-dire si tous ces rapports tendent uniformément vers une même limite α, alors $\alpha = \Delta(E) = \dim_H(E)$. Si $\liminf \alpha(x,\epsilon) = \alpha$ pour tout x, alors α est la valeur de la dimension de Hausdorff de E. Si $\limsup \alpha(x,\epsilon) = \alpha$ pour tout x, alors α est la valeur de la dimension d'empilement. Il y a bien d'autres résultats de ce type. Mais il faut savoir que l'existence de mesures bien équilibrées n'est pas toujours facile à prouver. Pour la fonction de Weierstrass on la cherche encore !

On ne saurait décrire ici les nombreux domaines où la dimension de Hausdorff a été utilisée. Donnons quelques aperçus.

5. Relation avec la dimension capacitaire

Soit $\alpha > 0$, et μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$. Le *potentiel d'ordre* α de μ en un point x est

$$U_\alpha^\mu(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|x-y|^\alpha},$$

et l'*énergie d'ordre* α :

$$I_\alpha(\mu) = \int U_\alpha^\mu(x)\, d\mu(x) = \iint \frac{d\mu(x)\, d\mu(y)}{|x-y|^\alpha}.$$

On lui associe la *dimension capacitaire* d'un ensemble E, en posant

$$\dim_c(E) = \sup\{\alpha : \exists \mu \text{ telle que } \mu(E) > 0 \text{ et } I_\alpha(\mu) < +\infty\}.$$

En fait on peut montrer que l'on retrouve ainsi la dimension de Hausdorff : pour tout ensemble analytique E, $\dim_c(E) = \dim_H(E)$. Un tel résultat s'obtient au moyen d'arguments du type suivant (lemme de Frostman) : *si E est un compact tel que $H^\alpha(E) > 0$, on peut construire une mesure μ telle que $E = \mathrm{Supp}(\mu)$ et pour tout $x \in E$, $\mu(B_\epsilon(x)) \leqslant \epsilon^\alpha$.*

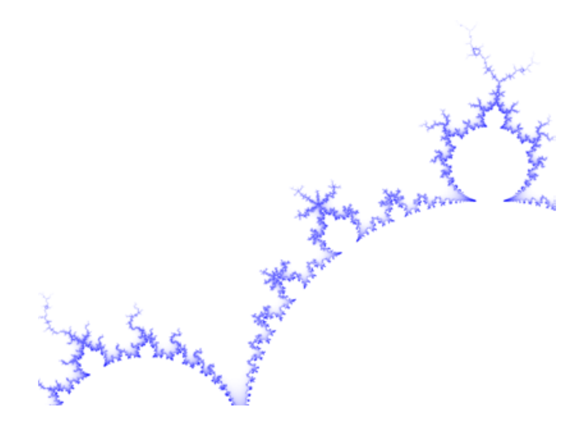
Il existe d'intéressantes applications de la théorie du potentiel en calculs de dimension, en particulier lorsqu'on étudie les projections d'un ensemble. Voici un résultat typique, qui peut se généraliser dans un contexte beaucoup plus large en utilisant les énergies de mesures.

Soit E un ensemble analytique dans le plan, et p_θ la projection orthogonale sur une droite de direction θ. Alors pour presque tout θ, $\dim_H(p_\theta(E)) = \min\{1, \dim_H(E)\}$. Et si $\dim_H(E) > 1$, alors la mesure de Lebesgue de $p_\theta(E)$ est non nulle, pour presque tout θ.

6. L'ensemble de Mandelbrot

La dimension de Hausdorff de la frontière de l'ensemble de Mandelbrot vaut 2. Ce résultat, conjecturé par Mandelbrot, a été démontré en 1990 par M. Shishikura [10]. Il reste une conjecture : cette frontière est d'aire (mesure de Lebesgue) nulle. On sait aussi que pour un ensemble dense de nombres complexes c dans cette frontière, l'ensemble de Julia J_c est de dimension 2. Il existe même des ensembles de Julia d'aire non nulle [5].

Figure 4 – Un morceau de la frontière de l'ensemble de Mandelbrot.



7. Le mouvement brownien

La trajectoire du mouvement brownien dans le plan est une courbe fractale bien connue. On sait depuis longtemps que presque sûrement la dimension de la trajectoire est 2, ce qui est le maximum dans le plan. B. Mandelbrot avait conjecturé que la dimension de la frontière extérieure (ou de celle des petites îles entourées par la trajectoire) était égale à $\frac{4}{3}$. Cette conjecture a été démontrée récemment (voir [1] pour une présentation générale).

Références

[1] V. Beffara. « Raconte-moi le processus SLE ». *Gazette des mathématiciens* **144** (2015), p. 59–63.

[2] É. Borel. « Les ensembles de mesure nulle ». *Bull. Soc. Math. Fr.* **41** (1913), p. 1–19.

[3] É. Borel. « Sur les ensembles de mesure nulle ». *Physical Review* **25** (1935), p. 7–19.

[4] G. Bouligand. « Ensembles impropres et nombre dimensionnel ». *Bull. Sc. math.* **52** (1928), p. 320–376.

[5] X. Buff et A. Chéritat. « Quadratic Julia sets with positive area ». *Ann. of Math.* **176** (2012), p. 673–746.

[6] F. Hausdorff. « Dimension und äusseres Mass ». *Math. Ann.* **79** (1919), p. 157–179.

[7] B. Hunt. « The Hausdorff dimension of graphs of Weierstrass functions ». *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), p. 791–800.

[8] C. McMullen. « The Hausdorff dimension of general Sierpinski carpets ». *Nagoya Math. J.* **96** (1984), p. 1–9.

[9] W. Shen. « Hausdorff dimension of the graphs of the classical Weierstrass functions ». *arXiv:1505.03986v1 [math.DS]* (mai 2015).

[10] M. Shishikura. « The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets ». *Ann. of Math.* **147** (1998), p. 225–267.

[11] C. Tricot. « Douze définitions de la densité logarithmique ». *Physical Review* **293** (1981), p. 549–552.

[12] C. Tricot. *Géométries et mesures fractales*. Ellipses, 2008.

[13] C. Tricot. « Two definitions of fractional dimension ». *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **91** (1982), p. 57–74.

Claude Tricot

Laboratoire de Mathématiques, université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Claude Tricot est professeur à l'université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, après un début de carrière en Angleterre et au Canada. Il a participé à l'émergence de la géométrie fractale dans les années 80, en particulier en introduisant les mesures et la dimension de packing.

Nouvelles du CNRS

• P. Biane
• R. Carles

Concours chercheurs 2015

Cette année, étaient ouverts au concours :

- 41/01 : 6 postes de directeur de recherche 2e classe ;
- 41/02 : 1 poste de chargé de recherche 1re classe, « Mathématiques pour les sciences humaines et sociales : analyse et modélisation, collecte, visualisation et traitement des données » ;
- 41/03 : 8 postes de chargé de recherche 2e classe ;
- 41/04 : 2 postes de chargé de recherche 2e classe sur des projets d'interactions des mathématiques avec d'autres disciplines ;
- 41/05 : 1 poste de chargé de recherche 2e classe « Mathématiques pour les sciences de l'information, prioritairement sur la science des données, la statistique en grande dimension et l'apprentissage » affecté dans un laboratoire relevant de l'INS2I.

Le support du poste 41/02 provient de l'INSHS. Le poste 41/05 correspond à des recrutements croisés établis depuis plusieurs années : en parallèle, une section relevant de l'INS2I (la section 6 ou la section 7, selon les années) recrute un chercheur qui sera affecté dans un laboratoire relevant principalement de l'INSMI.

Les concours CR (CR1 et CR2) se déroulent en trois étapes :

- jury d'admissibilité sur dossier (JAD) : après examen des dossiers de candidatures, le jury convoque un certain nombre de candidats pour une audition ;
- jury d'admissibilité : après audition, le jury procède à un classement ;
- jury d'admission.

La possibilité de JAD pour les concours DR n'est pas prévue par la loi, aussi le jury a-t-il choisi de ne pas auditionner les candidats DR. La section 41 tient à affirmer que la liste des candidats auditionnés aux concours CR est établie suivant des critères et des profils spécifiques, et ne peut, en conséquence, servir de référence dans un contexte différent et pour d'autres concours.

Les auditions (concours CR) ont eu lieu à l'IHP le 13 avril, devant trois sous-jurys représentant chacun plusieurs domaines des mathématiques (sous-jurys non thématiques). La section tient à remercier cet institut et ses personnels pour leur soutien et leur efficacité.

Pour le concours 41/01, 71 candidatures ont été examinées (dont 6 femmes, soit 8%).

Pour le concours 41/02, 15 candidatures ont été examinées (dont 3 femmes, soit 20%). Quatre candidats ont été retenus en vue d'une audition.

Pour le concours 41/03, 215 candidatures ont été examinées (dont 46 femmes, soit 21%, et 66 thèses soutenues à l'étranger, soit 31%). 36 candidats ont été retenus en vue d'une audition (dont 8 femmes – 22% – et 13 thèses soutenues à l'étranger – 36%).

Pour le concours 41/04, 123 dossiers ont été examinés (36 femmes, soit 29%, 40 thèses étrangères, 33%), 14 candidats ont été retenus en vue d'une audition (2 femmes – 14% – 2 thèses étrangères – 14%).

Pour le concours 41/05, 43 dossiers ont été examinés (11 femmes, soit 26%, 10 thèses étrangères, 23%), 4 candidats ont été retenus en vue d'une audition (1 femme – 25% – 2 thèses étrangères – 50%).

La liste des candidats admissibles est la suivante :

Concours 41/01

1. M. Boalch Philip
1. M. Chapoton Frédéric
1. M. Cluckers Raf

1. M. Gouezel Sébastien
1. Mme Grivaux Sophie
1. M. Tarrès Pierre
7. M. Deroin Bertrand

Concours 41/02
1. M. Rossi Luca
2. M. Salvarani Francesco

Concours 41/03
1. M. Boutonnet Rémi
1. Mme Dumaz Laure
1. M. Gao Ziyang
1. M. Horbez Camille
1. Mme Huneau Cécile
1. M. Prange Christophe
1. M. Qiu Yanqi
1. M. Queffelec Hoel
9. M. Xie Junyi
10. M. Fathi Max
11. M. Freslon Amaury

Concours 41/04
1. M. Bréhier Charles-Edouard
1. Mme Cleynen Alice
3. M. Lairez Pierre

Concours 41/05
1. M. Kanade Varun
2. Mme Kaufmann Emilie
3. M. De Balle Pigem Borja

La pression est très forte sur l'ensemble des concours, et le jury souligne la qualité très élevée des dossiers. Les perspectives annoncées par la direction de l'INSMI vont plutôt dans le sens d'une baisse du nombre de postes mis au concours, à la fois en CR et en DR. Même si l'habilitation ne fait pas partie des diplômes requis pour la candidature aux postes de DR2, en être titulaire est une indication forte de l'implication dans la formation par la recherche, et la section y est particulièrement sensible.

Même si les pratiques peuvent diverger selon le domaine des mathématiques, rappelons que dans notre communauté, le fait pour les directeurs de thèse de cosigner avec un doctorant risque d'avoir un effet négatif sur l'appréciation par le jury de la contribution du doctorant.

Le jury souligne que la proportion de femmes candidates sur chaque concours reste faible. Dans le cas des concours CR2, si la proportion de candidatures issues de l'étranger reste forte (environ un tiers des dossiers), il semble que l'attractivité du CNRS soit en baisse. Plusieurs candidats se sont désistés du concours en cours de route, parfois en invoquant explicitement une offre plus intéressante dans un autre pays. Par ailleurs, plusieurs dossiers ressemblent à une candidature supplémentaire à un post-doctorat : l'insertion dans un laboratoire français n'est pas toujours évoquée. De façon générale, même si les recrutements ne se font pas en fonction des souhaits d'affectation (c'est la direction de l'INSMI, et non le comité national, qui gère les affectations des lauréats), l'argumentation fournie par les candidats quant à leurs souhaits d'affectation est un élément permettant de mesurer la cohérence du projet. À la fois pour les candidats CR et pour les candidats DR, le dossier doit mentionner une mobilité.

Bilan 2015 du CNU section 26

L'actuel Conseil National des Universités (CNU) a été mis en place à la fin de l'année 2011 pour un mandat de quatre ans, il arrive donc à son terme et le conseil renouvelé sera installé en novembre 2015. Composée de 48 membres titulaires (et d'autant de suppléants), la section 26 est chargée du domaine « Mathématiques Appliquées et Applications des Mathématiques » représentant les trois cinquièmes des mathématiques universitaires en France.

Une présentation générale du CNU se trouve sur le site de la CPCNU [1] mais aussi sur le site spécialisé de la section 26 [2].

Les délibérations de la section se sont déroulées en trois sessions : la première session de trois jours en février 2015, à Paris dans les locaux de l'Ins-

1. `http://www.cpcnu.fr`
2. `http://cnu26.emath.fr`

titut Henri Poincaré, traitait des qualifications, la seconde session, de deux jours, en mai 2015, dans les locaux de l'université Toulouse III, concernait les évaluations de Prime d'Encadrement Doctoral et de Recherche (PEDR) et enfin la troisième session de trois jours, toujours en mai à Toulouse III concernait les promotions et l'attribution des Congés pour Recherche et Conversion Thématique (CRCT).

1. Prise de position du CNU 26

Le 12 février 2015, le conseil a souhaité prendre position à travers la motion suivante

« Le CNU 26 refuse d'organiser la session "suivi de carrière" en 2015. » (Motion adoptée à l'unanimité des 51 présents.)

2. Qualifications : Bilan 2015

Le bureau de la section a nommé en novembre 2014 deux rapporteurs par dossier. Les candidats ont connaissance de ces deux rapporteurs à qui ils doivent envoyer leur dossier. Il est important de préciser que la décision de qualification ou de refus de qualification, est le fait de la section dans son ensemble, et non pas des seuls rapporteurs (dont le rôle est avant tout de présenter les éléments du dossier, en particulier en liaison avec nos critères de qualification).

La section 26 a constaté que ses critères de qualifications étaient encore mal connus, elle rappelle que ces critères sont publics [3] et conseille très fortement aux candidats d'en prendre connaissance avant de rédiger leurs dossiers. Un nombre trop important de refus provient du fait que les dossiers ne comportent pas les informations nécessaires à leur évaluation.

2.1 – Qualifications aux fonctions de Maîtres de Conférences (MCF)

Résultats de la session 2015

Il y a eu 501 candidats inscrits, 89 dossiers non parvenus aux rapporteurs (18%) et 412 candidatures examinées. Parmi ces candidats, il y a eu 284 qualifiés (69% des dossiers examinés) , 76 non qualifiés, 52 déclarés « hors section ». Ces chiffres sont tout à fait comparables aux chiffres des années précédentes : le taux de qualification était de 67% en 2014, 65% en 2013 et de 68% en 2012.

Critères de qualification

Deux repères importants sont utilisés dans l'évaluation des dossiers, en particulier pour les candidats dont le parcours ne s'inscrit pas de façon canonique dans les thématiques de la section.

– L'aptitude à enseigner les mathématiques.
– L'activité scientifique. Dans les domaines d'application des mathématiques, cette activité ne doit pas se limiter à une description de modèles classiques et une utilisation de méthodes et algorithmes éprouvés.

Le dossier de candidature doit faire apparaître clairement les points suivants qui seront des critères importants pour l'évaluation

1. L'aptitude à enseigner les mathématiques dans un cursus de licence de mathématiques. Pour les candidats n'ayant pas un cursus français de mathématiques ou de mathématiques appliquées, la section examinera le parcours ou tout autre élément dans le dossier faisant ressortir de manière certaine cette aptitude (c'est au candidat à expliquer dans son dossier cette aptitude, certains candidats non qualifiés donnent après coup des informations nouvelles qui n'ont pas été présentées dans les dossiers envoyés aux rapporteurs. C'est bien entendu trop tard.).
2. Une activité de recherche en mathématiques appliquées suffisante qui sera évaluée sous plusieurs aspects.

   (a) Les travaux de la thèses en particulier à travers les rapports de thèses (ou s'ils n'existent pas tout autre document équivalent attestant de la qualité de la thèse). Pour les candidats titulaires d'un doctorat récent, il est naturel d'attendre qu'un ou plusieurs membres du jury de thèse, et si possible un des rapporteurs, relèvent de la section du CNU dans laquelle le candidat demande la qualification.

   (b) La présence d'une publication dans une revue à comité de lecture n'est pas exigée pour les thèses de l'année, mais elle représente un élément d'appréciation décisif

3. `http://cnu26.emath.fr/ethttp://www.cpcnu.fr/web/section-26`

pour les thèses plus anciennes. La publication d'un article en seul auteur, ou sans son directeur de thèse, peut être un élément positif d'appréciation.

(c) L'évaluation prend aussi en compte l'apport méthodologique en mathématiques, la mise en place de modèles originaux, le développement de nouveaux algorithmes, la validation par des applications réalistes.

(d) L'utilisation d'un outil mathématique standard dans un travail de recherche relevant d'une autre discipline n'est pas considéré comme suffisant à lui seul pour la qualification en Section 26 (c'est en général ce critère qui entraine le plus de refus de qualifications.). Les candidats qui s'estiment dans le champ « applications des mathématiques » sont encouragés à ne pas restreindre leurs candidatures de qualification à la 26^{e} section.

3. Le CNU s'attend à ce que les exigences précédentes sur l'activité de recherche soient aussi vérifiées sur les deux dernières années en cas de thèses datant de plus de deux ans (ceci sera particulièrement examiné en cas de requalification.).

À noter cependant : la section est souveraine dans ses choix et ses délibérations ont lieu à huis clos. En aucun cas les critères décrits ci-dessus dans ce document ne font l'objet d'une application automatique.

2.2 – Qualifications aux fonctions de Professeur (PR)

Résultats de la session 2015

Il y a eu 140 candidats inscrits, 9 dossiers non parvenus, 3 renoncements et 128 candidatures examinées. Parmi ces candidats, il y a eu 98 qualifiés (77 % des dossiers examinés), 20 non qualifiés, 9 déclarés « hors section » et 1 irrecevable. Le taux de qualification était de 75% en 2014, 69% en 2013 et de 86% en 2012.

Critères de qualification

Les points essentiels examinés dans un dossier de candidature à la qualification aux fonctions de PR sont les suivants.

– L'aptitude à enseigner les mathématiques jusqu'au niveau Master.
– L'activité et le rayonnement scientifiques.
– La démonstration d'une réelle autonomie scientifique.
– L'aptitude à l'encadrement et à la direction de recherches.

Le dossier de candidature doit faire apparaître clairement les points suivants qui seront des critères importants pour l'évaluation.

1. La section examine la formation, l'expérience pédagogique à travers le *currriculum vitae* ou tout autre élément dans le dossier faisant ressortir cette capacité.
2. Une activité de recherche en mathématiques appliquées suffisante, qui sera évaluée selon plusieurs aspects.

(a) un travail de recherche significatif en mathématiques appliquées, avec une activité avérée dans la période récente ;

(b) une production scientifique régulière et significative, qualitativement et quantitativement suffisante, sous forme d'articles publiés ou de logiciels (une attention particulière sera portée aux travaux postdoctoraux des quatre dernières années).

(c) Le rayonnement sera estimé entre autres critères par la participation aux colloques, les invitations dans les conférences internationales, les séjours à l'étranger, les collaborations internationales, les rapports de l'habilitation.

3. L'autonomie scientifique sera en particulier évaluée par le nombre et la qualité des publications (hormis celles issues de la thèse), ainsi que la variété des thèmes abordés et leur nouveauté par rapport aux travaux de thèses.
4. la capacité à encadrer des doctorants (évaluée à travers l'expertise scientifique, l'autonomie, l'expérience d'encadrement ou coencadrement de thèses ou de mémoires de Master...).

En ce qui concerne les dossiers relevant pour une grande part d'une autre discipline que les mathématiques (informatique, biologie, physique, mécanique, traitement du signal...), le dossier doit faire clairement apparaître la contribution du candidat dans le domaine des mathématiques appliquées, et préciser la nature de l'apport des mathématiques au domaine d'application.

Le dossier de candidature doit être présenté avec soin et clarté. Il est demandé que les rapports préalables à la soutenance de l'HDR soient joints au dossier (quand ils existent et sont publics, ce qui est le cas des HDR françaises).

Pour les candidats étrangers non titulaires de l'HDR française, le CNU a l'obligation en cas de qualification de délivrer une équivalence de cette HDR. Pour les candidats provenant d'un pays où existe un deuxième doctorat du niveau de l'HDR, il paraît souhaitable qu'ils l'aient obtenu.

Dans tous les cas, le niveau du dossier scientifique reste un critère déterminant.

À noter cependant : la section est souveraine dans ses choix et ses délibérations ont lieu à huis clos. En aucun cas les critères décrits ci-dessus ne font l'objet d'une application automatique.

3. Promotions

Les candidatures se font par voie électronique et avant l'examen par le CNU les dossiers sont préalablement examinés par les conseils d'administration des établissements qui émettent un avis sur les tâches administratives et l'activité d'enseignement des candidats. La section 26 du CNU a choisi de ne pas mettre d'évaluation sur les dossiers des candidats qu'elle ne propose pas à la promotion ; cela s'est traduit par les deux formulations suivantes : « La section 26 du CNU ne souhaite pas émettre d'avis sur les candidats qu'elle ne propose pas à la promotion sur le contingent qui lui est attribué » ou « La section 26 du CNU par souci d'exemplarité a décidé de ne pas promouvoir des membres en exercice du CNU26 pendant leur mandat ».

Si les fichiers proposés par le ministère comportent une trame précise à renseigner, qui répond dans l'ensemble aux attentes de notre section, nous rappelons qu'il est essentiel que les dossiers de candidature à une promotion contiennent un descriptif de l'ensemble de la carrière (et non seulement des dernières années). Outre le Curriculum Vitae et la liste complète des travaux, classés si possible par type de publication (par exemple, articles dans des revues d'audience internationale avec comité de lecture, notes aux comptes-rendus ou assimilées, actes de colloques, livres ou chapitres de livres, articles de vulgarisation ...), le dossier doit comporter des informations précises sur les activités pédagogiques, administratives, l'encadrement doctoral (thèses soutenues ou en cours, taux d'encadrement, devenir des doctorants) et les services rendus à la communauté universitaire et scientifique. Il est vivement conseillé, en plus de la liste de publications, de faire une description des travaux scientifiques en insistant sur les résultats marquants. Pour les candidats ayant à leur actif une réalisation conséquente en matière de logiciel scientifique, il est demandé de préciser dans leur dossier tous les éléments utiles à l'appréciation de celle-ci, de son impact, et de préciser également la contribution personnelle du candidat dans le cas de logiciels réalisés en équipe.

Il est souhaitable de faire aussi apparaître les participations aux conférences et les séminaires donnés, pour pouvoir mesurer la visibilité nationale et internationale. De même, la nature des tâches collectives doit apparaître clairement, pour pouvoir être prise en compte.

Chaque dossier est examiné par deux rapporteurs du CNU, désignés par le bureau, après consultation du bureau élargi. Pour les dossiers examinés plusieurs années consécutives par notre section, nous nous efforçons de choisir chaque année des rapporteurs différents.

3.1 – Promotions à la hors-classe des MCF

Nombre de promotions proposées : 21, dont 10 femmes

Nombre de promouvables : 257

Nombre de candidats : 85, dont 33 femmes.

Listes des Promus :

Berthelin Florent (Nice), Canon Marie-Claude (Saint-Etienne), Chavent Marie-Benedicte (Bordeaux), Cirade Gisele (Toulouse II), Colin Matthieu (Inst. Polytech. Bordeaux), Di Martino Bernard (Corte), Galisson Marie-Pierre (Artois), Guillotin-Plantard Nadine (Lyon I), Iosifescu-Azerad Oana (Montpellier), Keribin Christine (Paris XI), Koko Jonas (Clermont II), Koudou Efoevi (Lorraine), Labrunie Simon (Lorraine), Leffondre Karen (Bordeaux), Mazet Olivier (INSA Toulouse), Qiu Youchun (Toulouse III), Savy Nicolas (Toulouse III), Tricot Jean-Marie (Bretagne-Sud), Trottier Catherine (Montpellier II), Vial Celine (Lyon I), Vignal Marie-Helene (Toulouse III).

Les âges s'étendent de 40 à 61 ans. L'âge moyen des promus est de 47 ans.

Pour les promotions à la hors-classe, le CNU examine l'ensemble de la carrière des candidats. Outre le travail de recherche et l'activité d'enseignement, un investissement particulier dans le domaine pédagogique ou au service de la communauté scientifique est apprécié. Un objectif de ces promotions étant d'offrir une fin de carrière valorisée à des collègues méritants, le CNU est vigilant à une juste répartition des âges des collègues promus.

3.2 – Promotions à la première classe des PR

Nombre de promotions proposées : 16, dont 4 femmes

Nombre de promouvables : 210.

Nombre de candidats : 92, dont 14 femmes.

Listes des Promus :

Blanke Delphine (Avignon), Caillau Jean-Baptiste (Dijon), Dedecker Jérôme (Paris V), Fougères Anne-Laure (Lyon I), Gentil Ivan (Lyon I), GRAMA Ion (Bretagne Sud), Hillairet Claire (Lille I), Maitre Emmanuel (Grenoble), Maris Mihai (Toulouse III), Masnou Simon (Lyon I), Oudet Edouard (Grenoble I), Robert Christian (Lyon I), Rosier Carole (Littoral), Saad Mazen (Centrale Nantes), Tankov Peter (Paris VII), Tudor Ciprian (Lille I).

Les âges s'étendent de 38 à 56 ans. L'âge moyen des promus est de 44 ans.

Pour l'examen des promotions à la première classe des PR, le CNU dégage de chaque dossier de candidature les éléments suivants :

- domaine scientifique, âge et ancienneté comme PR ;
- faits marquants de la carrière, distinctions scientifiques ;
- activité et responsabilités pédagogiques ;
- responsabilités diverses (direction d'équipe ou d'établissement, appartenance à différentes commissions...) ;
- rayonnement : activités éditoriales, direction de projets (type ANR, réseaux européens, GDR...), rapporteurs de thèses ou d'HDR, invitations à l'étranger et dans des conférences internationales ;
- activité scientifique (nombre et qualité des publications, communications) ;
- encadrement doctoral (thèses encadrées et devenir des docteurs).

Les candidats sont invités à mettre clairement ces éléments en avant dans leur dossier. Le CNU veille à une répartition équilibrée entre les sous-disciplines (analyse des EDP et analyse numérique, calcul scientifique, didactique, optimisation, probabilités, statistiques), ce qui n'exclut pas les dossiers transversaux ou atypiques. Le conseil est attentif à une juste répartition des âges des collègues promus. Étant donné la pression assez forte sur ce type de promotion, en 2015 le conseil a privilégié les candidats qui étaient professeur depuis au moins trois ans.

3.3 – Promotions au premier échelon de la classe exceptionnelle des PR

Nombre de promotions proposées : 14, dont 3 femmes.

Nombre de promouvables : 222.

Nombre de candidats : 74, dont 9 femmes.

Listes des Promus :

Barthe Franck (Toulouse III), Becker Roland (Pau), Bernard Patrick (Paris IX-Dauphine), Laurent-Bonneau Béatrice (INSA Toulouse), Chalmond Bernard (Cergy), Cordier Stéphane (Orléans), Frey Pascal (Paris VI), Gobet Emmanuel (INP Grenoble), Laffite Olivier (Paris XIII), Benabdallah-Lagha Assia (Aix-Marseille), Mazure Marie-Laurence (Grenoble I), Miranville Alain (Poitiers), Novotny Antonin (Toulon), Rio Emmanuel (Versailles).

Les âges s'étendent de 43 à 65 ans. L'âge moyen des promus est de 51 ans.

Le CNU attend des candidats à une promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle qu'ils aient fait preuve de compétences exceptionnelles dans les différentes missions d'un professeur des universités, que ce soit par l'excellence de leurs travaux de recherche, ou en jouant un rôle majeur dans la communauté scientifique en termes d'encadrement, de diffusion, et de structuration de la recherche. Le conseil est attentif à une juste répartition des âges des collègues promus. Étant donné la pression assez forte sur ce type de promotion, en 2015 le conseil a privilégié les candidats qui étaient professeur depuis au moins trois ans.

3.4 – Promotions au second échelon de la classe exceptionnelle des PR

Nombre de promotions proposées : 6, dont 1 femme

Nombre de promouvables : 88.

Nombre de candidats : 39, dont 6 femmes.

Listes des Promus :

Allaire Grégoire (Paris VI), Besse Philippe (INSA Toulouse), Bougerol Philippe (Paris VI), Mohammadi

Bijan (Montpellier), Raoult Annie (Paris V), Vallois Pierre (Lorraine).

Les âges s'étendent de 51 à 63 ans. L'âge moyen des promus est de 58 ans.

Parmi les candidats dont le dossier démontre une activité soutenue dans les différentes missions des professeurs d'université, le critère essentiel pour le changement d'échelon est l'ancienneté dans la classe exceptionnelle.

3.5 – Promotions locales 2014

Les sections du cnu ne distribuent que la moitié des promotions ouvertes aux enseignants-chercheurs. Ces promotions sont distribuées entre sections du cnu proportionnellement au nombre de promouvables. Les autres promotions sont attribuées par les établissements d'enseignement supérieur. Le bilan des promotions locales pour l'année 2015 n'est pas encore disponible, mais voici le bilan des promotions locales en 2014 dans notre section.

En 2014, il y a eu 46 promotions locales en section 26, toutes catégories confondues, et 58 au niveau national.

Hors-Classe des mcf

22 promotions avaient été attribuées par le cnu en 2014 tandis que 14 promotions ont été obtenues localement. Voici la liste des promus 2014.

Bastien Jérôme (Lyon I), Bienvenue Alexis (Lyon I), Bruyant Francine (Reims), Buffard Thierry (Clermont II), Delattre Sylvain (Paris VII), Bobvinsky Sylvia (Paris X), Guillet Christophe (Dijon), Gutnic Michael (Strasbourg), Marsalle Laurence (Lille I), Meot Alain (Clermont II), Mortreux Pascal (Littoral), Ossadzow David (Paris VI), Tocquet Anne-Sophie (Evry), Torres Olivier (Lille III).

Première classe des pr

16 promotions avaient été attribuées par le cnu en 2014 tandis que 20 promotions ont été obtenues localement. Voici la liste des promus 2014.

Aujol Jean-Francois (Bordeaux), Aussel Didier (Perpignan), Berglund Nils (Orléans), Bertrand Pierre (Clermont II), Bolte Jerome (Toulouse I), Briand Philippe (Chambery), Butlen Denis (Cergy), Calka Pierre (Rouen), Chehab Jean-Paul (Amiens), Delcroix Antoine (Antilles), Diener Marc (Nice), Duquesne Thomas (Paris VI), Durrieu Gilles (Bretagne-Sud), Geoffroy Michel (Antilles), Gibaru Olivier (ENSAM), Guedda Mohammed (Amiens), Gueudet Ghislaine (Brest), Masse Bruno (Littoral), Raynaud de Fitte Paul (Rouen), Rouy Elisabeth (Centrale Lyon).

Classe exceptionnelle des pr

Le cnu avait attribué 14 promotions au premier échelon de la classe exceptionnelle en 2014 tandis que 4 promotions ont été obtenues localement. Voici la liste des promus 2014.

Bercu Bernard (Bordeaux), Rançois Olivier (INP Grenoble), Graffigne Christine (Paris V), Soulier Philippe (Paris X).

Le cnu avait attribué 6 promotions au second échelon de la classe exceptionnelle en 2014. Il y a eu 8 promotions locales :

Aubert Gilles (Nice), Bally Vlad (Marne), Blot Joel (Paris I), Bonnisseau Jean-Marc (Paris I), Brillard Alain (Mulhouse), Dias Frederic (ÉNS Cachan), Limnios Nikolaos (Compiègne), Sere Éric (Paris IX-Dauphine), Tucsnak Marius (Lorraine).

4. Attribution de semestres de congés pour recherche ou conversion thématique

Cette année les demandes étaient faites sur le site en ligne du ministère qui présentait une trame pour remplir les dossiers. Ceci a fait qu'en général les dossiers étaient plus fournis que les années passées.

La section avait 10 semestres crct pour 76 demandes. Elle a décidé d'attribuer 4 semestres à des professeurs

Achdou Yves (Paris VII), Combettes Patrick (Paris VI), Froment Jacques (Bretagne-Sud), Pommeret Denis (Aix-Marseille),

et d'attribuer 6 semestres à des maîtres de conférences

Bellanger Lise (Nantes), Domolevo Komla (Toulouse III), Grigoriu Andrea (Paris VII), Nuiro Silvere (Antilles), Poisard Caroline (Brest), Skoda Alexandre (Paris I)

En outre il a été établi la liste complémentaire classée de 15 noms suivante :

1. Decoene Astrid, mcf,

2. Breton Jean-Christophe, PR, Rennes I,
3. Thibert Boris, MCF, Paris VII,
4. Benkhaldoun Fayssal, PR, Paris 13,
5. Friguet Chloé, MCF, Bretagne Sud,
6. Gueudet Ghislaine, PR, Brest,
7. Barrier Thomas, MCF, Artois,
8. Thomas-Aignan Christine, PR, Toulouse I,
9. Fournie Michel, MCF, Toulouse III,
10. Dermoune Azzouz, PR, Lille I,
11. Muller Katia, MCF, Paris IX-Dauphine
12. Creuse Emmanuel, PR, Lille I,
13. De Castro Yohann, MCF, Paris XI,
14. Bergot Morgane, MCF, Lyon I.
15. Espinasse Thibaut, MCF, Lyon I

Dans l'attribution des CRCT, le CNU privilégie tout particulièrement les dossiers comportant un projet scientifique de qualité, précis et clairement défini : citons en particulier des séjours scientifiques à l'étranger, des participations à des trimestres thématiques, etc. Le conseil favorise également les candidats qui n'ont pas ou peu bénéficié de CRCT ou de délégation dans le passé. Il est souhaité que toutes les délégations passées des candidats soient clairement mentionnées. Dans la constitution des dossiers, il est vivement recommandé d'inclure des copies de pièces à l'appui de ces projets : lettres d'invitation, programme des semestres....

5. Bilan de la session PEDR 2015

Les 18 et 19 mai 2015, la section 26 du CNU s'est réunie dans les locaux de l'Université Toulouse 3 - Paul Sabatier, que nous remercions vivement pour son hospitalité. En particulier, merci à Thierry Klein qui a beaucoup œuvré pour notre confort, avant et pendant la session.

5.1 – Rappels

En 2014, les anciennes Prime d'Excellence Scientifique (PES) ont été transformées en PEDR. Jusqu'en 2013 l'évaluation des dossiers de candidature était faite par une commission, nommée par le ministère, chargée des candidats relevant des sections 25 et 26. Depuis 2014, ce sont les sections du CNU qui évaluent les candidats des établissements souhaitant faire appel au CNU : en 2014 et en 2015, toutes les universités l'ont fait sauf 8 établissements (universités d'Aix-Marseille, de Franche-Comté, Clermont-Ferrand 1, de Corte, Lille 2, Toulouse 1, Paris 6 et l'École pratique des hautes études).

Le présent texte a pour but de rappeler les principes utilisés par le CNU26 lors de son travail en 2014, repris en 2015. Il pourra aussi guider les candidats des années futures pour la rédaction de leur dossier et la lecture de leur évaluation. Enfin, il permettra aux représentants de la section 26 dans les conseils d'établissements de prendre en compte au mieux cette évaluation.

Le CNU 26 a dès le début estimé qu'il serait préférable que les PEDR soient évaluées par une commission distincte de celle évaluant les promotions. En février 2015, le CNU 26 a désigné Nicolas Fournier comme responsable de la session PEDR, en collaboration avec Fabienne Comte (vice-présidente du CNU 26, occasionnellement présidente en raison de l'absence du président) et Fabrice Vandebrouck (membre du bureau, assesseur MCF). Il a été aussi clairement décidé que, comme pour la session 2014, si dans un couple titulaire/suppléant du CNU26, l'un intervenait pour la session de promotion (20-21-22 mai 2015), ce serait l'autre qui siègerait pour les PEDR (18-19 mai 2015).

5.2 – Cadre général

Chaque section du CNU doit classer les candidats dans trois catégories (qui ne sont plus notées A, B, C) imposées par le ministère et désormais désignées par les seuls quotas stricts qu'elles représentent : « 20% » (les meilleurs), « 30% » et « 50% ». Ces quotas doivent être respectés de manière globale sur tous les candidats PR et MCF. L'évaluation est faite sur la période des quatre dernières années (et en aucun cas sur l'ensemble de la carrière).

Hormis le classement dans une des catégories globales précédentes, chaque candidat se voit attribuer une appréciation A (De la plus grande qualité), B (Satisfait pleinement aux critères), C (Doit être consolidé en vue d'une prime) ou X (Insuffisamment renseigné) correspondant aux quatre critères suivant

– **P** : publications / production scientifique ;
– **E** : encadrement doctoral et scientifique ;
– **D** : diffusion des travaux ;
– **R** : responsabilités scientifiques.

Le classement de chaque candidat dans une des catégories (« 20% », « 30% », « 50% ») et les appréciations de chaque critère sont ensuite transmis aux universités qui décident souverainement de l'attribution éventuelle de primes et de leur montant. Les informations remontées (malheureusement partiellement) des Universités ont montré une grande disparité concernant l'utilisation des notes fournies par le CNU pour cette attribution finale.

5.3 – Recommandations aux candidats

Le CNU26 avait rendu public dès avril 2014 sur le site du CNU[4] et sur le site de la section 26[5] des conseils aux candidats. En particulier il était précisé comment il serait tenu compte des rubriques **P**, **E**, **D** et **R**. Il est utile de rappeler ci-dessous ces recommandations qui pouvaient être connues des candidats au moment du dépôt de leur dossier.

1. Parmi ces quatre rubriques, la production scientifique jouera un rôle prépondérant dans l'évaluation des dossiers. La publication d'articles dans des revues sélectives joue un rôle important dans l'évaluation de la production scientifique, la qualité des articles étant plus importante que leur nombre, les brevets et logiciels éventuels auront une influence importante.
2. Pour l'encadrement doctoral, le nombre et le taux d'encadrement des thèses est un élément d'appréciation central mais également le devenir des docteurs. Pour les MCF, l'encadrement de mémoires de M2, le co-encadrement de thèses seront considérés.
3. Pour le rayonnement seront considérées les activités éditoriales, invitations dans des universités étrangères, expertises nationales ou internationales et les participations à des jurys de thèse ou d'HDR.
4. Pour les responsabilités scientifiques seront considérées les activités de direction de grands programmes, organisation de congrès, directions d'unités de recherche, d'écoles doctorales, responsabilités de masters ou plus généralement pédagogiques, de contrats industriels ou publics.

Ces quatre rubriques seront évaluées de manière différenciée suivant que le candidat appartienne à l'une des trois catégories suivantes : MCF, PR2 ou PR1-PREX.

Pour les MCF récemment nommés (dans les six dernières années) les rubriques encadrement doctoral et responsabilités scientifiques n'ont en général pas grand sens. Cependant, la présence d'éléments comme les encadrements de M2, co-encadrements de thèse, responsabilité d'un séminaire, etc. sera un élément crucial d'appréciation pour certains jeunes MCF particulièrement actifs. De manière générale, pour les jeunes MCF, l'autonomie acquise par rapport au directeur/travaux de thèse est un élément d'appréciation important.

Les rubriques encadrement doctoral (**E**) et responsabilités scientifiques (**R**) sont particulièrement prises en compte pour les professeurs. L'absence de responsabilités administratives ou d'encadrement doctoral dans le dossier d'un PR2 et surtout d'un PR1-PREX est une anomalie qui peut éventuellement être compensée par une activité scientifique particulièrement brillante. Il n'est pas du ressort de la PEDR de récompenser une activité administrative particulièrement intense (non accompagnée d'une production scientifique brillante) mais il est anormal qu'un PR ne prenne pas sa part d'activités administratives. La même analyse sera appliquée aux MCF « expérimentés » (recrutés depuis au moins 6 ans).

Les candidats sont invités à mettre clairement ces éléments en avant dans leur dossier. Rappelons que pour son évaluation, le CNU s'attachera quasi exclusivement à l'examen des activités dans les quatre dernières années.

À noter cependant : la section est souveraine dans ses choix et ses délibérations ont lieu à huis clos. En aucun cas les critères décrits ci-dessus ne font l'objet d'une application automatique.

5.4 – Expertise des PEDR 2015

Il y avait 282 demandes de PEDR (154 pour les MCF et 128 pour les PR), soit 39 de moins qu'en 2014 (321 demandes en 2014, 181 MCF et 140 PR). Le CNU 26, lors de son assemblée plénière de février 2015 (session Qualifications), avait préalablement décidé qu'il y aurait autant de notes « 20% » et « 30% » dans les deux corps ce qui a conduit à 28 appréciations « 20% » pour les PR et autant pour les MCF, à 42 appréciations « 30% » pour les PR et 43 pour les MCF.

Le 18 mai 2015 a été consacré à l'examen des candidatures MCF en session plénière, et le 19 mai concernait l'examen des dossiers de PR en session restreinte aux professeurs. Il a été convenu que les

4. http://www.cpcnu.fr/web/section-26
5. http://cnu26.emath.fr/

membres du CNU présents ne s'exprimeraient pas sur les dossiers de candidats de leur établissement ni sur leurs éventuels collaborateurs ou anciens étudiants.

Le bureau de la section avait nommé le 8 avril 2015 deux rapporteurs par dossier. L'un était proche de la spécialité du candidat, l'autre était un rapporteur commun à tous les candidats d'un même établissement (ou plus largement d'un même site géographique), de manière à assurer une cohérence inter-disciplinaire et interne aux établissements.

Comme dans l'an dernier, un équilibre a été recherché dans les trois catégories suivantes : MCF, PR2 (Professeurs de seconde classe) et PR1/EX (Professeurs de première classe ou de classe exceptionnelle).

La prérépartition des « 20% » et « 30% » entre les PR et les MCF et la recherche d'un équilibre entre PR2 et PR1/EX sont des choix propres à notre discipline. Cela donne un avantage aux MCF par rapport aux PR, et permet de maintenir une certaine attractivité des postes de jeunes enseignants-chercheurs. Il conduit aussi à un niveau d'exigence élevé pour les PR2 voire très élevé pour les PR1/PREX. Il est important de rappeler que (à notre connaissance) seules les sections du CNU 25 et 26 procèdent de la sorte.

Le conseil a noté qu'en général, les dossiers déposés sont de bon niveau et que l'application des quotas sur les notes « 20% », « 30% » et « 50% » a conduit à classer dans la deuxième catégorie des dossiers de recherche de tout premier plan et de noter C des dossiers de collègues effectuant bien leur métier selon les quatre critères. Il est certainement plus difficile d'être classé 20% ou 30% en section 26 pour les PR1/EX que dans d'autres disciplines. Soulignons que des MCF récemment recrutés ont obtenu, cette année comme la précédente, des évaluations « 20% » ou « 30% », car la jeunesse de leur dossier a été prise en compte. Ils ne doivent donc pas hésiter à candidater.

Une application équilibrée des critères annoncés dans la section « recommandations aux candidats » a été recherchée. Pour départager les candidats lors des arbitrages finaux, un poids plus important a été accordé à l'évaluation du travail de recherche de la case (P). Nous soulignons que contrairement à l'an passé, les notes n'ont pas été baissées pour être en accord avec le classement final, au contraire : la conséquence est qu'une série de 4 bonnes « notes » peut aboutir à une évaluation globale décevante. Cela ne doit pas être pris comme une brimade mais comme un message de protestation contre des quotas qui ne permettent pas de récompenser comme il le faudrait des collègues méritants. La section espère qu'il pourrait être tenu compte de ces messages lors des arbitrages au sein des universités.

Les membres du CNU 26 ont visé au résultat le plus impartial possible. Néammoins les quotas imposés sur les évaluations et le fait que le CNU 26 ait choisi aussi d'appliquer ces quotas dans les catégories PR2 et PR1/EX (comme expliqué précédemment) ont conduit à des décisions difficiles. C'est pourquoi le plus souvent une note 50% ne doit pas être considérée comme une appréciation négative d'un dossier mais comme le résultat de choix difficiles dus à l'existence de contraintes fortes sur les quotas. De manière symétrique il est regrettable que les quotas imposés ne permettent pas de donner la meilleure appréciation à tous les dossiers de tout premier plan.

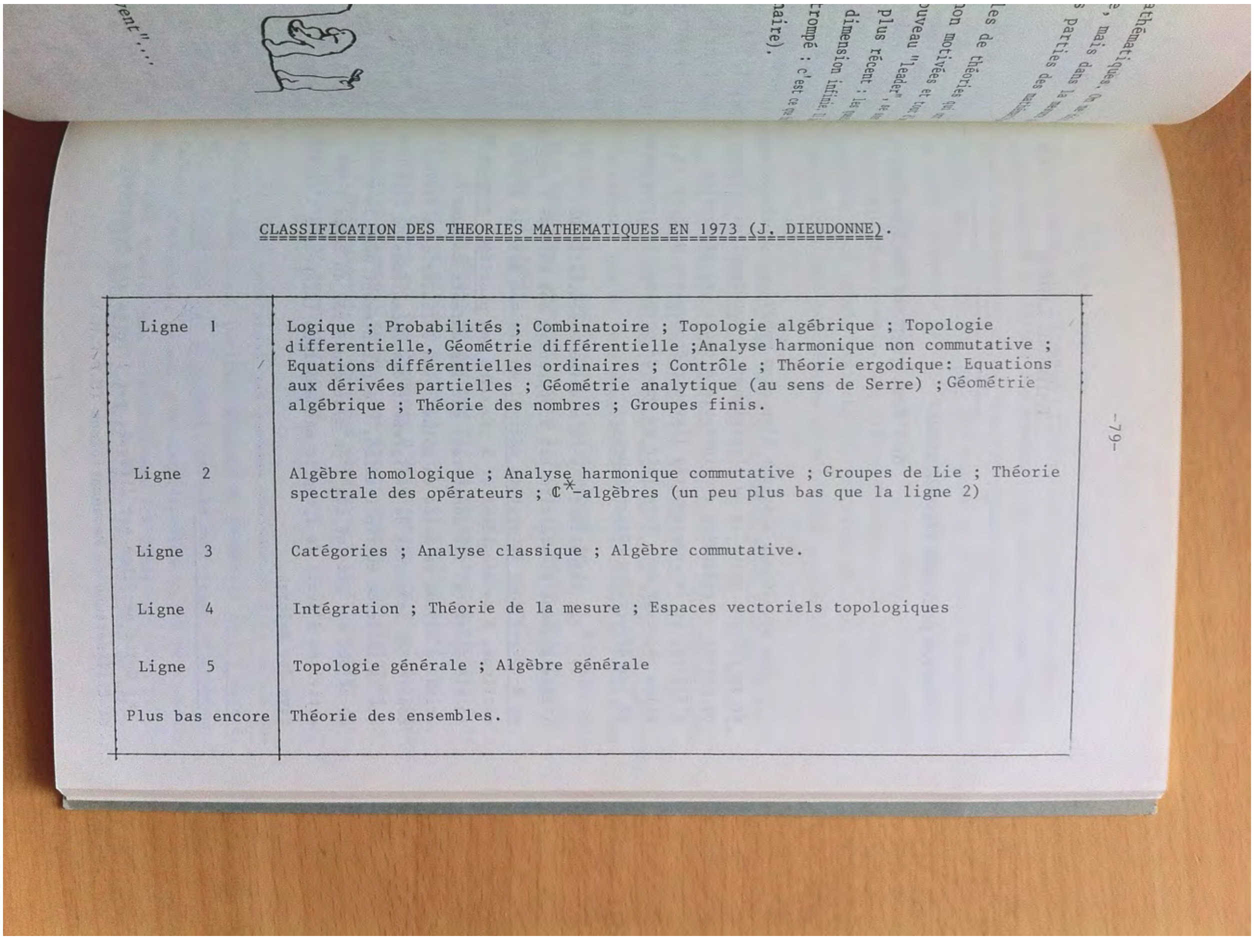
Résultats genrés.
Sur les 154 candidats MCF, il y avait 51 femmes, on pouvait donc en attendre 9.27 dans la catégorie 20% et 14.24 dans la catégorie 30% : elles sont 6 dans la première catégorie et 15 dans la seconde.

Sur les 128 candidats PR, il y avait 18 femmes (8 PR1 et 10 PR2), on pouvait donc en attendre 4.06 dans la catégorie 20% et 6.1 dans la catégorie 30% : elles sont 3 dans la première catégorie (3 PR2 et 0 PR1) et 7 dans la seconde (2 PR2 et 5 PR1).

Il semble qu'il y ait un déficit, notamment dans la première catégorie. De plus, les candidates doivent bien noter que des congés de maternité leur permettent d'allonger la période de 4 ans sur laquelle leur dossier est examiné.

Rédigé par Fabienne Comte et Marc Quincampoix, Première Vice-Présidente et Président de la section

Dans le numéro d'octobre 1974, la *Gazette* publiait un article de Jean Dieudonné intitulé « Orientation générale des mathématiques en 1973 ».



CLASSIFICATION DES THEORIES MATHEMATIQUES EN 1973 (J. DIEUDONNE).

Ligne 1	Logique ; Probabilités ; Combinatoire ; Topologie algébrique ; Topologie differentielle, Géométrie différentielle ; Analyse harmonique non commutative ; Equations différentielles ordinaires ; Contrôle ; Théorie ergodique: Equations aux dérivées partielles ; Géométrie analytique (au sens de Serre) ; Géométrie algébrique ; Théorie des nombres ; Groupes finis.
Ligne 2	Algèbre homologique ; Analyse harmonique commutative ; Groupes de Lie ; Théorie spectrale des opérateurs ; $\mathbb{C}^*$-algèbres (un peu plus bas que la ligne 2)
Ligne 3	Catégories ; Analyse classique ; Algèbre commutative.
Ligne 4	Intégration ; Théorie de la mesure ; Espaces vectoriels topologiques
Ligne 5	Topologie générale ; Algèbre générale
Plus bas encore	Théorie des ensembles.

-79-

Avec une plume finement ciselée, parfois acérée, Dieudonné donnait sa vision (revendiquée comme subjective) des mathématiques en 1973. Au détour de ses nombreuses réflexions, il proposait des distinctions à la fois entre les mathématiques mais également entre les mathématicien(ne)s. En particulier, il établissait le tableau reproduit ci-dessus, dans lequel il présentait sa classification des théories mathématiques. Il ajoutait également l'explication suivante : « les théories nobles sont en première ligne. Plus on descend vers le bas, plus les théories deviennent serviles. » Cette opinion sur les mathématiques n'avait pas manqué de susciter certaines réactions lors de sa parution[6]. Qu'en est-il aujourd'hui ?

6. Ce texte, très proche de celui publié dans la *Gazette*, est disponible à l'adresse http://sites.mathdoc.fr/PMO/PDF/S_SAMUEL-141_16.pdf

Eugene B. Dynkin
1924–2014

• J.-F. Le Gall

1. Vie scientifique

Eugene B. Dynkin (Evgeniy Borisovich Dynkin en russe) est né en 1924 à Leningrad, où il réside jusqu'en 1935 lorsque, son père ayant été accusé d'être un ennemi du peuple, sa famille est exilée au Kazakhstan. Son père, l'une des milliers de victimes de Staline, disparaît dans le goulag en 1937, alors que Dynkin a seulement 13 ans. Comme Dynkin l'écrit dans la préface de [12], c'est presque un miracle s'il peut être admis à l'âge de 16 ans à l'université de Moscou. Chaque étape de sa vie professionnelle en urss sera difficile à cause de ses origines juives et du tragique destin de son père. Dynkin bénéficiera heureusement du soutien constant de Kolmogorov, qui l'aidera à trouver un poste de professeur assistant à l'université de Moscou après sa soutenance de thèse en 1948. Il n'obtiendra cependant un poste permanent qu'en 1954. Dans ces années, Dynkin participe à la fois au séminaire de Gelfand sur les groupes de Lie et au séminaire de Kolmogorov sur les chaînes de Markov. Ses premiers travaux importants concernent les groupes et algèbres de Lie, sujet qui reste son principal domaine de recherche pendant une dizaine d'années, même s'il s'intéresse déjà aux probabilités. Au milieu des années 1950, Dynkin s'oriente vers l'étude des processus de Markov, qui était alors l'objet de l'intérêt de la plupart des grands probabilistes dans le monde. Dès lors, et jusque dans les années 2000, Dynkin restera l'un des acteurs majeurs du développement de la théorie des probabilités. En 1968, Dynkin est contraint de quitter l'université de Moscou pour l'Institut Central d'Économie et de Mathématiques de l'université de Moscou, où il travaillera sur des questions liées à la croissance et à l'équilibre économiques. En 1977, certainement à cause des difficultés qu'il continue à rencontrer en urss, Dynkin émigre aux États-Unis, et devient professeur à l'université Cornell, alors l'un des hauts lieux des probabilités mondiales avec des personnalités aussi célèbres que Harry Kesten et Frank Spitzer. Il restera à Cornell jusqu'à la fin de sa carrière, et continuera à produire des articles mathématiques de haut niveau après avoir dépassé l'âge de 80 ans.

Dynkin a reçu de nombreuses distinctions scientifiques, dont le Prix Steele de l'AMS en 1993. Il a été élu membre de l'Académie des sciences des États-Unis en 1985. Il a été invité trois fois au Congrès International des Mathématiciens, en 1962, 1970 et 1974. Sa conférence plénière de 1962 fut délivrée par Kolmogorov, car Dynkin n'avait pas été autorisé à quitter l'urss. Il est l'auteur de plus de 200 publications mathématiques, dont plusieurs livres qui furent et restent très importants dans l'histoire des probabilités.

2. Travaux mathématiques

Eugene Dynkin est l'un des très rares exemples de mathématicien contemporain qui ait apporté des contributions fondamentales dans deux domaines distincts des mathématiques, la théorie de Lie d'une part, et les probabilités d'autre part, sans même parler de ses contributions à l'économie mathématique.

2.1 – Groupes et algèbres de Lie

La première contribution importante [1], et certainement l'une des plus marquantes, de Dynkin date de 1944, alors qu'il n'a que 20 ans et est étudiant à l'université de Moscou. En préparant un exposé pour le Séminaire Gelfand sur les travaux de van der Waerden et H. Weyl, il dégage la notion de *racine simple* d'une algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{g}$, et met en évidence le rôle fondamental de cette notion dans la structure de cette algèbre. Le choix d'un système de racines simples dans le système de racines de $\mathfrak{g}$ permet de construire un ensemble de générateurs, les relations entre ces générateurs étant déterminées par les angles entre les racines simples et les rapports de leurs longueurs. Ces données, qui sont représentées dans le graphe connu sous le nom de *diagramme de Dynkin*, caractérisent donc l'algèbre de Lie à isomorphisme près. Cette observation cruciale conduisit à une simplification considérable de la classification due initialement à Killing et Cartan. Elle permit aussi à Dynkin d'obtenir une description des automorphismes de $\mathfrak{g}$ ainsi que de ses sous-algèbres semi-simples [3].

Une autre contribution marquante de Dynkin en théorie de Lie est une formule explicite pour les coefficients de la *formule de Campbell-Hausdorff* [2]. Il s'agit, pour un groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, d'exprimer le produit $\exp X \exp Y$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ sous la forme $\exp A(X,Y)$ où $A(X,Y)$ est une série en les commutateurs successifs de X et Y. Le résultat permet de simplifier la construction d'un groupe de Lie à partir d'une algèbre de Lie, et de généraliser cette construction à des algèbres de Lie de dimension infinie normées complètes sur un corps normé complet de caractéristique 0.

Les articles de Dynkin sur la topologie des groupes de Lie compacts paraissent dans la première moitié des années 1950. Hopf et Samuelson avaient montré que l'algèbre d'homologie (ou de cohomologie) d'un tel groupe possède une structure d'algèbre de Hopf graduée commutative et (par dualité) cocommutative, isomorphe à l'algèbre extérieure sur l'espace de ses éléments primitifs. Dynkin décrit les générateurs de cette algèbre lorsque le groupe G est un groupe classique. Il décrit ensuite explicitement l'application naturelle de l'homologie primitive d'un sous-groupe H de G dans l'homologie primitive de G, ce qui est fondamental dans l'étude de la topologie de l'espace homogène G/H.

Bien qu'il ait essentiellement cessé de publier dans ce sujet à partir de 1955, l'influence de Dynkin en théorie de Lie continuera bien au-delà, au travers de son séminaire à l'université de Moscou et des étudiants qui l'ont fréquenté, dont certains deviendront des mathématiciens importants du domaine (A. Kirillov, E. Vinberg, A. Onishchnik, S. Gindikin, etc.).

2.2 – Probabilités

Il n'est pas exagéré de dire que Dynkin est le père de la théorie moderne des *processus de Markov*, au même titre qu'Itô peut être appelé le père du calcul stochastique (voir à ce sujet le très intéressant article historique de Paul-André Meyer dans [12]). Les processus de Markov sont des objets fondamentaux en théorie des probabilités. De manière informelle, un processus de Markov est une famille $(X_t)_{t\geqslant 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans un espace d'états E et indexée par le paramètre temporel $t \in [0,\infty[$, qui possède la propriété dite de Markov : pour prédire l'évolution future du processus après l'instant présent t, la connaissance des états passés, c'est-à-dire de $(X_s)_{0\leqslant s\leqslant t}$, ne donne pas plus d'information que celle du seul état présent X_t. Pour ne donner qu'un exemple de l'importance de ces processus aléatoires, les évolutions de Schramm-Löwner (processus SLE) à l'origine des médailles Fields récentes de Werner et Smirnov, sont en un sens très précis dirigées par des processus de Markov sous-jacents, qui jouent un rôle essentiel dans leur étude.

Les processus de Markov avaient été étudiés avant Dynkin, mais les approches précédentes étaient surtout analytiques et reposaient sur des outils comme les probabilités de transition, dans le travail de Kolmogorov, ou les semigroupes d'opérateurs, dans celui de Feller. Dans la deuxième moitié des années 1950, Dynkin et les participants de son séminaire à Moscou développent plusieurs aspects importants de la théorie des processus de Markov. Ces contributions sont présentées dans les livres classiques de Dynkin [6, 7] publiés en URSS en 1959 et 1963. Parmi les plus importants progrès conceptuels qui peuvent être attribués à Dynkin, l'idée de voir un processus de Markov comme un (seul) processus aléatoire considéré sous une famille de probabilités correspondant aux différents points de départ possibles, et l'utilisation des opérateurs de translation. Ces notions sont maintenant familières à n'importe quel étudiant en probabilités avancées mais, quand elles furent introduites, elles révolutionnèrent la théorie et rendirent possibles les progrès qui suivirent.

Une contribution très importante [4] de Dynkin aux processus de Markov est sa formulation et sa preuve en 1956 (avec son étudiant Yushkevich) de la *propriété de Markov forte*, qui étend l'indépendance conditionnelle du passé et du futur au cas où le temps déterministe t est remplacé par un temps aléatoire satisfaisant à des conditions convenables.

La propriété de Markov forte est un outil crucial pour l'étude des processus de Markov et leurs applications. Elle avait été utilisée sans justification rigoureuse par de nombreux auteurs, notamment par Lévy, avant le travail de Dynkin et Yushkevich (une preuve, mais seulement pour le mouvement brownien, fut donnée par Hunt en 1956 indépendamment de [4]).

Dans les années 1960 et 1970, Dynkin consacre beaucoup de son activité mathématique aux *frontières* de processus de Markov, et notamment aux liens avec la *théorie de Martin pour les fonctions harmoniques*. Ses travaux sur le comportement asymptotique du mouvement brownien sur les matrices hermitiennes [8], l'objet de sa conférence plénière à l'ICM de 1962, eurent une influence importante sur les travaux suivants, notamment de Furstenberg et Guivarc'h, sur la compactification des espaces symétriques. L'article [5] de Dynkin et Malyutov de 1961, qui identifie la frontière de Martin pour des marches aléatoires sur des groupes discrets non-abéliens, ouvrit la voie à de nombreux autres développements majeurs de la théorie des marches aléatoires sur les groupes.

Une série d'articles importants de Dynkin autour des années 1970 traite des frontières d'entrée et de sortie pour des processus de Markov généraux, avec une théorie à la fois plus simple et plus générale que celles développées auparavant, notamment par Hunt. Dans cette direction, un apport très important de Dynkin (ou plutôt de son école puisque l'article fondateur [9] est dû à son étudiant Kuznetsov en 1974) est l'invention des mesures appelées aujourd'hui les *mesures de Kuznetsov*. Sous ces mesures, qui sont typiquement de masse infinie, le processus est défini sur un intervalle $]\alpha,\beta[$ de la droite réelle, de manière que la loi de X_t ne dépende pas de t, et que le futur et le passé jouent des rôles symétriques. Les mesures de Kuznetsov fournissent un outil de calcul très efficace dans des exemples concrets, et par ailleurs ont été utilisées de manière cruciale dans les travaux de l'école américaine (Getoor, Sharpe, ...).

À partir du début des années 1980, Dynkin commence à s'intéresser aux *champs aléatoires* (un champ aléatoire associe une variable aléatoire à chaque fonction appartenant à un certain espace fonctionnel). Son résultat le plus marquant dans ce domaine est le théorème maintenant appelé le *théorème d'isomorphisme de Dynkin* [10], qui établit, d'une manière complètement inattendue, une relation surprenante entre le champ d'occupation d'un processus de Markov (associant à chaque fonction f l'intégrale de f le long de la trajectoire du processus) et un autre champ aléatoire gaussien, dont les propriétés peuvent être étudiées grâce aux très nombreux résultats connus sur les processus gaussiens. Le théorème d'isomorphisme de Dynkin a trouvé une foule d'applications développées dans de multiples travaux de Michael Marcus, Jay Rosen et bien d'autres.

Dans la deuxième moitié des années 1980, Dynkin écrit plusieurs articles importants autour des champs aléatoires associés aux auto-intersections du mouvement brownien. Cette étude était motivée en partie par le travail de Symanzik utilisant les auto-intersections browniennes comme outil en théorie quantique des champs. Dans le cas (le plus intéressant) de la dimension deux, Dynkin [11] parvient, à l'aide d'une étude combinatoire profonde, à construire des *temps locaux d'intersection renormalisés* mesurant pour chaque entier k la quantité de points de multiplicité k. Là encore, ces travaux ont eu une influence considérable, notamment dans l'école française (Yor, Le Gall, ...).

À partir de 1990 et jusqu'à la fin de sa carrière mathématique, Dynkin s'est intéressé aux processus de branchement à valeurs mesures introduits et étudiés par Dawson et Perkins notamment, auxquels il donna le nom de *superprocessus*. On doit à Dynkin, outre l'introduction de nombreux outils fondamentaux pour l'étude des superprocessus, d'avoir su relier ces processus aléatoires à une classe d'équations aux dérivées partielles semilinéaires du type $Lu = \psi(u)$, et d'avoir utilisé ces relations pour résoudre plusieurs problèmes ouverts importants du sujet. Le travail de Dynkin, en collaboration avec Kuznetsov, conduisit aussi à des résultats analytiques nouveaux, dont la classification par les traces à la frontière des solutions positives d'équations de la forme $\Delta u = u^p$ dans un domaine de $\mathbb{R}^d$ [13]. Ces travaux furent l'occasion d'interactions très fructueuses avec des spécialistes d'équations aux dérivées partielles comme Moshe Marcus et Laurent Véron.

3. L'influence de Dynkin

L'œuvre mathématique de Dynkin contient de nombreux travaux fondamentaux, qui ont été le point de départ de beaucoup de développements ultérieurs et lui assurent une place marquante dans l'histoire des mathématiques. L'influence de Dynkin a aussi été très sensible dans la manière qu'il a eue d'aider les jeunes mathématiciens qu'il côtoyait et de leur faire partager ses idées : il était très important pour lui d'encourager les jeunes talents. La liste des étudiants de Dynkin à Moscou a été comparée (dans la citation pour le Prix Steele) à un « Who's who in Russian probability theory » : on y trouve en effet des noms aussi célèbres que Skorokhod, Girsanov, Freidlin, Ventzell, Krylov ou encore Molchanov. De manière évidente, Dynkin a joué un rôle décisif dans le développement de cette école russe qui a été si importante dans l'histoire des probabilités entre 1955 et 1980.

Même en dehors de ses étudiants, Dynkin a joué un rôle considérable dans l'évolution scientifique de jeunes mathématiciens. À titre personnel, j'ai eu la chance de le rencontrer en 1986 et de le revoir souvent dans les années qui suivirent, à Cornell ou dans différents congrès. Plusieurs des articles que je considère comme mes meilleurs travaux n'auraient pas existé sans les conversations stimulantes que j'aie eues avec Dynkin.

Une initiative originale de Dynkin, qui témoigne de son intérêt pour la communauté mathématique dans son ensemble, est sa collection d'interviews mathématiques, qui est accessible sur le site de la bibliothèque de Cornell : `http://dynkincollection.library.cornell.edu/`

Cette collection rassemble des témoignages recueillis sur une période de plus de 50 ans, commençant avec H. Cramer en 1955. Dans les dernières années de sa vie, Dynkin a dépensé beaucoup d'énergie pour rendre ces interviews accessibles à tous (je me souviens l'avoir aidé à obtenir les autorisations nécessaires pour certains mathématiciens français ou leurs héritiers qu'il n'arrivait pas à contacter). Les historiens des mathématiques lui seront certainement reconnaissants pour cette masse d'informations disponibles.

Références

[1] E. B. Dynkin. « Classification of Lie groups ». *Matematicheskii Sbornik* **18** (1946), p. 347–353.

[2] E. B. Dynkin. « Calculation of the coefficients in the Campbell-Hausdorff formula ». *Doklady Akad. Nauk SSSR* **57** (1947), p. 323–326.

[3] E. B. Dynkin. « Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras ». *Matematicheskii Sbornik* **72**, nº 2 (1952), p. 349–462.

[4] E. B. Dynkin et A. A. Yushkevich. « Strong Markov processes ». *Theory of Probability & Its Applications* **1**, nº 1 (1956), p. 134–139.

[5] E. B. Dynkin et M. B. Malyutov. « Random walk on groups with a finite number of generators ». *Doklady Akad. Nauk SSSR* **137** (1961), p. 1042–1045.

[6] E. B. Dynkin. *Theory of Markov processes.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1961.

[7] E. B. Dynkin. *Markov processes, volume I, II.* Berlin-Göttingen-Heidelberg : Springer-Verlag, 1965.

[8] E. B. Dynkin. « Brownian motion in certain symmetric spaces and the non-negative eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operator ». *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya* **30**, nº 2 (1966), p. 455–478.

[9] S. E. Kuznetsov. « Construction of Markov processes with random birth and death times ». *Teor. Verojatnost. i Primenen.* **18** (1973), p. 596–601.

[10] E. B. Dynkin. « Local times and quantum fields ». In : *Seminar on stochastic processes, 1983.* Springer, 1984, p. 69–83.

[11] E. B. Dynkin. « Self-intersection gauge for random walks and for Brownian motion ». *The Annals of Probability* **16**, nº 1 (1988), p. 1–57.

[12] E. B. Dynkin. *Selected papers of E.B. Dynkin with commentary*. Sous la dir. d'A. Yushkevich, G. Seitz et A. Onitshchik. Providence, RI, 2000. American Mathematical Society, 2000.

[13] E. B. Dynkin. *Superdiffusions and positive solutions of nonlinear partial differential equations*. University Lecture Series. Providence, RI : American Mathematical Society, 2004.

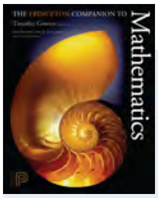
Jean-François Le Gall

Université Paris-Sud

`Jean-Francois.Legall@math.u-psud.fr`

J.-F. Le Gall est un spécialiste de théorie des probabilités. Il a été successivement chercheur au CNRS, professeur à l'université Pierre et Marie Curie et à l'École normale supérieure. Depuis 2006 il est professeur à l'université Paris-Sud. Il est membre de l'Institut universitaire de France et de la section de mathématiques de l'Académie des sciences.

Merci à David Renard pour son aide.



The Princeton Companion to Mathematics
Timothy Gowers, Barrow-Green June et Imre Leader, éds.
Princeton University Press, 2008. 1056 p. isbn : 9781400830398

The Princeton Companion est un volume unique, magnifique.
Son éditeur est Timothy Gowers, lauréat de la médaille Fields en 1998. Avec ses éditeurs associés, June Barrow-Green et Imre Leader, il a conçu et encadré cette œuvre de plus de mille pages, l'effort de plus de 130 mathématiciens cooptés. Gowers lui-même a écrit à peu près le quart du livre. L'idée principale de l'ouvrage est de présenter les mathématiques pures dans lesquelles la recherche est active aujourd'hui. On dit qu'il y a plus de mathématiciens qui travaillent aujourd'hui que dans toute l'histoire de l'humanité. Il y a une forte tendance à la spécialisation, assez tôt dans la carrière d'un mathématicien. Cela devient donc difficile de suivre les développements des mathématiques en tant que science unifiée. *The Princeton Companion* a été conçu pour y remédier. Ce n'est cependant pas une encyclopédie : ce volume n'a pas l'ambition de remplacer les autres sources, mais de les compléter. C'est un vrai guide des mathématiques modernes. Ce livre permet plusieurs niveaux de lecture. On peut lire un article isolé, ou bien essayer de lire un chapitre historique d'un seul trait, ou bien quelques articles courts dans l'ordre alphabétique... ou se lancer dans l'index à la recherche d'une notion mentionnée par un collègue pour arriver bien souvent dans des contrées inconnues. Certaines pages peuvent être lues et appréciées par des amateurs de mathématiques et des étudiants ; d'autres s'adressent aux mathématiciens professionnels. C'est souvent un plaisir pur quand on ouvre ce livre simplement au hasard.

L'Introduction de 76 pages, écrite par Gowers, montre la portée du volume. Elle a quatre sous-chapitres : « Que sont les mathématiques ? », « Le language et la grammaire des mathématiques », « Quelques définitions mathématiques fondamentales » et « Les objectifs généraux de la recherche en mathématiques ». On peut voir cette introduction comme un vol de reconnaissance mathématique où l'on repère les lieux. C'est une première approche de la classification des domaines et des connaissances. On compte :
– trois formes de pensée : en algèbre, en géometrie, en analyse ;
– dix branches principales : l'algèbre, la théorie de nombres, la géométrie, la géométrie algébrique, l'analyse, la logique, la combinatoire, l'informatique théorique, les probabilités et la physique mathématique ;
– quatre concepts de base : les ensembles, les fonctions, les relations, les opérations binaires.
Cela continue avec :
– quatre structures algébriques importantes : les groupes, les corps, les espaces vectoriels, les anneaux ;
– deux idées de base en géométrie moderne : la relation entre la géométrie et la symétrie et la notion de variété ;
– etc.
Ces interprétations des mathématiques peuvent servir de jalons pour des futurs travaux de recherche.

Le corps du livre est formé des presque six cents pages des parties III, IV et V : « Les concepts des mathématiques », « Les branches des mathématiques », « Les théorèmes et les problèmes », respectivement. On peut parfois trouver des analogues sur le web des articles courts sur les concepts ainsi que sur les théorèmes et les problèmes, mais la partie IV sur « les branches des mathématiques » est assez unique. Elle est aussi la plus longue du livre, constituant à elle seule un bon tiers du volume. Cette partie est partagée en 26 articles avec des titres comme « la théorie analytique des nombres », « la topologie algébrique », « la topologie différentielle », « la symétrie miroir », « les espaces de modules », « les algèbres de vertex », « la logique et la théorie des modèles », « la théorie de la complexité », « la dynamique », « les processus stochastiques », « les algèbres d'opérateurs », « les modèles probabilistes des phénomènes critiques »... On peut bien imaginer un article de ce genre pour ouvrir les actes d'une école d'été sur un sujet particulier. C'est merveilleux de pouvoir profiter de tels articles d'ouverture des sujets regroupés au même endroit. Quelle hauteur de vue ! Quel paysage !

Ce panorama purement mathématique est précédé par la partie II « Origines des mathématiques modernes » et suivie par la partie VI « Mathématiciens ». La partie II est aussi assez unique en essayant d'ajuster le temps dans la scène. Au commencement était le Nombre... Mais qu'est ce qu'un nombre dans la compréhension d'aujourd'hui ? On parle de nombres entiers, rationnels, réels, complexes, mais aussi p-adiques, de quaternions, d'octonions pour finalement arriver à la notion de nombre comme d'un système qui sert à paramétrer tel ou tel problème. On change le concept même du nombre. Au-delà, on découvre l'évolution de la pensée en algèbre, en géométrie et en analyse à travers les cultures. On trace le changement philosophique des notions de rigueur et de preuve pour arriver finalement aux mathématiques modernes. La partie VI traite aussi d'histoire, vu que l'on parcourt plus de deux mille cinq cents ans à travers des biographies courtes de 96 mathématiciens, de Pythagore à Nicolas Bourbaki.

Les mathématiques constituent une partie organique de la culture. La partie VII intitulée « L'influence des mathématiques » donne un panorama des liens des mathématiques pures avec d'autres activités humaines, allant de la science aux finances, de la médecine à l'art et la musique. À travers un prisme mathématique on passe des cristaux chimiques aux protéines, de Bach à Schönberg, de Dürer à Dali. La dernière partie VIII présente une réflexion finale sur ce que sont les mathématiques, leur rôle philosophique et social, leur présence dans la vie quotidienne : la notion de *numeracy* analogue à *literacy* est considerée en profondeur. Dans les quelques dernières pages du livre, juste avant la chronologie des événements mathématiques et l'index, se trouve un merveilleux sous-chapitre de dix pages où cinq mathématiciens, Sir Michael Atiyah, Béla Bollobás, Alain Connes, Dusa McDuff et Peter Sarnak, donnent des « conseils à un jeune mathématicien ». Ces conseils très différents reflètent la personnalité de chaque auteur et forment un ensemble très puissant.

Pour conclure, il faut absolument avoir ce volume sur son bureau. De la première page à la dernière, ce livre donne envie de se lancer dans la recherche en mathématiques. Qu'est-ce qu'il y a de plus pur dans la vie ?

Olga Kravchenko
Institut Camille Jordan, Lyon