JUILLET 2017 – N° 153

la Gazette des Mathématiciens

- **Prix et distinctions** – Yves Meyer, prix Abel 2017
- **Entretien** avec Roger Godement
- **Tribune Libre** – Réflexion sur l'écriture et le style en mathématiques
- **Raconte-moi...** les solitons

Société Mathématique de France
SMF

la Gazette des Mathématiciens

Comité de rédaction

Secrétariat de rédaction :
SMF – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@dma.ens.fr – http://smf.emath.fr

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

ISSN : 0224-8999

Société Mathématique de France

À propos de la couverture. Un mascaret sur la Dordogne ; photo prise en 2003 à Saint-Pardon au moment des grandes marées d'équinoxe (mi-septembre). Les mascarets sont des vagues qui se forment à l'estuaire d'un fleuve peu profond et à fort débit, lors des grandes marées, et qui remontent le courant sur des distances pouvant dépasser 100km. Ils correspondent à la propagation d'un ressaut hydraulique (comme l'eau qui coule du robinet dans l'évier). En amont, celui-ci se découple en un train d'ondes solitaires, les solitons. La *Gazette* remercie chaleureusement l'auteur de la photographie, monsieur Claude Simonin. (crédit : Claude Simonin).

la Gazette des Mathématiciens

N° 153

Éditorial

Chère lectrice, cher lecteur,

Par-delà l'éternel clivage opposant juillettistes et aoûtiens, c'est au plus grand nombre que la *Gazette* souhaite offrir un espace de détente à l'ombre des rafraîchissantes pages de ce numéro estival.

Et celles-ci saluent tout d'abord les mathématiques d'Yves Meyer, récemment « abélianisé ». Des mathématiques qui frappent sans conteste par leur éclectisme. Un monde où ondelettes, analyse harmonique, équations aux dérivées partielles et quasi-cristaux se côtoient joyeusement. Selon Pablo Picasso : « Tout l'intérêt de l'art se trouve dans le commencement. Après le commencement, c'est déjà la fin. » Nous emboîtons le pas du fantasque peintre pour te faire partager, au côté de Roger Godement, l'avènement des formes automorphes en France. Un témoignage original à la lecture plurielle, qui s'adresse tout autant aux néophytes qu'aux spécialistes du sujet. Ta curiosité sera également piquée à la lecture de la rubrique *Raconte-moi*. Tu pénétreras dans l'univers du soliton, cette étrange onde solitaire qui se propage sans jamais se déformer, à l'image du mascaret aquitain choisi pour cette couverture.

Du côté de la *Diffusion des savoirs*, la capitale des Gaules est à l'honneur avec sa Maison des Mathématiques et de l'Informatique. Un lieu de rencontre et de transmission pour la science, et une initiative à saluer. Comment réaliser un jeu aléatoire gagnant à partir de deux jeux perdants ? C'est là l'objet du paradoxe de Parrondo, attaché au physicien éponyme Juan MR Parrondo. C'est aussi l'occasion d'en apprendre davantage sur le déroulement des stages hippocampe qui proposent aux lycéens une initiation à la recherche mathématique.

Et si je te demandais quels sont tes auteurs préférés ? Question incongrue... Proust ? Dostoïevski ? Gary ? Évidemment. Mais tu fais fausse route car il s'agit d'écriture mathématique dont Yves André vient te parler. Une *Tribune* en toute liberté et une affaire de style.

Pour finir, un hommage est rendu au physicien théoricien et mathématicien Ludvig Faddeev, décédé en février dernier.

En te souhaitant une agréable lecture et un bel été,

Boris Adamczewski

la Gazette des Mathématiciens

No 153

Sommaire

Société Mathématique de France SMF

Nº 153

Mot du président

Chères et chers collègues,

Après avoir été réélu par notre conseil d'administration, j'entame une deuxième année à la présidence de la SMF.

La première année a été très intense.

– Notre politique d'édition vers le numérique a été renforcée, en confortant l'idée d'une édition éthique de qualité tournée vers l'avenir : les livres et revues de la SMF, maintenant dotés d'un DOI, continuent leur essor, la revue *Astérisque* est en cours de numérisation, et nous avons encore plusieurs projets en cours pour les prochaines années (livres en pdf, nouvelle revue électronique gratuite, accessibilité à nos revues facilitée...).
– Nous avons développé plusieurs actions vers les jeunes : les semaines CIRM-SMF, et plus spectaculairement, le concours SMF junior – véritable succès avec ses 214 inscrits – qui marque l'intérêt que la SMF porte aux jeunes qui aiment les mathématiques.
– Toujours dans cette politique visant à faciliter l'intégration des jeunes dans la communauté, je suis heureux de vous annoncer qu'à partir de 2018, l'adhésion à la SMF pour les étudiant(e)s en thèse sera gratuite pour 3 ans (au lieu d'un an actuellement). Je vous invite donc à recommander à vos étudiants l'adhésion à la SMF.
– Un énorme travail a été fait en interne pour la modernisation de notre architecture informatique et notre site web (même si vous ne pouvez pas le voir encore!). Vous pourrez avant la fin de cette année en profiter, grâce à tout notre patrimoine (articles, vidéos, prises de position, *Gazette* ...) qui sera accessible et mis en valeur, et également grâce à tout le contenu mathématique qui va être créé autour de ce site.
– La SMF a également été très présente dans les médias, avec notamment la tribune publiée dans le journal *Le Monde*, et a joué son rôle de représentant et de médiateur de la communauté à de nombreuses reprises (auprès des ministères, des différents comités de réflexion, ou en organisant des réunions autour de l'enseignement).

L'année qui commence permettra à plusieurs de ces chantiers d'aboutir, et à vous d'en profiter.

N'hésitez pas à partager avec vos collègues les initiatives de la SMF, en particulier notre nouvelle politique d'adhésion dirigée vers les jeunes. Le soutien de la communauté est très important pour nous, il passe par l'adhésion du plus grand nombre et surtout de celles et ceux qui prendront notre suite.

Je termine cette lettre en rendant hommage à Jean-Pierre Kahane. Son héritage scientifique ne peut être résumé en quelques lignes ; les nombreux messages que j'ai reçus suite à l'annonce de sa disparition (consultables sur notre site) témoignent de l'importance et de l'influence incomparables qu'il a eues dans le monde des mathématiques, et dans le monde, simplement. Je garderai personnellement l'image de la remise des prix du concours SMF junior le 10 juin dernier : tous les spectateurs de l'amphithéâtre Hermite ont constaté la générosité, le talent de ce personnage exceptionnel, qui, à plus de 90 ans, debout pendant 45 minutes, a partagé un exposé passionnant sur la possibilité de parler de mathématiques (sans écrire une ligne !) en détaillant plusieurs démonstrations géométriques. Quel exemple !

Je vous souhaite une bonne fin d'année universitaire, avant un été reposant !

Le 1er juillet 2017

Stéphane Seuret, président de la SMF

1. Affaires générales

1.1 – Situation générale

Depuis 2014, la smf a un bilan comptable positif, c'est encore le cas en 2016. Il faut cependant rester vigilant sur plusieurs points très importants pour la pérennité de la smf :

– notre structure informatique est fragile, nous devons donc la rénover et faciliter les conditions de travail des salarié(e)s ;
– le monde de l'édition scientifique est en pleine mutation, avec une demande certaine de nos collègues vers la numérisation de nos articles et ouvrages et la mise à disposition au plus grand nombre de nos publications ;
– notre nombre d'adhérents reste important, mais en baisse depuis quelques années.

Les salarié(e)s, à Paris comme à Marseille, ont poursuivi leur travail de fond pour améliorer le fonctionnement et l'efficacité de la smf. Cela continue et continuera en 2017, année pendant laquelle notre organisation et le site web feront l'objet d'une réflexion globale et d'une refonte.

1.2 – Adhérents

Le montant des cotisations n'augmente pas, cela sera encore le cas dans les années qui viennent. Malgré cela, le nombre d'adhérents baisse régulièrement : 1914 en 2013, 1891 en 2014, 1872 en 2015 et 1830 en 2016.

Une étude fine montre que nous perdons essentiellement des adhérents à l'étranger, alors que le nombre est stable en France. Suite à cette étude, nous réfléchissons à la façon d'inciter les plus jeunes de nos collègues à adhérer à la smf, sur le modèle pratiqué par les autres sociétés savantes.

Nous comptons également sur de nouvelles initiatives (concours smf junior, semaines cirm-smf, tribunes...) pour augmenter la visibilité de la smf et ainsi susciter des adhésions.

1.3 – Prises de position

À l'initiative de la smf, un groupe de travail s'est mis en place pour rédiger une tribune destinée aux candidat(e)s à l'élection présidentielle. Ce groupe a rassemblé des représentant(e)s de la sfp [1], de la sif [2], de la smai [3], et de la smf. Le but était d'interpeller les candidats sur les sujets liés à l'enseignement et la recherche. La tribune a été publiée le 22/03/2017 dans le journal *Le Monde*, et diffusée très largement via tous nos canaux.

La sfds [4], la smai et la smf travaillent en étroite concertation sur plusieurs sujets ; la réforme des programmes du collège en cours a souvent été au cœur de nos échanges, en lien étroit avec la cfem [5] et le csp [6], voir le paragraphe sur l'Enseignement.

À l'occasion des tests timss et pisa, ainsi que de la médaille d'or du cnrs de C. Voisin, la smf a reçu de nombreuses sollicitations journalistiques, et s'est efforcée de relayer le point de vue de la communauté auprès du grand public. De façon plus générale, la smf est sollicitée par les médias (quotidiens, hebdomadaires, radio) pour connaître les positions de la communauté mathématique française sur les grands sujets scientifiques (mais aussi par nos associations partenaires) et semble l'être de plus en plus ces derniers temps. Cela atteste du rôle central joué par la smf au sein de la communauté, de sa représentativité, de la qualité de ses actions et de sa réactivité.

1. Société Française de Physique.
2. Société Informatique de France.
3. Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles.
4. Société Française de Statistique.
5. Commission Française de l'Enseignement des Mathématiques.
6. Conseil Supérieur des Programmes.

1.4 – Droits de l'homme

Les trois sociétés savantes SMF, SFdS et SMAI ont poursuivi leur mobilisation pour soutenir les universitaires de Turquie. Le témoignage du mathématicien Kivanç Ersoy, arrêté à la suite de la signature de la pétition d'*Academics for peace* en mars 2016 et toujours en attente d'acquittement, est paru dans la *Gazette des Mathématiciens* (numéro 151, janvier 2017) et a été relayé dans la revue de presse de janvier 2017 d'*Image des Mathématiques*. Pour dénoncer les purges dans l'enseignement supérieur consécutives à la tentative de putsch en Turquie de juillet 2016, une lettre a été adressée par la SMF, SFdS et SMAI aux responsables turcs en septembre 2016. En soutien à la recommandation du Conseil Scientifique du CNRS de novembre 2016, les trois sociétés ont diffusé un texte d'information pour affichage dans les laboratoires et présentation lors des conférences (CIRM et IHP). La SMF a également relayé les appels au boycott de Tübitak (l'équivalent turc du CNRS), faisant partie des recommandations du Conseil Scientifique du CNRS d'avril 2017. Enfin, la SMF a décidé de soutenir la « Marche pour les sciences » du 22 avril 2017, en protestation des mesures prises par le gouvernement américain, dans un contexte où la liberté universitaire est également menacée en Hongrie et Russie par des fermetures d'universités.

1.5 – Parité

Une veille a été effectuée pour suivre l'évolution de la présence féminine dans la communauté au sens large (recrutements, conseils...) et le respect de certaines règles (notamment concernant les comités de sélection). La troisième journée parité a eu lieu en juillet 2016 et a été un grand succès. Un compte-rendu en a été fait dans la *Gazette*, dont la rubrique « parité » a recueilli tout au long de l'année des témoignages, analyses et recensions diverses. La SMF va maintenir sa vigilance et compléter ses actions pour que les mathématiciennes occupent dans la communauté une place plus conforme à celle qu'elles occupent en amont des parcours de formation.

1.6 – Rencontres et colloques

Journée des lauréats de l'Académie des sciences. Le cycle « Des mathématiciens primés par l'Académie des Sciences » existe depuis plusieurs années, en partenariat avec l'Académie des Sciences. La journée, organisée conjointement avec la SMAI, n'a pas pû être planifiée en 2016, une « double » journée le sera en automne 2017 probablement à l'IHP.

Congrès SMF 2016. Les « Journées annuelles » de la SMF étant de moins en moins fréquentées, celles-ci ont été remplacées en 2016 et 2017 par d'autres événements. C'est probablement la position qui sera conservée dans les années qui viennent.

En 2016, le premier congrès de la SMF a eu lieu à Tours du 6 au 10 juin. Cette première conférence a été un grand succès : plus de soixante exposés, les pléniers en matinée donnés par des mathématicien(ne)s reconnu(e)s, et toutes les sessions parallèles des après-midis ayant laissé une large place aux jeunes. Cet équilibre, ainsi que le large spectre des mathématiques couvert, a permis aux participant(e)s (plus de 220) d'avoir un panorama des mathématiques actuelles. Une conférence grand public de G. Besson, suivie par environ 300 spectateurs, a précédé la remise du Prix d'Alembert, avec une table ronde autour de l'enseignement (sur la thématique « Quelles mathématiques pour le futur scientifique ? »), et une autre sur le financement de la recherche.

La réussite du congrès est en grande partie due aux collègues d'Orléans et Tours qui l'ont organisé. Elle reflète une demande de la communauté, et ce congrès s'inscrit donc déjà dans le temps. Le prochain congrès SMF 2018 aura lieu à Lille du 4 au 8 juin 2018. M. Maida en est la présidente du comité d'organisation, E. Breuillard le président du Conseil Scientifique.

Rencontres scientifiques de la SMF. La SMF organise de manière régulière les sessions « États de la Recherche » [7]. Le choix des thématiques et des organisateurs est effectué par un Comité Scientifique, composé de F. Boyer (responsable), V. Calvez, X. Caruso, J. Grivaux, F. Pène, M. Zani et B. Rémy, rédacteur en chef de *Panoramas et Synthèses*.

Trois sessions des États de la Recherche se sont déroulées en 2017 :

- « Géométrie algébrique dérivée et interactions », organisée par B. Toën et M. Vaquié à l'Institut Mathématique de Toulouse du 12 au 15 juin,

7. `http://smf.emath.fr/content/etats-de-la-recherche-presentation`

– « Structured Regularization for High-Dimensional Data Analysis », organisée par Y. de Castro, G. Lecué et G. Peyré à l'Institut Henri Poincaré à Paris du 19 au 22 juin,
– « Mathématiques pour la détection et l'attribution du changement climatique », organisée par A.-L. Fougères et P. Naveau au Centre CNRS d'Aussois du 4 au 29 septembre.

Une nouvelle initiative a été portée par la SMF en 2016. Nous nous proposons de soutenir deux semaines de conférences au CIRM, en finançant chacune d'entre elles à hauteur de 50% maximum des dépenses engagées. Ces semaines CIRM-SMF doivent porter sur des thématiques actuelles, et faire une large place aux plus jeunes de nos collègues en prévoyant des cours et leur réservant des créneaux spécifiques pour présenter leurs travaux. Un appel d'offres a eu lieu du 15/11/2016 au 15/01/2017 pour sélectionner ces deux semaines. Le choix des deux semaines a été fait par le Conseil Scientifique de la SMF en février 2017, et sera confirmé par le Conseil Scientifique du CIRM en juin 2017.

1.7 – Concours SMF junior

En juin 2016, la SMF avait approuvé l'organisation d'un « Concours SMF junior ». Le principe est de proposer aux étudiant-e-s de moins de 25 ans encore inscrits en licence ou master de se regrouper par équipe d'au maximum trois personnes, afin de résoudre 10 questions de mathématiques en 10 jours, du 2 au 11 mai 2017. Le président du concours est P. Pansu, assisté de J. Barral, J. Le Rousseau et R. Marchand. La collecte des sujets (dont la solution doit être soumise au jury, et n'être écrite sur aucun document accessible) a eu lieu du 1er novembre 2016 au 31 janvier 2017. Plus de 100 équipes se sont inscrites, venant de toute la France.

Les lauréats ont été connus fin mai, et les prix (allant de 250 à 750 euros, des adhésions gratuites à la SMF et des livres) ont été remis le jour de l'Assemblée Générale, le samedi 10 juin à l'IHP. J.-P. Kahane a fait un exposé lors de cette remise de prix.

1.8 – Prix Marc Yor

Le prix Marc Yor en probabilités a été institué par la SMAI et la SMF en avril 2016, avec le parrainage de l'Académie des Sciences, pour honorer la mémoire de Marc Yor, grand mathématicien français disparu en janvier 2014. Ce prix vise à récompenser chaque année une jeune mathématicienne ou un jeune mathématicien spécialiste des probabilités exerçant en France ; il est destiné à promouvoir les probabilités et leurs applications. Le premier prix Marc Yor a été décerné à C. Bordenave, par un jury présidé par J.-P. Kahane.

1.9 – Relations avec les autres sociétés savantes et associations

Les échanges avec la SFdS, la SMAI, la SIF et *femmes & mathématiques* sont nombreux, et concernent tous les domaines d'activité de nos sociétés : la tribune mentionnée précédemment, le numéro commun *MATAPLI/Gazette* en hommage à M. Yor, le Prix Marc Yor, le Programme « Interfaces » du CIRM. La SMF s'est également proposée pour être partenaire du Forum Emploi Maths en 2017, qui est organisé par la SMAI, la SFdS et AMIES.

La SMF a participé à la réunion annuelle des présidents des sociétés membres de l'EMS qui s'est tenue en mars 2017 à Lisbonne.

Enfin, la SMF travaille toujours en étroite collaboration avec *Cap'Maths* et *Animath* à qui elle a apporté un soutien important au cours des années précédentes. En 2016 et 2017, la SMF a coordonné plusieurs comités de préparation au futur d'Animath.

1.10 – Vie interne de la Société

Refonte du site web. Suite au constat de la fragilité de notre système informatique et de notre site web (notamment dûe à un manque d'évolutivité), il a été décidé en 2016 par la SMF de prévoir une refonte de ces deux parties cruciales pour notre fonctionnement et notre image. C'est l'occasion tout d'abord de remercier tous les bénévoles (notamment M. Demazure et L. Koelblen, mais aussi D. Bitouzé pour la *Gazette*) qui ont œuvré depuis des années au fonctionnement de la SMF. Un groupe de travail, constitué de V. Berthé, G. Grancher, C. Imbert, T. Richard, C. Ropartz, et coordonné par S. Seuret, a établi un cahier des charges, puis a chargé le cabinet VTScan de la recherche d'une Agence qui prendra en charge la refonte de notre système informatique et du site web.

VTScan a sélectionné 4 agences, et après plusieurs entretiens téléphoniques, une soutenance a été organisée le 6 janvier 2017, à l'issue de laquelle la SMF a choisi Smart Agence. Depuis février

2017, nous travaillons en étroite collaboration avec eux à la refonte de notre système informatique et de notre site web. Ce chantier ambitieux devrait se terminer en automne 2017.

Un tel chantier nécessite l'approbation de l'ensemble du personnel, et sa participation. Ainsi, tous les salariés sont impliqués dans ce projet, qui est crucial pour la pérennité dans le temps de la SMF, ainsi que pour son développement (pour favoriser l'accès et la lisibilité des publications, par exemple).

Personnel salarié. La SMF emploie pour ses activités propres (hors CIRM) l'équivalent de 5 emplois à temps plein. La coordination entre les différents postes continue de progresser, et sera repensée dans le cadre de la refonte mentionnée ci-dessus.

Sous-traitants, bénévoles. La SMF fait appel à des sous-traitants, pour la composition et l'impression des revues et des livres, pour les opérations de routage, la gestion du parc informatique et la sauvegarde et le suivi des données de comptabilité. De nombreux bénévoles participent aussi à ces tâches diverses. Certaines de ces procédures seront à repenser dans le cadre de la refonte de notre site web et du système informatique en 2017.

1.11 – Actions de communication

Nous avons à notre disposition plusieurs canaux pour diffuser nos informations.

L'envoi d'une lettre mensuelle d'information aux membres permet de garder un contact régulier, et le mot du président dans la *Gazette* d'évoquer les actions en cours et de les situer dans un contexte plus global.

Le site web nous permet d'être réactif ; malgré son aspect peu attractif, il est de plus en plus fréquenté (plus de 15% de visites en plus chaque année). La refonte nous ouvrira d'autres possibilités et mettra en valeur toutes nos actions et nos publications.

Le compte twitter SMF, alimenté presque quotidiennement, devient un outil de communication incontournable : nous avons atteint en mars 2017 les 1 000 tweets et les 1 500 abonnés. Cela démontre que ce moyen est adapté à la SMF et à nos missions. En 2017, une équipe de communication sera montée pour coordonner l'ensemble des messages, articles, dossiers, points de vue, que nous diffusons, et pour les adapter à nos divers canaux de communication.

Tous ces moyens sont amenés à évoluer dans leur forme et leur fond dans le cadre de la refonte du site web.

1.12 – Soutien et parrainage de prix

Prix AMIES. L'AMIES [8] a lancé en 2013 un prix destiné à promouvoir les thèses *Mathématiques Entreprises* soutenues en 2012. Ce prix est parrainé par les trois sociétés savantes SFdS, SMAI et SMF. La proclamation des résultats du Prix AMIES 2016 a eu lieu le 14 décembre à l'IHP ; le lauréat est P. Gaillard (EDF, Université Paris-Sud).

Prix Szolem Mandelbrojt. L'institut français de Pologne et l'Ambassade de France en Pologne, en partenariat avec la SMF, avaient créé en 2015 le Prix Szolem Mandelbrojt, visant à récompenser des recherches polonaises d'excellence dans le domaine des mathématiques. Ce prix s'adresse aux chercheurs polonais de moins de 45 ans conduisant des recherches dans le domaine des mathématiques fondamentales ou appliquées. Le premier lauréat de ce prix a été A. Langer (géométrie algébrique) qui a disposé d'un mois d'invitation au Laboratoire J. Dieudonné à Nice en juin 2015. Le prix n'a pas été décerné en 2016, et a été relancé en 2017. Il a été attribué à Slawomir Dimew (Pologne).

Prix Hamidoune. Ce prix a été créé en 2011 à l'initiative d'amis et collègues du mathématicien Y. Ould Hamidoune et vise à encourager l'enseignement et la recherche en Mauritanie. Il est soutenu par les autorités académiques mauritaniennes ainsi que par divers partenaires étrangers. Comme les années précédentes, la SMF a donné son parrainage pour le prix 2016 et soutenu la dotation de ce prix en offrant des livres.

2. Gazette

Après une période de mutation profonde, la *Gazette* n'a pas connu de grand changement cette année. Son comité de rédaction a toutefois vu plusieurs départs et arrivées. D'une part, M. Quéffelec et B. Helffer, arrivés en fin de mandat, ainsi que J. Déserti, ont quitté le comité. D'autre part, F. Kassel et R. Tessera ont rejoint l'équipe de rédaction.

8. Agence pour les Mathématiques en Interaction avec les Entreprises et la Société.

Concernant le contenu de la *Gazette*, la rubrique « Diffusion des savoirs » a trouvé sa place. La « Tribune libre » a été particulièrement utilisée, se faisant le porte-voix de sujets très variés : financement de la recherche, situation en Turquie, problèmes de genre ou lettre ouverte aux candidats à l'élection présidentielle. Cela témoigne de l'intérêt porté par les lecteurs pour cet espace d'expression qui leur est offert. Le contenu des articles mathématiques a concerné à la fois des avancées mathématiques récentes, l'histoire des mathématiques et la philosophie. Deux dossiers ont été respectivement consacrés à la théorie des modèles et au congrès SMF 2016. Enfin, la rubrique « Carnet » a rendu hommage à plusieurs collègues disparus. Un numéro spécial consacré à J.-C. Yoccoz paraîtra fin 2017.

3. Conseil scientifique

Composition actuelle. Le Conseil Scientifique a été renouvelé partiellement : il a vu l'arrivée de K. Belabas (théorie des nombres, Bordeaux). Rappelons que les principales fonctions du CS sont :

– valider les parrainages par la SMF de colloques. Le Conseil vérifie que le comité a tenu compte de divers équilibres dans les comités et parmi les conférenciers invités (parité, équilibre Île-de-France-Province-Étranger, jeunes collègues) et incite à la participation des jeunes (tarifs préférentiels, présence de mini-cours adaptés au niveau doctoral, séances posters...) ;
– valider les nominations aux comités de rédaction des revues de la SMF (cette activité est en fait plus qu'une validation : le Conseil est parfois amené à proposer des membres, notamment quand la revue évolue, et à veiller aux critères d'équilibre entre secteurs des mathématiques, parité, équilibre Île-de-France-Province-Étranger, et inclure des jeunes collègues), mais tout ceci sans afficher de quotas, trop contraignants pour des nombres de membres aussi faibles ;
– procéder à des nominations de membres de jurys de prix ;
– proposer des candidats à des prix, lorsque le Conseil est sollicité par des comités de prix ;
– il a également une activité d'évaluation scientifique de dossiers (semaines CIRM-SMF, Prix Mandelbrojt).

Le fonctionnement du Conseil s'effectue par email. Mais il a eu une réunion physique le 10 février à l'IHP, pour discuter (avec le président de la SMF et la responsable des publications) de l'ensemble de ses activités et réfléchir aux critères qu'il utilise lors de ses décisions. Il paraît utile que cette réunion du Conseil soit annuelle. Pour l'an prochain, une partie de la réunion se tiendra avec l'ensemble des directeurs des comités de rédaction de la SMF, et permettra de discuter avec eux des évolutions des lignes éditoriales et des critères retenus pour le renouvellement des comités éditoriaux. Il a été décidé lors de cette réunion que, à l'avenir, une certaine proportion des membres du Conseil pourra résider à l'étranger.

4. Le pôle de Luminy

4.1 – La maison de la SMF

Son rôle est de prendre en charge les publications de la SMF envoyées par les imprimeurs (réception, stockage, expédition, vente au numéro...).

La maison de la SMF travaille en étroite collaboration avec les secteurs des publications, des publicités et de la comptabilité.

L'équipe est constituée aujourd'hui de l'équivalent de 1,5 temps plein ; le responsable de l'équipe est C. Munusami et une nouvelle salariée, M.-F. Koussémon, a été engagée en décembre 2014. Cette dernière présente la SMF aux nouveaux congressistes en début de semaine, tient un stand de vente des publications de la SMF chaque mardi et jeudi et contribue enfin à une présentation de qualité de nos ouvrages dans l'enceinte du CIRM. Des améliorations ont été effectuées concernant le stand (situé à la sortie de l'auditorium du CIRM) : espace délimité dédié à la SMF avec affiches, tracts publicitaires et exposition des publications. Avec l'accord de P. Foulon, une présentation plus visible de la SMF dans les locaux du CIRM a aussi été réalisée. Il résulte de toutes ces actions une amélioration de notre diffusion sur le site du CIRM. En 2016, les ventes sur place se montent à 6 500 euros, ce qui est inférieur au chiffre de 2015 ; il est vrai que cette année-là, nous avions réalisé une très grosse vente pour le compte d'un universitaire chinois.

En 2016, la maison de la SMF a réceptionné environ 8 500 ouvrages malgré la politique de réduction du nombre d'impressions. Grâce au pilonnage effectué récemment, l'espace dédié au stockage des collections s'est substantiellement agrandi. Des efforts sont faits pour gérer ce stock de la façon la plus rationnelle possible malgré l'impossibilité temporaire d'utiliser le monte-charge interne. Nous attendons avec impatience la visite de l'expert cet été qui nous dira si les micro-pieux ont stabilisé l'édifice et si on peut remettre en service ce fameux monte-charge. Pour l'instant, un réaménagement complet du rez-de-chaussée a été effectué. Nous travaillons à améliorer nos deux lieux d'exposition, en particulier, en modernisant les rayonnages de présentation des livres et revues.

La politique de dons d'ouvrages suit son cours ; M. Peigné a suivi l'envoi de livres en Afrique du sud.

Nous mettons à disposition du CIRM, pendant les travaux prévus en 2017-2018, une salle au rez-de-chaussée et un bureau au premier étage.

4.2 – CIRM 2016

Fréquentation

Concernant le nombre de visiteurs, le CIRM demeure le plus grand centre d'accueil de conférences en mathématiques dans le monde avec un total de 3 406 participants en 2016 pour l'organisation de 50 semaines de rencontres. Ce chiffre est comparable à celui de l'année passée (3 521).

Le nombre total de participants provenant d'institutions étrangères est de 44%, en légère baisse par rapport à l'année passée. Après la très forte hausse de la pression scientifique en 2014, qui avait abouti malheureusement à devoir refuser des dossiers excellents faute de place, la pression scientifique est redevenue plus gérable en 2015 et 2016, mais elle remonte très fortement en 2017. Enfin, il est encourageant de souligner que le nombre de mathématiciennes au CIRM reste soutenu à 20% de femmes participantes en 2016.

Le CIRM bénéficie du soutien renforcé (depuis 2012) de l'INSMI [9], d'une dotation du MENESR, de dotations des collectivité locales (Région et Ville) ainsi que de financements des laboratoires d'excellence CARMIN et ARCHIMEDE qui apportent un complément financier important et nécessaire lui permettant de se maintenir au niveau de certains des meilleurs centres d'accueil internationaux (à noter que certains ont des financements bien plus importants).

La Chaire Jean-Morlet (dont on rappelle que le salaire est supporté par Aix-Marseille Université) continue d'attirer des leaders scientifiques du monde entier, proposant des programmes de grande qualité qui influent directement sur le nombre croissant de chercheurs étrangers visitant le CIRM.

Bilan des activités scientifiques

Sur un total de 50 semaines de rencontres organisées, le centre a accueilli :

- 37 conférences et écoles ;
- 16 petits groupes ;
- 23 recherches en binôme ;
- 11 semaines de sessions thématiques : CEMRACS (6 semaines) et mois thématique (5 semaines) ;
- 2 semestres de Chaire Jean-Morlet.

La Chaire Jean-Morlet. [10]

- janvier à juin 2016 : D. Prasad (TIFR Mumbai) et V. Heiermann (I2M). Thème : Relative Aspects in Representation Theory, Langlands Functoriality and Automorphic Forms ;
- août 2016 à janvier 2017 : M. Lemanczyk (université de Torun) et S. Ferenczi (I2M). Thème : Ergodic Theory and Dynamical Systems in their Interactions with Arithmetic and Combinatorics ;
- la co-édition Springer - SMF « Jean-Morlet Series » qui permet la publication des travaux de recherche menés au CIRM par les différents porteurs de la Chaire a sorti son premier volume consacré aux Probabilités (semestre Kistler-Gayrard). Le volume 2 a été repoussé à l'été 2017 et sera consacré à la Théorie ergodique (semestre Hasselblatt-Troubetzkoy). Les deux binômes des semestres de 2016 ont également prévu de sortir un ouvrage.

LabEx CARMIN. Ont été soutenus cette année :

- 2 écoles CIRM-IHP ;
- 4 événements Chaire Jean-Morlet ;
- 1 session thématique ;
- 4 écoles ;
- 11 rencontres jeunes chercheurs ;
- la Bibliothèque Mathématique Audiovisuelle (5 conférences filmées chaque semaine) compte aujourd'hui 900 vidéos. Ces vidéos sont maintenant dotées de DOI et sont téléchargeables à partir de la plateforme commune CARMIN.

9. Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions.
10. www.chairejeanmorlet.com

LabEx ARCHIMEDE.

- 11 rencontres labellisées au total dont 4 pour le mois thématique et 4 pour la Chaire Jean-Morlet.

De nouveaux programmes en construction. Le CIRM va élargir son offre scientifique dans le cadre de son extension immobilère (programme pluriannuel Mathématiques, Mathématiques en Interactions, Semaines SMF et programme Interface). Le détails des appels d'offre est en ligne sur le site du CIRM. La réflexion cette année a principalement porté sur le développement du programme Interface - Formation de haut niveau en immersion pour les acteurs du monde économique. L'objectif cible est de 10 séances de 3 jours par an. Un comité de pilotage a été créé avec comme présidente M. Esteban (CEREMADE), comme Vice-président J.-P. Tual (Industrie-Gemalto) ainsi que des représentants des tutelles, des sociétés savantes, des labex et quatre industriels.

Immobilier : projet 2R-CIRM

Le projet 2R-CIRM a été inscrit dans le CPER[11] en juin 2015. La maîtrise d'ouvrage a été confiée au CNRS. Suite à un concours d'architectes lancé en décembre 2015, un projet a été retenu en juin 2016. Une phase transitoire de préparation au démarrage des travaux a débuté dès 2015 avec le déplacement de bureaux, une centralisation des services désormais dans la Bastide. Le déplacement des archives à la Maison de la SMF est en cours. Le permis de construire pour le projet a été déposé en février 2017. Le début des travaux est prévu pour l'automne 2017 pour une livraison du bâtiment au dernier trimestre 2018. Le bâtiment comprendra :

- une nouvelle salle de conférences de près de 100 places ;
- une salle rénovée d'une trentaine de places ;
- au moins 20 chambres supplémentaires (dont trois chambres pour des familles et deux pour des personnes à mobilité réduite),

pour un coût global de 2100 k€ (construction) et 500 k€ (équipement).

Immobilier : projet Extension du Restaurant

La maîtrise d'ouvrage est portée par la SMF. Pour assurer la synergie complète des projets du CIRM, il a été décidé de confier la maîtrise d'œuvre au même cabinet d'architecture que pour le projet 2R-CIRM. Il s'agit du cabinet AWA (architecte J. Wafflart). Le budget prévisionnel est de 850k€.

Agenda d'Accessibilité Programmée

Le budget a pu être réduit de 340 k€ à 200 k€ grâce à la prise en compte globale de l'accessibilité dans les projets évoqués ci-dessus. Le projet a obtenu la validation de la Préfecture en février 2017.

De la préparation à la valorisation des événements scientifiques : une offre digitale riche et visible

- Tous les événements scientifiques ont leur propre mini-site dédié en français et en anglais.
- Cinq conférences par semaine sont filmées (dont une indexée). Le fonds ainsi constitué contient des exposés de recherche avec indexation par mots clés, des films et interviews grand public et des films thématiques. Plus de 900 films sont ainsi mis en ligne sur la Bibliothèque Mathématique Audiovisuelle (avec toutes les fonctionnalités d'une recherche documentaire de haut niveau sur une base de films catalogués et enrichis) et sur YouTube (qui enregistre une fréquentation impressionnante de près de 18 000 vues par semaine).
- Le succès des réseaux sociaux permet une diffusion des informations rapide et visible dans le monde entier.

Réunions, visites et échanges internationaux

- Participation à la session annuelle du consortium européen ERCOM[12] en avril 2016 en Russie.
- ERCOM soutient une politique d'échange de savoir et de savoir-faire inter centres. Le CIRM a été de nouveau sollicité pour accueillir la

11. Contrat de Plan État-Région.
12. European Research Center on Mathematics.

secrétaire générale et la responsable des rencontres de l'institut Isaac Newton de Cambridge.
- Tenue d'un stand CNRS-SMF-CIRM au Congrès européen 7ECM Berlin en juillet 2016, qui a connu une belle fréquentation.
- Participation au Heidelberg Laureate Forum en septembre 2016 en Allemagne.
- Le CIRM répond à des appels d'offres internationaux. La Chaire Jean-Morlet a reçu un soutien financier important de la NSF pour la Chaire Morlet Prasad-Heiermann.

Conclusion

L'année a été une fois encore scientifiquement riche. Le projet 2R-CIRM et Extension Restaurant ouvrent de nouvelles perspectives très importantes pour l'élargissement de l'offre scientifique du CIRM à l'horizon fin 2018.

5. Secteur grand public

La SMF continue à avoir une activité intense dans ce secteur : cycles de conférences, événements, partenariats.

La demi-journée grand public au congrès SMF 2016. Lors du premier congrès SMF qui a eu lieu en 2016 à Tours, une demi-journée visait le grand public. Après une table ronde sur l'enseignement sur le thème « Quelles mathématiques pour le futur scientifique ? », G. Besson a donné devant 300 personnes une conférence intitulée « La conjecture de Poincaré : une épopée mathématique ».

Search committee pour Animath. La SMF est membre de droit du conseil d'administration de l'association *Animath*. Ce dernier a constitué un *search committee* pour aider au renouvellement de l'équipe dirigeante de cette association d'envergure nationale. C. Imbert représentait les trois sociétés savantes de mathématiques dans ce comité qui devrait bientôt rendre ses conclusions.

Un texte, un mathématicien. Ce cycle de conférences organisé en partenariat avec la BnF[13] et l'association *Animath* rencontre toujours un vif succès, avec le grand auditorium toujours attentif et bien rempli et des vidéos de qualité à visionner en différé.

Une question, un chercheur. Ce cycle de conférences est organisé avec la Société française de Physique, l'Institut Henri Poincaré et l'Union des professeurs de classes préparatoires scientifiques (UPS). Il est composé d'une conférence de mathématiques et d'une conférence de physique. La conférence de physique était cette année donnée par K. Kotera, à l'Institut d'Astrophysique de Paris en février. La conférence de mathématiques a été donnée par S. Mallat à l'Institut Henri Poincaré : pas moins de 120 participants pour écouter parler d'analyse de données !

Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques. Comme les années précédentes, la SMF participe à ce salon qui se tient place Saint-Sulpice et dont le thème en 2017 est « Mathématiques et Langages ». Elle s'associe avec les autres sociétés savantes de mathématiques, la Société française d'Informatique et l'association *Femmes et Mathématiques*.

6. Enseignement

6.1 – Commission Enseignement

Celle-ci s'est réunie le 23 septembre 2016 ; on y a fait le point sur la participations de ses membres aux divers groupes de travail auxquels participe ou a participé la SMF.

Le questionnaire sur l'enseignement des mathématiques discrètes en licence va être affiné.

Il y a des départs annoncés et la décision est prise de rechercher des candidats pour intégrer la Commission. Des propositions seront faites lors de la prochaine réunion prévue en juin 2017.

6.2 – Réunions organisées en partenariat avec la SMAI

Responsables de préparation à l'agrégation (14 octobre 2016). Celle-ci a permis non seulement de recueillir des informations du directoire du jury, mais surtout, des échanges très nombreux entre les participants sur les problèmes qu'ils rencontrent dans leurs universités avec en particulier un débat sur l'agrégation « Docteurs ».

13. Bibliothèque nationale de France.

Responsables de master MEEF second degré parcours mathématiques (03/02/2017). Deux réunions ont eu lieu. La première était une rencontre entre le jury du CAPES et les responsables de master. La deuxième avait pour but de traiter des problèmes rencontrés dans ces masters (gestion de l'hétérogénéité du public, problème des reçus/collés, formation en master 2, formation des vacataires...)

Formateurs en mathématiques dans les masters MEEF premier degré (22/05/2017). C'est à la demande de ceux qui étaient présents lors de la réunion « second degré » que cette réunion a été organisée. Les sujets abordés ont été : la place des mathématiques dans le master 1er degré et dans les oraux de concours, les possibilités de pé-professionalisation en licence...

6.3 – Groupes de travail auxquels participe la SMF.

Math-Info. SFdS, SIF, SMAI, SMF. Le document rédigé au cours de l'année 2015/2016 a été finalisé en septembre 2016. Une présentation de ces travaux a été faite lors du Comité Scientifique de l'ADIREM en décembre 2016

Math-lycée. SMF, UPS, SMAI, SFP sur les programmes de lycée. Des propositions ont été faites pour le programme de Seconde en parallèle avec ce qui se fait pour la physique et la chimie.

Groupe interdisciplinaire. CFEM, SIF, SFP, SMF, APMEP, IREM, UdPPC[14]. Ce groupe s'est formé suite à la réunion du Comité Scientifique de l'ADIREM ; il a rédigé une contribution sur l'enseignement pour la tribune des sociétés savantes. Il réfléchit aux programmes de lycée dans le cadre de l'interdisciplinarité.

Par ailleurs, une rencontre avec le « Comité pour l'enseignement des Sciences de l'Académie des Sciences » a eu lieu en janvier 2017. Avec l'UPS, la SFP et l'UdPPC, nous avons présenté nos constatations et quelques pistes pour résoudre les graves problèmes de l'enseignement des sciences au lycée, en particulier dans les filières à vocation scientifique.

14. Union des Professeurs de Physique et de Chimie.

6.4 – La SMF membre de la CFEM.

Au côté de la CFEM, la SMF participe au Comité de suivi de la Stratégie « mathématiques ». À ce titre, les représentants de la SMF à la CFEM ont participé à des rencontres avec le Cabinet de la Ministre de l'Éducation nationale, ainsi qu'à une rencontre avec l'IGEN qui avait été chargé d'une mission sur la formation des vacataires. La SMF a aussi pris part à l'organisation du *forum Mathématiques vivantes* qui a eu lieu en mars 2017.

7. Publications

Le dynamisme de la maison d'édition SMF se confirme, tant dans ses réalisations et ses projets, que dans la poursuite résolue de sa transition vers le numérique.

Quelques chiffres tout d'abord : la SMF, ce sont 4 revues, 5 collections d'ouvrages, et par an, 7 500 pages originales de mathématiques, 3 millions de pages imprimées, 50 000 volumes produits.

Production et projets. Les retards sur le traitement des textes ont été résorbés, en particulier pour le *Bulletin* et les *Mémoires*. La régularité de sortie des publications est désormais satisfaisante, avec une vigilance maintenue face à cette priorité. Nous comptons également sur la refonte du site web pour obtenir une augmentation des soumissions, des ventes et des abonnements.

Le travail autour de la politique des prix et des quantités de tirages se poursuit. Une campagne de réimpressions d'épuisés est menée en même temps qu'une étude des modèles économiques correspondants pour l'impression.

La SMF continue sa politique de diffusion et de présentation de ses publications, que ce soit à la cellule, mais aussi lors de divers stands, par exemple lors des séminaires Bourbaki, à la BnF, ou encore lors des ventes spéciales via le site internet de la SMF. Le contrat de traduction avec Springer va de plus consolider la mise en valeur de la maison d'édition à l'international. Par ailleurs, nous avons mis fin au contrat de diffusion avec EDP sciences.

La SMF est particulièrement active dans la recherche de nouveaux textes. Une politique de sollicitation de projets éditoriaux a ainsi été lancée, en particulier en direction du Cirm et du Centre

Émile Borel (ceb) dans le cadre des trimestres thématiques de l'ihp. À noter également plusieurs projets en cours autour de textes de J.-C. Yoccoz dans les diverses collections de la smf et de beaux ouvrages à anticiper du côté de *Documents Mathématiques*, dont en particulier un projet autour des travaux de Y. Meyer.

Comités et lignes éditoriales. De nombreux renouvellements simultanés dans les comités de rédaction ont eu lieu ou sont à anticiper. Une réflexion a été menée à ce sujet en concertation avec les responsables de collections et le Conseil Scientifique. La démarche est la suivante : le comité de rédaction collecte et réfléchit à une liste de noms et la soumet pour validation au Conseil Scientifique qui veille à l'équilibre des thématiques. Plusieurs noms peuvent être ainsi proposés pour un même renouvellement ou entrée de membre de comité. Il y a également un consensus sur le fait que les comités doivent respecter les équilibres divers. La résolution suivante a ainsi été validée par le Conseil d'Administration.

« Le Conseil d'Administration de la smf est attentif aux équilibres suivants dans les comités de rédaction de la smf :

- équilibre de genre,
- équilibre thématique,
- équilibre géographique avec une présence internationale,
- équilibre en termes d'âge. »

Une réflexion est à mener autour d'une clarification des diverses lignes éditoriales, là encore en concertation avec le Conseil scientifique et les responsables de collections. La refonte du site web représente une excellente opportunité pour le faire. Nous avons choisi en particulier de ne pas reconstituer le comité de *Séminaires & Congrès*. Un comité de rédaction pour les *Documents Mathématiques* a été créé, dont Patrick Popescu a accepté de prendre la responsabilité. Nous remercions vivement Pierre Colmez qui a été en charge de cette collection depuis sa création.

Une équipe particulièrement dynamique et impliquée de responsables de collections est actuellement en place. La smf remercie vivement les Comités de Rédaction actuels et passés pour la qualité et la rigueur de leur travail.

Une politique numérique renforcée. La place du numérique dans l'activité scientifique est devenue essentielle aujourd'hui. Il s'agit d'un enjeu prioritaire pour la smf, tant éditorial qu'économique.

Les abonnements courants des cinq revues de la smf (*Bulletin*, *Mémoires*, *Annales de l'Éns*, *Astérisque*, *Revue d'Histoire des Mathématiques*) sont tous servis sur son serveur web, avec dépôt dans les archives Numdam où les articles de ces revues y sont librement accessibles passé un certain délai après leur publication : cinq ans en général, dix ans pour les *Mémoires* et *Astérisque* (l'achèvement de la numérisation de cette dernière est prévu pour fin 2017).

Cette numérisation est effectuée par la Cellule MathDoc, au sein du projet Mersenne soutenu par l'Idex grenoblois, en prolongement de notre collaboration ancienne et forte avec la Cellule MathDoc. Elle concerne près de 400 volumes (50 000 pages et 1 500 articles environ) et complétera la numérisation des *Séminaires Bourbaki* déjà initiée partiellement.

Par ailleurs, après l'adhésion de la smf à Crossref début 2017, un doi (*Digital Object identifier*) a été attribué à chaque article des séries numérisées, soit 5 500 codes en tout, avec par exemple l'identifiant `doi:10.24033/msmf.458` pour le premier *Mémoire* paru en janvier 2017. Ce doi rend la citation d'un article aisée et pérenne, augmentant la visibilité et facilitant l'accès à nos publications. L'attribution de ces codes va de pair avec la capacité à échanger des métadonnées.

Un autre chantier important est la mise à jour des classes et feuilles de style associées à chacune de nos séries, notamment en utilisant la classe `cedram` de manière systématique. Tout en respectant intégralement les caractéristiques typographiques des différentes revues, cette rénovation facilitera la production et le suivi de nos publications : article en ligne, fascicules imprimés, dépôt en archive, conservation des sources, gestion des doi, échange de métadonnées... Le premier fascicule 2017 du *Bulletin* a été produit avec ces nouvelles feuilles de style, cette évolution sera étendue progressivement aux autres revues.

La smf doit adapter son modèle économique, dans le contexte de l'évolution des publications scientifiques vers un accès électronique. Ainsi, l'augmentation du nombre d'abonnements électroniques accompagnée de la diminution des abonnements papier se poursuit-elle.

De nombreux chantiers sont en cours, dont un travail sur le référencement des collections et sur la politique de droits d'auteur et de copyright dans un contexte éthique. Rappelons que la smf a adhéré au Code of practice rédigé par le comité d'éthique de l'European Mathematical Society.

La réflexion numérique de la SMF a été alimentée par les débats autour de la loi pour une République numérique. La loi permet désormais de favoriser la libre diffusion des résultats de la recherche publique et de consolider les pratiques actuelles en matière d'accès aux résultats de l'activité scientifique (publications, données de la recherche, métadonnées, etc.). Les valeurs de liberté et d'indépendance de la recherche publique ont ainsi été réaffirmées et précisées, en particulier pour ce qui concerne le partage des données de la recherche et des écrits scientifiques. La durée maximale « d'embargo » est désormais de 6 mois pour les sciences exactes [15] comme fixé par l'article sur le Libre accès aux publications scientifiques de la recherche publique. Pour plus d'informations, voir en particulier l'article de F. Hélein « La ruée vers l'or des publications » paru dans la *Gazette* 147.

En conclusion la SMF est fière de pouvoir offrir à la communauté mathématique une maison d'édition à but non lucratif et de qualité.

8. Rapport financier, année 2016

Pour l'année 2016, l'ensemble SMF-CIRM affiche un résultat net comptable de -497 k€. Ce bilan déficitaire s'explique par une dépense exceptionnelle de 600 k€ dans le cadre du projet 2R-CIRM visant à la restructuration et à la rénovation de l'Annexe. Cet engagement a été voté au bureau de la SMF le 3 octobre 2014. Cette dépense sera financée par le fonds de réserve du CIRM.

Le total du chiffre d'affaires s'élève à 1 976 k€ pour 2016 dont 604 k€ de chiffre d'affaires pour la SMF. Pour comparaison, le résultat net était de +240 k€ en 2015 avec 1 982 k€ de chiffre d'affaires et 436 k€ de subventions. Dans les paragraphes suivants, nous présentons d'abord les finances des activités de la SMF de manière assez détaillée, puis celles des activités du CIRM de manière plus globale.

8.1 – La SMF

La vocation de la SMF est de mener à bien des missions que nous répartissons en trois catégories :

- assurer des services aux membres ;
- produire et vendre des livres et des revues ;
- communiquer sur les mathématiques auprès du grand public.

Le total des produits s'élève à 1 025 k€ (958 k€ en 2015). Le total des produits d'exploitation est de 1 019 k€ (953 k€ en 2015), avec un chiffre d'affaires de 604 k€ (contre 640 k€ en 2015) ; ce total inclut 530 k€ de ventes (contre 570 k€ en 2015) et 80 k€ de cotisations. Le montant total des subventions est de 19 k€.

Le total des charges est de 1 000 k€ (822 k€ en 2015) [16].

Dans le cadre d'une convention signée le 3 juillet 2016 entre le fonds de dotation de l'IHP et la SMF (membre fondateur du fonds), la SMF a accepté de gérer des fonds de soutien (170 k€) versés par des mécènes, fonds destinés à soutenir et financer des actions choisies par le soin du fonds. La SMF a retenu 3% des sommes versées pour compenser ses frais de gestion.

La SMF présente un résultat positif de 25 k€ en 2016, contre 136 k€ en 2015. Cette différence s'explique par une légère baisse des ventes et une augmentation des charges liées à une production d'ouvrages plus importante. Dans la suite, nous détaillons ces comptes poste par poste.

Produits d'exploitation et produits financiers

1. *Ventes de revues et de livres*. Le montant global est de 530 k€, contre 570 k€ en 2015. Il y a là une baisse des ventes, en particulier des livres.
2. *Cotisations et abonnements*. Le montant global est de 80 k€, contre 84 k€ en 2015. Ce montant s'errode légèrement mais il est à noter que le nombre d'adhérents en France reste stable ; le besoin de fidéliser les nouveaux adhérents reste une priorité.
3. *Subvention*. La SMF a touché 19 k€ de subventions, dont 15 k€ de subventions récurrentes de l'INSMI. À noter qu'en 2015, des subventions ponctuelles (17 k€ pour la brochure « Zoom des Métiers » et 15 k€ pour le fonds de dotation de l'IHP) s'ajoutaient.
4. *Recettes diverses*. Le montant global est de

15. Il s'agit du droit de mettre à disposition gratuitement dans un format ouvert, par voie numérique, sous réserve de l'accord des éventuels coauteurs, la version finale de son manuscrit acceptée pour publication.

16. Cette variation importante s'explique par une réorganisation des comptes, où la dépréciation des stocks est intégrée aux charges.

74 k€, contre 70 k€ en 2015 ; ces recettes proviennent de la facturation des frais de ports et de refacturations variées pour des actions avec des associations partenaires (sociétés savantes, *Animath*. . .).

5. *Transfert de charges.* Cela correspond au reversement des salaires des personnels du cirm détachés à la smf. Le montant global est de 181 k€, contre 156 k€ en 2015.
6. *Produits financiers.* Ces produits correspondent à la rémunération des fonds placés. Le montant global est de 4 k€ contre 5 k€ en 2015.

Charges d'exploitation

1. *Masse salariale.* Le montant des salaires et indemnités hors charges de l'ensemble du personnel (smf +cirm) est de 317 k€, contre 310 k€ en 2015. Il faut ajouter 138 k€ de charges (130 k€ en 2015). Les salaires du personnel smf détaché au cirm sont intégralement remboursés (164 k€).
2. *Frais de fabrication et composition.* Le montant global des dépenses de fabrication et composition des revues et collections est de 141 k€. Tous ouvrages confondus, les frais de fabrication s'élèvent à 104 k€, contre 106 k€ en 2015. Les frais de composition sont de 37 k€, contre 28 k€ en 2015.
3. *Honoraires, assurances, loyers.* Les honoraires pour le commissaire aux comptes et l'expert comptable s'élèvent à 16 k€, les frais d'assurances sont de 2 k€, et les loyers versés à l'ihp et à Luminy représentent 14 k€, à quoi s'ajoutent des « honoraires divers » (18,5 k€ qui comprennent des frais d'avocat pour la refonte des contrats des salariés du cirm).
4. *Affranchissements et routage.* Tous envois confondus, le montant global des affranchissements est de 91 k€, contre 87,5 k€ en 2015.
5. *Impôts et taxes.* Ce poste est de 14,8 k€, contre 14 k€ en 2015 dont 11,3 k€ correspondent à la taxe sur les salaires.
6. *Frais bancaires et téléphone.* Le montant global est de 5 k€, stable par rapport à 2015.
7. *Achat de fournitures.* Il y a eu 12 k€ d'achats de fournitures contre 9 k€ en 2015. Ces achats s'expliquent par le travail de reconditionnement du stock à la cellule de Marseille.
8. *Vie de l'Association.* Cette ligne inclut les soutiens aux opérations scientifiques, les frais de déplacement, et divers « frais de mission ». Le montant global est de 16 k€, contre 20 k€ en 2015.
9. *Entretien, réparation, maintenance.* Le montant global est de 17 k€, stable par rapport à 2015. S'ajoute à ce montant 16 k€ de travaux à la cellule de Marseille, qui ont été remboursés par la MAIF.
10. *Dépenses diverses.* Cette « ligne » inclut entre autres la sous-traitance générale (12 k€), la publicité (5 k€), la formation (1 k€).
11. *Amortissements sur immobilisations.* Cela correspond essentiellement à l'amortissement du matériel informatique. Le montant global est de 15 k€, contre 17 k€ en 2015.
12. *Provisions diverses.* Le montant total est de 4,5 k€, contre 3 k€ en 2015, ce qui correspond à des factures impayées.
13. *Variation du stock et des encours.* La variation de stock s'élève à -128 k€ en 2016 contre +3 k€ en 2015. En conséquence, l'incidence nette de la variation de stock pour l'année 2016 est de -5 k€.

8.2 – Le cirm

Depuis 2000, le cirm est une Unité Mixte de Service placée sous la responsabilité conjointe du cnrs-insmi et de la smf. Une convention signée le 7 décembre 2010 a eu pour objet de fixer la répartition des domaines d'intervention entre l'unité cnrs et la smf : par l'intermédiaire du cnrs, le cirm apporte le contenu scientifique des rencontres mathématiques, par ailleurs le cirm confie à la smf l'organisation et la gestion des rencontres mathématiques.

L'exercice 2016 du cirm est déficitaire de 522 k€, il était excédentaire de 104 k€ en 2015. L'origine de ce bilan déficitaire est l'engagement à hauteur de 600 k€ dans le projet 2r-cirm, qui vise à la restructuration et à la rénovation de l'Annexe (bâtiment cnrs). Pour ce projet, qui est inscrit au Contrat État Région, est prévu un budget total de 2,6 M€. L'engagement du cirm dans le projet a été voté au bureau de la smf le 3 octobre 2014. D'autre part, le cirm a prévu d'investir 120 k€ pour l'extension du restaurant (livraison prévue en 2018).

Les produits d'exploitation s'élèvent à 1 782 k€ en 2016 (contre 1 749 k€ en 2015), auxquels il faut rajouter 5,4 k€ de produits financiers (5,7 k€

en 2015) et 180 k€ de « produits exceptionnels » (198 k€ en 2015). Ces produits dits exceptionnels, correspondent à l'étalement des subventions d'investissement perçues lors de précédents travaux et investissements au CIRM.

Les produits comprennent à la fois des ressources propres – 1 372 k€ de chiffre d'affaires (1 354 k€ en 2015) – ainsi que des subventions de différents organismes (MENESR, Aix-Marseille Université, Conseil Régional, Ville de Marseille) s'élevant à 405 k€ (390 k€ en 2015). Le chiffre d'affaires et les subventions sont en légère hausse par rapport à 2015.

Les charges d'exploitation s'élèvent à 1 890 k€ contre 1 849 k€ en 2015. Cette augmentation est essentiellement liée aux achats de matières premières.

8.3 – Conclusion

L'ensemble CIRM-SMF affiche un résultat négatif de 497 k€. Hors de la dépense exceptionnelle de 600 k€ liée au projet 2R-CIRM, le résultat net du CIRM est de +78 k€. La SMF est quant à elle, excédentaire pour +25 k€.

Ce rapport moral se veut le bilan de l'ensemble des activités au sein de la SMF depuis un an. Le personnel de la SMF et de très nombreux bénévoles y ont contribué, nous les remercions tous : membres du Bureau, du Conseil d'Administration et du Conseil Scientifique de la SMF, directeurs et membres des comités de rédaction, ainsi que tous ceux qui interviennent, ponctuellement ou plus régulièrement, et qui offrent leurs compétences sans compter leur temps avec une très grande générosité.

Ce rapport a été rédigé par B. Adamczewski, V. Berthé, H. Biermé, G. Bourgeois, D. Dos Santos, P. Foulon, L. Guillopé, C. Imbert, S. Jaffard, L. Nyssen, A. Pasquale, S. Seuret, A. Szpirglas avec l'aide de S. Albin, N. Christiaën, C. Munusami et C. Ropartz. Remercions enfin F. Petit pour sa relecture attentive (de ce rapport mais aussi des épreuves de la *Gazette* et autres textes tout au long de l'année).

Yves Meyer, prix Abel 2017

• S. Jaffard

Le 23 mai 2017, Yves Meyer a reçu des mains du roi de Norvège Harald V le prix Abel 2017. Ce prix, décerné chaque année, a été récemment institué : il fut attribué pour la première fois à Jean-Pierre Serre en 2003. Il récompense l'ensemble d'une œuvre, et pallie l'absence de prix Nobel en mathématiques. La cérémonie a été le point culminant de trois jours de célébrations et festivités dans la capitale norvégienne.

© Stéphane Jaffard

Yves Meyer est né à Paris en 1939. Il a passé sa jeunesse à Tunis où il a été élève du lycée Carnot, pépinière d'intellectuels renommés. Encore adolescent, il découvre avec ravissement le traité D'A. Zygmund « Trigonometric series ». Une conférence de J.-P. Kahane, entendue à Tunis alors qu'il était encore lycéen, confirmera sa fascination pour l'analyse harmonique. Après des études brillantes à l'École normale supérieure, il enseigne trois ans en lycée, au Prytanée militaire de la Flèche, où il commence des travaux de recherche. J.-P. Kahane continuera d'influencer Y. Meyer par sa façon de faire des mathématiques, fort éloignée du « choix bourbachique » alors prédominant ; il en gardera toute sa vie un certain style, préférant la résolution de problèmes précis, l'étude d'objets ou de propriétés mathématiques remarquables, plutôt que la construction de théories abstraites. Ultérieurement, J.-L. Lions, fondateur de l'école de mathématiques appliquées française, le sensibilisera à la richesse du lien entre les mathématiques et leurs applications. Hormis de brefs passages au cnrs, il sera toute sa vie enseignant-chercheur, tout d'abord à Strasbourg, puis Orsay, Polytechnique, Dauphine, et enfin à l'École normale supérieure de Cachan (aujourd'hui Éns Paris-Saclay), où il est professeur émérite.

Yves Meyer est membre de l'Académie des sciences, de l'American Academy of Arts and Sciences et de la u.s. National Academy of Sciences. Il a reçu de nombreux prix et distinctions, dont le prix Gauss, en 2010, qui est la plus haute distinction en mathématiques appliquées.

L'Académie des Sciences et des Lettres Norvégienne a justifié son attribution du prix Abel 2017 à Yves Meyer « for his pivotal role in the development of the mathematical theory of wavelets ». Cette citation ne doit pas être comprise en un sens réducteur, en effet, l'une des caractéristiques d'Yves Meyer est son éclectisme dans le choix de ses thèmes de recherche. Jeune, il s'intéressa à l'interface entre l'analyse harmonique et la théorie des nombres. Dans les années 1960, l'un des sujets majeurs dans ce domaine était celui de la *synthèse spectrale* (où s'illustrèrent tout particulièrement L. Schwartz et P. Malliavin). Ce thème de recherche très riche l'amène à construire la théorie des *ensembles modèles*, qui trouvera un développement inattendu, puisqu'elle ouvrira la voie aux quasi-cristaux, avant les travaux qui rendront R. Penrose célèbre. Il s'agit de construire des pavages de l'espace par des objets réguliers, et pour lesquels les pavages périodiques sont interdits. Ainsi, on ne peut pas paver le plan par des pentagones réguliers, mais cela est possible par un pavage *quasi-périodique* contenant des pentagones et des losanges, et un tel pavage aura des propriétés de symétrie pentagonale remarquables. Ces travaux ont trouvé des applications inattendues en chimie, grâce aux travaux de D. Gratias, D. Schechtman (qui reçut pour cela le prix Nobel de Chimie) et leurs collaborateurs. Yves Meyer est ensuite revenu sur ce sujet dans des travaux en collaboration avec B. Matei : en 2011, ils ont démontré que les ensembles modèles peuvent aider à reconstruire certains signaux pour lesquels on ne dispose que d'une information partielle sur la localisation de leur bande de fréquence ; échantillonner un signal sur un quasi-cristal peut permettre d'aller au-delà de ce qui semblait permis par la théorie de Shannon. Ces développements apportent une contribution importante au *compressed sensing* (échantillonnage compressif) ; cette théorie permet de reconstruire certains types de signaux ou d'images qui ont une représentation « parcimonieuse » (par exemple, ils s'écrivent avec une grande précision au moyen de quelques termes sur une base donnée) ; et ce, en ne disposant que d'informations extrêmement partielles fournies par le résultat de quelques applications linéaires tirées au hasard. Cette théorie naquit en 2005 des travaux d'E. Candes, D. Donoho et T. Tao ; elle a connu depuis un immense succès et permis des résultats spectaculaires, comme la reconstruction d'images médicales fortement sous-échantillonnées obtenue par résonance magnétique nucléaire. Y. Meyer a proposé une version déterministe de cette théorie utilisant les quasi-cristaux.

En 1974, Yves Meyer effectue une visite aux États-Unis, à Washington University, à Saint Louis. Là, R. Coifman lui décrit le *programme de Calderón*, vaste programme scientifique motivé par les équations aux dérivées partielles, et dont le but était l'étude de certains opérateurs d'intégrale singulière dits « de Calderón-Zygmund ». Typiquement, si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$, l'opérateur T agit sur f de la façon suivante :

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)f(y)dy,$$

où le noyau K est, en dehors de la diagonale $x = y$, une fonction vérifiant

$$|K(x,y)| \leqslant \frac{C}{|x-y|^d}$$

$$\left|\frac{\partial K}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial K}{\partial y}\right| \leqslant \frac{C}{|x-y|^{d+1}}.$$

Ces opérateurs jouent un rôle central dans de nombreux problèmes issus de la physique (électrostatique ou électromagnétisme par exemple), dans des situations où la géométrie est peu régulière. Captivé par ce nouveau sujet, Yves Meyer résoudra la première conjecture centrale de la théorie, concernant la continuité de l'intégrale de Cauchy sur les courbes lipschitziennes, en collaboration avec R. Coifman et A. McIntosh. Il considère d'ailleurs ce travail comme le plus difficile qu'il ait obtenu. Cette percée a ouvert la voie aux célèbres travaux de G. David et J.-L Journé (théorème $T(1)$ qui donne un critère simple de continuité sur L^2 des opérateurs de Calderón-Zygmund), X. Tolsa (conjecture de Painlevé), P. Auscher, P. Tchamitchian et al. (conjecture de Kato sur la racine carrée des opérateurs accrétifs), G. David (conjecture de Vitushkin sur la capacité analytique)... La plupart de ces brillants mathématiciens sont d'anciens élèves d'Yves Meyer.

La veille de la remise du prix, Yves Meyer dépose une couronne de fleurs au pied du monument à la gloire d'Abel dans un parc d'Oslo.

© Stéphane Jaffard

En 1984, Yves Meyer abandonne ce sujet dont il était devenu un maître incontesté pour se lancer dans une nouvelle aventure : les ondelettes. Cette théorie repose sur l'intuition de l'ingénieur géophysicien J. Morlet, qui travaillait dans la détection pétrolière ; il étudiait les signaux obtenus en *sismique par réflexion* : une vibration est émise vers l'intérieur de la terre, et est réfléchie par les différentes couches du sous-sol ; on cherche à reconstituer la nature du sous-sol à partir de l'étude de signal reçu. J. Morlet proposait de décomposer les signaux qu'il étudiait en des composantes élémentaires simples, ayant toutes la même forme ; en collaboration avec le physicien théoricien A. Grossmann il formalise cette idée, introduisant ainsi la *transformée continue en ondelettes* dans laquelle le signal est décomposé sur toutes les translatées-dilatées de l'ondelette. Plus précisément, si l'ondelette ψ est bien localisée et d'intégrale nulle, on définit la transformée en ondelettes d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$C_f(a,b) = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt.$$

Si de plus ψ est paire ou impaire, on peut alors la reconstituer par la formule

$$f(x) = \int_{a>0}\int_{b\in\mathbb{R}} C_f(a,b)\,\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\frac{da\,db}{a^2}.$$

Yves Meyer découvre l'article correspondant au hasard d'une discussion autour de la photocopieuse que partageaient mathématiciens et physiciens à l'École polytechnique, et il perçoit immédiatement le lien avec les théories mathématiques qu'il avait précédemment explorées. Il sera le catalyseur de cette aventure qui, initiée par une poignée de scientifiques, allait révolutionner le traitement du signal, la statistique, et avoir une influence profonde sur l'ensemble de l'analyse mathématique. En effet, si les décompositions multi-échelles étaient un outil familier aux spécialistes du traitement du signal et de l'image (elles correspondent à l'idée naturelle d'une image observée simultanément à plusieurs résolutions), la formalisation mathématique qu'en fournissent les bases orthonormées d'ondelettes leur donne une puissance incomparable ; une base d'ondelettes a une structure algorithmique particulièrement simple : ses éléments se déduisent les uns des autres par une famille discrète de translations-dilatations. Plus précisément, en une variable, une base orthonormée d'ondelettes est de la forme

$$2^{j/2}\psi(2^j x - k), \qquad j,k \in \mathbb{Z}.$$

Certaines bases orthonormées d'ondelettes existaient déjà : la première avait été découverte par A. Haar en 1909, et était engendrée par la fonction

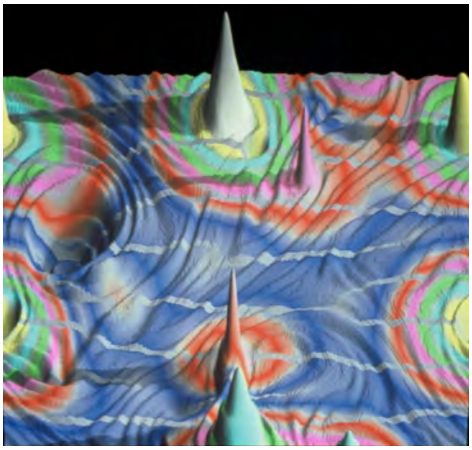
$$\psi = 1_{[0,1/2[} - 1_{[1/2,1[}.$$

D'autres ondelettes de type « splines », c'est-à-dire polynomiales par morceaux et ayant une régularité arbitrairement grande, avaient été construites par J.-O. Strömberg, mais étaient restées méconnues de la communauté scientifique. En 1986, dans un article en collaboration avec P.-G. Lemarié, Yves Meyer construit les premières bases d'ondelettes sur $\mathbb{R}^d$ et appartenant à la classe de Schwartz, puis avec S. Mallat, il développe le concept d'analyse multirésolution, qui établit le lien avec les *algorithmes* *pyramidaux* utilisés auparavant en traitement du signal et de l'image. Un apport fondamental d'Yves Meyer a été de comprendre la pertinence de cet outil dans de multiples problèmes mathématiques, et pour de nombreuses applications. Parmi les proches collaborateurs d'Yves Meyer qui, à ses côtés, firent le succès des ondelettes, S. Mallat introduisit les algorithmes de décomposition rapide, outil indispensable pour transformer une belle théorie mathématique en un outil performant pour effectuer le traitement des signaux et des images en temps réel ; et I. Daubechies découvrit les ondelettes à support compact, qui sont encore aujourd'hui les plus couramment utilisées dans les applications. L'imposant ouvrage en trois volumes « *Ondelettes et opérateurs* » qu'Yves Meyer publia en 1990 eut un profond impact sur la communauté mathématique, et bien au-delà. Il y établit notamment le lien avec ses travaux antérieurs en montrant que les bases d'ondelettes fournissent une décomposition remarquablement simple des opérateurs de Calderón-Zygmund. Il montre également que, contrairement aux séries de Fourier, les bases d'ondelettes sont des bases de très nombreux espaces fonctionnels, et fournissent des décompositions numériquement stables (on parle de *bases inconditionnelles*). Le cas des espaces de Besov est particulièrement emblématique : introduits à la fin des années 1950 comme un outil technique adapté à des questions d'interpolation entre espaces fonctionnels, la caractérisation extrêmement simple qu'Yves Meyer en donne (des conditions de type l^p sur les coefficients d'ondelettes) va leur donner une nouvelle vie, et en faire un outil couramment utilisé en analyse (et tout particulièrement en E.D.P.). D. Donoho percevra l'immense potentiel de ces caractérisations en statistique, et il développera, avec ses collaborateurs I. Johnstone, D. Picard, G. Kerkacharian... un ambitieux programme où les espaces de Besov jouent un rôle clef.

Les ondelettes sont aussi aujourd'hui un outil essentiel de l'analyse multifractale. Ce domaine scientifique très interdisciplinaire prend sa source dans les travaux fondateurs de N. Kolmogorov en turbulence dans les annéees 1940, puis dans ceux de B. Mandelbrot, J.-P. Kahane, J. Peyrière et J. Barral qui introduisirent et analysèrent les modèles probabilistes correspondant (cascades multiplicatives). U. Frisch et G. Parisi lui donnèrent sa forme définitive en découvrant le *formalisme multifractal* qui établit une relation entre singularités ponctuelles et régularité globale d'une fonction, et ouvrit la porte aux multiples applications. Bien au-delà de la motivation initiale fournie par l'analyse de la turbulence, l'analyse multifractale permet de décrire et classifier les signaux et images présentant des propriétés d'auto-similarité statistique (travaux de P. Abry, A. Arneodo, S. Jaffard S. Seuret, et leurs collaborateurs). Yves Meyer y apporta deux contributions d'une grande originalité : d'une part en établissant des caractérisations par ondelettes de différents types de singularités ponctuelles, puis en découvrant un lien inattendu entre multifractalité et représentations « creuses » sur une base d'ondelettes (le réarrangement décroissant des coefficients est à décroissance rapide).

Analyse continue en ondelette (de Morlet) d'un écoulement turbulent bidimensionnel calculé par simulation numérique. La visualisation superpose :

– la vorticité (la hauteur de la surface correspondant à la valeur du champ),
– en couleur, le module de la transformée en ondelettes de la vorticité ; les isolignes grises matérialisent les passages à zéro de sa phase.



© Marie Farge et Matthias Holschneider, avec Jean-François Colonna pour la visualisation

Les décompositions en ondelettes sont devenues un outil incontournable dans toutes les opérations liées au traitement du signal, de l'image et de la vidéo : codage, transmission, reconstruction d'images floues et/ou bruitées... ; les travaux de S. Roques et ses collaborateurs ont ainsi permis la reconstruction des images floues émises durant les premières années de fonctionnement du téléscope spatial Hubble, initialement mal réglé. Le standard JPEG 2000, utilisé comme norme en compression d'image, repose sur une décomposition en ondelettes bi-orthogonales due à A. Cohen, I. Daubechies, et J.-C. Fauveau. Les ondelettes jouent également un rôle central dans la résolution d'une très grande classe de problèmes inverses (travaux de D. Donoho, E. Candes, J.-L. Starck, et leurs collaborateurs). Enfin, tout récemment, S. Mallat et ses collaborateurs ont introduit de nouvelles méthodes d'apprentissage par réseaux neuronaux profonds reposant sur des transformées en ondelettes itérées du signal.

R. Coifman, et Yves Meyer construisirent également les *paquets d'ondelettes*, qui forment une variante des bases d'ondelettes classiques ; ces nouveaux systèmes ne sont plus des bases à proprement parler : on décompose le signal sur un « dictionnaire » composé d'un ensemble de fonctions très redondant ; puis on sélectionne, au sein de ce dictionnaire, une famille composée d'un très petit nombre d'éléments, qui permettent de représenter le signal avec une très haute précision. La recherche d'une meilleure décomposition pour représenter un signal ou une image sur un système redondant conduit donc de nouveau aux *représentations parcimonieuses*, déjà mentionnées.

Dès le début de l'« aventure des ondelettes », une dualité s'était instaurée entre les décompositions *temps-échelle* (les ondelettes permettent une analyse du signal à toutes les échelles disponibles), et l'analyse *temps-fréquence*, qui pallie le défaut de non-localité de l'analyse de Fourier en effectuant d'abord une localisation (on multiplie le signal par une « fenêtre »), puis une analyse en séries de Fourier adaptées à chaque fenêtre. Ce programme a été initialement lancé par le physicien D. Gabor (Prix Nobel de physique pour l'invention de l'holographie) en 1945. Des applications spectaculaires des transformées de Gabor continues (on utilise toutes les translations de la fenêtre et toutes les fréquences) en traitement du signal (parole, musique...) seront obtenues dès la fin des années 80 par P. Flandrin, B. Torrésani et leurs collaborateurs. Là aussi, une évolution du continu au discret sera réalisée, conduisant aux *bases de Wilson* construites par I. Daubechies, S. Jaffard et J.-L. Journé, et pour lesquelles la fenêtre ϕ utilisée peut être l'une des ondelettes introduites par Yves Meyer et P.-G. Lemarié dans leur première construction historique (l'existence de telles bases avait été conjecturée par K. Wilson dans le cadre de la théorie de la renormalisation, pour laquelle il a reçu le prix Nobel de physique). Ces bases ont la forme algorithmique suivante : on dispose d'une unique « fenêtre » ϕ, et la base orthonormée obtenue est du type

$$\phi_{0,n}(t) = \phi(t-n) \qquad n \in \mathbb{Z},$$

$$\phi_{l,n}(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\phi\left(t-\frac{n}{2}\right)\cos(2\pi l t) & \text{si } l+n \in 2\mathbb{Z}, \\ \sqrt{2}\phi\left(t-\frac{n}{2}\right)\sin(2\pi l t) & \text{si } l+n \in 2\mathbb{Z}+1. \end{cases}$$

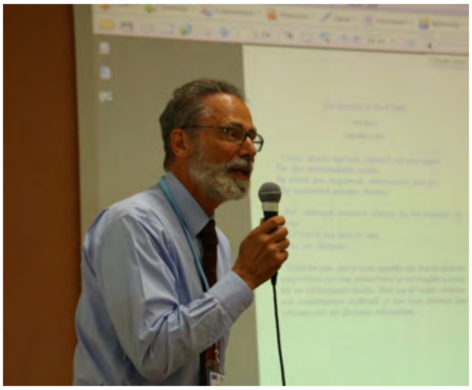
L'efficacité numérique de ces bases pour la détection d'ondes gravitationnelles avait été montrée par S. Klimenko ; la procédure qu'il a mise au point utilise en fait un sytème redondant constitué par 8 bases de Wilson se déduisant les unes des autres par dilatation d'un facteur 2 ; et son utilisation dans l'algorithme numérique de traitement du signal du détecteur LIGO a permis la découverte, en septembre 2015, de l'onde gravitationnelle générée par la coalescence de deux trous noirs. En collaboration avec R. Coifman, Yves Meyer donnera une nouvelle dimension à ces décompositions en améliorant les *bases de Malvar*, autres bases temps-fréquence dont ils montreront que la taille des fenêtres peut être adaptée au signal analysé. De telles décompositions sont pertinentes pour l'analyse des signaux de parole (travaux de V. Wickerhauser, E. Wesfreid...). On les retrouve aussi dans les formats de compression audio MP3 et MPEG2AA utilisés dans les IPOD et Iphone.

Au début des années 1990, l'attention d'Yves Meyer est attirée par un article de G. Battle et P. Federbush, qui proposent de résoudre les équations de Navier-Stokes en utilisant une décomposition en ondelettes. Il va reprendre à son compte ce programme tout en l'infléchissant ; en effet, il s'avère que des méthodes plus anciennes que les décompositions en ondelettes (mais de même nature) fournies par les décompositions de Littlewood-Paley, sont mieux adaptées à ce problème. Yves Meyer développe ce programme avec ses étudiants M. Cannone, F. Planchon et L. Brandolese. Ils construiront de nouvelles solutions dites *mild* de ces équations ; ce type de solutions avait été introduit par T. Kato dans les années 1980 : contrairement aux solutions faibles « à la Leray » on part d'une formulation intégrale des équations de Navier-Stokes dont la résolution est obtenue par une méthode de point fixe ; ici aussi, l'utilisation intensive des espaces de Besov a permis à Yves Meyer, en collaboration avec Marco Cannone et Fabrice Planchon de construire des solutions *auto-similaires* des équations de Navier-Stokes, où la vitesse $v(x,t)$ du fluide vérifie

$$\forall \lambda > 0, \qquad v(x,t) = \lambda v(\lambda x, \lambda^2 t).$$

La première preuve de l'unicité des « solutions mild » par P.-G. Lemarié, G. Furioli et E. Terraneo est aussi une conséquence de cette dynamique.

Yves Meyer lors de la journée en l'honneur de Patrick Flandrin, le 7 septembre 2015. On devine le titre de son exposé : « The hunting of the chirp ». Préscience ? coïncidence signifiante ? Le chirp le plus célèbre de l'histoire, l'onde gravitationnelle GW150914, déclenchée par la coalescence de deux trous noirs il y a 1,3 milliard d'années, allait être détecté une semaine plus tard, assurant la première confirmation directe de la validité de la relativité générale dans des conditions de gravitation extrêmes.



© Gabriel Michau

Sous l'influence de P.-L. Lions, Yves Meyer s'intéresse plus généralement aux problèmes d'analyse non linéaire issus des équations aux dérivées partielles (lemme *div-curl*, injections de Sobolev précisées...). Ils montrent ainsi la pertinence des méthodes d'analyse harmonique (ondelettes ou Littlewood-Paley) sur quelques questions d'importance cruciale pour la résolution des EDP non linéaires issues de la physique.

La proximité avec J.-M. Morel à Dauphine puis à Cachan a permis des fertilisations croisées particulièrement fructueuses avec l'école de traitement d'image que celui-ci a fondée en France. Ainsi, Yves Meyer a donné une nouvelle impulsion aux fameux « *modèles* $u + v$ » de Rudin-Osher-Fatemi (introduits pour séparer les contours de la texture dans les images), et les idées qu'il a introduites dans ce domaine furent développées par L. Rudin, S. Osher, L. Vese, A. Chambolle, J.-F. Aujol...

Yves Meyer lancera aussi des élèves sur des pistes qu'il ne suivra pas lui-même ; c'est par exemple le cas de la première d'entre eux, A. Bonami : les résultats fondateurs de sa thèse, concernant l'hypercontractivité, ont été le point de départ d'un grand nombre de travaux importants, tant en analyse qu'en physique mathématique.

Des caractéristiques importantes d'Yves Meyer sont sa passion pour l'enseignement et son immense générosité, partageant sans compter ses idées et ses intuitions avec ceux qui l'approchent. Ceci explique sans doute pourquoi il a été un directeur de thèse si prolifique (il a eu une cinquantaine de thésards), et si unanimement loué par ses anciens élèves. On ne pourrait citer tous les mathématiciens qui, de près ou de loin, ont profité de son contact ; rappelons seulement combien l'émergence et le rayonnement actuel de l'école d'analyse espagnole doivent à l'aide fraternelle qu'Yves Meyer lui a constamment prodiguée. Les mathématiciens espagnols considèrent tellement Yves Meyer comme l'un des leurs, que le quotidien madrilène « El País » a même annoncé qu'un mathématicien espagnol avait reçu le prix Abel ! Au-delà de la profondeur des nombreuses idées qu'il a introduites, Yves Meyer est aussi admiré pour avoir été le centre d'un réseau où intervenaient des scientifiques issus de très nombreuses disciplines. La science est aujourd'hui de moins en moins cloisonnée, et de grandes percées sont obtenues par mise en contact de communautés très différentes qui réfléchissaient auparavant, chacune de son côté, sur des problèmes similaires. Le grand succès des ondelettes, dont Yves Meyer a été le moteur, en est un exemple éclatant. Il a d'ailleurs terminé l'exposé scientifique qu'il a donné à l'université d'Oslo le lendemain du prix Abel, en affirmant que la vieille hiérarchie des sciences d'Auguste Comte (avec les mathématiques au sommet !) doit être remplacée par l'idée d'un orchestre au sein duquel les différentes disciplines se répondent et jouent en harmonie. Durant cette conférence, à une question sur la façon dont on peut favoriser l'interdisciplinarité, il a indiqué ce qu'il ne faut pas faire : les grandes fusions dont rêvent les hommes politiques français. En effet, seuls des départements voisins et de tailles raisonnables peuvent faciliter les rencontres entre chercheurs de disciplines différentes. Son parcours illustre aussi l'un des paradigmes les plus importants de la science actuelle ; la frontière que certains ont voulu voir entre science fondamentale et appliquée n'existe pas : Yves Meyer a donné à de multiples occasions la preuve que des idées profondes, qui ont montré leur pertinence sur des problèmes mathématiques extrêmement théoriques, peuvent s'avérer être la clef qui ouvre la porte à des applications spectaculaires, comme en atteste le titre provocateur qu'il avait donné à l'un de ses exposés : « De la recherche pétrolière à la géométrie des espaces de Banach ».

Les trois jours qui ont encadré la remise du prix Abel ont été pour Yves Meyer l'occasion d'expliquer sa façon d'aborder les problèmes mathématiques, et de donner sa vision scientifique. Il a acquis, lors de sa jeunesse en Tunisie, un esprit nomade, le désir d'aller de problème en problème, et de lieu en lieu, sans se sentir jamais attaché nulle part. Il aime s'attaquer « à mains nues » à un nouveau problème, sans lire la littérature déjà existante, pour ne pas être guidé dans des impasses ; et il n'a pas hésité à critiquer la « recherche incrémentelle » qui dessèche ceux qui passent toute leur vie sur un même problème.

Se tenant toujours éloigné des chapelles et des groupes de pression, Yves Meyer s'est attaché à la transmission de la science et aux valeurs d'humanisme et de tolérance qui lui sont liées. À une époque qui se replie sur les seules valeurs matérielles, l'exemple qu'il donne n'en est que plus remarquable.

Les quatre orateurs de la journée scientifique le lendemain de la remise du Prix Abel. De gauche à droite : Yves Meyer, Stéphane Mallat, Ingrid Daubechies et Emmanuel Candes.

© Stéphane Jaffard

Pour en savoir un peu plus : quelques articles déjà parus dans la *Gazette* et disponibles sur le site de la smf.

« Yves Meyer et la théorie des nombres » par Jean-Paul Allouche (numéro d'avril 2011).
« Yves Meyer et l'opérateur de Cauchy » par Hervé Pajot (numéro d'avril 2011).
« Sur la route des ondelettes » par Albert Cohen (numéro d'octobre 2011).
« Des ondelettes pour détecter les ondes gravitationnelles » par E. Chassande-Mottin, S. Jaffard et Y. Meyer (numéro d'avril 2016).

Et pour en savoir beaucoup plus : les ouvrages écrits par Yves Meyer.

Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique, Lecture Notes 117 (1969).
Algebraic numbers and harmonic analysis, North Holland, New York (1972).
Trois problèmes sur les sommes trigonométriques, Astérisque n° 1, smf (1972).
Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, avec R. R. Coifman, Astérisque 57, smf (1978).
Ondelettes et opérateurs, tomes 1, 2 et 3, Hermann (1990).
Ondelettes et algorithmes concurrents, Hermann (1992).
Wavelet methods for pointwise regularity and local oscillations of functions, avec Stéphane Jaffard, Memoirs of the AMS (Sept. 1996), Vol.123, n° 587.
Wavelets and operators, Vol. 1 et 2, Cambridge Univ. Press (1992, 1997).
Wavelets and fast numerical algorithms, Handbook of Numerical Analysis, Techniques of Scientific Computing, Ed. P.G.Ciarlet & J.L.Lions, (1997), pp. 639-713.
Wavelets, paraproducts and Navier-Stokes equations, in Current Developments in Mathematics 1996, MIT-press (1997).
Wavelets, Vibrations and Scalings, CRM Monograph Series, Vol. 9, AMS (1998).
Wavelets, Tools for Science & Technology, avec Stéphane Jaffard and Robert Ryan, SIAM (2001).
Oscillating patterns in image processing and in some nonlinear evolution equations, (Lewis Memorial Lectures) AMS (2001).
Oscillating Patterns in some Nonlinear Evolution Equations. Mathematical Foundation of Turbulent Viscous Flows, Lecture Notes in Mathematics 1871, Springer (2006).

Stéphane Jaffard

Université Paris-Est Créteil

Stéphane Jaffard est professeur de mathématiques à l'université Paris Est. Ses recherches portent sur les aspects tant théoriques qu'appliqués de l'analyse multifractale et des décompositions en ondelettes. Il a été président de la smf de 2007 à 2010.

Un entretien avec Roger Godement

Le texte qui suit est un entretien avec Roger Godement, disparu le 21 juillet 2016. Cet entretien a été réalisé le 11 avril 2003 par Martin Andler et Laurent Clozel. Pour un non-spécialiste, cet entretien n'est pas toujours facile à lire. Toutefois, même sans comprendre tous les détails techniques abordés, il nous semble passionnant de suivre sur un exemple comment se diffuse et évolue une théorie mathématique, et d'appréhender le contexte du développement des mathématiques en France dans les années 1950. Pour en faciliter la lecture, nous faisons précéder l'entretien d'une présentation des travaux mathématiques de Godement.

Présentation des travaux mathématiques

Les travaux de Godement ont d'abord porté sur la théorie des représentations des groupes localement compacts puis, à partir du début des années 1960, sur la théorie des formes automorphes. Celle-ci est à notre époque un champ central des mathématiques, dans lequel les mathématiciens de l'école française sont très actifs. Roger Godement a joué un rôle important, par ses articles, ses cours, son séminaire, ses élèves, dans ce domaine et son développement en France jusqu'aux années 70. C'est essentiellement sur ce sujet et son histoire récente que porte l'entretien. C'est pourquoi nous esquissons d'abord brièvement l'activité antérieure de Godement en théorie « abstraite » des représentations [1] ; cela est suivi d'une succincte description des objets de la théorie automorphe qui, nous l'espérons, rendra le texte plus accessible.

Théorie des représentations

L'étude de la théorie des représentations des groupes finis remonte à la toute fin du XIXe siècle (Frobenius, Schur, Burnside) ; elle reste un sujet de recherche actif. La généralisation aux groupes topologiques infinis suppose d'ajouter des hypothèses de continuité pour la représentation. Une théorie générale complète pour les groupes compacts, ainsi qu'une description analytique pour les groupes de Lie compacts sont développées dans les années 1920 (Weyl). Les années 1920 voient l'apparition de la mécanique quantique, et le lien avec la théorie des représentations est mis en évidence dès 1928 par Weyl.

La théorie de Fourier classique peut être vue sous l'angle de la théorie des représentation en observant que les fonctions $x \mapsto e^{2i\pi nx}$ pour $n \in \mathbf{Z}$ (resp. $x \mapsto e^{2i\pi\xi x}$ pour $\xi \in \mathbf{R}$) sont les représentations *irréductibles* de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ (resp. $\mathbf{R}$) : la théorie de Fourier pour $L^2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ ou $L^2(\mathbf{R})$ s'interprète alors comme la décomposition spectrale simultanée des opérateurs de translation $\tau_x(\phi)(\cdot) = \phi(x+\cdot)$. Dans un cas, on a un spectre discret, dans l'autre un spectre continu. Vue sous cet angle, on peut étendre la théorie de Fourier aux groupes localement compacts abéliens ; ceci fut achevé vers 1938-1939 (Pontrjagin, Weil). L'étude abstraite des représentations des groupes abéliens dans des espaces de Hilbert fut complétée par Stone puis Ambrose, Godement, Naïmark (1944). Un article remarquable de Godement avec Henri Cartan (1947) [7] donne en 20 pages un exposé complet de la dualité pour les groupes abéliens localement compacts.

1. Pour plus de détails on pourra se reporter à l'appendice historique de [39].

Dans les années 1930, les physiciens s'étaient tournés vers la mécanique quantique relativiste (théorie quantique relativiste de l'électron), où les groupes de symétrie sont *non abéliens* et *non compacts*, comme par exemple $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$, ou plutôt le groupe de Lorentz affine. Il s'agissait alors de généraliser l'approche de Weyl à de tels groupes. Les premiers résultats, spectaculaires, furent obtenus par des physiciens comme Eugene Wigner et Paul Dirac (pour le groupe de Lorentz) à partir de 1934 et Valentin Bargmann (pour $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$) en 1947. Si le travail de Bargmann fait exception, en étant tout à fait rigoureux sur le plan mathématique, les autres articles des physiciens laissent les difficultés d'analyse, notamment d'analyse fonctionnelle de côté : contrairement au cas des groupes compacts, les représentations irréductibles des groupes non-compacts sont en effet de dimension infinie.

À partir de cette époque plusieurs mathématiciens s'attèlent donc à développer une théorie générale, « abstraite », et rigoureuse des représentations unitaires des groupes localement compacts. Citons par exemple Gelfand, Naïmark, Segal, Mackey. Les travaux de Godement s'inscrivent dans ce cadre. Expliquons brièvement de quoi il s'agit : une des questions importantes est la généralisation de la théorie de Fourier, c'est-à-dire la « diagonalisation » des opérateurs de translation agissant sur l'espace fonctionnel $L^2(G)$ par la représentation dite « régulière » :

$$g \mapsto (f(x) \mapsto f(xg)).$$

Dans ce cas, la décomposition spectrale fait intervenir les représentations irréductibles de G à la place des $e^{2i\pi nx}$ de la théorie de Fourier. Comme nous l'avons dit, une difficulté majeure est que pour un groupe G localement compact non abélien, les représentations irréductibles ne sont généralement pas de dimension 1, ni même de dimension finie. Godement et d'autres montrent toutefois l'existence d'une décomposition spectrale, c'est-à-dire l'existence d'une mesure spectrale sur l'ensemble des (classes de) représentations [2], pour toutes les représentations unitaires, notamment la représentation régulière. La mesure peut, comme dans le cas de la décomposition spectrale d'un opérateur, avoir une partie discrète et une partie continue.

Parmi les autres résultats importants de Godement, citons sa théorie générale des fonctions sphériques, ses travaux sur les fonctions de type positif, sa définition générale des représentations de la « série discrète » (notion découverte par Bargmann) et sa preuve des relations d'orthogonalité de Schur.

À partir de 1960 à peu près, débute une période différente, consacrée à l'étude explicite des représentations des groupes semi-simples, et dominée par les travaux de Gelfand-Naïmark puis, surtout, d'Harish-Chandra.

Formes automorphes

Le lecteur trouvera dans l'entretien une description vivante de l'histoire récente du domaine et des contributions de Godement. Nous donnons par ailleurs à travers cinq encadrés une présentation rapide du sujet. Pour présenter l'entretien, commençons par un raccourci pré-historique : qu'il cherche à calculer la longueur d'arc d'une ellipse ou à résoudre une équation polynomiale, le mathématicien du début du XIX^e siècle est forcé de constater qu'il lui manque des fonctions ! C'est le début d'une longue course à la recherche de « nouvelles fonctions transcendantes » généralisant les fonctions exponentielles et trigonométriques. Cela commence avec les célèbres et magnifiques fonctions elliptiques – fonctions méromorphes doublement périodiques sur le plan complexe – et culmine à la fin du siècle avec la théorie des « fonctions fuchsiennes » ou automorphes de Poincaré. Les premiers exemples de formes automorphes sont les formes modulaires (voir encadré 1). La théorie des formes modulaires date du XIX^e (Poincaré, Fricke, Klein, Kronecker, Weber). C'est une théorie magnifique, Godement en parlait comme du « jardin des délices modulaires » [18]. Ce jardin est cultivé jusqu'aux années 1940-45, largement par l'école allemande, en particulier Hecke, Petersson, et est essentiellement « oublié » en France après la mort de Poincaré. La contribution du « jardinier » Hecke à la théorie est centrale : en 1938 il introduit, sur l'espace des formes de poids k, les *opérateurs de Hecke* $T(p)$, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers [50, p. 158]. Il définit aussi la fonction L, notée $L(f,s)$, d'une forme modulaire f : c'est une fonction de la variable complexe s, similaire à la fonction ζ de Riemann et aux séries L de Dirichlet [50, p. 114]. Il prouve qu'il existe, dans l'espace des formes de poids k, une base de formes vecteurs propres pour l'action des opérateurs de Hecke, et que pour de telles formes la fonction L a un déve-

2. Sous l'hypothèse d'un groupe de type I au titre de la classification de von Neumann dans ses articles sur les algèbres d'opérateurs.

loppement en produit eulérien, similaire à

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

où p parcourt les nombres premiers. Si f est parabolique (voir encadré 1), $L(f,s)$ est holomorphe dans tout le plan complexe.

Encadré 1 : formes modulaires. Considérons le demi-plan de Poincaré

$$\mathbf{H} = \{z = x+iy \in \mathbf{C} \mid y > 0\}.$$

Le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ opère sur $\mathbf{H}$ par homographies $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Considérons le sous-groupe $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ des matrices à coefficients entiers. Une *forme modulaire de poids k* (pour Γ) est une fonction holomorphe f sur $\mathbf{H}$ vérifiant l'équation fonctionnnelle

$$f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

On impose de plus à f une condition de croissance ou d'holomorphie à l'infini [50, p. 131-132]. L'espace des formes de poids k est alors de dimension finie. Il y a une définition analogue quand Γ est remplacé par un groupe du même type, par exemple un sous-groupe d'indice fini.
Puisque $f(z+1) = f(z)$, la fonction f admet un développement de Fourier

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n q^n, \quad q = e^{2i\pi z},$$

les coefficients de Laurent négatifs étant nuls vu la condition à l'infini [50, p. 131-132]. On dit que f est une forme *parabolique* si $a_0 = 0$. Noter que ceci équivaut à

$$\int_0^1 f(z+x)dx = 0 \quad (z \in \mathbf{H}).$$

Un autre type de formes modulaires joue un rôle fondamental dans les généralisations : ce sont les *séries d'Eisenstein*, introduites comme leur nom l'indique par Eisenstein,

$$E_k(s) = \frac{1}{2} \sum_{(m,n)=1} (mz+n)^{-k} \quad (k \geqslant 3),$$

la somme portant sur les couples d'entiers premiers entre eux. Elles fournissent, dans l'espace des formes de poids k, un supplémentaire aux formes paraboliques.

Les formes modulaires, et leur extension à plusieurs variables complexes, sont essentiellement ce que Godement appelle les formes automorphes « classiques » dans l'entretien. Hecke avait démontré l'existence d'un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, et d'une équation fonctionnelle, pour les fonctions zêta de Dedekind, et plus généralement pour les fonctions L de « Grössencharakterer » (aussi appelés caractères de Hecke, voir encadré 5). En particulier, Hecke identifiait la fonction L de certains Grössencharakterer pour des extensions quadratiques de $\mathbb{Q}$ à la fonction L d'une forme modulaire classique, retrouvant ainsi l'équation fonctionnelle. Mais ces formes holomorphes ne suffisent pas à étendre le résultat de Hecke à tous les Grössencharakterer de corps quadratiques. En un certain sens, il n'y a pas assez de formes holomorphes. Par exemple, une forme modulaire de poids 0 est une fonction holomorphe tellement périodique qu'elle est nécessairement constante. Si l'on veut étendre la théorie de Hecke à tous les Grössencharakterer il est nécessaire d'oublier la condition d'holomorphie. Cela conduit à la notion de formes de Maass (voir ci-dessous).

Encadré 2 : formes de Maass, théorie spectrale. Considérons l'espace des fonctions sur $\mathbf{H}$ invariantes par $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$. Celles de ces fonctions qui, sur le quotient, sont de carré intégrable pour la mesure hyperbolique forment un espace de Hilbert (de dimension infinie). La découverte de Maass en 1949, qu'évoque Godement au début de l'entretien, est qu'il existe encore pour cet espace de fonctions une bonne théorie, similaire à celle de Hecke et permettant d'étendre le travail de ce dernier aux autres Grössencharakterer. Il s'agit cette fois de considérer les fonctions propres du laplacien hyperbolique

$$\Delta = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

et plus généralement la décomposition spectrale de cet opérateur auto-adjoint dans $L^2(\Gamma \backslash \mathbf{H})$. Les fonctions propres (appartenant ou non au spectre discret) sont les *formes de Maass*. Parmi celles-ci sont les *séries d'Eisenstein non holomorphes*

$$E(z,s) = \frac{1}{2} y^s \sum_{a,b} |az+b|^{-2s} \quad (z = x+iy \in \mathbf{H},\ s \in \mathbf{C})$$

convergentes pour $\mathrm{Re}(s)$ assez grand ; la sommation est la même que pour les séries d'Eisenstein classiques (voir encadré 1). Maass prouvait leur prolongement méromorphe (en s) et montrait qu'elles satisfont à une équation fonctionnelle, reliant $E(z,s)$ et $E(z,1-s)$. Les formes paraboliques sont définies par la même condition intégrale que

dans le cas classique. Avec les constantes, elles constituent le spectre discret de Δ dans $L^2(\Gamma\backslash\mathbf{H})$. Le spectre continu est obtenu par une intégrale des $E(z,s)$ pour $s \in 1/2 + i\mathbf{R}$.
Puisque $E(z,s)$ est invariante par $x \mapsto x+1$, cette fonction admet toujours un développement de Fourier en x, mais dont les coefficients dépendent de y. Le calcul montre que ce sont essentiellement des fonctions transcendantes bien connues, les *fonctions de Whittaker*. [a]

a. Voir par exemple [29].

On généralise les deux notions (formes modulaires, formes de Maass) en définissant de façon analogue les *formes automorphes* sur $\Gamma\backslash G$, où $G = \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ et Γ est, par exemple, un groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$. La décomposition spectrale de l'opérateur Δ dans $L^2(\Gamma\backslash\mathbf{H})$ (voir encadré 2) n'est plus alors qu'un cas particulier de la décomposition spectrale, obtenue par Godement, de la représentation de G dans $L^2(\Gamma\backslash G)$ par les opérateurs de translations :

$$g \mapsto (f(x) \mapsto f(xg)).$$

La théorie abstraite des représentations était... abstraite. À la lecture de l'article de Maass, Godement entrevoit la possibilité de riches applications à cette théorie. Il va dorénavant mettre son expertise, théorie spectrale et théorie des groupes, au service de la théorie des formes automorphes. Il arrive à point nommé : après Maass, Rankin, Roelke et, évidemment, Selberg qui publie sa célèbre formule des traces (voir ci-dessous) en 1954, c'est en effet au tour des spécialistes de théorie spectrale et de théorie des représentations de faire avancer le sujet.

Encadré 3 : formule des traces de Selberg. Considérons le cas le plus simple, celui des formes automorphes dans $L^2(\Gamma\backslash\mathbf{H})$. Si ϕ est une fonction sur $G = \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$, invariante à droite et à gauche par $K = \mathrm{SO}(2)$ et assez décroissante (par exemple à support compact), ϕ opère naturellement dans cet espace. On obtient un opérateur $R(\phi)$. Celui-ci n'est pas traçable à cause du spectre continu (voir « Formes de Maass, théorie spectrale »). Mais pour ϕ convenable il l'est, car dans le spectre discret. En 1956, Selberg a donné une formule explicite pour cette trace, en termes d'intégrales de la fonction ϕ sur les classes de conjugaison dans G des éléments de Γ. C'est ce que l'on appelle la « formule de Selberg ». Comme il est mentionné dans l'entretien, des démonstrations complètes ont été données plus tard. Par ailleurs cette formule a été étendue à $L^2(\Gamma\backslash G)$, puis au cadre adélique (voir encadré 5), puis, dans une série de travaux de James Arthur culminant vers 1990, à tous les groupes réductifs [2]. Le cas de $\mathrm{GL}(2)$ adélique fut traité à peu près simultanément par Duflo-Labesse et Jacquet-Langlands. Un travail de Delsarte (voir l'entretien) est souvent considéré comme un précurseur de la formule de Selberg.

Godement est l'un des premiers lecteurs de Maass et Selberg en France. En Russie, Gelfand, Fomin, Graev et Piatetski-Shapiro, autres éminents spécialistes de la théorie spectrale et de la théorie des représentations, sont sur les rails. Et de l'autre côté de l'Atlantique le jeune Langlands est déjà embarqué dans son œuvre monumentale sur les « séries d'Eisenstein » (voir encadré ci-dessous).

Encadré 4 : groupes (réductifs) généraux, décomposition spectrale, le mémoire de Langlands. La théorie générale des formes automorphes s'intéresse à des groupes plus généraux que $\mathrm{SL}(2)$; la généralisation naturelle est fournie par les groupes réductifs, que l'on ne définira pas ici... Le lecteur peut penser simplement à $G = \mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ ou $\mathrm{Sp}(n,\mathbf{R})$. Dans tous les cas il y a des groupes discrets de nature arithmétique, par exemple $\Gamma = \mathrm{GL}(n,\mathbf{Z})$, $\mathrm{Sp}(n,\mathbf{Z})$. Le problème le plus général est la décomposition spectrale de $L^2(\Gamma\backslash G)$ comme représentation de G. Il faut aussi définir la notion générale de formes automorphes généralisant les formes classiques et les formes de Maass.
Les définitions générales ont été données par Gelfand, Graev, Piatetsky-Shapiro [14] et Langlands, puis Harish-Chandra. (L'action du centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G, par exemple, remplace le laplacien hyperbolique.) La notion de forme parabolique est analogue ; il y a une théorie multidimensionnelle des séries d'Eisenstein. Dans un travail spectaculaire, d'une difficulté célèbre, Langlands généralisa entièrement, en 1964, la décomposition spectrale. Ce travail ne fut publié qu'en 1976 [37] [a].

a. Pour un exposé exhaustif, voir [41].

En à peine dix ans le sujet est bouleversé, comme en atteste le congrès de Boulder en 1966. Godement joue un rôle important dans l'étude des formes automorphes sur des groupes généraux, ainsi que dans l'usage systématique de la théorie adélique (voir ci-dessous). Le sujet s'enrichira encore avec l'introduction des méthodes de géométrie algébrique arithmétique, qui deviennent centrales à partir du congrès d'Anvers, et plus encore de celui de Corvallis (1977).

Encadré 5 : adèles, idèles, groupes réductifs adéliques. L'anneau des *adèles* ou « valuation vectors » est défini dans la thèse de Tate [55]. L'anneau des adèles du corps **Q** des rationnels est le produit de **R** et de tous les corps p-adiques $\mathbf{Q}_p$ où p décrit les nombres premiers [50, Ch. 2] :

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \times \prod_p{}' \mathbf{Q}_p$$

Le ′ fait référence au fait qu'on considère un « produit restreint », défini de sorte que **A** est un anneau localement compact. Le groupe des *idèles* $\mathbf{A}^\times$ est le groupe multiplicatif de **A** : il est donc aussi localement compact. Il reçoit un plongement diagonal de $\mathbf{Q}^\times$. Des définitions analogues s'appliquent à tout corps de nombres E (extension finie de **Q**.) La thèse de Tate (Princeton, 1950) donnait des démonstrations nouvelles des résultats de Dedekind et Hecke sur le prolongement analytique des fonctions zêta, et plus généralement des fonctions L des caractères de Hecke (caractères de $E^\times\backslash\mathbf{A}^\times$), en utilisant la théorie de Fourier sur **A** et $\mathbf{A}^\times$. Elle ne fut publiée qu'en 1967.

Si G est un groupe réductif « défini sur **Q** » – par exemple les groupes $\mathrm{GL}(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$ – le groupe $G(\mathbf{A})$ est bien défini et on peut considérer un quotient adélique analogue au $\Gamma\backslash G$ de la théorie classique, par exemple $\mathrm{GL}(n,\mathbf{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbf{A})$. Cela revient à mettre en famille les quotients $\Gamma\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ de la théorie classique pour certains sous-groupes Γ d'indice fini dans $\mathrm{GL}(n,\mathbf{Z})$. Le gain relève encore de la théorie des représentations : ce n'est plus seulement le groupe $G(\mathbf{R})$ mais le groupe $G(\mathbf{A})$ – et donc en particulier chaque $G(\mathbf{Q}_p)$ – qui opère. Les opérateurs de Hecke deviennent ainsi des analogues p-adiques du laplacien et relèvent de la théorie spectrale.

Il devint aussitôt évident qu'on devait pouvoir généraliser à ce cadre la théorie des formes automorphes : ceci joue un rôle fondamental dans la genèse du « principe de fonctorialité de Langlands » et de sa définition des fonctions L générales [36].

La théorie adélique pour $\mathrm{GL}(2)$ fut obtenue, de façon essentiellement complète, par Jacquet et Langlands [30] en 1968; des résultats similaires mais moins achevés se trouvent dans les 'Lezione Fermiane' de Weil [58]. Ce point de vue est devenu le cadre naturel de la théorie moderne des formes automorphes. Par exemple, la thèse de Tate peut être vue comme la théorie pour $\mathrm{GL}(1)$. Elle fut étendue par Godement et Jacquet en 1972 pour obtenir ce qu'on appelle la théorie des « fonctions L standard » de $\mathrm{GL}(n)$ [23].

L'entretien

Laurent Clozel – Nous pourrions partir de l'arrivée des formes automorphes ou plutôt de leurs progrès récents à Paris après la 2e guerre. On peut dire que ça commence en 1949, avec le papier de Maass [38].

Je me souviens de l'avoir lu très rapidement. Et il m'avait intéressé mais je n'avais pas vu la relation avec ce qu'on fait maintenant, la théorie spectrale évidemment.

LC – Mais dans le premier papier, Maass donnait quand même, essentiellement, la théorie spectrale pour les séries d'Eisenstein ?

Ah non ! Pas du tout. Autant que je me souvienne Maass ne l'a jamais fait.

LC – Donc, que contenait ce premier papier ?

Eh, il définissait les séries d'Eisenstein, et il montrait le prolongement analytique, l'équation fonctionnelle, des choses comme ça... Et c'est tout.

LC – Il étudiait aussi les formes paraboliques ? Ou est-ce que c'est plus tard ?

J'en doute fort – enfin il faudrait vérifier – je doute fort qu'il ait remarqué que les formes paraboliques étaient L^2. Il me semble qu'il y avait aussi dans ce papier de Maass, ou peut-être dans un papier ultérieur, une extension de la théorie de Hecke.

LC – Extension des opérateurs de Hecke aux formes non holomorphes ?

Il définissait les formes automorphes. Bon, j'ai dit : « Il définissait les séries d'Eisenstein », mais il y avait dans Maass la définition par l'équation $\Delta f = sf$. Ça, il le savait bien, et il définissait aussi ces formes automorphes avec une condition de croissance à l'infini de façon que dans ses développements en séries de Fourier n'apparaissent que les bonnes fonctions de Whittaker, celles qui n'explosent pas à l'infini. Oui, il y a pas mal de choses dans le papier de Maass.

LC – Et en fait Maass était motivé, je pense, par le problème des caractères de Hecke qui ne correspondaient pas à des formes holomorphes. Est-ce que c'est présent dans son papier ?

Il faudrait le regarder, il est assez facile à lire.

LC – Cela a été le premier développement important d'après-guerre ?

Ah oui.

LC – Il y avait Petersson avant, je pense ?

Petersson n'est jamais sorti des fonctions automorphes traditionnelles.

LC – Tu veux dire classiques ?

Oui. Chez Petersson [42, 43], il y a le fait que les formes paraboliques sont de carré intégrable et que tu peux les obtenir toutes pour un groupe de fonctions en partant d'une fonction de carré intégrable dans le demi-plan et en sommant. Il ne prenait peut-être pas des fonctions intégrables de carré intégrable générales, probablement celles qui dans le disque unité correspondent aux polynômes. C'est ce qu'il a appelé les séries de Poincaré. C'est déjà ce que faisait Poincaré, après tout.

Roger Godement chez lui vers 2011

LC – Oui... alors après, assez rapidement, il y a eu la décomposition spectrale dans ce cas-là, avec Selberg et Roelcke.

Oui Selberg... Dans Selberg, il faut vraiment regarder pour comprendre que c'est de la décomposition spectrale. Ça m'est tout de suite venu à l'idée, si tu veux, mais je n'ai pas très bien réussi à comprendre sur le moment ; enfin je veux dire par là que, oui, je voyais bien que, fort probablement, c'était de la théorie spectrale... mais enfin je n'ai pas fait non plus de gros efforts à l'époque, parce qu'il y avait une chose qui me dégoûtait dans le papier de Selberg, c'est qu'il n'y avait pas la moindre démonstration ! Alors je me suis dit : « C'est ça, il publie tous ses résultats sans démonstrations et puis il va laisser aux pauvres types qui n'ont pas trouvé les résultats le soin de rédiger les démonstrations à sa place. » C'est à peu près ce qui s'est produit.

LC – C'était vers quelle année ?

C'est 1954, dans le *Indian Journal* [48].

LC – Mais est-ce qu'il n'y a pas eu un papier antérieur ?

Non, il n'a jamais rien publié avant sur le sujet ; oh bon, il y a des vagues trucs de Selberg et Rankin, juste avant la guerre, où il y a déjà des séries d'Eisenstein à la Maass.

LC – Parce qu'il cherchait la majoration de Ramanujan, essentiellement. Roelcke est à peu près contemporain ?

Roelcke, ça doit être dans les 1956-1957 par là ; de toute façon, attends, je vais aller chercher un bouquin où il y a plein de bibliographie : ... l'article de Selberg, *Harmonic Analysis* est de 1956, pas 1954. Donc le premier Roelcke [44] est à peu près contemporain de Selberg. Mais le premier Roelcke n'est pas très facile à comprendre.

LC – Mais ses papiers sont lisibles, quand même, ils sont clairs. Il y en a un qui a été enfoui pendant des années alors qu'il démontrait la borne sur les formes de Maass non ramifiées, qui est bien meilleure que celle de Selberg, et les gens ont oublié ça pendant vingt ans.

Oui, oui. Il n'a pas eu beaucoup de succès, Roelcke, ça c'est vrai. Mais il n'a pas eu beaucoup de succès parce qu'en 1956, il n'y avait encore personne qui s'intéressait à ça, pratiquement personne. Moi, ça m'intéressait beaucoup : le papier de Selberg et les formes paraboliques comme séries de Poincaré à partir de fonctions L^2 etc. J'en ai pas mal parlé, enfin particulièrement le second aspect, l'aspect Petersson, dans le Séminaire Cartan sur les fonctions automorphes de plusieurs variables complexes [17]. Là, j'ai fait l'extension au domaine de Siegel de tout le truc de Petersson, et il me semble me souvenir qu'à la fin je parlais de l'interprétation en théorie des groupes.

LC – La construction de suffisamment de formes holomorphes à l'aide des séries de Poincaré essentiellement ?

Oui.

LC – C'était avant Baily-Borel [3] ?

Ah oui, bien sûr, c'est le Séminaire Cartan de 1957.

LC – Tu nous as dit quand la théorie des formes automorphes qui n'étaient pas les formes modulaires classiques, donc à la Maass-Selberg était apparue.

Mais comment est-ce arrivé à Paris ? Est-ce que tu l'as assimilée tout de suite ? Est-ce que tu l'as exposée ? Qui en a parlé ?

C'est arrivé non seulement à Paris mais à Nancy, vu que j'étais à Nancy à l'époque. C'était dans les Mathematische Annalen de 1949. Je les lisais systématiquement à l'époque, enfin, je feuilletais, je regardais ce qu'il y avait dans toutes les revues intéressantes qui arrivaient, à commencer évidemment par les *Annals of Mathematics*, les *Mathematische Annalen*, etc. Donc, en ouvrant les *Mathematische Annalen*, je suis tombé automatiquement sur le papier de Maass.

LC – Ma question est : comment cela a-t-il-été répercuté en France en 1949 ?

J'étais seul à m'intéresser à ce sujet et je ne l'ai pas poursuivi parce que j'étais en train de faire du « abstract nonsense » sur les représentations à l'époque. C'est un peu plus tard que j'ai commencé à m'en occuper plus sérieusement.

LC – En France, parmi les arithméticiens ou d'autres, qui a vu que Maass avait découvert quelque chose d'important ?

À l'époque, sûrement personne ! Et je dis : « en France », mais ailleurs non plus probablement. Ça a pris quelques années ; en fait c'est plutôt le papier de Selberg qui a montré l'intérêt des travaux de Maass (sans d'ailleurs les citer !). Pour les rares personnes qui étudiaient les fonctions automorphes, l'idée d'étudier des fonctions qui n'étaient pas analytiques complexes, ça paraissait quelque peu farfelu !

LC – Est-ce qu'il y avait des arithméticiens qui avaient remarqué qu'on obtenait les fonctions *L* des « *Grössencharakterer* » de Hecke à l'aide des formes automorphes, des formes modulaires dans certains cas ? Est-ce que Hecke lui-même le savait ? Et qu'il y avait un morceau manquant pour les autres caractères ?

Ça, je ne peux pas te dire, je ne fréquentais pas le milieu des arithméticiens à l'époque. De toute façon, des arithméticiens capables de faire ce genre de remarques, c'était l'ensemble vide en France.

LC – Alors, après, on passe à Selberg.

Ah oui !

LC – Je reviens en arrière dans la discussion, mais qui a compris la formule des traces de Selberg ?

Je n'en sais trop rien, probablement Gelfand, Piatetski-Shapiro, ont dû comprendre ça dans leur bouquin [13]. Je l'ai lu avant 1968 parce que, de temps en temps, j'allais à la librairie du Globe, qui était la librairie soviétique. Ils avaient des quantités de bouquins scientifiques russes, alors j'y allais. De temps en temps, il y avait des maths. Un jour, je suis tombé sur le petit bouquin de Gelfand. C'était peut-être en 1966 ? En dehors de ça, qui a compris que la formule des traces c'était des représentations ? Eh bien, Langlands, certainement : *On the functional questions satisfied by Eisenstein series*, Springer, Lecture Notes 544, 1976, et Harish-Chandra (Langlands dixit). Langlands est bien antérieur à 1976, c'est plutôt 1965, [3], ou quelque chose comme ça. En 1965, on a eu un grand congrès à Boulder, et là, le pavé de Langlands était sorti. Alors, moi, personnellement, j'ai fait une démonstration de la décomposition spectrale sur $\mathbb{Z}$, et non pas dans le cadre adélique. J'en ai donné une à Boulder, et puis – ça doit être l'année d'après à moins que ça ne soit l'année d'avant – j'ai fait tout un cours de troisième cycle sur le sujet.

LC – Tu l'as exposé aussi à Bourbaki, je crois, à peu près au même moment ?

Oui, mais dans le cadre adélique. Ça, c'était 1966, ou 1968. 1966 probablement.

LC – C'est ça, oui. Donc, c'est ce que tout le monde a lu à l'époque. En fait, ça a été exposé à Boulder et...

Voire même plus tôt, ça doit être en 1964 à Bourbaki, mais je ne l'ai rédigé que dans le volume de 1966 [1].

LC – Donc, dès avant Boulder, des gens ont compris qu'il y avait quelque chose d'intéressant chez Selberg : il y avait certainement Langlands, et Tamagawa qui a fait un petit papier sur le sujet dans le cas co-compact.

R.G. : Et aussi Gelfand, Piatetski-Shapiro. Mais dans leur bouquin [4] il y avait un gap assez considérable. Dans la démonstration du fait suivant : la représentation de $\mathrm{SL}(2)$ dans l'espace des fonctions invariantes et L^2 (modulo le sous-groupe Γ) a un spectre discret, ou, dit autrement, les opérateurs

3. Notes polycopiées du département de mathématiques de l'université de Yale.

4. Dans le séminaire Bourbaki, on ne trouve pas le livre mentionné dans la note 8, mais les références suivantes : [12] ; [15] Avtomorphnye funkcij i teorija predstavlenij, *Trudy Moskovsk. Matem. Obestva*, 12 (1963), p. 389-412.

de convolution sont complètement continus. Il y a une démonstration dans Gelfand. J'ai repris leur idée dans mon Séminaire Bourbaki, mais leur démonstration repose sur des intégrales qui, a priori, ne sont pas convergentes du tout et, ça, ils sautent absolument à pieds joints sur ce détail. Mais enfin, il y avait quand même beaucoup d'idées dans le bouquin de Gelfand, Piatetski-Shapiro et compagnie. C'était assez marrant d'ailleurs, parce qu'un jour, après ça, j'ai rencontré Harish-Chandra – je ne sais plus quand, peut-être à Princeton en 1970 – puis on a parlé de ça et lui, il avait très bien remarqué que j'avais, dans mon Séminaire Bourbaki, noté que dans la démonstration de Gelfand pour la complète continuité, il y avait un gap ; il m'a dit : « Mais, vous savez, depuis ils l'ont rectifié dans la seconde édition mais ils ne vous citent pas. » Je lui ai répondu : « Ça ne m'étonne pas ! »

MA – Je voudrais à nouveau revenir un tout petit peu en arrière : tu dis qu'à la fin des années 1940 tu travaillais sur l'« abstract nonsense » de l'analyse harmonique abstraite. Mais pourquoi lisais-tu ces choses sur les formes automorphes avec intérêt ?

Parce que c'était de la théorie des groupes et que j'avais le « feeling » que ce n'était pas sans rapport. En particulier il y a une chose qui m'avait frappé : c'est que Petersson, dans ses papiers sur les séries de Poincaré, partait de fonctions holomorphes qui étaient de carré intégrable dans le demi-plan, or c'était exactement comme ça que Bargmann avait fabriqué sa série discrète de représentations pour $SL(2,\mathbb{R})$ en 1947, [4]. Cette coïncidence m'avait frappé. À l'époque, j'ai raté un coche parce que j'étais polarisé sur les groupes généraux.

MA – Les groupes de Lie ?

Non, pas les groupes de Lie, les groupes localement compacts généraux. Si je n'avais pas perdu mon temps – ou occupé mon temps, comme on le voudra – dans cette direction-là j'aurais pu me braquer, au contraire, sur la direction « formes modulaires » et essayer de mieux comprendre ; en fait, c'est après, quand j'en ai eu marre des localement compacts, que j'ai commencé à m'intéresser à ça. J'ai commencé par faire des exposés au Séminaire Bourbaki sur Hecke [21].

LC – Qui avait lu Hecke en France à l'époque ?

Personne.

LC – Personne ?

Personne. J'ai encore rencontré Serre l'autre jour, il m'a dit : « Tiens, je me rappelle, c'est dans tes exposés au Séminaire Bourbaki que j'ai appris ce qu'étaient les formes modulaires ». Non, j'ai été le premier à en parler. C'était totalement inconnu. Les gens avaient complètement oublié qu'il y avait Poincaré qui... et Hecke,...

Alors bien sûr, Weil, par exemple, connaissait Hecke. Ça c'est clair. Mais en France il n'y avait personne. Tu sais, en France, les mathématiques de l'époque, c'était pas très fort ! Ça s'est rapidement regonflé avec Bourbaki et puis quelques autres personnes quand même – il ne faut pas tout mettre sur le compte de Bourbaki, ce serait un peu simple – mais à cette époque-là : quarante-cinq, six, sept, huit... Par exemple, Delsarte : apparemment le seul qui connaissait la théorie analytique des nombres en France à l'époque, c'était Delsarte. Il faisait des cours sur le sujet à Nancy. Moi, j'ai suivi un cours absolument formidable de Delsarte. Oh, eh bien, il y allait froidement, il nous démontrait le problème de Waring par Hilbert, Rademacher ou les partitions par Hilbert, Rademacher, Hardy-Littlewood, etc. Il connaissait tout sur ce genre de sujet et il l'exposait très, très bien. Alors, c'est peut-être – pas peut-être, sûrement – les cours de Delsarte qui ont commencé à m'intéresser sur le sujet. Bon, ce n'était pas les formes modulaires, dont je n'ai pas le souvenir d'avoir entendu Delsarte parler, et encore moins de Hecke. Il était beaucoup plus intéressé par la théorie plus classique.

LC – Nous avions déjà parlé d'un papier de Delsarte [5]. Tu ne le connaissais pas du tout ?

Non, c'est toi qui m'en a appris l'existence. Peut-être que Delsarte y a fait quelques vagues allusions, mais je n'y ai rien compris.

LC – Je voudrais revenir en arrière, encore, sur un point. Quand est-ce qu'on s'est mis à faire des groupes adéliques ? Et quel est l'enchaînement logique, puisqu'au début Chevalley n'avait considéré que les idèles ? Et ensuite c'est Weil qui a introduit les adèles, ce qui est plus simple, au fond.

Alors, comment est-ce que je me suis mis aux adèles ? D'abord, j'avais entendu parler dans Bourbaki de la thèse de Tate. Ça m'intéressait parce que j'avais fait des exposés sur les fonctions Zêta de Hecke à Bourbaki, mais en me bornant à la version Hecke sans adèles. Je ne sais plus qui m'a parlé de

5. Lors d'une conversation antérieure. Voir [9] et [8].

la thèse de Tate. C'est probablement Chevalley ou Weil vers 1953 ou 1954 quelque chose comme ça. Malheureusement, elle n'était pas disponible. On savait qu'il y avait quelque part, dans quelque recoin de bibliothèque universitaire américaine, quelque chose qui s'appelait la thèse de Tate, mais on ne l'avait jamais vue. Et puis après, comment est-ce que je me suis mis aux adèles ? Oh, ça doit être dans les papiers de Weil.

LC – Entre Chevalley et Tate, est-ce que ça apparaît quelque part, les adèles ?

Oh, je n'ai pas l'impression.

LC – Donc c'est une idée d'Artin et Tate – enfin, à la suite de Chevalley, bien sûr ?

Oui, je crois que c'est vraiment Tate qui a lancé le truc... Entre les deux, je ne vois pas qui... Non.

LC – Donc, à ce moment-là, Weil s'y est mis bien sûr, et toi aussi ?

Alors moi j'ai dû m'y mettre... C'est probablement Weil qui m'a appris ce que c'était, alors je m'y suis mis. La première chose que j'ai faite c'est de refaire la thèse de Tate, évidemment et j'ai fait un cours sur le sujet, je ne sais plus quand. J'en avais même fait un petit polycopié dont il doit exister des exemplaires quelque part. Je ne sais plus si c'était un troisième cycle ou si c'était à l'École normale.

En fait, je dois dire que j'ai un peu reculé devant la lecture de la thèse de Tate parce que ça me faisait un peu peur. C'était le genre de sujet dans lequel je ne m'étais pas encore plongé. C'était trop la théorie des nombres « à l'allemande », c'est-à-dire toutes les histoires de fonctions Zêta, de corps de nombres algébriques, de corps de classes etc. que d'aucuns présentaient comme des maths tellement profondes qu'on n'osait pas ouvrir la porte. C'était des sujets que je ne dominais pas encore très bien. Les corps des nombres algébriques, essentiellement, j'ai appris ça dans Bourbaki, dans les congrès, en rédigeant des papiers ou en lisant des rédactions.

LC – Mais qui faisait les exposés, qui en parlait ?

Non, pas des exposés, mais on rédigeait des chapitres de *l'Algèbre*. Il y a un chapitre intitulé Anneaux de Dedekind. On en a discuté des années avant que ça ne soit publié, tu comprends. On discutait de ça depuis 1950-1951, ou quelque chose comme ça, si ce n'est pas plus tôt.

LC – Mais qui s'intéressait à ça à Bourbaki ? Serre, Weil, et ensuite ?

Serre s'y intéressait mais pas encore de façon très intensive. Serre, à l'époque, au début des années cinquante, était encore dans son homotopie des sphères et dans les faisceaux, les faisceaux cohérents, etc. Il ne s'était pas encore du tout, à ma connaissance, converti à l'algèbre ou à l'arithmétique. Serre participait aux congrès, donc il était comme nous. Alors, qui s'intéressait vraiment à ça ? Il y avait Weil et Chevalley évidemment, et aussi Samuel. Et Lang qui, si je me souviens bien, était déjà membre de Bourbaki. Il venait dans les congrès d'été. Qui d'autre ? Koszul, peut-être... Et encore, je ne suis même pas sûr. On lisait les rédactions mais ça ne veut pas dire qu'on passait notre temps sur le sujet. Il y a quand même une chose que j'avais faite bien avant, quand j'étais à l'École normale. J'avais ouvert, un jour, les Œuvres Complètes de Dedekind et j'étais tombé évidemment sur ses premiers papiers ; j'en avais lu un ou deux et ça m'avait quand même assez émerveillé, je dois dire. Encore à l'heure actuelle, je serais tout à fait disposé à recommander à quelqu'un qui veut apprendre le sujet d'aller dans Dedekind, tout bêtement.

LC – Est-ce que tu as lu Hasse ou Hecke ?

Ah non, Hasse, non ! J'ai essayé de lire le bouquin de théorie des nombres [25], mais non, ça, ça m'a dégoûté !

LC – Et Hecke ?

Ah, Hecke, oui ! Le livre de Hecke sur la théorie des nombres algébriques [26], ça, oui je l'ai lu dans les années cinquante. Et j'ai appris des choses dedans.

LC – Hilbert ?

Oh non, Hilbert, c'est un pavé absolument indigeste [27]. Moi, j'ai quand même toujours été, au fond, un analyste. Enfin, plus exactement, mon idéal en maths c'était de faire de l'analyse et de l'algèbre, ce que Dieudonné appelle de l'analyse algébrique. Tandis que Hilbert c'est vraiment de l'algèbre à l'état archi-pur.

LC – Pas tout à fait, parce qu'il y a quand même la théorie des fonctions *L*, et il y a les résultats de Kummer sur le théorème de Fermat.

Oui, oui, il y a un peu de choses comme ça, oui, je sais bien, mais il faut absorber des centaines de pages... Non, Hilbert, ça ne m'a pas inspiré du tout.

LC – À quelle époque a-t-on vu qu'on pouvait utiliser les adèles pour traiter de façon plus efficace les formes modulaires classiques, c'est-à-dire la théorie non abélienne ?

Dans le livre de Gelfand, Graev, Piatetski-Shapiro déjà, c'est-à-dire 1964 ou 1965. Moi, de mon côté, je m'en suis aussi aperçu à peu près à la même époque.

LC – Weil aussi ?

Oui, Weil aussi. Il y a son livre, *Basic number theory* [57].

LC – Mais c'est un petit peu plus tard, 1967.

LC – Il y a aussi sa version de Jacquet-Langlands : son Lecture notes sur les séries de Dirichlet [60]. Et donc, ça, ça date aussi de 1968 à peu près, donc il était tout près plusieurs années avant.

En même temps, Weil et moi, on avait reformulé Borel-Harish-Chandra sur les domaines fondamentaux dans le cadre adélique [19]. Et à partir du moment où tu sais formuler Borel-Harish-Chandra dans le cadre adélique, l'idée de passer aux fonctions automorphes est quand même assez naturelle.

LC – Il y a un nom qu'on a oublié, à ce propos : on n'a rien dit de Siegel.

Ah, on a oublié Siegel ! Et pour cause... Évidemment tu peux trouver des masses de choses intéressantes dans ses Œuvres Complètes, c'est sûr. Mais, à cette époque-là, qu'est-ce qu'a fait Siegel ? Eh bien, il a publié ses *Topics in complex Function Theory* [52, 53, 51], par exemple, où il y a toute la théorie de Poincaré des formes automorphes. Ça doit être le premier qui a établi proprement les résultats de Poincaré sur les domaines fondamentaux, la construction précise avec des cercles etc., mais il ne va pas au-delà des fonctions automorphes analytiques complexes.

LC – En revanche, il y a des finesses arithmétiques dans le cadre classique. Il y a les formules intégrales de Hecke, il y a la formule-limite de Kronecker, enfin il y a beaucoup de choses.

Quelque chose que j'ai vaguement essayé de lire mais j'y ai renoncé rapidement c'est ses papiers d'avant la guerre sur les formes quadratiques indéfinies, que Weil, finalement, a compris vingt-cinq ans plus tard dans le cadre adélique [59, 56].

LC – Comment Siegel a accueilli Weil-Tamagawa d'ailleurs ? [6]

Weil lui-même, m'a donné indirectement la réponse : quand il a publié *Basic number theory*, il en a envoyé bien entendu un exemplaire à Siegel, et Siegel lui a répondu par une lettre le remerciant fort aimablement et qui, en fait de commentaire mathématique, s'est résumée à la formule suivante : « I didn't find any misprint in your book ». Siegel, à la fin, était devenu « vachement réac ! » Apparemment, d'après ce que raconte Langlands, c'est lui qui a fait des pieds et des mains pour que Harish n'ait pas la médaille Fields en 1962 [7]. Et Siegel a fait des commentaires sur Grothendieck et la nouvelle géométrie algébrique.

LC – Je crois que Siegel a dit qu'il n'appréciait pas le « style bourbachique de Harish-Chandra ».

Alors, on doit pouvoir en déduire premièrement qu'il n'a jamais lu Bourbaki, et deuxièmement qu'il n'a jamais lu Harish-Chandra, parce que Dieu sait si... Le « style Harish-Chandra » ; si Siegel m'avait dit ça, j'aurais répondu : « Le style Harish-Chandra, ça me rappelle plutôt le *Zahlbericht* de Hilbert ».

MA – Tu disais qu'à Paris, dans les années 1950, tu étais à peu près le seul à commencer à t'intéresser à ces questions-là. Aux États-Unis, avant Langlands...

Aux États-Unis, il n'y avait pas grand monde non plus !

LC – Quand même, il y avait une série de gens qui n'ont pas fait exactement des formes automorphes arithmétiques mais qui connaissaient quand même tout ce qui tourne autour, comme Borel, Weil, Mostow... Je dois oublier un ou deux noms. Il y a des gens qui étaient au niveau où ils pouvaient comprendre immédiatement ce qui apparaissait, sans doute.

Oui, bien sûr.

6. Weil donne des preuves adéliques des résultats de Siegel sur les « genres » de formes quadratiques dans [56], en citant Tamagawa [54] lui cite Weil... Godement possédait une copie amplement annotée du texte de Weil publié par l'IAS.

7. Dans son Mémoire biographique sur Harish Chandra [34], Langlands écrit : « He [Harish-Chandra] was considered for the Fields Medal in 1958, but a forceful member of the selection committee in whose eyes Thom was a Bourbakist was determined not to have two. So Harish-Chandra, whom he also placed on the Bourbaki camp, was set aside. Harish-Chandra would have been as astonished as we are to see himself lumped with Thom and accused of being tarred with the Bourbaki brush, but whether he would have been so amused is doubtful, for it had not been easy for him to maintain confidence in his own very different mathematical ability. » Pour mémoire, les lauréats de la médaille Fields en 1958 furent Thom et Milnor.

LC – Sans compter Tamagawa.

Oui, il faudrait retrouver les noms.

MA – La question que je me pose est : qu'est-ce qu'il y avait comme communication entre ces différentes écoles ?

Moi, je n'avais pas de mal à avoir des communications avec Weil, Chevalley, Borel, *etc.* vu qu'on se voyait tous les ans aux congrès Bourbaki. Il y avait Peter Baily avec son article en collaboration avec Borel « On the compactifications of arithmetic quotients of bounded symmetric domains » de 1966 [3]. L'école d'été de Boulder en 1965 était organisée par Borel et Mostow [8].

Quelque chose qui a été très important, en tout cas pour la France, ça a été le Séminaire Chevalley sur la géométrie algébrique[49]. Et celui sur les groupes linéaires algébriques. C'est vraiment dans le séminaire Chevalley que, j'ai compris, à peu près, ce que c'était qu'un groupe linéaire algébrique et vu tout le mécanisme des groupes paraboliques, *etc*. Ça m'a appris beaucoup de choses.

LC – Passons à la période suivante, après la conférence de Boulder en 1965. Cette conférence, ça devait être quelque chose de spectaculaire avec l'accumulation de résultats, non ?

Oui, c'était assez spectaculaire ; et puis on était cent cinquante ou deux cents, c'était un truc énorme.

LC – Qu'est-ce qui était frappant ? Je pense que tout le monde devait être stupéfait parce que Langlands est arrivé avec trois idées nouvelles, au moins. Est-ce que tu le connaissais avant ?

Langlands ? Non. Je ne pense pas. J'ai été à l'Institute en 1962 mais je n'ai pas le souvenir de l'avoir rencontré à cette occasion. Il devait être encore « graduate student » en train de réviser.

LC – Il a fait un exposé sur son mémoire sur les séries d'Eisenstein. Toi, quand l'avais-tu lu ?

Je ne suis pas fichu de m'en souvenir. Ce qui est sûr, c'est qu'à Boulder ou un peu avant, je l'ai découvert et j'en avais lu assez pour voir le cadre adélique possible. Ma réaction sur son pavé a été de me dire que tout ça devait pouvoir se faire dans le cadre adélique de façon – formellement tout au moins – plus simple. Et même, j'ai fait le premier pas dans cette direction à Boulder en montrant comment on pouvait prouver la convergence des séries d'Eisenstein dans le cadre adélique ! Ce qui était effectivement plus simple ; ça n'était en effet pas difficile. Mais je ne vois pas comment j'aurais pu obtenir un exemplaire de Langlands avant Boulder, parce que ce n'était pas publié !

MA – Tu m'as dit une fois, il y a longtemps, qu'à l'époque très peu de gens avaient vu que c'était important.

Oui, forcément, des choses comme ça, d'abord, il fallait les lire : tu ne te lances pas dans la lecture de – je ne sais pas combien – cinq ou six cents pages de Langlands, qui sont en plus rédigées d'une façon qui n'est pas toujours de la plus extrême clarté, tu ne te lances pas là-dedans si tu n'as pas vraiment une motivation. Alors qui pouvait s'intéresser à ça ? Évidemment, Harish-Chandra ; Langlands me l'a raconté une fois ; dès que Selberg est paru, Harish a dit : « Oh, ça doit pouvoir se généraliser aux semi-simples. On prend les groupes paraboliques, etc. » Donc Harish, évidemment, a certainement compris instantanément – voire même avant ! – l'importance du pavé de Langlands mais en dehors de ça, qui est-ce qui pouvait... ? Il est certain que ça intéressait Selberg.

LC – Après Boulder, tu es rentré à Paris, et tu as lu le mémoire de Langlands et tu l'as raconté à Bourbaki ?

Non. Mais le mémoire de Langlands, encore une fois, je l'ai lu avant Boulder ou pendant Boulder, je ne suis pas capable de m'en souvenir mais, vu mon petit papier de Boulder sur la convergence des séries d'Eisenstein, eh bien, forcément j'avais lu au moins une partie de Langlands !

LC – Et il y avait d'autres choses exposées par Langlands à Boulder : il y avait la conjecture sur la réalisation des séries discrètes [35] ; bien sûr, c'est très proche de ce que tu disais tout à l'heure sur Bargmann – ça a été fait par Wilfried Schmid [46, 47]. – Et puis il y avait les dimensions d'espaces de formes automorphes [9] où, là, c'était essentiellement encore la formule de Selberg. Mais alors, quand vous faisiez le Séminaire Cartan sur les formes automorphes...

Ça c'est bien avant. C'est 1957 ou quelque chose comme ça.

8. Les actes en sont parus [5].
9. Voir [35].

LC – Serre s'était intéressé à ces formules de dimensions.

Mais pas dans ce séminaire-là : il y a eu deux séminaires Cartan sur les fonctions automorphes, en 53-54 et en 57-58.

LC – Alors, c'est celui d'avant, sans doute.

Il y en a eu deux : il y en a un qui était sur les formes automorphes en général dans des domaines bornés ou des trucs comme ça.

LC – C'est ça : il y a un exposé de toi.

Moi je n'y ai pas participé pour la raison triviale que je devais être à Urbana-Champaign, Illinois. C'était en 1954-5, et je pense que c'est ensuite, un an ou deux ans plus tard, qu'il y a eu un séminaire plus particulièrement sur le demi-plan de Siegel.

LC – Non, je pense au séminaire sur les quotients généraux, en effet. Il y a un exposé de Serre là-dessus.

Oui, oui, c'est bien possible.

LC – Et ce qui m'intrigue c'est que personne ne soit revenu là-dessus lorsqu'il y a eu la formule de Riemann-Roch de Grothendieck [10], parce que c'est une question naturelle.

Mais moi, les choses de Grothendieck, je n'ai jamais mis le nez dedans... ni la géométrie algébrique, ni ce que tu dis, ni rien de ce genre, parce que je connaissais trop bien le milieu dans lequel nageait Grothendieck et je me suis dit, non.

LC – Pourquoi ?

Oh ! C'était une atmosphère « high-class ». Je préférais rester avec les prolétaires ou la « middle-class », et puis en plus, ça ne s'est pas amélioré par la suite, à mon avis. Tu sais, il y a un proverbe africain qui dit que deux crocodiles mâles ne peuvent pas coexister dans le même marigot, mais j'ai l'impression que pendant un bon moment, le groupe Grothendieck et ce qui lui a survécu, ce n'était pas deux, c'était quinze crocodiles mâles !

LC – Donc, il y avait toutes ces questions ; il y a une espèce de saut quantitatif, c'est-à-dire qu'après Boulder il y avait toutes ces questions posées qui étaient très difficiles, et donc, d'abord, quand est-ce que tu as commencé à faire ton séminaire à Paris sur les formes automorphes ?

Je n'ai jamais fait de séminaire sur les formes automorphes. J'en ai fait un, une année et c'est tout.

LC – Il y a bien quelque chose qui a perduré sous le nom : « Séminaire Godement », il a eu des sujets divers pendant plusieurs années.

MA – Oui, il y avait bien deux séminaires, en tout cas au début des années soixante-dix, l'un organisé par Dixmier et qui est devenu le séminaire Duflo et l'autre par toi, qui a été par la suite animé par Labesse.

Ah oui, c'est bien possible. C'était au début des années 1970 ?

MA – Il existait au début des années 1970, avant, je ne sais pas.

LC – Puisqu'on arrive à cette époque... peut-être qu'on peut aller vers la thèse de Labesse.

Oh, la thèse de Labesse, je n'ai pas grand chose à en dire. Ce qu'il y a de sûr, c'est qu'après avoir compris la décomposition spectrale dans le cadre adélique, eh bien, évidemment je me suis dit :« Une fois qu'on est là, le pas suivant c'est la formule des traces dans le cadre adélique ».

LC – À ce moment-là, est-ce que tu étais convaincu finalement par Selberg ? C'est-à-dire que tu avais lu le papier, tu l'avais étudié, est-ce que tu savais reconstituer la démonstration dans le cadre classique ?

Non, je n'ai jamais vraiment essayé de la reconstituer dans le cadre classique. J'ai un peu essayé dans le cadre adélique et puis ça résistait ! Alors Labesse ayant besoin d'un sujet de thèse je lui ai donné ça. J'ai peut-être un peu exagéré, d'ailleurs, parce que c'était assez vache.

LC – Oui, c'était un bon sujet.

Oui, c'était un bon sujet mais donner ça à un type qui fait sa thèse, ce n'était pas gratuit. Et puis il y a eu des obstacles, hein ! D'ailleurs, a posteriori, je me dis qu'il valait mieux ne pas essayer de reconstituer la démonstration de Selberg dans le cadre classique parce que l'expérience, dans ce genre de trucs, montre que les démonstrations adéliques sont toujours plus simples, ou moins compliquées.

10. On aurait dû dire « Hirzebruch-Grothendieck ». Voir [28], [6]. À notre connaissance, la relation entre les formules pour les « dimensions d'espaces automorphes » données par la formule des traces de Selberg et, d'autre part, la formule de Riemann-Roch n'a jamais été totalement élucidée.

LC – Maintenant il y a des démonstrations quand même pour les groupes de congruence dans $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ qui sont écrites. Il y a même des Russes qui ont fait le travail correctement pour $\mathrm{SL}(3,\mathbf{R})$. Et puis après ça s'arrête, on ne comprend plus rien... Donc, tu as donné le sujet à Labesse. Mais il y avait aussi les aspects arithmétiques c'est-à-dire la formule d'Eichler et de Selberg sur la trace des opérateurs de Hecke. Ça faisait partie du sujet initial ?

C'est pratiquement le même parce que les opérateurs de Hecke, au point de vue adélique, c'est des produits de convolution. Mais je ne me souviens plus : est-ce-que c'est traité dans Labesse, ça ?

LC – Oui, il obtient les formules à la fin. Au point de vue chronologie, il y a une espèce de compétition, en tout cas dans les papiers, entre Jacquet-Langlands[30] et Labesse. Comment ça s'est passé ? Est-ce que tu savais que Jacquet et Langlands travaillaient sur leur chapitre 13 ?

Non, Jacquet-Langlands, je l'ai découvert en arrivant à l'Institute en 1970 ; je suis arrivé à l'Institute et Weil est venu me voir le premier ou le second jour, il m'a collé Jacquet-Langlands entre les mains et il m'a dit : « Pourquoi tu ne nous expliquerais pas ça ? »

Alors, je lui ai dit : « Je peux toujours essayer ! » Donc je me suis attelé à lire Jacquet-Langlands et à leur faire des laïus [22], mais en dehors de ça je ne connaissais pas Jacquet-Langlands avant. Ce qu'il y a de sûr c'est que Langlands, à propos de la thèse de Jacquet, m'avait écrit [11] une lettre en m'expliquant que ce n'était pas comme ça qu'il fallait faire, etc. Lettre que, d'ailleurs, il a mise sur Internet [12]. Alors je me suis dit : « Bon, si ce n'est pas comme ça qu'il faut faire, let him do it ! »

LC – Et donc Langlands a démarré immédiatement là-dessus ?

Ni Jacquet, ni Langlands. Peut-être que Jacquet m'a fait quelques allusions. Il est parti aux États-Unis très rapidement. Alors, comme il revenait chaque année en France, il est possible qu'il m'ait expliqué un peu ce qu'il faisait. Mais enfin, je n'ai pas essayé de comprendre ou de travailler sur le sujet à cette époque-là et c'est en arrivant à Princeton en 1970 que j'ai vraiment pris connaissance de Jacquet-Langlands.

LC – Et alors vous avez eu des frayeurs pour la thèse de Labesse ou ça n'a pas posé de problèmes ?

La frayeur, ça a été que c'était une thèse en collaboration avec Duflo [13] !

LC – Oui, mais par ailleurs il y avait ce papier – d'ailleurs rédigé de façon incomplète – de Jacquet-Langlands qui démontrait en partie aussi la formule des traces.

Non, c'est pas du tout les mêmes méthodes. Je pense que Duflo-Labesse c'est beaucoup plus proche de Selberg que de Jacquet-Langlands.

LC – De toute façon, quand même, il n'y a pas de mystère, l'idée c'était celle de Selberg : qu'il y a le noyau donnant la formule des traces et puis ensuite tu dois tronquer et tu dois l'intégrer de différentes façons, mais l'intégration n'est pas la même, en effet. D'ailleurs, dans tes notes sur Jacquet-Langlands tu n'as pas mis le dernier chapitre, tu n'as pas traité la formule des traces et la correspondance.

Non, de toute façon, mes notes s'arrêtent au moment où le semestre de l'Institute s'arrête. J'y étais jusqu'en avril. Après ça je suis allé passer les trois mois suivants à Berkeley où je leur ai à nouveau raconté Jacquet-Langlands. J'ai refait les mêmes laïus qu'à Princeton, peut-être en un peu mieux parce que la seconde fois c'est généralement mieux que la première. Et je me souviens qu'à Berkeley, j'avais quand même au moins quarante ou cinquante personnes qui m'écoutaient. Manifestement, ça intéressait les gens à ce moment-là. Beaucoup de gens avaient compris que le sujet était intéressant. Je dois dire qu'un truc que je n'ai jamais réussi à comprendre – évidemment j'ai été capable de l'exposer et de faire les démonstrations et tout ce que vous voudrez – c'est l'existence des modèles de Whittaker, tout le début de Jacquet-Langlands. Ça n'a pas été refait mieux depuis ?

LC – Si, par les Russes. Ils étendent ça à $\mathrm{GL}(n)$; Gelfand, Kazhdan et puis Bernstein. Le résultat de base est toujours le même : c'est le fait que si tu prends la représentation du groupe triangulaire, c'est le Borel pour $\mathrm{GL}(2)$ et le parabolique de type $(1, n-1)$ pour $\mathrm{GL}(n)$, tu prends la représentation sur l'espace affine naturel, eh bien, tu as une représentation irréductible.

Ah oui.

11. En mai 1967.
12. `http://www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/automorphic.html#godement`
13. La thèse (d'état) est parue dans [10]. La commission des thèses avait des réticences, non parce que c'était une thèse en collaboration, mais parce que Duflo avait soutenu sa thèse sur la base d'autres travaux.

LC – Que sais-tu sur la collaboration ultérieure entre Labesse et Langlands ? Labesse a eu l'idée d'étudier SL(2). Il a fait un papier là-dessus à Budapest [11] et puis ensuite Langlands a compris – sans doute assez vite – comment ça s'interprétait dans le cadre de ses idées sur l'indiscernabilité, comme on disait à l'époque, et ils se sont mis à travailler ensemble. Et donc, il y a eu un serpent de mer qui a duré dix ans à peu près [33].

Je ne suis pas du tout au courant de ça. Tiens, tu parles de Budapest : effectivement j'étais à Budapest, ça m'a donné l'occasion de ma première rencontre avec Gelfand. Il y avait aussi Piatetski-Shapiro. Ma femme a pas mal parlé avec Piatetski-Shapiro : elle lui demandait s'ils avaient des problèmes antisémites en Russie. Elle était un peu sensibilisée sur le sujet puisque son père était un juif russe qui avait émigré en 1905 : « Oh ! Pas du tout ! Absolument pas ! Il n'y a aucun problème. » C'était la théorie de Piatetski-Shapiro à l'époque ; et puis, quelques années plus tard, tu le retrouves en Amérique, puis en Israël.

MA – Cela dit, ça a dû beaucoup empirer justement au début des années soixante-dix. Mais peut-être était-il très prudent, mais...

Moi, je pense qu'il était très prudent !

MA – Mais peut-être aussi que les choses se sont beaucoup dégradées, à la fois pour des raisons générales avec la campagne antisioniste, et peut-être pour des raisons spécifiques à l'Institut de mathématiques, parce qu'il y avait Pontryagin et parce que certainement il y avait des puissants relais à l'intérieur de l'Institut.

LC – Revenons à Jacquet ; il a fait sa thèse qui portait essentiellement sur les intégrales adéliques qui apparaissent dans les séries d'Eisenstein [31] ?

Pas adéliques.

LC – Classiques. Les fonctions de Whittaker.

Sur les fonctions de Whittaker, oui ; c'est moi qui l'ai branché sur le sujet parce qu'on avait envie de comprendre ces séries de Maass et les développements aux séries de Fourier de Maass et le rôle des fonctions de Whittaker, etc. Il a pas mal transpiré parce qu'il a fait ça dans un cadre classique où il y avait plein de formules de fonctions spéciales qui rappliquaient. Alors, il n'a pas vu Jacquet-Langlands, bon...

LC – Je crois qu'il y a deux choses qui étaient suggérées par Langlands dans sa lettre parce qu'il y a, d'une part, ce qui mène à Jacquet-Langlands, et d'autre part, il y a la construction de Langlands des fonctions L qui est l'étape suivante de toute l'histoire et qui, je crois, était suggérée aussi par les intégrales qu'il y avait dans la thèse de Jacquet.

Oui, je crois que sa thèse a été très utile, en fait. Elle n'est jamais citée. Tout le monde cite Jacquet-Langlands mais ça ne serait pas plus idiot de citer aussi la thèse de Jacquet.

LC – Quand et comment se sont-ils mis à travailler ensemble ? Quand Jacquet est parti là-bas ?

Je pense, oui.

LC – Et en même temps vous faisiez le papier sur les fonctions zêta des algèbres simples, non ? Quand avez-vous eu l'idée qu'on pouvait faire ça ?

Oh, moi j'ai eu l'idée très rapidement ! À partir de : Weil, *Basic number theory*.

LC – Et de la thèse de Tate ?

Et de la thèse de Tate. Je me suis dit : « On doit pouvoir faire le même truc pour les algèbres non commutatives. » Alors j'ai fait le prolongement analytique des fonctions zêta des algèbres simples. J'ai dû exposer ça au Séminaire Bourbaki [20].

LC – C'est une idée relativement classique parce qu'il y avait eu des travaux anciens des Allemands. Mais ce qui était vraiment surprenant, c'était de faire ces intégrales avec une forme parabolique arbitraire sur $\mathrm{GL}(n)$ ou sur une algèbre à divisions.

Oui, mais ça, je pense que c'est de Jacquet.

LC – Et vous avez travaillé ensemble par-dessus l'Atlantique ?

Non, on n'a pas travaillé ensemble par-dessus l'Atlantique. Moi, j'avais fait mon Séminaire Bourbaki. J'avais des papiers que j'avais passés à Jacquet, et puis... j'avais même dû probablement faire un cours sur le sujet ou quelque chose comme ça, et puis Jacquet avait travaillé de son côté aussi. C'est à partir de là qu'il a dû avoir l'idée de mettre des formes paraboliques dans le sujet. Et puis il a rédigé le bouquin et il m'a mis comme nom d'auteur. Mais moi je n'ai rien fait du tout dans la rédaction du bouquin, le livre est entièrement de Jacquet.

C'est un peu l'inverse de ce que j'ai fait au Séminaire Bourbaki à propos des domaines fondamentaux des groupes arithmétiques [19]. où je me mets tout seul comme nom d'auteur et où la première ligne dit que le papier a été écrit en collaboration avec Weil. Rétrospectivement, je me dis que j'aurais dû mettre les deux comme noms d'auteurs !

MA – Donc, en 1971, tu as rencontré Gelfand à Budapest...

Oui, je n'en ai pas tiré grand chose, de cette rencontre, d'ailleurs.

MA – Il y avait cette histoire qu'il t'avait racontée ; il avait gardé une lettre de toi.

Non, c'est Harish qui m'a raconté ça. Oui, après avoir lu le papier de Gelfand et Raikov [16] j'ai écrit à Gelfand, par la poste. Je n'ai pas eu de réponse, évidemment ; et puis comme mon beau-père dirigeait au Havre une entreprise de manutention maritime et de navigation qui avait la consignation des navires soviétiques, je lui en ai parlé. Il m'a dit : « Donne-moi ta lettre, je la donne à un Capitaine et il la mettra à la poste à Leningrad », ce que j'ai fait, et ce que, apparemment, le Capitaine a fait. Je n'ai pas eu davantage de réponse de Gelfand. Et c'est beaucoup plus tard que Harish a été invité à Moscou en 1960-61, quelque chose comme ça, et il m'a raconté ensuite que quand il a vu Gelfand la première chose que Gelfand a faite c'est de sortir ma lettre de son portefeuille en lui disant : « C'est la première fois que j'ai eu l'impression que ce que je faisais intéressait quelqu'un à l'extérieur de la Russie ». J'ai toujours trouvé cette histoire un peu bizarre parce que se balader avec une lettre venant de Paris dans l'URSS de l'époque... enfin, d'un autre côté, Gelfand devait avoir des protections puisqu'on sait maintenant d'après Sakharov que, non seulement il participait activement, mais il dirigeait apparemment les calculs sur la bombe H, alors je suppose qu'il était devenu relativement bien vu.

LC – C'est dans les Mémoires de Sakharov [45] ?

Oui.

LC – Donc, à Budapest, qu'est-ce qu'il y a eu ? Parce qu'il y avait eu des échanges, quand même, surtout à partir de 1957, les informations circulaient de manière relativement libre, mais est-ce qu'elles...

Non, ce qui circulait librement c'était les articles. Les contacts épistolaires, en revanche, c'est beaucoup moins évident. Il y a un bouquin célèbre d'un biologiste qui s'appelle Jaurès Medvedev – qui a par la suite émigré en Angleterre – et qui s'appelle : *De la correspondance scientifique internationale entre savants* [14], qui explique en long et en large tous les obstacles que le gouvernement soviétique mettait aux échanges privés, en quelque sorte. Ici, si tu veux écrire à Langlands, tu mets ta lettre à la poste ou tu envoies un e-mail et il n'y a pas de problème.

MA – Mais est-ce qu'en 1971 il s'est passé, à Budapest, des échanges entre « l'école soviétique » – pour l'appeler comme ça – et « l'école occidentale » ?

Ce n'est pas l'impression que ça m'a donné.

LC – Mais pour toi Budapest était beaucoup moins frappant que Boulder ?

Oh, c'était beaucoup plus réduit !

LC – Parce qu'il y a eu des choses spectaculaires. Sauf erreur, il y a eu Kazhdan qui est arrivé avec son théorème sur la conjugaison des variétés de Shimura, il y avait Gelfand-Kazhdan aussi, la théorie des représentations de groupes p-adiques.

Mais Budapest, c'était un tout petit congrès : il y avait, je ne sais pas moi, vingt ou trente personnes peut-être. J'ai rencontré Gelfand pour la première fois à Budapest, je l'ai rencontré une seconde fois quand il est venu à Paris quelques années plus tard mais, à Budapest, il m'a dit que c'était la première fois qu'il sortait d'URSS. Et apparemment les Russes avaient dû choisir Budapest précisément parce que, premièrement c'était encore derrière le rideau de fer, donc ils n'étaient pas obligés d'aller dans les pays capitalistes...

LC – Ils pouvaient être sûrs de ramener les gens chez eux.

... et puis, deuxièmement, parce que c'était le plus proche de l'Europe. Je me souviens de la réaction de ces Russes à Budapest absolument éblouis par le luxe qu'ils observaient partout, alors que nous, on était éblouis par la pauvreté !

LC – Est-ce que tu étais en contact avec Deligne en ce qui concerne l'intérêt arithmétique des formes modulaires ?

Non, jamais. Je ne sais pas d'où Deligne a pris son intérêt pour les formes modulaires. Tu le sais, toi ?

LC – Oh, je pense que pour quelqu'un qui s'intéresse à l'arithmétique comme Deligne...

14. Paru en français sous le titre [40].

Tu aurais rencontré Deligne si tu avais participé au congrès d'Anvers sur le sujet [15] ?

Bien sûr, mais j'ai relu ces temps-ci quelques-uns des exposés d'Anvers et en particulier celui de Deligne et je me dis que ça ne m'aurait pas particulièrement passionné. Parce que le congrès d'Anvers, ça a été le point à partir duquel toute cette théorie des fonctions automorphes a été préemptée – comme on dit en langage stratégique – par les arithméticiens, les géomètres algébristes, etc. Et en fait je ne regrette pas de ne pas y être allé !

MA – Tu veux dire, y compris sur le plan scientifique, indépendamment du reste ?

Oui, sur le plan scientifique. Ça a pris toute une tournure que, je n'apprécie pas. C'est une question de goût.

LC – C'est-à-dire les relations avec la géométrie algébrique : tu n'aimes pas ça ?

Surtout avec la géométrie algébrique de Grothendieck. Les trois mille pages de Dieudonné pour arriver.... non, non. [16]

LC – Il y a des gens qui disent la même chose des formes automorphes !

Oui, bien sûr.

LC – Enfin, c'est pire parce que les trois mille pages n'existent pas.

Mais quand même la géométrie algébrique à la Grothendieck c'est un peu différent. il paraît que Dirac a dit un jour : « Quand je lis de la philosophie j'ai l'impression de mâcher du vide ». Je n'irai pas jusqu'à dire ça de la géométrie algébrique à la Grothendieck évidemment mais c'était tellement abstrait, tellement général, tellement formel, etc. que ça ne m'a absolument jamais attiré. Autant j'avais aimé le Séminaire Chevalley sur la géométrie algébrique, autant je n'ai pas aimé cela. Évidemment, je sais très bien que j'ai tort en ce sens que c'est le point de vue Grothendieck qui a gagné, en plus ça a quand même donné des résultats palpables, sans aucun doute.

LC – C'est-à-dire que les questions les plus profondes que tu peux te poser sur l'arithmétique et les formes automorphes passent, à un moment donné, par la formulation kroneckerienne de la géométrie algébrique sur **Z**, et donc on doit faire ces choses-là.

Oui, ça je suis bien d'accord, évidemment. Entre parenthèses, pour le volume quatre de mon bouquin il y a un dernier chapitre de trois cents pages sur tout ce que j'appelle « le jardin des délices modulaires. » Et alors Catriona Byrne, l'éditrice de Springer, l'a fait lire à ma demande par deux experts ; il y en a un qui remarque que le point de vue des représentations n'est pas le seul et qu'il ne donne pas tout et que, en particulier, il ne donne pas la structure arithmétique de l'anneau.

LC – L'anneau des correspondances de Hecke ?

Non, mais même l'anneau des formes modulaires. C'est vrai, c'est le truc de Shimura ! Ça, c'est clair que même les séries d'Eisenstein sont à coefficients entiers, ça commence par 1, par conséquent...

MA – Je vais poser une question qui est peut-être un peu plus générale, mais je pense que c'est lié : la mode bourbachique des années 1950 c'était, en un certain sens, plutôt de mettre les choses dans un cadre assez abstrait et en même temps tu as eu, à partir d'un certain moment, une fascination claire pour...

Le contraire.

MA – ... l'analyse extrêmement concrète, Whittaker et Watson, etc. Alors, est-ce que tu peux commenter sur cette contradiction ?

Oui, c'est une contradiction en un certain sens, mais enfin... disons que j'ai été entraîné un peu malgré moi – mais pas vraiment malgré moi – dans le système Bourbaki. De toute façon, à l'époque, il n'y avait pas grand chose d'autre à faire. Je dois dire que personnellement j'ai passé sept ou huit ans à faire de la théorie des représentations générales, abstraites, etc. J'étais le seul en France à le faire à part Dixmier. Et même Dixmier l'a fait avec un peu de décalage par rapport à moi. Il n'y avait personne à qui parler ! Absolument personne, à cette époque-là. Par la suite, évidemment, la situation a changé. Alors quand Cartan m'a proposé de participer à Bourbaki, évidemment que j'ai sauté sur l'occasion. Ça m'a appris beaucoup de choses et je ne le regrette absolument pas mais en même temps je savais bien qu'il y avait d'autres trucs. Dans la théorie

15. En 1972, un colloque sur les formes modulaires a été organisé à Anvers avec un financement de l'OTAN. Un certain nombre de mathématiciens, dont Godement, ont refusé d'y participer. Les actes sont parus sous le titre [32].
16. Godement, qui exagère un peu, fait allusion aux EGA (Éléments de Géométrie Algébrique) de Grothendieck [24].

des représentations, j'avais quand même lu les papiers de Bargmann sur $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ et ceux de Gelfand-Naïmark sur $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ et je savais bien qu'il y avait des choses concrètes, beaucoup plus concrètes à faire. Au bout de quelques années, il m'est paru à peu près clair que la théorie abstraite des représentations aboutissait essentiellement à une voie de garage.

MA – Disons que ça avait donné ses fruits.

Oui, il n'y avait plus rien à en tirer, donc la chose à faire c'était de changer de sujet !

MA – Tu avais une attirance ou tu connaissais toute cette analyse classique ?

Oh, j'ai appris en même temps.

LC – À vrai dire c'est un style qui, paradoxalement, est étroitement lié à l'arithmétique : on calcule des choses explicites.

Oui, oui bien sûr.

MA – C'est quand même quelque chose qui – en tout cas dans le message de Bourbaki et donc dans l'enseignement français, disons à partir du moment où c'est le point de vue bourbachique qui a gagné – a été perdu avec quelques exceptions dont tes cours, mais dans l'ensemble toute cette analyse classique est très peu enseignée.

LC – Mais ça, ce n'est pas un phénomène français parce que c'est très difficile. Elle n'est enseignée nulle part. Elle était enseignée au XIXe siècle et jusqu'au début du XXe siècle dans les tripos à Cambridge.

Quoi ? Les fonctions elliptiques, tous ces trucs-là ?

LC – Oui. Dans Whittaker et Watson tu as des exercices extrêmement vaches qui sont des problèmes d'examen.

Et en Allemagne, au XIXe siècle, tu avais des flopées de cours sur les fonctions elliptiques ; et à l'École polytechnique par Jordan, Hermite, etc. Je ne sais pas ce que les polytechniciens en tiraient, probablement pas grand chose.

MA et LC – Mais il n'y a aucun endroit où on expose encore ça à un niveau relativement élémentaire, à un niveau qui ne soit pas un cours de troisième cycle. Justement, c'est ce qu'Arnold reproche – je ne sais pas s'il le fait à tort ou à raison – à l'enseignement français en disant « en Russie, nous, nous enseignons cette analyse classique. »

L'analyse classique ça se fait encore en Allemagne. Il y a un bouquin : Funktionentheorie de Freitag et Busam qui est très bon.

MA et LC – Quelques mots de conclusion ?

Comme le disent les historiens américains que je fréquente : « Old people's memories are notoriously unreliable ».

Références

[1] « Analyse spectrale des fonctions modulaires ». *Séminaire Bourbaki 9, Exposé 278* (1964-1966).

[2] J. Arthur. « An Introduction to the Trace Formula, Harmonic Analysis, the Trace Formula, and Shimura Varieties ». *Clay Math. Proc* **4** (2005), p. 1–263.

[3] W. L. Baily Jr. et A. Borel. « Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains ». *Ann. of Math. (2)* **84** (1966), p. 442–528. issn : 0003-486X.

[4] V. Bargmann. « Irreducible unitary representations of the Lorentz group ». *Ann. of Math. (2)* **48** (1947), p. 568–640.

[5] A. Borel et G. Mostow. « Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups ». *Symposia in Pure Mathematics of the AMS* (1966).

[6] A. Borel et J.-P. Serre. « Le théorème de Riemann-Roch ». *Bulletin de la Société mathématique de France* **86** (1958), p. 97–136.

[7] H. Cartan et R. Godement. « Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts ». *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* **64** (1947), p. 79–99.

[8] J. Delsarte. *Œuvres de Jean Delsarte*. **2**. Éditions du Centre national de la recherche scientifique, 1971, p. 829–845.

[9] J. Delsarte. « Sur le gitter fuchsien ». *CR Acad. Sci. Paris* **214**, nº 147-179 (1942), p. 1.

[10] M. Duflo et J.-P. Labesse. « Sur la formule des traces de Selberg ». *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* **4**, nº 2 (1971), p. 193–284.

[11] I. Gelfand, éd. *Lie groups and their representations*. Adam Hilger, London, 1975.

[12] I. Gelfand, M. Graev et I. Pjateckij-Shapiro. « Predstavlenija grupp adelej ». *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **156** (1964), p. 487–490.

[13] I. Gelfand, M. Graev et I. Pjatecki-Sapiro. *Teori ii avtomorfnye funkcii*. **6**. Izdat. ''Nauka'', Moscou, 1966, p. 512.

[14] I. Gel′fand, M. Graev et I. Pyatetskii-Shapiro. *Generalized Functions, Volume 6: Representation Theory and Automorphic Functions*. **382**. AMS Chelsea Publishing. American Mathematical Society, 2016.

[15] I. Gelfand et I. Pjateckij-Shapiro. « Representations of adele groups ». In : *Soviet Mathematics*. Vol. 5. 1964, p. 657–661.

[16] I. Gelfand et D. Raikov. « Irreducible unitary representations of locally bicompact groups ». *Matematicheskii Sbornik* **55**, n° 2 (1943), p. 301–316.

[17] R. Godement. « Fonctions automorphes de plusieurs variables complexes ». *Séminaire Henri Cartan, Exposé 10* (1957–1958).

[18] R. Godement. *Analyse Mathématique. T. 4. Intégration et Théorie Spectrale, Analyse Harmonique, Le Jardin Des Délices Modulaires*. Springer, 2001.

[19] R. Godement. « Domaines fondamentaux des groupes arithmétiques ». In : *Séminaire Bourbaki, Vol. 8, exposé 257*. Soc. Math. France, Paris, 1995, p. 201–225.

[20] R. Godement. « Les fonctions Zeta des algèbres simples, I ». In : *Séminaire Bourbaki*. Soc. Math. France, Paris, 1995, Exp. 171 et 176.

[21] R. Godement. « Les travaux de E. Hecke, I, II, III ». *Séminaire Bourbaki 2, Exposés 51, 59, 74* (1951-1954), p. 319–332.

[22] R. Godement. « Notes on Jacquet–Langlands Theory ». *Institute for Advances Study, Princeton* (1970).

[23] R. Godement et H. Jacquet. *Zeta Functions of Simple Algebras*. **260**. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1972.

[24] A. Grothendieck et J. Dieudonné. « Éléments de géométrie algébrique ». *Publications mathématiques de l′IHÉS* **4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32** (1960), p. 1813.

[25] H. Hasse. *Zahlentheorie*. Akademie-Verlag, Berlin, 1949.

[26] E. Hecke. *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*. Akad. Verlag, Leipzig, 1923.

[27] D. Hilbert et al. *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*. trad fr. Théorie des corps de nombres algébriques, trad. A. Lévy et TH; Got, Hermann Paris 1913; trad. angl. *The Theory of Algebraic Number Fields*, trad. I. A. Adamson, Springer Berlin 1998. Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1897.

[28] F. Hirzebruch. *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (N.F.), Heft 9. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1956, p. viii+165.

[29] H. Iwaniec. *Spectral Methods of Automorphic Forms*. **53**. Graduate Studies in Mathematics. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 2002.

[30] H. Jacquet et R. P. Langlands. *Automorphic forms on* $\mathrm{GL}(2)$. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[31] H. Jacquet. « Fonctions de Whittaker associées aux groupes de Chevalley ». *Bulletin de la société mathématique de France* **95** (1967), p. 243–309.

[32] W. Kuyk et J.-P. Serre. *Modular Functions of One Variable I, II, III: Proceedings International Summer School, University of Antwerp, RUCA, July 17-August 3, 1972*. **3**. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1973.

[33] J.-P. Labesse et R. P. Langlands. « L-indistinguishability for $\mathrm{SL}(2)$ ». *Canad. J. Math.* **31**, n° 4 (1979), p. 726–785.

[34] R. P. Langlands. *Biographical memoirs of fellows of the royal society, vol. 31*. Royal Society, 1985.

[35] R. P. Langlands. « Dimension of spaces of automorphic forms ». In : *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)*. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966, p. 253–257.

[36] R. P. Langlands. *Euler Products*. Yale University Press, New Haven, Conn.-London, 1971. v+53.

[37] R. P. Langlands. *On the Functional Equations Satisfied by Eisenstein Series*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 544. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. v+337.

[38] H. Maass. « Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen ». *Math. Ann.* **121** (1949), p. 141–183.

[39] G. W. Mackey. *The Theory of Unitary Group Representations*. University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, 1976. x+372.

[40] Z. A. Medvedev. *Savants soviétiques et relations internationales*. Julliard, 1973.

[41] C. Moeglin et J.-L. Waldspurger. *Décomposition Spectrale et Séries d′Eisenstein*. **113**. Progress in Mathematics. Birkäuser Verlag, Basel, 1994. xxx+342.

[42] H. Petersson. « Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen ». *Acta Math.* **58**, n° 1 (1932), p. 169–215.

[43] H. Petersson. « Über eine Metrisierung der automorphen Formen und die Theorie der Poincaréschen Reihen ». *Math. Ann.* **117** (1940), p. 453–537.

[44] W. Roelcke. « Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art ». *S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl.* (1953-1955), p. 159–267.

[45] A. Sakharov. *Mémoires*. Traduit du russe par Alexis et Vladimir Bérélowitch. Seuil, 1990.

[46] W. Schmid. « L^2-cohomology and the discrete series ». *Annals of Mathematics* (1976), p. 375–394.

[47] W. Schmid. « On the characters of the discrete series ». *Inventiones Mathematicae* **30**, nº 1 (1975), p. 47–144.

[48] A. Selberg. « Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series ». *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* **20** (1956), p. 47–87.

[49] « Séminaire Chevalley ». *tome 1 à 4* **vol. 2** (1956–1959). Disponibles sur Numdam.

[50] J.-P. Serre. *Cours d'arithmétique*. Presses Universitaires de France, Paris, 1977. 188 p.

[51] C. L. Siegel. *Topics in Complex Function Theory. Abelian Functions and Modular Functions of Several Variables (vol. III)*. John Wiley & Sons, 1989.

[52] C. L. Siegel, A. Shenitzer et D. Solitar. *Topics in Complex Function Theory. Elliptic functions and uniformization theory (vol. I)*. Wiley Interscience, 1969.

[53] C. L. Siegel, A. Shenitzer et M. Tretkoff. *Topics in Complex Function Theory. Automorphic Functions and Abelian Integrals (vol. II)*. Wiley Interscience, 1988.

[54] T. Tamagawa. « Adèles ». In : *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)*. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966, p. 113–121.

[55] J. T. Tate. « Fourier Analysis in Number Fields, and Hecke's Zeta-Functions ». In : *Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965)*. Thompson, Washington, D.C., 1967, p. 305–347.

[56] A. Weil. « Adeles and algebraic groups (Notes by M. Demazure and T. Ono) ». *Inst. Adv. Study, Princeton* (1961). Progress in Mathematics, Birkhäuser (1982).

[57] A. Weil. *Basic number theory, vol. 144*. Grundl. Math. Wiss. Springer, 1967.

[58] A. Weil. *Dirichlet Series and Automorphic Forms: Lezioni Fermiane*. Springer, 15 nov. 2006. 170 p.

[59] A. Weil. « Adèles et groupes algébriques ». In : *Séminaire Bourbaki*. Soc. Math. France, Paris, 1995, Exposé 186, 249–257.

[60] A. Weil. *Automorphic Forms and Dirichlet series*. **189**. Lecture Notes. Springer, 1971, p. 3–5.

Martin Andler

Université de Versailles Saint-Quentin

Martin Andler est professeur émérite à l'université de Versailles St Quentin. Il travaille sur les représentations des groupes de Lie, ainsi qu'en histoire contemporaine des mathématiques.

Nicolas Bergeron

Université Pierre et Marie Curie

Nicolas Bergeron,professeur à l'université Pierre et Marie Curie, est spécialiste des variétés arithmétiques, en particulier de leur topologie et de leur spectre.

Laurent Clozel

Université Paris-Sud

Laurent Clozel est professeur à Orsay (université Paris-Sud). Il travaille sur les formes automorphes et les représentations galoisiennes associées, et, avec Nicolas Bergeron, sur les applications de la formule des traces à la géométrie et à la cohomologie des espaces localement symétriques.

Nous tenons à remercier Bernadette Perrin-Riou et Bernadette Clozel pour leur généreuse collaboration technique, et Madame Massip pour la transcription de l'entretien à partir de son enregistrement.

La Maison des mathématiques et de l’informatique de Lyon

• J. Germoni

La Maison des mathématiques et de l’informatique de Lyon est un projet du labex Milyon. Elle concentre une bonne partie des activités de médiation scientifique pour ses deux disciplines dans la région de Lyon. Présenter la mmi sera le prétexte pour s’interroger sur certains enjeux de la diffusion des mathématiques – ou l’inverse.

1. Présentation générale

La Maison des mathématiques et de l’informatique de Lyon (mmi) [1] est un projet du labex Milyon (Mathématiques et informatique fondamentale de Lyon) [2] de l’université de Lyon. Cette structure originale imaginée par Étienne Ghys et mise en place grâce aux efforts titanesques de Vincent Borrelli a été créée en deux temps : une première phase « hors les murs » à partir de 2012 a précédé l’ouverture au printemps 2014 de locaux de 450 m^2 (250 m^2 d’espace d’exposition et d’animations, une salle de 40 places et trois bureaux) à côté de l’École normale supérieure de Lyon. Ses missions sont de promouvoir, fédérer et amplifier la diffusion de la culture mathématique et informatique dans la région de Lyon. Cela consiste à accompagner différentes institutions et associations (coordonner et appuyer leurs actions) et à organiser des événements à portée locale, nationale ou internationale (le plus souvent en partenariat).

Pour éviter un texte de pure propagande, je vais essayer d’émailler la présentation de la mmi par quelques questions générales sur la médiation scientifique et de voir comment la mmi y répond. Avant cela, un entretien avec Étienne Ghys offre un regard un peu différent.

1. `http://mmi-lyon.fr`
2. `http://milyon.universite-lyon.fr`

2. Entretien avec Étienne Ghys

Étienne Ghys est directeur de recherche cnrs à l’umpa (Éns de Lyon). Auteur de *Dimensions* et *Chaos* avec A. Alvarez et J. Leys, fondateur et rédacteur en chef (2009–2014) d’*Images des mathématiques*, auteur d’une centaine d’articles dans cette revue, conférencier réputé, il est le lauréat du premier prix Clay pour la diffusion des mathématiques (la mmi figure dans l’exposé des motifs).

Est-ce que tu veux d’abord parler de la diffusion des mathématiques en général : ce qu’elle était, ce qui se fait ?

Pour commencer de manière optimiste, je voudrais dire qu’on progresse. Pour donner un exemple très simple, la semaine dernière, les quatre candidats pour un poste d’agrégé-préparateur à l’Éns Lyon ont jugé important et utile de présenter leurs activités de diffusion lors de leur audition. Il y a dix ans, on ne l’aurait probablement pas vu. Il y a trente ans, ils n’auraient jamais osé ! Je me réjouis de voir que des jeunes considèrent que c’est important.

En revanche une candidate malheureuse à un poste de mcf m’a dit hier qu’elle avait reçu un message selon lequel elle n’aurait pas dû parler de diffusion lors de sa présentation, et cela d’autant plus qu’elle est une femme. No comment.

Les jeunes ont compris l’importance de cette activité et les moins jeunes… un peu moins.

Ça veut dire que les gens s'investissent ?

Les gens s'investissent de plus en plus et c'est *un peu* plus reconnu dans la communauté.

Et puis, il y a un effet médiatique, dû à Cédric Villani en bonne partie, qui est un atout important pour nous. Désormais, nous avons notre Hubert Reeves, notre Étienne Klein. Cédric a décidé de s'impliquer beaucoup dans la diffusion et il l'a fait superbement bien.

En effet. Dans la communauté, donc, la diffusion progresse. Et du point de vue du public, qu'en penses-tu ?

Bon... c'est plus compliqué. La question des publics est la question centrale sur laquelle nous devrions travailler beaucoup plus. Très souvent, je trouve qu'on a tendance à mélanger les publics. Je n'aime pas trop l'idée de conférence *grand public*. Ce mot ne me convient pas, je pense qu'il ne signifie rien. Si on me demande de faire une conférence *grand public* à l'IHP, ce n'est pas la même chose que si j'en fais une à Gerland [3]. En principe, l'organisateur connaît le public visé. Il devrait pouvoir le décrire au conférencier. La préparation d'une conférence devrait être l'occasion d'une collaboration conférencier-organisateur. Là dessus, nous devons faire des progrès.

J'ai fait une conférence « grand public » il y a trois semaines au Brésil. Sur les cent personnes présentes dans la salle, il y avait peut-être trente collègues universitaires, dont une médaille Fields, et, dans les deux premières rangées, vingt enfants de huit à dix ans. Pas facile de donner un peu à manger à chacun ! Là, c'était mission impossible. Personne ne m'avait prévenu de cette « diversité ».

N. Anantharaman et É. Ghys (SML)

Par rapport aux autres sciences, comment peut-on placer la diffusion en mathématiques ?

On est bien en retard par rapport à l'astronomie. Ils ont des belles images et ils savent très bien les présenter. Mais on n'est pas en retard sur d'autres disciplines comme, me semble-t-il, la biologie ou la physique.

Pour en venir à la MMI, tu es à l'origine de ce projet. Comment en es-tu venu à penser qu'un tel lieu était opportun ? utile ? possible ?

C'était au moment de monter le projet du labex Milyon que Bertrand Rémy avait accepté de porter. On cherchait des idées. À l'époque, *Images des mathématiques* me tenait à cœur (c'est toujours le cas d'ailleurs !) et j'ai proposé que le labex Milyon ait trois pattes : recherche, enseignement et diffusion. Et dans ce troisième volet, ce projet de maison me semblait nécessaire. Il se passait déjà pas mal de choses à Lyon concernant la diffusion. Il me semblait important de fédérer ces activités, pour que les uns et les autres ne travaillent pas chacun dans leur coin. On n'avait pas nécessairement besoin d'un endroit où on *fait* de la diffusion, mais d'un endroit où les gens qui font de la diffusion puissent se rencontrer, collaborer, pour *coordonner* ce qui existait déjà. Le projet a été accepté dès la première version : je crois que c'était le seul labex qui avait une composante importante dans la diffusion et que ça a été apprécié. D'ailleurs on a été copié par la suite, et c'est tant mieux.

Voilà, c'était une idée un peu spontanée, comme ça, de mettre une troisième patte au labex. Encore une fois, il s'agissait surtout de fédérer plutôt que de faire. Est-ce que tu penses que c'est encore le rôle principal de la MMI aujourdhui ?

C'est compliqué de fédérer... Je dirais plutôt la que MMI soutient ce qui existe et organise de nouvelles choses. Ainsi, l'idée a été bien accueillie par les évaluateurs du labex. Et à Lyon, par les mathématiciens, les tutelles, le public ?

Par les mathématiciens ? Eh bien, modérément... Un petit nombre de gens – à vrai dire un très petit nombre – ont trouvé le projet intéressant. Pour donner un exemple de difficulté qui n'a été résolue que partiellement et très lentement, j'aurais aimé que les départements puissent mettre à disposition de la MMI un service d'enseignement, ou même un demi-service, à discuter. Et là, j'ai rencontré beau-

3. Gerland est le quartier bien connu pour l'ancien stade de l'Olympique lyonnais et un peu moins connu pour abriter l'ÉNS de Lyon.

coup de fins de non-recevoir, que ça soit ici à l'Éns de Lyon ou à l'icj.

Ce point a bien évolué : maintenant, des activités à la mmi entrent dans les services.

C'est indiscutable. Même si ça n'a pas été aussi rapide que ce que j'aurais souhaité.

Quant aux tutelles, au niveau de l'École, ça a été bien ressenti. À Lyon 1, je n'en sais rien, pas tellement au début je crois. Et au cnrs, maintenant, l'insmi est tout à fait partant.

On a fini par réussir à créer le gds Audimath qui, je crois, est un succès et qui va se développer encore. Depuis le lancement d'*Images des mathématiques*, je souhaitais créer une structure nationale sur la diffusion qui puisse en particulier héberger *Images des mathématiques*. Ça a mis du temps, encore une fois : je suis toujours impatient. Mais maintenant, ça marche, Audimath tourne, il y a un certain nombre de services qui sont faits à la mmi et les tutelles sont bienveillantes.

Et dans le public ? C'est une question intéressante. Au niveau de la *quantité* de public mis en jeu par la mmi, c'est beaucoup plus lent que ce qu'on pourrait espérer. Une des explications est peut-être que la mmi n'est pas au centre-ville, malgré les tentatives pour obtenir un local auprès de diverses autorités, de la ville, de la région, etc. Le site actuel est magnifique ; mais ce qu'on peut lui reprocher, c'est qu'il soit si près de l'Éns de Lyon et qu'il soit donc perçu comme un lieu académique. Je crois que l'impact sur le public s'en ressent.

Dans la mmi, les mathématiques et l'informatique sont ensemble : c'est naturel ? artificiel ?

Je pense que ça devrait être évident. Pour un public large, y compris des enfants ou des jeunes, il est important que les mathématiciens reconnaissent que l'informatique est fondamentale et qu'elle n'est pas la même chose que les maths, que c'est une discipline sœur, et qu'il faut travailler ensemble. Ça me paraît vital. Le labex mélangeait mathématiques et informatique dès l'origine du projet, il était logique que la mmi aussi.

Tu suis le développement de la mmi depuis la création. Est-ce qu'elle est ce qu'elle devrait être ?

J'ai toujours en tête le modèle des leçons d'astronomie populaire d'Arago que des foules venaient écouter chaque semaine à l'observatoire de Paris. Arago avait fait construire un amphithéâtre spécialement dans ce but, au cœur de l'observatoire. Son successeur, Le Verrier, fit détruire l'amphithéâtre pour, dit-on, installer son appartement personnel. Cette anecdote illustre bien la question : faut-il des labos ouverts au public ?

Je crois qu'on n'a pas encore atteint ce stade où on pourrait avoir des cours de mathématiques populaires à la mmi. J'aime bien ce mot de *mathématiques populaires*. Les sciences au xix^{e} siècle, étaient synonymes de progrès. Elles allaient résoudre tous les problèmes de l'humanité. On vit actuellement une période bien plus sinistre où la science est souvent vue comme une menace et plus comme un espoir. C'est plus difficile pour nous. Pour répondre à ta question : non, la mmi n'est pas encore arrivée là où j'aurais aimé, où des foules s'amassent tous les jours pour venir écouter, quoi, la conférence du Professeur Germoni sur le rôle de la mathématique dans la société.

Il arrive qu'on fasse certaines choses, raisonnablement bien, où les participants sont plutôt contents, mais que la fréquentation ne soit pas à la hauteur du temps et de l'argent investis.

Je suis d'accord que ça peut être très frustrant d'organiser une réunion ou une exposition et de n'avoir que dix personnes qui viennent t'écouter. Mais le coup d'après il y en aura vingt et le coup d'après il y en aura deux mille, n'est-ce pas ? J'ai l'impression que non seulement la dérivée première est positive mais aussi la deuxième et la troisième. C'est plutôt une dérivée logarithmique qui est positive, non ?

Reste la question du financement à long terme qui n'est pas du tout réglée.

Oui mais de nouvelles structures vont apparaître. Il faut voir l'avenir positivement.

Là, c'est dommage de ne pas avoir de photographie pour prendre ton regard...

Une question récurrente, c'est celle de l'évaluation des actions de diffusion, qui est peut-être encore plus difficile que pour l'enseignement ou de recherche.

Pour l'évaluation de la recherche, on a une certaine expérience depuis, disons, cent ans. Pour l'évaluation de l'enseignement, on en est au tout début, ça progresse un peu. Pour l'évaluation de la diffusion, rien n'est encore fait.

Le gds Audimath a proposé de mettre au point des critères ou des protocoles d'évaluation de la diffusion. Un candidat mcf ou pr enverrait son dossier à Audimath, qui ferait fonctionner un protocole bien défini et proposerait une évaluation, plus ou moins objective. C'est un gros travail qui n'a pas encore commencé et qui pose des tas de difficultés.

Administratives, d'abord, parce que le GDS n'a pas mission de fonder un comité d'évaluation. Peut-être qu'il faut commencer de manière officieuse, avant d'arriver à un statut un peu plus permanent.

Et techniques. On n'a certainement pas envie de commencer avec des H-facteurs et des indices d'impact, etc. Il n'empêche qu'à un moment ou à un autre, il faudra se mettre d'accord sur ce qu'est une activité de diffusion de qualité. Audimath pourrait être le pilier de cette évaluation commune. Tout est à faire. Là-dessus, on aurait peut-être besoin d'avoir une aide des tutelles.

Dans le même ordre d'idées, j'ai essayé, sans succès véritable, de valoriser le travail dans *Images des mathématiques*. Un article dans *Images des mathématiques* ne demande bien sûr pas autant d'efforts qu'un article pour *Annals of Math* mais ce n'est pas pour autant que c'est facile. Par ailleurs, *Images des mathématiques* fait fonctionner un vrai système de relecture et d'évaluation des articles soumis, qui pourrait rendre jaloux beaucoup de nos revues « sérieuses ». Comment faire en sorte que ces articles soient pris en compte dans une liste de publications, à leur juste valeur ?

Une dernière pensée pour conclure ?

C'est le titre du dernier livre de Poincaré ! En fait, il ne l'a pas choisi lui-même : c'est sa famille, après son décès, qui a récupéré les notes de certaines de ses conférences inédites et qui en a fait ses *Dernières pensées*.

À propos de Poincaré, il a commencé très tôt à « faire de la diffusion » (même si le mot n'existait pas à l'époque). Il a donné des conférences « grand public », et a même écrit des choses pour les enfants. Laurent Rollet, des Archives Poincaré, a montré que, toute sa vie, ces deux parties de son activité scientifique, « diffusion » et « recherche », se sont contre-balancées : chacune aidait l'autre. Quand Poincaré écrivait un article difficile, il l'accompagnait souvent d'articles plus ciblés. Par exemple, il a écrit un article sur le problème des trois corps destiné aux astronomes ou aux observateurs, quasiment sans aucune formule. Cette activité de diffusion a nourri sa science. Donc, tu veux une dernière pensée ?

Oui, pas au même sens que celles de Poincaré...

On l'a dit plusieurs fois dans notre discussion, trop de fois peut-être : Ça ira peut-être moins vite que ce qu'on voudrait mais je crois qu'on peut être raisonnablement optimistes pour la diffusion.

3. Médiation : pour qui ? pourquoi ?

À l'heure où l'*innumeracy* est un handicap social de plus en plus lourd, où les instruments numériques et les applications des mathématiques sont partout, au moment où ces instruments semblent incompréhensibles, il importe de *sensibiliser* au fait que les mathématiques et l'informatique sont deux sciences vivantes et de *renforcer* les vocations scientifiques.

3.1 – Plusieurs publics, plusieurs buts

On peut distinguer deux grandes catégories de publics :

- les élèves et étudiants, de l'école à l'université, pour qui il s'agit de :
  - montrer à tous, même aux élèves en difficulté, que les mathématiques et l'informatique sont accessibles, (parfois) amusantes, (toujours) intéressantes, en proposant des situations où l'attrait initial provient de la manipulation et du jeu sans que le contenu scientifique soit sacrifié ;
  - susciter ou renforcer des vocations scientifiques, plus généralement stimuler l'intérêt pour les sciences, en particulier auprès de jeunes à fort potentiel en proposant des actions plus longues et plus exigeantes ;
- « le grand public », qu'il faut convaincre que :
  - les mathématiques élémentaires sont utiles au citoyen et l'informatique de base permet à tous d'agir sur le monde numérique ;
  - la recherche en mathématiques et en informatique est en pleine explosion, intéressante en elle-même et utile à la société.

Comme l'a souligné Étienne Ghys, ces types sont trop larges et on ne peut pas espérer qu'une activité, en particulier une conférence, soit pertinente pour tout le monde. Il faut donc « segmenter » et tâcher de s'adresser spécifiquement à chacun.

3.2 – Impact de la médiation scientifique

Il semble que l'impact de la médiation scientifique sur la réussite scolaire, le choix d'une carrière scientifique ou la perception des sciences dans la société, n'ait jamais été étudié sérieusement. C'est parfois un argument invoqué par les responsables des tutelles ou des collectivités locales qui ne croient pas à l'intérêt de la diffusion.

Voici une raison de douter. La plupart des actions de médiation, quand il ne s'agit pas de stages intensifs pour des jeunes à fort potentiel, se déroulent sur des durées très courtes : quelques minutes, au mieux quelques heures. Quelle peut être la portée de ces *magic moments* ou de ces séances *one shot* [4] ? On peut espérer qu'une personne qui serait en délicatesse avec les mathématiques ou l'informatique découvrirait qu'elles peuvent, au moins l'espace d'un moment, lui être accessibles et l'intéresser. Mais est-ce que cela change la conviction intime sur ce qu'elles sont ? Oui, croit-on en général dans le milieu de la médiation.

L'association ébulliScience a mené une expérience de suivi de cohorte très intéressante dans un quartier socialement défavorisé de Lyon. De la grande section au CM2, les animateurs encadraient des séances hebdomadaires de mathématiques et de sciences auprès des mêmes élèves, caractérisées par la démarche de recherche – chez ébulliScience, le dogme consiste à poser et faire naître beaucoup de questions, sans nécessairement y répondre. Les effets ont été spectaculaires : les élèves prenaient la posture du chercheur dans toutes les disciplines, ce qui leur a permis d'atteindre un bon ou très bon niveau dans l'ensemble, dans un quartier où l'échec scolaire est fréquent.

Cette situation confirme s'il en était besoin qu'un apprentissage où l'élève est actif est infiniment plus efficace et montre que la médiation scientifique à fortes doses stimule l'activité et la curiosité. Mais la médiation scientifique à fortes doses, n'est-ce pas un autre nom pour l'enseignement ?

4. La médiation à la MMI

4.1 – Le choix d'un large spectre

Pour en revenir à la MMI, il a été décidé d'intervenir devant tous les publics imaginables et à tous les niveaux possibles : de la sensibilisation pour les élèves en difficulté ou le public peu scientifique, à qui il faut montrer que mathématiques et informatique sont vivantes, intéressantes, utiles au citoyen et accessibles, jusqu'à la mise en place de stages intensifs pour les jeunes à fort potentiel. Ce choix fait courir le risque d'une certaine dispersion mais il se révèle très stimulant.

La MMI accueille donc une grande multiplicité de publics selon autant de modalités différentes, classiques ou plus originales : une typologie est donnée dans la partie suivante. Elle est caractérisée par l'intervention massive de chercheurs.

Notons que d'autres structures ont des activités plus ciblées, telle la Maison des Maths [5] de Quaregnon (Belgique), qui propose des *matheliers* bien formatés par des *animatheurs*, à des classes principalement mais aussi lors d'après-midi d'anniversaire ou de journées portes ouvertes ; ou bien l'association π-day [6], dont les efforts de l'année se concentrent dans un spectacle – remarquable.

Séance MathαLyon

4.2 – Mathématiques *et* informatique

Comme son nom l'indique, la MMI mélange allègrement les deux sciences. La plupart des activités peuvent être rattachées à l'une des deux et il ne s'agit pas d'identifier mathématiques et sciences du numérique, bien sûr, mais il est parfois difficile de les séparer. Par exemple, il arrive souvent qu'un concept élémentaire utilisé par une informaticienne fasse l'objet d'un apprentissage en mathématiques pour l'élève à qui elle s'adresse, ou bien que la notion, *mutatis mutandis*, soit commune aux deux disciplines : fonction, preuve, puissance, si... alors..., parité (bit de —), représentation d'un nombre en base 2, jeux de Nim, ça relève de quoi ? Dans tous

4. Je ne sais pas pourquoi ceux qui en parlent en parlent souvent en anglais.
5. `http://maisondesmaths.be`
6. `http://www.piday.fr`

les cas, l'usage de matériels et logiciels adaptés (MathαLyon, pascalines, Scratch...) et l'avènement de l'informatique débranchée et des robots éducatifs permettent une approche fondée sur la manipulation.

4.3 – Parité

La lutte contre les préjugés de genre est un des axes sur lesquels la MMI s'engage vigoureusement. En 2016, deux journées en partenariat avec *femmes et mathématiques* et Animath ont été organisées avec 90 participantes chaque fois : « Filles et mathématiques » en mai, « Filles et informatique » en novembre. Via la MMI, des chercheuses ont contribué à des journées « Filles et sciences » ou « Elles bougent le numérique ». Au quotidien, la MMI veille à ce que ses activités qui engagent un processus de sélection – stages, écoles d'été – soient paritaires.

Journée « Filles et math. »

4.4 – Arts

Les interactions entre arts et sciences sont une très bonne porte d'entrée pour la médiation scientifique. La MMI leur a depuis le début réservé une place de choix, ce qui a donné lieu à des collaborations – spectacles, expositions, animations – avec les plasticiens Sophie Pouille et Pierre Gallais, le metteur en scène Claire Truche et sa *n*-ième compagnie, le compositeur et plasticien Denys Vinzant et le GRAME, centre national de création musicale pour l'exposition *Musimatique* ; enfin, le magicien Yves Doumergue pour l'exposition *Magimatique*.

4.5 – Formation *à* et *par* la médiation

Initiation à la recherche et à la médiation

La MMI est avant tout un lieu de rencontre où la science se transmet, suivant de nombreuses modalités différentes. Elle constitue un outil formidable de formation à la recherche et à la médiation : les étudiants peuvent venir, selon les jours, pour échanger avec des pairs ou des experts sur des sciences avancées ou pour se frotter eux-mêmes à la médiation avec un « vrai » public, scolarisé ou pas. Certains de ces dispositifs seront présentés plus bas.

5. Typologie raisonnée des actions

5.1 – Interventions scolaires et périscolaires

Plus de 220 classes (soit plus de 4500 élèves) ont été accueillies à la MMI sur des thématiques art et science, astronomie, géométrie, informatique et algorithmie, nombres et calculs, robotique ou magie mathématique. Elles sont encadrées par des partenaires, principalement l'équipe EducTICE de l'IFÉ, ébulliScience, Plaisir Maths, Maths à Modeler.

Dans le cadre périscolaire, en partenariat avec la mairie du 7e arrondissement de Lyon, 35 enfants du centre social de Gerland viennent tous les vendredis après-midi pour des ateliers sur l'architecture ou les sciences encadrés par ébulliScience.

5.2 – Expositions, clubs, stages : un lieu ouvert

La MMI est ouverte en semaine pour les scolaires mais aussi le mercredi après-midi et le samedi pour tous. Un animateur – mathématicien et musicien de formation – présente l'exposition annuelle. En parallèle se déroule un club : informatique débranchée le mercredi par ébulliScience, ludothèque mathématique le samedi par Plaisir Maths. Pendant certaines vacances, des stages d'un à trois jours complètent l'offre.

5.3 – Grands événements populaires

La MMI intervient dans la Fête de la science et la Semaine des mathématiques, en particulier pour les deux éditions du forum Mathématiques vivantes de 2015 et 2017. Elle a organisé deux congrès Math.en.jeans à la Doua : en 2014 pour 350 participants, en 2016 pour 650 ; de plus, elle soutient chaque année les groupes de la région.

5.4 – Stages intensifs et écoles d'été

Pour les élèves à fort potentiel et intéressé·e·s par les sciences mais géographiquement ou sociologiquement peu enclins à se diriger vers elles, un stage Math C2+ est organisé chaque année à la MMI avec le rectorat et Plaisir Maths. Elle organise également un « stage hippocampe », une immersion d'une classe dans un laboratoire pendant trois jours pour mener un mini-projet de recherche. La MMI a organisé trois écoles d'été internationales (voir ci-dessous). Enfin, la MMI soutient le club de Mathématiques discrètes : Bodo Lass y attire jusqu'à cinquante ou quatre-vingts élèves de toute la France pour des séances ou des stages très avancés avec en ligne de mire les olympiades internationales et compétitions analogues.

5.5 – Cycles de conférences

Pour un large public, la MMI a proposé cette année une conférence mensuelle de magimatique. Elle organise les conférences de mathématiques et d'informatique de l'Université ouverte de Lyon 1 et soutient les « Cafés de la statistique... à Lyon ». Des contes ont été interprétés par leur auteur, Marie Lhuissier : ça compte comme conférence ?

Pour les étudiants, la MMI organise les Soirées mathématiques de Lyon (SML), où se produisent des orateurs prestigieux tels que Nalini Anantharaman, Étienne Ghys ou Cédric Villani. Dans le même esprit, elle soutient les conférences mathématiques de l'INSA. Elle organise aussi séminaire de la détente, un peu plus avancé, destiné aux élèves de l'ÉNS et aux étudiants de L3 et M1.

5.6 – Initiation à la recherche et à la médiation

Depuis deux ans, la MMI a mis en place un « parcours recherche » en L3 à Lyon 1 : les étudiants assistent aux SML – pour lesquelles ils proposent des orateurs –, participent au séminaire de la détente et à des groupes de lecture. Bien que ça ne leur rapporte pratiquement aucun ECTS, ceux qui optent pour ce parcours en sont enchantés. Ce qu'ont gagné en autonomie les étudiants en M1 cette année est, de l'avis de leurs professeurs, remarquable.

Les étudiants de master ont la possibilité de faire un stage de médiation à la MMI. Certains accompagnent l'exposition MathαLyon dans les établissements ; d'autres coencadrent des animations pédagogiques à la MMI. La formation *hands on* se déroule en trois temps : d'abord sans élèves pour découvrir les animations, puis en coanimation, puis en (relative) autonomie. Dans le même esprit, huit étudiants de L3 ou master ont animé le forum Mathématiques vivantes en mars dernier.

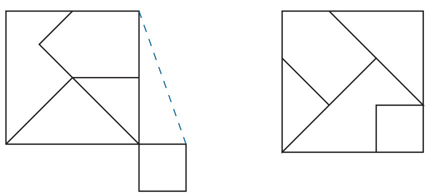
Par ailleurs, des morceaux d'UE transversale (2 ECTS chacun) sont proposés en L2 et L3 à Lyon 1 par des membres de la MMI : initiation à la médiation scientifique (conception d'un poster et mini-exposé), conception de questions de rallye scientifique, problèmes de math. discrètes.

6. Quelques réalisations marquantes

6.1 – Exposition MathαLyon

MathαLyon est sans doute le dispositif qui touche le plus grand nombre d’élèves, environ 5 000 par an : dix à douze fois par an, l’exposition est installée pendant deux jours dans un établissement et accueille une quinzaine de classes. Interactive et itinérante, accompagnée par quatre mathématiciens ((enseignants-)chercheurs, doctorants, quelques étudiants de master), MathαLyon provient de l’exposition internationale « Pourquoi les mathématiques ? » patronnée par l’UNESCO. Elle est composée d’une petite vingtaine d’ateliers qui posent des problèmes laissant la part belle à la manipulation et assez ouverts pour adapter un discours à plusieurs niveaux. Avec l’exemple de la figure 1, un enfant se contentera du puzzle, un collégien cherchera le côté du grand carré grâce au théorème de Pythagore ; au-delà, on peut prédire l’orientation des pièces selon que les côtés sont rationnels ou multiples rationnels de $\sqrt{2}$.

Figure 1 – Puzzle pythagoricien



6.2 – Exposition *Magimatique*

L’exposition *Magimatique* présentée cette année est la plus réussie à ce jour. Trois mille cinq cents personnes l’ont visitée, on devrait dépasser quatre mille d’ici fin juin. Elle commence par un spectacle court (20 à 25 min) mis au point par Yves Doumergue, champion de France de magie, destiné à « donner l’illusion de la magie grâce à la puissance des mathématiques et de l’informatique ». Les tours sont simples mais grâce à l’ingénierie, la spectatrice finit par croire que la tablette (magique, certes) connaît l’ordre des cartes d’un paquet qu’il a mélangé. Des panneaux donnent les explications que peut donner l’animateur à la fin. En outre, l’exposition offre quelques tours assez simples pour que le visiteur les pratique et des illusions sonores et visuelles, notamment des sculptures paradoxales de Francis Tabary et des variantes de la gamme de Shepard par François Rousset.

Sculptures de Francis Tabary

6.3 – L’école d’été internationale Mathinfoly

Le labex Milyon a organisé à la MMI trois écoles d’été internationales. Celle d’août 2016, intitulée Mathinfoly, a réuni 85 élèves sortant de 1re S venant de pays francophones : Algérie, Congo-Kinshasa, France, Liban, Roumanie, Tunisie. Après un jour et demi d’exposés, les participants ont travaillé trois jours sur un sujet ouvert (au moins pour eux). La dernière journée leur a permis de présenter leurs résultats (exposé & poster). Il était saisissant de voir leur engagement dans la recherche et leurs qualités de communication et de présentation. L’enthousiasme révélé par le livre d’or atteste que l’école était un succès.

7. Auto-audit...

7.1 – Fonctionnement

La MMI est dirigée par un comité de pilotage constitué par des chercheurs (CNRS, Inria) et enseignants-chercheurs (ÉNS, INSA, Lyon 1, Saint-Étienne), mathématicien·ne·s et informaticien·ne·s. Elle bénéficie du travail des deux personnes de l’équipe support du labex, la coordonnatrice et la chargée de communication. Avec l’expérience, l’organisation gagne peu à peu en efficacité.

À l’extérieur, la MMI a noué des partenariats avec la plupart des acteurs de la médiation scientifique dans la région de Lyon, notamment les associations ébulliScience et Plaisir Maths, et avec nombre de structures au niveau national, comme Animath, AuDiMath, *femmes et mathématiques*, *Images des mathématiques*, Math.en.jeans, ainsi Cap’Maths quand le consortium existait.

7.2 – Financement

Le financement est assuré pour l'essentiel par le labex Milyon et complété par des partenariats (par exemple, la mairie du 7^{e}) ou des appels d'offre (par exemple, de Lyon 1). Avec l'augmentation du nombre d'actions, les ressources du labex ne permettent plus de répondre à toutes les sollicitations et encore moins de mettre en place tous les projets imaginés. Défi majeur : comme cela a été signalé, la pérennité à long terme n'est pas assurée.

7.3 – La question de l'évaluation

Étienne Ghys l'a dit plus haut : c'est un problème ouvert et qui comporte des enjeux d'évaluer la diffusion, que ce soit au niveau d'une structure ou d'une personne.

Pour la MMI, une sorte d'audit a été demandé en mars 2016 à Marie Collin, responsable du service communication et médiation à Inria Grenoble Rhône-Alpes, Michel Darche, ancien directeur de Centre Sciences et Roberto Natalini, responsable de la commission sur la médiation scientifique à la European Mathematical Society. Tous trois ont rendu un avis positif, voire « *really positive* », sur la MMI – non sans quelques recommandations pour le futur, dont certaines sont déjà prises en compte.

7.4 – En guise de conclusion

« N'arrêtez JAMAIS ce que vous faites », nous enjoignait un participant à MathInfoLy. C'est bien le vœu de l'équipe engagée dans cette belle aventure.

Jérôme GERMONI

Université de Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, CNRS UMR 5208, Institut Camille Jordan, 43 bd du 11 novembre 1918, F-69622 Villeurbanne cedex, France

germoni@math.univ-lyon1.fr

Maître de conférences, ancien directeur de la Maison des mathématiques et de l'informatique de Lyon.

Paradoxe de Parrondo

• H. DAVAUX

Lors d'un stage Hippocampe organisé à l'université de Saint-Étienne pour ma classe de MPSI, Olivier Marchal, maître de conférences, a proposé d'étudier le paradoxe de Parrondo. Le paradoxe de Parrondo ? Il s'agit de construire un jeu aléatoire gagnant (en moyenne) à partir de deux jeux aléatoires perdants (en moyenne).

Comment est-ce possible ? Aux dires de notre enseignant-chercheur, il faut juste quelques outils d'algèbre linéaire et de probabilités élémentaires pour expliquer ce phénomène surprenant découvert par le physicien Juan MR Parrondo [2] dans les années 2000.

Le but de ce texte est d'expliquer ce phénomène et de découvrir dans quels cas le paradoxe apparaît.

1. Construction des deux jeux aléatoires perdants

Les deux jeux aléatoires, nommés A et B, sont construits à partir de parties de « Pile ou Face ». Dans les deux cas, on joue n parties en partant d'un capital initial $C_0 = 0$. On gagne un point pour un pile et on perd un point pour un face. On note C_n le nombre de points à l'issue de la n-ième partie. Nous choisissons les cas particuliers standards étudiés dans les articles [1] et [3].

1.1 – Jeu A

Le jeu A est le plus simple. On lance toujours la même pièce, nommée elle aussi A. Cette pièce est très légèrement défavorable, en effet, la probabilité de succès pour la pièce A est :

$$p = 0,49 = \frac{1}{2} - \epsilon \quad \text{où} \quad \epsilon = \frac{1}{100}\cdot$$

Notons G_A la variable aléatoire égale au gain pour une partie avec la pièce A. La variable aléatoire G_A est à valeurs dans $\{-1,1\}$ avec $\mathbb{P}(G_A = 1) = p$. Ainsi :

$$\mathbb{E}(G_A) = 2p - 1 = -2\epsilon = -0,02\cdot$$

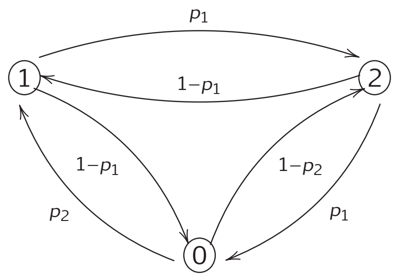
1.2 – Jeu B

Le jeu B est plus subtil. On dispose de deux pièces B_1 et B_2 et on ne lance pas toujours la même pièce. Plus précisément, les règles du jeu B sont les suivantes :

– si le capital avant le lancer est multiple de 3, alors on joue avec la pièce B_2. Cette pièce est très défavorable avec pour probabilité de succès
$$p_2 = 0,09 = \frac{1}{10} - \epsilon\,;$$

– sinon, on joue avec la pièce B_1. Cette pièce est favorable avec pour probabilité de succès
$$p_1 = 0,74 = \frac{3}{4} - \epsilon\cdot$$

Pour étudier le jeu B, on introduit la valeur du capital modulo 3 et on dresse le graphe du processus aléatoire :



On note X_n la variable aléatoire égale au capital modulo 3 à la fin de la n-ième partie. La variable aléatoire X_n est à valeurs dans $\{0,1,2\}$. Par hypothèse, $C_0 = 0$ donc $X_0 = 0$. On veut étudier la loi de X_n lorsque n tend vers $+\infty$ et on en déduira le gain d'un coup pour le jeu B pour n grand.

En posant $Y_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, Y_{n+1} = B\,Y_n$$

avec

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1-p_1 & p_1 \\ p_2 & 0 & 1-p_1 \\ 1-p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit donc d'étudier la suite matricielle $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc la suite matricielle $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$. On commence par étudier la matrice de transition B.

Étude de la matrice de transition

La matrice B est une matrice stochastique. En particulier, la somme des coefficients de chaque colonne de B vaut 1. Ceci se traduit par l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot$$

Cette propriété est conservée pour les matrices B^n et donc par l'éventuelle limite de la suite $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Plus généralement, on peut montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est un compact stable par produit matriciel.

Cette propriété permet aussi d'affirmer que 1 est valeur propre de ${}^tB$ et donc que 1 est valeur propre de B. Le calcul d'un vecteur propre de B pour la valeur propre 1 donne

$$e_1 = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 1 - p_1(1-p_1) \\ \mu_1 &= 1 - p_1(1-p_2) \\ \mu_2 &= 1 - p_2(1-p_1)\cdot \end{aligned}$$

On peut faire une étude complète de la matrice B. On vérifie alors que les deux autres valeurs propres sont réelles distinctes et de valeur absolue strictement inférieure à 1.

La matrice B est donc diagonalisable : il existe une matrice inversible P telle que

$$B = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

avec

$$|\lambda_1| < 1 \quad \text{et} \quad |\lambda_2| < 1\cdot$$

On en déduit que la suite $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice

$$B_\infty = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}\cdot$$

Cette matrice est un projecteur de rang 1 dont toutes les colonnes sont proportionnelles au vecteur propre e_1 donné précédemment. De plus, cette matrice étant stochastique, la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1. Or, $p_1 \in]0,1[$ et $p_2 \in]0,1[$, donc les coordonnées de e_1 sont toutes trois strictement positives. On pose μ la somme des coordonnées de e_1. On obtient :

$$B_\infty = \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_0 & \mu_0 \\ \mu_1 & \mu_1 & \mu_1 \\ \mu_2 & \mu_2 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

où

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 > 0$$

Calcul du gain moyen par coup, à l'infini

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} B^n Y_0 = B_\infty Y_0$ *i.e.* $\lim_{n\to+\infty} Y_n = Y_\infty$. Or Y_0 est le premier vecteur de la base canonique de $M_{3,1}(\mathbb{R})$, donc $B_\infty Y_0$ est la première colonne de B_∞ *i.e.*

$$Y_\infty = \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la variable aléatoire X_∞ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(X_\infty = 0) = \frac{\mu_0}{\mu}$$
$$\mathbb{P}(X_\infty = 1) = \frac{\mu_1}{\mu}$$
$$\mathbb{P}(X_\infty = 2) = \frac{\mu_2}{\mu}.$$

Passons maintenant à l'étude du gain. Soit G_B la variable aléatoire égale au gain pour un coup à l'infini. L'espérance asymptotique de gain pour un coup est :

$$\mathbb{E}(G_B) = \mathbb{P}(G_B = 1) - \mathbb{P}(G_B = -1)\cdot$$

À l'aide de la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements associé à X_∞ :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G_B = 1) =& p_2\mathbb{P}(X_\infty = 0) \\ &+ p_1\mathbb{P}(X_\infty = 1) \\ &+ p_1\mathbb{P}(X_\infty = 2) \\ \mathbb{P}(G_B = -1) =& (1-p_2)\mathbb{P}(X_\infty = 0) \\ &+ (1-p_1)\mathbb{P}(X_\infty = 1) \\ &+ (1-p_1)\mathbb{P}(X_\infty = 2)\cdot\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient l'expression suivante (qui n'est autre que la formule de l'espérance totale) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(G_B) =& (2p_2-1)\mathbb{P}(X_\infty = 0) \\ &+ (2p_1-1)\mathbb{P}(X_\infty = 1) \\ &+ (2p_1-1)\mathbb{P}(X_\infty = 2)\cdot\end{aligned}$$

Après simplification :

$$\mathbb{E}(G_B) = \frac{p_2p_1^2 - (1-p_2)(1-p_1)^2}{3 - 2p_1 - p_2 + p_1^2 + 2p_1p_2}\cdot$$

Numériquement

Pour le jeu B, les formules précédentes donnent :

$$\mathbb{P}(X_\infty = 0) \simeq 0.3826$$
$$\mathbb{P}(X_\infty = 1) \simeq 0.1547$$
$$\mathbb{P}(X_\infty = 2) \simeq 0.4627$$

et

$$\mathbb{E}(G_B) \simeq -0.0174 < 0\cdot$$

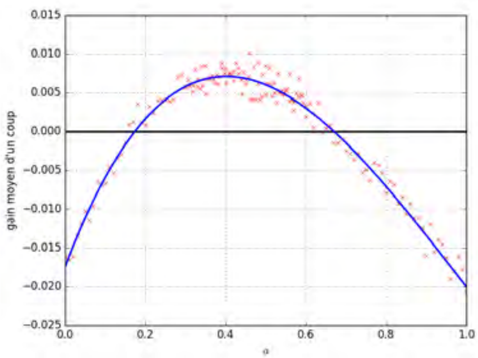
Remarque. Le gain moyen asymptotique ne dépend pas de l'état initial Y_0. En effet, si $Y_0 = {}^t\begin{pmatrix} a & b & c\end{pmatrix}$ avec $a+b+c=1$, les colonnes de B_∞ étant identiques, le résultat est inchangé.

2. Mélange aléatoire des jeux A et B

Imaginons qu'avant chaque coup, on lance un dé : si le résultat obtenu est pair, on joue avec les règles du jeu A, sinon, on joue avec les règles du jeu B.

Si notre dé est équilibré, l'espérance de gain pour un coup à l'infini est proche de $0{,}006$: on observe donc un jeu gagnant en moyenne.

Figure 1 – Gain asymptotique moyen d'un coup pour un mélange aléatoire avec une proportion a de jeux A



Justification

Le mélange aléatoire pour une proportion a de jeu A revient à jouer **uniquement** au jeu B en remplaçant p_1 par $q_1 = ap + (1-a)p_1$ et p_2 par $q_2 = ap + (1-a)p_2$.

Dans la première partie, nous avons étudié le jeu B pour des valeurs particulières :

$$p_1 = 0,09, p_2 = 0,74$$

Nous noterons désormais $B(p_1, p_2)$ le jeu B avec des pièces B_1 et B_2 dont les probabilités de succès sont respectivement p_1 et p_2. La matrice associée sera notée $B(p_1, p_2)$.

Là encore, la matrice $B(p_1, p_2)$ est stochastique. Les valeurs propres d'une telle matrice sont toutes de module inférieur ou égal à 1. De plus, 1 est valeur propre. Cependant, avant d'appliquer les résultats de l'étude précédente pour des valeurs quelconques de p_1 et p_2, il faut vérifier que, pour tout couple $(p_1, p_2) \in]0,1[^2$:

- la matrice associée $B(p_1, p_2)$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$;
- la seule valeur propre de module 1 (valeur propre dominante) est 1, et les autres valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1.

Cette vérification peut se faire à la main ou à l'aide d'un logiciel de calcul formel (calcul du polynôme caractéristique, recherche de valeurs propres, vérification de la propriété sur les modules).

On peut alors affirmer que, pour $(p_1, p_2) \in]0,1[^2$, l'espérance asymptotique de gain est donnée par :

$$\mathbb{E}(G_{B(p_1,p_2)}) = \frac{p_1^2 p_2 - (1-p_1)^2(1-p_2)}{\mu}.$$

Comme μ est un réel strictement positif, le jeu $B(p_1, p_2)$ est

- gagnant lorsque
$$p_1^2 p_2 > (1-p_1)^2(1-p_2)$$
- équilibré lorsque
$$p_1^2 p_2 = (1-p_1)^2(1-p_2)$$
- perdant lorsque
$$p_1^2 p_2 < (1-p_1)^2(1-p_2).$$

Le mélange aléatoire des jeux A et B de la partie 1 avec une proportion a de jeu A a une espérance asymptotique de gain donnée par :

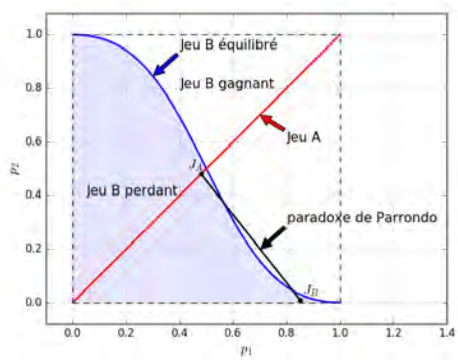
$$\mathbb{E}(G_a) = \frac{q_2 q_1^2 - (1-q_2)(1-q_1)^2}{3 - 2q_1 - q_2 + q_1^2 + 2q_1 q_2}$$

avec

$$q_1 = ap + (1-a)p_1 \quad \text{et} \quad q_2 = ap + (1-a)p_2.$$

Sur le graphique (figure 1), les croix sont obtenues par simulations. La courbe est obtenue en traçant $\mathbb{E}(G_a)$ en fonction de a. Pour $a = 1$, on a l'espérance de gain du jeu A : elle est négative. Pour $a = 0$, on a l'espérance de gain du jeu B : elle est également négative. La courbe admet un maximum qui est positif et que l'on peut déterminer à l'aide de l'expression de $\mathbb{E}(G_a)$ (de l'ordre de 0,007). La valeur où ce maximum est atteint nous fournit un mélange aléatoire gagnant en moyenne. On peut montrer que cette valeur est de l'ordre de 0,4.

Figure 2 – Nature (gagnant/perdant/équilibré) du jeu $B(p_1, p_2)$ dans le plan avec p_1 en abscisse et p_2 en ordonnée



Interprétation graphique

Afin de mieux comprendre ce phénomène, on se place dans le plan représentant tous les jeux de type $B(p_1, p_2)$ avec p_1 en abscisse et p_2 en ordonnée (figure 2). On définit la fonction f par :

$$f(p_1) = \frac{(1-p_1)^2}{1-2p_1+2p_1^2}$$

et on trace la courbe représentative de f sur $]0,1[$. Les points de cette courbe représentent des jeux équilibrés, la zone grisée représente des jeux perdants et la dernière zone des jeux gagnants.

– Le jeu A est un cas particulier du jeu B avec $p = p_1 = p_2$. C'est un point de la première bissectrice. Il est représenté par le point J_A de coordonnées (p, p).
  Le jeu A de la partie 1 est perdant car $p < \frac{1}{2}$. Il se situe dans la zone grisée.
– Le jeu B de la partie 1 est représenté par le point J_B de coordonnées (p_1, p_2). Il est perdant : il se situe lui aussi dans la zone grisée.
– Un mélange aléatoire de A et B avec une proportion a de jeu A est représenté par un point du segment joignant J_A et J_B.

On obtient un paradoxe de Parrondo lorsque le segment joignant J_A et J_B (deux points du domaine perdant) passe dans le domaine gagnant. Pour le graphique de la figure 2 : $p = 0,48$, $p_1 = 0,85$ et $p_2 = 0,01$. Ces valeurs numériques ont été choisies pour observer le phénomène plus nettement.

3. Épilogue : un petit mot du stage Hippocampe

L'idée est de faire découvrir les sciences autrement que par l'approche cours-exercices. Un groupe d'élèves se déplace pendant 3 jours consécutifs au sein d'un laboratoire de recherche, ici l'Institut Camille Jordan sur le site de l'université Jean Monnet à Saint-Étienne. Des enseignants-chercheurs commencent par présenter des thèmes d'étude en lien plus ou moins direct avec leur propre recherche puis les élèves se répartissent en petits groupes pour réfléchir aux sujets proposés. Ils sont guidés par des enseignants-chercheurs ou des étudiants plus expérimentés (doctorant, par exemple), ceux-ci ne connaissent pas nécessairement la réponse au problème. Ils travaillent alors pendant deux jours : ils se posent des questions, débattent, expérimentent, explorent leurs idées. Le troisième jour, ils proposent un poster et exposent leurs travaux aux autres étudiants et aux membres du laboratoire.

Pendant le stage de juin 2016, un groupe de cinq étudiants a travaillé sur le paradoxe de Parrondo. Ils ne disposaient d'aucun document. Ils ont principalement étudié l'évolution du capital en s'intéressant à un mélange des jeux A et B non pas aléatoire, mais alternant en suivant le motif donné par le mot « ABB ». Ils en ont fait l'étude théorique, puis pratique grâce à des simulations informatiques.

Les calculs numériques et les simulations ont été réalisés à l'aide du langage de programmation Python (au programme des classes préparatoires).

Références

[1] G. P. Harmer et D. Abbott. « A review of Parrondo's paradox ». *Fluctuation and Noise Letters* **2**, n° 02 (2002), R71–R107.

[2] *Le site du physicien Juan MR Parrondo*. `http://parrondo.wix.com/home`.

[3] J. Parrondo et L. Dinis. « Brownian motion and gambling: from ratchets to paradoxical games ». *Contemporary Physics* **45**, n° 2 (2004), p. 147–157.

[4] J.-J. Shu et Q.-W. Wang. « Beyond Parrondo's paradox ». *Scientific Reports* **4**, n° 4244 (2014), p. 1–9.

Hélène Davaux
Hélène Davaux est docteure ès Mathématiques, actuellement professeure agrégée en classe préparatoire au lycée Claude Fauriel de Saint-Étienne.

Merci à Olivier Marchal pour avoir proposé ce sujet et pour la relecture attentive de ce texte. Merci aux étudiants pour leur implication pendant le stage. Merci à l'équipe de l'Institut Camille Jordan (ICJ UMR 5208) et à l'université Jean-Monnet à Saint-Étienne pour leur accueil.
Le stage Hippocampe a été réalisé grâce au soutien financier du LABEX MILYON (ANR-10-LABX-0070) de l'université de Lyon, dans le cadre du programme « Investissements d'Avenir », (ANR-11-IDEX-0007) géré par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR).

… Les solitons

• R. Côte

1. Des ondes solitaires dans un canal

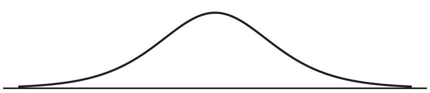
Un jour de 1834 qu'il décrivit ensuite comme le plus heureux de sa vie [3], l'écossais Russell observait un bateau tiré le long d'un canal. Une vague se forma au milieu du bateau, puis, lorsque celui-ci fut brusquement mis à l'arrêt, cette vague le dépassa et poursuivit sa course, sans que sa forme ne s'affaisse. L'ingénieur naval la suivit à pied puis à cheval, sur plusieurs kilomètres, avant que l'onde ne s'étiole.

Russell confirma son observation au travers de plusieurs expériences – il cherchait surtout à établir une forme efficace pour la coque d'un bateau. Malgré cela, et bien que la théorie des ondes fluides ait été développée depuis 1775, il peina à convaincre la communauté scientifique de l'époque que cette grande onde solitaire, qui se déplace sans changer de forme et que l'on appellera (beaucoup plus tard) soliton, correspondait à un nouveau phénomène physique.

Le problème était de dériver, à partir des équations générales de la mécanique des fluides, une équation qui admette une solution soliton, de la forme

$$u(t,x) = Q(x-t), \qquad (1)$$

pour une onde de vitesse unité, et où le profil Q du soliton a une allure en cloche :



Il fallut attendre 1895 et les travaux du hollandais Korteweg et de son élève de Vries : ils proposèrent l'équation suivante, qui (bien qu'introduite par Boussinesq dès 1877) porte maintenant leurs noms

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) = 0, \quad u : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \to \mathbb{R}. \quad \text{(KdV)}$$

En injectant (1) dans (KdV), on voit que Q doit satisfaire à l'équation elliptique

$$-Q'' + Q = Q^2, \qquad (2)$$

après intégration (Q étant localisé en espace, la constante d'intégration est nulle). On peut à nouveau intégrer, par exemple en multipliant par Q', et on trouve l'expression explicite du profil du soliton de (KdV)

$$Q(x) = \frac{3}{2\cosh^2(x/2)} = 6\frac{d^2}{dx^2}\ln(1+e^x).$$

Le profil des solitons se déplaçant à la vitesse $c > 0$, de la forme $Q_c(x-ct)$ est alors obtenu par changement d'échelle

$$Q_c(x) = cQ(\sqrt{c}x). \qquad (3)$$

2. Dispersion et solitons

L'équation (KdV) fait partie d'une classe d'EDP appelées « équations dispersives non linéaires », où le terme « dispersif » se rapporte à la partie linéaire. Rappelons en quoi consiste la dispersion. La partie linéaire de (KdV) est l'équation d'Airy :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0.$$

Elle conserve la norme L^2 et celles qui en sont dérivées, en particulier

$$\|v\|_{\dot{H}^1}^2 = \int |\nabla v(t,x)|^2\, dx.$$

Mais cela n'empêche pas v de tendre vers 0 dans d'autres normes (plus faibles). C'est le cas typiquement de la norme L^∞, comme le montre l'expression intégrale

$$v(t,x) = \int \hat{v}(0,\xi) e^{ix\xi + it\xi^3/3} d\xi,$$

en utilisant la méthode de la phase stationnaire. La formule ci-dessus exprime le fait que la solution « onde plane » de fréquence ξ, de la forme $e^{i\xi(x-\kappa t)}$ se déplace à la vitesse $\kappa = -\xi^2/3$. Ainsi, les hautes fréquences sont transportées à des vitesses de plus en plus grandes : c'est la dispersion.

Une des questions importantes est de comprendre comment se traduit la dispersion dans le cadre non linéaire. La dynamique de (KdV) sera nécessairement plus riche que l'équation d'Airy, du fait de l'existence de solitons. Ces derniers réalisent un équilibre subtil entre la partie linéaire, qui tend à faire disperser la solution, et la partie non linéaire, qui tend à la faire se concentrer : ils sont l'archétype d'une solution non linéaire qui ne disperse pas.

3. Résolution en solitons

Les équations dispersives furent de plus en plus étudiées à partir de la deuxième partie du xx^{e} siècle. On se rendit compte que de nombreux modèles relèvent de cette classe d'EDP, et notamment l'équation de Schrödinger, donnée ci-dessous avec non-linéarité cubique

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + |u|^2 u = 0, \quad u : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d \to \mathbb{C}. \qquad \text{(NLS)}$$

Ici le soliton est la solution périodique en temps $e^{it}Q(x)$ où $Q \in H^1(\mathbb{R}^d)$ (c'est-à-dire que $Q, \nabla Q$ sont des fonctions L^2) vérifie l'analogue de (2) en dimension supérieure :

$$-\Delta Q + Q = Q^3 \quad \text{et} \quad Q > 0. \qquad (4)$$

Noter le signe de la non-linéarité dans (NLS) : avec le signe « - », l'équation n'admet pas de soliton. Notons également que (KdV) et (NLS) sont des EDP *conservatives*[1] : certaines quantités sont conservées par le flot, en particulier la norme L^2 et l'énergie, qui vaut pour (KdV)

$$E(u) = \int \left(\frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 - \frac{1}{3} u^3 \right) dx.$$

L'intérêt pour les solitons connut un essor parallèle. Ils apparaissent dans toute une variété de phénomènes en physique : en sus des solitons hydrodynamiques de Russell – qui pourraient modéliser les tsunamis, les mascarets, et les vagues scélérates – existent des solitons optiques, acoustiques, des solitons au sein de cristaux. On a également des exemples en chimie (électricité des plastiques conducteurs), en biologie (dynamique des populations en chimiotaxie), et en météorologie (nuage « morning glory »). En théorie quantique des champs, on parle de solitons topologiques, avec une terminologie variable (kink, instantons, skirmions, torons etc.). L'une des caractéristiques essentielles pour les physiciens est que lorsque deux solitons se rencontrent (on parle de collision), ils en ressortent intacts : cette forme de stabilité très forte – il s'agit de perturbations grandes – explique que l'on observe des solitons dans les expériences physiques. Nous y reviendrons plus loin.

Dans un article de 1965 où fut justement inventé le terme « soliton », Zabusky et Kruskal constatèrent numériquement que les solutions de (KdV) se comportent asymptotiquement en temps grand comme des sommes de solitons découplés. Ce phénomène remarquable devint la conjecture de résolution en solitons, l'une des plus importantes en dynamique des EDP dispersives. Les solitons apparaissaient donc comme des briques élémentaires pour la description de solutions génériques.

Une réponse spectaculaire fut apportée par la méthode du scattering inverse [2], développée à partir des années 1960 par Gardner, Green, Kruskal et Miura. L'idée de cette méthode est de relier la solution u au spectre de l'opérateur de Schrödinger $L = -\Delta + u$: la connaissance des fonctions propres de L permet de retrouver u (d'où le terme « inverse »). Cela paraît circulaire (car on doit connaître u pour étudier L), mais il se trouve qu'il suffit de comprendre le comportement spatial $x \to \pm\infty$ des fonctions propres de L (c'est le « scattering »), et que ceci est possible en utilisant uniquement le fait que u soit une solution régulière et localisée de (KdV).

Non seulement la méthode du scattering inverse permit de répondre positivement – pour (KdV) – à la conjecture de résolution en solitons, mais elle permit d'obtenir beaucoup d'autres informations. Par exemple, elle fournit des solutions explicites se comportant comme des sommes de plusieurs solitons découplés « purs » : les multi-solitons. Voici la

1. En fait, elles sont même hamiltoniennes.

formule typique pour un 2-soliton :

$$6\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\left(1+e^{x-t}+e^{\sqrt{c}(x-ct)} + \left(\frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}\right)^2 e^{x-t}e^{\sqrt{c}(x-ct)}\right). \quad (5)$$

Malgré sa puissance, la méthode du scattering inverse a un champ d'action limité : elle ne s'applique qu'à des EDP intégrables, et pour des données régulières et localisées. Toute modification de la non-linéarité – sauf exception – fait disparaître l'intégrabilité. Depuis les années 1990, on a consacré beaucoup d'efforts à développer des méthodes *robustes* pour l'étude du flot des EDP dispersives (notamment au voisinage des solitons), qui pourraient s'appliquer à de nombreuses équations.

4. Stabilité des solitons

Considérons attentivement l'expression (5) du 2-soliton de (KdV). On observe que chacun des solitons conserve sa taille (1 et c) avant et après la collision qui intervient au temps $t = 0$: on parle de collision *élastique* de solitons. Mais cette forme de stabilité – au cœur de la notion de soliton – est délicate à démontrer pour des perturbations générales ou pour d'autres équations. Il faut tout d'abord comprendre l'effet de *petites* pertubations sur les solitons.

La notion naturelle de stabilité issue des systèmes dynamiques serait la suivante : $u(t,\cdot)$ et $Q(\cdot - t)$ restent proches (dans un espace fonctionnel à préciser, par exemple H^1) pour tout $t \geqslant 0$, sous réserve que cela soit vrai au temps $t = 0$. On voit aisément qu'elle doit être légèrement assouplie. En effet, si l'on considère $Q(x-t)$ et $Q_{1+\delta}(x-(1+\delta)t)$ (pour $\delta \neq 0$ petit), ces solutions de (KdV) sont très proches à l'instant initial $t = 0$, mais se découplent pour t grand. Par contre elles restent proches *à translation près*. On s'intéresse donc plutôt à la stabilité *orbitale*, c'est-à-dire la propriété de rester proche, à l'action d'un certain groupe de symétrie (spécifique à chaque équation) près.

La stabilité orbitale a été bien comprise dans les année 80, grâce aux travaux de Cazenave et Lions, et Weinstein, avec des critères suffisants (et presque nécessaires) pour la stabilité ou l'instabilité [4]. Le point clé est que le profil Q est l'*état fondamental*, une solution « minimale » des équations elliptiques (2) et (4) en un certain sens, lié à l'énergie E. Cette minimalité se cache dans la condition $Q > 0$ de l'équation (4), dont elle rend unique (à translation près) la solution.

En fait, c'est seulement maintenant que l'on peut donner une définition mathématiquement satisfaisante d'un soliton : c'est une solution onde progressive ou périodique (aux symétries de l'équation près) dont le profil est l'état fondamental.

La preuve de la stabilité orbitale combine les propriétés variationnelles de Q et le fait que le flot de (KdV) conserve l'énergie et la norme L^2. Cette analyse est robuste, elle s'applique à de nombreux cas : par exemple si la non-linéarité est généralisée à $|u|^{p-1}u$, dans (KdV) (on notera alors l'équation (gKdV)), ou dans (NLS). Il s'avère que l'un des exposants $p_c > 1$ joue un rôle particulier : les solitons sont stables pour $p < p_c$, et instables pour $p \geqslant p_c$. Cet exposant est appelé L^2-critique, car c'est celui pour lequel le changement d'échelle (une transformation du type (3)) préserve la norme L^2 ; il vaut $p_c = 5$ en dimension d'espace 1.

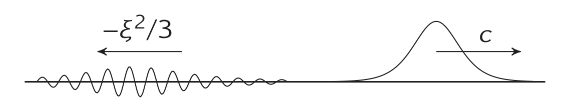
Du fait de la stabilité orbitale des solitons, une solution de (KdV) s'écrit

$$u(t,x) = Q_{c(t)}(x - y(t)) + \varepsilon(t,x)$$

où $c(t)$ reste proche de $c(0)$ et $\varepsilon(t,\cdot)$ petit, pour tout $t \geqslant 0$ sous réserve que ce soit vrai au temps initial. On peut alors s'intéresser à la stabilité asymptotique, c'est-à-dire à la convergence des paramètres $c(t)$ et $y(t)$ quand $t \to +\infty$. La conservation de la norme L^2 et de l'énergie par le flot fait que pour $\varepsilon(t,\cdot)$, on ne peut pas s'attendre à une convergence globale en espace, mais à un comportement plutôt dispersif, avec des convergences locales. On peut citer des résultats de Martel et Merle pour les équations de Korteweg-de Vries généralisées, qui s'appuient sur une propriété de rigidité : une solution qui reste au voisinage d'un soliton et qui ne « disperse » pas est exactement un soliton !

Tout ceci nécessite de comprendre de manière beaucoup plus fine la dynamique. L'idée est que la dispersion et le soliton se découplent : on en a un aperçu pour (KdV) en observant que les solitons se déplacent vers la droite (vitesse $c > 0$), alors que les ondes planes linéaires vont vers la gauche (vitesse $-\xi^2/3 < 0$).

Le soliton et les ondes planes se déplacent dans des directions opposées



Cette heuristique est difficile à justifier directement pour des EDP non linéaires. Au centre de l'analyse se trouvent des formules de (presque) monotonie sur des quantités localisées au voisinage du soliton. Rigidité, monotonie... au voisinage de notre soliton, les flots dispersifs ont des propriétés qui rappellent celles des équations de type parabolique ou elliptique.

Une kyrielle de résultats est issue de ces méthodes. Tout d'abord, on peut construire des multi-solitons, à la fois dans les cas stables et instables. Ensuite, pour les équations L^2-sous-critiques et sous réserve de faible interaction, ces multi-solitons sont stables dans H^1 (par exemple, pour (gKdV), à l'instant initial, les solitons doivent être ordonnés en fonction de leur vitesse de façon à éviter les collisions dans le futur).

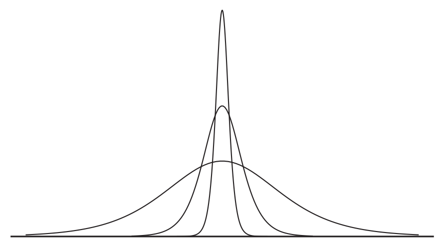
Dans certains cas, on est également capable d'étudier minutieusement la collision de deux solitons dans un cadre nonintégrable (par exemple pour l'équation (gKdV) avec $p = 4$) : la collision n'est plus élastique (mais presque), et on peut mesurer son défaut d'élasticité. On peut également construire des « multi-solitons » exceptionnels, dont la distance entre deux solitons ne croît que logarithmiquement en temps (au lieu de la croissance linéaire habituelle).

5. Des solutions explosives !

On a mentionné plus haut la spécificité des équations L^2-critiques, que nous noterons (cNLS) et (cKdV). Pour celles-ci on s'attend à ce qu'existent des solutions *explosives*, c'est-à-dire pour lesquelles les résultats de construction de solutions (qui généralisent le théorème de Cauchy-Lipshitz pour les EDP) échouent à donner des solutions définies pour tous temps positifs. C'est le cas lorsqu'une certaine quantité, appelée taux d'explosion – ici c'est simplement $\|u(t)\|_{H^1}$ – tend vers l'infini en un temps fini, dit *temps d'explosion*. Un argument simple montre qu'il existe bien des solutions explosives pour (cNLS), mais il ne donne aucune indication sur le mécanisme de l'explosion. Les travaux de Martel, Merle et Raphaël ont justement permis de comprendre en détail la dynamique explosive au voisinage des solitons.

Ils ont mis en évidence l'existence d'un phénomène d'explosion qui se produit par concentration d'un soliton : autrement dit, une solution de la forme $Q_{c(t)}(\cdot - y(t)) + \varepsilon(t,\cdot)$ où $\varepsilon(t,\cdot)$ reste petit et $c(t) \to +\infty$ quand t tend vers le temps d'explosion.

Profils de Q_c pour différentes valeurs de c. Plus c est grand, plus le profil est concentré



Cette explosion est « stable » car les données initiales pour lesquelles elle a lieu forment un ouvert non vide (d'une topologie adaptée). De plus, dans ce régime, le taux d'explosion est universel (essentiellement indépendant de la donnée initiale), et le profil aussi : c'est bien sûr le soliton ! (On a même mieux : le reste $\varepsilon(t,\cdot)$ converge). Pour (cNLS), c'est la fameuse explosion en « $\ln\ln$ » (car le taux d'explosion est une correction doublement logarithmique du taux d'explosion « naïf »). Pour (cKdV), on a même une *classification* des solutions qui restent pour tout temps dans un voisinage tubulaire de la famille des solitons [1].

On a aussi construit – toujours par concentration d'un soliton – des solutions explosives dites « exotiques » car leur taux d'explosion est très différent du taux « stable ».

Pour les équations L^2-surcritiques, la nonlinéarité est moralement plus forte, et on s'attendrait à ce que la dynamique explosive soit plus simple. Il n'en est rien ! En effet, des propriétés algébriques de l'équation L^2-critique – essentielles à l'analyse – sont détruites dans les cas L^2-surcritiques.

Deux types de résultats subsistent cependant. L'explosion « $\ln\ln$ » de (cNLS) est un régime tellement stable que l'analyse reste valable dans une large mesure pour les équations (NLS) légèrement L^2-surcritiques. Et pour des non-linéarités très surcritiques, on arrive à construire une famille de solutions explosives, toujours basées sur la concentration d'un soliton.

6. Et ensuite ?

Les méthodes modernes d'étude des solitons s'adaptent à des contextes très variés d'EDP dispersives, avec des résultats qui dépendent fortement des propriétés algébriques spécifiques à chaque équation.

Néanmoins, en présence de solitons, on a du mal à quitter les résultats perturbatifs. Malgré des avancées remarquables pour les équations de type ondes, la conjecture de résolution en solitons reste difficile d'accès hors cas intégrables. Une des raisons est que cette conjecture parle des solutions *génériques*, terme auquel il est délicat de donner un sens rigoureux ; bien souvent, d'autres objets non linéaires (et exceptionnels) existent !

Beaucoup de choses restent donc à comprendre des équations L^2-surcritiques qui rassemblent des exemples très importants, comme les équations de (NLS) cubique 3D ou de Navier-Stokes en 3D. Les solitons et autres objets non linéaires recèlent encore bien des mystères et des clés de la dynamique non linéaire !

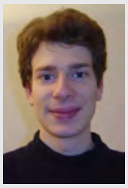
Références

[1] Y. Martel et al. « Near soliton dynamics and singularity formation for L^2 critical problems ». *Russian Mathematical Surveys* **69**, nº 2 (2014), p. 77–106.

[2] R. M. Miura. « The Korteweg-de Vries equation: A survey of results ». *SIAM review* **18**, nº 3 (1975), p. 412–459.

[3] D. Olivier. *Worlds of flow*. 2005.

[4] T. Tao. « Why are solitons stable? » *Bulletin of the American Mathematical Society* **46**, nº 1 (2009), p. 1–33.



Raphaël Côte

Université de Strasbourg, CNRS, IRMA UMR 7501

cote@math.unistra.fr

Raphaël Côte est professeur à l'Institut de Recherche Mathématique Avancée de l'université de Strasbourg. Ses travaux portent sur l'analyse des équations aux dérivées partielles non linéaires.

Réflexions sur l'écriture et le style en mathématique

• Y. André

Ce texte est la transposition d'un exposé de l'auteur au séminaire MaMuPhi de l'ircam où dialoguent mathématiciens, musiciens et philosophes. Ni glose sur les théories du style en mathématique, ni prolégomène à une stylistique future, ni galerie de portraits d'auteurs, il ne s'agit pas d'une étude mais d'un essai (qui comme tel ne prétend à aucune neutralité) où l'on essaie de dégager les *enjeux*, essentiels plutôt que décoratifs, des questions d'écriture et de style dans la mathématique d'aujourd'hui.

Prologue

Permettez-moi de commencer par le souvenir ancien d'une rencontre mathématique-philosophie à l'Institut Poincaré. Au cours de la réception de clôture, entre aimables potins et gazouillis mondains, je croise une élégante inconnue : « ah », me dit-elle, « vous êtes mathématicien ! Quels sont vos grands auteurs ? »

J'ai oublié ma réponse, mais je me souviens d'avoir été frappé par l'étrangeté de la question. Une mathématicienne se serait enquise : « Quel est votre domaine ? Sur quoi travaillez-vous ? ». A. Weil, fidèle à sa légende, aurait peut-être demandé : « Quel est votre grand théorème ? » – et se serait amusé du bredouillis qu'une question si intimidante n'aurait manqué de susciter. Mais « vos grands auteurs ? »...

C'est moins l'étrangeté de la question, d'ailleurs, que l'étrangeté de cette étrangeté qui n'a cessé de m'interpeller : pourquoi semblait-il si saugrenu de s'enquérir des grands auteurs d'un mathématicien ? N'y aurait-il pas, n'y aurait-il plus, de grands auteurs ? La mathématique aurait-elle une littérature sans Auteur ?

Un carillon de questions sur l'écriture et le style mathématiques s'est alors mis en branle dans ma tête, dont voici le lointain écho.

Vicissitudes de la notion de style mathématique

Il y a fort longtemps que l'on parle de style en mathématique. Leibniz évoquait celui d'Archimède pour le comparer au sien ; il s'agissait là sans doute de style d'auteur, de « patte » ou de « manière » comme on dit en histoire de l'art. Dans son *Aperçu historique* de 1837, Chasles élargit la notion – le style est conçu comme esprit d'une méthode – et souligne que le style a une influence puissante sur le développement des sciences.

Début XX^{e}, nouvelle inflexion : on parle de style mathématique dans le contexte d'une histoire culturelle comparée. C'est là que les choses se gâtent ! Le style mathématique est alors enrôlé dans la confrontation idéologique franco-allemande, notamment par l'historien des sciences P. Duhem (pour qui l'esprit de géométrie est allemand, l'esprit de finesse français), puis par le mathématicien L. Bieberbach (pour qui c'est plutôt l'inverse), lequel va jusqu'à fonder – dernier et sinistre avatar – une stylistique mathématique sur des élucubrations raciales.

Si je mentionne cela, c'est qu'avant de réfléchir sur le style, il est bon de savoir dans quels marécages se sont fourvoyées de telles réflexions, touchant un domaine apparemment aussi « éthéré » que les mathématiques [1].

De manière générale, comme l'a souligné J. Gayon [10], la stylistique mathématique se partage, un peu comme la stylistique littéraire, entre une tendance culturelle/locale et une tendance caractérisante/globale. Les tenants de la première, souvent descriptive, font la part belle aux déterminants sociologiques et aux pratiques locales, tandis que ceux de la seconde tâchent de cerner la notion de style par voie interne, à l'aide d'entités épistémiques variées (théories, objets etc.).

Nous ne suivrons ni les uns ni les autres. En effet, les premiers, subordonnant le style à des cultures, pratiques et méthodes locales (et à leurs transferts), nous entraîneraient dans le labyrinthe d'une érudition de détail où se perdrait bien vite le sens de nos questions initiales (à propos de « grands auteurs »).

Les seconds (G.-G. Granger, I. Hacking...) nous proposeraient des définitions du style dépendant de lourds présupposés épistémologiques, et dont la formulation technique ne serait compréhensible qu'à travers les exemples proposés, hélas toujours puisés dans la mathématique ancienne [2]. Or ce sont les *enjeux du style dans la mathématique vivante* que nous visons.

P. Mancosu, auteur d'une fort utile recension des occurrences de la notion de style mathématique [12], plaide pour une voie médiane entre ces deux tendances.

Une telle voie avait déjà été tracée dès 1935 par C. Chevalley dans un remarquable article intitulé *Variations du style mathématique* [5]. Chevalley y entend « style » au sens de manière d'écrire, ce qui fournit un « dénominateur commun » simple et pertinent entre style d'auteur, style d'école et style d'époque. Plutôt que de chercher à cerner le statut du style au moyen d'une définition plus précise [3], c'est la variation du style qui retient toute son attention, selon une approche « différentielle » : il pose d'emblée que si chaque auteur a sans doute un style propre,

> on peut apercevoir à chaque époque une tendance générale assez bien reconnaissable. Ce style subit, de temps à autre, sous l'influence de personnalités mathématiques puissantes, des révolutions qui infléchissent l'écriture, et donc la pensée, pour les périodes qui suivent.

Il détaille deux exemples : l'émergence du style des epsilons issu de l'école d'analyse de Weierstrass, puis le style axiomatique initié par Dedekind et Hilbert. Pour Chevalley, cofondateur du groupe Bourbaki né cette même année 1935, le style axiomatique qui met au centre la notion de structure n'est donc qu'un style parmi d'autres et non l'horizon indépassable de l'écriture mathématique [4].

Pour la période qui va de Hilbert à la fin du siècle, cette médiane entre les deux tendances de la stylistique mathématique est prolongée dans l'ouvrage de F. Patras *La pensée mathématique contemporaine*, dont le premier chapitre s'intitule *Le style en mathématique* [13] [5].

Chevalley sera notre premier fil conducteur : c'est de style comme *manière d'écrire* que nous parlerons (en un sens sans doute plus artisanal et individuel que lui), sans nous soucier davantage de le capter dans une définition.

Texte et écriture mathématiques

Qu'est-ce que l'écriture mathématique ?

Le modèle est et reste celui des *Éléments* d'Euclide. Il n'y a guère qu'en mathématique que la pensée vivante se moule encore dans un canon datant de 2 300 ans (pas seulement une tradition, mais

1. Certes, les considérations de styles mathématiques nationaux n'ont pas nécessairement ces connotations et des historiens des mathématiques sérieux s'y sont risqués, bravant le spectre de l'essentialisme culturel ; mais n'est-il pas plus précis et moins glissant de parler d'« école » ou de « tradition » plutôt que de style dans ce contexte ?

2. L'inépuisable Descartes est leur chouchou. Il semble que leurs rencontres avec des mathématiciens en chair et en os, et pas seulement en os, n'aient guère lieu qu'au hasard de cocktails comme celui de l'Institut Poincaré !

3. Ce qui lui vaut d'être regardé comme « naïf » par ses commentateurs (Mancosu, Rabouin). Naïf est l'adjectif dont les épistémologues usent volontiers, sans le définir, pour qualifier, ou disqualifier, les discours que tiennent les mathématiciens sur leur science.

4. Nous renvoyons le lecteur à l'analyse très fouillée que D. Rabouin a consacrée à ce texte [14], qui dégage les enjeux théoriques d'une définition à la Chevalley du style, susceptible de traverser différentes cultures et d'intégrer des pratiques et méthodes très diverses, tout en ménageant un écart entre style et changement conceptuel. Rabouin suggère par ailleurs que Chevalley aurait choisi malicieusement ces trois grands auteurs allemands (Weierstrass, Dedekind et Hilbert) dans le contexte polémique des libelles de Bieberbach parus un an plus tôt (1934), parce que ce sont ceux qui cadrent le plus mal avec le prétendu caractère essentiellement intuitif et concret des mathématiques allemandes que prônait Bieberbach.

5. Cette référence manque dans la liste, postérieure et prétendument exhaustive, de Mancosu. Dans une veine proche, on peut citer [18].

un canon d'écriture). Cette extraordinaire *fidélité* mérite d'être soulignée, avant d'en examiner les fluctuations. Fidélité conjointe à l'idéal et à l'écriture : *idéal de raison*, que porte un discours ordonné en une chaîne sans défaut de raisons, et structuré en définitions, théorèmes, démonstrations etc. ; et *idéal de dialogue*, sinon avec les dieux tutélaires, du moins avec un lecteur-interlocuteur constamment invité à participer aux constructions et aux preuves (« supposons que, considérons ceci... »), et auquel on présente des « propositions ». Ce double idéal meut tous les mathématiciens que je connais, tacitement et spontanément, comme une règle immanente.

Ce n'est pas dire que l'écriture mathématique soit figée depuis l'antiquité, tant s'en faut. Le principal changement est l'introduction du langage symbolique. Alors que la pensée démonstrative de l'antiquité grecque s'accommodait d'un discours en langue courante complété de figures, la pensée algorithmique arabe médiévale a créé l'algèbre qui a eu besoin d'une langue symbolique propre, souvent improprement traitée de « formalisme » (il n'est pas question ici de retracer, même brièvement, le développement touffu de cette langue symbolique, dont Viète et Leibniz furent des acteurs majeurs [6]).

Ainsi, aujourd'hui, un texte mathématique est un texte mixte écrit dans ces deux langues : la langue courante pour les énoncés et les raisonnements, la langue symbolique pour les formules et les calculs ; s'y adjoignent figures et diagrammes de natures très diverses, bien loin souvent des supports visuels d'Euclide et pouvant faire partie intégrante de l'écriture symbolique. Ce caractère composite se révèle plus encore, par dissociation, dans les discussions entre mathématiciens au tableau : énoncés et raisonnements sont alors parlés, le tableau couvert de langue symbolique et de figures, et les calculs faits en silence ou ânonnés, avec force gestes, indispensables pour en indiquer la marche.

Où situer alors le texte mathématique parmi les quatre genres traditionnels du discours : narration, description, exposition et argumentation ?

Sans doute convient-il de le rattacher d'abord à celui de l'exposition, même si la part démonstrative le lie aussi bien sûr à celui de l'argumentation : on *expose* une théorie, ou la preuve d'un théorème.

La composition du texte mathématique, son organisation, répondent à une double exigence de rigueur logique et de clarté d'exposition. Chaque texte mathématique contient en effet un sous-texte constitué des énoncés principaux (théorèmes ou propositions), flanqués des définitions et hypothèses qui en délimitent le cadre. Ce sous-texte forme un tout, un parcours, qu'on peut lire comme une trame narrative. Chacun de ces énoncés est normalement séparé du suivant par sa démonstration, qui se présente idéalement comme un enchaînement linéaire d'arguments sans rupture ni boucle, tendu par une rhétorique minimale convenue (les « donc, par ailleurs, de plus, en conclusion... ») ; mais qui peut aussi, dans les situations complexes, revêtir la forme d'un écheveau hypertextuel rebelle au séquençage en chaînes courtes d'arguments.

La clarté d'exposition se joue beaucoup dans la fabrication de cette trame (c'est-à dire le choix, la formulation et la disposition des énoncés principaux), donnant à voir le dispositif conceptuel et les stratégies à l'œuvre : il s'agit de permettre au lecteur de surplomber les lignes de crête du parcours démonstratif, de saisir les points précis où les idées clé s'éploient, voire d'imaginer des chemins de traverse. Privilégie-t-on la transmission des idées ? Les énoncés seront alors motivés, annoncés, commentés et illustrés aux charnières du texte. Privilégie-t-on la rigueur du développement logique ? Toute heuristique devient à la limite superflue, les exemples bannis comme arbitraires ou redondants, et le résultat relégué, logiquement, à la fin du développement (ce qui fait qu'un texte comme les *Éléments* de Bourbaki n'est guère intelligible que si l'on en connaît d'avance la teneur).

L'écriture mathématique est donc *mixte*, structurellement et à plusieurs titres, et une grande part de l'effort d'écriture porte sur la recherche d'un équilibre, d'une conciliation entre différents registres de lisibilité (au niveau de ce que j'ai appelé le sous-texte ou trame, et au niveau imbriqué des « liturgies démonstratives »), ce qui requiert quelques procédés rhétoriques (phrasé, scansion, respirations et surprises) et mnémotechniques (notation et terminologie suggestives – « fonctorielles par rapport aux idées », disait S. Lang –, renvois aisés, récapitulations et redondances). Il existe bien des essais et même des livres entiers sur les « bonnes manières d'écrire les mathématiques ». Comme tous les manuels de bonnes manières d'une époque, ils se ressemblent tous ; leurs conseils illustrent en termes pratiques extrêmement concrets le principe suivant : clarté et élégance de la pensée vont de pair avec celles de l'écriture qui la traduit.

6. Voir par exemple [7].

L'auteur et son style

Il ressort de ce qui précède qu'un texte mathématique – texte d'exposition si codifié et hétérogène avec sa langue symbolique – est tout autre chose qu'un texte littéraire, surtout de fiction. J. et M. Dubucs ont mis en avant une autre différence dans leur essai *La couleur des preuves* [8] [7] :

> La magie de la fiction narrative n'opère que si le lecteur feint de croire ce que l'auteur feint d'asserter : il n'y a pas de « plaisir du texte » pour les mauvaises têtes. [...] Le ressort du texte mathématique est très exactement contraire : son lecteur idéal est le lecteur vicieux et malveillant qui résiste aux suggestions de l'auteur en essayant systématiquement d'envisager d'autres mondes possibles que ceux qu'il avait en tête.

Enfin, si en un certain sens « tout texte est un intertexte, [...] un tissu nouveau de citations révolues » [3], ou comme disait plus joliment Montaigne, si « nous ne faisons que nous entregloser », le rapport qu'entretiennent les textes mathématiques entre eux est néanmoins tout autre que celui qu'entretiennent les textes de fiction, avec le flux de réélaborations et réemplois des résultats acquis caractéristique du développement mathématique ; j'y reviendrai.

Cette opposition posée, qu'en est-il du statut des auteurs – littérature et mathématique face-à-face ? M. Foucault, dans une conférence célèbre de 1969 intitulée *Qu'est-ce qu'un auteur ?* [9] [8] note qu'un

> texte anonyme que l'on lit dans la rue aura un rédacteur, pas un auteur. [...] Le fait, pour un discours, d'avoir un nom d'auteur [...] indique que ce discours n'est pas une parole quotidienne, [...] qui flotte et passe, une parole immédiatement consommable, mais qu'il s'agit d'une parole qui doit être reçue sur un certain mode et qui doit, dans une culture donnée, recevoir un certain statut.

Foucault relie auteur et œuvre, tout en soulignant que « le mot "œuvre" et l'unité qu'il désigne sont probablement aussi problématiques que l'individualité de l'auteur », de même que la notion d'écriture qui les lie et qui « bloque la disparition de l'auteur » dans la critique de l'époque. Dans le cas de la mathématique qu'il cite, une œuvre est une théorie ou un théorème, et non pas un texte. Ce sont donc les théories et théorèmes qui ont noms d'auteurs, et non les textes ; de sorte que « la fonction d'auteur s'efface, le nom de l'inventeur ne servant tout au plus qu'à baptiser un théorème », alors que « la fonction d'auteur joue à plein de nos jours pour les œuvres littéraires ». La parole mathématique contrainte à l'anonymat ?

Cela sonne juste... et pourtant, de quoi Euclide est-il l'auteur ? D'un texte, les *Éléments* (c'est d'ailleurs ainsi qu'il était appelé dans l'Antiquité : l'Auteur des Éléments [9]). De même pour Bourbaki, auteur d'*Éléments de mathématique*. Et l'on pourrait leur adjoindre les auteurs de beaucoup de textes de synthèse fameux. En effet, même si ceux-ci se considèrent d'abord comme compositeurs de mathématiques pour qui la rédaction d'ouvrages d'exposition n'est qu'une activité secondaire au regard de la recherche, cette position ne reflète pas forcément ce que retient la mémoire collective, comme le souligne la remarque ironique de G.-C. Rota [15] : « you are most likely to be remembered for your expository work », – en raflant, explique-t-il, la moisson du travail de beaucoup d'autres qui resteront dans l'obscurité (ce qui est éminemment le cas d'Euclide et de Bourbaki).

L'auteur mathématique ne se laisse donc pas aisément cerner. Voyons ce qu'il en est de son aspect le plus individuel, son style. L'opposition traditionnelle entre style et rhétorique est ici particulièrement aigüe, puisque les contraintes de rigueur et d'intelligibilité évoquées ci-dessus requièrent souvent la maîtrise rhétorique au détriment du style.

Cherchant une *résonance* du côté de la littérature, ce n'est pas vers les historiens ni les théori-

7. Cette intéressante notion de « coloration » d'un discours, due à G. Frege, englobe les éléments susceptibles d'affecter la subjectivité du lecteur sans affecter la valeur de vérité des énoncés du discours.

8. Pour une passionnante et très riche analyse du statut de l'auteur littéraire, partant du texte de Foucault, voir [6].

9. Les quelques éléments biographiques connus le concernant datent de Proclus sept siècles plus tard, et on a soupçonné qu'il était un auteur collectif.

10. Pour un aperçu de leurs débats, voir [4]. Le regain de la stylistique (dans l'ensemble des arts), qui était devenue suspecte dans les années 70, est largement liée à la réception de l'esthétique américaine, particulièrement celle de N. Goodman qui présente le style comme « une caractéristique complexe qui fait en quelque sorte fonction de signature individuelle ou collective » [11]. Pour une analyse comparée des concepts stylistiques en arts et en sciences, et une critique de la dérivation des seconds à partir des premiers, voir [17].

ciens du style que je me tournerai [10], mais vers un texte *vibrant* : l'éloge du style le plus romantique que je connaisse, dû, ô surprise, au futur auteur de *La mort de l'auteur* qui a tant contribué au discrédit de la stylistique à l'aube du post-structuralisme ; écoutons R. Barthes [1] :

> Des images, un débit, un lexique naissent du corps et du passé de l'écrivain et deviennent peu à peu les automatismes mêmes de son art. Ainsi sous le nom de style, se forme un langage autarcique qui ne plonge que dans la mythologie personnelle et secrète de l'auteur, dans cette hypophysique de la parole, où se forme le premier couple des mots et des choses, où s'installent une fois pour toutes les grands thèmes verbaux de son existence. Le style [...] est la « chose » de l'écrivain, sa splendeur et sa prison. [...] Il est la voix décorative d'une chair inconnue et secrète ; [...] le terme d'une métamorphose aveugle et obstinée, partie d'un infra-langage qui s'élabore à la limite de la chair et du monde. Le style est proprement un phénomène d'ordre germinatif. [...] Par son origine biologique, le style se situe hors de l'art, c'est-à-dire hors du pacte qui lie l'écrivain à la société. On peut donc imaginer des auteurs qui préfèrent la sécurité de l'art à la solitude du style [11].

On dira que je m'égare, qu'une telle conception individuelle du style n'a pas sa place dans un texte mathématique. De fait, les contraintes de l'écriture mathématique corsettent très sévèrement le style individuel ; de manière plus draconienne encore dans le canon qui s'est imposé, au prétexte de rigueur, sous l'influence de l'écriture de Bourbaki (et avant lui Gauss, Dedekind et d'autres). C'est un *genre institué qui formate le texte*, et bannit désormais la prose coulante d'un Cauchy tout comme le laconisme visionnaire d'un Riemann ou le jaillissement disert et imagé d'un Poincaré. Double bannissement : non seulement on ne peut plus écrire comme ces grands auteurs, mais la plupart des mathématiciens d'aujourd'hui ne peuvent plus les lire sans truchement et ne les citent presque jamais « dans le texte ».

Cependant, si lisse que soit le texte de Bourbaki lui-même, il est le fruit d'âpres et longs débats, longtemps tenus secrets, entre fortes personnalités mathématiques ; « la mythologie personnelle et secrète de l'auteur, la métamorphose obstinée, le phénomène d'ordre germinatif » dont parle Barthes ne sont donc point hors de place, même si Bourbaki a pu préférer en fin de compte « la sécurité de l'art à la solitude du style ».

Au demeurant, un mathématicien n'est pas qu'auteur, il expose souvent oralement (et gestuellement), et c'est sur le théâtre de ses interventions que son style individuel s'exprime le plus librement. Ici l'analogie avec le musicien est frappante : le mathématicien d'aujourd'hui est *auteur-interprète*, son style est (en principe) indissociablement celui d'un auteur et d'un interprète. La part des exposés oraux dans la diffusion des progrès mathématiques ne cesse d'ailleurs de croître pour devenir essentielle. Ce n'est pas qu'on produise, corrélativement, moins de textes, c'est plutôt qu'on les lit moins, leur fonction de référence et de garantie demeurant intacte (on ne lit guère que ce qui concerne directement son propre travail, tandis qu'on aiguise sa curiosité et s'informe des idées nouvelles en écoutant) ; mais si le *plaisir du texte* [12] s'éteint même pour le lecteur idéal « vicieux et malveillant » dont parlent J. et M. Dubucs, s'il se mue en déplaisir au point que les éditeurs désespèrent de trouver des lecteurs-arbitres corvéables, c'est tout le système de publication qui se trouve menacé. N'est-ce pas ce déplaisir que couvre en réalité le manque de temps souvent allégué ? On trouve encore du temps, c'est heureux, pour le plaisir d'écouter de beaux exposés ; mais si le souci du style finissait par s'éteindre à son tour chez les orateurs...

Le degré zéro de l'écriture mathématique

« La forme coûte cher », disait P. Valéry cité par Barthes [1].

Elle coûtait très cher au groupe Bourbaki qui ne répugnait pas à remettre l'ouvrage cent fois sur le

11. Barthes exemplifie : « le type même de l'écrivain sans style, c'est Gide, dont la manière artisanale exploite le plaisir moderne d'un certain éthos classique, tout comme Saint-Saëns a refait du Bach ou Poulenc du Schubert. À l'opposé, la poésie moderne "celle d'un Hugo, d'un Rimbaud ou d'un Char" est saturée de style et n'est art que par référence à une intention de Poésie. »

12. C'est le titre même d'un autre livre de Barthes [2], dans lequel il écrit : « Comme institution, l'auteur est mort. [...] Mais dans le texte, d'une certaine façon, je désire l'auteur : j'ai besoin de sa figure (qui n'est ni sa représentation, ni sa projection), comme il a besoin de la mienne (sauf à "babiller"). »

métier jusqu'à obtenir la perfection formelle souhaitée. Elle coûte cher encore aux adeptes de la « composition sur plusieurs plans » préconisée par Weil : « il faut s'efforcer d'écrire [...] de telle sorte que derrière le sujet immédiat l'esprit du lecteur soit conduit vers un arrière-plan puis vers d'autres perspectives encore plus lointaines » [16, p.46].

Or si l'on consulte un site comme *ArXiv* où sont déposés la plupart des textes mathématiques d'aujourd'hui avant publication, force est de constater que les standards sont désormais loin de ceux de Bourbaki ou de grands auteurs comme Weil (et bien d'autres ; les quelques noms qui émaillent cet exposé ne composent nullement, on l'aura compris, une réponse à la question-titre [13]). Ce n'est certes qu'une impression générale, qui n'exclut pas du tout l'existence de grands textes contemporains. Mais la forme semble coûter de moins en moins cher, et l'on peut se demander si cette dévaluation présage l'abandon du primat traditionnel de l'exposition sur l'argumentation (et donc un glissement du discours mathématique entre les quatre genres traditionnels de discours (§2)).

La seconde impression, un peu déprimante, est celle d'une uniformité de style et de ton : terne, pragmatique, véloce sans être léger, abrégeant préliminaires et fondements et taisant l'arrière-plan conceptuel de l'aventure de la découverte pour aller au plus pressé : le *butin* des résultats [14].

La pression du temps et l'injonction de productivité s'y font sentir, mais ces raisons déjà anciennes ne sauraient pleinement rendre compte de l'impression de *grisaille* de cette littérature d'aujourd'hui (Weil raconte que dans les années 1920 l'idéologie du « publish or perish » avait déjà envahi les universités allemandes et que le cercle de Francfort autour de Dehn et Siegel tentait d'y résister en s'abstenant de publier [16, p.53]).

Un indice se trouve peut-être du côté des manuels de « bonnes manières d'écrire ». J'ai dit trop vite qu'ils se ressemblent tous ; une mutation point dans certains cours d'écriture pour étudiants mathématiciens, aux consignes caricaturales (que je traduis en renonçant à citer) : éviter la prose complexe, faire des phrases les plus courtes possibles, au présent de l'indicatif, réduire son vocabulaire etc. La visée de telles consignes est sans équivoque : comme il est pesamment répété, il s'agit d'accrocher le chaland-lecteur, et d'éviter que ce lecteur forcément pressé, impatient, réfractaire à tout effort, ne fuie. On est en plein dans l'idéologie de l'audimat : il ne s'agit plus tant de gonfler le nombre des publications que celui des citations. Mais n'est-il pas paradoxal que la pêche au lecteur conduise à l'uniformisation plutôt qu'à la distinction, au nivellement du style plutôt qu'à son individuation exacerbée ?

En matière de forme et de style, « on n'ose plus ; et *quand on n'ose plus, on oublie comment on pourrait faire* » (selon le mot de V. Horowitz à propos des interprètes de musique romantique plus soucieux de rigueur littérale que d'esprit romantique).

Du côté littéraire, il est intéressant de mettre en regard la perspective de Barthes dans son essai *Le degré zéro de l'écriture*. Pour lui, dans la littérature classique,

> la forme coûtait à peu près le prix de la pensée ; on veillait sans doute à son économie, à son euphémie, mais la forme coûtait d'autant moins que l'écrivain usait d'un instrument déjà formé, dont les mécanismes se transmettaient intacts sans aucune obsession de nouveauté ; la forme n'était pas l'objet d'une propriété ; l'universalité du langage classique provenait de ce que le langage était un bien communal, et que seule la pensée était frappée d'altérité.

Puis un doute a surgi.

> L'écriture classique a éclaté et la littérature entière, de Flaubert à nos jours, est devenue une problématique du langage. [...] Mallarmé enfin, a couronné cette construction de la Littérature-objet, par l'acte ultime de toutes les objectivations, le meurtre. [...] L'écriture a ainsi traversé tous les états d'une solidification progressive : d'abord objet d'un regard, puis d'un faire, et enfin d'un meurtre, elle atteint aujourd'hui un dernier avatar, l'absence : dans ces écritures neutres, appelées ici « le degré zéro de l'écriture », on peut facilement discerner le mouvement même d'une négation, et l'impuissance à l'accomplir

13. Encore que dans le genre (à inventer) de l'anthologie mathématique, Euclide, Descartes, Leibniz, Cauchy, Gauss, Riemann, Dedekind, Poincaré, Weil et Bourbaki, évoqués ci-dessus, formeraient déjà un somptueux florilège d'*écrivains*-mathématiciens du passé (auxquels je me suis volontairement limité).

14. Je laisse à de plus versés que moi en psychanalyse le soin d'interpréter cette obsession des « (dramatically) shorter proofs » et ce dédain des préliminaires sous l'angle de la comparaison grothendieckienne entre faire des maths et faire l'amour...

> dans une durée, comme si la Littérature, tendant depuis un siècle à transmuer sa surface dans une forme sans hérédité, ne trouvait plus de pureté que dans l'absence de tout signe, proposant enfin l'accomplissement de ce rêve orphéen :
>
> un écrivain sans Littérature. L'écriture blanche. [15]

En mathématique, de nos jours, on aurait tout autre chose :

> une littérature sans Auteur. L'écriture grise ?

Cette opposition de constat, comment la comprendre ?

Je l'éclairerai, pour finir, en la rapportant à la question du nihilisme. Comment ne pas discerner en effet dans « l'absence, la négation, l'impuissance, la forme sans hérédité, l'écriture blanche » dont parle Barthes la marque du nihilisme en littérature ? Cette marque peut être plus discrète que celle du nihilisme triomphant qui s'affiche dans les arts plastiques, mais l'écrivain sans Littérature répond à l'artiste sans Art.

Le nihilisme s'enracine dans la conviction qu'il est impossible d'écrire des œuvres (ou des chefs-d'œuvre) comme dans le passé : écrasé par le *poids* de la tradition, le nihiliste est envahi par le sentiment qu'il est vain de poursuivre, « à quoi bon ? » ; et lorsqu'il devient affirmatif, c'est, comme disait Nietzsche, pour « vouloir le rien plutôt que ne rien vouloir » [16] .

Rien de tel en mathématique, avec sa « littérature sans Auteur » : contrairement au cas des lettres, des arts et peut-être de la philosophie, et en dépit d'une continuelle complexification, *le passé* des mathématiques *ne pèse pas* sur le mathématicien d'aujourd'hui (bien loin de l'écraser). Cette étonnante apesanteur subjective est due au mode d'appropriation très particulier des œuvres du passé : pas de mise sur piédestal ou à distance respectueuse, pas de fétichisme du texte ni souci d'orthodoxie, mais un côtoiement familier, une fidélité infidèle où théories et théorèmes sont librement repris, généralisés, réinterprétés, transmués, appliqués à d'autres théorèmes et intégrés à d'autres théories.

En art, une tendance, un manifeste succède à l'autre, déclarant l'autre dépassé. En mathématique, l'adjectif dépassé n'est pas d'usage puisque *rien* n'est jamais dépassé (les théorèmes d'Euclide et surtout sa conception de ce qu'est une démonstration valent toujours), et que *tout* est tout de suite dépassé, dans le flux ordinaire du développement mathématique. L'effacement de l'Auteur dans ce flux, l'anonymat de sa parole, son amuïssement, ne sont en rien signes de nihilisme [17].

Ce n'est pas dire que le monde mathématique soit imperméable au nihilisme : l'emprise de l'audimat évoquée ci-dessus en est sans doute une marque. Chacun, au demeurant, peut être la proie de la tentation nihiliste (on sait qu'A. Grothendieck, âgé, a combattu âprement cette tentation en mobilisant toute une mytho-théologie personnelle), et maint mathématicien se contente d'esquiver le lancinant « à quoi bon ? » à l'aide d'un « parce que ça m'amuse » un peu court, entretenant l'idée d'un jeu sans enjeu.

On peut d'ailleurs imaginer que la mathématique se mette à stagner, que ses fondements vacillent, qu'elle s'étiole en une discipline de service, qu'elle sombre dans l'insignifiance d'une technique sans âme ou dans l'éparpillement d'une excessive spécialisation ; voire qu'elle disparaisse tout à fait, comme elle l'a fait dans nos contrées pendant des siècles, tandis qu'elle prospérait ailleurs.

Mais une mathématique mue par un « vouloir le rien plutôt que ne rien vouloir », cela n'est pas imaginable.

Références

[1] R. Barthes. *Le Degré zéro de l'écriture*. Paris, Seuil, 1953.

[2] R. Barthes. *Le plaisir du texte*. Paris, Seuil, 1973.

[3] R. Barthes. *Texte (théorie du)*. in « *Encyclopedia universalis* ». 1974.

15. Barthes exemplifie : « celle de Camus, celle de Blanchot ou de Cayrol par exemple, ou l'écriture parlée de Queneau ».
16. « lieber will noch der Mensch das Nichts wollen, als nicht wollen », dernière phrase de la *Généalogie de la Morale*.
17. Si l'on voulait mettre en regard du moment-Mallarmé, dans la solidification de l'écriture dont parle Barthes, le moment-Bourbaki en mathématique, c'est d'un gel qu'il s'agirait dans ce cas (l'institution du genre figé qui formate désormais les textes) et non d'un meurtre. On oublie d'ailleurs que Chevalley laissait entendre [5], au berceau de Bourbaki, que le nouveau canon n'était nullement indépassable...

[4] P. Cahné et G. Molinié. « Qu'est-ce que le style ». *Colloque à la Sorbonne, PUF, Paris* (1994).

[5] C. Chevalley. « Variations du style mathématique ». *Revue de Métaphysique et de Morale* **42**, nº 3 (1935), p. 375–384.

[6] A. Compagnon. « Qu'est-ce qu'un auteur ? » *cours en ligne* (2007). url : `http://www.fabula.org/compagnon/auteur1.php`.

[7] A. Dahan et J. Peiffer. *Une histoire des mathématiques : routes et dédales*. Paris, Seuil, 1986.

[8] J. Dubucs et M. Dubucs. « Mathématiques: La couleur des preuves ». In : Rhétoriques de la Science. V. de Coorebyter, 1994, p. 231–249.

[9] M. Foucault. « Qu'est-ce qu'un auteur? » In : vol. 1. Dits et Écrits. Gallimard, 1969.

[10] J. Gayon. « De l'usage de la notion de style en histoire des sciences ». In : La Rhétorique : Enjeux de ses résurgences. J. Gayon et al. (eds.), Ousia, Bruxelles, 1998, p. 162–181.

[11] N. Goodman. « Le statut du style ». In : Manières de faire des mondes. trad. fr. M.-D. Popelard, J. Chambon, 1992. 1978.

[12] P. Mancosu. « Mathematical style ». *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2009). sur la toile.

[13] F. Patras. *La pensée mathématique contemporaine*. Presses universitaires de France, 2001.

[14] D. Rabouin. « On Mathematical Style ». In : Culture without Culturalism. K. Chemla, E. Fox-Keller (eds.), Oxford, 2013.

[15] G.-C. Rota. *Indiscrete thoughts*. Birkäuser, Bâle-Boston-Berlin, 1997.

[16] A. Weil. *Souvenirs d'apprentissage*. Birkhäuser, 1991.

[17] A. Wessely. « Transposing "Style" from the History of Art to the History of Science ». *Science in context* **4** (1991), p. 265–278.

[18] F. Zalamea. *Synthetic philosophy of contemporary mathematics*. Sequence Press, 2012.

Yves André

Yves André, directeur de recherches au cnrs, travaille dans l'équipe de théorie des nombres de l'imj à Paris. Il est l'auteur de quatre ouvrages traitant respectivement de géométrie diophantienne, d'analyse algébrique, de théories p-adiques et de « motifs », avec pour horizon commun ce que les géomètres algébristes appellent « période ». Il s'intéresse actuellement aux applications de la théorie de Hodge p-adique à l'algèbre commutative. Membre de l'Istituto Veneto et de l'Academia Europaea. il mène aussi diverses activités académiques interdisciplinaires.

Je remercie les relecteurs, ainsi que les auditeurs de l'exposé (en particulier J. Bénabou), pour leurs commentaires. Une version de ce texte est soumise, parallèlement, à la *Revue de Synthèse*.

Nouvelles du CNRS

- D. BRESCH
- M. de la SALLE

La section 41 du comité national a été renouvelée en 2016 sur le mandat 2016-2021. Sa composition pour cette année universitaire 2016-2017 était : Grégoire Allaire, Anne-Marie Aubert (membre du bureau), Jonathan Baur, Christian Bonatti (membre du bureau), Françoise Bouillet, Mireille Bousquet-Mélou, Didier Bresch (Président), Frédéric Chapoton, Benoît Claudon, Gilles Courtois, Mikael de la Salle (secrétaire scientifique), Julie Delon, Aurélie Fischer, Olivier Frécon, Véronique Gayrard, Oana Ivanovici (membre du Bureau), Christian Le Merdy, Sandrine Péché, Anne Philippe, Jean-Marc Sac-Épée, Bertrand Toën.

Bertrand Toën (obtention d'une ERC advanced) et Benoît Claudon (Promotion PR) démissionnent à l'issue de la session de printemps 2017. La personne remplaçant Bertrand Toën sera nommée par le ministère sur proposition de l'INSMI. La personne remplaçant Benoît Claudon, nécessairement CR CNRS, sera élue par la section, sans doute lors du bureau de la session d'automne en septembre. Nous invitons tous les CR CNRS intéressé(e)s à nous contacter.

Remarque. Nous rappelons la page de la section : `http://cn.math.cnrs.fr/` où l'on peut trouver toutes les informations liées à la section 41 CNRS.

1. Session d'automne 2016

S'agissant de la première session du comité, la session d'automne 2016 qui s'est déroulée du 27 au 30 novembre a été l'occasion pour la section de de prononcer sur les critères d'évaluation, d'avancement et de concours pour le mandat 2016-2021, sur sa participation ou non au processus des PEDRS.

Critères de la section

La section adopte, pour l'ensemble de son mandat, ses critères pour les évaluations, l'avancement et les concours. Quelques modifications sont apportées par rapport à la mandature précédente. Ces critères peuvent être trouvés sur la page de la section. `http://cn.math.cnrs.fr/`

Attribution des PEDR

Les deux mandats précédents du CN avaient décidé de ne pas s'occuper des primes. De ce fait, un comité ad hoc a été mis en place chaque année. La direction de l'INSMI a proposé à la section de prendre en charge la pré-sélection des candidatures à la PEDR, qui est le processus normalement prévu. La section 41 a accepté de prendre en charge la pré-sélection des candidatures à la PEDR. La section considère être la plus à même de connaître les dossiers. Elle est également mieux identifiée par la communauté mathématique plutôt qu'un comité formé de manière ad-hoc.

La section s'est ensuite principalement occupée des propositions de médailles de bronze et d'argent, de l'évaluation des chercheurs à vague ou mi-vague, des promotions CR1, DR1, DRCE1 et DRCE2 ainsi que des changements de direction d'unité, d'un renouvellement de GdR et d'avis de titularisation.

Médailles CNRS de bronze, d'argent et de l'innovation

La direction du CNRS a des exigences de parité. À la demande de la direction du CNRS, la section a proposé deux noms pour la médaille d'argent et deux noms pour la médaille de bronze : un homme et une femme dans chaque cas. La sélection finale a été effectuée par la direction du CNRS : la médaille de bronze a été décernée à Béatrice de Tilière, et la médaille d'argent à Christophe Breuil. Mentionnons également que Raphaèle Herbin a été lauréate de la médaille de l'innovation CNRS 2017.

Chercheurs

La section évalue à mi-vague les chercheurs appartenant aux laboratoires évalués lors de la vague E de l'AERES. 80 dossiers d'évaluation à vague ou mi-vague ont été examinés ; 96% des dossiers ont obtenu un avis favorable.

Tous les quatorze chargés de recherche deuxième classe ayant demandé leur promotion ont été promus. Pour les promotions DR, la section a travaillé sur la base de 7 promotions DR1, 2 promotions DRCE1 et 0 ou 1 promotion DRCE2.

La section a proposé les classements suivants :

– DR1 : 31 candidatures (dont 6 femmes).
  1er ex-aequo : Serge Cantat, Laurent Habsieger, Vincent Lafforgue, Philippe Laurençot, Ellen Saada, Olivier Schiffmann, Jean-Yves Welschinger.
  8e : Rémi Carles.
– DRCE1 : 18 candidatures (dont 3 femmes).
  1er ex-aequo : Hajer Bahouri, Pierre Colmez.
– DRCE2 : 3 candidatures (dont 0 femme).
  1 classé : Gérard Besson.
  Tous les collègues proposés à une promotion ont été promus.

2. Session de concours

En 2017, la section 41 a eu à attribuer 20 postes + 1, répartis comme suit.

– Concours 41/01 : 6 directeurs de recherche de 2e classe.
– Concours 41/02 : 2 chargés de recherche de 1re classe.
– Concours 41/03 : 10 chargés de recherche de 2e classe.
– Concours 41/04 : 2 chargés de recherche de 2e classe sur des projets d'interactions des mathématiques avec d'autres disciplines.
– Concours 41/05 : 1 chargé de recherche de 2e classe sur le thème « Statistiques en grande dimension et autres fondements mathématiques de l'apprentissage », affecté dans une unité rattachée à l'INS2I à titre principal.

À cette liste s'ajoute pour les mathématiques :

– Concours 51/04 : 1chargé de recherche de 2e classe recruté par la CID 51 et affecté dans une unité de l'INSMI.

Les mathématiques étaient également concernées par le concours 06/04, un poste de CR2 en informatique recruté par la section 6 et affecté dans un laboratoire de l'INSMI.

Remarque importante. Nous rappelons que pour les postes d'interactions des mathématiques avec d'autres disciplines (41/04 cette année), le jury attend un projet spécifique comportant un volet pluridisciplinaire. Les candidats doivent impérativement indiquer les partenaires ou les laboratoires des autres disciplines avec lesquels ils envisagent de collaborer concernant ces interactions ; les souhaits d'affectation peuvent inclure un laboratoire ne relevant pas principalement des mathématiques.

Remarque. Les membres de la section rappellent aux candidats qu'il est important de déposer un dossier bien structuré avec une liste de publications séparant bien : revues internationales à comité de lecture, proceedings et actes de congrès. Le comité national invite les candidats CR à consulter la page `http://cn.math.cnrs.fr/` recommandations aux candidats CR.

Voici les résultats d'admissibilités

I. *Concours 41/01*
  1. Bernicot Frédéric
  1. De Cornulier Yves
  1. Eisenbaum Nathalie
  1. Kolev Boris
  1. Stoltz Gilles
  1. Zvonkine Dimitri
II. *Concours 41/02*
  1. Herpaz Yonatan
  1. Morales Alejandro
  —
  3. Simonella Sergio
  4. Golla Marco
  5. Haettel Thomas
III. *Concours 41/03*
  1. Bavard Juliette
  1. Cesnavicius Kestutis
  1. Dreyfus Thomas
  1. Golla Marco
  1. Guenancia Henri
  1. Jendrej Jacek
  1. Le Boudec Adrien
  1. Lupu Titus
  1. Rideau Silvain
  1. Taibi Olivier
  —

11. Vogel Martin
12. Porta Mauro
13. Baur Erich
14. Durmus Alain

IV. *Concours 41/04*
1. Perrin Charlotte
1. Traonmilin Yann
—
3. Naldi Simone
4. Delcroix-Oger Bérénice

V. *Concours 41/05*
1. Devijver Émilie
—
2. Giulini Ilaria
3. Durmus Alain

Pour information :

V. La CID 51 a classé comme admissibles sur le concours 51/04
1. Trescases Ariane
—
2. Barraquand Frédéric

VI. La section 06 a classé comme admissibles sur le concours 06/04 :
1. Patey Ludovic
—
2. Fijalkow Nathanaël
3. Larranaga Maialen
4. Das Anupam
5. Naldi Simone

3. Session de printemps

Lors de la session de printemps, le comité national évalue les chercheurs à mi-vague ou vague, se prononce sur les demandes d'éméritat, certains renouvellements de GDRs, des changements de direction d'unité, des reconstitutions de carrière. Elle donne également sur la base des documents HCERES un avis de pertinence sur un renouvellement d'association au CNRS. Nous mentionnerons ici le point le plus important de notre session de printemps et qui a nécessité le plus de temps qui concerne les PEDR.

PEDR

La section avait à étudier 61 demandes de PEDR. À la demande de l'INSMI, elle en a classé 20 sans connaître *a priori* le nombre d'attributions effectives final. Sachant que le nombre de PEDR distribuées est proportionnel au nombre de candidatures, le comité national encourage très vivement l'ensemble des chercheurs CNRS de la section à postuler pour la PEDR, y compris s'ils pensent ne pas pouvoir l'obtenir ou ne souhaitent pas l'obtenir. En effet, chaque candidature supplémentaire permet d'augmenter le nombre de demandes satisfaites. En aucun cas, la non-attribution de la PEDR ne doit être interprétée comme une marque de défiance ou une absence de reconnaissance de la part du comité national : les candidats non retenus sont invités à continuer à déposer leur dossier.

4. Rencontre avec les présidents de sociétés savantes

Sur l'initiative de la section 41, une réunion avec les sociétés savantes (SFdS, SMF, SMAI) et le président et le secrétaire scientifique de la section 41 du CoNRS aura lieu le 29 septembre.

La section 41 du CoNRS de la mandature 2016-2021 aura alors une année de mandat avec expertises de tous types de dossiers en lien avec le CNRS et plus particulièrement l'INSMI. Il est important qu'une telle rencontre ait lieu à la rentrée prochaine afin de discuter du comité national, de son rôle, de l'analyse de l'année passée par chaque société savante et des remarques qu'elles auraient. Le mandat d'un comité national est sur plusieurs années afin de lui permettre d'avoir une politique scientifique globale et nationale cohérente reflétant les sensibilités scientifiques et basée sur l'excellence. Un échange entre président(e)s de sociétés savantes et président de section (avec en sus les secrétaires scientifiques) ne pourra être que bénéfique pour notre communauté mathématiques en assurant cohérence et efficacité dans nos actions.

Le réseau Franco-Brésilien en mathématiques

• C. Favre

Il y a en mathématiques une grande tradition de coopération scientifique entre la France et le Brésil, dont les racines remontent au moins aux séjours de mathématiciens français au Brésil comme André Weil (en 1945-47), Jean Dieudonné (en 1946-48), ou Alexandre Grothendieck (en 1953-54). Cette coopération s'est poursuivie à un rythme très soutenu dans les années 80 et 90 tout particulièrement en géométrie différentielle, en systèmes dynamiques et en géométrie complexe. Le mathématicien franco-brésilien Artur Avila récipiendaire de la médaille Fields en 2014 est probablement le meilleur symbole de ces échanges.

Au début des années 2000 et en raison de la multiplication et de la diversification des collaborations entre la France et le Brésil, est apparue la nécessité de mettre en place un cadre institutionnel permettant de fluidifier ces échanges, ce qui a donné naissance au Réseau Franco-Brésilien de mathématiques (RFBM). En 2002, le RFBM a reçu une reconnaissance politique forte par la signature d'un accord bilatéral par les Ministres en charge de la recherche des deux pays (« Memorandum entre le Ministère de la Recherche de la République Française et le Ministère de la Science et de la Technologie de la République fédérative du Brésil »).

Un nouveau pas important a été franchi en ce début d'année 2017 avec la signature d'une convention permettant de pérenniser ce réseau et de le transformer en un GDRI. Les établissements partenaires du RFBM des deux pays incluent le CNRS, l'École polytechnique, la Fondation Sciences Mathématiques de Paris, la Fondation de Mathématiques Jacques Hadamard, les universités de l'est parisien (l'UPEM, l'UPEC, et l'UPE) et l'IMPA à Rio.

Le réseau soutient actuellement deux types de programmes. Le premier appelé « mobilité bilatérale » promeut les projets collaboratifs qui impliquent au moins deux mathématiciens (un travaillant au Brésil et l'autre en France) en permettant un séjour d'une durée de quelques semaines. L'objectif est de favoriser les recherches conjointes menant à des publications co-signées entre chercheurs brésiliens et français.

Le second programme « Atelier intensif pour jeunes chercheurs » est plus récent. Un tel atelier doit regrouper des jeunes chercheurs et des doctorants qui travaillent sur un sujet précis, en étant aidés dans leur lecture par des chercheurs senior en petit nombre. L'organisation peut prendre diverses formes mais doit faire participer activement des jeunes chercheurs et préférablement un français et un brésilien.

Les demandes de financement doivent être envoyées par email à *br-fr@impa.br* et *fr.br@math.polytechnique.fr* et sont évaluées au fil de l'eau par un comité scientifique composé d'une dizaine de personnalités brésiliennes et françaises. Une réponse est généralement donnée dans un délai rapide d'une quinzaine de jours. Tout mathématicien travaillant en France ou au Brésil est éligible à ces programmes sans restriction de thématique scientifique.

Si vous désirez plus d'informations sur le réseau et son fonctionnement, vous pouvez me contacter par email ou consulter directement la page internet `http://www.rfbm.fr/`

Ludwig Faddeev
1934-2017

• M. Semenov-Tian-Shansky

Ludwig Faddeev. Aarhus University, août 2010.

La communauté mathématique subit une lourde perte avec la disparition de Ludwig Faddeev, grand mathématicien et théoricien russe qui s'est éteint le 26 février 2017 après une longue maladie. Malgré son état de santé, Faddeev resta très actif jusqu'aux derniers mois de sa vie. En août 2016 il participa à la réunion de la 23e conférence européenne « Few-Body Problems in Physics » où on annonça la création de la Médaille Faddeev pour récompenser les meilleures contributions à cette théorie en physique quantique. Cet honneur fut le dernier d'une longue liste que Faddeev reçut de son vivant.

Ludwig Faddeev est mondialement connu pour ses contributions à la physique mathématique qui en ont profondément changé le visage. Ses travaux sur la théorie quantique des champs de jauge ont préparé le terrain pour les développements révolutionnaires des années 1970 qui culminèrent avec la création du Modèle Standard en physique des particules élémentaires. Ses travaux sur le problème à plusieurs corps et sur le problème inverse de diffusion en mécanique quantique comptent parmi les résultats les plus profonds dans ces domaines. Ses travaux fondateurs sur la Méthode Quantique du Problème Inverse ouvrirent un vaste et nouveau domaine de recherche allant des modèles résolubles en théorie quantique des champs à la topologie algébrique et les groupes quantiques.

Pendant plus de 60 ans, L. Faddeev fut associé à l'Institut Mathématique Steklov à Leningrad (puis St. Pétersbourg) dont il fut le directeur de 1976 à 2000. Il y créa le laboratoire de problèmes mathématiques en physique, et il y réunit un groupe formé par ses collègues et ses élèves. L'école qu'il fonda, bien qu'aujourd'hui dispersée à travers le monde, reste très soudée et joue un rôle important dans la physique mathématique moderne.

Les jeunes années

L. Faddeev naquit en 1934 à Leningrad dans une famille de mathématiciens éminents. Sa mère, la Professeur V. Faddeeva, fut l'une des pionnières des méthodes de calculs numériques. Pendant plusieurs décennies elle dirigea à l'Institut Steklov le laboratoire de calculs numériques qu'elle avait créé. Son père, le Professeur D. Faddeev, fut l'un des meilleurs algébristes de son temps ; il est particulièrement connu pour ses travaux en algèbre homologique, théorie de Galois, et théorie des représentations. Son enseignement universitaire avait formé plusieurs générations d'algébristes russes. Il fut aussi un musicien distingué et un brillant pianiste. Le choix d'un prénom assez rare, Ludwig, pour leur fils aîné reflétait l'espoir de ses parents de le voir devenir un musicien professionnel. Cet espoir ne put se réaliser à cause des privations dues à la guerre pendant son enfance, mais Ludwig avait une connaissance très profonde de la musique classique. Avec son père ils jouèrent à quatre mains toutes les symphonies de Bruckner et Mahler ; ses compositeurs favoris étaient Berlioz et Richard Strauss.

Les jeunes années de Faddeev virent le pays se redresser après les ravages de la grande guerre ; ce fut aussi le temps de grands espoirs après la mort de Staline. Ce n'est pas par hasard que parmi sa génération on compte un nombre très remarquable de mathématiciens de tout premier plan : Arnold, Berezin, Maslov, Novikov, Sinaï, pour n'en citer que quelques-uns. La raison de cette réussite spectaculaire est très simple : en ces temps de grande rigueur idéologique dans le pays, les mathématiques furent le terrain de liberté qui attira naturellement les jeunes gens doués. Un autre point crucial fut la très solide tradition scientifique qui avait survécu aux tourments de la révolution et aux répressions des années 1930.

À l'age de 17 ans, Ludwig prit la décision de s'inscrire à la faculté de physique de l'université de Leningrad ; à l'époque, son père était le doyen de la faculté mathématique, et Ludwig voulut tracer son propre parcours. La faculté de physique avait une très forte tradition en physique théorique marquée par les noms de A. A. Friedmann et V. A. Fock. Le cours de mathématiques pour les jeunes physiciens conçu par l'académicien V. I. Smirnov était directement orienté vers l'étude de la mécanique quantique. À partir de 1954, l'éducation mathématique de jeunes théoriciens fut confiée au Professeur O. A. Ladyzhenskaya, alors la plus jeune et plus brillante professeur de la chaire de mathématiques. Ludwig appartint à la première promotion de cette chaire, tout juste devenue indépendante. L'enseignement d'O. A. Ladyzhenskaya détermina largement son intérêt pour les problèmes mathématiques de la mécanique quantique et de la théorie quantique des champs. Elle fut aussi le directeur de sa thèse de doctorat qu'il prépara à l'Institut Steklov quelques années plus tard. Son portrait resta sur la table du bureau de L. Faddeev à l'Institut Steklov jusqu'à la fin de la vie de celui-ci.

Premiers articles : la diffusion quantique et le problème inverse

Les premiers articles de Faddeev portèrent sur la décomposition spectrale de l'opérateur de Schrödinger avec spectre continu, et sur la théorie de la diffusion. Dans sa thèse il donna la solution complète du problème inverse de la diffusion quantique pour l'opérateur de Schrödinger sur la droite. Cette thèse fut écrite dans le sillage de travaux fondamentaux sur le problème inverse dus à Gelfand, Levitan et Marchenko qui étudièrent le cas de l'équation de Schrödinger radiale. Le cas de l'équation de Schrödinger sur la droite est un peu plus compliqué à cause du spectre continu multiple. Une décennie plus tard, ce cas s'avérait être d'une importance capitale pour la méthode du problème de diffusion inverse dans la théorie de systèmes intégrables ; les formules que Faddeev avait démontrées dans sa thèse purent être directement appliquées dans ce nouveau contexte.

Problème des trois corps

Le sujet suivant que Faddeev avait choisi fut le célèbre problème des trois corps en mécanique quantique. À cette époque, Faddeev était déjà fortement attiré par la complexité de la théorie quantique des champs, mais il pensait qu'avant de se lancer dans les eaux incertaines de la théorie des champs il devait d'abord s'affirmer scientifiquement en résolvant un problème compliqué. Bien que les difficultés techniques du problème quantique des trois corps fussent très différentes de celles de son fameux prédécesseur classique, il s'agissait d'un réel défi à cause de la nature très complexe du spectre continu de l'opérateur de Schrödinger. Dans son travail Faddeev s'appuya sur l'expérience acquise lors de son étude de la diffusion quantique ; il parvint à réarranger les équations intégrales pour la résolvante de l'opérateur de Schrödinger sous la forme d'un système d'équations de Fredholm (en éliminant ainsi la contribution du spectre continu). Le nouveau système put servir de base pour des calculs numériques très efficaces dans de nombreuses applications (allant de la chimie quantique à la physique nucléaire), ce qui déclencha une activité de recherche sans précédent. Bien que plusieurs de ses élèves et collègues soient restés dans ce domaine en continuant la recherche qu'il avait initiée, le choix de Faddeev fut de changer radicalement de sujet. Après la publication de sa célèbre monographie consacrée à ce problème (en 1963, traduction anglaise en 1965) il se tourna définitivement vers la théorie quantique des champs.

Champs de jauge et théorie de Yang-Mills

Le défi était de taille, car à l'époque la théorie quantique des champs était considérée en Union Soviétique comme obsolète, contradictoire, et totalement dépourvue d'avenir. À l'origine de ce verdict sans appel se trouvait la découverte par Landau du paradoxe dit « de la charge zéro » qui aurait indiqué un défaut majeur dans les fondements mêmes de l'électrodynamique quantique et, par extension, de toute autre version de la théorie quantique des champs. Landau rendit son verdict dans son dernier article, écrit peu avant la catastrophe tragique qui mit fin à sa carrière scientifique. Ses mots furent considérés par ses élèves comme le testament du Maître et, lorsqu'en 1966 Faddeev fit une percée décisive dans la théorie de Yang-Mills, il ne put publier son article sur le sujet dans aucune revue russe, ni l'envoyer à l'étranger (ce pour quoi un avis favorable du Département de physique nucléaire de l'Académie des sciences était nécessaire). Finalement, un court article de Faddeev et son élève Popov contenant l'annonce de leurs résultats fut publié dans *Physics Letters* (avec une année de retard). La version complète (parue en russe comme prépublication) fut traduite en anglais et rendue disponible seulement en 1973 lorsque la révolution scientifique associée aux champs de jauge était déjà en plein essor.

Le choix de Faddeev de se lancer dans la théorie de Yang-Mills est la preuve de son non-conformisme avéré, mais aussi de sa profonde conviction qu'une bonne théorie physique doit surtout être belle mathématiquement. Son intention de départ était de comprendre la quantification de la Relativité Générale, théorie d'une incontestable beauté mais aussi notoire pour sa grande complexité. La théorie de Yang-Mills paraissait à l'époque n'être qu'un exemple modèle. Nous savons maintenant que cet exemple fut très bien choisi : il permit de généraliser l'électrodynamique quantique en créant la théorie unifiée des interactions électrofaibles et de construire une théorie cohérente des interactions fortes. Géométriquement, la théorie de Yang-Mills est effectivement très proche de la Relativité Générale (tandis que cette dernière traite du fibré tangent de l'espace-temps, la théorie de Yang-Mills met en jeu des fibrés vectoriels abstraits). Le point culminant de ces développements révolutionnaires fut la création du Modèle Standard dans la physique des hautes énergies et la découverte, au début des années 1970, de la liberté asymptotique, qui affranchissait la théorie de Yang-Mills du paradoxe fatidique de la charge zéro qui avait terni l'éclat de sa naissance. Les résultats de Faddeev et Popov fournirent la base, à la fois technique et conceptuelle, pour tous ces développements couronnés par plusieurs prix Nobel.

À propos du célèbre article de Faddeev-Popov, on doit surtout souligner la clarté et la concision de leur approche qui constitua par la suite le langage de base de la nouvelle théorie. Le nouveau formalisme qu'ils proposèrent s'appuyait largement sur l'utilisation d'intégrales fonctionnelles. Bien que R. Feynmann les eût introduites dans la mécanique quantique dès les années 1940, étrangement, il ne les avait jamais utilisées dans la théorie quantique des champs alors qu'elles fournissent le moyen le plus simple pour passer à ses célèbres diagrammes. Au début des années 1960, Feynmann examina lui aussi la quantification de la théorie de Yang-Mills ; comme Faddeev quelques années plus tard, il voulut aborder cette théorie avant de passer à la Relativité Générale. Feynmann découvrit les inconsistances des théories naïves des perturbations, mais n'arriva pas à les éliminer. L'utilisation des intégrales fonctionnelles rendit tous les calculs complètement transparents. Le point central de ces calculs est la détermination de la mesure d'intégration correcte sur l'espace des phases quotient (la réduction symplectique de l'espace des phases est la partie clé de la théorie qui met en valeur son invariance par rapport au groupe de jauge). Ce calcul met en jeu le déterminant régularisé d'un opérateur différentiel exprimé à son tour par une intégrale fonctionnelle auxiliaire de Berezin (par rapport aux variables grassmanniennes). Les particules nonphysiques associées à cette intégrale sont les fameux « Faddeev-Popov ghosts », rapidement devenus emblématiques de la nouvelle théorie.

Au fur et à mesure que les idées de la théorie quantique des champs gagnaient du terrain dans de nouveaux domaines des mathématiques, la force et la flexibilité de la méthode de Faddeev-Popov furent pleinement confirmées. La méthode des « ghosts » continua à se développer sous la forme d'une technique cohomologique directement liée aux idées de la supersymétrie (la méthode BRST).

Intégrabilité classique

Les années 1960 furent très fécondes pour Faddeev. Outre ses travaux sur Yang-Mills, il fit une percée dans le traitement du problème inverse pour l'opérateur de Schrödinger en dimension 3. En même temps, à la demande de Gelfand, il obtint une nouvelle démonstration du théorème spectral pour l'opérateur de Laplace automorphe dans le demi-plan de Poincaré, suivi quelques années plus tard par la démonstration non-arithmétique de la célèbre formule de trace de Selberg. À partir de 1971, il se lança dans le développement de la nouvelle méthode d'étude d'équations différentielles non-linéaires créée quelques années auparavant par Gardner, Greene, Kruskal et Miura. Pendant un certain temps, la seule application connue de leur méthode avait été l'équation KdV, mais on avait vite trouvé de nouveaux exemples. La technique que Faddeev avait développée dans sa thèse de doctorat s'inscrivit directement dans ce nouveau contexte. Sa première contribution à ce domaine fut son article avec V. Zakharov établissant que l'équation KdV est complètement intégrable. L'importance conceptuelle de cet article fut immense : ce fut le premier exemple non-trivial d'un système complètement intégrable en dimension infinie. Cette découverte déclencha un changement total de paradigme dans l'étude des équations non-linéaires.

Dès le début, l'intérêt de Faddeev pour l'étude de ces équations fut alimenté non pas par leur rôle de modèles utiles en hydrodynamique ou en mécanique, mais surtout par leurs applications possibles à la théorie quantique des champs. L'équation KdV n'est pas tout à fait appropriée à cet égard à cause de son caractère non-relativiste, mais très vite Faddeev tomba sur un exemple plus intéressant, l'équation sine-Gordon, vite devenue célèbre, qu'il étudia avec son jeune élève L. Takhtajan. Les solutions solitoniques pour cette équation se comportent comme de vraies particules relativistes; par conséquent, le spectre de particules dans le modèle quantique associé est beaucoup plus riche qu'on ne pouvait l'attendre à la base de la théorie des perturbations naïve. L'équation sine-Gordon indiqua pour la première fois la richesse jusqu'alors insoupçonnée de modèles non-linéaires dans la théorie quantique des champs, ainsi que le rôle très important dans celle-ci des solutions solitoniques.

La voie vers la justification de ces prédictions plutôt hardies s'avéra assez longue et compliquée. À cette époque, Faddeev constitua autour de lui une équipe d'élèves aussi jeunes que brillants. Beaucoup de résulats des deux décennies suivantes furent le fruit de leur travail collectif. Le séminaire hebdomadaire de Faddeev à l'Institut Steklov devint le centre d'activité de la recherche dans les différents aspects de la théorie des systèmes intégrables, mais aussi de la théorie quantique des champs, de la théorie des groupes de Lie, *etc.* Cette activité très variée ainsi que les cours de Faddeev (notamment à l'École d'été des Houches) contribuèrent au renouveau fondamental de la physique mathématique en général, l'accent étant mis sur les liens interdisciplinaires et le rôle accru des idées géométriques et algébriques.

Méthode Quantique du Problème Inverse

Outre l'étude d'exemples très variés de systèmes intégrables, les années 1970 furent marquées par les premières tentatives pour comprendre la quantification de modèles intégrables de la théorie des champs, d'abord au niveau semi-classique. Un difficile travail technique fut nécessaire pour convaincre les physiciens, initialement très sceptiques, que les solitons restent stables dans le cas quantique. Ce travail prépara la vraie percée de la fin de la décennie lorsqu'une méthode systématique de résolution de modèles intégrables quantiques fut mise en œuvre. Ce fut une découverte vraiment majeure qui réunit des idées de la méthode classique des problèmes inverses avec des résultats récents de la physique statistique (notamment ceux de R. Baxter), ainsi que des trouvailles techniques remontant aux premières années de la mécanique quantique (Ansatz de Bethe). La clé de voûte de la nouvelle méthode fut la belle algèbre à la base de la notion de « matrice R quantique ». L'un des premiers exemples de R-matrice fut extrait d'un vieil article de C. N. Yang; par conséquent, l'identité clé satisfaite par la R-matrice reçut le nom d'identité de Yang-Baxter sous lequel elle est devenue universellement connue. L'esquisse de la nouvelle méthode fut annoncée par Faddeev dans un rapport dans son séminaire en mai 1978, et au bout d'une année la plupart de ses hypothèses furent confirmées. Les résultats de Faddeev lui-même et de ses élèves E. Sklyanin, L. Takhtajan, P. Kulish y jouèrent un rôle décisif. L'un de ces succès les plus spectaculaires fut la solution du modèle sine-Gordon quantique qui confirma toutes les prédictions précédentes.

La nouvelle algèbre autour de l'identité de Yang-Baxter déboucha vers la découverte d'une nouvelle classe d'objets algébriques qui reçurent un peu plus tard le nom de groupes quantiques. Le premier exemple de l'algèbre enveloppante quantifiée fut trouvé par P. Kulish et N. Reshetikhin ; davantage d'exemples ainsi que des axiomes appropriés furent ensuite suggérés par V. Drinfeld. Les groupes quantiques ouvrirent un nouveau chapitre de l'algèbre non-commutative dont les applications vont de la théorie des nœuds et la topologie algébrique, à la combinatoire et à la théorie des représentations. Quelques années plus tard, Faddeev avec Reshetikhin et Takhtajan développèrent une approche originale de la quantification de groupes et d'algèbres de Lie reposant entièrement sur la notion de R-matrices. Les groupes quantiques connurent une grande popularité dès leur apparition ; il faut noter toutefois que la théorie des groupes quantiques ne formalisa que la partie la plus simple de la méthode quantique du problème inverse. Le cœur de cette méthode est l'ensemble des moyens pour résoudre le problème spectral pour les hamiltoniens intégrables. La version la plus simple de ces méthodes est l'Ansatz de Bethe algébrique élaboré par Faddeev avec Sklyanin et Takhtajan, les techniques plus sophistiquées faisant appel à la séparation de variables quantique introduite par Sklyanin quelques années plus tard. Ce domaine continue à être un champ de recherche très actif de nos jours.

Anomalies quantiques et solitons en 4 dimensions

L'étude très réussie de modèles quantiques intégrables (en dimensions 1 et 2) avait un peu éclipsé la physique en espace-temps de dimension 4 dans le travail de Faddeev et de son équipe. Ce domaine ne fut cependant pas totalement mis à l'écart. Dans les années 1980 Faddeev travailla en particulier sur les anomalies dans la théorie quantique des champs ; avec son élève S. Shatashvili il découvrit de nouvelles classes de cohomologies pour les groupes de jauge ainsi que des extensions abéliennes associées de ceux-ci. Faddeev était particulièrement fier de ce résultat qui mettait en jeu d'une façon inattendue les découvertes de son père D. K. Faddeev dans l'algèbre homologique remontant aux années 1940.

Une autre piste fut la recherche de solutions solitoniques dans des modèles de la théorie des champs en dimensions 3 et 4. Après la découverte des premiers exemples de ce type (tel le fameux monopole de 't Hooft-Polyakov), Faddeev privilégia la possibilité de trouver des modèles plus compliqués où les solitons forment des configurations entrelacées. Dans les années 1990, le collaborateur de Faddeev A. Niemi confirma numériquement l'existence de ces solitons entrelacés dans le modèle suggéré par Faddeev à la base d'un invariant topologique, l'invariant de Hopf. Ces solitions jouent un rôle clé dans la description des hypothétiques solutions du type « glueball » en théorie de Yang-Mills.

Les dernières années

L'effondrement de l'Union Soviétique changea profondément la destinée de la science en Russie. Une bonne partie des élèves et des collaborateurs de Faddeev furent dispersés à travers les laboratoires et les universités du monde entier. On eut aussi à déplorer des pertes précoces à cause des situations de crise dans les années 1990. Ceux qui avaient décidé de rester passèrent eux aussi une bonne partie de l'année à l'étranger. Les étudiants brillants ne manquèrent pas mais furent également contraints de partir pour trouver un emploi décent. Au début des années 1990, le support de la fondation Soros fut d'une grande aide, mais il devint vite clair que la recherche fondamentale et la science en général ne faisaient nullement partie des priorités des nouvelles autorités russes.

Pendant toutes ces années Faddeev voyagea beaucoup, mais sa décision fondamentale fut de rester chez lui. Il déclina en particulier l'invitation à prendre la direction de l'Institut de physique théorique à l'université de Stony Brook après la retraite de C. N. Yang. Sa préoccupation constante fut de sauver les mathématiques en Russie en faisant face aux menaces en tout genre qui faillirent couler l'Institut Steklov, ainsi que l'Institut Euler que Faddeev avait créé et qu'il dut défendre d'attaques malhonnêtes (parfois littéralement au péril de sa propre vie). Au fil des années cette tâche devint de plus en plus pénible, causant détresse et désillusion.

Pendant ces années, il retourna largement à un exercice plus solitaire de son activité de recherche, comme pendant sa jeunesse, en fort contraste avec le travail en équipe des années 1980. Des collaborations fructueuses naquirent toutefois pendant cette période, venant enrichir les nombreuses relations plus anciennes. Parmi les découvertes majeures de ces années on doit avant tout citer la conception très novatrice de la dualité modulaire dans la théorie des groupes quantiques. Cette conception qui naquit des études des modèles intégrables quantiques en espace-temps discret ouvre un nouveau chapitre très prometteur de la théorie des représentations, établissant des liens avec la géométrie non-commutative, la théorie des opérateurs aux différences finies, les nouvelles classes de fonctions spéciales, etc.

Les contributions majeures de Faddeev au développement des mathématiques et de la physique théorique lui ont valu une large reconnaissance internationale. Il fut élu membre de toutes les principales académies du monde (dont l'Académie des Sciences Française). Il s'est également vu décerner plusieurs distinctions prestigieuses, dont la médaille Dirac (1995), la médaille Max Planck (1996), la médaille Euler (2002), la médaille Lomonosov (2014), le prix Poincaré (2006) et le prix Shaw (2008, avec V. Arnold). Il était depuis 1976 membre de l'Académie des Sciences de l'Union soviétique (devenue l'Académie des Sciences Russe en 1991). De 1986 à 1990, il fut le président de l'Union mathématique internationale.

L'héritage scientifique de Faddeev conserve toute son importance pour la recherche actuelle, ainsi que pour le futur de la physique mathématique. Les années récentes en ont apporté de nombreuses preuves spectaculaires, tel le lien inattendu entre deux de ses sujets préférés, la théorie de Yang-Mills et les systèmes intégrables quantiques. Dans les premières années de la théorie de Yang-Mills on nourrissait l'espoir un peu romantique qu'elle pourrait être elle aussi intégrable. Bien que ce soit faux, on trouva une version de celle-ci, la théorie de Yang-Mills super-symétrique, qui est vraiment très proche de l'intégrabilité. Les résultats récents de Nekrasov et Shatashvili (ancien élève de Faddeev) montrent que la description du secteur de vide dans cette théorie amène directement aux systèmes intégrables quantiques (de types standard ainsi que de types nouveaux) ; tous les ingrédients de la Méthode quantique du problème inverse, comme les R-matrices et l'Ansatz de Bethe, se mettent en jeu dans ce nouveau contexte. Ce lien fascinant entre des aspects a priori très éloignés de l'héritage de Faddeev est une preuve supplémentaire de sa vitalité et de sa profondeur. Avec sa disparition nous avons tous subi une perte immense. On sent pourtant que, selon les mots du poète, *Letum non omnia finit*. Les travaux et les idées de Faddeev restent pour nous une source d'inspiration qui durera de longues années encore.

Michael Semenov-Tian-Shansky

Institut de mathématiques, université de Bourgogne Franche-Comté & cnrs, et Institut Mathématique Steklov (St. Petersburg).

Pour information : l'auteur donnera un exposé à la mémoire de L. Faddeev au séminaire de géométrie hamiltonienne de Paris 6 le 13 octobre 2017. Renseignements : `imj-prg.fr/spip.php?article72`

Une mathématicienne dans cet étrange univers
Yvonne Choquet-Bruhat
Odile Jacob, 2016. 320 p. ISBN : 978-2738134554

On ne présente plus Yvonne Choquet-Bruhat, mathématicienne et physicienne, première femme nommée à l'Académie des Sciences et qui a donné la première l'existence de solutions mathématiques aux équations d'Einstein, avec comme conséquence l'existence d'ondes gravitationnelles qui ont été observées cinquante ans plus tard. Dans cette autobiographie elle livre son histoire, en commençant par celle de ses ancêtres. Dès le prologue le ton est donné, Yvonne Choquet-Bruhat aime se poser des questions sur la nature du monde mais ne cultive pas le solipsisme : un mot savant, dit-elle, qui ne résout rien. Toutefois elle aime s'interroger sur le monde, s'en émerveiller et prend plaisir à découvrir et mieux comprendre des aspects de la réalité. Elle confesse également que résoudre un problème, même sans contact avec une réalité, est toujours un plaisir.
Le ton adopté est celui d'une scientifique. Elle explore son passé avec la précision et le détachement d'une naturaliste organisant la visite du musée dont elle assure la conservation. Cette biographie a été écrite à sa retraite du travail scientifique, à 90 ans. Elle y mélange souvenirs familiaux, souvenirs de mathématicienne et travaux scientifiques. Elle narre également ses rencontres et ses voyages, de façon concise, ne livrant des détails que quand elle le juge utile. On pourra par exemple apprendre qu'elle s'est ennuyée à Tahiti ou que l'île du sud de la Nouvelle Zélande ressemble à la Suisse et ne lui a pas donné l'envie d'y faire des excursions. Fort heureusement, entre temps, Peter Jackson a su faire la promotion de cette île magnifique !
Le livre peut être déroutant pour qui ne trouve pas d'intérêt a priori à lire la biographie de cette grande scientifique. Elle avoue d'ailleurs qu'il a été écrit principalement à l'intention de ses petits-enfants. On y trouve un récit organisé, souvent proche de listes : listes d'événements, listes de lieux, listes de personnalités. Peut-être l'influence d'une vision de la physique et de la réalité que seuls des faits d'observation peuvent faire connaître ? Derrière cet aspect un peu froid, on peut néanmoins deviner en filigrane l'impact des drames qui ont jalonné sa vie et son regard sur le monde et la société. Un regard parfois surprenant, que l'on croise lors de petites phrases comme « tant pis pour les écologistes, il n'y en avait pas à l'époque » ou des anecdotes comme celle de Morse s'étonnant que ses travaux fussent d'elle et commentant « il y a des travaux remarquables d'Emmy Noether mais ce n'était pas une femme » ou, pire, celle de Bochner insinuant que Sophie Kovaleski était au mieux avec Karl Weierstrass et qu'il en était probablement de même d'elle avec Jean Leray.
Le récit de son enfance se termine par son entrée à l'ÉNS de Sèvres. Elle glisse avoir été médiocre à la deuxième épreuve écrite de mathématiques, en partie parce qu'elle avait pris une amphétamine juste avant ! Bien qu'elle terminât cacique de sa promotion, elle garde un souvenir exécrable de sa préparation : « il régnait dans le cours de mathématiques, enseigné d'ailleurs par un homme, une atmosphère oppressante [...] qui remplaçait désagréablement pour moi le plaisir d'apprendre que j'avais connu jusqu'alors ». Une réflexion sur l'apprentissage des mathématiques qui me semble toujours d'actualité.
On pourrait peut-être espérer trouver dans ce livre plus de développements sur les femmes en science ou plus généralement la place des femmes dans la société. Il y a de nombreuses anecdotes ou remarques, mais pas vraiment d'analyse poussée : les faits parlent probablement d'eux-mêmes.

Elle dit par exemple de sa mère qu'elle avait une personnalité très féminine et que, bien qu'étant un esprit indépendant, elle n'aspirait pas à l'indépendance, au contraire. Elle affirme un peu plus tard avoir eu pour professeures des femmes souvent remarquables et que la qualité de l'enseignement féminin de l'époque était une conséquence, heureuse en ce qui la concerne elle, de l'antiféminisme de l'époque qui interdisait aux femmes l'accès à la plupart des autres professions requérant un haut niveau intellectuel (au passage, sa mère était professeure de français). Elle cite d'ailleurs sa professeure de physique en seconde qui avait été chercheuse dans le laboratoire Curie, mais, « la parité n'existant pas à l'époque, avait dû se diriger vers l'enseignement ». À dire vrai je ne saurais définir ce qu'est le féminisme au sens d'Yvonne Choquet-Bruhat. Elle livre ainsi qu'André Lichnérowicz était féministe, ayant eu beaucoup d'élèves femmes. Pour autant elle commente qu'il donnait aux femmes des sujets sur la relativité générale et aux hommes qu'il jugeait plus doués des sujets de géométrie différentielle.

Elle livre des histoires glaçantes, comme celle de la déportation de son père ou celle, moins terrible, de sa tante dont un jeune homme avait demandé la main à son père, qui l'avait refusée, et qui ne l'avait appris que beaucoup plus tard. Yvonne Choquet-Bruhat écrit que sa tante racontait cette histoire sans acrimonie, et ne rajoute aucun commentaire personnel à ce sujet, comme si c'était là chose courante ne nécessitant pas qu'on s'y attarde. Ne glisse-t-elle pas un peu plus loin que rien n'est parfait sur Terre, entre autre les êtres humains ? On trouve également des histoires concernant l'enseignement supérieur, les relations de pouvoir ou le fonctionnement par entregent ou mandarinat. Elle ne cache d'ailleurs pas les liens qu'elle a pu tisser avec nombre de mathématiciens influents, comme avec Henri Cabannes qui, selon ses dires, régnait avec Albert Châtelet sur l'enseignement supérieur et à qui elle doit d'avoir eu un poste à Marseille conjointement avec son premier mari, Léonce Fourès. Quant à sa vie avec Léonce Fourès, on devine qu'elle ne fut pas toujours très heureuse : elle se décrit profitant d'un relâchement de son attention pour tomber enceinte, bataillant pour avoir le droit de passer son permis de conduire et ne réussissant pas à lui donner l'envie d'être à nouveau père. Cette histoire se termine avec le mariage avec Gustave Choquet et la conception, dans une belle prairie en altitude, de son deuxième enfant !

Comme je l'ai dit il s'agit du film de sa vie, dans un ordre chronologique et une bonne partie est consacrée à ses relations professionnelles, visites à l'étranger, travaux en collaboration (comme le fameux – three women's book –), enseignement. De nombreux passages sont en fait très choquants (par exemple la façon dont on supprime son cours ou qu'on lui interdit d'enseigner en troisième cycle), mais les faits sont simplement énoncés. J'aurais sans doute préféré un ton plus indigné ou révolté, mais c'est sans doute le style d'une dame âgée ayant fait la paix avec son passé et attendant le dernier acte, ainsi qu'elle l'écrit elle-même avec cette distance que l'on rapprocherait volontiers des enseignements de Bouddha ou des écrits de Simone Weil. Elle laisse à d'autres le soin de poursuivre la prise de conscience et le combat, ce n'en est que plus fort. Et, en tout cas en ce qui me concerne, on en ressort soi-même révolté ! J'ai beaucoup apprécié toutes ces tranches de vie. Elles me font parfois penser à Johannes Kepler (écrivant l'histoire de sa propre conception, sa dissertation contre la prédestination selon Luther et sa fascination pour le grand œuvre, l'univers), sans compter que, comme Yvonne Choquet-Bruhat, il s'est très tôt émerveillé de phénomènes célestes tout en ayant des problèmes de vue. Le livre se termine sur une note métaphysique, citant Pascal dans une espèce de mise en abyme : « je ne sais qui m'a mis au monde ni ce que c'est que le monde, ni que moi-même, je suis dans une ignorance terrible [...] » alors que c'est, en quelque sorte, l'objet de ce livre que de donner des éléments sur ces questions ! Yvonne Choquet-Bruhat évoque de-ci de-là son rapport à la religion : de sa dissertation sur la liberté et aux commentaires du père Brillet (Dieu nous a créés libres, ce qui explique la coexistence du mal et d'un Dieu bon et tout-puissant) jusqu'à la conviction que l'on crée sa propre réalité, ce qui permet de croire à une religion sans pour autant perdre le pouvoir du raisonnement logique. Elle n'a peut-être pas toujours été libre, mais elle nous livre là un témoignage sans fard des réalités qu'elle a traversées, avec courage, et des barrières qu'elle a abattues. À lire pour s'émerveiller, pour s'indigner et pour rêver d'ondes gravitationnelles, vous savez celles qu'aucun mur n'arrête !

François Sauvageot
Nantes

Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (`http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/`).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (`gazette@dma.ens.fr`), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier TEX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe LATEX *`gztarticle`* fournie par les distributions TEX courantes (TEX Live et MacTEX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiKTEX), et sinon téléchargeable depuis la page `http://ctan.org/pkg/gzt`. Sa documentation détaillée se trouve à la page `http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf`. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution TEX à jour.

Classe LATEX : Denis Bitouzé (`denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr`)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (`n.lozanne@free.fr`)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.