Contrôler un monde complexe

Pierre Perrier

Qu'il s'agisse de la manœuvrabilité d'un avion, de la tenue mécanique d'une structure compliquée ou de la gestion du trafic automobile, le progrès dans ces domaines ne vient pas uniquement des inventions purement techniques. Il naît aussi de recherches abstraites, comme la théorie mathématique du contrôle.

On comprend aisément l'intérêt de savoir contrôler la réaction d'un avion ou d'une fusée aux turbulences de l'écoulement de l'air, de déterminer la démarche à suivre en cas d'incident dans une centrale nucléaire, de gérer le réseau de distribution de l'électricité en cas de pannes, etc. Dans des situations normales, le contrôle vise à optimiser quelque chose, à améliorer des performances, à faire des économies de matériaux ou d'argent : c'est le cas lorsqu'on veut maintenir un satellite sur sa bonne orbite en utilisant le minimum de carburant.

Le pont Vasco de Gama sur le Tage, à Lisbonne. La résistance d'une structure complexe telle qu'un pont peut être contrôlée de façon active en plaçant, en des endroits bien choisis, des dispositifs qui vont, selon les mouvements de la structure, modifier ses caractéristiques mécaniques afin de contrecarrer les effets de résonance. La théorie mathématique du contrôle traite de telles situations. (Cliché Gamma/Gilles Bassignac)

Penchons-nous sur l'exemple de la gestion des pannes dans un réseau de distribution d'électricité. Un incident tel qu'un court-circuit ou une rupture de contact (due par

exemple à la chute d'un pylône), un surcroît de consommation d'énergie en un lieu donné, peut avoir sur le réseau une cascade de conséquences. Or il n'est généralement pas possible de réaliser une étude exhaustive de tous les incidents possibles, ni de calculer exactement chaque étape de la propagation de l'effet d'un tel incident. Le nombre de possibilités à explorer est gigantesque, en tout cas beaucoup trop élevé, même pour les ordinateurs les plus puissants. On est alors conduit à concevoir un modèle mathématique qui décrit de façon simplifiée le réseau et son fonctionnement. Moyennant des essais et des calculs d'ampleur raisonnable, une telle modélisation permet de cerner le comportement du système, au moins approximativement. En retour, cela peut aider à améliorer la conception des réseaux. Mais on voudrait aussi pouvoir *contrôler* une situation critique, provoquée par exemple par une surcharge localisée ou répartie sur une région entière. Autrement dit, on voudrait savoir quel est l'enchaînement des actions que le poste de commande doit effectuer afin de minimiser les conséquences de la panne. Une telle connaissance est-elle possible, en théorie ? Existe-t-il des stratégies de contrôle optimales ? Si oui, quelles sont-elles ? Et ensuite, quels algorithmes faut-il employer pour les vérifier par une simulation numérique, sur ordinateur, avant de tenter l'essai en grandeur réelle ?

Il est important de fournir un cadre d'étude rigoureux à ce problème de gestion des ressources, si l'on ne veut pas gaspiller l'énergie, ni être victime de coupures de courant généralisées. On a avec cet exemple un premier type de problèmes de contrôle complexe où les mathématiciens — à renfort de logique mathématique, de théorie des nombres, de théorie des probabilités, d'analyse et de théorie du contrôle — apportent leur contribution. À tout le moins, ils peuvent fournir quelques certitudes *a priori* quant à l'existence d'une solution acceptable et aux moyens de l'obtenir — solution que des expériences devront par la suite valider.

Empêcher les ponts de s'écrouler

La complexité n'est pas nécessairement rattachée à un réseau. Elle peut résider dans la manière dont réagit un objet, comme un pont. La tenue d'une telle structure dépend d'un grand nombre de paramètres, de son comportement vibratoire entre autres. Comme chacun sait, les vibrations d'un pont peuvent être provoquées par le passage de camions en file ou par le vent d'une tempête. Parfois, ce phénomène s'amplifie jusqu'à provoquer la rupture de l'ouvrage. Un pont, comme toute autre structure mécanique, possède une série de fréquences de vibration caractéristiques ; si la perturbation extérieure apporte de l'énergie à des fréquences qui correspondent aux fréquences propres de vibration, une *résonance* se produit et le pont accumule de l'énergie dans ses modes propres de vibration. Ceux-ci s'amplifient alors, tant que dure la perturbation extérieure, et tant que la structure résiste aux contraintes mécaniques qui en résultent.

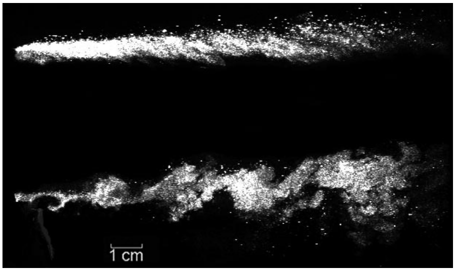
Pour contrôler de tels phénomènes, il faut les comprendre, savoir les prévoir et mettre en place des dispositifs techniques capables de contrecarrer les dangereuses résonances. On parle de *contrôle passif* lorsqu'on calcule où installer les amortisseurs qui absorberont assez d'énergie avant qu'elle ne s'accumule aux endroits critiques. Mais on parle de *contrôle actif* si, une fois repérés ces points critiques, on place en des endroits bien choisis des dispositifs actifs, des *actionneurs* ; ces derniers agiront

alors en fonction de l'amplitude des déplacements des points critiques, de façon à éviter toute évolution dangereuse de la structure. C'est une analyse mathématique du système étudié qui détermine les emplacements adéquats des capteurs et actionneurs et les procédures de contrôle les mieux adaptées.

Malheureusement, le calcul exact du comportement du système en l'absence de contrôle, de sa sensibilité et de son aptitude à être contrôlé est, le plus souvent, inaccessible. La raison est en général soit la complexité mathématique des problèmes dès qu'ils sont non linéaires (impossibilité de les décomposer en somme d'éléments simples et à peu près indépendants du point de vue mathématique), soit le temps de calcul sur ordinateur qui serait trop long. En conséquence, le contrôle est souvent imparfait. Il se peut par exemple que l'on réussisse à contrôler des modes de vibration provisoirement seulement — l'énergie extérieure s'accumule d'abord dans de nombreux modes de vibration de faible amplitude, avant de se combiner et de resurgir dans un nombre plus petit de modes, mais avec une forte amplitude. Beaucoup reste à faire pour bien comprendre ces processus et remédier à leurs effets négatifs.

Tenir bon malgré les turbulences

Prenons un troisième exemple : les écoulements de fluide à grande vitesse, comme l'écoulement de l'air autour d'un avion, d'une fusée en décollage, ou de l'eau autour d'un bateau rapide. Dans ces situations, on est confronté à la turbulence, c'est-à-dire à des mouvements complexes et instables du fluide, à une perpétuelle destruction et reconstruction de structures si compliquées qu'elles semblent relever d'un désordre total. Les turbulences peuvent gêner considérablement le mouvement d'un véhicule, aérien ou autre. On comprend que le contrôle soit ici beaucoup plus difficile à obtenir. Mais ces problèmes ont une grande importance pratique. Aussi les ingénieurs ont-ils essayé, par tâtonnements, et en s'inspirant par exemple du vol des oiseaux pour concevoir les avions, d'assurer une certaine contrôlabilité de l'écoulement. Ils y ont partiellement réussi en renforçant notamment les bords de fuite et d'attaque des ailes, en plaçant des capteurs en des endroits peu perturbés et des actionneurs — des gouvernes — aux endroits sensibles, près des bords de fuite.



L'image du haut montre un écoulement fluide supersonique relativement régulier. Dans l'image du bas, l'action d'un petit jet de fluide injecté latéralement a eu pour résultat le développement d'instabilités dans l'écoulement. Une telle manipulation illustre l'idée que l'on peut agir sur un écoulement à l'aide de petits dispositifs, notamment en vue de le contrôler (Cliché Erwan Collin-LEA/CEAT-Université de Poitiers).

La théorie mathématique du contrôle a permis dans un premier temps de retrouver ces résultats empiriques. Puis elle a permis de proposer des stratégies d'actions, des plans de conception qui renforcent ou diminuent, selon le cas, la sensibilité aux actions d'un opérateur humain ou aux perturbations extérieures. On en est maintenant au point d'identifier des dispositifs élémentaires de contrôle actif qui agiraient à l'échelle quasi microscopique, celle d'une couche de fluide de

quelques dixièmes de millimètre d'épaisseur : par exemple de petits volets ou des micro-mécanismes permettant de déformer localement le profil du véhicule aux points critiques de l'écoulement du fluide. En coordonnant l'action de très nombreux micro-dispositifs de ce genre, on obtiendrait, à l'échelle macroscopique, un écoulement fluide ayant les propriétés souhaitées. Dans le domaine du contrôle de la turbulence des fluides, des recherches mathématiques, alliées à des essais physiques ou techniques, vont ainsi ouvrir un monde de performances inimaginables il y a quelques années ; un monde où, pour obtenir un même effet, l'énergie ou la taille des dispositifs nécessaires sera diminuée de plus d'un ordre de grandeur.

La théorie du contrôle met en jeu divers champs mathématiques, en particulier la théorie des équations différentielles

Les problèmes de contrôle que l'on a évoqués ici peuvent concerner de banals essuie-glaces de voiture comme le lanceur spatial le plus élaboré. La théorie du contrôle, née dans les années 1940-1950 en relation notamment avec les activités aérospatiales, puise ses méthodes et ses concepts dans plusieurs branches des mathématiques. Elle concerne surtout des équations différentielles (où l'inconnue est une fonction) et des équations aux dérivées partielles (équations différentielles où la fonction inconnue est une fonction de plusieurs variables), un vaste champ d'étude déjà ancien mais toujours très actif. En effet, pour la plupart des systèmes rencontrés dans le monde réel, leur comportement peut être modélisé à l'aide d'une telle équation. Un problème de contrôle se traduit alors par une ou plusieurs équations différentielles ou aux dérivées partielles, qui contiennent des termes représentant des actions de contrôle, définies par l'homme. Notons globalement *C* ces termes de contrôle, et *f* la fonction représentant le comportement du système ; *f* est la solution d'équations différentielles où intervient *C*, et donc *f* dépend de *C*. Le but de la théorie du contrôle est alors, en gros, de déterminer le *C* adéquat pour que *f*, le comportement du système, soit acceptable. Pour un mathématicien, il ne s'agit pas tant de le faire avec telle ou telle équation particulière, mais plutôt d'obtenir des résultats généraux, valables pour de nombreuses classes d'équations et donc applicables à de nombreuses situations différentes.

En France, la théorie du contrôle figure en bonne place au sein de la brillante école de mathématiques appliquées qu'a su créer Jacques-Louis Lions (1928-2001). Mais à elle seule, une bonne école mathématique ne suffit pas. Il faut également que ses résultats soient connus et appliqués par tous ceux qui pourraient en avoir besoin. D'où l'intérêt de resserrer les liens entre la communauté mathématique et les mécaniciens, les ingénieurs, les chimistes ou les biologistes.

Pierre Perrier
Académie des sciences et
Académie des technologies, Paris.

Quelques références :

- J. R. Leigh, Control theory. A guided tour (Peter Peregrimus, Londres, 1992).
- J. Zabczyk, Mathematical control theory : an introduction (Birkhaüser, 1992).
- J.-L. Lions, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués (Masson, 1988).