Le prix des options financières

Elyès Jouini

Le monde de la finance fixe le prix des options au moyen de formules ayant été obtenues grâce à des travaux mathématiques relativement récents. La recherche de meilleures formules se poursuit… et cela ne concerne pas que les boursicoteurs !

Dans sa préface à la quatrième édition des *Éléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale*, publiée à Lausanne en 1900, Léon Walras écrivait : « *Toute cette théorie est une théorie mathématique, c'est-à-dire que si l'exposition peut s'en faire dans le langage ordinaire, la démonstration doit s'en faire mathématiquement* ». Plus loin, il ajoutait même : « *Il est à présent bien certain que l'économie politique est, comme l'astronomie, comme la mécanique, une science à la fois expérimentale et rationnelle… Le XXe siècle, qui n'est pas loin, sentira le besoin […] de remettre les sciences sociales aux mains d'hommes d'une culture générale, habitués à manier à la fois l'induction et la déduction, le raisonnement et l'expérience. Alors l'économie mathématique prendra son rang à côté de l'astronomie et de la mécanique mathématique* ».

La Bourse de New York, un jour faste. Les mathématiques ont fait une entrée en force dans le monde de la finance depuis plus d'une vingtaine d'années. Réciproquement, le monde de la finance fournit des problèmes qui stimulent la recherche dans certains domaines des mathématiques. (Cliché Gamma Liaison/Gifford)

Je voudrais à travers l'exemple qui suit, emprunté à la finance, montrer comment mathématiques et économie continuent d'entretenir des liens extrêmement étroits et qu'il y a, dans les sujets les plus actuels intéressant l'une et l'autre discipline, une réelle fertilisation croisée.

Le problème qui va nous intéresser ici est l'évaluation des options financières. La question est aussi vieille que les options elles-mêmes, dont on trouve notamment trace dans l'Antiquité et au XVII[e] siècle sur le marché des tulipes aux Pays-Bas. C'est pourtant en 1973, comme on le verra plus loin, que cette question a trouvé sa première réponse mathématiquement satisfaisante. Et ce n'est pas un hasard si c'est la même année que le premier marché organisé d'options, celui de Chicago, a connu un essor jamais démenti depuis.

Qu'est-ce qu'une option financière ? Considérons une certaine action cotée sur les marchés financiers, et dont le prix est, aujourd'hui, égal à *S*. Les marchés financiers offrent aux acheteurs potentiels, par le biais d'une *option*, la possibilité d'acheter cette action à une date ultérieure, mettons dans trois mois, au prix *K*. Cela peut être intéressant pour un acheteur qui, par exemple, ne dispose pas encore de l'argent nécessaire et veut se garantir contre une augmentation du prix de l'action. Une telle option est une sorte de contrat d'assurance, qui confère le droit d'acheter l'action à une date ultérieure à un prix garanti *K*. Évidemment, ce droit doit lui-même être vendu à un certain prix, mais lequel ? Telle est la question de l'évaluation du prix des options. Pour parler en termes financiers : quel doit être le prix d'une option sur l'action *S*, de « strike » ou prix d'exercice *K* et d'échéance trois mois ?

Il est clair que l'acheteur d'un tel droit ne l'exercera que si, dans trois mois, le prix de l'action sur le marché est supérieur à *K*. Il pourra alors acheter l'action au prix *K*, revendre au prix courant et réaliser un bénéfice égal à la différence. Cette option procure donc à son acheteur, dans trois mois, un gain égal à la différence entre le prix courant de l'action et *K*, si cette différence est positive, et un gain nul sinon.

Le principe de non-arbitrage est à la base de la détermination des prix des actifs financiers

Pour fixer le prix d'une telle option, la théorie de l'arbitrage s'appuie sur un principe très simple, voire simpliste : l'absence d'opportunités d'arbitrage. En d'autres termes, ce principe affirme qu'il n'est pas possible, à partir d'un investissement nul aujourd'hui, de se garantir, quoi qu'il arrive, un paiement positif à une date ultérieure (on n'a rien pour rien). Le principe d'absence d'opportunités d'arbitrage ne signifie pas que des gains miraculeux soient impossibles. En effet, je peux très bien emprunter le prix d'un billet de loterie et acheter un tel billet — mon apport personnel est donc nul — puis gagner un million d'euros, rembourser mon emprunt et dégager un bénéfice énorme. Le principe énonce seulement qu'un tel bénéfice ne saurait être garanti *a priori*. En effet, dans l'opération précédente, je peux également ne rien gagner et être obligé de rembourser mon emprunt : j'ai donc pris un risque de perte.

Ainsi, l'absence d'opportunités d'arbitrage signifie tout simplement que tout gain supérieur au rendement d'un actif sans risque de référence (taux d'intérêts, obligations, bons du Trésor, etc.) est nécessairement lié à un risque. Les SICAV, par exemple, ont un rendement moyen supérieur à celui du marché monétaire ; toutefois, ce rendement n'est pas garanti et peut très bien, comme nous l'avons vu au cours de l'année 2001, passer en dessous de celui du marché monétaire.

Supposons à présent, pour simplifier le problème, que le marché ne fonctionne qu'à deux dates, aujourd'hui et dans trois mois, et que le prix S de l'action dans trois mois ne pourra prendre que deux valeurs, disons soit 100 soit 150 euros. Supposons de plus que K, le prix d'achat convenu pour l'action à l'échéance de l'option, soit compris entre la valeur haute $S_h = 150$ euros et la valeur basse $S_b = 100$ euros, par exemple $K = 140$ euros. Si le prix de l'action dans trois mois est la valeur haute 150 euros, le détenteur de l'option exerce son droit et l'achète au prix préalablement convenu $K = 140$ euros ; le gain associé à l'option vaut donc $S_h - K = 150 - 140 = 10$ euros. Si le prix de l'action dans trois mois est la valeur basse 100 euros, le détenteur de l'option renonce à exercer son droit d'achat au prix K, qui est supérieur ; le gain associé à l'option est, dans ce cas, nul.

On peut démontrer qu'un tel gain peut également être obtenu en se constituant un portefeuille ne comportant que des actions et des placements (ou prêts) sur le taux d'intérêt du marché, que l'on notera ici r. Appelons C le coût de constitution d'un tel portefeuille. Deux actifs aux rendements identiques devant avoir le même prix (on prouve que sinon, le principe de non-arbitrage serait violé), on en conclut que le prix de l'option doit être égal à C.

Le coût C du portefeuille, égal à celui de l'option, peut être déterminé de façon précise. On démontre que C est une moyenne pondérée des paiements actualisés de l'option, c'est-à-dire une moyenne pondérée des montants $(S_h - K)/(1 + r)$ et $0/(1 + r) = 0$, et que les poids intervenant dans cette moyenne sont tels que le prix S de l'action aujourd'hui est, lui-même, une moyenne pondérée des paiements actualisés de l'action ($S_h/(1 + r)$ et $S_b/(1 + r)$) avec les mêmes poids. Plus précisément, on prouve qu'il existe une loi de probabilité telle que le prix de tout actif est égal à l'espérance, calculée d'après cette loi, de ses paiements actualisés futurs. Ce dernier résultat est obtenu grâce à de l'algèbre linéaire élémentaire, et concerne le modèle simple présenté ci-dessus. Mais grâce à des techniques d'*analyse convexe* apparues au milieu du XX^{e} siècle, il se généralise au cas où l'action peut prendre plusieurs valeurs différentes (en nombre fini).

Le calcul stochastique : quand finance et mathématiques théoriques s'enrichissent mutuellement

Cependant, si l'on souhaite adhérer davantage à la réalité et considérer un modèle en temps continu et avec un continuum de prix possibles, il faut alors, pour interpréter le même principe simple d'arbitrage, faire appel à des notions plus avancées de la théorie des probabilités, apparues dans la deuxième moitié du XX^{e} siècle. Il s'agit plus précisément de la théorie des processus stochastiques (processus où des quantités évoluent aléatoirement au cours du temps) et la théorie des équations différentielles stochastiques (équations différentielles où interviennent des quantités aléatoires). Dans ces domaines, les développements les plus récents sont étroitement liés aux problèmes rencontrés en finance.

Ces modèles supposent que le cours de l'action évolue avec un taux de rendement déterministe (non aléatoire), auquel s'ajoute un terme aléatoire de moyenne nulle et d'amplitude propre à l'actif considéré. Cette fluctuation aléatoire est appelée *volatilité* et peut dépendre du temps et de nombreux autres événements endogènes ou exogènes.

Moyennant ces hypothèses, on trouve que le prix de l'option obéit à une certaine équation aux dérivées partielles (équation différentielle où la fonction inconnue dépend de plusieurs variables). Dans le cas le plus simple, étudié indépendamment par les Américains Fischer Black et Myron Scholes d'une part et Robert Merton d'autre part en 1973, cette équation est la même que l'équation de diffusion de la chaleur, bien connue des physiciens. Il est alors possible de la résoudre explicitement et de déterminer le prix de l'option en fonction de ses propres caractéristiques (échéance, prix d'exercice) ainsi que du cours de l'action et de sa volatilité : c'est la formule de Black-Scholes et Merton, qui a valu à Scholes et Merton le prix Nobel d'économie en 1997 (Black est décédé en 1995).

Cette formule et ses variantes sont utilisées dans toutes les places financières du monde. Programmées sur tous les ordinateurs des salles de marché, mises à contribution d'innombrables fois par jour, elles sont l'exemple même du lien possible entre mathématiques théoriques et applications concrètes. La formule de Black-Scholes et Merton ne correspond cependant qu'au cas simpliste où taux d'intérêts, taux de rendements moyens, niveaux de risque, etc., demeureraient constants au cours du temps. Dès que l'on modifie ces hypothèses, les équations obtenues ne sont plus équivalentes à celle de la diffusion de la chaleur. Les équations pertinentes en sont des variantes, et elles nécessitent le plus souvent des méthodes de résolution — implicites, explicites ou numériques — spécifiques. C'est en travaillant sur certaines de ces équations que les chercheurs français C. Daher et M. Romano, qui travaillaient à l'époque à l'université Paris-Dauphine et à la Caisse autonome de refinancement, ont obtenu en 1990 le prix IBM de calcul numérique intensif.

Enfin, lorsqu'on essaye d'être plus réaliste et de prendre en compte les coûts de transaction, les diverses contraintes imposées par le marché ou encore l'impact du nombre des transactions sur les prix, les techniques du calcul stochastique classique ne suffisent plus. Il faut développer, comme cela a été fait ces dernières années, des outils spécifiques comme les *équations différentielles stochastiques rétrogrades* ou des méthodes fines de *dualité* en *contrôle optimal stochastique*. On découvre alors, et cela peut surprendre, que ces nouvelles idées mathématiques, développées pour résoudre des problèmes économiques et financiers, s'avèrent liées à des problèmes déjà rencontrés en géométrie ou en physique — par exemple la déformation de surfaces ou la fonte de glaçons — et qu'elles éclairent ces derniers d'un jour nouveau.

Elyès Jouini
Professeur des Universités, CEREMADE (Centre de mathématiques de la décision)
Université Paris-Dauphine (Paris 9)

Quelques références :

• N. Bouleau, *Martingales et marchés financiers* (Odile Jacob, 1998).
• F. Black et M. Scholes, « The pricing of options and corporate liabilities », *Journal of Political Economy, 81*, pp. 637-654 (1973).
• C. Huang et R. Litzenberger, Foundations for financial economics (North-Holland, 1988).
• L. Walras, *Éléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale* (Corbaz, Lausanne, 1874, édition définitive revue et augmentée par l'auteur, LGDJ, Paris, 1952).