Note de synthèse en vue de l'audition du vendredi 8 décembre par la mission maths Torossian - Villani

Cette synthèse des positions pédagogiques et programmatiques de notre association, en réponse aux questions posées par la mission pour l'amélioration de l'enseignement des mathématiques confiée à Messieurs C. Villani et C. Torossian, peut être utilement suivie par la lecture des programmes de mathématiques allant de la GS de maternelle au CM2 *que nous avons rédigés, ainsi que par celle des manuels de classe que nous avons d'abord testés dans les classes expérimentales du réseau SLECC, puis édités (*Les ouvrages du GRIP*)*

Sur la pédagogie

Nous accordons une importance capitale aux contenus des programmes scolaires. Pour autant, si à nos yeux les programmes constituent l'ossature de tout le système éducatif, nous serions bien légers de négliger la question pédagogique puisque cette question fut jumelle au moment de la fondation de l'instruction publique de celle des programmes, et singulièrement en ce qui concerne l'école primaire. Cette question du choix de la pédagogie reste importante pour nous.

Nos programmes à l'école maternelle et à l'école primaire sont en effet fondés sur la méthode intuitive de Ferdinand Buisson, synthèse de divers courants pédagogiques européens et d'outre atlantique ; celle-ci a été mise au point afin de rompre avec les procédés mécaniques et ingrats de la « vieille école » et de favoriser chez les enfants un accès à l'abstraction progressif et lié à l'expérience concrète que tout élève peut et doit avoir du monde qui l'entoure.

Par exemple, cette méthode se traduit dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques par l'usage de nombres concrets et abstraits dès la base des apprentissages, par un apprentissage des opérations en lien étroit avec les manipulations concrètes, et la résolution de problèmes. Ainsi, pour le début de la scolarité, le calcul intuitif de Grube consiste en un apprentissage oral simultané des quatre opérations, d'abord sur de petits nombres, en liaison avec l'apprentissage de la numération.

Ces programmes que nous avons conçus sont progressifs et balayent chaque année tous les champs des programmes de l'école primaire en approfondissant chaque année la maîtrise de chaque champ.

L'aspect technique des mathématiques est travaillé de manière progressive et n'est pas mis en opposition avec la compréhension de ces techniques. Le calcul (y compris dans ses aspects techniques) et les raisonnements sont donc travaillés intensément dès les plus petites classes, comme l'a bien montré l'expérimentation SLECC.

Ce qui nous a guidés dans la conception de ces programmes n'est donc pas la pureté logique parfaite - « adulte » - dans la construction des notions, mais au contraire une démarche faite pour l'enfant, démarche éclairante, intuitive et raisonnée, afin de favoriser l'intelligibilité des notions. Telle est la part qui revient à la pédagogie « bienveillante », pour utiliser un vocable à la mode, de l'intuition buissonnienne.

Sur la place et le rôle du calcul

Le calcul est l'art de transformer les expressions, la plupart du temps pour les mettre sous une forme canonique qui nous parle plus que les autres, mais aussi sous des formes particulières choisies dans un but précis. Il est, avec l'activité de raisonnement, au cœur des mathématiques. C'est ce qui confère à celles-ci leur exactitude, leurs capacités démonstratives, c'est le moyen de manipuler « concrètement » des objets qui sont des abstractions.

La question de la place du calcul et la maîtrise des opérations et des algorithmes associés ne font évidemment pas débat en arithmétique élémentaire. Il s'agit d'une activité centrale qui développe la conception du nombre, qui montre toute l'efficience des mathématiques et la force du lien entre les mathématiques et la réalité, cela dès les petites classes – on le réalise d'autant mieux que le calcul est enseigné en lien avec les grandeurs et la mesure des grandeurs.

La première représentation du nombre est d'une importance capitale pour la mise en place d'un enseignement du calcul. Construire le nombre de manière linéaire par simple itération de l'unité limite considérablement cette représentation : le jeune enfant qui observe un dé ne voit pas le 6 comme 5 + 1 mais comme 2 fois 3. la manipulation de réglettes Cuisenaire lui permet d'observer qu'on obtient 4 en construisant un carré de 2 et 8 pour obtenir un cube…

Mettre des mots et des signes sur ce qu'il fait lui ouvre les portes du calcul. Opposer la rigidité du calcul posé à la créativité du calcul mental, les procédures personnelles aux procédures expertes, a conduit à une impasse dont les enseignants ne sont toujours pas sortis : les techniques de calcul mental font appel à des procédures différentes de celles du calcul posé et elles ne sont ni enseignées ni automatisées au prétexte qu'elles sont multiples. Rien d'étonnant dès lors que des élèves qui n'ont pas le génie des nombres et qui ne connaissent plus leurs tables de multiplication aient pour seul recours de revenir au calcul posé et même parfois à l'addition ou la soustraction réitérée pour trouver le résultat d'une multiplication ou d'une division. Rien d'étonnant non plus à ce que des textes officiels insistent sur le fait que la « performance », la « virtuosité » ou même la « dextérité » ne soient plus exigées au prétexte qu'elles sont l'apanage des calculettes, le résultat juste n'est même plus indispensable : n'étant pas une preuve suffisante de la compréhension, il a perdu son statut de preuve nécessaire.

À l'issue du cursus primaire, selon l'expression de Laurent Lafforgue, « les élèves doivent posséder une maîtrise aisée, exacte et sûre des opérations élémentaires sur les nombres et les grandeurs et de la manipulation des unités. »

Au collège, le rôle du calcul est essentiel ou devrait l'être en arithmétique, où le calcul littéral sera introduit de manière plus systématique, il est central ou devrait l'être en algèbre. On peut noter la progressivité et la richesse des progressions, depuis le calcul sur les monômes : sommes, différences, produits, quotients, puis sur les binômes, sur les polynômes, sur les fractions rationnelles, telles qu'elles étaient mises en œuvre autrefois dans les programmes de collège (et de lycée) et dans les ouvrages qui les déclinaient.

Enfin, toujours au collège, depuis Descartes, le calcul est omniprésent ou devrait l'être en géométrie : la géométrie analytique a permis de réaliser des progrès immenses ; le calcul vectoriel, en particulier, convertit de nombreux problèmes géométriques en calculs relativement simples. Dans ses développements modernes, la logique elle-même est devenue un champ d'application du calcul.

Le calcul, s'il a ses techniques et ses méthodes, n'est pas synonyme de manipulations vides de sens. L'activité de calcul est indissociable de l'intelligence de sa pratique et de la réflexion sur les objets manipulés. Lorsqu'on demande à une calculatrice ou un ordinateur d'effectuer un calcul long, cela doit être avec une conception précise et une anticipation du résultat attendu, sinon il y a un grand risque de perte de contrôle. L'art du calcul est donc on ne peut plus essentiel, il est caractéristique de l'activité mathématique, et son apprentissage ne peut s'envisager que de longue haleine.

Pour conclure, se demander quelle est le rôle du calcul en mathématiques revient en quelque sorte à se demander quelle est le rôle du système sanguin dans notre corps !

La question de la preuve

À l'école primaire, des exemples génériques peuvent être étudiés afin de dégager les idées de fond qui justifient les techniques de calcul et les propriétés qui peuvent être étudiées. Si la démonstration n'a pas sa place à ce niveau, les élèves peuvent être formés à la preuve par la « vérification », selon les termes de Laurent Lafforgue dans le texte *Le calcul à l'école primaire*

« Les vérifications portent sur des exemples et des figures, dans des raisonnements suffisants pour emporter la conviction même s'ils ne peuvent être qualifiés de démonstrations formelles. On demande souvent de « faire la preuve d'une division » en multipliant le diviseur par le quotient puis en ajoutant le reste. C'est une vérification pratique du sens de la division comme de l'exactitude de l'algorithme : il est bon que les élèves vérifient autant que possible la cohérence des résultats qu'ils obtiennent et des méthodes qu'ils emploient. On habitue les élèves à vérifier que l'ordre de grandeur du résultat d'une multiplication ou d'une division est correct (par calcul mental sur des nombres ronds – c'est-à-dire à un seul chiffre suivi de zéros – qui approchent ceux donnés au départ). On enseigne aussi la « preuve par 9 » comme autre moyen de vérification partielle du résultat d'une opération. ne serait-ce qu'en vérifiant l'exactitude d'une opération par l'opération inverse. »

Au collège, selon nous, la construction logique du cours de mathématiques, en isolant les axiomes en géométrie, en faisant une synthèse de l'arithmétique et en posant les bases de l'algèbre, place la démonstration au cœur des apprentissages : des démonstrations pour comprendre, pour développer ses capacités de raisonnement, de rigueur, de logique, pour saisir la nature des mathématiques, pour bien saisir ce qui fait la différence entre les sciences expérimentales et les mathématiques, et même de manière plus profonde entre les discours rationnels et le discours mathématique en particulier. Ce travail doit être mené avec une rigueur accrue au lycée au cours d'une synthèse qui mettra en relief les structures et qui posera les bases nécessaires à l'enseignement supérieur.

Ayant écrit ce qui précède, on peut et on doit se demander pourquoi la démonstration est devenue aujourd'hui si absente des cours et des manuels.

La construction du cours de mathématiques devrait en effet permettre de réaliser ces démonstrations. Certes, on peut considérer que la construction d'un cours incluant des démonstrations relève de la compétence du professeur. Cependant un cours s'inscrit dans un programme annuel et si ce dernier n'est pas pensé afin de permettre une construction logique cohérente et assez complète du cours, ce travail devient impossible. Il en résulte chez les professeurs une manière de construire le cours qui se limite à des "îlots déductifs". Dans une certaine mesure, il est difficile (voire il serait contre-productif) de donner une construction logiquement parfaite du cours en collège, mais la conception des programmes est la source structurelle principale de ce phénomène. D'autre part, la construction logique des programmes devrait s'appuyer sur des outils conceptuels que les élèves seront en mesure de s'approprier. Faire reposer le cours de géométrie sur l'algèbre linéaire, sur des transformations ou sur les cas d'égalité des triangles n'impose pas le même niveau d'abstraction et de maîtrise… et par conséquent peut changer totalement la difficulté de compréhension du cours pour les élèves.

Nous venons de considérer la question de la faisabilité de la construction logique du cours et sa réception. Il convient de s'interroger aussi sur ce qui conduit les professeurs et les éditeurs à abandonner le travail des démonstrations dans le cours comme dans les exercices. La première chose qui nous apparaît est la tendance actuelle à considérer les mathématiques d'une manière purement utilitariste, et à considérer que nous formons de simples consommateurs de mathématiques, au lieu de considérer que nous enseignons les mathématiques au sens plein du terme et que nous travaillons pour le développement de leur esprit. Cette tendance a été largement encouragée par le test PISA fortement médiatisé, ce dernier ne mesurant que des capacités en "mathematical litteracy" et pas un degré de maîtrise des mathématiques. Il est aussi certain que l'évaluation par compétences et parfois même "l'enseignement par compétences", dans les diverses modalités qu'il a pu revêtir, est une cause de l'abandon des démonstrations: "raisonner logiquement" devenait en 2007 une "compétence" parmi d'autres alors que c'est le cœur même des mathématiques.

Il y a une autre cause profonde de l'abandon des démonstrations par les professeurs, extérieure aux mathématiques. Cette activité fait en effet appel à des capacités de maîtrise du langage qui font trop souvent défaut aux élèves. Grammaire, conjugaison, vocabulaire, rédaction sont bien trop peu maîtrisés au sortir de l'école primaire et bien trop peu travaillés, ou d'une manière insuffisamment systématique pour que les élèves soient en mesure de rédiger et de comprendre des démonstrations consistantes. La capacité à raisonner et à réaliser des démonstrations se développe aussi en prenant appui sur les connaissances développées et maîtrisées dans les diverses matières. Le raisonnement mathématique pâtit donc également des faiblesses des autres enseignements.

Paliers d’acquisition

La réhabilitation de l'enseignement primaire devrait permettre à terme de remettre en place des contenus de mathématiques beaucoup plus consistants dans l'enseignement secondaire. Mais il est évident qu'à partir du collège les objectifs des élèves vont peu à peu se différencier ; la création de parcours adaptés aux différents profils d'élèves dans le cadre d'un collège commun serait sans doute à envisager pour valoriser les aptitudes pratiques ou manuelles tout autant que les capacités intellectuelles plus abstraites.

Quoi qu'il en soit, le collège doit être l’occasion d’une construction logique plus systématique (en arithmétique, algèbre et géométrie), et de plus amples exigences en termes de démonstrations et de capacités de calcul. Pour autant, il ne faut certainement pas tomber dans l’excès d’abstraction et de pureté logique des programmes de 1969 en sixième jusqu’en 1972 en troisième. Il serait beaucoup plus fécond de conserver un collège classique avec des programmes tels que ceux de 1945 (modifiés en 1958) – éventuellement mis à jour par l'introduction d'une terminologie mathématique précise conforme aux standards contemporains, comme par exemple le vocabulaire et les notations ensemblistes. Ce choix permettrait de réaliser des objectifs ambitieux en termes de calculs et de raisonnement et ouvrirait la porte à des activités périphériques annexes variées tout en ayant la sécurité d’un tronc commun solide.

La suite logique après les quatre années de collège dans ces conditions serait alors un lycée dans lequel le cours de mathématique pourrait être plus moderne (au sens où des éléments plus substantiels du corpus des mathématiques contemporaines seraient introduits), et réaliser ainsi, notamment pour ceux des élèves qui choisiraient une voie scientifique, une synthèse plus abstraite et tournée vers l’enseignement supérieur. Nous pensons en écrivant ces lignes aux programmes de seconde de 1969 jusqu'en terminale en 1971 mais aussi aux programmes de Jean-Louis Ovaert de 1980 à 1982. Ces programmes donneraient la matière suffisante pour s'intéresser par exemple en profondeur au calcul numérique. L'un des objectifs majeurs devrait être de renouer avec des mathématiques qui ouvrent la possibilité d'une synergie forte avec les sciences physiques et les sciences de l'ingénieur.

Les défis qui étaient ceux de nos anciens dans les années 70 sont toujours les mêmes, les problématiques se sont même diversifiées à travers l'explosion de l'informatique, de la programmation, de la sécurisation de données, des probabilités, des mathématiques discrètes. De tels programmes resserrés sur ce qui constitue le cœur des mathématiques seraient la base qui permettrait une vraie polyvalence et qui permettraient à certains élèves volontaires de s'intéresser avec profit à des domaines plus variés.

Reste qu'en attendant la refondation des programmes de mathématiques du primaire, qui demandera quelques années et beaucoup d'application, pour le collège et le lycée, on ne peut, d'après nous, qu'envisager des mesures transitoires pour essayer d'amorcer une remontée de la formation mathématique.

Peut-on attendre que dans ces perspectives la présente mission soit prolongée par un suivi, ce qui serait un gage d'efficacité ? Dans ce cas, le GRIP proposerait de participer à ce suivi, notamment pour rénover la formation initiale et permanente des PE, formation tellement défaillante aujourd'hui.