Internet, feux de forêt et porosité : trouvez le point commun

Marie Théret, *maître de conférences à l'Université Paris Diderot*

Echanges de données entre internautes, propagation d'un feu de forêt, infiltration de l'eau dans une roche : un modèle mathématique simple utilisant des graphes permet de mieux comprendre ces phénomènes.

Quel est le point commun entre une forêt, un réseau de communication et une roche poreuse ? Pour préserver les forêts, il est important de comprendre comment se propage un feu, ou une maladie, d'arbre en arbre. Pour améliorer les réseaux de communication, il faut savoir comment les données circulent entre les différents utilisateurs. Pour étudier la porosité d'une roche, il faut décrire la façon dont l'eau peut s'écouler à l'intérieur. Ces trois problèmes très concrets, bien qu'ayant des formulations différentes dans le langage courant, peuvent se représenter par un même modèle mathématique : le modèle de percolation.

Propagation d'une maladie dans une forêt

Concentrons-nous sur l'exemple de la forêt pour décrire ce modèle. On souhaite étudier la propagation d'une maladie : la contamination causée par un arbre malade va-t-elle rester circonscrite dans une petite région, ou risque-t-elle de s'étendre à des arbres situés très loin de la zone de contamination initiale ? L'approche que l'on adopte est celle de la physique statistique : pour comprendre un phénomène macroscopique, c'est-à-dire à grande échelle, on s'intéresse aux éléments microscopiques qui composent le système. Le système étudié est la forêt tout entière, constituée d'un très grand nombre d'éléments « microscopiques » (c'est-à-dire ici de très petite taille par rapport à celle de la forêt), les arbres.

Il faut commencer par décrire comment se fait la contagion d'un arbre à l'autre. On suppose que la contamination directe ne peut avoir lieu qu'entre arbres assez proches, et qu'elle a un certain risque de se produire qui dépend uniquement de la virulence de la maladie (et non pas des caractéristiques individuelles des arbres, ni de la zone où ils se trouvent). Ces hypothèses sont à la fois crédibles du point de vue biologique, et suffisamment simplificatrices pour permettre un traitement mathématique efficace.

On forme un graphe dont chaque arbre est un sommet, et où l'on relie deux arbres par une arête s'ils sont suffisamment proches pour se contaminer l'un l'autre.

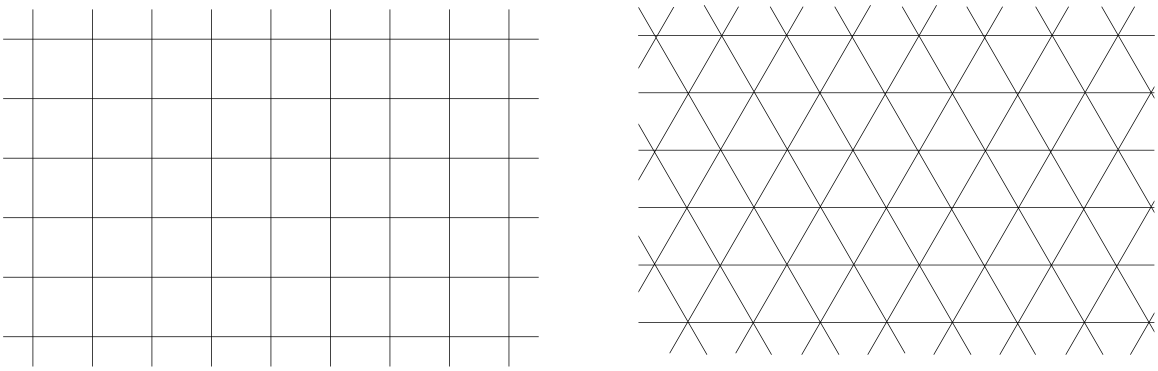


Figure 1. Deux graphes très utilisés en théorie de la percolation : le réseau carré et le réseau triangulaire

Le graphe obtenu décrit comment la maladie pourrait se propager dans le pire scénario, si chaque arbre infectait tous ses voisins. Mais on veut tenir compte du fait que la transmission de la maladie ne se produit que de manière aléatoire. Il y a donc une certaine probabilité de contamination entre voisins, et on colorie une arête en rouge quand la contamination a lieu.

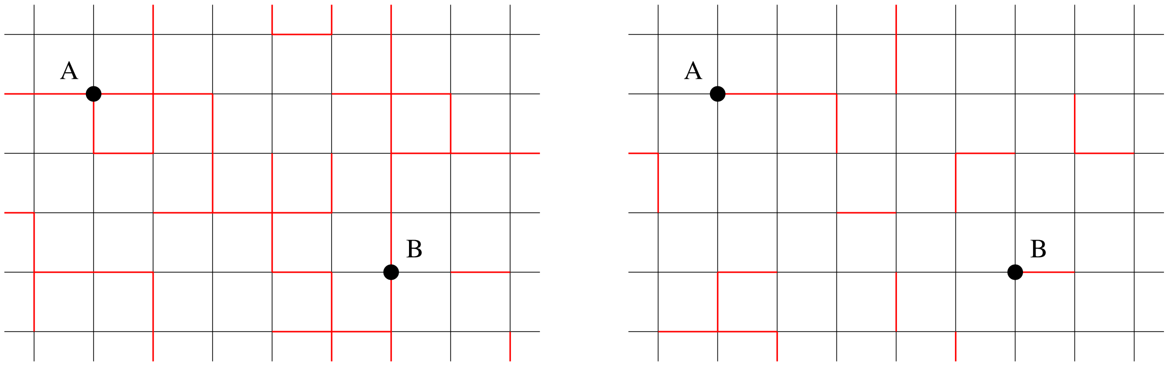


Figure 2. Les arêtes sont coloriées aléatoirement, indépendamment les unes des autres, lorsque la contamination entre deux arbres voisins a lieu. Cette contamination est supposée instantanée : en particulier, l'ordre dans lequel on colorie les arêtes n'a pas d'importance. À gauche : L'arbre A contamine l'arbre B, ainsi que d'autres arbres situés plus loin. Ceci se produit typiquement quand la probabilité de transmission est élevée. À droite : L'arbre A ne contamine que 3 autres arbres. Il ne contamine pas B. Ceci se produit typiquement quand la probabilité de transmission est faible.

Ce que l'on vient de décrire est le modèle de percolation par arête : partant d'un graphe donné, on colorie aléatoirement chaque arête avec une certaine probabilité, indépendamment les unes des autres.

Notons que ce modèle simplificateur ne rend pas compte de l'aspect temporel de la propagation de la maladie : toutes les contaminations entre voisins ont lieu simultanément, instantanément, et indépendamment les unes des autres. Les arêtes non coloriées correspondent aux couples d'arbres entre lesquels la maladie ne se transmet pas.

Ce que l'on vient de décrire est le modèle de percolation par arête. Pour traduire la différence d'échelle entre l'arbre et la forêt, on peut considérer qu'il y a une infinité d'arbres dans la forêt, c'est-à-dire que le graphe à étudier est infini. Les questions que l'on se pose sur la transmission de la maladie se reformulent dans ce contexte : pour savoir si l'épidémie causée par un arbre malade va rester circonscrite, ou au contraire si elle risque de toucher des arbres très lointains, il faut regarder quels sommets du graphe sont reliés par un chemin de couleur rouge au site correspondant à l'arbre malade initialement. On se demande en particulier si ces arbres contaminés sont en nombre fini ou infini. Notre modèle dépend d'un unique paramètre : la probabilité de contamination entre voisins, et il s'agit d'étudier, selon les valeurs de ce paramètre, les propriétés du graphe aléatoire décrit ci-dessus.

Ce modèle est également pertinent pour décrire un réseau de communication ou une roche poreuse. Dans le premier cas, les arêtes du graphe sont les câbles du réseau, qui sont en bon état (arêtes coloriées) ou déficients (arêtes non coloriées), et on peut étudier à qui est transmise une information envoyée par un utilisateur. Dans le deuxième cas, les arêtes du graphe sont des tubes microscopiques dans la roche, qui peuvent laisser passer l'eau mais aussi se boucher. On s'intéresse alors à la zone de la roche qui est mouillée si l'eau s'infiltre à tel ou tel endroit. Le terme « percoler » signifie, pour un liquide, passer à travers des matériaux poreux : c'est donc cette interprétation du modèle en terme de roche poreuse qui a donné son nom au modèle mathématique de percolation, et c'est effectivement pour modéliser un milieu poreux que ce modèle a été introduit par Broadbent et Hammersley en 1957.

Un modèle simple mais riche

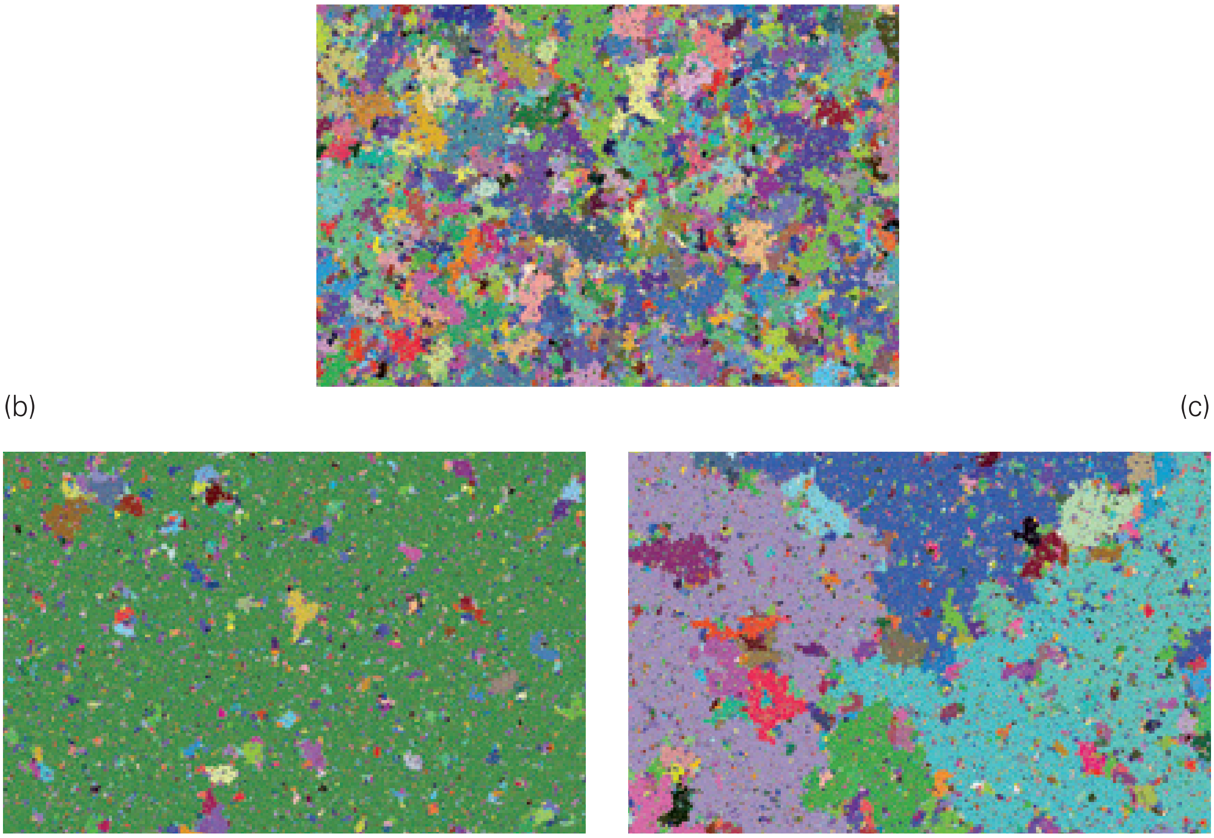
Le modèle de percolation est très simple mais aussi très riche.

D'une part, parce qu'il présente une transition de phase, c'est-à-dire un changement brutal de comportement quand le paramètre du système – la probabilité avec laquelle une arête du graphe est coloriée - dépasse une certaine valeur critique. En effet, si chaque arête est coloriée avec une probabilité suffisamment grande, la transmission des maladies se fait à l'échelle du système tout entier, c'est-à-dire qu'un arbre malade peut infecter d'autres arbres arbitrairement éloignés de lui. Mathématiquement, ceci s'exprime en disant qu'« il existe une composante connexe infinie dans le graphe aléatoire ». Mais dès que la probabilité de transmission passe au dessous d'un certain seuil, la transmission des maladies reste locale, c'est-à-dire que l'infection est limitée à de petits domaines de la forêt : « il n'existe pas de composante connexe infinie » (voir les figures de la page suivante). Ce théorème a été démontré par Broadbent et Hammersley.

D'autre part, parce que malgré sa simplicité, il soulève de nombreuses questions qui restent encore sans réponses, à commencer par la plus évidente : comment calculer cette valeur critique ? De grandes avancées dans l'étude de la percolation ont eu lieu ces dernières années, notamment grâce à l'utilisation d'outils issus de l'analyse complexe, autre branche des mathématiques (citons notamment les travaux de Lawler, Schramm et Werner dans les années 2000), et la recherche continue.

Malgré sa simplicité, ce modèle soulève de nombreuses questions qui restent encore sans réponses, à commencer par la plus évidente : comment calculer la valeur critique ?

Pour une étude plus précise de ces phénomènes, Hammersley et Welsh ont introduit en 1965 un modèle plus complexe, le modèle de percolation de premier passage. Au lieu de colorier aléatoirement les arêtes du graphe, ils leur associent un temps aléa-



Figue 3. Phénomène de transition de phase (simulations informatiques) : on regarde le système à grande échelle, chaque pixel représente ici un arbre de la foret. Un arbre contamine ceux qui sont situés dans la même tache de couleur que lui. (a) : La probabilité de transmission vaut ici 0,4. Les taches de couleur sont de petite taille : un arbre malade ne contamine qu'une petite région autour de lui. (b) : p=0,506, légèrement au dessus de la valeur critique. La tache verte est de taille infinie : un arbre peut contaminer des arbres situés arbitrairement loin de lui. (c) : p=0,5, régime critique, c'est la transition entre les deux autres, le régime le moins bien connu. Les taches sont de tailles finies, mais très grosses. Simulations numériques par R. Cerf.

toire (le temps nécessaire au feu pour se propager entre deux arbres ou à l'eau pour traverser un tuyau) ou une capacité aléatoire (la quantité maximale d'information qui peut traverser un câble par seconde). Les questions soulevées sont alors encore plus nombreuses : combien de temps faut-il pour que de l'eau se propage à travers une couche de roche poreuse ? Quels sont les arbres touchés par un feu de forêt dans ses premières vingt-quatre heures ? Quelle est la quantité maximale d'information qu'un utilisateur d'un réseau peut envoyer à un destinataire par seconde ? De nombreux théorèmes ont déjà été obtenus (citons les résultats présentés dans les années 80 par Kesten, et plus récemment les travaux de Benjamini, Kalai et Schramm en 2003 et Chatterjee et Dey en 2009), mais il reste encore beaucoup de défis à relever !

Pour aller plus loin

Duminil-Copin H., *La Percolation, jeu de pavages aléatoires*, http://images.math.cnrs.fr/La-percolation-jeu-de-pavages.html

Grimmett G., (1989). *Percolation*. Springer-Verlag.