# A la recherche de la forme idéale

Grégoire Allaire, *professeur à l'École polytechnique*
François Jouve, *professeur à l'Université Paris Diderot*

*Les objets issus de la fabrication industrielle sont pensés de façon à optimiser un certain nombre de paramètres comme le poids ou la solidité. Pour éviter de chercher à tâtons la meilleure forme possible, on peut aujourd'hui compter sur plusieurs méthodes mathématiques d'optimisation.*

Nos sociétés modernes sont éprises de *design*, ce mot anglais sans équivalent en français, qui traduit notre volonté d'allier le beau à l'utile. Le grand public connaît bien les designers célèbres et médiatiques comme Pininfarina ou Starck, mais beaucoup moins les scientifiques, ingénieurs ou chercheurs, qui font de la *conception optimale* (*optimal design* en anglais) : loin de toute préoccupation esthétique, ils améliorent les formes des objets industriels (structure mécanique, profil aérodynamique, composants électroniques, etc.) afin d'en augmenter les performances (solidité, efficacité) tout en tenant compte de contraintes, parfois contradictoires, comme leur poids ou leur coût. Il est clair par exemple que la solidité d'une structure varie à l'inverse de son poids (ce qui est lourd est plus solide que ce qui est léger). Ainsi, l'optimisation de la robustesse d'un avion est limitée par la contrainte d'une consommation minimale de carburant, qui est directement liée au poids. Un problème classique en mathématique consiste justement à chercher la *solution optimale* d'un problème d'optimisation d'une fonction (appelée *fonction objectif*) tout en respectant des contraintes.

*Il est clair que la solidité d'une structure varie à l'inverse de son poids (ce qui est lourd est plus solide que ce qui est léger).*

La méthode traditionnelle d'optimisation procède par essais et erreurs, suivant le savoir faire et l'intuition de l'ingénieur : on choisit une forme dont on calcule la performance puis, en fonction de cette dernière, on la modifie pour essayer de l'améliorer et on recommence jusqu'à obtention d'une forme satisfaisante (à défaut d'être optimale). Cette façon de faire « manuelle » est très lente, coûteuse et peu précise. Grâce au formidable développement de la puissance de calcul des ordinateurs, ainsi qu'au progrès mathématique, cet empirisme est de plus en plus souvent remplacé par des logiciels numériques qui automatisent ce processus d'optimisation.

## Optimiser la géométrie avec la méthode d'Hadamard

Tout algorithme d'optimisation est *itératif*: on construit une nouvelle forme à partir d'une variation de la précédente. Puis on calcule la performance de cette nouvelle forme, que l'on compare à celle de la première. Enfin, si la performance de la structure s'avère améliorée, on retravaille à partir de la nouvelle forme.

*Il faut deviner la bonne topologie à imposer à notre forme de départ, or cela est impossible dans la plupart des cas.*

En 1907, le mathématicien Jacques Hadamard a proposé une méthode de variation de forme qui porte désormais son nom et qui, bien que d'origine théorique, s'applique en pratique pour simuler certains problèmes sur ordinateur. La méthode consiste, en partant d'une forme initiale, à déplacer ses bords petit à petit, sans en créer de nouveaux. Cette méthode modifie donc la *géométrie* de la forme initiale mais elle préserve sa *topologie*: en effet les formes

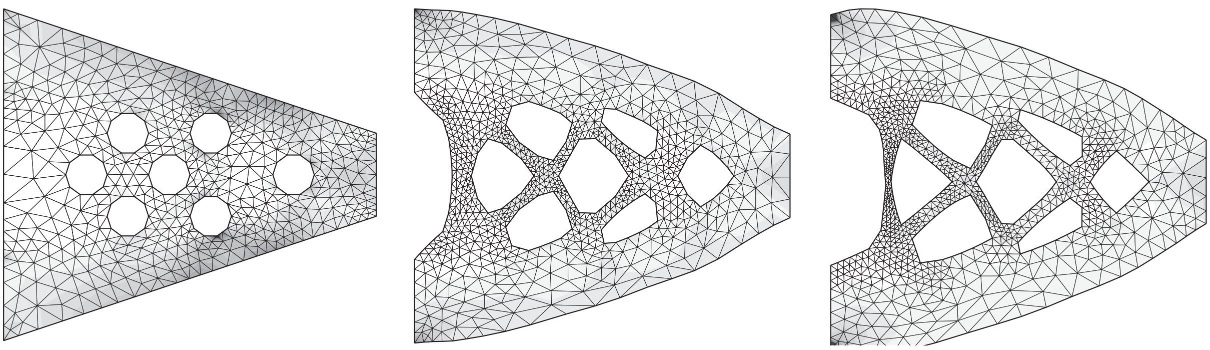


*Figure 1. Initialisation (à gauche), itération intermédiaire (au centre) et forme optimale (à droite) d'une console, obtenues par la méthode d'Hadamard.*

obtenues successivement conservent toujours le même nombre de trous, comme on peut le voir sur les illustrations représentant les résultats numériques de la méthode d'Hadamard.

Le fait que la topologie ne change pas constitue une limitation assez gênante. En effet, cela signifie qu'il faut deviner la bonne topologie à imposer à notre forme de départ, puisqu'on ne pourra pas la modifier pour améliorer la performance. Or, cela est impossible dans la plupart des cas. D'où la motivation des mathématiciens pour inventer d'autres méthodes capables d'optimiser également la topologie, c'est à dire le nombre de trous.

De plus, la méthode d'Hadamard présente aussi le désavantage d'être très coûteuse en temps de calcul.

## De l'importance des matériaux composites

Dans les années 1990, les mathématiciens ont inventé une méthode d'optimisation topologique de forme, dite *méthode d'homogénéisation*, qui est désormais largement utilisée par les ingénieurs dans de nombreux logiciels industriels.

L'idée sous-jacente est de transformer un problème d'optimisation de formes en un problème d'optimisation d'une *densité de matière*.

En tout point de l'espace, la densité de matière est une valeur comprise entre 0 et 1. La valeur 0 correspond à un trou ou du vide (pas de matière), la valeur 1 correspond à du matériau plein et les valeurs intermédiaires (par exemple la valeur 0.5) correspondent à un matériau composite poreux, comme une éponge par exemple. Plus la valeur est proche de 0, et plus la proportion de trous dans le matériau est donc importante.

Ici, on remplace donc le problème original d'optimisation *discrète* du type 0 ou 1 (en chaque point de l'espace, on a soit du vide, soit de la matière), par un nouveau problème d'optimisation *continue*, où la variable à optimiser, la densité de matière, parcourt l'intervalle complet [0,1].

*L'idée sous-jacente est de transformer un problème d'optimisation de formes en un problème d'optimisation d'une densité de matière.*

Avec cette nouvelle approche, on n'est plus prisonnier de la paramétrisation des formes proposée par Hadamard : la topologie va pouvoir changer et des trous vont pouvoir apparaître ou disparaître au gré des variations de la densité.

Notons que la densité de matière ne suffit pas à caractériser complètement un matériau composite : pour une densité donnée, la forme des trous compte aussi pour évaluer les propriétés effectives du matériau. Par exemple, la rigidité équivalente d'un matériau composite ne sera pas la même pour une structure laminée que pour une structure en nid d'abeilles. La méthode d'homogénéisation se propose donc d'optimiser non seulement la densité de matière mais aussi la microstructure (la forme des trous) du matériau composite.

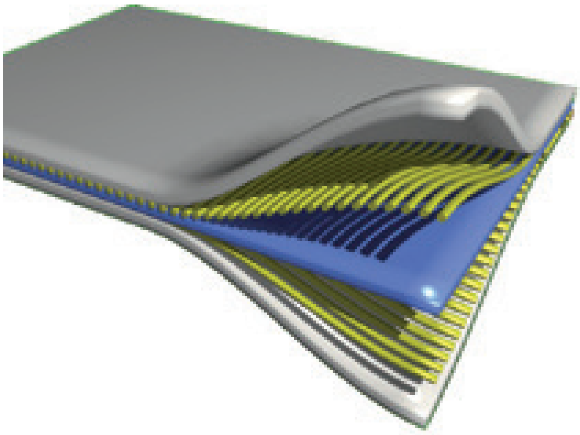
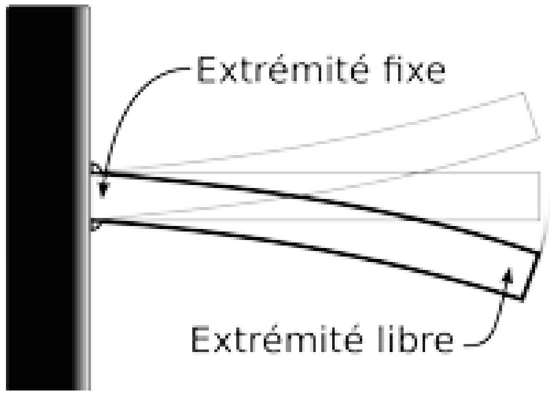


*Figure 2. Exemple de matériau composite*

Un autre avantage de la méthode d'homogénéisation est que sa résolution numérique est plus rapide : elle demande moins de calculs. L'une des raisons à cela est que pour changer la densité en un point donné, l'algorithme ne va utiliser que les valeurs de la densité autour de ce point, et non les valeurs des points plus éloignés, comme c'était le cas pour la méthode d'Hadamard.

## La console optimale

Voici un problème d'optimisation de forme classique, celui de la *console optimale*. Ici, le bord de gauche de la console est fixé tandis qu'une force verticale est appliquée au milieu du bord de droite.




Nous traçons la densité de matière, représentée par un niveau de gris (le noir correspondant à du matériau plein, le blanc à du vide). La solution optimale présente de larges zones de gris, correspondant à du matériau composite, qu'il est difficile d'interpréter comme une forme. Pour retrouver une forme « classique » proche de la forme *composite* optimale, une solution est de « pénaliser » les matériaux composites à la fin de l'optimisation numérique, c'est-à-dire de rajouter des contraintes dans l'algorithme pour que la solution optimale soit plutôt composée de zones soit pleines, soit vides, que de zones composites.

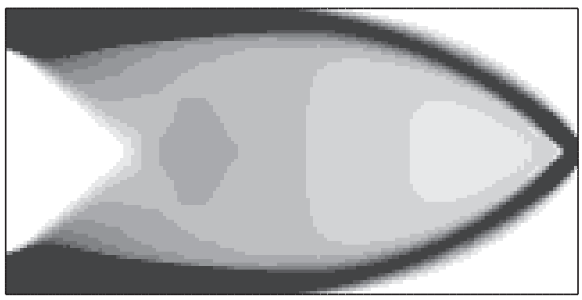


*Figure 4. Console optimale composite (le niveau de gris indique la densité de matière).*

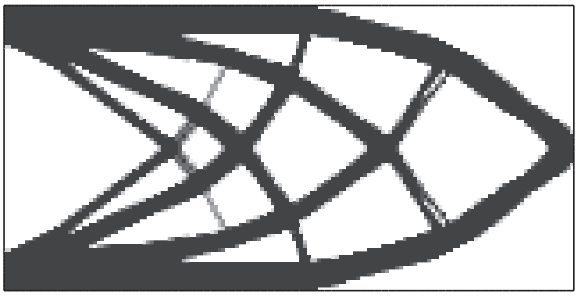
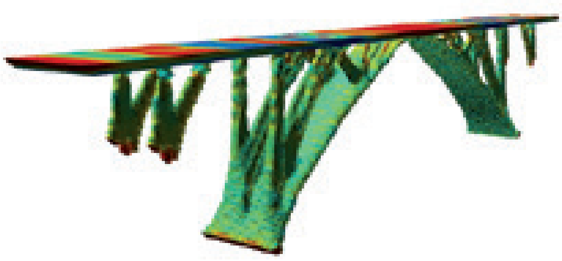


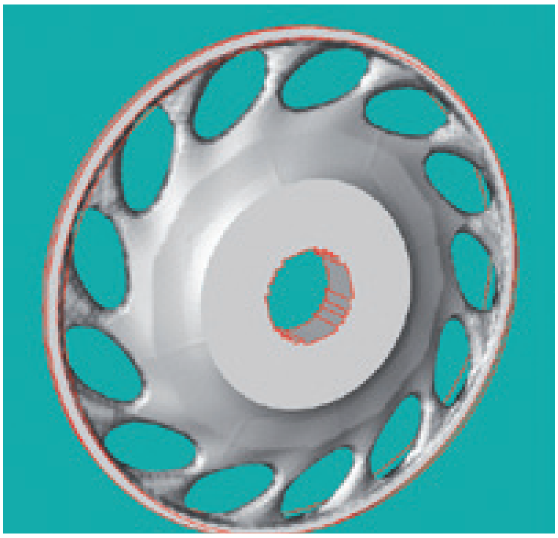
*Figure 5. Console optimale après pénalisation et sans composites*

Le résultat est impressionnant : la zone composite se transforme en un treillis de barres, qui rappelle de nombreuses structures en génie civil ou mécanique.

Ces méthodes d'optimisation géométrique et topologique de formes sont utilisées quotidiennement dans l'industrie automobile ou aéronautique, par exemple quand il s'agit de trouver la forme d'une structure qui soit à la fois rigide et légère. De nombreuses pièces mécaniques (triangles de suspension, longerons, etc.) dans les voitures ou les avions sont ainsi allégées par optimisation afin de réduire, in fine, la consommation de carburant.



*Optimisation d'un pont.*



*Optimisation d'un pignon de roue.*

## Pour aller plus loin

Site web :
http://www.cmap.polytechnique.fr/~optopo


**Allaire G.**, (2007). *Conception optimale de structures*, Collection Mathématiques et Applications, vol. 58, Springer Verlag.

**Henrot A.**, **Pierre M.**, (2005). *Variation et optimisation de formes*, Collection Mathématiques et Applications, vol. 48, Springer Verlag.

**Hildebrandt S.**, **Tromba A.**, (1986). *Mathématiques et formes optimales, Pour la Science*, Belin, Paris.