Pourquoi et comment nager dans le miel ?

François Alouges, Guilhem Blanchard, Sylvain Calisti, Simon Calvet, Paul Fourment, Christian Glusa, Romain Leblanc et Mario Quillas-Saavedra,
respectivement professeur et élèves de l'École polytechnique

La nage dans des milieux très visqueux comme le miel est un sujet de recherches actuel, qui touche des disciplines aussi diverses que la mécanique des fluides, les mathématiques appliquées ou la biologie. Mais pourquoi donc s'intéresser à la natation dans du miel ? Et quelles sont les différences entre la nage dans du miel et celle dans de l'eau ?

Qui donc pourrait vouloir nager dans du miel ? Personne. Si l'on s'intéresse à la nage dans le miel, ou dans les milieux très visqueux en général, c'est pour étudier des problèmes qui, bien qu'apparemment très différents, mettent en fait en jeu les mêmes mécanismes. En effet, la nage dans des milieux très visqueux à notre échelle (l'échelle macroscopique, de l'ordre du mètre) possède les mêmes caractéristiques que la nage dans de l'eau à très petite échelle (l'échelle microscopique, avec des tailles de l'ordre du centième de millimètre). Or, il est plus facile de réaliser des expériences de taille normale dans du miel que des expériences miniatures dans de l'eau !

Grâce à cet artifice, on peut étudier la nage dans des milieux aqueux (c'est-à-dire à base d'eau) à très petite échelle. Et, cette fois, les applications pratiques sont multiples. Par exemple, les bactéries sont des micro-organismes qui évoluent en nageant dans des fluides proches de l'eau comme le sang. Mieux comprendre leurs capacités de mouvement pourrait permettre soit de les empêcher de se déplacer afin de lutter contre certaines maladies soit, au contraire, de les aider à se développer (dans le cas par exemple des bactéries qui composent la flore intestinale et qui nous servent à digérer la nourriture que nous avalons). Un autre exemple, aux applications médicales encore plus évidentes, est celui des micro-robots nageurs. En effet, si nous arrivions à construire des minuscules robots capables de se mouvoir dans des milieux comme l'eau ou le sang, nous pourrions nous en servir pour transporter des substances médicamenteuses au sein même des cellules malades, effectuer des opérations chirurgicales dans le corps humain sans avoir besoin d'y découper une ouverture pour le scalpel du chirurgien, ou encore réaliser des réparations de taille microscopique, inaccessibles aux outils, même très perfectionnés, maniés par les humains.

Inertie et viscosité

Quelles sont donc les différences entre la nage de Michael Phelps, 1m93, et celle de la bactérie Escherichia Coli (voir figure 1), qui mesure quelques micromètres (millièmes de millimètres) ? Pourquoi ne peut-on pas étudier le mouvement de ces deux êtres vivants de la même façon ?

D'une façon générale, les deux types d'effets qui interviennent lors du mouvement dans un fluide sont les effets d'inertie et les forces de viscosité. Les effets inertiels, ce sont par exemple ceux que l'on ressent à l'intérieur d'un avion qui décolle : on est alors « plaqué » contre son siège pendant que l'avion accélère brutalement. Ces effets sont liés au fait que les forces physiques (frottements, poids, etc.) n'agissent pas directement sur notre vitesse, mais sur notre accélération.

Il est plus facile de réaliser des expériences de taille normale dans du miel que des expériences miniatures dans de l'eau.

Les forces de viscosité, elles, représentent les interactions entre les différentes molécules qui constituent le fluide. On peut les associer à la résistance que le fluide oppose lorsqu'on essaye de le déformer.

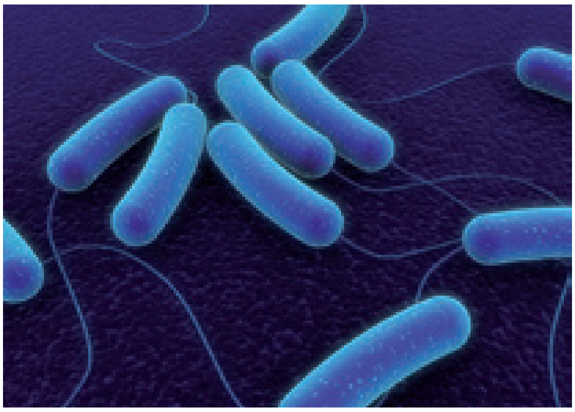

Figure 1. Un champion de natation vs. *E. Coli. Une différence de… taille.*

Ces deux effets ont des intensités très différentes en fonction de l'échelle à laquelle on se place. Pour mesurer leur importance relative, on utilise un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds. Le nombre de Reynolds d'un écoulement est donné par la formule $Re = \rho UL/\nu$, dans laquelle ρ et ν représentent la densité et la viscosité du fluide, et L et U sont respectivement une taille et une vitesse caractéristiques de l'écoulement (celles du nageur par exemple) : un nombre de Reynolds très grand (par rapport à 1) signifiera que les effets inertiels sont beaucoup plus importants que les effets visqueux, que l'on négligera alors ; au contraire, si le nombre de Reynolds est très petit, on se contentera de prendre en compte la viscosité, et pas l'inertie. C'est donc là que se situe toute la différence entre Michael Phelps et E. Coli : le nombre de Reynolds caractérisant la nage du champion olympique vaut environ 10 millions, tandis que celui caractérisant la nage d'une bactérie est de l'ordre de 0,00001.

Deux écoulements possédant des nombres de Reynolds semblables ont des caractéristiques similaires même s'ils correspondent à des situations très différentes.

Deux écoulements possédant des nombres de Reynolds semblables ont des caractéristiques similaires même s'ils correspondent à des situations très différentes comme par exemple pour des microorganismes évoluant dans l'eau, des objets de taille centimétrique évoluant dans un fluide très visqueux (miel, silicone, peinture, etc.) ou bien des écoulements au sein des glaciers. Dans ces trois cas, on est à faible nombre de Reynolds.

Le théorème de la Coquille Saint-Jacques

La nage à faible nombre de Reynolds, avant tout liée aux effets de viscosité, a des propriétés intéressantes et parfois inattendues. L'écoulement du fluide est décrit par des équations appelées *équations de Stokes* qui sont en fait une version simplifiée des *équations de Navier-Stokes* dans lesquelles l'inertie a été négligée. Elles ont une particularité extrêmement importante du point de vue mathématique : elles sont linéaires, c'est-à-dire que la modification d'un paramètre (pression, vitesse, etc.) entraîne une modification proportionnelle de tous les autres paramètres.

Cette linéarité a des conséquences importantes pour la nage à faible nombre de Reynolds, comme la réversibilité : si un objet se déforme d'une certaine façon, puis reprend sa forme initiale à nouveau de façon exactement inverse – on dit alors que le mouvement est *réciproque* – il reviendra aussi à sa position initiale et ne se sera pas déplacé. C'est le « théorème de la Coquille Saint-Jacques », établi par E.M. Purcell en 1977 : ces coquillages nageant en ouvrant et fermant leur coquille ne peuvent pas se déplacer dans des milieux dominés par la viscosité.

Figure 2. La coquille Saint-Jacques ne pourrait pas se déplacer dans un milieu dominé par la viscosité.

Pour contourner cette difficulté, Purcell imagine dès 1977 un système à deux batteurs capable de nager à faible nombre de Reynolds, en les actionnant successivement comme schématisé sur la figure 3. On notera qu'ici le mouvement n'est pas réciproque.

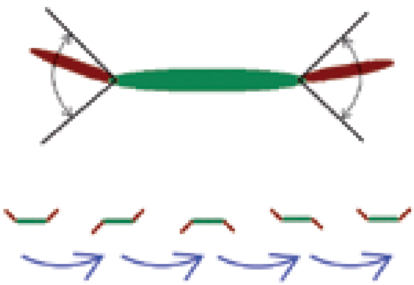

Figure 3. Le « Three-Link-Swimmer » de Purcell est un robot-nageur à deux batteurs. En actionnant successivement les deux batteurs selon le schéma du bas, le nageur progresse latéralement dans un écoulement dominé par la viscosité.

Optimiser sa natation

Le problème de la natation consiste à chercher des changements de forme périodiques, des brassées, qui produisent, par interaction avec le fluide, un déplacement du nageur. Le nageur (ou le robot-nageur) peut ensuite enchaîner les brassées de façon à avancer dans le fluide. Mathématiquement, ce problème revient à chercher un *chemin fermé* dans l'ensemble des formes que peut prendre l'objet qui conduise à un changement de sa position.

Le problème consistant à trouver des brassées minimisant l'énergie mécanique dépensée par le nageur afin de produire un déplacement donné est un problème de contrôle optimal.

C'est un problème de *contrôle*. En agissant sur des paramètres de contrôle – ici la forme du nageur – on souhaite réaliser un objectif : déplacer le nageur. De la même façon, conduire sa voiture est un problème de contrôle : en actionnant le volant et l'accélérateur, on cherche à déplacer le véhicule et l'amener à un endroit précis. La théorie du contrôle est l'ensemble des outils mathématiques qui sont utilisés pour démontrer rigoureusement qu'un dispositif est contrôlable, c'est-à-dire pour notre nageur, qu'il peut effectivement se déplacer en effectuant des brassées. Cette théorie utilise beaucoup d'arguments géométriques et d'équations différentielles ordinaires. En utilisant la théorie du contrôle, on peut ainsi démontrer rigoureusement que certains robots nageurs proposés par des physiciens peuvent effectivement se déplacer dans un fluide à un régime dominé par la viscosité. Les figures 3 et 4 donnent des exemples de tels robots.

Souvent, savoir que l'on peut contrôler un système est insuffisant. On veut aussi le faire en optimisant un critère, comme par exemple, lorsqu'on se déplace en voiture et que l'on veut minimiser le temps de parcours ou le carburant consommé. Le domaine mathématique est alors celui du contrôle optimal. Ainsi, pour revenir à la natation, le problème consistant à trouver des brassées minimisant l'énergie mécanique dépensée par le nageur afin de produire un déplacement donné (ou celui d'aller le plus vite possible avec une quantité d'énergie fixée) est un problème de contrôle optimal.

Il est possible de construire des algorithmes permettant de calculer numériquement (à l'aide d'un ordinateur) les brassées optimales de certains nageurs. Après modélisation du problème à résoudre, il s'agit de trouver une solution d'une équation différentielle ordinaire qui part d'un point connu (la position et la forme du nageur initialement) et arrive à un autre point connu (la position et la forme finales). On utilise alors ce que l'on appelle des « méthodes de tir » (qui portent leur nom par analogie au problème de balistique qui consiste à envoyer un boulet de canon d'un point à un autre en réglant l'orientation du canon). Pour les équations différentielles que l'on doit résoudre pour la natation optimale, on connaît le point de départ et l'on veut viser le point d'arrivée en réglant la vitesse initiale.

Ces recherches en théorie du contrôle optimal sont très actuelles (voir *Pour aller plus loin*). Qui sait, peut-être permettront-elles de concevoir les micro-robots de demain !

Pour aller plus loin

Le lecteur intéressé par l'approfondissement de ce sujet est invité à lire le très bel article de Purcell :

Purcell E.M., (1977). *Life at low Reynolds number*, Am. J. Phys, 45(1):3–11.

Les travaux de recherche d'un des auteurs de cet article sont également disponibles :

Alouges F., DeSimone A., Lefebvre A., (2008). *Optimal strokes for low Reynolds number swimmers : an example*, *J. Nonlinear Sci.*, 18(3):277-302.

Alouges F., DeSimone A., Lefebvre A., (2009). *Biological fluid dynamics : swimming at low Reynolds numbers*, *Encyclopedia of Complexity and System Science*, Springer Verlag.

A l'adresse http://www.cmap.polytechnique.fr/~alouges/nage.php on peut voir des vidéos montrant les stratégies optimales de natation de certains mécanismes et leur comparaison avec d'autres modes moins performants. La figure 4 est tirée de l'une d'entre elles.

Très instructif aussi, le film réalisé par G. I. Taylor (**G. I. Taylor**, *Low Reynolds Number Flow*, *National Committee for Fluid Mechanics Films*, Education Development Center. Inc., Newton, MA.) – et accessoirement disponible sur YouTube – montre un éventail exhaustif des multiples particularités des écoulements à faible nombre de Reynolds.

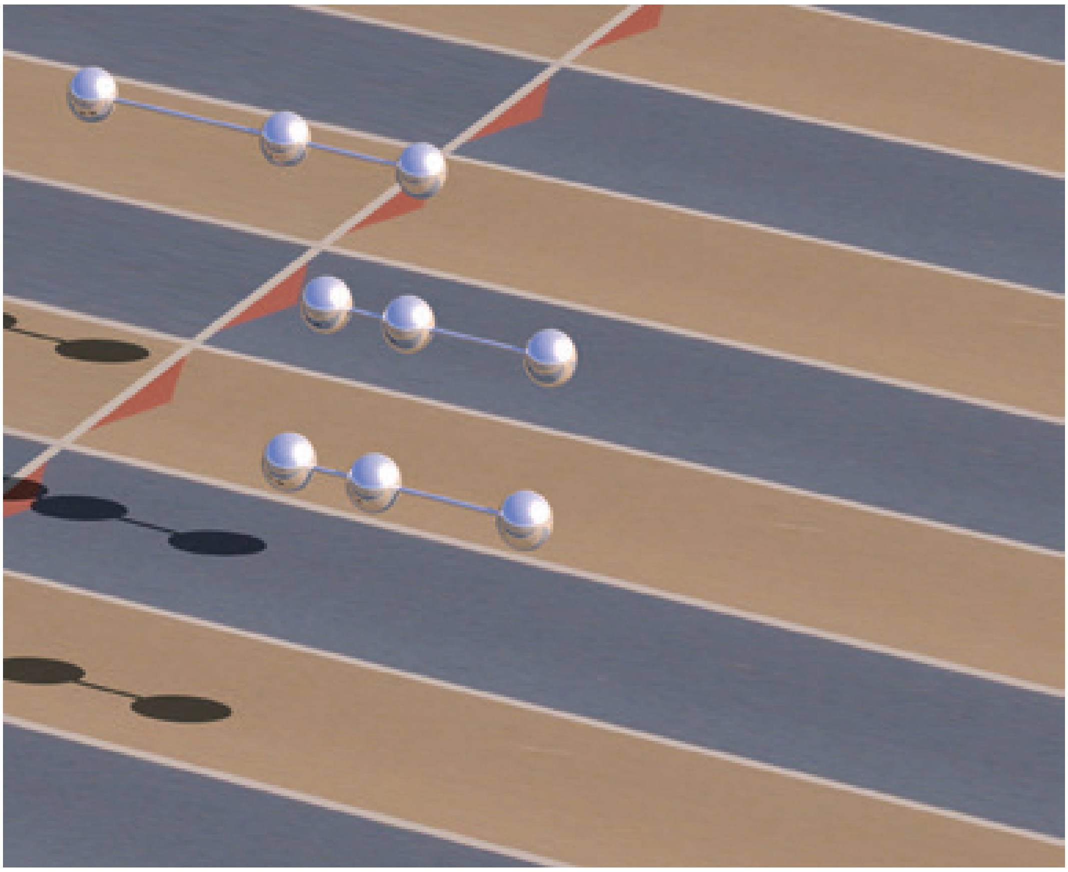

Figure 4. Simulation numérique d'une course entre trois nageurs composés de sphères alignées et reliées par des vérins extensibles. Le nageur au premier plan est calculé de façon à nager optimalement, et nage plus vite que les deux autres pour la même énergie dépensée. La course a lieu de la gauche vers la droite.