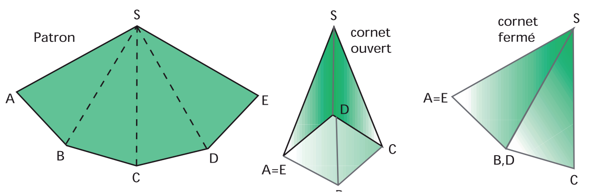
Le théorème du soufflet

Étienne Ghys, *directeur de recherche CNRS à l'École Normale Supérieure de Lyon*

Une règle, un crayon, du carton, des ciseaux et de la colle : il n'en faut guère plus pour procurer aux mathématiciens du plaisir et de jolis problèmes – dont l'étude se révèle souvent, après coup et de manière inattendue, utile dans d'autres métiers.

Construisons une pyramide en carton… Pour cela, on commence par découper un patron SABCDE dans une feuille de carton comme indiqué sur la figure, puis on plie le long des lignes pointillées et enfin, on colle les côtés AS et ES.



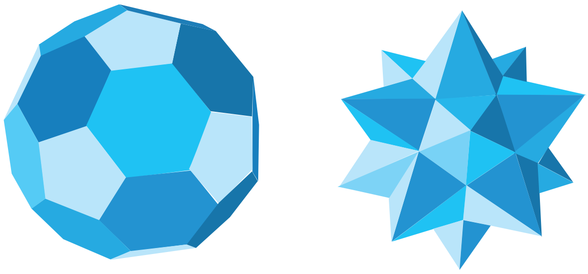
Le résultat est une espèce de cornet dont le sommet est le point S et dont le bord est un quadrilatère ABCD. Cet objet est *flexible*. Si on le tient dans la main, le quadrilatère ABCD peut se déformer et s'ouvrir plus ou moins : la construction n'est pas très solide. Pour compléter la pyramide, il faut encore découper un carré en carton et le coller sur le quadrilatère pour former la base. Après cette opération, la pyramide est solidifiée, rigidifiée. Si on la pose sur une table, elle ne s'écroule pas. Si on la prend dans la main et si on essaye de la déformer (avec douceur !), on n'y parvient pas, à moins de déformer les faces en carton. De même, un cube en carton est *rigide* comme tout le monde l'a souvent constaté. Qu'en est-il pour un *polyèdre* plus général, possédant peut-être des milliers de faces ? La géode de la Villette est-elle rigide ? Cette dernière question laisse entrevoir que le sujet de la rigidité et de la flexibilité n'est peut-être pas seulement théorique !

Le cas des polyèdres convexes

Le problème de la rigidité de ce type d'objets est très ancien. Euclide en avait probablement connaissance. Le grand mathématicien français André-Marie Legendre s'y intéresse vers la fin du XVIIIe siècle et en parle à son collègue Joseph-Louis Lagrange qui suggère à son tour au jeune Augustin-Louis Cauchy d'étudier cette question en 1813. Ce sera le premier résultat marquant du baron A.-L. Cauchy, qui deviendra par la suite l'un des plus grands mathématiciens de son siècle.

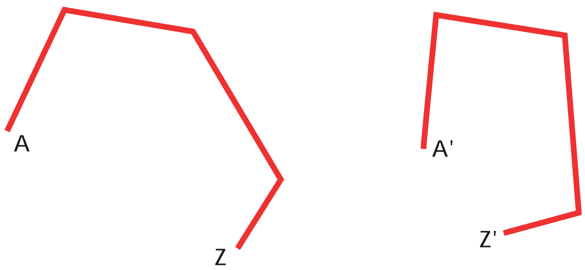
Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), l'un des grands mathématiciens de son époque. (Cliché Archives de l'École polytechnique)

A.-L. Cauchy s'intéresse aux polyèdres *convexes*, c'est-à-dire aux polyèdres qui n'ont pas d'arêtes rentrantes. Par exemple, la pyramide que nous avons construite ou le ballon de football est convexe mais l'objet dessiné à droite de la figure ci-dessous ne l'est pas.



Le théorème établi par A.-L. Cauchy est le suivant : *tout polyèdre convexe est rigide*. Cela signifie que si on construit un polyèdre convexe avec des polygones indéformables (en métal par exemple) ajustés par des charnières le long d'arêtes, la géométrie globale de l'ensemble empêche les jointures de jouer. Le cornet que nous avons construit est flexible mais ceci n'invalide pas le théorème : il lui manque une face et c'est la dernière face qui rigidifie la pyramide !

Faire des mathématiques, c'est *démontrer* ce qu'on affirme ! La démonstration de A.-L. Cauchy est superbe (même si certains ont fait remarquer par la suite qu'elle était incomplète). Il n'est malheureusement pas question dans ce petit article de donner une idée de cette preuve, mais j'aimerais en extraire un « lemme », c'est-à-dire une étape dans la démonstration. Posons sur le sol une chaîne constituée de quelques barres métalliques assemblées bout à bout, comme sur la figure ci-après.



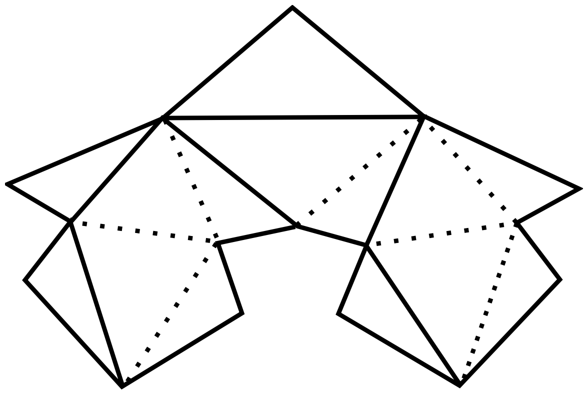
Si l'on diminue les angles de la chaîne, la distance entre les extrémités diminue : AZ est plus grand que A'Z'.

En chacun des angles de cette ligne polygonale, rapprochons les deux barres de façon à diminuer l'angle correspondant. Alors, les deux extrémités de la chaîne se rapprochent. Évident ? Essayez de le démontrer…

Construction d'un « flexidron »

Pendant longtemps, beaucoup de mathématiciens se sont demandés si les *polyèdres non convexes* étaient également rigides. Peut-on trouver une preuve de la rigidité qui n'utiliserait pas l'hypothèse de convexité ? Les mathématiciens aiment les énoncés dans lesquels *toutes* les hypothèses sont utiles pour obtenir la conclusion. Il a fallu attendre plus de 160 ans pour connaître la réponse dans ce cas particulier.

En 1977, le mathématicien canadien Robert Connelly crée la surprise. Il construit un polyèdre (assez compliqué) qui est flexible, bien sûr non convexe pour ne pas contrarier A.-L. Cauchy ! Depuis, sa construction a été quelque peu simplifiée, en particulier par Klaus Steffen. Je présente sur la figure un patron qui permettra au lecteur de construire le « flexidron » de K. Steffen. Découpez, pliez le long des lignes. Les lignes en continu sont des arêtes saillantes et les lignes en pointillé correspondent aux arêtes rentrantes. Collez les bords libres de la manière évidente. Vous obtiendrez une espèce de *Shadok* et vous verrez qu'il est effectivement flexible (un peu…).

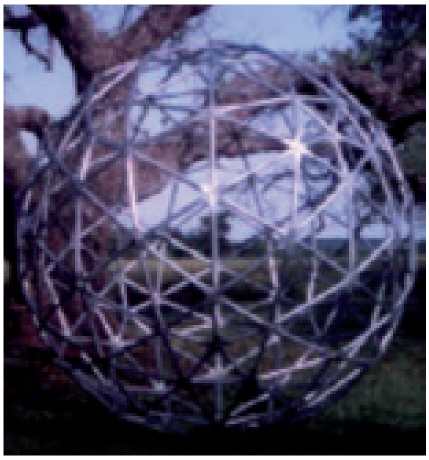


Le flexidron de Steffen. Les côtés mesurent 5, 10, 11,12 et 17.

À l'époque, les mathématiciens furent enchantés par ce nouvel objet. Un modèle métallique fut construit et déposé dans la salle de thé de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, à Bures-sur-Yvette, et on pouvait s'amuser à faire bouger cette chose (à vrai dire pas très jolie, et qui grince un peu). L'histoire raconte que Dennis Sullivan eut l'idée de souffler de la fumée de cigarette à l'intérieur du flexidron de R. Connelly et qu'il constata que lorsqu'on mettait en mouvement l'objet, aucune fumée ne sortait… Il eut donc l'intuition que lorsque le flexidron se déforme, son volume ne varie pas ! L'anecdote est-elle vraie ? Peu importe ! Quoi qu'il en soit, R. Connelly et D. Sullivan conjecturèrent que *lorsqu'un polyèdre se déforme, son volume est constant*. Évidemment, il n'est pas difficile de vérifier cela dans l'exemple particulier du flexidron de R. Connelly ou encore pour celui de K. Steffen (au prix de calculs compliqués mais sans intérêt). La conjecture en question considère **tous** les polyèdres, y compris ceux qui n'ont jamais été construits en pratique ! Ils ont appelé cette question la « conjecture du soufflet » : le soufflet au coin du feu éjecte de l'air quand on le presse ; autrement dit, son volume diminue (et c'est d'ailleurs sa fonction). Évidemment un vrai soufflet ne répond pas au problème de R. Connelly et D. Sullivan : il est fabriqué en cuir et ses faces se déforment constamment, contrairement à nos polyèdres dont les faces sont rigides.

En 1997, R. Connelly, I. Sabitov et A. Walz ont finalement montré cette conjecture. Démonstration grandiose, montrant une fois de plus les interactions entre toutes les parties des mathématiques. Dans cette question évidemment géométrique, les auteurs utilisent des méthodes très fines d'algèbre abstraite moderne. Il ne s'agit pas d'une démonstration que A.-L. Cauchy « aurait pu trouver » : les techniques mathématiques dont il disposait n'étaient pas suffisantes.

Je voudrais « rappeler » une formule qu'on apprenait autrefois à l'école secondaire. Si les longueurs des côtés d'un triangle sont a, b et c, on peut calculer facilement la superficie du triangle. Pour cela, on calcule d'abord le *demi-périmètre* $p = (a+b+c)/2$ et ensuite on obtient la superficie S en extrayant la racine carrée de $p(p-a)(p-b)(p-c)$. C'est une « jolie formule » qui porte le nom du mathématicien grec Héron et qui nous vient de la nuit des temps. Peut-on calculer de même le volume d'un polyèdre si on connaît les longueurs de ses arêtes ? C'est ce qu'ont montré nos trois auteurs contemporains. Ils partent d'un polyèdre construit à partir d'un patron formé d'un certain nombre de triangles et ils appellent l_1, l_2, l_3 etc. les longueurs des côtés de ces triangles (qui peuvent être très nombreux). Ils trouvent alors une équation du n^{ieme} degré satisfaite



Le dôme de la Villette (1730 triangles et 36 mètres de diamètre), et un dôme plus petit.

par le volume V du polyèdre, de la forme $a_0 + a_1V + a_2 V^2 + \ldots + a_n V^n = 0$.
Le degré n dépend du patron utilisé et les coefficients de l'équation a_0, a_1 etc. dépendent explicitement des longueurs des côtés l_1, l_2, l_3 etc. Autrement dit, si on connaît le patron et les longueurs des côtés, on connaît l'équation. Si le lecteur se souvient qu'une équation a en général une solution lorsqu'elle est du premier degré, deux solutions lorsqu'elle est du second degré, il pourra deviner qu'une équation de degré n n'a guère que n solutions. Conclusion : si on connaît le patron et les longueurs, on ne connaît pas nécessairement le volume, mais on sait au moins que ce volume ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs… Lorsque le flexidron se déforme, son volume ne peut donc pas varier continûment ; ce volume est « bloqué » et la conjecture du soufflet est établie…

L'ancien, le simple et l'appliqué

Ce problème est-il utile, intéressant ? Qu'est ce qu'un problème mathématique intéressant ? Question difficile à laquelle les mathématiciens réfléchissent depuis longtemps, bien sûr. Voici quelques éléments de réponse, quelques indices de « qualité ». L'ancienneté est un premier critère : les mathématiciens sont très sensibles à la tradition. Un bon problème doit également s'énoncer simplement, sa solution doit mener à des développements surprenants, si possible mettant en jeu des domaines très différents. De ces points de vue, le problème de la rigidité que nous venons d'aborder est intéressant. La question de savoir si un bon problème doit avoir des applications utiles dans la pratique est plus subtile : les mathématiciens y répondent de manière très variable. Incontestablement, les questions « pratiques », issues par exemple de la physique, servent bien souvent de motivations pour les mathématiques. Parfois, il s'agit de résoudre un problème bien concret, mais le lien est souvent plus flou : le mathématicien ne se sert alors de la question concrète que comme d'une *source d'inspiration* et la résolution effective du problème initial n'est plus la motivation véritable. Le problème de rigidité appartient à cette dernière catégorie. L'origine physique est assez claire : la stabilité et la rigidité de structures, par exemple métalliques. Il est douteux que les exemples de R. Connelly puissent un jour être d'une quelconque utilité pour l'ingénieur. Cependant, il paraît bien clair que ce genre de recherche ne manquera pas, dans un avenir indéterminé, de permettre une meilleure compréhension globale de la rigidité des vastes structures constituées d'un grand nombre d'éléments individuels (macromolécules ou bâtiments…). Il s'agit donc de recherches théoriques et « désintéressées », mais qui pourraient peut-être un jour se rendre utiles…

Ce genre de recherche ne manquera pas, dans un avenir indéterminé, de permettre une meilleure compréhension globale de la rigidité des vastes structures constituées d'un grand nombre d'éléments individuels.

Pour aller plus loin

Berger M., (1977). *Géométrie, v. 3. – Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes* (CEDIC/Nathan Information).

Connelly R., **Sabitov I.**, **Walz A.**, (1997). *The bellows conjecture*, Beiträge Algebra Geom., 38, n° 1, p. 1-10.

Connelly R., (1977). *A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra*, Institut des Hautes Études Scientifiques, Publication Mathématique n° 47, p. 333-338.

Kuiper N. H., (1979). *Sphères polyédriques flexibles dans E^3*, d'après Robert Connelly, Séminaire Bourbaki, 30e année (1977/78), exposé n° 514, pp. 147-168 (Lecture Notes in Math. 710, Springer).