Jean Bourgain
Photo J. P. Bolle, MESR

DOSSIERS

MÉDAILLE FIELDS 1994
JEAN BOURGAIN

Jean Bourgain est né en février 1954 à Ostende, en Belgique. Etudiant à l'Université libre de Bruxelles (la partie flamande, la VUB, bien qu'il soit francophone), il y reçoit une très bonne formation d'analyste, qui lui permet d'écrire sa première publication vers 20 ans. Il soutient une thèse en 1977 en théorie descriptive des ensembles et applications aux espaces de Banach, sous la direction de F. Delbaen.

Jean Bourgain commence sa carrière au Fonds National de la Recherche Scientifique de Belgique. Ses résultats en Analyse et en Géométrie des espaces de Banach sont de plus en plus remarqués, et ses séjours à l'étranger se multiplient : en France, à Paris 6 et Paris 11, en Israël et aux Etats-Unis. En 1985 il est nommé professeur à la VUB et il accepte, la même année, l'un des six postes de professeur permanent à l'IHES. Cet institut a compté ou compte parmi ses membres René Thom, Alexandre Grothendieck, Pierre Deligne et Alain Connes (Médailles Fields en 1958, 1966, 1978 et 1982 respectivement). A peu près au même moment, il est nommé titulaire de la chaire Doob à l'Université d'Illinois à Urbana. C'est dire que, déjà à cette époque, l'ensemble des travaux de Jean Bourgain est impressionnant et en fait un candidat potentiel à la médaille Fields. Depuis 1994 Jean Bourgain est en détachement de l'IHES; il a été nommé professeur à l'Institute for Advanced Study de Princeton.

Jean Bourgain n'a pas jusqu'à présent encadré d'étudiants. Il a de nombreuses collaborations internationales. Pendant longtemps, il a travaillé très tard la nuit, se levant à midi et ne donnant presque jamais de conférence le matin; c'est devenu plus difficile depuis qu'il est père d'un petit garçon, qui a maintenant trois ans.

De façon un peu simpliste, on peut dire que certains mathématiciens bâtissent de grandes théories, tandis que d'autres s'attaquent directement aux problèmes qui ont résisté aux efforts de leurs prédécesseurs. Jean Bourgain appartient à la deuxième catégorie; il a publié plus de 200 articles; dans de nombreux cas (pas tous, bien sûr) il résout un problème difficile, posé par les spécialistes d'un sujet. Ces contributions sont d'autant plus impressionnantes qu'elles arrivent après un grand développement de l'Analyse dans les années 60 et 70 (avec Carleson, Stein, Fefferman entre autres).

On peut comparer Jean Bourgain aux analystes les plus importants de ce siècle, par exemple aux grands analystes des années 20–30 : Hardy, Weyl, Wiener, Carleman, Levinson. Sa puissance analytique rappelle celle de Carleson, et son œuvre couvre la plupart des directions de l'analyse classique. Bourgain a une capacité remarquable pour apprendre un nouveau sujet rapidement, comprendre le cœur du problème, et utiliser alors son vaste répertoire techniques et son incroyable puissance analytique pour résoudre des problèmes majeurs dans des directions nouvelles pour lui. Plusieurs sujets ont été transformés par son travail, et placés à un niveau de profondeur et de raffinement bien plus élevé.

Les travaux de Jean Bourgain portent sur des domaines très variés de l'Analyse : géométrie des espaces de Banach, analyse harmonique, analyse réelle et complexe, analyse et théorie des nombres, théorie ergodique et équations aux dérivées partielles non linéaires. Les techniques utilisées, très fines et puissantes, mélangent avec virtuosité des outils d'analyse, de probabilités et de géométrie, ainsi que des arguments combinatoires.

Il n'est pas facile de trouver des mathématiciens pouvant donner un avis pertinent sur l'ensemble des travaux de Jean Bourgain. Nous avons donc demandé à une dizaine de collègues[1] de décrire, en peu de mots, les travaux qu'ils connaissent le mieux. De ce fait, des aspects très importants de l'œuvre de Jean Bourgain seront ici passés sous silence, et nous renverrons le lecteur à d'autres sources, par exemple l'article de J. Lindenstrauss dans les Notices of the AMS, Nov-Dec 94.

Le premier article de Bourgain paraît en 1976 dans les Proceedings of the AMS; l'auteur a alors 22 ans! Dans cet article il retrouve par une méthode "géométrique" le théorème de Lindenstrauss-Troyanski selon lequel tout convexe faiblement compact C dans un espace de Banach X est l'enveloppe convexe fermée de ses points fortement exposés (x est fortement exposé dans C s'il existe une forme linéaire continue x^* sur X pour laquelle toute suite (x_n) de C *maximisante* pour x^* — c'est-à-dire que $\lim x^*(x_n) = \sup x^*(C)$ — converge en norme vers x). Pendant plusieurs années, Bourgain va s'intéresser à la propriété de Radon-Nikodym et plus généralement à la géométrie de dimension infinie des ensembles convexes; pour expliquer rapidement la propriété de Radon-Nikodym, rappelons qu'une fonction à valeurs réelles, harmonique et bornée dans le disque unité du plan admet une limite radiale suivant presque tout rayon; ceci n'est plus vrai pour des fonctions à valeurs dans un espace de Banach X, et on dit précisément que X vérifie la propriété de Radon-Nikodym lorsque ces limites radiales (en norme) existent dans X pour toute fonction harmonique bornée dans le disque et à valeurs dans X. Il existe des formulations équivalentes en termes de martingales vectorielles, ou de mesures vectorielles (c'est ce dernier point de vue qui est à l'origine de la dénomination). Bourgain obtient des

[1] Ont collaboré à cet article Myriam Déchamps, Gilles Godefroy, Bernard Maurey, Alain Pajor, Gilles Pisier, Martine et Hervé Queffélec, Jean-Claude Saut et Jean-Paul Thouvenot.

résultats frappants sur la notion plus fine de *convexe vérifiant la propriété de Radon-Nikodym*, tels que le théorème suivant, amélioration d'un théorème de Phelps : si C est un convexe de Radon-Nikodym, l'ensemble des formes linéaires qui exposent fortement le convexe C contient un G_δ dense dans le dual. Appliqué aux fonctions, ce théorème donne un principe de perturbation très intéressant : si f est une fonction réelle semi-continue inférieurement minorée sur un convexe de Radon-Nikodym, l'ensemble des formes linéaires x^* telles que $f + x^*$ atteigne son minimum sur C contient un G_δ dense dans le dual. A 25 ans, Jean Bourgain donne un cours de troisième cycle à Paris 6, dont les notes, publiées par Paris 6, seront une source d'inspiration pour tous les chercheurs qui s'intéressent à la propriété de Radon-Nikodym.

Parallèlement, il travaille sur des problèmes aux frontières de la topologie (classes de Baire) et de la théorie descriptive des ensembles. Szlenk avait introduit un indice ordinal attaché à tout Banach séparable réflexif, et cet indice lui avait permis de montrer qu'il n'existe pas d'espace de Banach réflexif séparable universel, c'est à dire contenant une copie isomorphique de tout Banach réflexif séparable. Jean Bourgain introduit diverses notions d'indice ordinal qui lui permettent de montrer la non-existence d'espaces universels pour de nouvelles classes d'espaces de Banach. Jean Bourgain a appliqué à plusieurs reprises les méthodes de théorie descriptive liées au "théorème de la borne", qui associe un ordinal dénombrable à tout arbre dénombrable *bien fondé*, c'est à dire un arbre sans branche infinie. Si T est un arbre dénombrable bien fondé, on peut l'épuiser par une succession ordinale dénombrable d'opérations qui consistent à lui retrancher ses "feuilles". Avec Rosenthal et Schechtman, il obtient, en utilisant entre autres choses une notion convenable d'indice ordinal associée à des arbres bien fondés dont les noeuds sont des suites finies de vecteurs d'un Banach, l'existence d'une famille non-dénombrable de sous-espaces complémentés de L_p deux à deux non isomorphes (lorsque $1 < p < \infty$).

UN de ses premiers articles impressionnants est consacré aux espaces $\mathcal{L}_\infty$ (en collaboration avec Delbaen). Les espaces $\mathcal{L}_\infty$ sont une généralisation des espaces ℓ_∞ (suites bornées de scalaires), c_0 (suites tendant vers 0), $C(K)$ (fonctions continues sur un compact) ou bien $L_\infty(\Omega, \mu)$ (fonctions mesurables bornées presque sûrement sur Ω). Jusqu'au travail de Bourgain, on pensait que les espaces $\mathcal{L}_\infty$ étaient forcément tous "très gros", comme l'espace ℓ_∞ usuel qui contient tout espace de Banach séparable comme sous-espace. L'article mentionné montre qu'il n'en est rien : il existe des espaces $\mathcal{L}_\infty$ qui ne contiennent pas de sous-espace isomorphe à c_0. Ces espaces possèdent en fait les propriétés de Radon-Nikodym et de Schur qui sont des propriétés classiques de l'espace ℓ_1. Ces espaces $\mathcal{L}_\infty$ se comportent d'ailleurs "transversalement" si l'on peut dire, beaucoup plus comme ℓ_1 que comme ℓ_∞. Ces exemples retentissants ont complètement bouleversé l'idée que l'on se faisait des espaces $\mathcal{L}_\infty$. Par la suite, Bourgain a appliqué avec succès des idées tout à fait différentes au cas des espaces $\mathcal{L}_1$, mais il n'y a pas la place ici de développer ici la description de ces travaux pourtant fort beaux.

Au début des années 80, Jean Bourgain a opéré un tournant et s'est intéressé de près aux questions laissées ouvertes sur les espaces de Banach de fonctions analytiques (espaces H_1 et H_∞ de Hardy principalement). Rappelons que H_∞ est l'espace des fonctions analytiques bornées dans le disque unité ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$. Son résultat le plus spectaculaire dans cette direction est peut-être sa démonstration que l'espace H_∞ vérifie le théorème de Grothendieck. L'une des formes du théorème de Grothendieck dit que tout opérateur linéaire borné de L_∞ dans L_1 se factorise par L_2 (une forme équivalente est "l'inégalité de Grothendieck"). Bourgain démontre un théorème de factorisation qui implique que tout opérateur linéaire borné de H_∞ dans H_1 se factorise par H_2. Par dualité cela se traduit par des inégalités étonnantes (et très utiles) vérifiées par l'espace de Banach quotient L_1/H_1 qui est le prédual de H_∞. Par exemple celle-ci : si une série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ avec $x_n \in L_1/H_1$ converge inconditionnellement dans L_1/H_1 alors nécessairement $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$. Il démontre pour ces besoins une série de raffinements du lemme de Havin, qui construit des fonctions de H_∞ qui approchent dans une certaine mesure des fonctions caractéristiques de sous-ensembles du cercle et permet de généraliser certaines approches du théorème de Grothendieck pour L_∞. Par la suite dans cette direction on peut citer deux autres contributions éblouissantes : la preuve que les algèbres de fonctions analytiques bornées $A(D^n)$ dans les polydisques D^n sont mutuellement non isomorphes pour des valeurs distinctes de l'entier n, et aussi le théorème qui implique que les espaces H_1 du disque et du bidisque sont non isomorphes.

Mentionnons un résultat qui ne figure pas parmi les plus difficiles de Bourgain, mais qui a eu un grand impact tant il est simple et joli. On sait après Burkholder, Gundy et Silverstein, qu'on peut retrouver les propriétés de la transformation de Hilbert comme opérateur sur les $L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, à partir des martingales du brownien et des inégalités de Burkholder-Gundy. Mais on ne savait pas inversement parler des martingales à partir de la transformation de Hilbert. C'est ce que Bourgain obtient par une méthode de "transférence" utilisant un produit infini de copies du cercle $\mathbb{T}$. Cela permet de caractériser les espaces de Banach "UMD", étudiés peu avant par Burkholder, au moyen du fait que la transformée de Hilbert (vectorielle) sur $L_2(\mathbb{T}, X)$ est bornée. Ce résultat a beaucoup impressionné Burkholder et contribué à la venue de Jean Bourgain à Urbana, une étape d'une certaine importance dans sa carrière.

Dans beaucoup de questions d'Analyse harmonique se pose le problème de l'existence d'ensembles finis d'entiers $\Lambda_n = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$

tels que l'espace des polynômes trigonométriques à coefficients dans Λ_n possède diverses propriétés non triviales. De tels ensembles sont souvent difficiles à construire explicitement et on doit recourir à des méthodes aléatoires. Des résultats de Katznelson-Malliavin et Kahane avaient déjà largement ouvert la voie à ces méthodes. Bourgain popularise une variante qu'il baptise la "méthode des sélecteurs" ; il adopte le point de vue suivant, qui se révèle très efficace dans un grand nombre de problèmes. Soient $\xi_1, \ldots, \xi_N$ N variables aléatoires indépendantes, à valeurs 0 ou 1 avec $P(\xi_j = 1) = \delta_j$. Pour $\omega \in \Omega$, on pose

$$\Lambda_\omega = \{j : \xi_j(\omega) = 1\} \ ;$$

c'est l'ensemble choisi au hasard, et les ξ_j s'appellent des sélecteurs. Le choix de δ_j n'est nullement indifférent, et doit souvent être subtilement adapté au problème. L'ensemble aléatoire obtenu n'a pas un cardinal constant, mais son nombre d'éléments est souvent très concentré autour de la valeur moyenne. Un des premiers résultats obtenus par Bourgain avec les sélecteurs concerne la construction de suites $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ d'entiers telles que

$$\|\sum_{i=1}^{n} \sin \lambda_i x\|_\infty \leq c n^{2/3},$$

où c est une constante numérique (1981). Cette estimation, utile dans l'étude de la transformée de Hilbert à valeurs vectorielles, n'a pas été améliorée depuis. La méthode des sélecteurs a été utilisée avec succès par Bourgain dans d'autres problèmes :

— en 1987, Bourgain et Tzafriri utilisent les sélecteurs pour l'extraction de sous-matrices "bien inversibles", résultat qui a des applications à la géométrie des espaces de Banach, à l'Analyse harmonique et au problème de Kadison-Singer en C^*-algèbres. Sur ce problème ils sont allés bien plus loin que leurs prédécesseurs, sans réussir toutefois à démontrer la conjecture de Kadison-Singer ;

— en 1988, les sélecteurs interviennent dans la preuve par Bourgain de l'existence de vrais ensembles Λ_p. Parmi les travaux d'Analyse harmonique de Bourgain, sa solution du "problème des Λ_p de Rudin" est sans doute le plus spectaculaire. Soit $p > 2$. Un ensemble Λ_p dans $\mathbb{Z}$ est un ensemble $\Lambda = \{n_j : j \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Z}$ d'entiers tel que pour toute série de Fourier

$$(P1) \qquad f(t) = \sum_j a_j \, e^{i n_j t}$$

à spectre dans Λ on ait $f \in L_2 \Rightarrow f \in L_p$ et qu'il existe une constante C telle que

$$(P2) \qquad \|f\|_p \leq C\|f\|_2.$$

Noter que l'implication $f \in L_2 \Rightarrow f \in L_p$ est inverse de l'implication banale, dans le cas $p > 2$, correspondant à l'inclusion classique $L_p \subset L_2$. On a donc en fait équivalence des normes L_p et L_2 pour les fonctions f de la forme $(P1)$. Les inégalités $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ si $p \leq q$ montrent que la notion d'ensemble Λ_p est d'autant plus restrictive que p est grand. Cette notion est apparue dans un article très important de Rudin (1961) dans lequel Rudin donne une méthode algébrique très ingénieuse pour exhiber des ensembles Λ_4 qui ne sont pas "mieux", c'est à dire qu'ils ne sont $\Lambda_{4+\varepsilon}$ pour aucun $\varepsilon > 0$. Appelons pour abréger *ensemble* Λ_p *strict* un ensemble Λ_p qui n'est $\Lambda_{p+\varepsilon}$ pour aucun $\varepsilon > 0$. Rudin construit en fait des Λ_p stricts pour tout p entier pair ≥ 4. La question s'est immédiatement posée d'étendre cela à toute valeur de $p > 2$ (et pour commencer pour $2 < p < 4$). Malgré quelques contributions éparses, ce problème très connu à la fois en Analyse harmonique, en Combinatoire et sans doute en théorie des nombres est resté ouvert pendant trente ans jusqu'à ce que Bourgain le résolve, par un des tours de force dont il a le secret. La particularité de ce problème est que tous les experts savaient depuis longtemps que l'exemple cherché devait s'obtenir par le choix d'un sous-ensemble aléatoire d'entiers dont on pouvait préciser tous les paramètres. Ce choix des paramètres garantit que si l'ensemble est Λ_p, il est Λ_p strict. Mais personne n'a réussi avant Bourgain a démontrer que ces ensembles aléatoires sont presque sûrement des Λ_p. Il s'agit de montrer que, pour presque tout ensemble aléatoire, on a l'inégalité $(P2)$ pour toute série de Fourier à spectre dans cet ensemble. La difficulté tient à l'absence presque totale de méthode pour calculer la norme L_p d'un polynôme trigonométrique d'une manière qui se prête bien à la "randomisation" (pardon M. Toubon). Dans le cas d'un entier pair, par exemple $p = 4$, on savait déjà depuis longtemps que la méthode aléatoire est concluante grâce à la formule

$$\|f\|_4 = \|f^2\|_2 = \|\widehat{f} * \widehat{f}\|_{\ell_2(\mathbb{Z})}$$

qui permet de calculer la norme L_4 comme un polynôme en les coefficients de Fourier.

Le caractère "probabiliste" de la méthode pose évidemment le problème de construire des exemples explicites d'ensembles Λ_p stricts, mais cela semble lié à de très difficiles problèmes de théorie des nombres. Signalons par exemple qu'on ignore toujours si l'ensemble des carrés $\Lambda = \{j^2 : j = 1, 2\ldots\}$ est un ensemble Λ_p pour une quelconque valeur de $p < 4$ (Rudin a montré qu'il n'est pas Λ_4).

BOURGAIN, avec Milman, a démontré une conjecture de dichotomie qui s'attache à la structure d'espace de Banach de C_Λ, l'espace des fonctions continues sur le cercle dont le spectre est contenu dans un sous-ensemble $\Lambda \subset \mathbb{Z}$. Ils ont montré (confirmant une conjecture de Pisier et Pełczyński) la dichotomie suivante : ou bien $C_\Lambda \simeq \ell_1$ c'est à dire que Λ est un ensemble de Sidon (d'après un théorème de Varopoulos), ou bien C_Λ a une ultrapuissance qui contient ℓ_∞ ; autrement dit C_Λ est soit très petit (ℓ_1 correspond aux cas les plus lacunaires) soit très gros (C_Λ reproduit alors presque isométriquement tout espace normé de dimension finie). L'inégalité clé est encore une inégalité sur les séries aléatoires.

BOURGAIN a contribué à la "théorie locale" des espaces de Banach, que certains préfèrent nommer théorie asymptotique des espaces normés, car il s'agit d'étudier globalement des familles d'espaces normés de dimension finie mais tendant vers $+\infty$. Dans une première direction, il s'est intéressé aux applications de cette théorie à la géométrie des convexes de $\mathbb{R}^n$. Nous citerons ici l'un de ses résultats les plus importants dans cette direction.

Si K est un corps convexe symétrique de dimension n, on sait par le théorème de Blaschke-Santaló que le produit $P(K)$ des volumes de K et de son polaire K^0 est maximal pour la boule euclidienne B_n. Avec V. Milman, Jean Bourgain a montré que pour tout corps convexe K,

$$P(K)^{1/n} \geq cP(B_n)^{1/n},$$

où $c > 0$ est une constante indépendante de la dimension n et de K (une constante "universelle"). Ce résultat fondamental et attendu depuis longtemps (problème posé par Mahler en 1939) est devenu un outil classique (appelé parfois inégalité de Santaló inverse) en géométrie des convexes.

Bourgain a abordé de nombreux autres problèmes en géométrie des convexes, notamment des problèmes de symétrisation (nombre de symétrisations de Steiner suffisant pour approcher une boule euclidienne, par exemple). L'apport par Jean Bourgain de puissantes techniques analytiques a profondément transformé ce domaine. Il utilise (et combine), souvent avec un grand raffinement, les techniques de la théorie asymptotique des espaces normés de dimension finie (type et cotype) s'appuyant sur la théorie de la K-convexité (développée par Pisier) et des méthodes probabilistes (sélecteurs, processus gaussiens, concentration,...), ainsi que combinatoires et entropiques.

DANS une autre direction de la théorie asymptotique, une construction remarquable de Gluskin a montré que le compact de Minkowski des espaces normés de dimension n a, pour la "distance" de Banach-Mazur, un diamètre de l'ordre de n (c'est à dire l'ordre théorique maximal). Bourgain utilise cette percée dans deux directions; il construit deux espaces de Banach complexes qui sont isomorphes en tant qu'espaces réels, mais non isomorphes comme espaces complexes. Par une abstraction de la méthode de Gluskin, il obtient des résultats sur le problème des espaces homogèmes de dimension finie. Pour une fois, ce problème sera achevé par d'autres que lui, Mankiewicz et N. Tomczak; l'énoncé du problème est un peu long à donner ici, mais la version isométrique correspondante, qui a été étudiée (et résolue dans presque tous les cas) par Gromov est la suivante : que peut-on dire d'un espace normé de dimension n dont tous les sous-espaces de dimension q fixée sont isométriques? S'agit-il de la norme euclidienne? Ces résultats contribueront à donner une nouvelle jeunesse à un vieux problème de Banach, le problème des espaces de Banach homogènes : l'espace ℓ_2 est-il (à isomorphisme près) le seul espace de Banach isomorphe à tous ses sous-espaces fermés de dimension infinie? Ce problème sera résolu positivement en 93 sous les efforts de N. Tomczak et de T. Gowers.

La fonction maximale f^* de Hardy et Littlewood d'une fonction $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ appartient à L_p (lorsque $1 < p \leq \infty$) et il existe une constante C, dépendant a priori de la dimension n telle que

$$\|f^*\|_p \leq C\|f\|_p.$$

On peut associer plus généralement à un corps convexe symétrique B de $\mathbb{R}^n$ et à chaque fonction intégrable $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ la fonction maximale

$$f_B^*(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mathrm{vol} B} \int_{rB} |f(x+t)|\, dt.$$

Pour B fixé, cette fonction maximale est bien sûr équivalente à la fonction maximale de Hardy-Littlewood calculée avec la sphère euclidienne, mais il n'y a pas d'uniformité évidente dans cette équivalence lorsque B et la dimension varient. Bourgain montre que pour $p > 3/2$, il existe une constante $c(p)$ indépendante de la dimension n et du corps convexe B telle que pour toute fonction $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ on ait

$$\|f_B^*\|_p \leq c(p)\|f\|_p.$$

Pour la famille des boules euclidiennes de dimension quelconque, le résultat est vrai pour tout $p > 1$ et avait été obtenu par Stein et Stromberg en 83. La démonstration de Bourgain fait appel à des considérations de géométrie des convexes (Brunn-Minkowski) et à l'Analyse de Fourier. Bourgain obtient aussi le cas $p > 1$ pour des classes de convexes particuliers telles que les boules ℓ_q^n, pour q entier pair. Avec ce résultat impressionnant, Jean Bourgain confirme son entrée dans le groupe des grands spécialistes de l'Analyse réelle.

Le caractère borné, pour des normes L_p convenables, des multiplicateurs de Bochner-Riesz est une question centrale pour l'Analyse harmonique dans $\mathbb{R}^n$. De même pour les questions de restriction de transformées de Fourier à des sphères, ou plus généralement les estimations d'intégrales oscillantes. Jean Bourgain a obtenu dans ces directions des résultats pour les dimensions $n \geq 3$ qui vont au delà des résultats auparavant connus, qui étaient obtenus en général par interpolation à partir des résultats L_2. Il obtient ainsi de nouveaux résultats sur les ensembles du type de Kakeya dans R^n, $n \geq 3$.

Les travaux de Bourgain qui portent sur la théorie ergodique sont tous centrés sur des variantes du théorème de convergence des moyennes ergodiques. Il faut cependant signaler que le premier contact de Bourgain avec la théorie a consisté à donner une nouvelle preuve d'un théorème de Furstenberg et Katznelson : si un ensemble A du plan a une densité positive, alors l'ensemble des réels $d(x, y)$, $x, y \in A$ contient une demi-droite. La démonstration de Bourgain fait appel à l'analyse harmonique, alors que Furstenberg et Katznelson utilisaient des techniques ergodiques.

Le théorème ergodique ponctuel de Birkhoff (1931) est le premier résultat important en théorie ergodique : si $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est un système dynamique où

T est une bijection bimesurable de X préservant la probabilité μ, alors, pour toute fonction $f \in L_1(X)$,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T^k x)$$

converge quand $N \to \infty$ pour μ-presque tout $x \in X$. Peu auparavant, Von Neumann avait établi, pour $f \in L_2(X)$, la convergence de ces moyennes dans L_2 vers la projection de f sur l'espace des fonctions T-invariantes. Le résultat de Birkhoff est cependant d'une tout autre difficulté.

Une des généralisations envisagées fut d'établir ce théorème pour des sous-suites d'entiers (m_k), par exemple la suite (k^2) des carrés d'entiers. La convergence L_2 dans ce cas était connue depuis longtemps et est une conséquence d'un théorème de Weyl. Par le théorème spectral, la convergence dans L_2 de moyennes de la forme $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T^{m_k}x)$ se ramène à la convergence dans $L_2(\sigma_f)$ des polynômes $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i m_k x}$ où σ_f est la mesure spectrale de f sur $\mathbb{T}$, définie par

$$\widehat{\sigma}_f(n) = \int_X \overline{f(x)} f(T^n x)\, d\mu(x) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Le premier travail "ergodique" de Bourgain est consacré à la démonstration du théorème ergodique ponctuel pour l'ensemble des carrés d'entiers : si $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est un système dynamique et si f est une fonction de $L_2(X,\mu)$ alors

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T^{k^2} x)$$

converge pour μ-presque tout $x \in X$. Derrière cet énoncé ergodique, s'en cache un autre de forme beaucoup plus proche de l'analyse : si $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$ et si on définit

$$a_n^* = \sup_{N>0}\Big|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_{n+k^2}\Big|$$

alors $(a_n^*) \in \ell_2(\mathbb{Z})$ et $\|(a_n^*)\|_2 \le C\|(a_n)\|_2$, où C est une constante universelle. Le passage de l'énoncé d'analyse à l'énoncé ergodique (le "principe de transférence" dû à Wiener et Calderon) se fait en quelques lignes. Il faut noter que le même énoncé sur les suites, pour les moyennes usuelles, avait été obtenu par Hardy et Littlewood un an avant la démonstration du théorème ergodique par Birkhoff. En fait $\|(a_n^*)\|_2 \le C\|(a_n)\|_2$ donne un lemme maximal qui entraîne que l'ensemble des fonctions pour lesquelles il y a convergence presque sûre des moyennes est fermé dans L_2. La construction d'une classe dense, aisée pour les moyennes de Birkhoff, demande un tout autre travail pour "les carrés", mais là encore, Bourgain utilise $\ell_2(\mathbb{Z})$ et la "transférence".

L'originalité de la méthode de Bourgain commence dès le début du traitement de la suite (a_n^*). Par transformation de Fourier, si $f \in L_2(\mathbb{T})$ et

$$f^*(n) = \sup_{N \in \mathbb{Z}} \Big| \int_0^1 \mathrm{e}^{2i\pi n\alpha} f(\alpha) K_N(\alpha)\, d\alpha \Big|,$$

l'inégalité à démontrer devient

$$\|(f^*(n))\|_2 \leq C\|f\|_2, \tag{1}$$

où $K_N(\alpha) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \mathrm{e}^{2i\pi k^2\alpha}$. Il y a une analyse remarquable dans la démonstration de (1) fondée en partie sur des estimations et des découpages proches de la méthode du cercle de Hardy et Littlewood.

La méthode développée par Bourgain permet de donner le même théorème de convergence pour toutes les fonctions de L_p, $p > 1$, et pour de nombreuses suites de type arithmétique : la suite des nombres premiers, la suite $[p(n)]$ où p est un polynôme à coefficients réels dont le terme de plus haut degré a un coefficient > 0. Le théorème se prolonge aussi à l'action de plusieurs transformations qui commutent.

Signalons enfin le résultat suivant de Bourgain : si f est une fonction périodique de période 1 sur $\mathbb{R}$, si $\int_0^1 |f(x)|^2\, dx < \infty$ et si θ est un nombre algébrique plus grand que 1, alors

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N f(\theta^n x)$$

converge presque sûrement. Pour θ entier, c'est exactement le théorème ergodique, autrement il faut prendre garde que ($\theta^n x$ mod 1) n'est pas l'orbite de x par une transformation de l'intervalle $[0, 1]$ et donc l'énoncé n'appartient pas à la théorie ergodique stricto sensu (mais des techniques ergodiques sont utilisées dans la démonstration).

JEAN Bourgain a apporté des contributions spectaculaires à la théorie du problème de Cauchy associé à des équations non linéaires dispersives : Korteweg–de Vries (KdV), Schrödinger non linéaire (NLS), Kadomtsev–Petviashvili (KPII). Introduisant des idées très originales, il a amélioré la plupart des résultats connus (notamment dans le cas périodique puisque les théorèmes les plus fins établis auparavant dans le cas de tout l'espace étaient fondés sur des propriétés de lissage local qui ne sont plus vraies dans le cas périodique). Pour illustrer ces résultats de Bourgain, nous nous restreignons à un exemple frappant, celui de l'équation dite KPII

$$(u_t + uu_x + u_{xxx})_x + u_{yy} = 0$$

$u(x, y, 0)$ donnée, où u est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$. Bourgain cherche une solution locale par un argument de contraction sur la formulation intégrale de KPII (par la formule de Duhamel). La première idée, très neuve, est celle du choix de la norme "de restriction de Fourier", fondée sur le symbole de l'opérateur linéaire de KPII (la norme utilisée jusque là était du type Sobolev). Dans le cas périodique, cette nouvelle norme s'écrit, pour une fonction u définie sur $\mathbb{T}^2 \times I$, $I = [0, \tau]$, de moyenne nulle en x,

$$\|u\|^2 = \sum_{m,n;m\neq 0} \int d\lambda \Big(\frac{1}{\tau} + |\lambda - m^3 + \frac{n^2}{m}|\Big)\Big(1 + \frac{|\lambda - m^3 + \frac{n^2}{m}|}{\frac{1}{\tau} + |m|^3}\Big)^{1/2} |\widehat{u}(m,n,\lambda)|^2.$$

(en fait on prend le minimum du membre droit pour tous les $\widehat{u}(m,n,\lambda)$ tels que, pour $(x,y,t) \in \mathbb{T}^2 \times I$

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n;m\neq 0} \int d\lambda\, \widehat{u}(m,n,\lambda)\, e^{i(mx+ny+\lambda t)}).$$

Ce choix trivialise l'estimation sur la partie linéaire dans la formule de Duhamel. Pour compenser la perte de dérivée due au terme non linéaire $uu_x = \frac{1}{2}(u^2)_x$, Bourgain utilise une propriété arithmétique du symbole $m^3 - n^2/m$ ($m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$). Plus précisément, si $m = m_1 + m_2$, $n = n_1 + n_2$ et $m, m_1, m_2 \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}(m^3 - \frac{n^2}{m}) - (m_1^3 - \frac{n_1^2}{m_1}) - (m_2^3 - \frac{n_2^2}{m_2}) &= \\ &= \frac{1}{mm_1m_2}(3m^2m_1^2m_2^2 + (n_1m_2 - n_2m_1)^2),\end{aligned}$$

ce qui implique, avec $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

$$\max\{|\lambda - m^3 + \frac{n^2}{m}|, |\lambda_1 - m_1^3 + \frac{n_1^2}{m_1}|, |\lambda_2 - m_2^3 + \frac{n_2^2}{m_2}|\} > \frac{1}{2}|mm_1m_2|.$$

Cette estimation permet de récupérer le facteur m apparaissant dans le terme non linéaire. La fin de la preuve consiste à estimer le terme quadratique au moyen d'estimations de convolution L^2 très délicates et de manipulations fines de sommes d'exponentielles. C'est un véritable tour de force.

Le résultat final est le caractère localement bien posé du problème de Cauchy pour KPII dans $L^2(\mathbb{T}^2)$ (ce résultat s'étend à $L^2(\mathbb{R}^2)$ et se globalise grâce à la conservation de la norme L^2). Ces méthodes, appliquées par Bourgain à bien d'autres cas (par exemple à NLS périodique où il utilise aussi de la théorie analytique des nombres) ont déjà eu des retombées importantes : résolution du problème de Cauchy avec données mesures pour l'équation de KdV, construction de mesures invariantes par le flot de NLS.

Articles cités

Strongly exposed points in weakly compact convex sets in Banach spaces, Proc. AMS 58 (1976), 197–200.

La propriété de Radon-Nikodym, Publications Mathématiques de l'Université Pierre et Marie Curie, 36, 1979–80.

(avec F. Delbaen) A class of special $\mathcal{L}_\infty$ spaces, Acta Mathematica 145 (1980), 155–176.

(avec H. Rosenthal et G. Schechtman) An ordinal L_p-index for Banach spaces, with applications to complemented subspaces of L_p, Annals of Math. 114 (1981), 193–228.

A new class of $\mathcal{L}_1$ spaces, Israel J. of Math. 39 (1981), 113–126.

New classes of L_p spaces, LNM 889 (1981).

The non-isomorphism of H_1 spaces in one and several variables, Journal of Funct. Anal. 46 (1982), 45–57.

New Banach space properties of the disc algebra and H_∞, Acta Math. 152 (1984), 1–48.

Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional, Arkiv for Matematik 21 (1983), no. 2, 163–168.

Bilinear forms on H^∞ and bounded bianalytic functions, Transactions AMS 286 (1984), no. 1, 313–337.

The dimension conjecture for polydisc algebras. Israel J. of Math. 48 (1984), no. 4, 289–304.

Real isomorphic complex Banach spaces need not be complex isomorphic. Proceedings AMS 96 (1986), no. 2, 221–226.

On the L^p-bounds for maximal functions associated to convex bodies in $\mathbb{R}^n$. Israel J. of Math. 54 (1986), no. 3, 257–265.

A Szemeredi type theorem for sets of positive density in $\mathbb{R}^k$. Israel J. of Math. 54 (1986), no. 3, 307–316.

On high-dimensional maximal functions associated to convex bodies. American J. of Math. 108 (1986), no. 6, 1467–1476.

(avec V. Milman) New volume ratio properties for convex symmetric bodies in $\mathbb{R}^n$. Inventiones 88 (1987), no. 2, 319–340.

(avec L. Tzafriri) Invertibility of "large" submatrices with applications to the geometry of Banach spaces and harmonic analysis. Israel J. of Math. 57 (1987), no. 2, 137–224.

On the maximal ergodic theorem for certain subsets of the integers. Israel J. of Math. 61 (1988), no. 1, 39–72.

On the pointwise ergodic theorem on L^p for arithmetic sets. Israel J. of Math. 61 (1988), no. 1, 73–84.

On finite-dimensional homogeneous Banach spaces. Geometric aspects of functional analysis (1986/87), 232–238 Lecture Notes in Math. 1317.

Bounded orthogonal systems and the $\Lambda(p)$-set problem. Acta Math. 162 (1989), no. 3-4, 227–245.

(avec L. Tzafriri) On a problem of Kadison and Singer, Journal für die Reine und Ang. Math. 420 (1991), 1–43.

Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier analysis. Geometric and Functional Analysis 1 (1991), no. 2, 147–187.

Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, Part I : Schrödinger equations; Part II : The KdV equation, Geom. Funct. Anal. 3 (1993), 107–156, 206–261.

Periodic nonlinear Schrödinger equations and invariant measures, Comm. Math. Phys. (à paraître).

Invariant measures for the 2 dimensional defocusing nonlinear Schrödinger equation, Comm. Math. Phys. (à paraître).