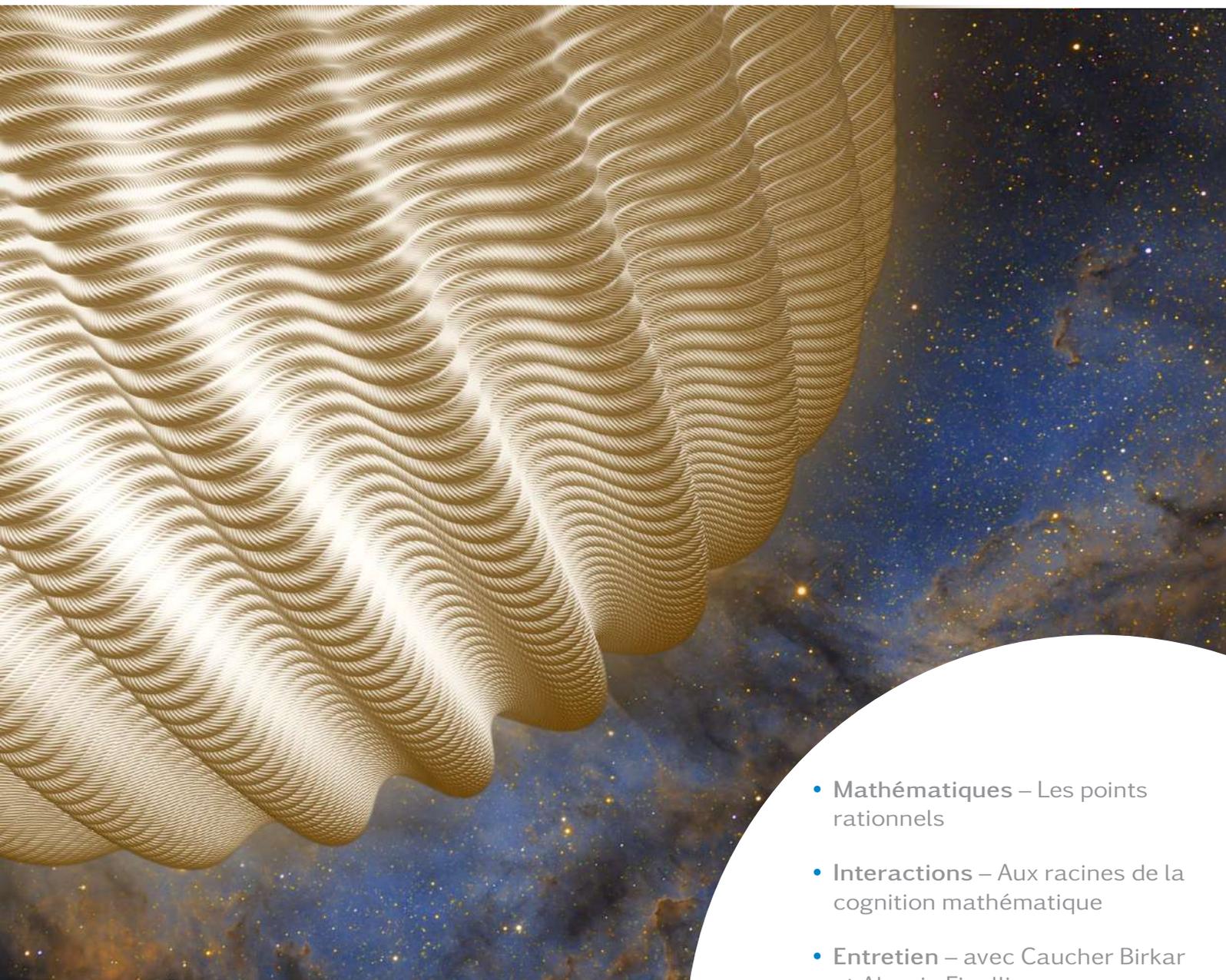


la Gazette

des **Mathématiciens**



- **Mathématiques** – Les points rationnels
- **Interactions** – Aux racines de la cognition mathématique
- **Entretien** – avec Caucher Birkar et Alessio Figalli
- **Raconte-moi...** les plongements de Nash-Kuiper

Comité de rédaction

Rédacteur en chef

Damien GAYET

Institut Fourier, Grenoble
damien.gayet@ujf-grenoble.fr

Rédacteurs

Boris ADAMCZEWSKI

Institut Camille Jordan, Lyon
boris.adamczewski@math.cnrs.fr

Maxime BOURRIGAN

Lycée Sainte-Geneviève, Versailles
maxime.bourrigan@gmail.com

Christophe ECKÈS

Archives Henri Poincaré, Nancy
eckes@math.univ-lyon1.fr

Sébastien GOUÉZEL

Université de Nantes
sebastien.gouezel@univ-nantes.fr

Sophie GRIVAUX

Université de Lille
grivaux@math.univ-lille1.fr

Fanny KASSEL

IHÉS
kassel@ihes.fr

Pauline LAFITTE

École Centrale, Paris
pauline.lafitte@centralesupelec.fr

Romain TESSERA

Université Paris-Sud
romain.tessera@math.u-psud.fr

Secrétariat de rédaction :

SMF – Claire ROPARTZ

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05

Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96

gazette@smf.emath.fr – <http://smf.emath.fr>

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

ISSN : 0224-8999



À propos de la couverture. L'image de couverture représente une sphère réduite, c'est-à-dire un plongement isométrique de la sphère unité dans une boule de rayon $r < 1$. Crédits Hévéa, mise en scène Damien Rohmer.

N° 159

Éditorial

En mars 2014, Boris Adamczewski, qui allait bientôt prendre la tête de la *Gazette*, m'a demandé d'être membre du comité de rédaction. Je connaissais Boris de l'Institut Camille Jordan à Lyon, berceau historique de la revue de presse du site Images des mathématiques, avec son humour particulier et original qui a étonnamment perduré. J'avais fait partie de la première équipe, et Boris était de la suivante. Je dois avouer que, outre notre appétence commune pour la diffusion des mathématiques, c'est surtout l'humour de Boris qui m'a fait immédiatement accepter sa proposition : je savais que ça serait un travail que je ferais avec plaisir. Boris avait par ailleurs de grandes idées pour la *Gazette*, qui se sont, sous sa direction, miraculeusement incarnées sous la forme d'un nouveau format élégant et fin, ainsi que d'un nouvel esprit. Durant ces quatre dernières années, Boris a mené notre comité avec professionnalisme, diplomatie et efficacité. Je tiens à le remercier pour cette formidable refonte de la *Gazette*, pour son travail éditorial général, ainsi que pour la confiance dont il a toujours gratifié l'équipe de la *Gazette*.

Nouveau rédacteur en chef, je m'inscris dans la continuité de l'esprit de ces dernières années. Nous, c'est-à-dire le comité, désirons publier des articles compréhensibles par toute mathématicienne et tout mathématicien. À ce propos, le comité de rédaction est couramment confronté à un délicat problème : demander à des collègues de rédiger un texte pour la *Gazette*, ce qui leur prend un temps non négligeable ; puis, si nous jugeons que le texte est trop difficile d'accès, leur demander de reprendre l'article pour le rendre plus compréhensible. Malheureusement, cette seconde couche semble parfois abusive à l'auteure ou l'auteur qui a déjà travaillé pour la communauté gratuitement. Nous vous présentons d'avance nos excuses pour ces contraintes, mais nous pensons que le jeu en vaut la chandelle. Nous continuerons bien sûr à publier des articles de toutes les branches de notre étonnante science, mais également des textes aux interfaces avec d'autres domaines, de l'informatique à la physique en passant par la philosophie ou la biologie.

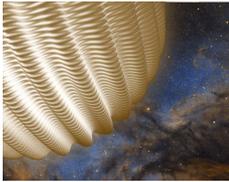
Nous aimerions par ailleurs que la *Gazette* continue à être l'un des centres névralgiques des discussions qui agitent notre communauté, comme la pa-

rité, l'évaluation ou les revues, mais aussi la pédagogie ou la politique universitaire. À ce sujet, j'aimerais que la *Gazette* renoue avec l'atmosphère de débats plus prégnante et plus animée qui l'habitait dans ses premières décennies, quand par exemple Jean Leray se moquait ouvertement des fameuses *mathématiques modernes* qui ont traumatisé jadis bon nombre de nos concitoyens, à l'époque collégiens.

Ce premier numéro 2019 est sous le signe du contre-intuitif. Sa couverture d'abord met en scène une sphère de Nash-Kuiper, un objet paradoxal dont l'existence était démontrée théoriquement, mais qui n'a que récemment été rendu visible par une équipe lyonnaiso-grenobloise. Le *Raconte-moi* sur les plongements de Nash décrit de façon lumineuse ces objets *a priori* absurdes et pourtant bien réels. Deux lauréats de prix de l'Académie des sciences présentent leur domaine et leurs travaux. Le premier texte concerne la physique statistique, où des modèles tout simples comme les marches aléatoires auto-évitantes ont, étonnamment, des liens profonds avec les fonctions holomorphes. Le second lauréat révèle de nouveaux rouages régissant certaines équations aux dérivées partielles. Un troisième article de mathématique décrit l'étrange répartition des points rationnels sur les variétés algébriques. Côté ICM 2018, nous publions dans cette *Gazette* les interviews de deux médaillés Fields, Caucher Birkar et Alessandro Figalli, dans lesquels il sera question de mathématiques, mais aussi de Kurdistan et de... Playstation. Deux collègues neuroscientifiques vous surprendront sans doute en décrivant l'existence de liens entre espace et mathématiques, qui ne sont pas les liens que l'on imagine. Un article présente un jeu fascinant, Zome, reposant sur la géométrie de notre espace. Côté vie de la communauté, des comptes rendus en provenance du CNU et des journées des jeunes mathématiciennes et mathématiciens vous attendent. Un texte sur notre collègue Michel Raynaud malheureusement récemment décédé, ainsi qu'une recension d'un livre particulièrement imagé clôturent cette *Gazette*. J'aimerais enfin m'associer à Boris Adamczewski pour remercier chaleureusement Thomas Alazard pour son travail dans le comité ces six dernières années.

Bonne lecture!

Damien GAYET



N° 159

Sommaire

SMF	4
Mot du président	4
VIE DE LA SMF	6
Sur la transformation numérique de la SMF – S. SEURET	6
MATHÉMATIQUES	13
Les points rationnels – E. PEYRE	13
Holomorphité discrète et applications à la physique statistique – H. DUMINIL-COPIN	23
Tenseurs symétriques à divergence nulle – D. SERRE	31
INTERACTIONS	39
Aux racines de la cognition mathématique – M.-L. GARDES et J. PRADO	39
ENTRETIEN	47
... avec Caucher BIRKAR	47
... avec Alessio FIGALLI	49
DIFFUSION DES SAVOIRS	55
Zome : un jeu de construction mathématique – F. GUÉRITAUD	55
RACONTE-MOI	63
les plongements de Nash-Kuiper – V. BORRELLI	63
INFORMATION	70
Bilan 2018 du CNU section 26	70
Rapport sur les sessions du CNU 25 pour l'année 2018	77
Forum 2018 des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens – A. ESTRADÉ	80
CARNET	82
Michel Raynaud – L. ILLUSIE	82
LIVRES	88

Mot du président

Chères et chers collègues,

Je vous adresse tout d'abord mes meilleurs vœux de réussites mathématique et personnelle pour 2019.

L'année 2018 a représenté un tournant dans la transformation numérique de la SMF, qui a basculé vers son nouveau système d'information (incluant base de données, système de gestion, site web, adresses mails...) en décembre dernier. J'ai rédigé un article dans cette *Gazette* reprenant l'ensemble du projet, de ses motivations jusqu'à ses derniers développements. C'est en tout cas une énorme satisfaction de voir aboutir ce projet de grande ampleur, qui a impliqué toutes les équipes de la SMF depuis plus de deux ans. Il nous permet de nous tourner avec sérénité vers les défis qui s'annoncent, de la promotion de la recherche et de l'enseignement des mathématiques plus que jamais d'actualité, aux évolutions à venir du monde de l'édition scientifique.

Même si la refonte a aspiré une grande partie de notre temps et de notre énergie, la SMF a continué à être très active ces derniers temps sur de nombreux sujets (que vous pouvez retrouver sur notre site web bien entendu!). En particulier, nous travaillons depuis plusieurs mois de concert avec huit autres sociétés savantes (Astronomie et d'Astrophysique, Biologie et Développement, Écologie et d'Évolution, Histoire contemporaine, Neurosciences, Physique, Sciences politiques, Sociologie,) à la création d'une assemblée d'associations et de sociétés savantes (regroupant donc un large panel, au-delà de ces 9 sociétés). Pour résumer, son but est de repositionner et de porter la parole scientifique, ainsi que de peser dans le paysage médiatique et politique. En effet, nous avons beaucoup en commun, et rencontrons toutes et tous les mêmes difficultés à mettre en valeur nos disciplines et, de façon générale, la démarche et le discours scientifique, à une époque où la formation scientifique, l'investissement dans la recherche et la lutte contre les raccourcis, les erreurs de raisonnement, les « fake news », sont des priorités.

Nos messages, s'ils sont partagés et soutenus par une large communauté scientifique, auront une portée plus large : par exemple, exiger des mathématiques dans le tronc commun au lycée est un message qui serait apparu

moins partisan et aurait sûrement eu plus de poids s'il avait été soutenu par toute la communauté scientifique, incluant les communautés physique, littéraire, historique...

Cette assemblée de sociétés savantes mène déjà des actions très concrètes : une réunion début septembre avec des représentants de plus de 50 sociétés, une note sur le projet de loi de finance 2019 qui a largement circulé à l'assemblée nationale et au sénat (suivie de rencontres et discussions avec députés et sénateurs), un article dans *le Monde* du 11/12/2018 sur les frais d'inscription, un projet de nouvelle marche des sciences, et d'autres encore à venir. Ma conviction est que si nous arrivons à dépasser nos différences pour soutenir des messages communs, ces derniers y gagneront en crédibilité, et donc en chance d'être entendus voire même écoutés. Cela ne nous empêche pas par ailleurs de défendre toutes les spécificités de notre discipline.

Je vous renouvelle mes meilleurs vœux pour 2019.

Le 5 janvier 2019

Stéphane SEURET, président de la SMF

Sur la transformation numérique de la SMF

• S. SEURET

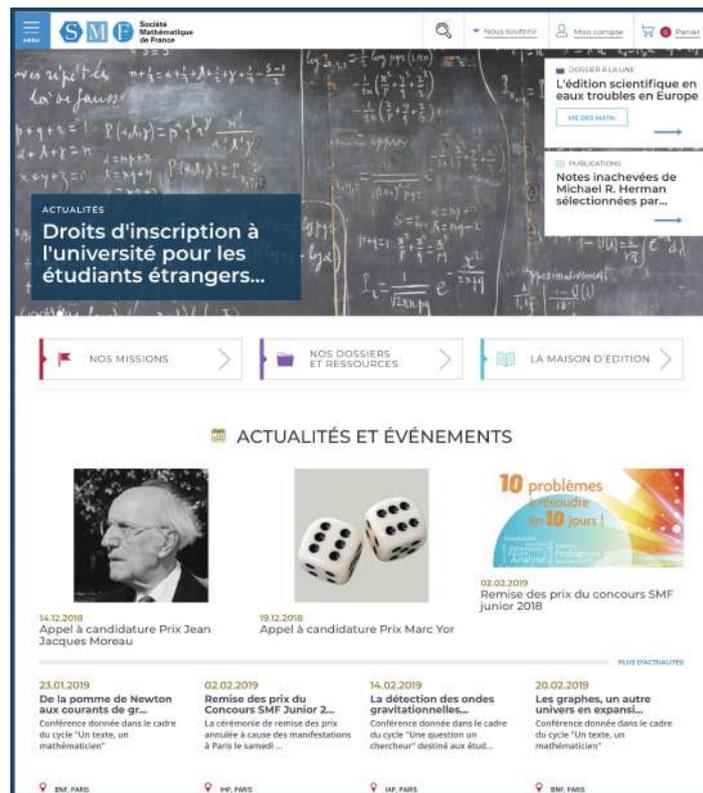
La SMF a procédé à une refonte de son système informatique et de son site web, qui constitue l'aboutissement d'un projet long de plus de deux ans, impliquant l'ensemble des personnels de la SMF, le Bureau et de nombreux bénévoles.

Comme vous l'avez sûrement constaté, le site web de la SMF a fait peau neuve le 5 décembre dernier. Derrière ce changement, dont à première vue on pourrait penser qu'il n'est qu'esthétique, se cache en réalité une refonte globale et profonde du système informatique de la SMF, incluant nos bases de données (clients, adhérents, publications, transactions...), leur exploitation et leur gestion, les hébergements de nos serveurs, le logiciel d'envoi

de mails, le site web et son infra-structure, entre autres, et par conséquent, une évolution des méthodes de travail de tout le personnel de la SMF, à Paris comme à Marseille.

Je profite de cet article pour revenir sur l'ensemble des missions de la SMF, leur évolution à l'ère du numérique, et comment cette refonte y répond, en permettant de préparer les changements à venir dans le monde de l'édition notamment.

Une page d'accueil riche et attrayante



Société Mathématique de France

🔍
▾ Nous soutenir
👤 Mon compte
🛒 0 Panier

Accueil > La SMF > La SMF, acteur des mathématiques

LA SMF, ACTEUR DES MATHÉMATIQUES

La SMF mène de nombreuses actions pour la communauté mathématique.

Les missions de la SMF sont de natures très diverses, mais elles visent toutes à la promotion des mathématiques et de la recherche auprès du plus grand nombre.

- **Organiser des manifestations scientifiques.**

De nombreux congrès et cycles de conférences destinés à des publics allant des lycéen(-ne)s aux chercheuses et chercheurs chevronnés sont organisées ou coordonnées par la SMF.
- **Réfléchir à la formation et à l'enseignement des mathématiques.**

La SMF organise des groupes de travail et des réunions autour de l'enseignement des mathématiques, à tous les niveaux. Avec l'appui de sa commission enseignement, elle publie des tribunes et des points de vue, et est régulièrement consultée par les missions gouvernementales.

La SMF collabore avec d'autres sociétés savantes sur ces sujets : la SMAI, la SFdS, la SIF, le CFEM, l'APMEP, l'UPS...
- **Relayer toutes les initiatives, locales et nationales, promouvant les mathématiques**

La SMF, grâce à ses moyens de communication (site web, Gazette, twitter, lettre aux adhérents...), ainsi que grâce à ses prix et conférences, fait parler des mathématiques et des événements autour des mathématiques. Nous parrainons aussi des conférences, qui alors bénéficient de nos réseaux de diffusion.

PARTAGER

1. Une nécessaire évolution

Porté par le succès de l'évolution de la *Gazette* vers son nouveau format en 2015, qui a « rafraîchi » l'image de la SMF, la décision fut prise en 2016 par le Bureau de la SMF, soutenu par son Conseil d'Administration, de procéder à l'évolution de son site web, et par là-même nécessairement de son système d'information.

Le site web d'alors, très fonctionnel mais assez rudimentaire dans son esthétique, ne permettait plus de porter complètement les missions de la SMF à l'ère du numérique. Un site web n'est plus simplement une vitrine, c'est la principale plateforme de relations avec nos adhérent(e)s, nos abonné(e)s et tous nos interlocuteurs – bref un outil au cœur de nos activités. Mais plus important encore, le système d'information sous-jacent n'offrait plus de garantie d'évolutivité technique (et donc à terme, de sécurité) pour une association dont les activités sont en pleine mutation depuis une quinzaine d'années, notamment celles liées à l'édition et la communication numérique.

C'est ici l'occasion de décrire les missions principales de la SMF, et leur intégration dans l'écosystème numérique, que notre système doit prendre en charge.

- **Promouvoir les mathématiques, leur enseignement et la recherche, auprès de tous les publics**, spécialement auprès des jeunes. **Porter la voix de la communauté** auprès des médias, politiques, industriels... **Informers la communauté** des événements liés aux mathématiques. Ces trois missions, si elles s'appuient sur un travail de fond et de réflexion, ne portent leur fruit qu'à travers une communication efficace, qui utilise divers canaux (site web, compte Twitter, lettres et tribunes, envoi de courriers papier et électroniques) devant être coordonnés entre eux, à la fois du point de vue éditorial et technique.
- **Organiser des cycles de conférences, de congrès, d'ateliers de travail** : la publicité autour de ces événements est fondamentale pour leur succès, là encore une bonne communication numérique est indispensable.
- **Éditer, publier des revues et des collections de livres** : les revues sont accessibles via des abonnements électroniques (reposant sur la reconnaissance d'adresses IP ou par connexion individuelle à son compte (cette

dernière n'étant possible que sur le nouveau site)). Nous nous occupons également de l'envoi postal des fascicules de revues et de nos livres en version papier (en attendant bientôt leur version électronique) grâce à la « cellule de diffusion SMF » localisée sur le campus de Luminy.

- **Servir et représenter nos adhérent(e)s** : l'adhésion (en ligne, ou par courrier) donne droit à l'accès électronique à la *Gazette*, l'envoi à l'adresse de son choix de sa version papier, à des réductions sur nos livres, et depuis décembre dernier l'accès électronique gratuit aux exposés Bourbaki publiés par la SMF.

Même si cela n'impacte pas directement notre système d'information, je rappelle qu'une autre mission de la SMF est d'assurer la gestion hôtelière du CIRM, dont nous sommes tutelle, avec le CNRS et Aix-Marseille-Université. Nous reviendrons dans un prochain article sur les deux projets de construction actuellement en cours au CIRM, le projet 2RCIRM et l'extension du restaurant, qui nous permettront d'accueillir simultanément deux semaines de conférence au CIRM.

Toutes les activités liées à ces missions requièrent des interactions avec nos bases de données et beaucoup d'entre elles également avec notre système de comptabilité. Leur pertinence et leur efficacité dépend énormément des qualités du système d'information : fiabilité, attractivité, durabilité, et évolutivité.

La SMF s'est appuyée pendant des années sur un système informatique qui a permis de répondre en grande partie à ses missions et ses engagements. Je saisis ici l'occasion de remercier Michel Demazure, qui a été l'un des grands constructeurs du précédent système de base de données de la SMF, dont le dévouement et les immenses compétences techniques et informatiques ont permis à la SMF de fonctionner pendant des années, et dont le travail a également servi de socle à la construction du nouveau système. Laurent Koelblen en avait développé la partie publications : lui aussi est l'un des inestimables supports dont la SMF a bénéficié.

Toutefois, l'ancien système souffrait de plusieurs défauts structurels.

Héritage d'une construction qui a dû s'adapter au cours du temps, nos bases de données étaient éclatées à plusieurs endroits et sur plusieurs serveurs. Même si la sécurité des interactions était assurée, la gestion de ces bases et leur coordination en interne n'était pas aisée. Avec les nouvelles

normes européennes (RGPD), la gestion des données des adhérents et clients devaient être remise aux normes tout comme les moyens de paiement.

La structure du site web (constitué de deux sites distincts `smf.emath.fr` et `smf4.emath.fr`) complexifiait notre fonctionnement interne, et ne nous permettait pas d'optimiser son référencement sur les moteurs de recherche, de suivre l'activité de nos utilisateurs pour en améliorer son contenu fonctionnel et technique.

Il était devenu indispensable de procéder à une refonte garantissant une stabilité technique de notre système d'information, ainsi qu'une pérennité de fonctionnement à la SMF, ce fonctionnement reposant sur une bonne coordination entre toutes nos activités (notamment les adhésions et les publications). À l'ère du numérique dans laquelle les mathématiques veulent occuper un rôle décisif, il fallait également que la vitrine de la SMF (son site web, la *Gazette*, ses lettres d'informations) soit en accord avec la modernité des sujets dont nous sommes censés traiter.

2. Deux années de travail

2.1 – Sélection d'une agence par appel d'offres

Un cahier des charges a été rédigé entre février et octobre 2016, par un groupe de travail composé de Valérie Berthé, Gérard Grancher, Cyril Imbert, Thomas Richard, Claire Ropartz, sous ma coordination, en prenant conseil auprès des personnels de la SMF, de Michel Demazure, Laurent Koelblen et bien d'autres.

Les principes que nous avons constamment gardés à l'esprit étaient :

- **utiliser des outils professionnels et sécurisés**, adaptés à tous les supports (mobiles, tablettes...);
- **assurer un confort d'utilisation du système en interne**, en répondant au mieux aux attentes des personnels SMF – dans la mesure du possible étant donné la grande diversité de nos missions;
- **mettre en avant les activités, le travail d'édition et les publications de la SMF**;
- **garantir un confort d'utilisation du site pour les visiteurs**, avec une navigation aisée et un moteur de recherche performant;

- **apporter des bénéfices supplémentaires et répondre aux demandes des adhérent(e)s**.

À partir de ce document d'une cinquantaine de pages, recensant l'ensemble des activités (institutionnelles, commerciales, éditoriales), des missions de la SMF, et des fonctionnalités de l'ancien site, nous nous sommes mis à la recherche d'une agence pouvant nous accompagner sur ce projet. En effet, devant la difficulté de la tâche, il était indispensable que le projet soit confié à des professionnels, et que la SMF se dote d'outils performants et pérennes. Pour mesurer cette difficulté, quelques chiffres :

- plus de 7000 clients dans nos bases de données;
- chaque année, plus de 10000 ouvrages imprimés, envoyés à nos centaines d'abonnés répartis presque uniformément dans le monde (avec une concentration en France tout de même) ou à des particuliers;
- plusieurs (dizaines de) milliers de transactions annuelles, les paiements s'effectuant via des bons de commande, par carte bancaire, chèque ou espèce, sur internet, à Paris ou à Marseille;
- environ 4000 articles et livres différents proposés sur notre site, stockés (numériquement) pas tous au même format ni sur les mêmes serveurs;
- environ 1500 pages sur le site `smf.emath.fr`, et 12000 pages sur `smf4.emath.fr`;
- des règles d'abonnements électroniques complexes, dépendant de chaque revue ou collection.

Pour recruter l'agence qui allait s'occuper de notre refonte, nous avons lancé un appel d'offres, coordonné par la société *vtscan*, spécialisée en refonte numérique des sociétés. Après étude de notre dossier, cette dernière a pré-sélectionné en novembre 2016 six agences, avec lesquelles nous avons eu un premier long entretien téléphonique en décembre 2016. Quatre d'entre elles ont poursuivi la compétition jusqu'à un grand oral en janvier 2017. Le choix s'est fait au travers de critères permettant de valider la capacité technique et fonctionnelle de l'agence, le calibrage des équipes, la prise en compte de nos spécificités associatives, et la bonne compréhension de l'envergure du projet de transformation.

Suite à leurs présentations et leurs propositions, nous avons sélectionné *SMARTAGENCE* (agence de communication travaillant de concert avec la société *CLICKARMY* pour le développement du site), qui

avait rendu le dossier le plus prometteur en appréhendant très bien l'état d'esprit de notre société savante, tout en respectant les contours financiers que nous avons imposés.

2.2 – Phase avant-projet

Le projet a débuté en février 2017, et la construction théorique du site a duré jusqu'à la fin de l'année 2017. Cette partie avant-projet a été assez longue : il a fallu effectuer un audit de l'existant (depuis plusieurs dizaines d'années), comprendre l'ancien système d'information et les liens entre les bases de données, faire un état des lieux des publications, du stockage, réfléchir à notre organisation du fonctionnement interne, repenser l'architecture de l'information, inventer les parcours des utilisateurs en fonction de leurs objectifs sur le site de la SMF et de leurs profils. Sans compter que nous avons un vocabulaire mathématicien qui n'est pas partagé par le grand public ! Cette période nous a permis de réfléchir aux meilleurs moyens pour la SMF de respecter ses engagements auprès de ses adhérents, utilisateurs et clients.

2.3 – Phase de développement

Le développement du système d'information et du site a couru jusqu'à octobre 2018. Plusieurs évolutions du système ont été effectuées durant cette période pour répondre au mieux aux activités et aux missions de la SMF. Près de 9 mois effectifs de développement ont été nécessaires, auxquels il faut ajouter une centaine de jours de travail dans la phase avant-projet. Il faudrait comptabiliser bien sûr le travail considérable sur le contenu éditorial du site, qui a été repensé et effectué en interne essentiellement par Claire Ropartz et moi. Gérard Grancher a coordonné toutes les discussions avec Mathrice, pour nos serveurs et adresses e-mail notamment. Le travail de récupération des publications, de leurs fichiers pdf et des méta-données correspondantes (auteurs, titres, classes AMS, DOI, volume, année...) a occupé plusieurs semaines Jérôme Germoni (que je remercie vivement !) soutenu par Laurent Koelblen en juillet-août 2017, puis entre juillet et octobre 2018. L'import des anciennes pages web et leur mise en forme, puis celui des fiches clients, ont chacun également pris des semaines – nous avons porté une attention particulière à garantir la conformité des données et la sécurisation dans les transferts.

2.4 – Phase de production et mise en ligne

La mise en ligne définitive du système d'information et du site web a été minutieusement préparée. Une phase de test de bout en bout (i.e. test de l'ensemble des scénarios possibles en interne (opération sur les bases de données...) et vis-à-vis de l'extérieur (inscription, adhésion, paiement...)) a été organisée. Les redirections de l'ancien site vers le nouveau ont dû être traitées presque manuellement, cela représentait plus de 13000 liens url (et il en reste plusieurs à traiter encore).

En coordination avec Mathrice (qui apporte sur de nombreux sujets un grand support à la SMF), nous avons basculé vers le nouveau système le 5 décembre 2018 à 9h30.

3. Les fonctionnalités du nouveau système

Maintenant que nous sommes dans un régime plus stable, je souligne quelques caractéristiques marquantes du nouveau système d'information.

Nous avons maintenant une unique base de données DRUPAL, contenant l'ensemble de nos données et de nos produits (adhésions, abonnements, publications). La base se trouve sur des serveurs virtuels, dont l'hébergement et la maintenance sont assurés par CLICKARMY. Ces serveurs sont localisés en Europe, conformément aux réglementations de sécurité européennes. L'unification des données a pris énormément de temps, de réflexion et d'énergie... nous en tirons beaucoup de bénéfices. Pour n'en prendre qu'un exemple, l'ensemble des données rattachées à une publication SMF (article ou livre, muni d'un fichier pdf, ses méta-données (titre résumé français et anglais), la page web associée, le produit proposé (ou non) au prix calculé automatiquement en fonction du statut (adhérent ou non, abonné ou non...) et de l'adresse des personnes intéressées) est dorénavant regroupé et géré par une seule personne, alors qu'auparavant ces données devaient être rentrées par plusieurs intervenants dans plusieurs bases.

Le site met en avant des actualités et des événements, ainsi que nos dossiers et ressources (pages regroupant des informations sur une thématique donnée, des vidéos, des articles de mathématiques de la *Gazette*, et toute tribune libre que vous pouvez nous soumettre !). L'organisation et la mise en page du site sont en grande partie automatisées, de façon à limiter la charge de travail des personnels

Un moteur de recherche performant

SMF et du Bureau.

Nous avons mis en place un nouveau moteur de recherche efficace et sélectif : les résultats d'une requête dans le contenu (abysal!) éditorial SMF sont organisés par type de contenu (actualités, événements, publications...) et fondés sur des algorithmes évolutifs, nous espérons que la pertinence s'améliorera encore avec le temps.

Toutes nos publications sont disponibles et facilement consultables sur une unique page, munie d'un moteur de recherche dédié et des filtres de sélection diablement efficaces. Grâce à ces filtres proposés à gauche de la page, les livres et articles sont sélectionnables par revue ou année (ce qui est très standard), mais également par catégorie mathématique. Pour que ceci soit possible, nous avons construit une surjection entre l'ensemble des classes mathématiques msc2010 et les 12 catégories que nous avons définies, que nous avons appliquée à nos milliers de publications. Plus de 90 pour cent des anciennes publications (incluant toutes celles des 5 dernières années) ont été importées et reformatées, les autres le seront bientôt.

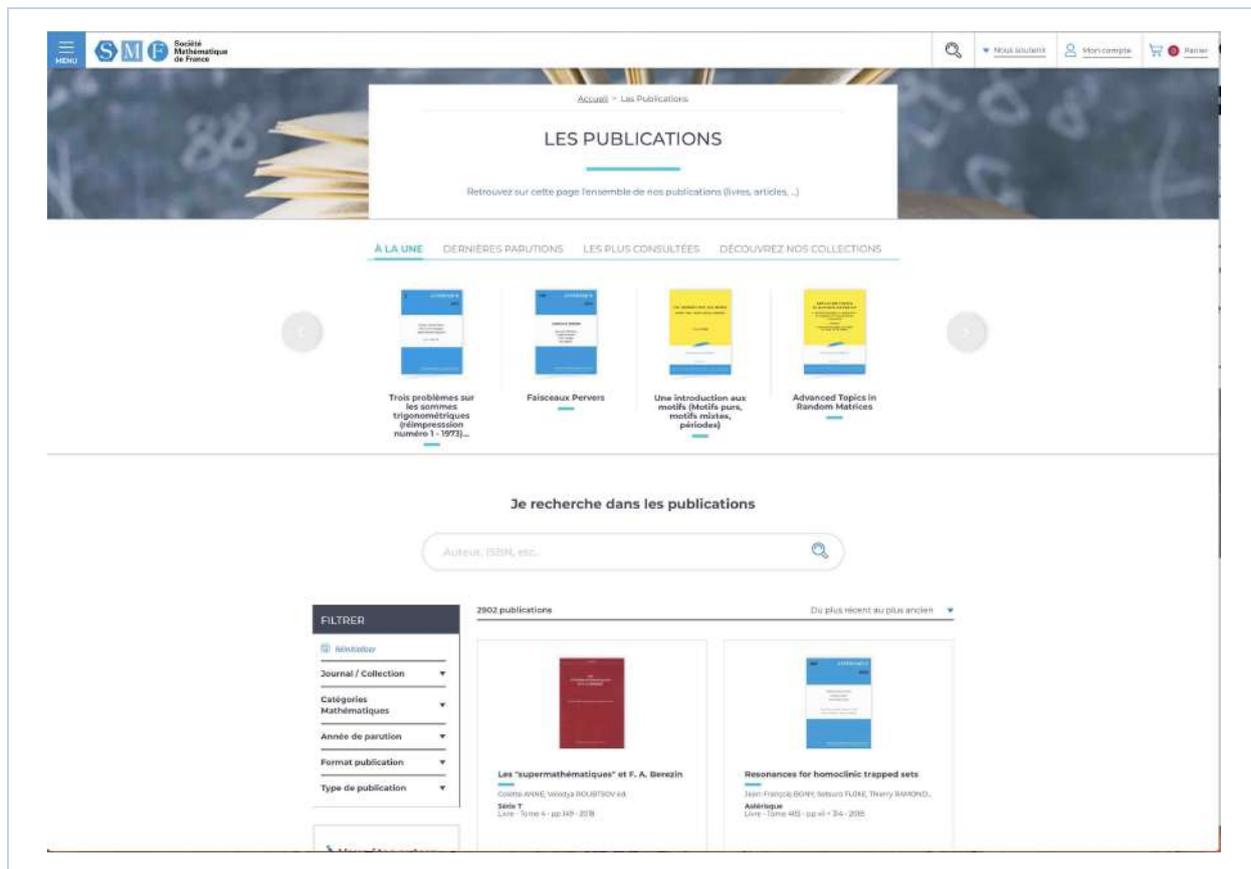
Mathrice met à notre disposition des adresses courriels @smf.emath.fr pour tous les personnels, membres du bureau et listes de diffusion SMF, clarifiant notre communication. Nos diverses lettres électroniques (lettres aux adhérents, nouvelles publications) sont dorénavant envoyées via une plateforme logicielle liée directement à notre base DRU-

PAL, facile d'utilisation et qui nous autorise quelques libertés esthétiques.

Aux adhérent(e)s, le Bureau de la SMF a décidé d'offrir dorénavant l'accès électronique gratuit aux exposés Bourbaki (avec l'autorisation de ce dernier), qui sont devenus une collection à part entière sur notre site web. Cela était impossible dans l'ancienne version, qui n'offrait que l'accès via des adresses IP. Cette évolution nous permet d'envisager dans un avenir proche de publier des versions électroniques de nos ouvrages. De plus, toute personne ou institution commandant un article à la SMF aura à sa disposition dans son compte une facture, un historique de commandes, d'adhésion, et d'abonnements.

4. Se préparer pour les évolutions à venir

Cette transformation numérique de la SMF, qui était indispensable pour toutes les raisons que j'ai mentionnées (pérennité, évolutivité, image de la SMF...), constitue une étape majeure de notre société savante, qui nous permet d'envisager maintenant d'autres chantiers (nous soufflerons un peu entre-temps...), le principal étant l'anticipation des évolutions du monde de l'édition scientifique. C'est aussi une satisfaction de voir aboutir ce projet dans lequel j'ai personnellement beaucoup donné. Je suis convaincu que la SMF en portera les fruits dans



les années qui viennent.

Le site est désormais dynamique et adaptatif, et évoluera régulièrement. Il sera exposé à des utilisateurs internes (la SMF comme éditeur, administrateur et gestionnaire) et externes (adhérents, visiteurs, clients...), qui nous aideront à en améliorer le fond et la forme. Des analyses statistiques nous permettront d'analyser les flux pour mieux hiérarchiser son contenu de façon à toujours améliorer son utilisation.

Durant toute cette période cruciale de notre transformation, la SMF est restée active, notamment sur les dossiers relatifs à la visibilité des mathématiques, l'édition scientifique, l'enseignement à tous les niveaux, la diffusion des connaissances, et toutes les questions de société liées aux mathématiques. Munis de nos outils performants, nous savons que nos messages porteront plus loin, c'était

l'un des objectifs majeurs de cette refonte.

Je termine en soulignant une fois de plus l'implication de l'ensemble de la SMF dans ce projet que j'ai porté depuis plus de 2 ans : Claire Ropartz, contributrice principale au contenu du site et à sa structuration, Sabine Albin qui a grandement participé à la construction des interactions avec GESCOM (notre logiciel de gestion), Marie-Françoise Koussemou et Christian Munusami à Marseille, dont la constante motivation m'a grandement porté, Frédéric Bayart, Valérie Berthé, Jean-René Chazottes, Nathalie Christiaën, Michel Demazure, Jérôme Germoni, Gérard Grancher, Cyril Imbert, Laurent Koelblen, Mafalda Rodrigues, Romain Théron et toutes les équipes de Mathrice, et bien sûr le conseil d'administration de la SMF qui dès le début a été un fort soutien mesurant à sa juste valeur la nécessité et les bénéfices de cette transformation.



Les points rationnels

• E. PEYRE

1. Origines

La plus ancienne référence connue concernant l'objet de ce texte est la tablette babylonienne PLIMPTON 322 (figure 1) qui, en raison du style d'écriture utilisé, est datée du XVIII^e siècle avant notre ère.

FIGURE 1 – Tablette Plimpton 322



Cette tablette contient une suite de couples d'entiers (a, c) tels que $c^2 - a^2$ est le carré d'un entier (cf. l'ouvrage de J. H. Conway et R. Guy [7]), ce qui illustre bien le fait que douze siècles avant Pythagore, les babyloniens s'intéressaient aux solutions de l'équation

$$X^2 + Y^2 = Z^2 \quad (1)$$

et connaissaient une méthode pour en produire des exemples. Les ouvrages d'arithmétique de Diophante, plus précisément le problème II.8 [17] décrit plus explicitement une telle méthode. En des termes modernes, on peut interpréter la méthode de Diophante de la façon suivante : à une solution non nulle $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ de l'équation (1) on associe le point $(x/z, y/z) \in \mathbb{Q}^2$ sur le cercle unité d'équation

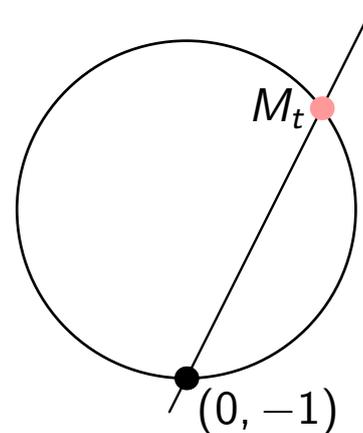
$$X^2 + Y^2 = 1. \quad (2)$$

Mais ce cercle est aisé à paramétrer : prenons le point $M_\infty = (0, -1)$ et considérons les droites non

horizontales passant par ce point. Une telle droite a une équation de la forme

$$X = t(Y + 1).$$

FIGURE 2 – Paramétrer le cercle



Les points d'intersection de cette droite avec le cercle vérifient alors l'équation

$$(Y + 1)(t^2(Y + 1) + Y - 1) = 0$$

si bien que le deuxième point d'intersection de la droite avec le cercle a pour coordonnées $(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})$. Lorsque t parcourt le corps des rationnels, cela donne toutes les solutions rationnelles de l'équation (2) autres que $(0, -1)$. En écrivant $t = u/v$ avec u et v des entiers premiers entre eux, on obtient ainsi comme solutions de l'équation (1) les triplets $(d2uv, d(u^2 - v^2), d(u^2 + v^2))$ où $d \in \mathbb{Z}$. On peut démontrer, en utilisant la factorisation des entiers en produit de nombres premiers, que, quitte à échanger x et y , tout triplet pythagoricien est de cette forme.

Notons qu'en général, trouver les solutions dans \mathbb{Q}^N d'une équation polynomiale $F(X_1, \dots, X_N) = 0$

avec $F \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_N]$ un polynôme de degré d se ramène à trouver les solutions dans \mathbb{Z}^{N+1} de l'équation homogène de degré d

$$X_0^d F\left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_N}{X_0}\right) = 0.$$

Comme nous nous intéressons aux solutions rationnelles, dans la suite nous considérerons prioritairement le cas d'équations homogènes.

À notre époque moderne où le moindre ordinateur peut effectuer des milliards d'opérations par secondes, on peut penser que la recherche des solutions entières d'une équation polynomiale est une trivialité. En effet pour résoudre une équation $F(X_1, \dots, X_N) = 0$, qu'elle soit homogène ou pas, il suffit de calculer $F(x_1, \dots, x_N)$ lorsque (x_1, \dots, x_N) parcourt \mathbb{Z}^N , qui est dénombrable. Et l'ordinateur affichera ainsi successivement les solutions les unes après les autres. Que demander de plus ? Évidemment, le problème c'est que si on lance un tel programme et que l'ordinateur n'affiche rien si ce n'est des annonces de mises à jour du système, on peut se poser la question de savoir si l'équation possède des solutions.

2. Comment s'assurer qu'un système n'a pas de solutions en trois leçons

2.1 – Première leçon

Donnons-nous un système d'équations

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad P_i(X_0, \dots, X_N) = 0 \quad (3)$$

où les P_i sont des polynômes homogènes à coefficients entiers. Si $x = (x_0, \dots, x_N) \in \mathbb{Q}^{N+1}$ est solution, il en est de même de (dx_0, \dots, dx_N) pour tout $d \in \mathbb{Q}$. Pour une solution non nulle, on peut donc se ramener à une solution non nulle dans \mathbb{Z}^{N+1} puis diviser par le pgcd des coordonnées pour se ramener à une solution primitive : étant donné un anneau A , une famille (a_1, \dots, a_m) d'éléments de A sera dite *primitive* s'il existe une famille (u_1, \dots, u_m) d'éléments de A tels que

$$\sum_{i=1}^m u_i a_i = 1.$$

Dans la suite, nous allons donc nous restreindre à ces solutions. Soit maintenant $M \geq 2$ un entier. On peut alors regarder la réduction modulo M des coordonnées, ce qui nous donne un $N + 1$ -uplet

$\bar{x} = (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_N)$ d'éléments de $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$. Cette réduction \bar{x} est primitive et vérifie également les équations (3). Par conséquent l'existence d'une solution non nulle dans \mathbb{Q}^{N+1} implique l'existence d'une solution primitive dans $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^{N+1}$. Avec cela il est facile de produire des équations polynomiales homogènes qui n'ont pas de solutions non nulles dans \mathbb{Q}^{N+1} , regardons par exemple l'équation

$$X_0^2 + X_1^2 - 3X_2^2 = 0$$

s'il existait une solution non nulle dans \mathbb{Q}^3 , il en existerait une primitive dans $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^3$. Comme -1 n'est pas un carré dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on voit que les seules solutions non nulles dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ sont $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, -1)$ mais aucune de ces deux solutions ne se relève en une solution dans $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^3$. Vous pouvez ainsi laisser un souvenir absolument inoubliable dans une conversation de salon en faisant remarquer que $643X_0^2 + 799X_1^2 - 768X_2^2 = 0$ n'admet pas de solution rationnelle non nulle.

L'intérêt d'un tel critère est qu'on recherche des solutions dans un ensemble fini, ce qui est théoriquement calculable. En outre les estimations de S. Lang et A. Weil [14] permettent de montrer qu'il suffit de tester l'existence d'une solution primitive dans $(\mathbb{Z}/M_0\mathbb{Z})^{N+1}$ pour un M_0 convenable (mais grand) pour s'assurer qu'il en existe modulo M pour tout entier M .

2.2 – Deuxième leçon

Une deuxième façon pour démontrer l'absence de solution rationnelle non nulle est de prouver qu'il n'en existe pas de réelles. Ainsi l'équation

$$X^4 - 2X^2Y^2 + 2Y^4 + Z^4 = 0$$

n'aura pas de solution non nulle dans \mathbb{Q}^3 car elle n'en admet pas dans \mathbb{R}^3 . Là encore, par les résultats de A. Tarski et A. Seidenberg, il existe un algorithme pour tester l'existence de solutions réelles.

Il est remarquable que les deux tests que nous avons vus suffisent dans bien des cas pour vérifier l'existence d'une solution non nulle sur les rationnels. Cela fut démontré en particulier par H. Hasse pour les formes quadratiques [10] :

Théorème 1 (Hasse). *Soit q une forme quadratique non dégénérée en $N + 1$ variables à coefficients entiers. Alors l'équation $q(x) = 0$ admet une solution non nulle dans \mathbb{Q}^{N+1} si et seulement si elle admet une solution non nulle dans \mathbb{R}^{N+1} et une solution primitive dans $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^{N+1}$ pour tout entier $M \geq 2$.*

Quand le nombre de variables est exponentiellement grand par rapport au degré de l'équation, la méthode du cercle permet de démontrer un résultat analogue en degré supérieur. La condition sur la non-dégénérescence de la forme quadratique est remplacée par une condition sur le lieu singulier : étant donné un polynôme homogène $F \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_N]$ le lieu singulier de l'hypersurface de \mathbb{C}^{N+1} définie par l'annulation de F est donnée par l'ensemble des (x_0, \dots, x_N) tels que

$$\forall i \in \{0, \dots, N\}, \quad \frac{\partial F}{\partial X_i}(x_0, \dots, x_N) = 0.$$

Le résultat de 1962 de B. J. Birch [1] implique le théorème suivant

Théorème 2 (Birch). *Soit $F \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_N]$ un polynôme homogène de degré d . On fait les hypothèses suivantes :*

- (i) *Le lieu singulier de l'hypersurface définie par F est réduit à $\{0\}$;*
- (ii) *L'équation $F(x) = 0$ admet une solution non nulle dans \mathbb{R}^{N+1} et une solution primitive dans $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^{N+1}$ pour tout $M \geq 2$;*
- (iii) *Le nombre de variables vérifie $N > (d-1)2^d$.*

Alors l'équation $F(x) = 0$ admet une solution non nulle dans \mathbb{Q}^{N+1} .

2.3 – Troisième leçon

Nonobstant le fait que H. Hasse ait déjà trouvé un exemple d'équation qui admet une solution non nulle réelle et des solutions modulo M pour tout $M \geq 2$ et qui n'admet pas de solution rationnelle non nulle, un tel exemple est assez improprement appelé un *contre-exemple au principe de Hasse*. Pour donner un tel contre-exemple dans ce texte, nous allons utiliser un résultat bien connu des agrégatifs :

Proposition 1. *Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ un entier relatif non nul. Écrivons sa décomposition en facteurs irréductibles sous la forme*

$$n = \epsilon \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$$

où $\epsilon \in \{-1, 1\}$ et \mathcal{P} désigne l'ensemble des nombres premiers. Alors l'entier n est la somme de deux carrés si et seulement s'il vérifie

- (i) *L'entier n est positif, autrement dit $\epsilon = 1$;*
- (ii) *Pour tout nombre premier p congru à -1 modulo 4, la valuation $v_p(n)$ est paire.*

Reprenons l'exemple d'Iskovskikh [12], qui fut revisité par Colliot-Thélène, Coray et Sansuc [6] et cherchons les solutions rationnelles de l'équation

$$Y^2 + Z^2 = (3 - X^2)(X^2 - 2). \quad (4)$$

Remarquons d'abord que, pour des raisons de signe, la coordonnée x d'une solution de cette équation doit être dans $[-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cap [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$; elle vérifie donc les inégalités $x^2 - 2 > 0$ et $3 - x^2 > 0$. En écrivant $(u/v, y/(tv^2), z/(tv^2))$ une telle solution rationnelle, on se ramène à trouver des solutions entières à l'équation

$$Y^2 + Z^2 = T^2(3V^2 - U^2)(U^2 - 2V^2). \quad (5)$$

On peut en outre se ramener successivement au cas où les coordonnées vérifient également $\text{pgcd}(u, v) = 1$ et $\text{pgcd}(x, y, t) = 1$.

Comme $(3v^2 - u^2) + (u^2 - 2v^2) = v^2$, on obtient que

$$\text{pgcd}(3v^2 - u^2, u^2 - 2v^2) = \text{pgcd}(u^2, v^2) = 1.$$

Donc en utilisant la proposition et le fait que

$$v_p((3v^2 - u^2)(u^2 - 2v^2)) = \max(v_p(3v^2 - u^2), v_p(u^2 - 2v^2))$$

pour tout nombre premier p , on obtient que $v_p(3v^2 - u^2)$ et $v_p(u^2 - 2v^2)$ sont tous deux pairs pour tout nombre premier congru à 3 modulo 4. En appliquant la proposition à nouveau et notre remarque préalable sur les signes, on obtient que $3v^2 - u^2$ et $u^2 - 2v^2$ doivent aussi être tous les deux sommes de deux carrés. Mais dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, les seuls carrés sont 0 et 1. Donc les sommes de deux carrés dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sont 0, 1 et 2. Mais si on considère $3v^2 - u^2$ et $u^2 - 2v^2$ modulo 4, sachant que u et v ne sont pas tous deux pairs, on obtient une contradiction : pour que $3v^2 - u^2$ soit dans $\{0, 1, 2\}$ modulo 4, il faut que u et v soient tous deux impairs mais alors $u^2 - 2v^2$ est congru à 3 modulo 4 !

Pourtant l'équation (4) admet des solutions réelles et pour tout entier M , l'équation (5) admet des solutions (u, v, y, z, t) dans $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^5$ avec (u, v) et (y, z, t) primitifs.

Ce qui fait fonctionner la preuve précédente est le fait que la condition que l'entier n est congru à 0, 1 ou 2 modulo 4 ne fait pas partie des conditions de la proposition 1. Il en résulte qu'en imposant sur l'entier n une condition de signe et une condition liée à sa valuation p -adique pour tout nombre premier congru à 3 modulo 4, cela impose une contrainte sur sa réduction modulo 4. La force de cette remarque est particulièrement sensible si on la met en regard du théorème chinois qui, d'un point de

vue vaguement probabiliste, nous dit que, pour un entier a fixé, les réductions modulo p^a d'un entier sont indépendantes les unes des autres.

Un exemple encore plus frappant, mais plus délicat à justifier, est dû à E. S. Selmer et décrit par J. W. S. Cassels dans [3, §18] : l'équation

$$3X^3 + 4Y^3 + 5Z^3 = 0$$

admet des solutions réelles non nulles et des solutions primitives modulo M pour tout entier $M \geq 2$ mais n'admet pas de solution rationnelle.

Dans son exposé au congrès international de 1970 à Nice [16], Y. I. Manin construit une obstruction générale pour le principe de Hasse qui repose sur un invariant appelé le groupe de Brauer. Cette obstruction est maintenant appelée l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse. Cette obstruction a permis d'expliquer tous les contre-exemples qui étaient connus à l'époque, ce qui a naturellement amené la question de savoir si c'était la seule. Cette question n'a été résolue négativement qu'en 1999, par A. Skorobogatov [20] en utilisant des analogues non abéliens du groupe de Brauer.

Une question naturelle qu'on peut alors se poser, et qui est loin d'être résolue, est la question de savoir si l'obstruction de Brauer-Manin est la seule pour certaines classes de systèmes d'équations. Mais pour attaquer cette question il est nécessaire de faire entrer en scène un des acteurs principaux : la géométrie.

3. Arithmétique et théorie du genre

Un des grands apports du xx^e siècle à l'arithmétique est d'avoir démontré que les phénomènes arithmétiques étaient placés sous l'influence de la géométrie. En effet reprenons notre système d'équations homogènes (3). Pour tout corps K , on identifie l'espace projectif $P^n(K)$ avec l'ensemble des droites vectorielles de K^{n+1} et, pour $(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} - \{0\}$, on note $[x_0 : \dots : x_n]$ la droite engendrée par (x_0, \dots, x_n) . Au système d'équations homogènes (3), on peut alors associer l'ensemble $V(K)$ des éléments $[x_0 : \dots : x_n] \in P^n(K)$ tels que

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, P_i(x_0, \dots, x_n) = 0.$$

L'ensemble $V(Q)$ est appelé l'ensemble des points rationnels de V . Notons que l'application qui à une solution primitive $(x_0, \dots, x_N) \in Z^{N+1}$ associe $[x_0 : \dots : x_N] \in V(Q)$ vérifie que tout élément de $V(Q)$ possède exactement deux antécédents qui sont les

opposés l'un de l'autre. D'autre part, $V(C) \subset P^n(C)$ est une variété algébrique complexe, éventuellement singulière.

Notons que dans le cas d'une hypersurface la condition qui apparaît dans le théorème de Birch est précisément que la variété $V(C)$ est lisse. Une autre notion géométrique est celle de dimension. En dimension un, les courbes complexes lisses, qui peuvent être également vues comme des surfaces de Riemann, et donc comme des variétés réelles orientées de dimension 2, sont classifiées topologiquement par leur genre.

FIGURE 3 – Surface de genre 2 [O. Alexandrov]



L'archétype de résultat montrant l'influence de la géométrie sur l'arithmétique est le théorème de Faltings [9] :

Théorème 3 (Faltings). *Si la variété $V(C)$ est une courbe lisse de genre $g \geq 2$, alors $V(Q)$ ne contient qu'un nombre fini de points.*

Ainsi le genre, qui est un invariant purement topologique, détermine la finitude de l'ensemble des points rationnels.

Quand le genre est 0, c'est-à-dire que la surface de Riemann est homéomorphe à la sphère, et que l'ensemble des points rationnels n'est pas vide, on peut, comme dans le cas du cercle présenté au début du texte, paramétrer les solutions et trouver une bijection de $Q \cup \{\infty\}$ sur $V(Q)$.

Notons que si le genre est 1, et que l'ensemble des points n'est pas vide, on parle de courbe elliptique. Dans ce cas, il est possible de munir l'en-

semble des points rationnels d'une loi de groupe abélienne, qui, pour une courbe d'équation

$$Y^2 = X^3 + aX + b$$

vérifie la propriété suivante : étant donnés trois points P, Q, R de la courbe, la relation $P + Q + R = 0$ vaut si et seulement si les points P, Q et R sont alignés (en tenant compte des multiplicités). Le théorème de L. J. Mordell [18] prouve que ce groupe est engendré par un nombre fini d'éléments. Mais ce groupe peut être fini ou infini, ce qui montre bien la différence avec le cas de genre plus grand que 2.

Une question naturelle est de généraliser en dimension supérieure. Cette démarche fut précisée par S. Lang qui énonça plusieurs conjectures [13]. Pour les aborder, il nous faut un nouvel invariant qui nécessite quelques notions de géométrie algébrique. Pour une variété lisse $V(\mathbb{C})$ de dimension n , on peut considérer le fibré tangent $TV_{\mathbb{C}}$ qui est un fibré vectoriel de rang n ; à ce fibré on peut associer son déterminant, c'est-à-dire sa puissance extérieure maximale $\det(TV_{\mathbb{C}}) = \bigwedge^n TV_{\mathbb{C}}$, qui est un fibré en droites dont le dual est noté ω_V et appelé *fibré canonique*. Si on considère la variété réelle $V(\mathbb{R})$, les sections partout non nulles de ω_V sont les formes volumes, qui permettent d'intégrer sur $V(\mathbb{R})$.

Du point de vue de la géométrie algébrique, seules comptent les sections algébriques qui sont localement définies par des polynômes. Il en résulte que certains fibrés en droites n'ont pas de sections autres que la section nulle. Notons $\Gamma(V, L)$ l'espace des sections, au sens de la géométrie algébrique, d'un fibré en droites L sur $V(\mathbb{C})$; c'est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. Étant donné un point x de $V(\mathbb{C})$ on peut lui associer le sous-espace E_x de $\Gamma(V, L)$ formé des sections qui s'annulent en x . Notons U le complémentaire de l'ensemble des points x tels que $E_x = \Gamma(V, L)$; pour tout $x \in U$, le sous-espace E_x est un hyperplan de $\Gamma(V, L)$, qui correspond donc à une droite vectorielle dans l'espace dual $\Gamma(V, L)^\vee$ et donc à un point dans l'espace projectif associé $\mathbb{P}(\Gamma(V, L)^\vee)$ ce qui nous donne une application $\phi_L : U \rightarrow \mathbb{P}(\Gamma(V, L)^\vee)$. Pour ce qui suit, on est souvent amené à remplacer L par un de ses multiples, c'est à dire par le fibré en droites $L^{\otimes m} = L \otimes \dots \otimes L$.

- a) On dit que L est *gros* s'il existe $m \geq 1$ tel que l'application $\phi_{L^{\otimes m}}$ définisse un plongement d'un ouvert dense de $V(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}(\Gamma(V, L^{\otimes m})^\vee)$.
- b) On dit que L est *ample* s'il existe $m \geq 1$ tel que $\phi_{L^{\otimes m}}$ définisse un plongement de $V(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}(\Gamma(V, L^{\otimes m})^\vee)$.

En des termes plus intuitifs, que L soit gros signifie que les sections algébriques d'un multiple de L permettent de séparer les points d'un ouvert dense de $V(\mathbb{C})$.

Nous pouvons maintenant énoncer une des formes des conjectures de Lang :

Conjecture 1. *Si ω_V est gros, alors il existe un polynôme homogène F dans $\mathbb{Z}[X_0, \dots, X_N]$ dont l'annulation définit un fermé strict de $V(\mathbb{C})$ contenant $V(\mathbb{Q})$.*

Si on utilise la topologie de Zariski sur $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ dont les fermés sont précisément les parties définies par l'annulation d'une famille de polynômes homogènes de $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_N]$, la conclusion de la conjecture signifie que les points de $V(\mathbb{Q})$ ne sont pas denses pour cette topologie. En dimension un, cette conjecture résulte du théorème de Faltings, car, pour cette dimension, le fibré ω_V est gros si et seulement si le genre g de la courbe vaut au moins 2, et sur une courbe les fermés pour la topologie de Zariski sont les parties finies et la courbe elle-même.

En dimension supérieure, cette conjecture reste largement ouverte et est l'objet de nombreux travaux.

Pour une hypersurface lisse de \mathbb{P}^n donnée par un unique polynôme homogène de degré d en $N + 1$ variables, la condition « ω_V gros » équivaut à $d > N + 1$. On remarquera que le théorème de Birch correspond donc à une situation à l'opposée de celle considérée par Lang. On peut donc s'interroger sur ce qui passe dans ce cadre. Plus précisément, on note ω_V^{-1} le fibré dual de ω_V . Que peut-on dire si ce fibré *anticanonique* ω_V^{-1} a assez de sections? Une variété lisse $V(\mathbb{C})$ est dite *de Fano* si ω_V^{-1} est ample. L'espoir est que sur de telles variétés, les points rationnels soient potentiellement denses, ce qui signifie qu'il existe un corps de nombres \mathbb{K} , c'est-à-dire une extension de corps finie de \mathbb{Q} , telle que $V(\mathbb{K})$ soit dense pour la topologie de Zariski. Le résultat démontré par Birch implique en fait que, sous les hypothèses du théorème 2, l'ensemble des points rationnels $V(\mathbb{Q})$ est dense dans $V(\mathbb{R})$ et a fortiori dense pour la topologie de Zariski.

Un autre domaine de recherche très actif est celui du cas intermédiaire, où ni ω_V , ni ω_V^{-1} ne sont gros. Parmi ces variétés, on peut mentionner le cas des surfaces quartiques. Dans ce cas on a $N = 3$ et $d = 4$, si bien que $N + 1 - d = 0$. C'est un cas où ω_V est isomorphe au fibré trivial. Ainsi, inspiré par le grand théorème de P. de Fermat, L. Euler avait conjecturé

en 1772 que les seules solutions de l'équation

$$X^4 + Y^4 + Z^4 = T^4$$

étaient celles pour lesquelles deux des coordonnées sont nulles. Cette conjecture fut infirmée en 1988 par N. Elkies [8] qui fournit le contre-exemple suivant :

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4.$$

En fait, il démontre qu'il y a une infinité de solutions primitives et les points rationnels correspondants sont denses dans $V(\mathbb{R})$.

4. Problèmes d'absentéisme

Cet exemple nous amène à une autre problématique, dans le cas où notre système d'équations admet une infinité de points rationnels. Dans ce cas, l'ensemble des points rationnels $V(\mathbb{Q})$ est-il dense dans l'ensemble des points réels $V(\mathbb{R})$ muni de la topologie réelle, c'est-à-dire de la topologie induite par la topologie réelle de l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{R})$?

On peut aussi se poser la question suivante : étant donnée une solution primitive modulo M de notre système d'équation, existe-t-il une solution primitive dans \mathbb{Z}^{N+1} dont la réduction modulo M est précisément celle que nous avons choisie. Il y a une condition simple nécessaire pour cela : si M' est un multiple de M une solution primitive dans $(\mathbb{Z}/M'\mathbb{Z})^{N+1}$ se réduit modulo M en une solution primitive dans $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^{N+1}$. Une condition nécessaire pour qu'une solution primitive dans $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^{N+1}$ se relève en une solution entière est qu'elle se relève d'abord en une solution primitive modulo M' pour tout multiple M' de M . Le lemme de Hensel, qui est une variante p -adique de la méthode de Newton pour la recherche de zéros, permet de montrer qu'il suffit de tester cela pour un multiple convenable M' . Mais cette condition est-elle suffisante ?

Il se trouve que cette question peut aussi s'exprimer comme une question de densité. Pour cela, introduisons pour tout nombre premier p la valeur absolue p -adique sur \mathbb{Q} : si a et b sont des entiers avec $b \neq 0$, on définit

$$\left| \frac{a}{b} \right|_p = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0; \\ p^{v_p(b) - v_p(a)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette valeur absolue vérifie les propriétés suivantes

- (i) Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, la valeur absolue $|x|_p$ est nulle si et seulement si $x = 0$;

- (ii) Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$, on a la relation $|xy|_p = |x|_p |y|_p$;
- (iii) Pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$, on a la majoration $|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$.

Il en résulte que $(x, y) \mapsto |x-y|_p$ définit une distance sur \mathbb{Q} , et de même que \mathbb{R} peut être défini comme le complété de \mathbb{Q} pour la valeur absolue usuelle, le corps \mathbb{Q}_p est le complété de \mathbb{Q} pour la distance définie par la valeur absolue p -adique. Notons que, comme $|p^n|_p = 1/p^n$, la suite $(p^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 dans \mathbb{Q}_p . On peut alors munir $\mathbb{Q}_p^{N+1} - \{0\}$ de la topologie induite par la topologie produit et l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{Q}_p)$ de la topologie quotient qui en fait un espace compact. On munit alors $V(\mathbb{Q}_p)$ de la topologie induite et on considère l'espace $\prod_{p \in \mathcal{P}} V(\mathbb{Q}_p)$ qui est compact par le théorème de Tychonov. Les deux conditions suivantes sont alors équivalentes :

- (i) L'ensemble $V(\mathbb{Q})$ est dense dans $\prod_{p \in \mathcal{P}} V(\mathbb{Q}_p)$;
- (ii) Toute solution primitive dans $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^{N+1}$ qui se relève en une solution primitive dans $(\mathbb{Z}/M'\mathbb{Z})^{N+1}$ pour tout multiple M' de M se relève en une solution primitive dans \mathbb{Z}^{N+1} .

Il est alors naturel d'introduire l'espace adélique associé qui est défini par $V(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) = V(\mathbb{R}) \times \prod_{p \in \mathcal{P}} V(\mathbb{Q}_p)$ et de s'interroger sur la densité de $V(\mathbb{Q})$ dans cet espace. Un exemple marquant de ce point de vue est la surface de Châtelet donnée par l'équation

$$Y^2 + Z^2 = X^3 - X$$

représentée sur la figure 4.

FIGURE 4 – Surface de Châtelet



Pour cette surface $V(\mathbb{R})$ est formé de deux composantes connexes, correspondant aux cas $x \in [-1, 0]$ et $x \geq 1$. Sur cette figure, les points à coordonnées rationnelles dessinés ont été coloriés en noir ou blanc en fonction de leur réduction modulo 4. Mais sur le dessin tous les points blancs sont sur la composante connexe de droite de $V(\mathbb{R})$ et tous les points noirs sur la composante de gauche. En fait, il résulte du travail de J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et P. Swinnerton-Dyer [4] et [5] que

l'ensemble des points rationnels $V(\mathbb{Q})$ est dense dans $V(\mathbb{R})$ pour la topologie réelle et dense dans $\prod_{p \in \mathcal{P}} V(\mathbb{Q}_p)$ mais n'est pas dense dans $V(\mathbb{R}) \times V(\mathbb{Q}_2)$. Il serait possible de prouver ce dernier point en utilisant un raisonnement analogue à celui décrit dans le paragraphe 2.3. L'obstruction de Brauer-Manin mentionnée dans ce paragraphe permet en fait de construire une partie $V(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\text{Br}}$ de l'espace des adèles qui contient l'adhérence de l'ensemble des points rationnels. Et dans le cas des surfaces de Châtelet, J.-L. Colliot-thélène, J.-J. Sansuc et P. Swinnerton-Dyer prouvent que les points rationnels sont denses dans $V(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\text{Br}}$.

La question actuellement ouverte est de déterminer la classe de variétés pour lesquelles l'adhérence des points rationnels est précisément donnée par l'obstruction de Brauer-Manin. En particulier, cela vaut-il pour toutes les variétés de Fano?

5. Qui est gros ?

Si on veut utiliser la méthode naïve de recherche de solutions entières des équations polynomiales, le fait que l'ordinateur tourne sans afficher de résultat peut simplement signifier, comme dans l'exemple d'équation quartique étudiée par L. Euler et N. Elkies, que la plus petite solution non triviale est très « grosse ». La hauteur d'un point est une mesure de la taille d'une solution. Pour un point rationnel $P \in V(\mathbb{Q})$, sa hauteur $H(P)$ est donnée par

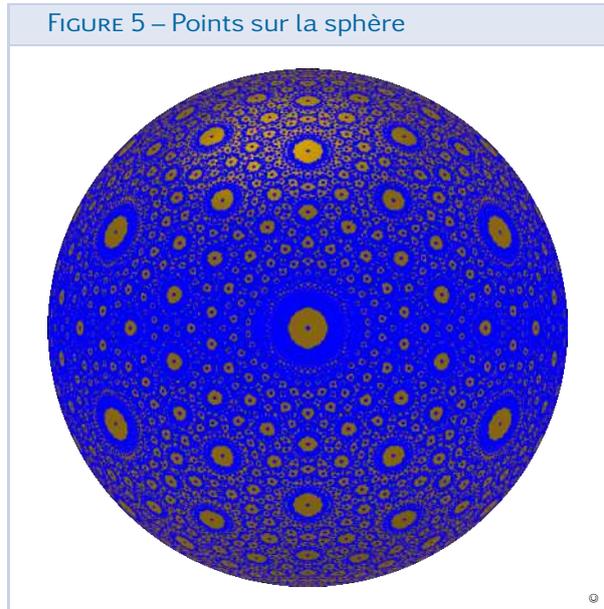
$$H(P) = \max_{0 \leq i \leq N} (|x_i|)$$

si $P = [x_0 : \dots : x_N]$ pour un élément primitif (x_0, \dots, x_N) de \mathbb{Z}^{N+1} . Si on songe à l'espace mémoire que cet élément occuperait sur un ordinateur, on peut également considérer la hauteur logarithmique du point P donnée par $h(P) = \ln(H(P))$. Pour illustrer cette notion, la figure 5 représente les points rationnels de la sphère S^2 d'équation homogène

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = T^2 \tag{6}$$

dont la hauteur est bornée par 50.

FIGURE 5 – Points sur la sphère



6. Arithmétique et capitalisme

Avec cette notion de hauteur on peut alors se poser des questions analogues à celles du paragraphe 4 : si je considère les points de hauteur inférieure à une certaine borne $B \in \mathbb{R}_+$, puis-je espérer en trouver un dans un voisinage ouvert d'un point fixé de $V(\mathbb{R})$? Puis-je en trouver un dont la réduction modulo M est une solution primitive donnée dans $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^{N+1}$? Par exemple sur la sphère tout se passe bien, on peut démontrer le résultat suivant, où $\#X$ désigne le cardinal de X et où l'on note $\text{vol}(B)$ l'aire d'une partie borélienne de la sphère :

Proposition 2. Soit U un ouvert de la sphère $S^2(\mathbb{R})$ tel que $\text{vol}(\partial U) = 0$, alors

$$\frac{\#\{P \in S^2(\mathbb{Q}) \cap U \mid H(P) \leq B\}}{\#\{P \in S^2(\mathbb{Q}) \mid H(P) \leq B\}} \rightarrow \frac{\text{vol}(U)}{\text{vol}(S^2(\mathbb{R}))}$$

lorsque B tend vers $+\infty$.

Soit M un entier tel que $8 \mid M$ ou que M est premier avec 2, notons $S^2(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$ les solutions primitives de l'équation (6) modulo la multiplication par un élément inversible de $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$. Soit $r_M : S^2(\mathbb{Q}) \rightarrow S^2(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$ l'application de réduction modulo M . Alors pour tout $P_0 \in S^2(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})$,

$$\frac{\#\{P \in S^2(\mathbb{Q}) \mid r_M(P) = P_0 \text{ et } H(P) \leq B\}}{\#\{P \in S^2(\mathbb{Q}) \mid H(P) \leq B\}} \rightarrow \frac{1}{\#S^2(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})}$$

lorsque B tend vers $+\infty$.

On peut également dire que les « petites » solutions de l'équation (6) sont équidistribuées sur la

sphère. Cela reste vrai pour toute quadrique non singulière. Le résultat de Birch implique également une équidistribution similaire pour les hypersurfaces vérifiant les hypothèses du théorème 2.

Mais, ici encore, les choses se cassent la figure en général. Considérons par exemple la surface projective S donnée par la simple équation :

$$X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 = 0 \quad (7)$$

qui correspond à une surface cubique projective lisse. Cette surface contient des droites projectives données par les équations $X_i - X_j = 0$ et $X_k - X_l = 0$ où $\{i, j, k, l\} = \{0, 1, 2, 3\}$. Il est aisé de démontrer que le nombre de point de hauteurs $\leq B$ sur chacune de ces droites est équivalent à $\frac{12}{\pi^2} B^2$ lorsque B tend vers l'infini. Par contre il est conjecturé que le nombre de points sur le complémentaire de ces droites est équivalent à $CB \ln(B)^3$ lorsque B tend vers $+\infty$ où C est une constante explicite qui vaudrait à peu près 4.904057×10^{-2} . Une telle formule semble conforme à des tests numériques faits sur ordinateur [19]. Cela veut dire que les solutions « évidentes » sont bien plus nombreuses que les autres! Autrement dit, il existe des fermés stricts pour la topologie de Zariski qui monopolisent la plupart des points rationnels. Une autre conjecture encore ouverte est que les points rationnels en dehors de ces droites sont équidistribués dans $S(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$.

7. Dissension dans les familles

Bien entendu tout se complique en famille : au lieu de regarder une équation, considérons une famille d'équations. Je n'évoquerai qu'en passant le cas des familles de courbes de genre 1. Dans ce cas, on peut avoir certains membres de la famille sans points rationnels, d'autres avec un nombre fini de points rationnels et certains avec une infinité de points rationnels. Une direction très active de recherche concerne en particulier l'étude du rang des différents membres d'une famille de courbes elliptiques à un paramètre.

Mais même dans le cas de familles de variétés de Fano, pourtant riches en points rationnels, tout n'est pas rose. Le type de phénomène que je vais décrire maintenant fut découvert par Y. Tschinkel et V. V. Batyrev dans [21], mais je vais décrire une variante de leur exemple, à savoir la famille de surfaces quadriques donnée par l'équation

$$X_0 Y_0^2 + X_1 Y_1^2 + X_2 Y_2^2 + X_3 Y_3^2 = 0$$

qu'on peut voir comme une hypersurface V dans le produit de deux espaces projectifs, X_0, X_1, X_2, X_3 désignant les coordonnées dans le premier espace projectif et Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 celles dans le second. Si on fixe $P = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{Q})$ avec $x_0 x_1 x_2 x_3 \neq 0$, le membre correspondant de la famille est la quadrique Q_P donnée par

$$x_0 Y_0^2 + x_1 Y_1^2 + x_2 Y_2^2 + x_3 Y_3^2 = 0$$

ce qui correspond à l'annulation d'une forme quadratique non dégénérée. Considérons la dimension d'un sous-espace isotrope maximal dans \mathbb{Q}^4 pour cette forme quadratique. Cette dimension peut valoir 0, 1 ou 2. Il y a donc trois cas :

- (i) Si cette dimension est 0, la quadrique projective ne contient aucun point rationnel ;
- (ii) Si cette dimension est 1, on est dans le cas d'un ellipsoïde et on peut démontrer que le nombre de points sur la quadrique de hauteur inférieure à B est équivalent à $C_P B$ quand B tend vers l'infini.
- (iii) Si cette dimension est 2, on est dans le cas d'un hyperboloïde à une nappe, qui contient deux familles de droites projectives si bien qu'il existe une bijection de $Q_P(\mathbb{Q})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. Dans ce cas le nombre de points sur la quadrique de hauteur inférieure à B est équivalent à $C_P B \ln(B)$.

Mais si on plonge l'ensemble des points rationnels de l'hypersurface $V(\mathbb{Q})$ dans l'espace adélique associé $V(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ on obtient que pour presque tout nombre premier p la plupart des points de hauteur bornée ont une réduction modulo p dans les points correspondant aux formes quadratiques sur le corps $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui contiennent un plan totalement isotrope, ce qui correspond grossièrement à la moitié d'entre elles (celles dont le discriminant est un carré). Il n'y a donc aucune chance d'avoir équidistribution au sens décrit ci-dessus pour la sphère. D'un autre côté, la réunion des membres qui monopolisent les points rationnels est dense pour la topologie de Zariski, contrairement à la situation décrite pour une surface cubique. Un résultat très récent de T. Browning et D.R. Heath-Brown [2] prouve que le nombre de points sur le complémentaire de la réunion de ces membres accumulateurs est exactement celui espéré, ce qui laisse entrevoir que les points rationnels des membres raisonnables pourraient être équidistribués sur $V(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$.

8. Un avatar d'Hilbert

Rappelons que le dixième problème de Hilbert [11] était de trouver une méthode algorithmique pour déterminer si une famille donnée d'équations polynomiales à coefficients entiers en N variables possède une solution à coordonnées entières. Problème qui fut résolu négativement dans les années 1970 avec le théorème suivant :

Théorème 4 (Y. V. Matiyasevich, J. Robinson, M. Davis, H. Putnam et al.). *Il existe un polymôme $P(X_1, \dots, X_{11}, T)$ en 12 variables à coefficients entiers tel que l'application de \mathbf{N} dans $\{0, 1\}$ définie par*

$$n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } P(X_1, \dots, X_{11}, n) = 0 \text{ a une solution dans } \mathbf{Z}^{11}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

ne peut être calculée avec un algorithme.

Notons que la question de savoir s'il est possible de trouver un algorithme pour l'existence d'une solution rationnelle, ou, ce qui revient au même, pour l'existence d'une solution entière dans le cas de

polynômes homogènes est encore ouverte. Mais si on s'inspire de l'idée de la preuve du théorème précédent, l'idée serait de prouver qu'il existe des familles d'équations paramétrées par $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ telles que l'ensemble des points P pour lesquels le membre correspondant de la famille a des points rationnels peut être « arbitrairement compliqué ». Il est donc naturel que divers travaux de recherche portent sur l'étude du nombre de points P de $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ de hauteur majorée par B et qui sont dans l'image des points rationnels d'une famille. Peu de choses sont connues sur ces ensembles (cf. par exemple les travaux de D. Loughran et A. Smeets [15]).

9. Une page de publicité

Si le sujet vous intéresse, n'hésitez pas à venir participer au trimestre IHP à la *redécouverte des points rationnels* qui aura lieu du 15 avril au 12 juillet et comprendra plusieurs cours couvrant les problèmes rapidement évoqués dans ce texte. Pour plus d'informations, consultez le site <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ratio2019/>.

Références

- [17] C.-G. BACHET DE MÉZIRIAC. *Diophanti Alexandrini Arithmeticon libri sex, et de numeris multangulis liber unus, nunc primum graece et latine editi, atque absolutissimis commentariis illustrati*. Sumptibus Hieronymi Drovart, 1621.
- [21] V. V. BATYREV et Y. TSHINKEL. « Rational points on some Fano cubic bundles ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **323**, n° 1 (1996), p. 41-46.
- [1] B. BIRCH. « Forms in many variables ». *Proc. R. Soc. Lond. A* **265**, n° 1321 (1962), p. 245-263.
- [2] T. BROWNING et HEATH-BROWN. « Density of rational points on a quadric bundle in $\mathbf{P}_Q^3 \times \mathbf{P}_Q^3$ » (2018). URL : <https://arxiv.org/abs/1805.10715>.
- [3] J. W. S. CASSELS. *Lectures on elliptic curves*. 24. London mathematical society student texts. Cambridge university press, Cambridge, 1991.
- [6] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, D. CORAY et J.-J. SANSUC. « Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles ». *J. reine angew. Math.* **320** (1980), p. 150-191.
- [4] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC et H. P. F. SWINNERTON-DYER. « Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces I ». *J. reine angew. Math.* **373** (1987), p. 37-107.
- [5] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC et H. P. F. SWINNERTON-DYER. « Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces II ». *J. reine angew. Math.* **374** (1987), p. 72-168.
- [7] J. H. CONWAY et R. GUY. *The Book of Numbers*. Springer Verlag, New York, 1996.
- [8] N. ELKIES. « On $A^4 + B^4 + C^4 = D^4$ ». *Mathematics of computation* **51**, n° 184 (1988), p. 825-835.
- [9] G. FALTINGS. « Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern ». *Inventiones mathematicae* **73**, n° 3 (1983), p. 349-366.
- [10] H. HASSE. « Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen ». *J. reine angew. Math.* (1923).
- [11] D. HILBERT. « Mathematische Probleme ». *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* (1900), p. 253-297.
- [12] V. A. ISKOVSKIKH. « A counterexample to the Hasse principle for a system of two quadratic forms in five variables ». *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR* **10**, n° 3 (1971), p. 575-577.

- [13] S. LANG. *Number Theory III, diophantine geometry*. 60. Encyclopaedia of Math. Sciences. Springer, 1991.
- [14] S. LANG et A. WEIL. « Number of points of varieties in finite fields ». *American Journal of Mathematics* 76, n° 4 (1954), p. 819-827.
- [15] D. LOUGHRAN et A. SMEETS. « Fibrations with few rational points ». *Geometric and Functional Analysis* 26, n° 5 (2016), p. 1449-1482.
- [16] Y. MANIN. « Le groupe de Brauer–Grothendieck en géométrie diophantienne ». *Actes du Congrès international des mathématiciens, Tome 1 (Nice, 1970)* (1971), p. 401-411.
- [18] L. MORDELL. « On the rational resolutions of the indeterminate equations of the third and fourth degree ». In : *Proc. Cambridge Phil. Soc.* Vol. 21. 1922, p. 179-192.
- [19] E. PEYRE et Y. TSCHINKEL. « Tamagawa numbers of diagonal cubic surfaces of higher rank ». In : *Rational points on algebraic varieties*. Springer, 2001, p. 275-305.
- [20] A. N. SKOROBOGATOV. « Beyond the Manin obstruction ». *Inventiones mathematicae* 135, n° 2 (1999), p. 399-424.



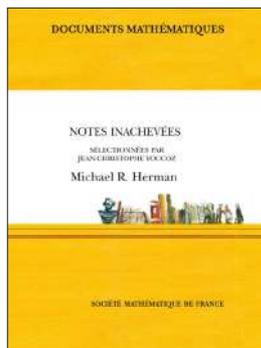
Emmanuel PEYRE

Institut Fourier, université Grenoble Alpes et CNRS
 Emmanuel.Peyre@univ-grenoble-alpes.fr

Emmanuel Peyre est professeur à l'Institut Fourier (université Grenoble Alpes). Il n'est ni tout à fait théoricien des nombres, ni tout à fait géomètre algébriste. Sur les rapports aux tutelles, il dit travailler en géométrie arithmétique, voire en statistique diophantienne. Signes distinctifs : moustache et maintenant lunettes.

Je remercie les relecteurs de ce texte, Jean-Paul Mohsen et David Harari, pour leurs suggestions judicieuses qui m'ont permis d'améliorer ce texte.

Documents Mathématiques



Vol. 16

Notes inachevées sélectionnées par J.-C. Yoccoz

M. R. HERMAN

ISBN 978-2-85629-867-1

2018 - 200 pages - Hardcover. 17 x 24

Public: 70 € - Members: 49 €

Michel Herman était un spécialiste de premier plan de la théorie des systèmes dynamiques. À sa disparition soudaine, il a laissé un grand nombre de notes manuscrites, dont certaines de grande qualité qui n'ont jamais été publiées. Jean-Christophe Yoccoz, son exécuteur testamentaire scientifique, qui était aussi un de ses premiers étudiants et un des interlocuteurs mathématiques les plus proches de son cœur, a eu l'idée de rassembler les plus importantes de ces notes et de les rendre disponibles pour la communauté. À cette fin, il a réuni une équipe de spécialistes dans les divers domaines de recherche de M. Herman qui ont uni leurs forces pour classer, examiner et saisir une sélection de ces notes. La ligne directrice de ce travail collectif était d'adhérer le plus possible au manuscrit original, en y ajoutant si nécessaire quelques corrections ou commentaires pour faciliter la lecture. Le résultat est ce volume de notes non publiées à travers lesquelles nous espérons que le lecteur pourra découvrir ou re-découvrir certains aspects de la pensée mathématique de Michel Herman, de ses centres d'intérêt et de sa façon de conduire ses recherches.

Disponible sur le site de la SMF : <http://smf.emath.fr>

*frais de port non compris



Holomorphicité discrète et applications à la physique statistique

• H. DUMINIL-COPIN

Les modèles sur réseau furent introduits afin de modéliser une grande variété de phénomènes, allant des matériaux ferroélectriques aux gaz sur réseau. Ils produisent également des discrétisations de théories des champs quantiques et euclidiennes et sont ainsi importants du point de vue de la physique théorique. Bien que leur motivation vienne originellement de la physique, ces modèles sont également des objets d'une grande richesse mathématique dont l'étude crée de nouvelles connexions entre différents domaines des mathématiques (algèbre, combinatoire, probabilités, analyse complexe, théorie spectrale) et de la physique (théorie quantique des champs, physique de la matière condensée, théorie conforme des champs).

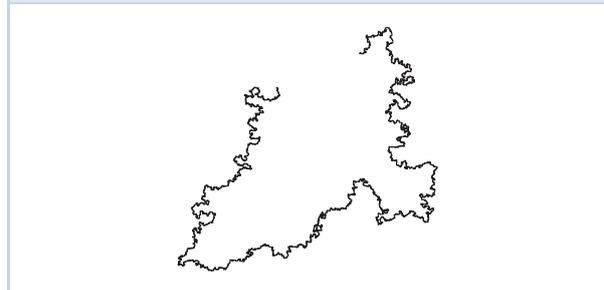
Le centre d'intérêt de cet article est la compréhension des interfaces aléatoires de systèmes planaires en utilisant un certain type de modèles sur réseau prénommés modèles de boucles. À travers deux exemples, nous nous proposons de décrire brièvement les techniques provenant de la théorie des probabilités et de l'étude des fonctions définies sur des graphes qui permettent de décrire ces interfaces aléatoires.

Un premier exemple : les marches auto-évitantes

Le modèle des marches auto-évitantes fut introduit pour la première fois en tant que puzzle combinatoire par W.J.C. Orr [12] en 1947, puis popularisé par le prix Nobel de chimie Paul Flory qui, en 1953, proposa le modèle afin d'expliquer le positionnement spatial de longs polymères¹. Bien que simple à définir, le modèle se révèle être très intéressant car extrêmement difficile à étudier mathématiquement. De son étude ont émergé des méthodes fondamentales qui sont maintenant utilisées dans de nombreux autres domaines : la technique d'expansion en entrelacs imaginée par David Brydges et Tom Spencer afin de comprendre les marches auto-évitantes en grande dimension, l'évolution de Schramm-Loewner introduite par Oded Schramm

pour étudier les marches aléatoires à boucles effacées (un modèle motivé par les marches auto-évitantes), etc.

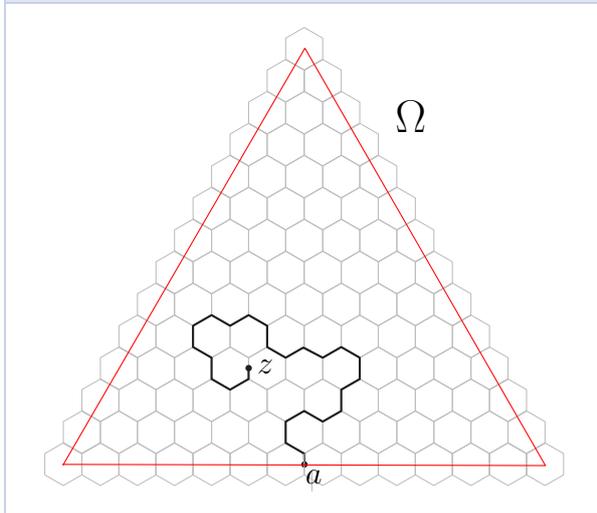
FIGURE 1 – Une marche aléatoire auto-évitante de longueur 1000 (simulation due à Vincent Beffara)



1. Les polymères, tels que les plastiques ou l'ADN, sont des chaînes composées de nombreux constituants.

Décrivons maintenant le modèle plus formellement². Considérons le réseau hexagonal \mathbb{H} (il est également possible de travailler sur le réseau carré ou tout autre graphe transitif infini, mais nous verrons que certaines propriétés propres au réseau hexagonal seront cruciales par la suite). Une marche de longueur n est une suite finie $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_n)$ de sommets voisins de \mathbb{H} . Cette marche est auto-évitante si tous les γ_k sont distincts. Pour tout n , le modèle est défini en tirant uniformément une marche parmi les marches auto-évitantes de longueur n partant du sommet 0.

FIGURE 2 – Un domaine Ω avec les points a et z , et une marche auto-évitante de a à z



Originellement, Flory était intéressé par les propriétés géométriques de ce chemin aléatoire. En particulier, il se focalisa sur la valeur moyenne m_n de $\|\gamma_n\|$. Grâce à un argument astucieux, il prédit que m_n croît avec n comme $n^{3/4+o(1)}$. Cette prédiction fut très importante, car elle est différente du comportement diffusif, c'est-à-dire tel que $m_n \approx n^{1/2}$, des marches aléatoires simples (qui, elles, ont le droit de s'intersecter). Une petite anecdote : la prédiction de Flory repose sur deux propriétés dont nous savons aujourd'hui qu'elles ne sont pas vérifiées par les marches auto-évitantes. Malgré cela, la prédiction se révèle être juste : les deux erreurs de Flory s'annulent exactement, et l'on s'attend bien à ce que $m_n = n^{3/4+o(1)}$.

Avant de discuter la question du déplacement moyen dans de plus amples détails, faisons quelques pas en arrière et focalisons-nous sur la contribution originale de Orr. Dans son article de

1947, Orr calcula à la main le nombre de marches auto-évitantes pour de faibles valeurs de n . Avec des ordinateurs puissants et des algorithmes efficaces, nous sommes aujourd'hui en mesure de calculer exactement le nombre de marches auto-évitantes sur le réseau carré jusqu'à une longueur de 71, mais malheureusement aucune formule générale ne semble émerger de cette énumération. Néanmoins, il est possible de montrer des choses non triviales sur les marches auto-évitantes.

Dans la suite, nous dénoterons le nombre de marches auto-évitantes de longueur n par c_n . Couper une marche de longueur $n + m$ après n pas nous donne une marche de longueur n et la translation d'une marche de longueur m , de telle sorte que $c_{n+m} \leq c_n c_m$. Un argument simple de sous-multiplicativité implique le résultat suivant.

Proposition 1. *Il existe une constante μ_c , appelée constante de connectivité du réseau, telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{1/n} = \mu_c.$$

Cette constante existe pour tout réseau, comme par exemple les réseaux hexagonal, triangulaire, carré, hypercubique, les arbres, etc. (nous utilisons seulement la transitivité du graphe). Des arguments bien plus élaborés reposant sur le formalisme de Coulomb et la théorie conforme des champs permettent de raffiner la prédiction.

Conjecture 1. *Pour tout réseau planaire,*

$$c_n = n^{11/32+o(1)} \mu_c^n.$$

Cette prédiction est étonnante : bien que μ_c varie selon les réseaux, la correction polynomiale, elle, ne change pas. On dit que l'exposant 11/32 est *universel*.

Les résultats rigoureux les plus poussés sont loin d'approcher ces prédictions spectaculaires. Hammersley et Welsh ont prouvé en 1962 que $c_n \leq \exp(C\sqrt{n}) \mu_c^n$ sans calculer μ_c . Revenons au problème du déplacement moyen, il n'est même pas connu si celui-ci croît plus vite que $n^{1/2}$. En effet, même si le rayon d'une marche de longueur n est évidemment plus grand que $n^{1/2}$, son point final, lui, peut être beaucoup plus proche de l'origine. Pour ce qui est de la borne supérieure, il a été prouvé récemment [4] que les marches auto-évitantes sont sous-balistiques, c'est-à-dire que m_n/n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Nous encourageons

2. Voir [10, 1] ou le cours de l'auteur donné à l'IHÉS et disponible sur YouTube pour plus de détails et une liste de références complète.

le lecteur à essayer d'améliorer ces résultats, par exemple concernant les questions combinatoires, en améliorant le terme $\exp(C\sqrt{n})$ ou, pour les questions plus géométriques, en fournissant une borne quantitative sur la vitesse de convergence vers 0.

Les contributions précédentes reposent sur des techniques développées il y a environ cinquante ans. Depuis, peu de nouveaux outils sont apparus en dimension deux, à l'exception de ce que nous allons maintenant discuter. L'idée de base est de combiner des techniques combinatoires réminiscentes de l'approche historique des marches auto-évitantes avec l'intuition venant de la théorie des fonctions holomorphes discrètes.

À partir de maintenant, un *domaine discret* Ω sera la partie du réseau hexagonal obtenue en coupant celui-ci le long d'un polygone auto-évitant sur le réseau triangulaire dual, voir Fig. 2. Considérons le centre a d'une arête située sur le bord du domaine et le centre z d'une arête quelque part dans Ω . L'objet central de notre étude est l'*observable parafermionique* définie comme suit :

$$F(z) = F_{\Omega, a, x, \sigma}(z) := \sum_{\substack{\gamma \subset \Omega \\ \gamma: a \rightarrow z}} \exp(-i\sigma W_\gamma(a, z)) \times \text{longueur de } \gamma,$$

où la somme porte sur toutes les marches auto-évitantes de a à z (noter que la définition est un peu modifiée puisque ces marches vont d'un centre d'arête à un autre), et x, σ sont deux réels positifs que nous fixerons intelligemment plus tard. Dans la définition ci-dessus, le terme $W_\gamma(a, z)$ est égal à la rotation totale en radians de la marche auto-évitante entre a et z . En d'autres termes, cette quantité vaut $\pi/3$ fois le nombre de virages vers la gauche moins le nombre de virages vers la droite effectués par γ .

Le terme impliquant $W_\gamma(a, z)$, appelé *terme de winding*, peut apparaître comme une complication inutile. En effet, lorsque $\sigma = 0$, nous obtenons la fonction génératrice des marches auto-évitantes de a à z , ce qui semble un objet bien plus naturel. L'avantage d'inclure un terme de winding provient du fait que, lorsque

$$x = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{5}{8},$$

la fonction F satisfait aux relations locales suivantes : lorsque v est un sommet à l'intérieur de

Ω et que p, q et r sont les centres des trois arêtes incidentes à v , F satisfait à

$$(p-v)F(p) + (q-v)F(q) + (r-v)F(r) = 0, \quad (1)$$

où p, q et r sont identifiés avec leurs affixes respectives.

L'ensemble d'équations (1) (indexées par les sommets v dans Ω) a une interprétation très utile en termes d'intégrales de contour. En effet, fixons un polygone auto-évitant $\Gamma := (f_0, \dots, f_k = f_0)$ sur le réseau triangulaire dual³ et définissons l'intégrale de contour F le long de Γ par la formule

$$\oint_{\Gamma} F(z) dz = \sum_{i=0}^{k-1} (f_{i+1} - f_i) F(z_i),$$

où f_i est identifié avec son affixe et z_i est le centre de l'arête duale $\{f_i, f_{i+1}\}$.

Les équations (1) correspondent au fait que les intégrales le long des contours triangulaires « élémentaires » autour des sommets valent tous zéro. Puisque tout contour peut être écrit comme la somme des contours triangulaires élémentaires inclus dans son intérieur, les relations (1) impliquent que les intégrales de contour de F s'annulent toutes. Cette propriété est réminiscente d'une propriété classique des fonctions holomorphes. Pour cette raison, nous pouvons considérer F comme la version discrète d'une fonction holomorphe.

L'analogie avec les fonctions holomorphes doit être prise avec des pincettes. En effet, de nombreux problèmes avec condition au bord possèdent une unique solution holomorphe. Ce n'est pas le cas pour les fonctions sur les graphes satisfaisant que les intégrales de contours s'annulent. Imaginons par exemple que nous souhaitons déterminer F en utilisant ses conditions au bord et la propriété précédente. Nous avons une inconnue $F(z)$ par arête, et une relation par sommet. Pour des domaines génériques, nous faisons donc face à un système linéaire fortement sous déterminé. En conclusion, les fonctions satisfaisant à (1) peuvent être considérées comme des fonctions holomorphes, mais la théorie discrète est beaucoup moins rigide (et donc moins puissante) que la théorie continue.

Heureusement pour nous, la propriété précédente n'est pas vide de sens. Une analyse attentive des intégrales le long des contours situés sur le bord des domaines permet de prouver le théorème suivant.

3. Le réseau dual est formé de sommets situés au centre des faces et des arêtes reliant les sommets correspondant à des faces adjacentes.

Théorème 1. *La valeur de la constante de connectivité du réseau hexagonal vaut $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.*

Nous référons à [6] pour une preuve complète de ce résultat. Mentionnons que cette constante de connectivité avait été prédite non rigoureusement par Nienhuis en 1982 [11] en utilisant une technique complètement différente. Le fait que μ_c a une forme si simple semble être une anomalie. Excepté pour les arbres et les réseaux unidimensionnels, les constantes de connectivité ne semblent pas avoir une forme spéciale en général. Par exemple, la constante de connectivité du réseau carré peut être approchée très efficacement, mais ne semble pas correspondre à un nombre simple. À vrai dire, nous ne savons même pas si ce nombre est rationnel ou algébrique.

Calculer la constante de connectivité d'un réseau peut être considéré comme un premier pas vers une compréhension plus complète de l'énumération des marches auto-évitantes. Mais abandonnons pour un moment l'interprétation combinatoire du problème et entrons dans le monde des transitions de phase et de la physique statistique.

Considérons un domaine simplement connexe Ω ainsi que deux points \mathbf{a} et \mathbf{b} sur son bord. Considérons également, pour $\delta > 0$, le graphe $\Omega_\delta = \Omega \cap \delta\mathbb{H}$ et deux centres d'arêtes a_δ et b_δ sur le bord de Ω_δ proches de \mathbf{a} et \mathbf{b} . Nous pensons aux triplets $(\Omega_\delta, a_\delta, b_\delta)$ comme étant des approximations de plus en plus fines (lorsque $\delta \searrow 0$) de $(\Omega, \mathbf{a}, \mathbf{b})$. Définissons une interface aléatoire $\gamma_{(\Omega_\delta, a_\delta, b_\delta)}$ de la façon suivante : une marche auto-évitante de a_δ à b_δ dans Ω_δ a une probabilité proportionnelle à $x^{\text{longueur de } \gamma}$, tandis que tout autre chemin sur $\delta\mathbb{H}$ a une probabilité zéro. Dans ce problème, x est un paramètre qui peut être fixé librement.

Si x est trop petit, la marche auto-évitante est trop pénalisée par la longueur, de sorte que $\gamma_{(\Omega_\delta, a_\delta, b_\delta)}$ converge en loi vers la géodésique de \mathbf{a} à \mathbf{b} dans Ω . À l'inverse, si x est trop grand, la marche auto-évitante n'est pas assez pénalisée, de telle sorte que $\gamma_{(\Omega_\delta, a_\delta, b_\delta)}$ converge vers une courbe aléatoire de type Péano remplissant tout le domaine Ω . La transition entre les deux comportements possibles a lieu exactement à la valeur $x_c = 1/\mu_c$. Les énoncés précédents (c'est-à-dire pour $x \neq x_c$) sont maintenant des théorèmes mathématiques, mais par contre le comportement à $x = x_c$ reste conjectural. À $x = x_c$, la théorie conforme des champs prédit que $\gamma_{(\Omega_\delta, a_\delta, b_\delta)}$ converge dans la limite d'échelle (c'est-à-dire lorsque δ tend vers 0) vers une courbe aléatoire $\gamma_{(\Omega, \mathbf{a}, \mathbf{b})}$ de \mathbf{a} à \mathbf{b} dans Ω . Cette courbe est

continue, nulle part dérivable, simple et fractale, et de plus, satisfait à la symétrie suivante : la famille de courbes $\gamma_{(\Omega, \mathbf{a}, \mathbf{b})}$ indexées par les triplets $(\Omega, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ est *invariante conforme* : pour tout $(\Omega, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ et toute application conforme (c'est-à-dire holomorphe et injective) $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\psi(\gamma_{(\Omega, \mathbf{a}, \mathbf{b})}) \text{ a la même loi que } \gamma_{(\psi(\Omega), \psi(\mathbf{a}), \psi(\mathbf{b}))}.$$

Cette prédiction peut être reformulée comme suit : la courbe aléatoire obtenue comme la limite d'échelle des marches auto-évitantes dans $\psi(\Omega)$ allant de $\psi(\mathbf{a})$ à $\psi(\mathbf{b})$ a la même loi que l'image par ψ de la courbe aléatoire obtenue en prenant la limite d'échelle des marches auto-évitantes dans Ω allant de \mathbf{a} à \mathbf{b} . Ce fait est clair si nous considérons une transformation correspondant à une symétrie du réseau (par exemple une rotation d'un angle de $k\frac{2\pi}{3}$, avec $k \in \mathbb{Z}$), mais cet énoncé reste vrai pour n'importe quelle application conforme (en particulier pour une rotation d'un angle quelconque).

L'émergence de ces symétries supplémentaires a de nombreuses applications. Par exemple, Oded Schramm [13] parvint à identifier les candidats naturels pour les familles de courbes continues simples, qui sont invariantes conformes. Avec Gregory Lawler et Wendelin Werner [9], il formula la conjecture suivante.

Conjecture 2. *Pour tout domaine simplement connexe Ω avec deux points \mathbf{a} et \mathbf{b} sur son bord, la courbe $\gamma_{(\Omega, \mathbf{a}, \mathbf{b})}$ est l'évolution de Schramm-Loewner (SLE) de paramètre $8/3$.*

Cet objet, qui est directement relié à de nombreux autres modèles en dimension 2 comme le mouvement brownien planaire par exemple, est très bien compris. Prouver la convergence de $\gamma_{(\Omega_\delta, a_\delta, b_\delta)}$ vers le SLE(8/3) apporterait un nouvel éclairage sur le comportement du modèle lorsque $x = x_c$, en particulier sur le comportement typique des grandes marches auto-évitantes. Il serait ainsi possible d'extraire de la convergence la valeur des exposants critiques $11/32$ et $3/4$ mentionnés plus tôt.

La discussion précédente sur l'invariance conforme semble nous avoir amenés un peu loin de la discussion originelle concernant les observables parafermioniques, mais en fait, ce n'est pas le cas. En effet, l'observable parafermionique devrait également être covariante conforme dans la limite d'échelle. Plus précisément, Smirnov conjectura le résultat suivant.

Conjecture 3. *Pour tout domaine simplement connexe Ω avec deux points \mathbf{a} et \mathbf{b} sur son bord, si F_δ dénote l'observable dans le domaine Ω_δ avec*

$a = a_\delta$, alors

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F_\delta(\cdot)}{F_\delta(b_\delta)} = \left(\frac{\Psi'}{\Psi'(b)} \right)^{5/8}, \quad (2)$$

où Ψ est n'importe quelle application conforme de Ω dans le demi-plan supérieur envoyant a à l'infini, et b sur O (la convergence est la convergence uniforme sur tout compact de Ω).

Nous laissons au lecteur le petit exercice consistant à exprimer la limite de l'observable parafermionique renormalisée dans $(\psi(\Omega), \psi(a), \psi(b))$ en terme de celle dans (Ω, a, b) .

Prouver la conjecture de Smirnov mènerait probablement à une preuve de la conjecture de Lawler, Schramm et Werner. De ce point de vue, l'article [6] est donc un premier pas car il illustre le fait que cette propriéte de pr eholomorphicit e peut être exploitée. Malheureusement, le programme stagne ces dernières années, car la preuve de l'invariance conforme de l'observable parafermionique est très difficile. Néanmoins, un programme similaire a été men e à bien pour un modèle reli e, le modèle d'Ising, que nous nous proposons donc de décrire brièvement.

Un deuxième exemple : le modèle d'Ising

Le modèle d'Ising fut introduit par Lenz en 1920 afin de modéliser la température de Curie des matériaux ferromagnétiques. Cette température, observée expérimentalement par Pierre Curie, correspond à la température au-dessus de laquelle un mat eriu ferromagnétique devient paramagnétique, dans le sens qu'il perd sa magnétisation spontanée. Ce modèle est aujourd'hui utilis e dans de nombreux domaines de la physique, allant des aimants aux verres de spins. En fait, les applications du modèle d'Ising dépassent largement le domaine de la physique, et touchent aujourd'hui la biologie, les neurosciences, etc.

L'idée principale de Lenz était de modéliser un aimant comme une collection de dipôles magnétiques microscopiques situ es sur les sommets d'un réseau cristallin. Afin de simplifier l'étude, ces dipôles ne peuvent être orient es que dans deux directions, le nord ou le sud, et sont donc repr esent es par des spins σ_x pouvant valoir la valeur $+1$ ou la valeur -1 . De plus, ces spins interagissent entre eux

en essayant d'être align es avec leurs voisins⁴, exactement comme les pôles oppos es de deux aimants ont tendance à s'attirer (ainsi, ils sont orient es dans la même direction).

Formellement, le modèle est défini comme suit. Soit G un sous-graphe fini de \mathbb{H} avec un ensemble de sommets V et un ensemble d'arêtes E (G est notre mat eriu ferromagnétique). Définissons l'énergie $H_G(\sigma)$ d'une configuration $\sigma = (\sigma_u : u \in V)$ de spins $\sigma_u \in \{\pm 1\}$ par la formule

$$H_G(\sigma) := - \sum_{\{u,v\} \in E} \sigma_u \sigma_v.$$

Le choix de cette énergie est naturel, puisqu'elle favorise les configurations pour lesquelles les spins voisins sont align es. Ainsi, l'énergie est minimale lorsque tous les spins sont align es, c' est-à-dire lorsqu'ils sont tous positifs, ou tous négatifs. Pour $T > 0$, introduisons une mesure ayant la forme d'une mesure de Boltzman, qui attribue une probabilité d'autant plus grande à une configuration que celle-ci a une énergie faible : la moyenne de $g : \{\pm 1\}^V \rightarrow \mathbb{R}$ pour cette mesure est donnée par

$$\langle g \rangle_{G,T} := \frac{\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^V} g(\sigma) e^{-\frac{1}{T} H_G(\sigma)}}{\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^V} e^{-\frac{1}{T} H_G(\sigma)}}.$$

La mesure $\langle \cdot \rangle_{G,T}$ est appelée mesure du modèle d'Ising sur le graphe G à température $T > 0$. Le paramètre T correspond à la température et mesure la quantité de désordre dans le système : plus T est faible moins le système souhaite avoir une grande énergie. Les cas extrêmes $T = +\infty$ et $T = 0$ correspondent aux cas où la mesure est totalement uniforme (et ne prend donc pas en compte l'énergie) ou concentrée sur les deux configurations d'énergie minimale.

Lorsque l'on travaille sur le modèle d'Ising, il est intéressant de considérer les corrélations entre spins, c' est-à-dire les quantités de la forme $\langle \prod_{u \in A} \sigma_u \rangle_{G,T}$, où $A \subset V$. La quantité σ_u associée à un sommet u est appelée une *variable aléatoire*⁵ d'ordre du modèle car les moyennes de ces quantités mesurent la quantité de corrélation dans le modèle. Par exemple, la moyenne des corrélations entre spins, définie par la formule $m(G, T) := \frac{1}{|V|^2} \sum_{u,v \in V} \langle \sigma_u \sigma_v \rangle_{G,T}$, est une bonne mesure de la

4. Dans ce document, nous nous focalisons sur le modèle d'Ising ferromagnétique à plus proches voisins.

5. Bien que les physiciens utilisent plutôt le terme d'opérateur, nous utiliserons la terminologie probabiliste de variable aléatoire.

capacité du matériau à être ordonné magnétiquement. En particulier, il est possible de montrer, lorsque l'on étend les définitions précédentes à des graphes infinis comme le réseau hexagonal ou le réseau carré⁶, qu'il existe un paramètre critique, appelé *température critique* T_c , tel que

$$m(G, T) = \begin{cases} 0 & \text{si } T > T_c, \\ > 0 & \text{si } T < T_c. \end{cases}$$

Cette température critique peut être interprétée comme l'analogie théorique de la température de Curie.

Du point de vue de la théorie conforme des champs, il est utile d'introduire un autre type de variable aléatoire, appelée *variable aléatoire de désordre*, et définie comme suit. Soient f et g deux faces de notre graphe (on le considère plongé dans le plan) et introduisons une coupure \mathcal{C} allant de f à g , c'est-à-dire un chemin auto-évitant sur le réseau dual allant de f à g . Considérons la variable aléatoire⁷ $\mu_f \mu_g$ (dépendant de \mathcal{C} et T) donnée par

$$\mu_f(\sigma) \mu_g(\sigma) := \exp\left(-\frac{2}{T} \sum_{[u,v] \cap \mathcal{C} \neq \emptyset} \sigma_u \sigma_v\right).$$

L'utilité des variables aléatoires de désordre remonte à la solution exacte du modèle d'Ising planaire. Ils sont cruciaux dans l'étude du comportement critique. La combinaison des variables aléatoires d'ordre et de désordre est reliée à l'observable parafermionique pour les marches auto-évitantes. Afin d'illustrer ce lien, nous avons besoin d'introduire la *représentation haute-température* du modèle. Comme observé par van der Waerden, l'identité

$$\exp\left(\frac{1}{T} \sigma_u \sigma_v\right) = \cosh\left(\frac{1}{T}\right) \left(1 + \operatorname{th}\left(\frac{1}{T}\right) \sigma_u \sigma_v\right)$$

permet d'exprimer la fonction de partition du modèle d'Ising comme suit

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^V} e^{-\frac{1}{T} H_G(\sigma)} \\ &= \cosh\left(\frac{1}{T}\right)^{|E|} \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^V} \prod_{e=\{u,v\} \in E} \left(1 + \operatorname{th}\left(\frac{1}{T}\right) \sigma_u \sigma_v\right) \\ &= \cosh\left(\frac{1}{T}\right)^{|E|} \sum_{\omega \in \mathcal{E}} \left(\prod_{e \in \omega} \operatorname{th}\left(\frac{1}{T}\right) \right) \left(\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^V} \prod_{u \in V} \sigma_u^{|\{v: \{u,v\} \in \omega\}|} \right). \end{aligned}$$

6. Il est nécessaire de faire un passage à la limite, que nous ne justifierons pas ici.

7. L'insertion de cette variable aléatoire correspond à remplacer $\sigma_u \sigma_v$ par $-\sigma_u \sigma_v$ pour toute arête traversée par \mathcal{C} .

Pour tout sommet $u \in V$, associons à la configuration σ la configuration $\sigma^{(u)}$ obtenue en inversant le spin à u . Le fait que $\sigma \mapsto \sigma^{(u)}$ est une involution implique directement que la dernière somme dans l'expression précédente vaut

$$\begin{cases} 2^{|V(G)|} & \text{si } \omega \in \mathcal{E}(G), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\mathcal{E}(G)$ dénote l'ensemble des sous-graphes de \mathbb{H} composés de boucles auto-évitantes disjointes. Nous déduisons que

$$\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^V} e^{-\frac{1}{T} H_G(\sigma)} = \cosh\left(\frac{1}{T}\right)^{|E|} 2^{|V|} \sum_{\omega \in \mathcal{E}(G)} x^{|\omega|}, \quad (3)$$

avec $x := \operatorname{th}\left(\frac{1}{T}\right)$. Un calcul similaire implique que pour tout $A \subset V$,

$$\sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^V} \left(\prod_{u \in A} \sigma_u \right) e^{-\frac{1}{T} H_G(\sigma)} = \cosh\left(\frac{1}{T}\right)^{|E|} 2^{|V|} \sum_{\omega \in \mathcal{E}(G, A)} x^{|\omega|},$$

où $\mathcal{E}(G, A)$ dénote l'ensemble des sous-graphes ω de G composés de boucles auto-évitantes ainsi qu'une famille de chemins auto-évitants pairant les éléments de A entre eux. Finalement, nous obtenons que

$$\left\langle \prod_{u \in A} \sigma_u \right\rangle_{G, T} = \frac{\sum_{\omega \in \mathcal{E}(G, A)} x^{|\omega|}}{\sum_{\omega \in \mathcal{E}(G)} x^{|\omega|}}.$$

En d'autres termes, les corrélations entre les variables aléatoires d'ordre peuvent être exprimées en termes de ratios de sommes pondérées de sous-graphes de G . Mais qu'advient-il lorsque l'on mélange des variables aléatoires d'ordre et de désordre? Prenons un exemple. Considérons un domaine discret Ω et un sommet u sur son bord. Considérons également un sommet $v \in \Omega$ et une coupure \mathcal{C} entre la face f à l'extérieur de Ω adjacente à u et une face g adjacente à v . En effectuant les mêmes calculs que ci-dessus, nous obtenons dans ce cas

$$\langle \sigma_u \sigma_v \mu_f \mu_g \rangle_{G, T} = \frac{\sum_{\omega \in \mathcal{E}(G, \{u, v\})} (-1)^{|\omega \cap \mathcal{C}|} x^{|\omega|}}{\sum_{\omega \in \mathcal{E}(G)} x^{|\omega|}}. \quad (4)$$

Puisque $\omega \in \mathcal{E}(G, \{u, v\})$ est l'union disjointe d'une marche auto-évitante de u à v et de boucles auto-évitantes, les boucles n'entourant pas v contribuent un nombre pair à $|\omega \cap \mathcal{C}|$, par conséquent, seule

la marche auto-évitante de u   b contribue possiblement un nombre impair. Plus précisément, ce nombre correspond modulo 2 au nombre de tours que fait la marche autour de f .

Ainsi, Smirnov introduisit l'observable suivante, appel e *observable fermionique*, dépendant d'un domaine discret Ω , d'un milieu d'arête a sur le bord et d'un milieu d'arête z à l'intérieur. Consid rions l'ensemble $\widehat{\mathcal{E}}(\Omega, a, z)$ des sous-graphes de Ω obtenus comme l'union de boucles auto-évitantes ainsi que d'une marche auto-évitante de a à z . Soit $|\omega|$ le nombre d'arêtes dans ω . Aussi, notons $W_\omega(a, z)$ la rotation totale du chemin de a à z . Définissons

$$F(z) = F_{\Omega, a, x}(z) := \sum_{\omega \in \widehat{\mathcal{E}}(\Omega, a, z)} \exp(-\frac{i}{2} W_\omega(a, z)) x^{|\omega|}.$$

L'observable a la même structure que celle pour les marches auto-évitantes, excepté le fait que $\sigma = 1/2$ au lieu de $\sigma = 5/8$ et que la somme sur les marches auto-évitantes est remplac e par une somme sur les sous-graphes $\omega \in \widehat{\mathcal{E}}(\Omega, a, z)$. En fait, il est possible de vérifier que F est une combinaison linéaire des observables 4 pour u et v étant les extrémités de l'arête contenant z , et f et g les deux faces bord es par cette même arête. Pour résumer, une observable très similaire à l'observable parafermionique peut être définie à l'aide des variables aléatoires d'ordre/désordre.

La similarité entre les deux observables suggère que l'observable fermionique vérifie, pour une certaine valeur x_c de x , les mêmes relations 1 que l'observable parafermionique. Cette valeur est égale à $1/\sqrt{3} = \text{th}(\frac{1}{T_c})$, où T_c est la température inverse critique du modèle d'Ising sur le réseau hexagonal IH. Exactement comme pour les marches auto-évitantes, on peut se demander si, lorsque l'on considère la suite $(\Omega_\delta, a_\delta, b_\delta)$ approchant (Ω, a, b) , l'observable renormalis e $F_\delta(\cdot)/F_\delta(b_\delta)$ converge.

Le modèle d'Ising est plus simple à étudier que les marches auto-évitantes. Une manifestation de ce fait est que la valeur de σ vaut $1/2$ au lieu de $5/8$. Cette différence apparemment petite fut exploit e par Dmitry Chelkak et Stanislav Smirnov afin de prouver que l'observable renormalis e satisfait à des relations supplémentaires, qui peuvent être interpr t es comme une forme forte d'holomorphicit  discrète. En particulier, celle-ci est d termin e par cette propriété et ses conditions au bord. Utilisant ce fait, Chelkak et Smirnov [2] parvinrent à décrire l'observable comme étant l'unique solution d'un problème discret de « Riemann-Hilbert ». Après un tour de force mathématique, ils réussirent à mon-

trer que l'observable renormalis e converge vers la solution continue de ce même problème.

Théorème 2. *Pour tout domaine simplement connexe Ω avec deux points a et b sur son bord, si F_δ dénote l'observable fermionique dans le domaine Ω_δ avec $a = a_\delta$, nous avons*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F_\delta(\cdot)}{F_\delta(b_\delta)} = \sqrt{\frac{\Psi'}{\Psi'(b)}}$$

où Ψ est défini juste après (2).

Utilisant le même programme que celui proposé dans le cas des marches auto-évitantes, il est aussi possible de décrire les interfaces du modèle et de prouver leur convergence [3]. En d'autres termes, l'invariance conforme peut être prouv e dans le cas du modèle d'Ising.

Le parallèle entre l'histoire des marches auto-évitantes et celle du modèle d'Ising suggère une connexion forte entre ces deux modèles. Cette connexion est due à l'existence d'un modèle interpolant entre ces deux modèles, appelé modèle de boucle $O(n)$ défini comme suit : un élément ω de $\mathcal{E}(G)$ a une probabilité proportionnelle à $x^{\# \text{arêtes}} n^{\# \text{boucles}}$. Pour $n = 1$, nous retrouvons le modèle d'Ising. Pour $n = 0$, le modèle charge seulement la configuration ω vide, mais il est possible de retrouver les marches auto-évitantes en autorisant un chemin auto-évitant en plus des boucles. Ce modèle fut introduit par le physicien Bernard Nienhuis en 1982 [11], qui prédit une transition de phase au point $x = x_c(n) = 1/\sqrt{2 + \sqrt{2 - n}}$ lorsque $n \in [0, 2]$. Pour toutes ces valeurs de n , il est possible de construire une observable parafermionique qui est holomorphe discrète.

Conclusion

Le message de cette note est le suivant : les variables aléatoires d'ordre/désordre donnent naissance, lorsqu'écrites dans l'expansion haute température du modèle d'Ising, à des observables holomorphes discrètes. De plus, si l'on parvient à montrer la convergence dans la limite d'échelle vers un objet invariant conforme, il est possible d'en déduire la convergence des interfaces dans le système.

Certaines généralisations de ces quantités à des modèles de boucles restent des discrétisations d'applications conformes. Prouver leur convergence dans la limite d'échelle permettrait de prouver l'invariance conforme de ces modèles, malheureusement, dans quasiment tous les cas à part le cas

du modèle d'Ising, la propriété d'holomorphie discrète de ces observables n'est pas suffisante pour prouver la convergence. Malgré cela, il est tout de

même possible d'extraire une information utile, par exemple la valeur de la constante de connectivité.

Références

- [1] R. BAUERSCHMIDT et al. « Lectures on self-avoiding walks ». *Probability and Statistical Physics in Two and More Dimensions (D. Ellwood, CM Newman, V. Sidoravicius, and W. Werner, eds.), Clay Mathematics Institute Proceedings 15* (2012), p. 395-476.
- [2] D. CHELKAK et S. SMIRNOV. « Universality in the 2D Ising model and conformal invariance of fermionic observables ». *Inventiones mathematicae 189*, n° 3 (2012), p. 515-580.
- [3] D. CHELKAK et al. « Convergence of Ising interfaces to Schramm's SLE curves ». *Comptes Rendus Mathématiques 352*, n° 2 (2014), p. 157-161.
- [4] H. DUMINIL-COPIN et A. HAMMOND. « Self-avoiding walk is sub-ballistic ». *Communications in Mathematical Physics 324*, n° 2 (2013), p. 401-423.
- [5] H. DUMINIL-COPIN et S. SMIRNOV. « Conformal invariance of lattice models ». *Probability and statistical physics in two and more dimensions 15* (2012), p. 213-276.
- [6] H. DUMINIL-COPIN et S. SMIRNOV. « The connective constant of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ». *Annals of Mathematics* (2012), p. 1653-1665.
- [7] H. DUMINIL-COPIN et al. « Exponential decay of loop lengths in the loop $o(n)$ model with large n ». *Communications in Mathematical Physics 349*, n° 3 (2017), p. 777-817.
- [8] E. FRADKIN et L. P. KADANOFF. « Disorder variables and para-fermions in two-dimensional statistical mechanics ». *Nuclear Physics B 170*, n° 1 (1980), p. 1-15.
- [9] G. F. LAWLER, O. SCHRAMM et W. WERNER. « On the scaling limit of planar self-avoiding walk ». In : *Fractal geometry and applications: a jubilee of Benoit Mandelbrot, Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 72*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, p. 339-364.
- [10] N. MADRAS et G. SLADE. *The self-avoiding walk*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [11] B. NIENHUIS. « Exact critical point and critical exponents of $O(n)$ models in two dimensions ». *Physical Review Letters 49*, n° 15 (1982), p. 1062.
- [12] W. ORR. « Statistical treatment of polymer solutions at infinite dilution ». *Transactions of the Faraday Society 43* (1947), p. 12-27.
- [13] O. SCHRAMM. « Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees ». In : vol. 118. 1. Springer, 2000, p. 221-288.



Hugo DUMINIL-COPIN

IHÉS
duminil@ihes.fr

Professeur permanent à l'IHÉS depuis 2016 et professeur à l'université de Genève, Hugo Duminil-Copin est un probabiliste. Ses travaux concernent des modèles de mécanique statistique tels que la percolation, le modèle d'Ising, le modèle de Potts en dimension deux ou trois, les marches aléatoires en milieu aléatoire.

Tenseurs symétriques à divergence nulle

• D. SERRE

On s'intéresse ici à des modèles de physique mathématique qui s'expriment par une ou plusieurs équations aux dérivées partielles (EDP). Ils proviennent par exemple de la mécanique classique, quantique ou relativiste, ou bien de l'électromagnétisme. Leurs propriétés d'invariance habituelles entraînent que les lignes d'un tenseur symétrique $x \mapsto T(x) \in \mathbf{M}_d(\mathbb{R})$, associé à certaines des lois de conservation du modèle, sont de divergence nulle ;

$$\forall i, j = 1, \dots, d, T_{ij} = T_{ji}, \text{ et } \forall i = 1, \dots, d, \sum_{j=1}^d \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0.$$

On parle de *tenseur symétrique à divergence nulle* (TSDN). On écrit plus simplement $\text{Div } T = 0$. La lettre capitale D dans l'opérateur Div est spécifique au contexte des tenseurs ; on écrit $\text{div } q$ si q est un champ de vecteurs.

Modèles physiques

Les exemples qui suivent montrent l'importance de cette notion. Les calculs, souvent élémentaires, sont laissés au lecteur.

Notations. Les dérivées partielles sont notées ∂_j , ou bien indiquées par des indices. L'opérateur ∇ est le gradient, Δ est le laplacien. Dans tous les cas sauf le premier, la variable $x = (t, y)$ combine un temps t et des coordonnées spatiales $y \in \mathbb{R}^n$, avec donc $d = 1 + n$. Dans ce cas, ∇_y et Δ_y sont le gradient et le laplacien par rapport aux variables d'espace. On utilise de même des opérateurs div_y et Div_y . Si v et w sont des vecteurs, on note $v \otimes w$ la matrice de rang un de coefficients $v_i w_j$. Enfin, la norme euclidienne d'un vecteur w est $|w|$.

- Si une fonction scalaire $u(x)$ (température, potentiel électrique, etc.) est harmonique ($\Delta u = 0$), le calcul

$$\partial_i \frac{1}{2} |\nabla u|^2 = \nabla u \cdot \nabla \partial_i u = \text{div}(\partial_i u \nabla u)$$

montre que $T = \frac{1}{2} |\nabla u|^2 I_d - \nabla u \otimes \nabla u$ est un TSDN.

- De même l'équation des ondes $u_{tt} = c^2 \Delta_y u$ conduit au TSDN

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_t^2 + c^2 |\nabla_y u|^2) & -c^2 u_t \nabla_y u^T \\ -c^2 u_t \nabla_y u & T_{2,2} \end{pmatrix}$$

où $T_{2,2} = c^4 \nabla_y u \otimes \nabla_y u + \frac{c^2}{2} (u_t^2 - c^2 |\nabla_y u|^2) I_n$. La première ligne de $\text{Div } T = 0$ traduit la conservation de l'énergie :

$$\partial_t \frac{1}{2} (u_t^2 + c^2 |\nabla_y u|^2) = \text{div}_y (c^2 u_t \nabla_y u).$$

Le lecteur traitera sans plus de difficulté l'équation de Klein–Gordon $u_{tt} + m^2 u = \Delta_y u$, où m est la masse d'une particule (avec la convention $c = \hbar = 1$).

- Pour un matériau déformable (un fluide compressible, ou un solide élastique) de densité $\rho(t, y)$, de vitesse v et de tenseur des contraintes Σ , la conservation de la masse $\rho_t + \text{div}_y(\rho v) = 0$ et celle de la quantité de mouvement (loi de Newton) $(\rho v)_t + \text{Div}_y(\rho v \otimes v) = \text{Div}_y \Sigma$ expriment que les lignes de

$$T = \begin{pmatrix} \rho & \rho v^T \\ \rho v & \rho v \otimes v - \Sigma \end{pmatrix}$$

sont à divergence nulle. L'invariance du système sous l'action du groupe orthogonal assure la symétrie de Σ ; T est donc un TSDN.

L'emploi des coordonnées eulériennes, celles de l'espace physique, est essentiel. En coordonnées lagrangiennes, il n'y a pas de TSDN.

- En relativité restreinte et pour un gaz parfait, le tenseur $T = (\varepsilon + p)U \otimes U + pG$ est un TSDN ; ici, ε est la densité d'énergie, p est la pression, G la matrice de la métrique de Minkowski et U la quadri-vitesse, qui satisfait à $U^T G U = -1$.
- Un gaz raréfié est décrit par une distribution de vitesses $f(t, y, v) \geq 0$, dont l'évolution obéit à une équation cinétique

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_y) f = \dots$$

Le second membre est un opérateur qui décrit la façon dont les vitesses des molécules

se redistribuent après collisions. Les divers modèles, dont le plus connu est celui de Boltzmann, respectent la conservation de la masse et de la quantité de mouvement, ce qui conduit au TSDN

$$T(t, y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, y, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} dv. \quad (1)$$

- Dans un plasma, ou une galaxie, les particules interagissent par une force à longue distance. On a encore une équation cinétique, dite de Vlasov

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_y) f + F \cdot \nabla_v f = 0$$

où la force $F = -\nabla_y \phi$ est déterminée par la densité de masse $\rho(t, y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, y, v) dv$, via la formule $\phi = \chi * \rho$, une convolution en la variable spatiale. Dans les deux exemples cités, où la force est de type coulombienne, ϕ est la solution de l'équation de Laplace $\Delta_y \phi = \beta \rho$. La constante β est positive (force électrique) ou négative (gravitation). On trouve alors le TSDN

$$T(t, y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, y, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} dv + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

$$S := \frac{1}{\beta} (F \otimes F - \frac{1}{2} |F|^2 I_n).$$

- Le champ électro-magnétique est une 2-forme différentielle fermée Ω sur l'espace de Minkowski \mathbb{R}^{1+3} (ici $d = 4$). Le choix d'un référentiel Galiléen conduit à définir les champs de vecteurs B (induction magnétique) et E (champ électrique) par

$$\Omega = (E_1 dy_1 + \dots) \wedge dt + B_1 dy_2 \wedge dy_3 + \dots.$$

La fermeture de Ω se traduit par les équations de Maxwell-Faraday

$$\partial_t B + \text{rot}_y E = 0, \quad \text{div}_y B = 0. \quad (2)$$

Dans le vide, le modèle le plus général est associé à un Lagrangien $\mathcal{L}(\Omega)$. Aux équations précédentes s'ajoutent des équations différentielles exprimant que les variations $\delta \mathcal{L}$ sont nulles. Si \mathcal{L} est quadratique, les équations de Maxwell ainsi obtenues sont linéaires. Des modèles non-linéaires, comme celui de Born-Infeld, sont cependant pertinents.

En tenant compte de la contrainte (2), on a donc les équations de Maxwell-Gauß-Ampère.

$$\partial_t D - \text{rot}_y H = 0, \quad \text{div}_y D = 0$$

pour des champs D (induction électrique) et H (champ magnétique) définis par

$$D := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E}, \quad H := -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B}.$$

À cause de l'invariance par changement de repère Galiléen (relativité restreinte), \mathcal{L} ne dépend que de deux quantités scalaires :

$$\mathcal{L}(\Omega) = L(\sigma, \pi), \quad \sigma := \frac{1}{2} (|B|^2 - |E|^2), \quad \pi := B \cdot E.$$

Cette restriction assure que les produits vectoriels $E \wedge H$ et $D \wedge B$ coïncident. Ce sont respectivement les formes d'Abraham et de Minkowski de ce qu'on appelle le vecteur de Poynting P . Cette égalité assure que le tenseur à divergence nulle

$$T = \begin{pmatrix} W & P^T \\ P & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} (E \otimes E + B \otimes B) + (L + B \cdot H) I_3 \end{pmatrix},$$

$$W = D \cdot E - L$$

est bien symétrique. La première ligne de $\text{Div } T = 0$ est la loi de conservation de l'énergie électro-magnétique, $\partial_t W + \text{div}_y P = 0$. La densité d'énergie $W(B, D)$ est la transformée de Legendre de L , à B constant.

- Pour l'équation de Schrödinger

$$i \hbar \partial_t \psi = -\frac{1}{2m} \Delta_y \psi + V(|\psi|^2) \psi,$$

la densité $\rho = m|\psi|^2$ et le moment

$$\vec{q} := \frac{1}{\hbar} \text{Im}(\bar{\psi} \nabla \psi)$$

satisfont à $\partial_t \rho + \text{div}_y \vec{q} = 0$, ainsi que

$$\hbar^2 \partial_t \vec{q} + \frac{1}{2m} \text{Div}_y \text{Re}(\nabla_y \bar{\psi} \otimes \nabla_y \psi - \bar{\psi} \nabla_y^2 \psi) + \nabla_y F(|\psi|^2) = 0,$$

où $F'(s) = sV'(s)$. Le tenseur symétrique

$$T = \begin{pmatrix} \rho & \vec{q}^T \\ \vec{q} & T_{2,2} \end{pmatrix}$$

où $T_{2,2} = \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{1}{2m} \text{Re}(\nabla_y \bar{\psi} \otimes \nabla_y \psi - \bar{\psi} \nabla_y^2 \psi) + F(|\psi|^2) I_3 \right)$ est donc à divergence nulle.

Une question

Les lecteurs familiers des exemples ci-dessus savent que les champs admissibles satisfont à un principe de conservation, ou de décroissance, de l'énergie. Que celui-ci soit utilisé ou non pour former un TSDN, il sert pour assurer que T est intégrable. Plus précisément, $T(t, \cdot)$ est intégrable par rapport à la variable spatiale, uniformément en temps. Illustrons cette idée sur l'exemple de l'équation des ondes : l'énergie

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2} (u_t^2 + c^2 |\nabla_y u|^2) dy \equiv E_0$$

est constante. Si E_0 est finie, alors T , qui est quadratique en $\nabla_{t,y} u$, est dans $L^\infty(\mathbb{R}; L^1(\mathbb{R}^n))$.

Une question très naturelle se pose alors :

que peut-on dire d'un TSDN qui vérifie $T \in L^\infty(0, \tau; L^1(\mathbb{R}^n))$?

La question est de nature à la fois qualitative et quantitative. La réponse, s'il en est une, porte sur une fonction de T , combinaison des coefficients T_{ij} , ayant un sens physique. D'une part, cette combinaison doit avoir une dimension physique bien déterminée. D'autre part, elle doit être équivariante sous l'action du groupe de symétrie du modèle.

Le déterminant répond à ce cahier des charges. Tout d'abord, si chaque T_{ij} a une dimension physique d_{ij} , alors l'équation

$$\sum_j \partial_j T_{ij} = 0$$

montre qu'il existe une dimension m_i telle que $d_{ij} = \ell_j m_i$, où ℓ_j est la dimension (temps ou longueur) de la coordonnée x_j . La symétrie de T donne alors $\ell \otimes m = m \otimes \ell$, c'est-à-dire $m = \mu \ell$. La dimension de T_{ij} est alors $\mu \ell_i \ell_j$, et $\det T$ est bien homogène, de dimension $\mu^d \prod_i \ell_i^2$.

Par ailleurs, une symétrie P conduit à remplacer T par $\tilde{T}(x) = PT(P^{-1}x)^t P$. On a $\det \tilde{T} = c^2 \det T$ où $c = \det P$ est une constante. C'est donc à $\det T$ que nous nous intéresserons ici.

L'aspect qualitatif sera une propriété d'intégrabilité qui ne découle pas directement de l'hypothèse que T est intégrable. Un énoncé non trivial sera donc l'intégrabilité de $(\det T)^s$ pour un certain exposant $s > \frac{1}{d}$. L'aspect quantitatif sera évidemment une estimation de l'intégrale correspondante.

Prenons à nouveau l'exemple de l'équation des ondes, pour laquelle on a

$$\det T = c^{2n} \left(\frac{u_t^2 - c^2 |\nabla_y u|^2}{2} \right)^{n+1}.$$

La forme quadratique $Q_0(\nabla_{t,y} u) := u_t^2 - c^2 |\nabla_y u|^2$ qui apparaît dans cette expression joue un rôle très particulier. C'est celle qui intervient en Compacité par compensation, lorsqu'on applique le Lemme divergence-rotationnel de F. Murat [9] & L. Tartar [16] au système d'EDPs

$$\operatorname{div}_{t,y}(u_t, -c\nabla_y u) = 0, \quad \operatorname{rot}_{t,y}(u_t, \nabla_y u) = 0.$$

S. Klainerman & M. Machedon [6] la qualifient de « null form », parce qu'elle s'annule lorsque $u(t, y) = \psi(x \cdot \xi - ct)$ (ξ un vecteur unitaire) est une onde plane. Les théorèmes 2 et 3 de [6] établissent pour Q_0 des estimations de meilleure qualité que pour u_t^2 et $|\nabla_y u|^2$ séparément. Une question naturelle, posée dans [6], est : quelle est l'intégrabilité pour $u_t^2 - c^2 |\nabla_y u|^2$, sachant que $E_0 < +\infty$? Une analyse dimensionnelle suggère que

$$u_t^2 - c^2 |\nabla_y u|^2 \in L^{1+\frac{1}{n}}(\mathbb{R}^{n+1})$$

ou, ce qui revient au même, que $|\det T|^{\frac{1}{n}}$ soit intégrable. Cette propriété est vraie pour les solutions radiales $u = U(t, |y|)$. Elle est pourtant fautive pour des données plus générales ; S. Klainerman & M. Machedon construisent, si $n = 2$ ou 3 (c'est probablement valable aussi pour $n \geq 4$), des solutions d'énergie finie pour lesquelles Q_0 n'a pas cette intégrabilité. L'intégrale correspondante diverge « à la marge ». Voilà qui est intrigant !

Avec la positivité

L'exemple ci-dessus montre que les hypothèses de symétrie et de divergence nulle ne suffisent pas. Il en manque une troisième, qui se trouve être une condition de signe. Nous dirons donc qu'un TSDN est un *tenseur positif à divergence nulle* (DPT) si de plus $T(x)$ est presque partout semi-définie positive, $T(x) \in \mathbf{Sym}_d^+$. L'intégrabilité de T assure celle de $(\det T)^{\frac{1}{d}}$, mais dans le cas d'un DPT, on gagne une fraction d'exposant ¹ :

$$(\det T)^{\frac{1}{d-1}} \in L_{loc}^1. \quad (3)$$

Autrement dit, $(\det T)^{\frac{1}{d}} \in L^{\frac{d}{d-1}}$. L'exposant $d' = \frac{d}{d-1}$ est le conjugué de d ; c'est de cette manière qu'il

1. Noter que pour les problèmes d'évolution, pour lesquels $d = 1 + n$, le nouvel exposant est $\frac{1}{n}$.

apparaît dans les démonstrations. À la sortie de mon exposé au séminaire J.-L. Lions, un auditeur a interprété (3) comme une propriété d'*Intégrabilité par compensation*, en référence au rôle joué par les contraintes différentielles (ici, $\text{Div } T = 0$) en Compacité par compensation. Cette expression est tout-à-fait appropriée, même si elle est déjà employée dans un contexte un peu différent (voir le survey de T. Rivière [11]).

Les deux inégalités les plus simples du volet quantitatif sont les suivantes. Pour des énoncés complets, on se reportera aux articles [13, 12]. Tout d'abord, si T est périodique selon un réseau Γ de \mathbb{R}^d , les moyennes satisfont à

$$\int (\det T)^{\frac{1}{d-1}} dx \leq \left(\det \int T(x) dx \right)^{\frac{1}{d-1}}. \quad (4)$$

La même inégalité avec l'exposant $\frac{1}{d}$ est une simple conséquence de l'inégalité de Jensen, et de la concavité de $\text{Det}^{\frac{1}{d}}$ sur le cône positif Sym_d^+ (voir [14], chap. 6.6). Pour un exposant supérieur à $\frac{1}{d}$, ici $\frac{1}{d-1}$, on a vraiment besoin de la contrainte $\text{Div } T = 0$.

Lorsque T est défini dans un domaine borné D , on a plutôt

$$\int_D (\det T)^{\frac{1}{d-1}} dx \leq \frac{1}{d|S^{d-1}|^{\frac{1}{d-1}}} \left(\int_{\partial D} |T\vec{n}| dx \right)^{\frac{d}{d-1}}, \quad (5)$$

où \vec{n} désigne le vecteur normal unitaire au bord.

Les inégalités (4) et (5) sont optimales : lorsque T est définie positive et assez régulière, le cas d'égalité est fourni par des tenseurs de la forme

$$\widehat{D^2\theta},$$

c'est-à-dire la matrice des cofacteurs de la hessienne d'une fonction θ convexe. Dans le cas borné, et si D est convexe, son image par $\nabla\theta$ doit de plus être une boule.

L'inégalité (4) est une (vaste) généralisation de l'inégalité de Gagliardo [Gag], qui dit que si des fonctions positives f_1, \dots, f_d de $d-1$ variables sont données, alors la fonction

$$f(x) = \prod_{j=1}^d f_j(\dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots)$$

satisfait à l'inégalité

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \prod_{j=1}^d \|f_j\|_{L^{d-1}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

Malgré sa ressemblance avec l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Gagliardo est d'une autre nature. Pour $d = 2$, c'est évidemment une égalité. De même notre inégalité (4) devient une égalité dans le cas bi-dimensionnel.

Les applications

Parmi les modèles présentés au début de cet article, les seuls dont le τSDN soit positif sont ceux qui gouvernent un gaz non visqueux : – le système d'Euler, pour lequel $\Sigma = -pI_n$ et $p \geq 0$ est la pression – sa version relativiste – l'équation de Boltzmann et ses avatars. Dans tous les autres cas, $T(x)$ est, ou peut être, une matrice indéfinie et les estimations ci-dessus ne s'appliquent pas. Cette liste est courte et peut donc décevoir. Mais il reste un espoir de l'allonger : le τSDN proposé n'est pas forcément unique ; il peut y avoir un autre choix, positif celui-là. C'est ce qui se passe pour l'équation de Vlasov lorsque la force F est *répulsive* (cas d'un plasma) ; le bloc S , qui n'est pas positif, peut être remplacé par un tenseur $S' \geq 0_n$. Bien que ce dernier soit significativement plus compliqué, on en déduit les mêmes estimations (et même plus) que dans le cas de l'équation de Boltzmann. Le lecteur intéressé pourra se reporter à [12] pour en savoir plus. La construction de DPTS pour d'autres modèles, et notamment pour l'équation des ondes, reste un problème ouvert. La difficulté principale est de comprendre quelle propriété physique permet cette construction.

Applications aux gaz. Le cas périodique n'est pas vraiment utile pour les applications physiques. On utilise plutôt l'estimation (5) et ses diverses variantes. Le domaine D peut être semi-borné, typiquement de la forme $D = (0, \tau) \times \mathbb{R}^n$, auquel cas le second membre est la somme d'intégrales initiale (à $t = 0$) et finale ($t = \tau$). On peut donc traiter un problème de Cauchy. Une autre possibilité est offerte par une version de (5) pour un tenseur symétrique et positif dont la divergence, sans être nulle, est intégrable, voire est une mesure bornée ; on l'applique alors au tenseur ϕT où $\phi \geq 0$ est une fonction scalaire lipschitzienne, et on utilise la formule

$$\text{Div}(\phi T) = \phi \text{Div } T + T\nabla\phi = T\nabla\phi.$$

Voyons le cas d'un gaz parfait. Notons $\rho_0(y)$, $e_0(y)$ et $v_0(y)$ les valeurs initiales de la densité, l'énergie interne spécifique et la vitesse. La masse

totale et l'énergie initiale, supposées finies, sont

$$M = \int \rho_0(y) dy, \quad E_0 = \int \rho_0 \left(\frac{1}{2} |v_0|^2 + e_0 \right) dy.$$

Lorsque le domaine est l'espace \mathbb{R}^n tout entier (problème de Cauchy), on obtient

$$\int_0^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} \rho^{\frac{1}{n}} p dy \leq c_n M^{\frac{1}{n}} \sqrt{D_0}, \quad (6)$$

où

$$D_0 := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0(y) \rho_0(z) |z-y|^2 dy dz + 4M \int_{\mathbb{R}^n} \rho_0 e_0 dy$$

est une version du produit $4ME_0$, invariante par changement de repère galiléen. La constante c_n ne dépend que de la dimension spatiale; par exemple $c_3 = 6^{-1/2} \pi^{-2/3}$ convient.

L'inégalité (6) peut être vue comme la troisième estimation fondamentale de la dynamique des gaz, après la conservation de la masse et l'inégalité d'énergie (pour les solutions admissibles) $E(t) \leq E_0$. Elle est indépendante des deux premières; par exemple, pour un gaz barotrope dont l'équation d'état est $p = \text{cste} \cdot \rho^\gamma$ avec $\gamma > 1$ (la constante adiabatique), on a $p\rho = \frac{p}{\gamma-1}$. Les trois estimations disent donc que $\rho \in L^q(0, \tau; L^r(\mathbb{R}^n))$ pour toutes les paires (q, r) telles que le point $(\frac{1}{q}, \frac{1}{r})$ appartienne au triangle de sommets

$$(0, 1), \quad \left(0, \frac{1}{\gamma}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{n}{n\gamma+1}, \frac{n}{n\gamma+1}\right).$$

On ne connaissait auparavant que l'intervalle entre les deux premiers points.

Lorsque le gaz est confiné dans un domaine borné $O \subset \mathbb{R}^n$ dont le bord est imperméable, la vitesse v est tangente au bord. La masse est encore conservée et de même les solutions admissibles satisfont à $E(t) \leq E_0$. En notant $\text{dist}_{\partial O}(y)$ la distance entre $y \in O$ et le bord de O , on obtient cette fois l'inégalité optimale

$$\int_0^\tau dt \int_O \text{dist}_{\partial O}(y)^{1+\frac{1}{n}} \rho^{\frac{1}{n}} p dy \leq c'_n (1+\tau) M^{\frac{1}{n}} E_0 \text{diam}(O)^{\frac{1}{n}}. \quad (7)$$

Comme le bord empêche la dispersion du gaz à l'infini, le second membre ne reste pas borné quand $\tau \rightarrow +\infty$, mais croît linéairement. De sorte que l'intégrale spatiale

$$\int_O \text{dist}_{\partial O}(y)^{1+\frac{1}{n}} \rho^{\frac{1}{n}} p dy$$

est majorée *en moyenne* par $c'_n M^{\frac{1}{n}} E_0 \text{diam}(O)^{\frac{1}{n}}$. À nouveau, cette information est d'une autre nature que celles fournies par la conservation de la masse et la décroissance de l'énergie, cette dernière fournissant une borne pour

$$\int_O p dy.$$

Cas des modèles cinétiques. Voyons ensuite le cas d'un gaz raréfié, qui obéit à une équation cinétique, et pour lequel la formule (1) fournit un DPT. Pour le problème de Cauchy, on obtient une inégalité (comparer avec (6))

$$\int_0^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}^n} (\det T)^{\frac{1}{n}} dy \leq c_n M^{\frac{1}{n}} \sqrt{D'_0}, \quad (8)$$

dans laquelle la masse est évidemment

$$M = \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} f_0(y, v) dv,$$

tandis que

$$D'_0 := \int_{\mathbb{R}^{4n}} f_0(y, v) f_0(z, w) |w-v|^2 dw dv dz dy.$$

Par la formule d'Andréiev, on a

$$\det T(t, y) = \frac{1}{(n+1)!} \int_{(\mathbb{R}^n)^{n+1}} f(t, y, v^0) \dots \dots f(t, y, v^n) (\Delta(v^0, \dots, v^n))^2 dv^0 \dots dv^n$$

où $\Delta(v^0, \dots, v^n)$ est le volume du simplexe de \mathbb{R}^n (un tétraèdre si $n = 3$) dont les sommets sont les vitesses v_0, \dots, v_n . L'estimation (8) est pour le moins compliquée; il est difficile, même pour un spécialiste, d'y croire la première fois qu'on la rencontre. Son interprétation n'est pas encore claire, mais on peut au moins remarquer qu'elle met en jeu des corrélations à $n+1$ vitesses lorsque ces dernières sont affinement indépendantes.

Quand $n = 1$, cette estimation avait été établie par J.-M. Bony [1] pour des modèles à répartition discrète des vitesses, puis étendue à d'autres modèles cinétiques. C. Cercignani [2] l'utilisa pour montrer que les solutions renormalisées de l'équation de Boltzmann, dues à R. DiPerna et P.-L. Lions [4], sont en fait des solutions au sens des distributions, qui ont donc bien un sens physique. On ne sait pas s'il en est de même quand $n \geq 2$.

Gaz parfait relativiste. La dimension spatiale est $n = 3$. On vérifie facilement

$$\det((\varepsilon + p)U \otimes U + pG) = \varepsilon p^3.$$

Supposons que ε/p est borné ainsi que son inverse; cette hypothèse est satisfaite par un gaz ultra-relativiste car alors $p = \frac{\varepsilon}{3}$. On obtient l'estimation

$$\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon^{\frac{1}{3}} p dy \leq \frac{\text{cste}}{c} E_0^{\frac{4}{3}},$$

$$E_0 := \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\varepsilon + p}{c^2 - |v|^2} - \frac{p}{c^2} \right) dy,$$

où E_0 est l'énergie totale, conservée au cours du temps, et c est la vitesse de la lumière.

Autres modèles. Plusieurs des TSDNs mentionnés au début de cet article ne sont pas positifs et ne peuvent donc pas être utilisés du point de vue de l'intégrabilité par compensation. C'est le cas du tenseur obtenu en électro-magnétisme, dont le déterminant est toujours négatif! Pour l'équation de Schrödinger, la signature de T dépend des dérivées secondes de ψ , sur lesquelles on n'a aucun contrôle ponctuel. Le cas de l'équation de Vlasov-Poisson est plus subtil. Le tenseur « évident » donné par (16) n'est pas positif en général si $n \geq 2$, à cause de S qui est indéfinie. Il existe cependant une alternative lorsque le noyau de convolution $\chi = \chi(|y|)$ est radial, avec un tenseur

$$T^\chi := \int_{\mathbb{R}^n} f(t, y, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} dv + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S^\chi \end{pmatrix}$$

dont la dépendance en F est non locale, qui satisfait encore à $\text{Div}_{t,y} T = 0$. Ce tenseur est positif sous l'hypothèse $d\chi/dr \leq 0$, ce qui correspond à une force répulsive. On obtient donc une estimation non triviale pour un plasma, mais pas pour une galaxie; voir [12] pour les détails.

L'équation de Burgers multi-dimensionnelle (collaboration avec L. Silvestre [15]). Ici, une fonction scalaire $u(t, y) \in \mathbb{R}$ obéit à l'EDP

$$\partial_t u + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{u^{k+1}}{k+1} = 0.$$

La théorie du problème de Cauchy est due à S. Kruzhkov [7]. Lorsque la condition initiale $u_0(y) = u(0, y)$ est une fonction mesurable bornée, il existe une et une seule solution (dite entropique)

bornée, qui vérifie l'EDP au sens des distributions. Le semi-groupe $S_t : u_0 \mapsto u(t)$ possède de nombreuses propriétés. Entre autres, S_t envoie $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in [1, \infty]$, avec l'inégalité $\|S_t u_0\|_{L^p} \leq \|u_0\|_{L^p}$. Surtout, on a une propriété de contraction : si $v_0 - u_0$ est intégrable, alors $S_t v_0 - S_t u_0$ l'est aussi, et on a

$$\|S_t v_0 - S_t u_0\|_{L^1} \leq \|v_0 - u_0\|_{L^1}.$$

On peut donc définir par continuité le semi-groupe sur $L^1(\mathbb{R}^n)$. Cependant, comme le note M. Crandall [3], il n'est pas clair que $u(t, y) := (S_t u_0)(y)$ définit une solution de l'EDP. Il faudrait pour cela montrer que $u \in L_{\text{loc}}^{n+2}$.

En utilisant un tenseur de la forme

$$T = \left(\frac{u^{j+k+1}}{j+k+1} \right)_{0 \leq j, k \leq n}$$

qui est symétrique et positif lorsque $u \geq 0$, en appliquant l'intégrabilité par compensation et en utilisant une itération à la De Giorgi, nous sommes parvenus à montrer des estimations de dispersion

$$\|u(t)\|_{L^q} \leq c_{n,p,q} t^{-\beta} \|u_0\|_{L^p}^\alpha, \quad \forall T > 0, 1 \leq p \leq q \leq \infty,$$

où les exposants α et β ne dépendent que de n, p et q . Ces inégalités impliquent une réponse positive à la question posée par M. Crandall. Elles permettent même d'étendre S_t par continuité en un semi-groupe sur $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour tout $p \in [1, \infty]$.

Aspects géométriques

Un volet incontournable de l'étude de DPTs concerne la géométrie différentielle, pour au moins deux raisons.

D'une part, lorsqu'on applique (5) au DPT trivial $T \equiv I_d$, on obtient l'inégalité isopérimétrique

$$\frac{\text{vol } D}{\text{vol } B_d} \leq \left(\frac{\text{aire } \partial D}{\text{aire } S_{d-1}} \right)^{\frac{d}{d-1}}.$$

Si de plus D est convexe, la démonstration montre que l'égalité n'a lieu que si le domaine D est lui-même une boule.

D'autre part, on montre qu'une singularité de type $r^{-\alpha}$, où $r = |x|$, n'est possible pour un DPT que si $\alpha \leq d - 1$ (la positivité joue encore un rôle important dans cette borne). Le cas limite $\alpha = d - 1$

est rigide, au sens où les seuls DPTs de la forme $T(x) = r^{1-d}S(e)$, avec $e = \frac{x}{r}$, sont donnés par

$$T = \frac{\lambda(e)}{r^{d-1}} e \otimes e$$

où λ est une fonction scalaire vérifiant la condition

$$\int_{S_{d-1}} \lambda(e) e_i ds(e) = 0, \quad i = 1, \dots, d. \quad (9)$$

Ces tenseurs sont en fait de la forme $\widehat{D^2\theta}$ pour des fonctions convexes θ qui sont positivement homogènes de degré 1. Par exemple, $\theta(x) \equiv r$ donne $\lambda \equiv 1$. Cette fonction θ fournit la solution du problème de Minkowski. Celui-ci consiste à trouver une surface convexe fermée, dont la courbure de Gauß est donnée en fonction de la direction normale. L'existence, l'unicité et la régularité de θ font l'objet de l'ouvrage de A. V. Pogorelov [10]. L'équation (9) est d'une part condition de résolubilité du problème de Minkowski. Elle assure d'autre part que la distribution $\text{Div } T$ ne charge pas l'origine.

Une question abstraite

Une autre question intéressante, dans l'esprit de C. B. Morrey [8] et L. Tartar [16] concerne le com-

portement du déterminant relativement à la topologie faible-étoile de $L^\infty(\mathbb{R}^d; \text{Sym}_d^+)$. Puisque $\text{Det}^{\frac{1}{d}}$ est concave sur Sym_d^+ , on sait que

$$*\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\det T_\epsilon)^{\frac{1}{d}} \leq \left(\det(*\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_\epsilon) \right)^{\frac{1}{d}}.$$

Dans la terminologie de I. Fonseca & S. Müller [5], l'inégalité (4) signifie que $\text{Det}^{\frac{1}{d-1}}$ est *Div-quasiconcave*. On peut donc espérer, en suivant Morrey, que sous l'hypothèse supplémentaire que la suite $(\text{Div } T_\epsilon)_{\epsilon > 0}$ reste dans un compact de $W^{-1,\infty}$, on ait

$$*\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\det T_\epsilon)^{\frac{1}{d-1}} \leq \left(\det(*\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_\epsilon) \right)^{\frac{1}{d-1}}. \quad (10)$$

L'analyse de [5], valable pour des contraintes différentielles plus générales, mais en l'absence de contrainte algébrique, emploie l'analyse de Fourier. Elle ne semble pas adaptée en présence d'une contrainte de signe telle que $T(x) \geq 0_d$. La justification de (10) reste donc un problème ouvert.

Références

- [1] J.-M. BONY. « Solutions globales bornées pour les modèles discrets de l'équation de Boltzmann, en dimension 1 d'espace ». In : *Journées "Équations aux dérivées partielles"*. 1987.
- [2] C. CERCIGNANI. « Global weak solutions of the Boltzmann equation ». *Journal of statistical physics* **118**, n° 1-2 (2005), p. 333-342.
- [3] M. G. CRANDALL. « The semigroup approach to first order quasilinear equations in several space variables ». *Israel Journal of Mathematics* **12**, n° 2 (1972), p. 108-132.
- [4] R. J. DiPERNA et P.-L. LIONS. « On the Cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability ». *Annals of Mathematics* (1989), p. 321-366.
- [5] I. FONSECA et S. MÜLLER. « \mathcal{A} -Quasiconvexity, Lower Semicontinuity, and Young Measures ». *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **30**, n° 6 (1999), p. 1355-1390.
- [6] S. KLAINERMAN et M. MACHEDON. « Space-time estimates for null forms and the local existence theorem ». *Communications on Pure and Applied Mathematics* **46**, n° 9 (1993), p. 1221-1268.
- [7] S. N. KRUSHKOV. « First order quasilinear equations in several independent variables ». *Matematicheskii Sbornik* **123**, n° 2 (1970), p. 228-255.
- [8] C. B. MORREY JR. *Multiple integrals in the calculus of variations*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [9] F. MURAT. « Compacité par compensation ». *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze* **5**, n° 3 (1978), p. 489-507.
- [10] A. POGORELOV. « The multidimensional Minkowski problem ». *Winston, Washington* **410** (1978).
- [11] T. RIVIERE. « The role of integrability by compensation in conformal geometric analysis ». *Analytic aspects of problems from Riemannian Geometry SMF* (2008).
- [12] D. SERRE. « Compensated integrability. Applications to the Vlasov-Poisson equation and other models in mathematical physics ». *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (2018).

- [13] D. SERRE. « Divergence-free positive symmetric tensors and fluid dynamics ». In : *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*. Vol. 35. 5. Elsevier. 2018, p. 1209-1234.
- [14] D. SERRE. *Matrices, volume 216 of Graduate Texts in Mathematics*. 2002.
- [15] D. SERRE et L. SILVESTRE. « Multi-dimensional Burgers equation with unbounded initial data: well-posedness and dispersive estimates ». *arXiv preprint arXiv:1808.07467* (2018).
- [16] L. TARTAR. « Compensated compactness and applications to partial differential equations ». In : *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt symposium*. Vol. 4. 1979, p. 136-212.

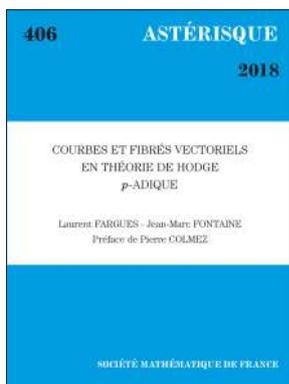


Denis SERRE

École normale supérieure de Lyon
denis.serre@ens-lyon.fr

Denis Serre, professeur à l'École normale supérieure de Lyon, travaille sur les équations aux dérivées partielles et leurs applications à la dynamique des fluides.

Astérisque - dernières parutions



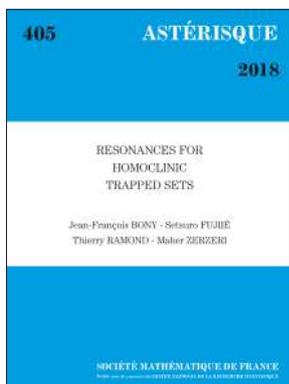
Vol. 406

Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p -adique

L. FARGUES - J.-M. FONTAINE - préface de P. COLMEZ

ISBN 978-2-85629-896-1
2018 - 382 pages - Softcover. 17 x 24
Public: 45 € - Members: 32 €

Ce travail est consacré à la découverte, la définition et l'étude de la courbe fondamentale en théorie de Hodge p -adique. On prend pour cela le point de vue de définir et d'étudier les différents anneaux de périodes p -adiques comme anneaux de fonctions holomorphes de la variable p . L'étude de ces anneaux nous permet de définir la courbe. On classifie ensuite les fibrés vectoriels sur celle-ci, un théorème qui généralise en quelque sorte le théorème de classification des fibrés vectoriels sur la droite projective. Comme application on redémontre géométriquement les deux théorèmes principaux de la théorie de Hodge p -adique : faiblement admissible implique admissible et de Rham implique potentiellement semi-stable.



Vol. 405

Resonances for homoclinic trapped sets

J.-F. BONY, S. FUJIE, T. RAMOND, M. ZERZERI

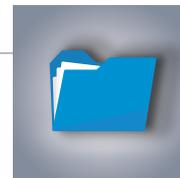
ISBN 978-2-85629-894-7
2018 - 314 pages - Softcover. 17 x 24
Public: 60 € - Members: 42 €

We study semiclassical resonances generated by homoclinic trapped sets. First, under some general assumptions, we prove that there is no resonance in a region below the real axis. Then, we obtain a quantization rule and the asymptotic expansion of the resonances when there is a finite number of homoclinic trajectories. The same kind of results is proved for homoclinic sets of maximal dimension. Next, we generalize to the case of homoclinic/heteroclinic trajectories and we study the three bump case. In all these settings, the resonances may either accumulate on curves or form clouds. We also describe the corresponding resonant states.

Disponible sur le site de la SMF : <http://smf.emath.fr>

*frais de port non compris





Aux racines de la cognition mathématique : comment les quantités numériques sont liées à l'espace dans l'esprit humain

- M.-L. GARDES
- J. PRADO

Pourquoi certaines personnes arrivent à résoudre des problèmes mathématiques très complexes alors que d'autres ont des difficultés à calculer des opérations arithmétiques très simples ? En d'autres termes, qu'est-ce qui détermine que certains individus ont des capacités en mathématiques supérieures à d'autres ? Cette question est fondamentale à l'étude de la cognition numérique, c'est-à-dire la discipline qui s'intéresse à la façon dont les quantités numériques (et plus généralement certains concepts mathématiques liés au nombre) sont représentées et traitées dans notre esprit.

Récemment, pour essayer de répondre à cette question, des chercheurs de l'université d'Oxford au Royaume-Uni ont mené une expérience tout à fait originale [15]. Le but était de déterminer quelles compétences de base sous-tendent les capacités mathématiques les plus avancées, notamment chez des individus experts en mathématiques. Pour ce faire, les chercheurs ont demandé à des étudiants en doctorat des départements de Mathématiques et de Sciences humaines de l'université de se prêter à une expérience. Les participants devaient effectuer trois tâches. La première tâche visait à comparer les compétences mathématiques avancées des étudiants des deux départements. Les participants devaient estimer le résultat d'opérations arithmétiques complexes (par exemple $546 \div 33,5$) dans un temps imparti. La deuxième tâche était beaucoup plus simple et consistait à placer un nombre sur une droite dont seules les extrémités étaient indiquées. Par exemple, les participants devaient placer le nombre 689 sur une droite dont une extrémité indiquait 0 et l'autre 1000. La précision des placements sur cette ligne numérique était systématiquement mesurée en évaluant la différence de

positions entre celle du nombre placé par le participant et celle où le nombre se trouve réellement. La dernière tâche s'apparentait au jeu du Tangram et consistait à reproduire des motifs donnés au moyen de 16 cubes colorés dans un temps limité. Cette tâche est souvent utilisée en psychologie pour mesurer ce qui est dénommé « capacité spatiale » dans les tests d'intelligence, c'est-à-dire la capacité d'imaginer et de manipuler des formes et des relations dans l'espace. Les résultats montrent plusieurs éléments intéressants. Premièrement, et de façon peu surprenante, les performances des doctorants du département de mathématiques étaient significativement supérieures à celles des étudiants du département de Sciences humaines sur la tâche de mathématiques avancées. Deuxièmement, et de façon peut-être plus surprenante étant donnée la simplicité de la tâche, les étudiants du département de Mathématiques étaient en moyenne significativement plus précis à placer les nombres sur la ligne numérique que les étudiants du département de Sciences Humaines. En fait, les performances des participants sur cette tâche étaient un très bon prédicteur statistique de l'appartenance des participants au département (Mathématiques versus Sciences Humaines). Mais le résultat le plus important est sans nul doute que la différence de performance entre étudiants des deux départements sur la ligne numérique n'était plus statistiquement significative lorsque les performances sur la tâche spatiale étaient prises en compte. En d'autres termes, les différences de performance sur la ligne numérique semblaient être principalement déterminées par des différences de capacités spatiales, les étudiants en Mathématiques ayant des capacités spatiales supérieures en moyenne aux

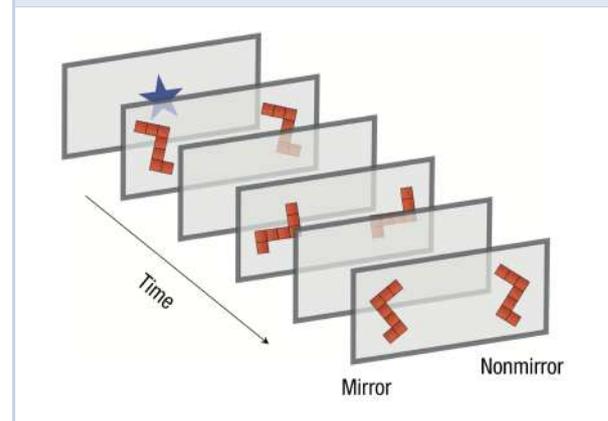
étudiants en Sciences Humaines.

Des liens forts entre espace et capacités numériques

Ce résultat est peut-être l'un des plus récents d'une longue série d'études mettant en relation capacités spatiales et performances en mathématiques. En effet, il est maintenant relativement bien établi que les capacités spatiales sont un bien meilleur prédicteur statistique de l'apprentissage des mathématiques que les capacités verbales (représentées par exemple par le vocabulaire ou la capacité de faire des analogies entre différents mots) [19, 1]. Comme reflété dans l'étude décrite ci-dessus, les individus qui font des études supérieures dans le domaine des mathématiques ont également tendance à avoir des capacités spatiales supérieures à la moyenne de la population [1]. En fait, ce lien entre capacités spatiales et apprentissage des mathématiques s'observe dès les premières années de la vie. Une expérience intéressante en donne un exemple. Des chercheurs américains ont tenté de mesurer des différences d'aptitudes spatiales chez des bébés âgés de 6 à 13 mois [10]. Pour ce faire, les chercheurs ont montré aux bébés une série de flux vidéo mis côte à côte. Les deux flux présentaient une pièce de Tetris qui changeait d'orientation au cours de chaque présentation (Figure 1). Dans l'un de ces flux, la forme pouvait parfois devenir une image miroir. Dans l'autre flux, la forme n'était jamais une image miroir. L'expérience visait à déterminer le temps que chaque bébé passait à regarder l'un ou l'autre des flux. L'idée était que les bébés qui avaient les meilleures capacités spatiales étaient sûrement ceux qui pouvaient détecter le plus facilement que l'un des flux avait une image en miroir, et donc passer plus de temps à regarder ce flux par rapport à l'autre. Les chercheurs ont ainsi pu observer qu'effectivement il y avait une variabilité importante dans le temps que chaque bébé passait à regarder le flux avec l'image en miroir, certains le regardant beaucoup plus que d'autres. Mais le résultat le plus impressionnant réside dans ce que les chercheurs ont découvert lorsqu'ils ont rappelé ces mêmes enfants au laboratoire trois ans plus tard. Le temps passé à regarder le flux avec l'image miroir lors de la première visite au laboratoire était corrélé aux apprentissages numériques (comme le comptage, la lecture de nombres en écriture chiffrée ou l'arithmétique simple) des enfants lorsqu'ils avaient 4 ans! En d'autres termes, les capacités spatiales des enfants en tant que bé-

bés prédisaient statistiquement leurs capacités en mathématiques plus tard à l'école maternelle.

FIGURE 1 – Stimuli utilisés pour mesurer les capacités spatiales des bébés. D'après [10].



Pourquoi ce lien entre espace et mathématiques? Bien sûr, il existe des explications plus ou moins triviales. Clairement, les compétences spatiales jouent un rôle évident en géométrie, où des modèles en deux ou trois dimensions doivent par exemple être créés et manipulés dans l'espace. Comprendre la notation positionnelle dans le système numérique hindou-arabe nécessite également de traiter des informations spatiales. Ajouter, soustraire, multiplier et diviser des nombres à plusieurs chiffres sur une feuille de papier implique également de positionner les nombres dans l'espace. Mais la contribution des capacités spatiales à la cognition numérique pourrait ne pas se limiter à ces exemples. En fait, il est probable que les capacités spatiales soient au cœur même du développement de la pensée mathématique chez l'enfant. En effet, de plus en plus de recherches indiquent qu'un codage spatial semble sous-tendre la représentation des quantités numériques. Cela pourrait expliquer pourquoi les enfants ayant de faibles habiletés spatiales ont souvent des difficultés avec les mathématiques et pourquoi une faible capacité spatiale est une caractéristique des enfants ayant des difficultés d'apprentissage des mathématiques (un trouble appelé dyscalculie) [18].

La représentation spatiale des grandeurs numériques

L'une des premières études démontrant que les nombres sont encodés de façon spatiale dans le cerveau humain provient d'une expérience menée en 1993 par Stanislas Dehaene et ses collaborateurs [2]. Les chercheurs voulaient étudier la fa-

çon dont les adultes traitent les nombres pairs et impairs. Ainsi, ils ont présenté à des participants adultes des nombres de 0 à 9 sur un écran d'ordinateur. Les participants devaient décider si le nombre était pair ou impair. Dans une partie de l'expérience, les participants appuyaient sur une touche située à gauche du clavier si le nombre était impair et sur une touche située à droite du clavier si le nombre était pair. Ceci était inversé au cours de la deuxième moitié de l'expérience, de sorte que la touche impaire était située sur le côté droit et la touche paire sur le côté gauche. Les chercheurs ont fait une découverte frappante qui n'avait en fait pas grand-chose à voir avec la parité : les petits nombres (par exemple 1, 2 ou 3) étaient traités significativement plus rapidement lorsque les participants appuyaient sur la touche gauche que sur la touche droite du clavier alors que les grands nombres (par exemple 7, 8 ou 9) étaient traités significativement plus rapidement lorsque les participants appuyaient sur la touche droite que sur la touche gauche du clavier. Tout se passe donc comme si les participants imaginaient que les petits nombres étaient à gauche de l'espace et les grands nombres à droite. Cette expérience a été la première à suggérer que les nombres pouvaient être organisés spatialement dans l'esprit humain, avec des quantités de taille croissante allant de gauche à droite. Cette idée est théorisée dans la littérature par le concept de « ligne mentale numérique » [7].

L'une des questions majeures que l'on peut se poser est de savoir si cette organisation spatiale des nombres dans l'esprit de participants adultes résulte simplement de facteurs culturels, comme le fait de lire de gauche à droite. Beaucoup d'études se sont donc intéressées à mesurer les associations entre nombres et espace dans différents types de populations (dont certaines lisant de droite à gauche). Même s'il apparaît clairement que les facteurs culturels influencent les associations entre nombres et espace (par exemple certaines études ont montré que les individus lisant de droite à gauche ont une tendance à davantage associer les petites quantités à l'espace droit [4]), des études récentes suggèrent que cette organisation spatiale est aussi (du moins en partie) indépendante de la culture. En d'autres termes, il se pourrait que l'on naisse au monde avec des quantités numériques organisées de gauche à droite dans notre esprit. Deux expériences supportent notamment cette hypothèse. Dans la première expérience, les chercheurs se sont demandés si des nouveau-nés, âgés d'à peine 45 heures en moyenne, avaient déjà une association entre quantités numériques et

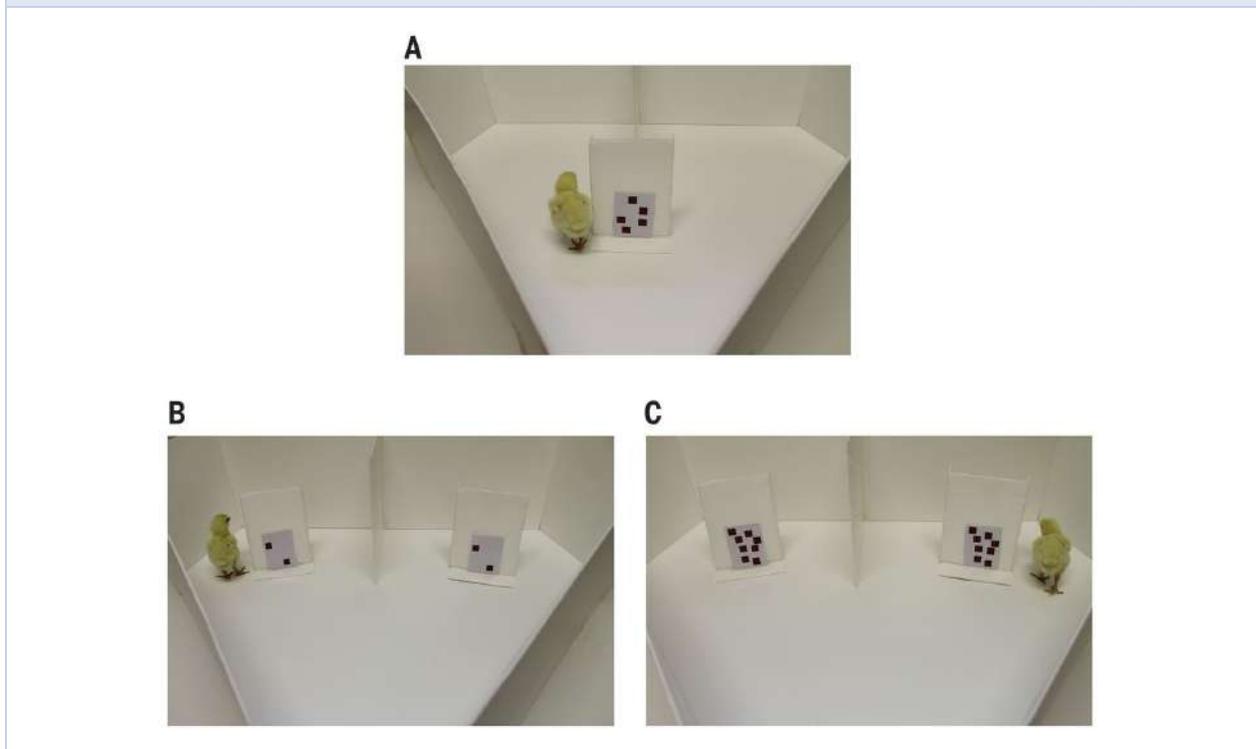
espace [6]. L'expérience comportait deux parties. Dans la première partie, les chercheurs ont présenté à ces nouveau-nés des extraits sonores de syllabes répétées, tels que « ba » ou « ta ». Certains bébés en écoutaient 6 et d'autres 18. Les nourrissons voyaient ensuite des lignes de tailles différentes sur un écran. Ceux qui avaient entendu 6 syllabes voyaient une ligne courte, alors que ceux qui en avaient entendu 18 voyaient une ligne plus longue. Dans la deuxième partie de l'expérience, les chercheurs présentaient 18 syllabes aux nourrissons qui avaient précédemment entendu 6 syllabes. Puis ils leur montraient successivement deux lignes longues, l'une située à gauche et l'autre à droite de l'écran (l'ordre de présentation était aléatoire). Les chercheurs se sont aperçus que les nourrissons accordaient en moyenne une attention plus longue à la ligne située à droite que celle située à gauche de l'écran (de manière statistiquement significative). L'expérience était répétée sur les nourrissons qui avaient au départ entendu 18 syllabes. On leur présentait maintenant 6 syllabes et deux lignes courtes, l'une à gauche et à droite de l'écran. Ces nourrissons accordaient en moyenne une attention plus longue à la ligne située à gauche que celle située à droite de l'écran. En clair, tout se passait comme si les nourrissons associaient les petites quantités avec l'espace gauche et les grandes quantités avec l'espace droit. Ce résultat peut paraître surprenant mais il est en fait cohérent avec une autre étude, menée cette fois-ci chez le poussin [14].

Dans cette deuxième expérience, des chercheurs entraînaient des poussins dans une cage à chercher de la nourriture derrière un cache sur lequel étaient indiqués 5 points (Figure 2). Une fois cet entraînement terminé, les poussins étaient mis dans une cage différente au sein de laquelle deux caches étaient disposés, l'un à gauche et l'autre à droite. Sur ces caches était indiqué un nombre de points différent de celui que les poussins avaient pu voir lors de l'entraînement. Dans une condition, les caches montraient 2 points (ce qui représentait donc une quantité plus petite que 5) et dans l'autre 8 points (ce qui représentait donc une quantité plus grande que 5). L'idée était d'observer si, dans ce choix forcé, les poussins allaient en moyenne plutôt dans une direction que dans une autre. Et c'est effectivement ce qui a été observé. Les poussins (entraînés avec 5 points) allaient plus souvent (de façon statistiquement significative) à gauche dans la cage avec 2 points alors qu'ils allaient plus souvent (de façon statistiquement significative) à droite qu'à gauche dans la cage avec 8 points. L'expérience a

ensuite été répétée en entraînant les poussins à aller chercher de la nourriture derrière un cache comprenant 20 points. Cette fois-ci, ils étaient ensuite mis dans une cage avec des caches sur lesquels étaient inscrits 8 points (ce qui représentait une quantité plus petite que 20) ou 32 points (ce qui représentait une quantité plus grande que 20). Dans ce contexte, les poussins allaient plus souvent à gauche dans la cage avec 8 points alors

qu'ils allaient plus à droite qu'à gauche dans la cage avec 32 points. En d'autres termes, tout comme les nouveau-nés, les poussins semblent associer de petites et grandes quantités à gauche et à droite de l'espace (respectivement). Ainsi, l'organisation spatiale des nombres (de gauche à droite) dans l'esprit humain pourrait être très primitive et ne pas avoir grand-chose à voir avec la culture.

FIGURE 2 – L'association entre espace et quantités numériques chez le poussin. (A) Un poussin est entraîné à chercher de la nourriture derrière la quantité « 5 ». (B) Le poussin choisit d'aller chercher de la nourriture à gauche lorsque les caches indiquent la quantité « 2 ». (C) Le poussin choisit d'aller chercher de la nourriture à droite lorsque les caches indiquent la quantité « 8 ». D'après [14].



Espace et arithmétique élémentaire

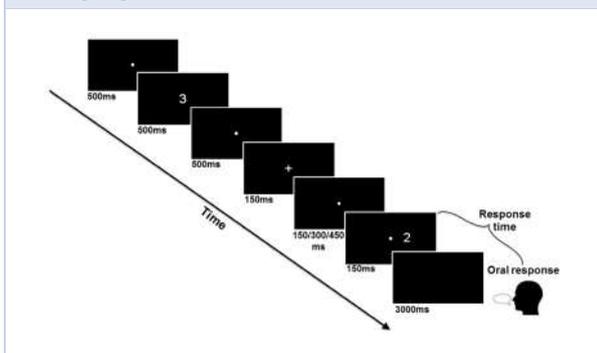
À première vue, il n'est pas évident de voir dans quelle mesure cette organisation spatiale des quantités numériques pourrait affecter la manipulation de ces quantités chez les adultes. Par exemple, nous n'avons certainement pas le sentiment de manipuler les nombres dans l'espace si nous devons calculer $2 + 3$ ou $7 - 3$. Pourtant, des études suggèrent que notre cerveau pourrait s'appuyer sur des intuitions spatiales pour résoudre ce type de problèmes arithmétiques. Par exemple, grâce à la technique de

l'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle (IRMf), des chercheurs ont mesuré l'activité cérébrale de participants adultes pendant qu'ils résolvaient des additions et des soustractions [8]. Ils ont découvert que les régions du cerveau qui étaient activées lors de la résolution d'additions étaient semblables aux régions du cerveau qui étaient activées lorsque les mêmes participants déplaçaient leurs yeux vers le côté droit de l'espace. Inversement, les régions cérébrales qui étaient activées pendant la résolution de soustractions étaient semblables aux régions cérébrales qui étaient activées

lorsque les participants déplaçaient leurs yeux vers le côté gauche de l'espace. Par conséquent, pour notre cerveau, résoudre une addition pourrait être comparable à déplacer son attention vers le côté droit d'une ligne mentale numérique, alors que résoudre une soustraction pourrait évoquer un mouvement vers la gauche le long de cette ligne. Par exemple, la résolution de $5 + 3$ ou de $5 - 3$ peut être conceptualisée comme un déplacement de 3 unités à droite ou à gauche du nombre 5.

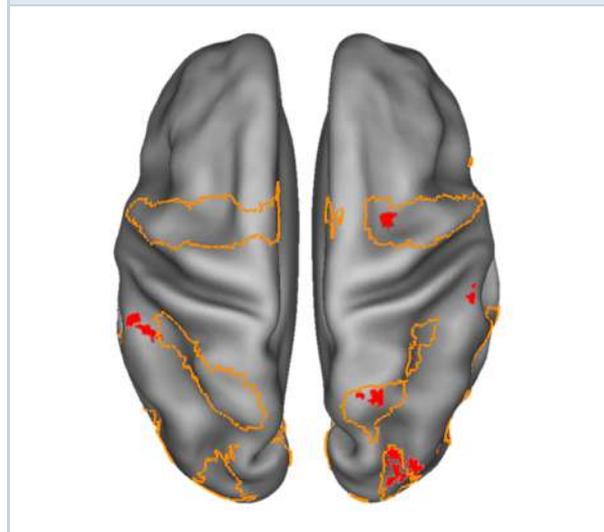
Cette hypothèse a été confirmée par d'autres études conduites dans notre laboratoire. Dans une étude récente, nous avons demandé à des adultes de résoudre à voix haute des opérations arithmétiques simples présentées sur un écran d'ordinateur [11]. Ces opérations étaient présentées de façon séquentielle, avec tout d'abord le premier opérande, puis l'opérateur, et enfin le second opérande. Alors que le premier opérande et l'opérateur étaient présentés au centre de l'écran, nous présentions le second opérande soit à gauche soit à droite du centre de l'écran (Figure 3). Nous avons pu constater que les additions simples comme $2 + 3$ tendaient à être résolues plus rapidement (en moyenne) lorsque le deuxième opérande était présenté à droite qu'à gauche du centre de l'écran. L'effet inverse était observé pour les soustractions simples, avec une résolution plus rapide lorsque le deuxième opérande était présenté à gauche qu'à droite. Par conséquent, l'organisation spatiale des quantités numériques dans le cerveau pourrait avoir de profondes conséquences sur de nombreux aspects des compétences mathématiques, et y compris sur la façon dont nous résolvons les opérations arithmétiques les plus simples.

FIGURE 3 – Exemple de présentation d'une opération arithmétique dans l'expérience de [11].



La force de ce lien entre arithmétique et espace est également observable dans le cerveau. Dans une autre expérience récente, nous avons par exemple voulu savoir si ces associations entre opérations arithmétiques et espace avaient pour conséquence que les opérateurs arithmétiques eux-mêmes puissent activer automatiquement des régions cérébrales impliquées dans l'attention spatiale [12]. Nous avons donc présenté à des participants des opérateurs arithmétiques comme le signe de l'addition alors que leur activité cérébrale était mesurée par la technique de l'IRMf. Nous avons pu voir que la simple perception du signe de l'addition activait un réseau de régions cérébrales normalement impliquées dans l'attention spatiale (Figure 4). Plus précisément, tout se passe un peu comme si, pour notre cerveau, le signe de l'addition représente un indice indiquant la nécessité de déplacer son attention sur la droite d'une ligne mentale numérique.

FIGURE 4 – Régions cérébrales activées lors de la perception du signe « + » (tâches rouges) et régions cérébrales activées lors d'un déplacement des yeux (lignes oranges) D'après [12].

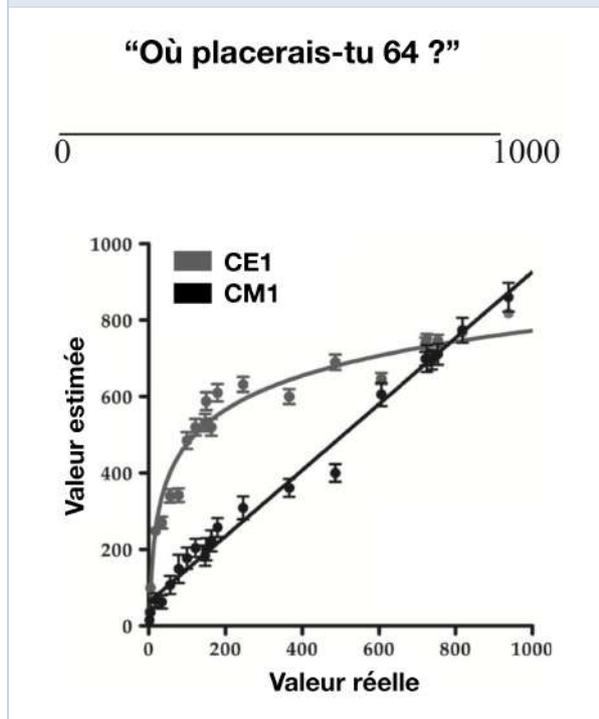


L'importance des associations entre nombres et espace pour l'apprentissage des mathématiques

Plusieurs études indiquent que la qualité des associations entre nombres et espace est essentielle à l'apprentissage des mathématiques dès le plus jeune âge chez les enfants. Par exemple, à mesure que les enfants se familiarisent avec les symboles

numériques à l'école primaire, ils augmentent la précision de leur représentation des nombres dans l'espace [16]. Ceci est généralement évalué avec des tâches dans lesquelles on demande aux enfants de positionner un nombre donné sur une ligne tracée sur une feuille de papier, avec 0 ou 1 à une extrémité et un nombre plus grand (généralement variant de 10 à 1 000) à l'autre extrémité (Figure 5). Les enfants plus jeunes ont tendance à surestimer la position des nombres relativement petits, les plaçant trop à droite (par exemple, ils ont tendance à mettre 8 à la place de 30). Ceci a pour effet de pousser les grands nombres vers la fin de la ligne. On parle donc de représentation logarithmique des nombres sur la ligne. Avec l'âge et l'expérience, ces erreurs disparaissent et les enfants vont progressivement adopter une représentation plus linéaire et plus précise sur toute la ligne. On parlera donc de représentation linéaire des nombres sur la ligne. Il est intéressant de noter que la « linéarité » de la ligne numérique est non seulement un très bon prédicteur statistique des capacités spatiales des enfants mais est aussi corrélée à leurs compétences numériques [16].

FIGURE 5 – Performance d'enfants de CE1 et CM1 lors d'une tâche de ligne numérique. En haut, exemple de ligne numérique et de question. En bas, valeur estimée par des enfants de CE1 et CM1 en fonction de la valeur réelle.



Utiliser l'espace pour développer les compétences numériques

Le lien entre les associations nombres et espace et les compétences en mathématiques suggère naturellement qu'il pourrait être intéressant de stimuler les capacités spatiales des enfants pendant l'apprentissage des mathématiques. Par exemple, une étude a révélé une amélioration de la performance en arithmétique des enfants de 6 à 8 ans après la pratique d'une tâche s'assimilant à un jeu de Tangram [16]. L'amélioration était observée pour les problèmes « à trou », comme $2 + _ = 5$. D'autres études ont montré que l'amélioration de la représentation spatiale des nombres peut avoir plusieurs avantages pour les enfants. Par exemple, le fait de donner un feedback correctif aux enfants lorsqu'ils se trompent dans le placement d'un nombre sur une ligne numérique leur permet de recalibrer relativement rapidement les positions des nombres sur la ligne. L'entraînement à ce type de tâches est également associé à des réductions d'activité dans plusieurs régions du cerveau, ce qui pourrait indiquer une automatisation des processus impliqués dans les associations entre nombres et espace [9].

Mais il est important de noter que l'amélioration de cette représentation des nombres dans l'espace peut également se faire par des activités à la maison. Notamment, les jeux de société dans lesquels les enfants naviguent le long d'un agencement séquentiel de cases numérotées, comme le jeu de l'oie, peuvent être très bénéfiques. Par exemple, des chercheurs ont demandé à des enfants à la maternelle de jouer à un jeu de société dans lequel ils devaient déplacer un jeton de gauche à droite d'une séquence de cases numérotées [17] (Figure 6). Les chercheurs ont constaté que, par rapport à un jeu de plateau dans lequel les cases n'étaient pas numérotées mais simplement colorées, jouer à ce jeu de plateau numéroté conduisait à des améliorations statistiquement significatives dans diverses compétences comme le comptage, l'identification des nombres écrits, la comparaison de grandeurs et la linéarité de la ligne numérique dont nous parlions précédemment. Cela pourrait s'expliquer par le fait que jouer à des jeux de société dans lesquels les enfants déplacent un jeton le long d'une séquence de cases numérotées peut leur fournir plusieurs indices importants lorsqu'ils apprennent les grandeurs numériques. Ainsi, comme le dit l'un des chercheurs impliqués dans cette découverte, « plus grand est le nombre indiqué dans une case,

plus grand est (a) le nombre de mouvements du jeton que l'enfant doit faire pour l'atteindre, (b) le nombre de mots-nombres que l'enfant dit avant de l'atteindre, (c) la distance parcourue à partir de l'origine pour l'atteindre, et (d) le temps que l'enfant met pour l'atteindre » [16]. Le fait que la représentation des nombres dans l'espace peut être stimulée de façon explicite a également été démontré par une expérience récente. Dans cette expérience, les chercheurs ont demandé à des enfants de maternelle de comparer des quantités numériques tout en effectuant des mouvements harmonieux du corps sur un tapis de danse (par exemple déplacer leur pied vers la gauche pour les plus petits nombres et vers la droite pour les plus grands nombres) [5]. Par rapport à une activité dans laquelle aucun mouvement dans l'espace était requis, les chercheurs ont constaté que ce programme basé sur un entraînement sensoriel-moteur spatial a permis d'améliorer de façon statistiquement significative les compétences en mathématiques ainsi que la linéarité de la ligne numérique.

FIGURE 6 – Exemple de jeu de plateau menant à une amélioration des capacités numériques chez des enfants de maternelle. D'après [17].



Conclusion

En résumé, la recherche en psychologie et en neurosciences met en évidence un lien très clair entre les capacités spatiales et les habiletés numériques. Cela amène certains chercheurs à faire l'hypothèse que « les objets mathématiques peuvent trouver leur origine ultime dans des intuitions fondamentales sur l'espace, le temps et le nombre qui ont été intériorisées au cours de millions d'années d'évolution dans un environnement structuré et qui émergent tôt dans l'ontogénie, indépendamment de l'éducation » [3]. Même si cette hypothèse est débattue [13], il n'en reste pas moins que le lien entre le développement de la pensée mathématique chez l'enfant et les habiletés spatiales semble indéniable. Ceci offre de multiples pistes pour favoriser l'émergence et la construction des compétences en mathématiques grâce à l'utilisation d'activités faisant appel aux capacités spatiales des enfants. Plus généralement, les résultats de ces recherches fournissent aussi un bon exemple de la façon dont les sciences cognitives peuvent enrichir les recherches sur l'apprentissage des mathématiques.

Références

- [1] V. CROLLEN et M.-P. NOËL. « How Does Space Interact with Numbers? » In : *Visual-spatial Ability in STEM Education*. Springer, 2017, p. 241-263.
- [2] S. DEHAENE, S. BOSSINI et P. GIRAUX. « The mental representation of parity and number magnitude ». *Journal of Experimental Psychology: General* 122, n° 3 (1993), p. 371.
- [3] S. DEHAENE et al. « Log or linear? Distinct intuitions of the number scale in Western and Amazonian indigene cultures ». *science* 320, n° 5880 (2008), p. 1217-1220.
- [4] M. H. FISCHER et S. SHAKI. « Spatial associations in numerical cognition—From single digits to arithmetic ». *The Quarterly Journal of Experimental Psychology* 67, n° 8 (2014), p. 1461-1483.
- [5] U. FISCHER et al. « Sensori-motor spatial training of number magnitude representation ». *Psychonomic bulletin & review* 18, n° 1 (2011), p. 177-183.
- [6] M. D. de HEVIA et al. « At Birth, Humans Associate “Few” with Left and “Many” with Right ». *Current Biology* 27, n° 24 (2017), p. 3879-3884.

- [7] E. M. HUBBARD et al. « Interactions between number and space in parietal cortex ». *Nature Reviews Neuroscience* **6**, n° 6 (2005), p. 435.
- [8] A. KNOPS et al. « Recruitment of an area involved in eye movements during mental arithmetic ». *Science* **324**, n° 5934 (2009), p. 1583-1585.
- [9] K. KUCIAN et al. « Mental number line training in children with developmental dyscalculia ». *NeuroImage* **57**, n° 3 (2011), p. 782-795.
- [10] J. E. LAUER et S. F. LOURENCO. « Spatial processing in infancy predicts both spatial and mathematical aptitude in childhood ». *Psychological science* **27**, n° 10 (2016), p. 1291-1298.
- [11] R. MATHIEU et al. « Running the number line: Rapid shifts of attention in single-digit arithmetic ». *Cognition* **146** (2016), p. 229-239.
- [12] R. MATHIEU et al. « What's Behind a "+" Sign? Perceiving an Arithmetic Operator Recruits Brain Circuits for Spatial Orienting ». *Cerebral Cortex* (2017), p. 1-12.
- [13] R. E. NÚÑEZ. « Is there really an evolved capacity for number? » *Trends in cognitive sciences* **21**, n° 6 (2017), p. 409-424.
- [14] R. RUGANI et al. « Number-space mapping in the newborn chick resembles humans' mental number line ». *Science* **347**, n° 6221 (2015), p. 534-536.
- [15] F. SELLA et al. « Basic and advanced numerical performances relate to mathematical expertise but are fully mediated by visuospatial skills. » *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition* **42**, n° 9 (2016), p. 1458.
- [16] R. S. SIEGLER. « Magnitude knowledge: The common core of numerical development ». *Developmental science* **19**, n° 3 (2016), p. 341-361.
- [17] R. S. SIEGLER et G. B. RAMANI. « Playing linear numerical board games promotes low-income children's numerical development ». *Developmental science* **11**, n° 5 (2008), p. 655-661.
- [18] D. SZŰCS et U. GOSWAMI. *Developmental dyscalculia: fresh perspectives*. 2013.
- [19] J. WAI, D. LUBINSKI et C. P. BENBOW. « Spatial ability for STEM domains: Aligning over 50 years of cumulative psychological knowledge solidifies its importance. » *Journal of Educational Psychology* **101**, n° 4 (2009), p. 817.



Marie-Line GARDES

Institut des Sciences Cognitives *Marc Jeannerod*, UMR 5304, Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) & université de Lyon
marie-line.gardes@univ-lyon1.fr



Jérôme PRADO

Institut des Sciences Cognitives *Marc Jeannerod*, UMR 5304, Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) & université de Lyon
jprado@isc.cnrs.fr

Nous tenons à remercier Raphaël Rossignol pour sa lecture critique de cet article.

Lors du dernier Congrès International des Mathématiciens, qui a eu lieu à Rio de Janeiro en août dernier, Gaël Octavia et Sébastien Gouëzel ont interviewé les nouveaux lauréats de la médaille Fields. Voici les entretiens réalisés avec Caucher BIRKAR et Alessio FIGALLI.



... avec Caucher BIRKAR

Propos recueillis par G. OCTAVIA, Fondation Sciences Mathématiques de Paris.

Caucher Birkar, bonjour. Pouvez-vous nous parler de votre conférence et des raisons pour lesquelles vous avez choisi ce sujet pour cette occasion très spéciale, le Congrès International ?

J'ai essayé de préparer la conférence en fonction de la citation du prix, qui mentionnait surtout deux travaux. Le premier concerne le programme du modèle minimal, notamment pour les variétés algébriques de type général, en particulier l'existence des flips. Le deuxième était un travail séparé, sur la famille des variétés de Fano et son caractère borné. J'ai donc essayé d'insister sur ces sujets.

Vous vous êtes efforcé de rendre ce sujet, notamment difficile pour le profane, accessible à un public varié en expliquant tout et en présentant des exemples.

La géométrie algébrique est en soi un sujet difficile. La géométrie birationnelle est peut-être encore plus technique, avec beaucoup d'outils et d'idées propres, donc j'ai essayé d'être aussi simple et accessible que possible. C'est pourquoi j'ai commencé par une introduction basique à la géométrie birationnelle et ai introduit progressivement les notions principales.

Parlons un peu de votre vocation. Quand avez-vous pris conscience que vous vouliez devenir mathématicien ? À quel âge les mathématiques se sont-elles introduites dans votre vie ?

Je crois que c'est à la fin de l'école primaire que j'ai senti que j'aimais les mathématiques. Et mon frère aîné m'a petit à petit appris des mathématiques

plus avancées, comme la dérivation, l'intégration, et a essayé de m'apprendre de la physique. En arrivant au lycée, j'ai commencé à lire plus de mathématiques. Je lisais beaucoup de livres en dehors de l'école, et j'ai découvert que l'on pouvait aimer faire des mathématiques, qu'au-delà des bonnes notes, elles pouvaient enrichir votre vie. C'est à ce moment, au lycée, que j'ai décidé de devenir mathématicien.

Avez-vous des héros mathématiques, des modèles ?

Au lycée, j'ai lu un livre assez célèbre, *Les Grands Mathématiciens*. Il s'agit d'un livre de biographies de mathématiciens, de l'Antiquité au début du vingtième siècle. J'ai été fasciné par leurs vies et leurs découvertes. Je crois que ça a renforcé ma motivation pour les mathématiques.

Parlons de votre histoire. Vous avez grandi en Iran, puis êtes allé en Angleterre. Quelle est la part de ces deux lieux dans votre vie de mathématicien ?

Je suis né au Kurdistan iranien et j'y ai passé toute ma scolarité. À cette époque je lisais déjà beaucoup de livres de mathématiques sur les aspects élémentaires de disciplines comme la géométrie, la topologie, l'algèbre, la théorie des groupes. J'étais fasciné par tous ces sujets. Ensuite, je suis allé à l'université à Téhéran. Comme au lycée, j'ai surtout suivi mes propres centres d'intérêt en dehors des cours. Je me suis successivement intéressé à la topologie algébrique, à la logique mathématique, à l'algèbre commutative et enfin à la géométrie algébrique. Quand je me suis installé en Angleterre, j'ai commencé ma thèse. Il n'y avait plus de cours, juste des

lectures personnelles d'articles et de livres. C'est à ce moment que j'ai décidé de faire de la géométrie birationnelle, et c'est encore ce que je fais aujourd'hui.

On sait qu'en mathématiques, un problème peut être envisagé de plusieurs points de vue. Vous considérez-vous comme un mathématicien à large spectre, ou êtes-vous un pur géomètre algébriste ?

Je pense que je suis plutôt un pur géomètre algébriste, mais la géométrie algébrique elle-même utilise des idées de diverses disciplines, comme la théorie de Hodge, la géométrie analytique, la géométrie différentielle, etc. Elle a intégré toutes ces techniques au fil des années. Jusqu'à présent, j'ai principalement appliqué des techniques de géométrie algébrique, mais c'est un domaine très riche, avec beaucoup d'idées différentes.

Le sujet dont vous avez parlé aujourd'hui, est-ce quelque chose sur lequel vous travaillez en ce moment, ou était-ce un survol de votre domaine ?

Il s'agissait majoritairement de mes travaux passés, mais il y avait également une partie de survol et des perspectives. En ce moment, je réfléchis aux familles de variétés de Fano, la notion relative de variété de Fano que j'ai expliquée à la fin de l'exposé, et qui unifie plusieurs types de notions centrales en géométrie birationnelle.

Pouvez-vous nous donner un exemple de question sur laquelle vous travaillez actuellement ?

Je suis en train de réfléchir au cas d'une fibration dont les fibres génériques sont des variétés de Fano. C'est également lié aux variétés log Calabi-Yau. J'étudie la famille de ces espaces, son caractère borné, et le comportement de leurs singularités. En un sens, il s'agit donc d'une version relative, fibrée, de la conjecture BAB dont j'ai parlé dans mon exposé.

Parlons de la médaille Fields, que vous avez reçue deux fois... Plus sérieusement, quand vous avez été contacté par l'IMU, vous y attendiez-vous ou fut-ce une surprise complète ?

Je pense que la médaille Fields est très imprévisible. Il y a tant de grands mathématiciens, et tant de domaines des mathématiques... Aujourd'hui, la médaille Fields couvre plus de domaines qu'il y a cinquante ou soixante ans. Donc j'ai été très surpris, et très heureux.

Pensez-vous que recevoir l'un des prix les plus importants et les plus connus des mathématiques va transformer votre vie de mathématicien ? Espérez-vous que rien ne change, ou comptez-vous utiliser votre nouvelle notoriété pour changer les choses ?

Pour l'instant, je n'ai pas l'intention de changer la façon dont je travaille. Mais j'ai parlé à d'anciens médaillés présents au congrès, et j'ai l'impression que c'est une affaire de choix. Vous pouvez continuer à faire de la recherche sans vous préoccuper d'autre chose ou vous avez le choix de contribuer différemment, d'essayer de populariser les mathématiques et d'inspirer les gens. Peut-être que dans cinq ans je changerai d'avis. En tout cas, je pense que les deux directions sont importantes, ce sont simplement des contributions différentes.

Dans le film de présentation qui vous était consacré, vous déclariez que vous aimeriez aider les gens dans des pays où l'accès aux mathématiques n'est pas aussi facile qu'en Europe.

Oui, je l'espère vraiment. Encore une fois, cela dépendra du temps que je pourrai consacrer à ces questions. Dans mon cas, c'est probablement auprès des Kurdes que je peux avoir le plus grand impact, notamment parce qu'à cause de la situation politique complexe de la région, peu d'organisations peuvent aujourd'hui y intervenir. En un sens, c'est une responsabilité morale. Mais si je peux aider, que ce soit auprès des Kurdes ou dans toute autre partie du monde, j'en serai heureux.

En 2010, vous avez gagné le prix de la Fondation des Sciences Mathématiques de Paris. Parmi les multiples récompenses que vous avez reçues, qu'est-ce que cette reconnaissance signifiait pour vous ? Est-ce que cela vous a aidé à recevoir la médaille Fields ?

C'était assurément important de recevoir ce prix, notamment parce que cela m'a permis de passer un an à Paris pour parler avec des gens. En outre, pendant cette année, j'ai eu plus de temps pour me consacrer à la recherche car je n'avais pas d'autre enseignement que la série d'exposés liée au prix. Donc je suis sûr que cette année a eu un effet sur ma carrière.

Une toute dernière question. Avez-vous d'autres passions ?

Oui, j'aime la littérature. J'écrivais, plus jeune, de la poésie. J'aime aussi la musique : je joue des percussions et j'ai essayé d'utiliser des appareils

Ce sont des problèmes où on essaye par exemple d'étudier les transitions de phase dans des phénomènes physiques, par exemple de la glace en train de fondre dans l'eau. On essaie de décrire l'évolution de l'interface entre ces deux phases. On peut décrire ce phénomène physique par des équations aux dérivées partielles.

Mais la même équation, dans le cas stationnaire – où on oublie le temps – décrit aussi un autre phénomène complètement différent, qui correspond à comprendre la forme à l'équilibre d'une membrane élastique quand on considère la force gravitationnelle qui agit sur elle, en plus de l'énergie élastique, dans le cas où il y a un plan, disons le plan $z = 0$, qui joue le rôle d'un obstacle : notre membrane élastique n'a pas le droit de passer en-dessous de l'obstacle. C'est la même équation qui peut décrire les deux phénomènes. Ça donne deux motivations différentes pour le même problème. J'ai essayé d'expliquer un peu toute l'histoire de ce problème, les résultats obtenus ces 50 dernières années, jusqu'aux développements les plus récents.

C'est un problème qui vient de la physique. Avez-vous souvent puisé votre inspiration mathématique dans des problèmes qui sont liés à des phénomènes réels, ou qui viennent d'autres sciences ?

En général, j'aime bien quand les problèmes viennent d'autres sciences, la physique par exemple. Mais j'ai aussi un côté très mathématique : j'aime que cela fasse intervenir de belles maths. Belles maths, c'est quelque chose de très personnel. C'est ça vraiment qui attire mon attention et mon intérêt. Mais souvent les choses peuvent aller ensemble.

Ça m'est arrivé plusieurs fois de regarder des problèmes qui viennent de la physique. J'ai étudié un peu la forme des cristaux à l'équilibre ou quand ils sont presque à l'équilibre, la forme des bulles de savon quand elles sont presque à l'équilibre, des équations qui viennent de la météorologie. Ces problèmes sont liés à des équations aux dérivées partielles, donc on peut aussi dire que je fais juste des théorèmes de régularité pour des équations aux dérivées partielles. Mais la motivation est quand même très physique. J'aime bien ça, et en plus je me sens utile !

Votre domaine est plutôt les équations aux dérivées partielles, mais votre conférence avait une approche très géométrique. Où vous situez-vous ?

Je me sens sûrement très analyste, mais j'aime bien les problèmes d'analyse où il y a aussi un peu de

géométrie derrière, pour se construire de l'intuition avec des dessins. J'ai travaillé sur les inégalités isopérimétriques, c'est de l'analyse avec des formules mais on peut faire plein de dessins, c'est une situation géométrique. Je viens du calcul des variations et de la théorie géométrique de la mesure, on pourrait dire l'école de Pise, où on essaye un peu de mélanger les deux choses. Je pense donc que c'est un peu ma formation qui me conditionne, qui me motive pour avoir une approche assez géométrique dans les problèmes d'analyse. Mais à la fin, ce sont des formules ! Disons qu'il y a la partie géométrique qui aide beaucoup à donner de l'intuition, à raconter et à comprendre les choses, mais à un certain moment il faut prendre les formules et travailler vraiment comme un analyste.

Pouvez-vous retracer un peu votre carrière ?

J'ai grandi en Italie, et j'ai commencé mes études de maths à l'École normale supérieure de Pise. Je m'y suis intéressé beaucoup au calcul des variations et à la théorie géométrique de la mesure. Après, grâce à Albert Fathi, pendant mon master, je suis allé 6 mois à l'École normale supérieure de Lyon, où j'ai interagi avec Albert Fathi d'un côté et Cédric Villani de l'autre. Ça m'a permis de voir deux théories très différentes : avec Albert Fathi des problèmes de théorie KAM faible, avec Cédric Villani des problèmes de transport optimal. Après, pendant ma thèse en cotutelle entre l'Italie et la France avec Luigi Ambrosio et Cédric Villani, je me suis beaucoup intéressé au transport optimal et à ses applications. C'était dans cette période que j'ai commencé à travailler aussi aux applications du transport optimal dans les inégalités isopérimétriques. Une fois que j'ai eu mon poste au CNRS, je suis allé d'abord à l'université de Nice / Sophia-Antipolis, où j'étais CR, et là-bas j'ai beaucoup travaillé sur le transport optimal mais relié aussi à la géométrie sous-riemannienne avec Ludovic Rifford, ce qui m'a donné un côté plus géométrique. Une fois à Polytechnique, je me suis remis un peu sur la partie plus analyse. Et surtout une fois parti pour les États-Unis, à l'université d'Austin au Texas, j'ai travaillé avec Luis Caffarelli : c'est le moment où je suis vraiment devenu un véritable edpiste. J'ai passé 7 ans là-bas avant de rentrer en Europe. Je suis maintenant à l'ETH à Zürich. On peut dire que j'ai gardé plusieurs intérêts avec un côté très analyse et quand même une vision et des intérêts aussi géométriques.

Est-ce que vous avez l'impression qu'il y a des styles de mathématiques selon les pays ?

Chaque pays, et même chaque université, a un peu ses traditions. Pise, avec la tradition de De Giorgi, est très renommée pour le calcul des variations et la théorie de la mesure. Arrivé en France, j'ai été exposé à d'autres problèmes, surtout des problèmes liés au transport optimal et à la géométrie. Les problèmes de frontière libre étaient une spécialité à Austin, on y respire les frontières libres. Maintenant, à l'ETH, c'est très international et très varié. L'environnement conditionne assurément les jeunes et les chercheurs parce que c'est normal qu'on s'intéresse plus aux problèmes qu'on entend autour de nous. C'est pour ça que, de mon côté, c'était vraiment un gros atout de voyager beaucoup parce que j'ai été exposé à beaucoup de domaines différents. J'essaye toujours d'apprendre de la part de gens différents de nouvelles techniques, et voilà, c'est ça qui me caractérise maintenant.

[Correspondiez-vous à l'idée préconçue qu'on peut avoir des lauréats de la médaille Fields très précoces, qui faisaient déjà des mathématiques très jeunes ?](#)

Quand j'ai grandi en Italie, j'aimais les maths, mais surtout parce que je les trouvais assez faciles : je n'avais pas besoin de trop travailler à la maison ! Je pensais probablement devenir ingénieur, mais je n'avais pas les idées très claires. Une fois le collège terminé, j'ai pris la filière littéraire au lycée. J'ai fait du latin, du grec, de la philosophie, tout sauf des maths jusqu'à 16-17 ans. Vers cet âge-là, j'ai découvert l'existence des Olympiades de maths. C'était très important pour moi parce que ça m'a montré le côté créatif des maths : même si ce n'est pas vraiment de la recherche, quand même, les Olympiades montrent un peu l'esprit créatif des mathématiciens, l'idée de chercher des solutions qui ne sont pas juste mécaniques. Il faut travailler avec son cerveau ! J'ai beaucoup aimé ça.

C'est ce qui m'a beaucoup motivé pour essayer le concours pour rentrer à l'École normale supérieure. J'ai beaucoup travaillé pour ça, et j'ai réussi le concours. En Italie, c'est un concours qu'on passe juste après le bac. Une fois admis, je me suis retrouvé avec tous mes copains de promo qui avaient une très forte préparation en maths alors que moi, je ne savais pas trop comment calculer une dérivée. C'était un peu compliqué au début, mais ça a marché, j'ai travaillé suffisamment pour savoir comment calculer des dérivées. Je n'ai pas trop le parcours du génie qui, à 12 ans, faisait des trucs vraiment bizarres. Je jouais plutôt à la Playstation ou au football comme tous les italiens.

[Pouvons-nous revenir aux travaux qui vous ont valu la médaille Fields.](#)

C'est un moment assez particulier avec cette médaille Fields qui est tombée un peu du ciel. On ne s'attend pas à ce mail du président de l'International Mathematical Union qui écrit : je veux parler avec vous. Est-ce que vous pouvez m'envoyer votre contact Skype ? Ça m'a vraiment frappé, je n'ai pas beaucoup dormi jusqu'au moment où j'ai pu parler avec lui. J'ai appris plus récemment, grâce entre autres à la laudatio et à la description du comité, pour quels travaux en particulier j'ai reçu la médaille Fields.

J'ai été beaucoup reconnu pour les travaux sur le transport optimal et surtout ses applications. J'ai utilisé du transport optimal pour démontrer des inégalités isopérimétriques un peu améliorées, qui sont importantes pour comprendre la stabilité des minimiseurs dans les problèmes géométriques. Les bulles de savon minimisent l'aire à volume fixé, les cristaux minimisent une sorte d'aire à volume fixé, et on veut comprendre la stabilité de ces objets. J'ai aussi étudié l'équation de Monge-Ampère ; c'est une équation très importante, elliptique, qui est utilisée par exemple en géométrie pour étudier la courbure de Gauss, mais qui apparaît aussi dans le transport optimal, ainsi par exemple que dans des équations de la météorologie. J'ai apporté des contributions importantes sur la régularité des solutions de cette équation de Monge-Ampère. J'étais aussi cité pour des contributions en probabilités. J'ai utilisé encore du transport, pas optimal mais des techniques un peu de transport, et aussi des EDPS, dans le problème des matrices aléatoires. Ce sont des travaux en collaboration avec Alice Guionnet. Après, bon, on ne peut pas être sûr de ce qui a motivé le comité. J'ai entendu aussi des choses sur les contributions générales à tous les problèmes de frontière libre, ce sur quoi je travaille maintenant.

Pour en revenir à l'inégalité de stabilité appliquée aux équations aux dérivées partielles, j'ai utilisé des modèles critiques d'équations aux dérivées partielles, et en général aussi toute la régularité des applications de transport dans le transport optimal. J'ai beaucoup étudié les solutions singulières de Monge-Ampère et j'ai utilisé des techniques de théorie géométrique de la mesure pour étudier la structure de l'application optimale dans le transport. C'est une chose sur laquelle j'ai commencé à travailler en 2005/2006 et sur laquelle je travaille toujours, c'est un problème qui m'a toujours fasciné : comprendre la structure fine des applica-

tions de transport pour comprendre la géométrie du transport optimal.

Pouvez-vous nous expliquer comment vous aimez travailler ?

J'ai écrit pas mal de papiers dans plusieurs domaines. J'aime bien faire partir mon cerveau dans plusieurs directions. Quand je travaille sur un problème, je suis très concentré, très intensément, pendant certaines périodes où j'essaie d'avancer à fond. Mais dans chaque problème, il y a toujours des moments où on sera bloqué. Pour moi c'est un bon moment pour prendre un problème différent parce que ça me change les idées. C'est pour ça que je travaille dans des domaines différents avec beaucoup de personnes, parce que c'est une bonne façon pour moi de me vider la tête. Souvent, ça m'est arrivé que travaillant sur un autre problème, je décide de retourner sur le précédent, et que j'aie alors beaucoup plus d'idées. Cela marche bien pour moi, mais je pense que la façon de travailler est très spécifique à chacun. J'ai la chance que ce soit assez facile pour moi de rentrer et de sortir d'un problème. Je me suis adapté un peu à mon cerveau : il marche comme ça, donc j'ai travaillé en suivant ma façon d'être.

Vous est-il arrivé que des compétences dans un domaine vous servent dans d'autres domaines sans rapport direct ?

Ça m'est arrivé justement en travaillant sur des domaines différents d'appliquer des techniques d'un côté à l'autre. Il me revient un exemple très récent, quand j'ai approché le problème des matrices aléatoires. Avec Alice Guionnet, on s'était dit que des techniques de transport pourraient être intéressantes. Au début on avait pensé utiliser du transport optimal mais ce n'était pas la bonne approche. Tout d'un coup on a commencé à développer des techniques assez différentes avec du transport non optimal, mais des EDPS de transport, ce qui est une chose très différente. Ce sont des EDPS hyperboliques, un sujet qui m'a toujours fasciné parce que Luigi Ambrosio, mon directeur de thèse, avait fait des choses très importantes sur les équations de transport en 2004, en suivant la théorie de Di Perna-Lions. Comme je connaissais assez bien cette théorie grâce à Luigi, on a utilisé des résultats de ces équations dans le papier sur les matrices aléatoires.

Je pense que tout est utile, en fait. Une chose que j'essaie de dire à mes étudiants, par exemple, c'est

que même si on travaille sur un problème et si les choses ne marchent pas, on aura toujours appris quelque chose. Pour chaque problème qu'on arrive à résoudre, il y en aura au moins dix qu'on aura essayé de résoudre et où on n'y sera pas arrivé. Il ne faut pas être trop frustré par ça, ça fait juste partie du travail du chercheur, mais il faut toujours penser que ce n'est jamais du temps perdu parce que même en travaillant sur des choses qui n'ont pas marché on peut avoir eu des idées que finalement on n'a pas été capable d'appliquer dans un problème mais qu'on pourra peut-être appliquer dans un autre problème dix ans après. C'est un peu la partie, disons, d'apprentissage de la vie d'un chercheur. On est encore des étudiants, on apprend en étudiant les papiers des autres. C'est quelque chose que j'aime beaucoup, et je pense qu'il faut toujours se souvenir de cela.

Qu'est-ce qui vous plaît dans ce métier ? Comment l'expliqueriez-vous à des jeunes par exemple ?

Le métier d'un mathématicien est très particulier. C'est très difficile d'expliquer ce qu'on fait. C'est un métier très varié où, qu'est-ce qu'on fait ? On pense. Mais bon, on ne fait pas que ça. Plus le temps passe et plus il y a d'autres choses à faire, il y a un côté éditorial, un côté enseignement bien sûr.

Mais si on pense juste à la partie recherche, qu'est-ce qu'on fait ? On essaye d'abord de se demander quel problème on veut étudier. On cherche des problèmes qui nous fascinent et qu'on voudrait résoudre. Après, on se demande : qu'est-ce qui est connu dans ce problème ? On regarde la littérature. On lit ce que les autres gens ont fait avant nous. Et après avoir fait ça, on essaye de faire notre partie, donner quelque chose, démontrer un théorème qui n'était pas connu avant. Avec le but peut-être de démontrer un théorème définitif – quelquefois on sait quel théorème on cherche, d'autres fois on ne sait même pas quel est le théorème qu'on peut démontrer, on essaye de faire le mieux possible. C'est un métier très créatif. C'est un métier où il faut mélanger des techniques qui existent déjà avec des nouvelles idées. C'est un métier très particulier, parce que c'est sur le long terme, c'est peut-être la partie la plus difficile du métier, parce qu'on ne voit pas tout de suite le résultat de notre travail. On passe des mois et des mois et peut-être qu'on n'a pas avancé. On déprime pas mal.

J'aime beaucoup le fait d'enseigner. Ça te donne quand même un équilibre, parce que quand je sors de mon cours, je sais que j'ai appris quelque chose à mes étudiants. Au moins j'ai fait quelque chose

d'utile dans la journée. C'est difficile de penser qu'on a fait quelque chose d'utile si on est juste en train de tourner en rond sur un problème. Mais c'est quand même un métier très fascinant, on a beaucoup de liberté, on peut le faire partout, on peut laisser notre cerveau voler dans l'imaginaire. On étudie des choses très abstraites et en même temps très concrètes, donc c'est vraiment une théorie très particulière, d'un côté les mathématiques existent pour décrire le monde, c'est pour ça que les mathématiques ont commencé à exister, et d'un autre côté elles sont très abstraites, elles essaient de trouver une structure un peu au-dessus de tout, pour après unifier et résoudre plusieurs problèmes en même temps, trouver un peu un ordre dans la nature.

Une chose que j'aime beaucoup dans les maths, c'est le fait qu'un théorème soit, soit vrai soit faux. Ça me donne beaucoup de paix, dans le sens que personne ne pourra me dire que ma théorie est fautive. Il pourra dire : ça ne m'intéresse pas. Ça, bon, c'est un point de vue personnel. Je n'ai pas peur qu'il y ait une expérience dans un laboratoire qui me fasse dire : ah non, j'ai étudié une théorie qui en fait n'était pas la bonne ! Ce serait assez frustrant ! J'aime bien ce côté un peu absolu des maths, on sait que tout ce qu'on fait sera là même dans 500 ans, pour toujours. Les maths sont très créatives, très fascinantes. J'aime bien qu'on puisse les faire juste avec un crayon et un papier. Ça donne une liberté psychologique énorme. Il faut aimer ça. Moi c'est l'amour que j'ai pour les maths qui me fait faire ça. Ça peut être très fascinant. Aussi, quand on arrive à résoudre des problèmes qu'on voulait résoudre, c'est vraiment une grosse grosse satisfaction, cela donne une grande joie. Donc ça peut valoir le coup !

On a l'impression que vous êtes un peu à part sur cette tournée de médaillés.

Par rapport aux trois autres médaillés, je suis vraiment très loin d'eux. Je peux comprendre vaguement d'où viennent leurs questions, mais je dois avouer que je n'ai aucune idée de ce qu'ils ont démontré exactement. Je pense que c'est un peu souvent la frustration des analystes par rapport à des problèmes d'algèbre et de géométrie algébrique. Disons qu'on a un langage tellement différent que ce n'est pas facile. Je suis content pour ma communauté. Je pense que ce prix signifie qu'au niveau international les EDPS sont reconnues par la communauté. On considère qu'il faut travailler sur ce domaine parce qu'il est important. Je suis vraiment

content parce que je pense que ça va motiver beaucoup de jeunes pour continuer à travailler dans mon domaine. J'espère que ça sera utile.

Vous avez une sorte de transversalité entre plusieurs domaines ? Est-ce que ça devient de plus en plus nécessaire au vu de la complexité des problèmes étudiés ?

Les maths, je pense, ont beaucoup changé depuis ces dernières années. Les maths progressent très vite, elles deviennent de plus en plus spécialisées. C'est la raison pour laquelle il devient de plus en plus compliqué de comprendre ce que nos collègues font s'ils ne sont pas dans notre discipline. On a des papiers très techniques dans des domaines même proches de nous où on a du mal à comprendre exactement ce qu'ils font, quelles sont les idées. Il y a tellement de papiers qui sortent tout le temps que c'est difficile de tout suivre. Quelles sont les conséquences de cette évolution ? Ça amène beaucoup de gens à être spécialisés, parce qu'on n'a pas trop le choix, les choses vont tellement vite que ce n'est pas facile d'être transversal. En plus, il y a maintenant une compétition très forte pour les jeunes. Je pense que j'ai eu de la chance, au sens où il y a dix ans, quand j'ai commencé à postuler sur les postes, ce n'était pas aussi compétitif que maintenant. Les jeunes sont un peu forcés d'être dans leur communauté, d'être défendus dans la communauté, d'être vraiment spécialisés. C'est beaucoup plus difficile maintenant d'être un peu transversal.

Être transversal, d'un côté ça veut dire que c'est plus compliqué d'être vraiment expert dans tous les domaines, mais de l'autre côté ça peut être vraiment un gros avantage quand on essaye de débloquer un problème qui traîne depuis très longtemps, parce que si beaucoup de monde s'y est essayé, c'est probable que toutes les techniques un peu de la communauté ont été déjà utilisées. Parfois le fait d'être transversal, c'est le point clé pour introduire une idée que personne n'a eue dans cette communauté. Donc, la transversalité, ça peut être très utile.

C'est pour ça aussi que j'aime beaucoup les collaborations, parce qu'il y a toujours quelqu'un qui est un peu plus spécialiste dans une chose plutôt que l'autre. J'ai mes domaines d'expertise, et il y a des domaines sur lesquels j'ai travaillé mais où je ne me considère pas expert du domaine. Mais c'est normal, on ne peut pas être expert partout. Dans ces domaines-là, j'ai toujours essayé d'apporter mes connaissances et j'ai essayé avec mes collaborateurs de les mettre ensemble, avec ce que

eux savaient, pour arriver au bout du problème. Le fait que les maths avancent si vite rend nécessaire pour être transversal d'avoir un bon réseau de collaborateurs aussi. C'est très compliqué de faire tout seul. Je pense que j'ai beaucoup bénéficié d'avoir un bon réseau de collaborateurs avec lesquels je m'entends bien, avec lesquels je trouve du plaisir à faire des maths, parce que ça c'est aussi important. Ça m'a fait développer aussi beaucoup d'amitiés au cours de ces années. Le meilleur côté, c'est quand on devient aussi copains avec les collaborateurs.

Avez-vous une autre passion dans la vie que les maths ou est-ce que vous ne faites que ça ?

Qu'est-ce que je fais dans la vie ? Bien sûr, j'aime les maths. Avec ma femme, on aime bien se balader par exemple dans la campagne. J'aime bien

aller jouer au basket avec des copains. À Zürich j'ai encore du mal à trouver des copains pour aller jouer au football. J'aime bien le sport en général, je suis un supporter de la Roma, l'équipe de football. Le championnat de foot, c'est quelque chose qui m'amuse beaucoup. Et en général en plus de ça, j'aime le sport, j'aime sortir avec les copains, j'aime skier. Quand j'étais en France, à Nice, j'allais dans les Alpes. Je pense que c'est important d'avoir aussi d'autres choses. Il faut se vider la tête aussi pour faire des maths. C'est quelque chose que j'ai appris avec les années. J'aime bien mettre beaucoup d'énergie dans la semaine, et puis le week-end décontracter, me vider la tête et laisser un peu reposer pour être à fond lundi matin quand je retourne au bureau. Pour moi, avoir un équilibre dans ma vie, c'est très utile et très important.



Alessio Figalli est spécialiste du domaine du calcul des variations et des équations aux dérivées partielles. Étudiant en thèse sous la direction de Luigi Ambrosio et de Cédric Villani, il s'est particulièrement intéressé au transport optimal, aux équations de Monge-Ampère (en démontrant l'intégrabilité des dérivées secondes des solutions de ces équations) et a obtenu de nouvelles inégalités périmétriques et inégalités fonctionnelles. Il a également travaillé sur les EDP elliptiques et les problèmes à frontière libre, les équations d'Hamilton-Jacobi, et les matrices aléatoires. Extrêmement productif avec plus d'une centaine de publications, il a déjà reçu de nombreux prix.

Nous remercions Sébastien Gouëzel qui a assuré la retranscription de cet entretien.



Zome : un jeu de construction mathématique

Zometool, ou Zome, est un jeu de construction reposant sur la symétrie de l'icosaèdre et de ses « cousins » de dimension 4. À la fois facile et collaboratif, il permet de réaliser des structures rigides étonnantes et variées. Nous donnons un aperçu des principes mathématiques sous-jacents.

• F. GUÉRITAUD

Créé en 1992 et commercialisé par une société américaine¹, Zome est un jeu de construction à base de baguettes et de petits connecteurs en plastique. Les connecteurs, tous identiques, sont assimilables à des sphères percées de 62 trous, situés aux sommets, aux milieux des arêtes, et aux centres des faces d'un icosaèdre (figure 1.iii). Dans ces trous, qui sont de forme pentagonale, rectangulaire et triangulaire respectivement, peuvent venir se ficher des baguettes de section correspondante. Chaque baguette est ainsi faite que deux connecteurs fichés à ses extrémités aient toujours la même orientation dans l'espace. Les longueurs des baguettes ont 4 valeurs « magiques » (il y a deux types de baguettes pentagonales), permettant un très grand nombre de combinaisons exactes. Pour expliquer ces valeurs,

nous proposons un détour par les solides réguliers de dimension 3 et 4.

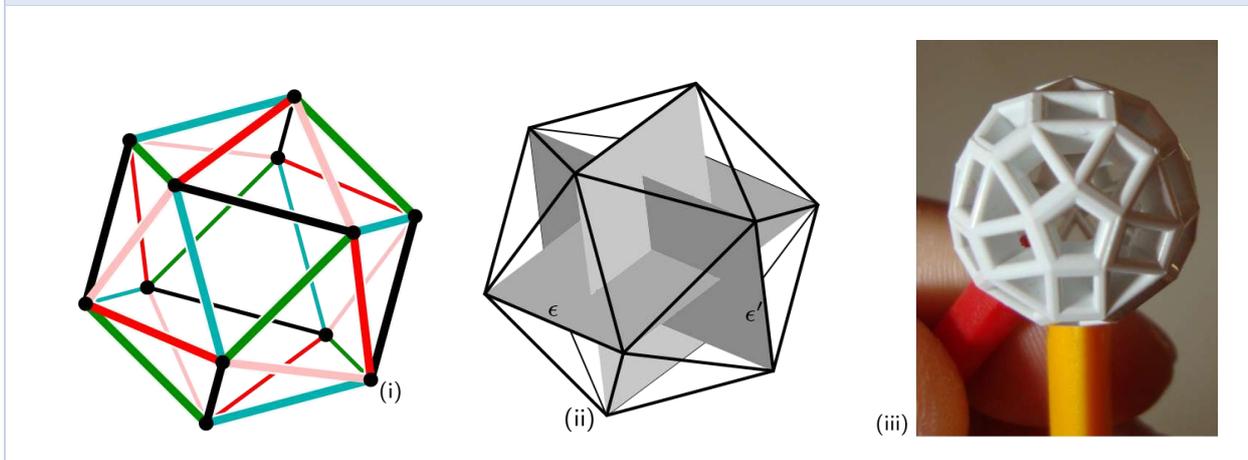
1. L'icosaèdre et son groupe de symétrie Γ

L'icosaèdre \mathbb{I} , connu au moins depuis l'Antiquité grecque, est un solide régulier de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 possédant :

- 12 sommets de valence cinq;
- 30 arêtes (Nb : deux arêtes parallèles sont toujours opposées);
- 20 faces triangulaires.

On peut placer les sommets de \mathbb{I} aux points $(0, \pm 1, \pm \tau)$, $(\pm 1, \pm \tau, 0)$ et $(\pm \tau, 0, \pm 1)$, où τ désigne le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$ (figures 1.i et ii).

FIGURE 1 – (i) un icosaèdre \mathbb{I} muni du coloriage des arêtes en 5 couleurs; (ii) trois rectangles inscrits de format $1 \times \tau$; (iii) le connecteur à symétrie icosaédrique percé de $12 + 30 + 20 = 62$ trous.



1. www.zometool.com (page en anglais). On y apprend que mouler les connecteurs par injection fut une petite prouesse de plasturgie...

Les symétries de \mathbb{I} (directes, i.e. respectant l'orientation) forment un sous-groupe Γ de $SO_3(\mathbb{R})$ d'ordre 60, isomorphe au groupe A_5 des permutations paires de 5 objets (voir l'encadré).

Permutations paires

La *parité* d'une permutation $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ est le signe (+ ou -) du produit $\prod_{1 \leq i < j \leq n} [\sigma(j) - \sigma(i)]$. Une permutation est paire (signe +) si et seulement si sa décomposition en cycles comprend un nombre pair de cycles de longueur paire. Dans le groupe symétrique S_5 à 120 éléments, il y a donc 4 classes de conjugaison paires : la classe triviale, les 3-cycles, les produits de deux 2-cycles, et les 5-cycles. Comme la permutation qui conjugue deux 5-cycles peut elle-même être paire ou bien impaire, cette dernière classe se scinde en deux classes de conjugaison dans le groupe A_5 à 60 éléments.

On peut matérialiser l'isomorphisme $\Gamma \simeq A_5$, par exemple, en cherchant des familles de 6 arêtes qui soient deux à deux parallèles ou perpendiculaires : il y a exactement 5 telles familles, dont l'une correspond par exemple aux petits côtés des trois rectangles inscrits de la figure 1.ii. Ces 5 familles sont disjointes, et colorées sur la figure 1.i. Elles sont permutées par Γ . Plus précisément, Γ comprend, outre l'élément identité :

- 20 rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$, fixant les centres de deux faces opposées de \mathbb{I} ;
- 15 rotations d'angle π , fixant les milieux de deux arêtes opposées de \mathbb{I} ;
- 12 rotations d'angle $\frac{2\pi}{5}$, fixant une paire de sommets opposés de \mathbb{I} ;
- 12 rotations d'angle $\frac{4\pi}{5}$, carrés des précédentes.

Cette partition de Γ est la partition en classes de conjugaison : deux rotations de même angle sont conjuguées dans $SO_3(\mathbb{R})$ (et, en fait, dans Γ) par une isométrie qui amène l'axe de l'une sur l'axe de l'autre. Par exemple, toute rotation est conjuguée à son inverse par une isométrie qui renverse son axe. On peut vérifier que ces différentes rotations agissent sur les cinq couleurs de la figure 1.i en les permutant selon les longueurs de cycles décrites dans l'encadré.

2. La 3-sphère et le groupe $SO_3(\mathbb{R})$

Un élément (non-trivial) de $SO_3(\mathbb{R})$ est une rotation ; il peut donc être décrit par trois paramètres réels : l'angle de rotation, et la direction de l'axe, vue elle-même comme un point de la sphère des directions donné par une latitude et une longitude. On dit que $SO_3(\mathbb{R})$ est une *variété de dimension trois*. Quelle est la forme, la topologie de cette variété ?

Fait. Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ s'identifie au quotient de la sphère unité tridimensionnelle $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ par l'application antipodale $z \mapsto -z$.

Cette identification est en fait un isomorphisme de groupes, quitte à munir la sphère unité $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ de la loi multiplicative des quaternions et à voir \mathbb{R}^3 comme l'espace $V := \langle i, j, k \rangle$ des quaternions « imaginaires purs ».

Quaternions

L'algèbre non commutative \mathbb{H} des *quaternions* est l'espace euclidien de dimension 4 engendré par 4 vecteurs $1, i, j, k$, formant une base orthonormée et soumis aux relations $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$. Associatives, ces relations sont invariantes par toute isométrie directe de l'espace tridimensionnel $V := \langle i, j, k \rangle \subset \mathbb{H}$.

Plus précisément, si $z = x + v \in \mathbb{R} \oplus V =: \mathbb{H}$ est de norme euclidienne 1, alors $\bar{z} := x - v$ satisfait à $z\bar{z} = \bar{z}z = 1$. Le morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{S}^3 &\longrightarrow SO(V) \simeq SO_3(\mathbb{R}) \\ z &\longmapsto [\varphi(z) : w \mapsto zw\bar{z}] \end{aligned}$$

est surjectif, de noyau $\{1, -1\}$ (la multiplication par -1 dans \mathbb{S}^3 étant justement l'application antipodale). Concrètement $\varphi(x + v)$ est une rotation de V , d'axe $\mathbb{R}v$ et d'angle

$$2 \arccos(x) = \pm 2 \arcsin(\|v\|) \pmod{2\pi}. \tag{1}$$

On peut donc dire que l'angle de rotation est déterminé par la partie réelle $x \in \mathbb{R}$, et la direction de l'axe par la partie imaginaire $v \in V \simeq \mathbb{R}^3$.

Enfin, le groupe $SO_4(\mathbb{R}) = \text{Isom}^+(\mathbb{S}^3)$ s'identifie à $(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3) / \pm$, via l'action $\pm(z', z) \cdot u := z' u \bar{z}$ pour $u \in \mathbb{S}^3$. L'image du plongement diagonal $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ (modulo \pm) est le stabilisateur du point $1 \in \mathbb{S}^3$, ou groupe d'isotropie $SO_3(\mathbb{R})$.

x	1	$\cos \frac{\pi}{5}$	$\cos \frac{\pi}{3}$	$\cos \frac{2\pi}{5}$	0	$-\cos \frac{2\pi}{5}$	$-\cos \frac{\pi}{3}$	$-\cos \frac{\pi}{5}$	-1	(2)
$ \Sigma_x^\Gamma $	1	12	20	12	30	12	20	12	1	
$\rho(\Sigma_x^\Gamma)$	0	$\sin \frac{\pi}{5}$	$\sin \frac{\pi}{3}$	$\sin \frac{2\pi}{5}$	1	$\sin \frac{2\pi}{5}$	$\sin \frac{\pi}{3}$	$\sin \frac{\pi}{5}$	0	
$\langle \Sigma_x^\Gamma \rangle^c$.	 $\parallel \frac{\pi}{5}$							.	

3. L'icosaèdre et les longueurs Zome

Si $\Gamma \subset \text{SO}_3(\mathbb{R})$ est le groupe des isométries directes de l'icosaèdre, la préimage

$$\widehat{\Gamma} := \varphi^{-1}(\Gamma)$$

est donc un sous-groupe fini de \mathbb{S}^3 à $2|\Gamma| = 120$ éléments. Par (1) les parties réelles de ses éléments sont les $\pm \cos \frac{\theta}{2}$ où θ est l'angle d'une rotation préservant l'icosaèdre : $\theta \in \{0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$. En notant $\Sigma_x^\Gamma := (x+V) \cap \widehat{\Gamma}$ l'ensemble des éléments de $\widehat{\Gamma}$ de partie réelle $x \in [-1, 1]$, et $\langle \Sigma_x^\Gamma \rangle^c$ son enveloppe convexe, inscrite dans une sphère de rayon $\rho(\Sigma_x^\Gamma) := \sqrt{1-x^2}$, on obtient le tableau (2) ci-dessus.

L'ensemble fini $\Sigma_x^\Gamma - x \subset V$ admet toujours une symétrie icosaédrique : par construction, c'est l'ensemble des directions des axes autour desquels \parallel (ou le connecteur) admet une symétrie de rotation d'angle $2\arccos(x)$. Plus exactement, quand $|\Sigma_x^\Gamma| = 12$ (resp. 20, 30), les points de $\Sigma_x^\Gamma - x$ sont situés dans les directions des trous pentagonaux (resp. triangulaires, rectangulaires), et $\langle \Sigma_x^\Gamma \rangle^c$ est donc un icosaèdre (resp. un dodécaèdre, resp. un *icosidodécaèdre* obtenu en tronquant les sommets de l'icosaèdre à hauteur du milieu de ses arêtes : dans (2) c'est le dessin du milieu).

Par exemple, le sommet $\{1\} = \Sigma_1^\Gamma$ a pour plus proches voisins les 12 points de $\Sigma_{\cos \frac{\pi}{5}}^\Gamma$, sommets d'un icosaèdre $\langle \Sigma_{\cos \frac{\pi}{5}}^\Gamma \rangle^c =: \parallel \frac{\pi}{5}$.

Définition 1. Les longueurs des baguettes Zome sont celles des vecteurs de $\Sigma_x^\Gamma - x \subset V \simeq \mathbb{R}^3$, soit les normes $\rho(\Sigma_x^\Gamma)$ des « parties imaginaires » :

- $\sin \frac{\pi}{5}$ ou $\sin \frac{2\pi}{5}$ pour les baguettes pentagonales ($|\Sigma_x^\Gamma| = 12$),

- $\sin \frac{\pi}{3}$ pour les baguettes triangulaires ($|\Sigma_x^\Gamma| = 20$),
- $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ pour les baguettes rectangulaires ($|\Sigma_x^\Gamma| = 30$)



(à ces longueurs il faut retrancher la taille du connecteur, puisque la baguette ne pénètre pas jusqu'en son centre : nous ferons ici abstraction de cette correction). Autrement dit, les points reliés par une baguette quelconque à un connecteur placé en $0 \in \mathbb{R}^3$ sont la projection de $\widehat{\Gamma}$ à V . Les baguettes sont en outre coloriées en rouge, jaune ou bleu selon la forme de leur section – cela facilite le tri.

Notons que la face triangulaire avant de la figure 1.i est renversée par rapport à la face arrière. Si les baguettes jaunes avaient la forme d'un long prisme, deux connecteurs reliés par une telle baguette n'auraient donc pas la même orientation dans l'espace. C'est pourquoi on donne aux baguettes jaunes la forme d'une paire de prismes reliés par un antiprisme (dessin ci-dessus); de même pour les baguettes rouges.

Pour résumer, il y a des bijections naturelles entre :

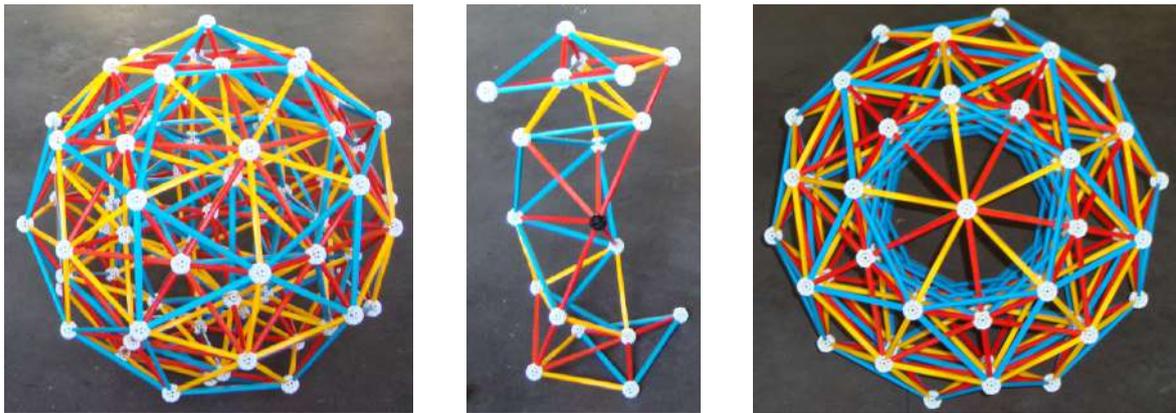
- les 4 types de baguettes;
- les 4 angles de rotation préservant l'icosaèdre;
- les 4 classes de conjugaison non triviales du groupe des permutations paires A_5 .

Le rapport de longueur des deux types de baguettes rouges est

$$\sin \frac{2\pi}{5} / \sin \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \tau \simeq 1,618...^{(2)}$$

2. Afin, entre autres, de permettre différentes échelles de construction, les longueurs disponibles dans chaque couleur sont encore complétées de manière à former une suite géométrique de raison τ . Dans cet article, nous nous contenterons cependant des 4 longueurs ci-dessus.

FIGURE 2 – À gauche et à droite : deux vues du modèle Zome de P_{600} . Au milieu : une colonne de tétraèdres extraite du modèle.



Définition. Un polytope P de $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{H}$ est *zomable* si, à une homothétie de P près, toute arête de P définit un vecteur appartenant à $\widehat{\Gamma}$.

Si un polytope est zomable, alors la projection de son 1-squelette (i.e. de l'union de ses arêtes) à $\mathbb{R}^3 \simeq V$ peut en principe être construite à partir de baguettes et de connecteurs. Dans la suite, nous allons montrer qu'une remarquable famille de polytopes réguliers et semi-réguliers sont zomables.

4. Le 4-polytope régulier à 600 cellules

L'enveloppe convexe P_{600} de $\widehat{\Gamma}$ a pour cellules ou « facettes » 600 *tétraèdres réguliers*, se rencontrant par 20 en chaque sommet : par exemple, chaque face triangulaire de l'icosaèdre $\mathbb{I}_{\frac{\pi}{5}}$ défini en (2) est la base d'un tétraèdre de sommet $\{1\} = \Sigma_1^{\Gamma}$ (figure 3.i). On arrive au chiffre de 600 en voyant par exemple que chacun des $|\widehat{\Gamma}| = 120$ sommets de P_{600} appartient à 20 tétraèdres, et que chaque tétraèdre a 4 sommets : $120 \cdot \frac{20}{4} = 600$. Le groupe

$$W_+ := (\widehat{\Gamma} \times \widehat{\Gamma}) / \pm \subset \text{SO}_4(\mathbb{R}),$$

d'ordre $120^2/2 = 7200$, agit sans noyau par isométries directes sur P_{600} , via l'action $\pm(\gamma', \gamma) \cdot u = \gamma' u \bar{\gamma}$ décrite au §2. Comme chaque tétraèdre admet 12 isométries directes, P_{600} admet *exactement* $600 \cdot 12 = |W_+|$ isométries directes (et pas plus).

Proposition 1. *Le polytope P_{600} est zomable.*

Preuve. Il suffit de montrer que chaque arête de P_{600} définit un vecteur de $\frac{1}{4}\widehat{\Gamma}$. Par transitivité de l'action isométrique de W_+ , il suffit de traiter une seule arête

de P_{600} . Par exemple, chaque arête de l'icosaèdre $\mathbb{I}_{\frac{\pi}{5}}$ est parallèle au segment reliant le centre de $\mathbb{I}_{\frac{\pi}{5}}$ au milieu d'une de ses arêtes (figure 1.ii), i.e. à un élément de $\Sigma_0^{\Gamma} \subset \widehat{\Gamma}$. \square

Les cellules de P_{600} se projettent à 600 tétraèdres de V . Ceux-ci ne sont pas réguliers : chacun est partiellement aplati, d'un facteur qui dépend de l'angle dièdre formé par V avec la cellule à projeter. On peut s'assurer qu'il en résulte 8 types de tétraèdres différents, dont un type dégénéré réduit à un triangle (figure 2).

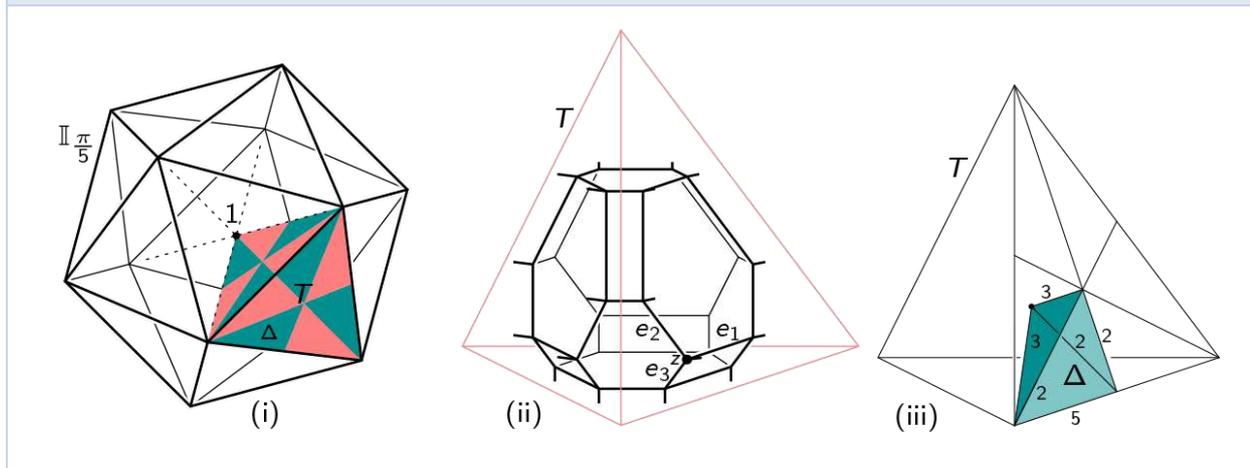
5. Polytopes semi-réguliers

Le groupe W de toutes les isométries de P_{600} , y compris indirectes, est d'ordre $2|W_+| = 14400$.

Pour décrire concrètement W , considérons une cellule T (tétraèdre régulier) de P_{600} . Rappelons que la *subdivision barycentrique* de T consiste à découper T selon les plans médiateurs de ses arêtes, en 24 petits tétraèdres deux à deux isométriques appelés *chambres*. Une chambre est donnée, par exemple, par l'ensemble des points de T dont les coordonnées barycentriques relatives à T sont rangées dans l'ordre décroissant (pour un ordre donné sur les sommets de T). Soit Δ une telle chambre : voir la figure 3.iii. Une isométrie de T est entièrement donnée par la chambre sur laquelle elle envoie Δ : il y a $4! = 24$ telles isométries.

En faisant la subdivision barycentrique de toutes les cellules de P_{600} , on trouve au total $24 \cdot 600 = 14400$ chambres. De nouveau, une isométrie de P_{600} est donnée par la chambre sur laquelle elle envoie Δ . On peut ainsi mettre en bijection W et l'ensemble des chambres.

FIGURE 3 – (i) Décomposition barycentrique d’une cellule tétraédrale T de P_{600} , et les 20 cellules partageant un sommet avec T . (ii) Enveloppe convexe d’une orbite $W \cdot z$, restreinte à T : les arêtes e_1, e_2, e_3 dans T sont parallèles à des arêtes de T . (iii) Chambre $\Delta \subset T$: une arête d’angle dièdre $\frac{\pi}{k}$ dans Δ_o est marquée k .



Numérotons de 1 à 4 les faces, ou *murs*, de Δ : le i -ème mur est opposé au sommet de Δ qui est barycentre de i sommets de T . Soient $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ les réflexions orthogonales par rapport aux hyperplans (linéaires) de \mathbb{R}^4 contenant ces murs. Les σ_i engendrent W : en effet, si $\Delta = \Delta_0, \Delta_1, \dots$ est une suite de chambres, Δ_k partageant son i_k -ème mur avec Δ_{k-1} , alors $\Delta_n = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_n} \cdot \Delta$ pour tout n .

La projection radiale $\mathbb{R}^4 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{S}^3$ envoie Δ sur un tétraèdre sphérique Δ_o d’angles dièdres $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, les deux premiers angles figurant sur deux arêtes opposées (figure 3.iii) : \mathbb{S}^3 est pavée par 14400 copies de Δ_o .

Une W -orbite typique $W \cdot z$ compte donc $|W| = 14400$ points, un par copie de Δ , soit 24 points par copie de T (figure 3.ii : « typique » signifie $z \in \text{Int}(\Delta)$). L’enveloppe convexe P' de $W \cdot z$ admet alors 4 orbites d’arêtes, celles des

$$e_i := [z, \sigma_i(z)]$$

où $1 \leq i \leq 4$, soit 28800 arêtes en tout. On dit aussi que le 1-squelette de P' est le *graphe de Cayley* de W pour les générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_4$. La direction de e_i , normale à l’hyperplan de réflexion de σ_i , est indépendante de z .

Fait. L’enveloppe convexe P' de $W \cdot z$ est zomable, pour un certain $z \in \text{Int}(\Delta)$.

Preuve. Montrons d’abord que pour tout $z \in \text{Int}(\Delta) \subset T$, chaque arête de P' est parallèle à un élément de

$\widehat{\Gamma} \subset \mathbb{R}^4$. Comme W agit par isométries sur $\widehat{\Gamma}$, il suffit de traiter les arêtes e_1, \dots, e_4 issues de z . Soient $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0$ les coordonnées barycentriques (ou « poids ») de z dans T . Pour $1 \leq i \leq 3$, les coordonnées barycentriques de $\sigma_i(z)$ dans T sont les mêmes que celles de z , à une permutation près de α_i et α_{i+1} : par conséquent, e_i est parallèle à l’arête de T reliant les sommets auxquels sont affectés ces deux poids.

Quant à e_4 , c’est un segment orthogonal à une face F de T . On peut supposer que les sommets de F sont $1 \in \mathbb{S}^3$ et les extrémités d’une arête ϵ de l’icosaèdre $\mathbb{I}_{\frac{\pi}{5}}$. Alors e_4 est parallèle au segment reliant les sommets des deux faces de $\mathbb{I}_{\frac{\pi}{5}}$ de base ϵ , lui-même parallèle à une autre arête ϵ' de $\mathbb{I}_{\frac{\pi}{5}}$ (figure 1.ii).

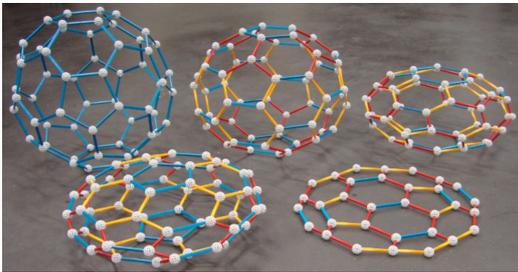
Ainsi les directions de e_1, \dots, e_4 sont celles d’arêtes de P_{600} , donc (proposition 1) d’éléments de $\widehat{\Gamma}$. Pour faire en sorte que toutes les arêtes de P' soient de même longueur, il reste à choisir $z \in \Delta$ équidistant des quatre faces de Δ_o : cela est possible parce que ces distances sont essentiellement des coordonnées barycentriques pour z relativement à Δ . \square

Le polytope P' ci-dessus, qui possède aussi 17040 faces et 2640 cellules, est encore homothétique à la somme de Minkowski (somme ensembliste) de tous les segments $[-q, q]$ où q décrit $\widehat{\Gamma} \subset \mathbb{R}^4$. Son modèle Zome a été construit à Londres en 2006.³

3. <http://homepages.wmich.edu/~drichter/bridgeszome2006.htm>

Mais P' n'est que le plus gros d'une famille de 15 polytopes P^Λ , indexés par une partie non vide Λ des sommets (étiquetés $\{1, 2, 3, 4\}$) de la chambre Δ : dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de Λ se trouve toujours un point z^Λ tel que l'enveloppe convexe P^Λ de $W \cdot z^\Lambda$ dans \mathbb{R}^4 soit zomable. Le 1-squelette de P^Λ s'obtient à partir de celui de P' en contractant les arêtes de $W \cdot e_i$, pour $i \notin \Lambda$. Les nombreux types de cellules de tous ces modèles Zome, dont beaucoup sont des transformations linéaires (aplatissements) les unes des autres comme sur la figure 4, donnent une idée de la foisonnante richesse de combinaison du jeu.

FIGURE 4 – Cinq aplatissements du ballon de football



En fait, z_Λ est le barycentre des sommets de T avec pour poids $\alpha_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda$ où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = ((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), \dots), (\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau})$. On a $P' = P^{\{1,2,3,4\}}$ et $P_{600} = P^{\{1\}}$. Le polytope dual de P_{600} , qui compte 120 cellules dodécaédriques se rencontrant par 4 en 600 sommets, est $P^{\{4\}}$ (figure 5).

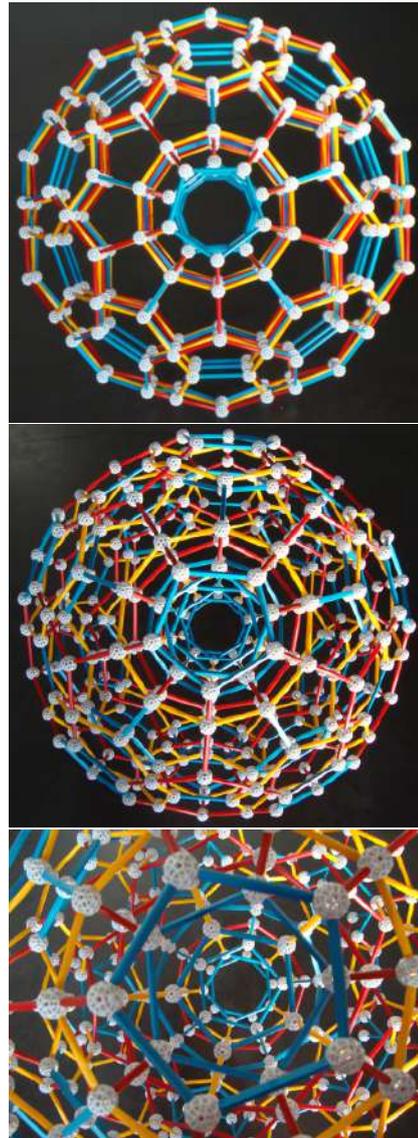
Les directions des arêtes de ces polytopes $P^\Lambda \subset \mathbb{R}^4$ vivent dans $\bar{\Gamma}$, et aucun élément de $\bar{\Gamma}$ n'est privilégié, par W -invariance. Aussi, les longueurs des projections à $V \simeq \mathbb{R}^3$ de ces arêtes suivent la statistique du tableau (2), i.e. des classes de conjugaison du groupe A_5 des symétries de \mathbb{I} :

- 12/60 (un cinquième) sont de longueur $\sin \frac{\pi}{5}$ et autant de longueur $\sin \frac{2\pi}{5}$,
- 20/60 (un tiers) sont de longueur $\sin \frac{\pi}{3}$,
- 15/60 (un quart) sont de longueur 1,
- 1/60 sont de longueur nulle, écrasées par la projection vers V .

Ces proportions (12, 12, 20, 15) sont approximativement respectées dans le modèle de la projection de P^Λ en baguettes Zome.⁴

4. Il faut en général un peu plus de baguettes de longueur 1 (bleues), car P^Λ peut avoir certaines arêtes incluses dans V – qui, au contraire de toutes les autres, ne seront pas identifiées par paires sous l'effet de la projection à V . Pour $P^{\{1,2,3,4\}}$, cette correction n'est pas nécessaire.

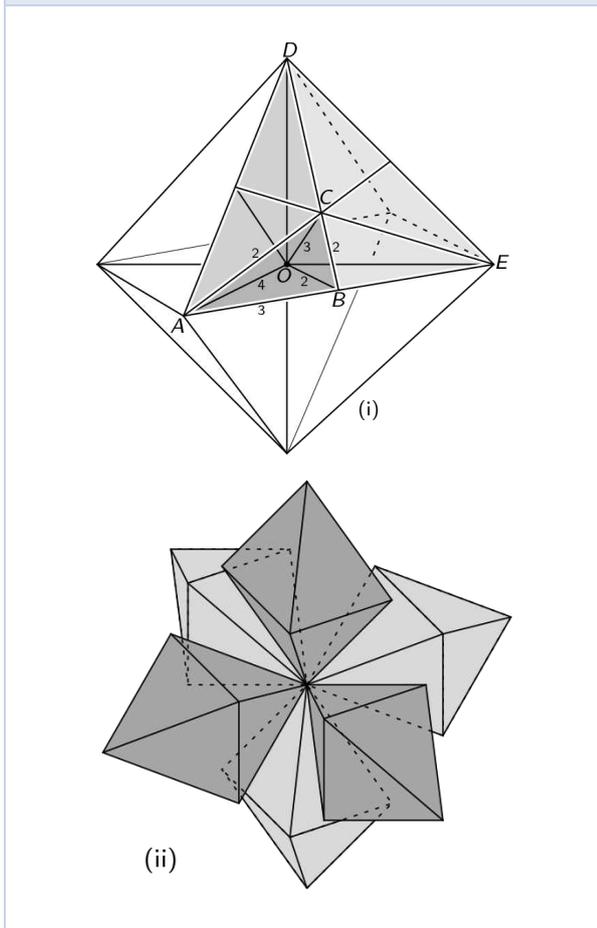
FIGURE 5 – Plusieurs vues de $P^{\{4\}}$



6. Arêtes vertes

Outre W , il y a quatre autres groupes finis engendrés par des réflexions qui agissent sur \mathbb{R}^4 sans fixer de sous-espace : le groupe à 120 éléments des symétries du simplexe (enveloppe convexe de 5 points équidistants de \mathbb{R}^4), qui est isomorphe au groupe symétrique S_5 , et trois groupes $W_1 \subset W_2 \subset W_3$ à 192, 384 et 1152 éléments.

FIGURE 6 – (i) Chambres $OABC \subset OABD \subset OAED$ pour $W_3 \supset W_2 \supset W_1$, dans une cellule octaédrique de P_{24} ; (ii) vue éclatée des six cellules de P_{24} incidentes à un sommet.



À conjugaison près, W_2 est le groupe des symétries de l'hypercube P_8 de sommets $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$, et W_3 celui du polytope régulier P_{24} à 24 cellules octaédriques, dont les 24 sommets sont $(0, 0, \pm 1, \pm 1)$ et ses permutations de coordonnées (figure 6). Là encore, les arêtes de l'enveloppe convexe P' d'une orbite sont toujours normales aux hyperplans de réflexion. On peut voir au cas par cas qu'à une conjugaison près,

- les angles formés par ces directions d'arêtes avec l'axe de première coordonnée dans \mathbb{R}^4 appartiennent tous à $\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$;
- les directions des projections de ces arêtes à V sont de la forme $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$, ou $(0, 1, 1)$ à permutation et changements de signes près.

En d'autres termes, pour construire les projections de ces polytopes P' à \mathbb{R}^3 , il suffit d'ajouter au système Zome les directions $(0, 1, 1)$ (les autres directions y sont déjà), et des baguettes de

longueur $\sin \frac{\pi}{4}$. C'est essentiellement ce que permettent de faire les baguettes vertes, qui se fichent dans les mêmes trous que les baguettes pentagonales (directions $(0, 1, \tau)$) mais sont légèrement coudees près de leurs extrémités afin de corriger la direction. Pour ne pas changer le groupe engendré additivement par tous les vecteurs possibles reliant deux connecteurs de \mathbb{R}^3 , le fabricant a décidé que les arêtes vertes seraient toujours de longueur $\sqrt{2}$ (multiplié par une puissance de τ , cf. note 2), de sorte que certains de ces polytopes ne sont pas réalisables dans leur version la plus symétrique.

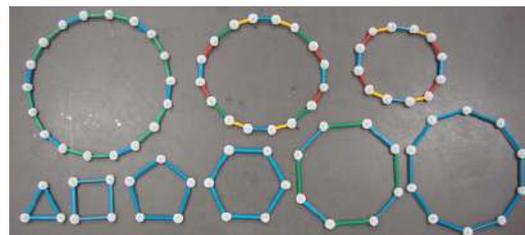
NB : les projections à \mathbb{S}^3 des 24 cellules octaédriques de P_{24} sont d'angles dièdres $\frac{2\pi}{3}$ et se rencontrent par 6, selon un motif à symétrie cubique, en chacun des 24 sommets (figure 6.ii). Si $\Gamma_{\Delta} \subset \Gamma_{\square}$ sont les groupes de symétrie du tétraèdre et du cube dans $SO_3(\mathbb{R})$, alors $\varphi^{-1}(\Gamma_{\square} \setminus \Gamma_{\Delta}) \subset \mathbb{S}^3$ est la projection sur \mathbb{S}^3 des sommets de P_{24} , tandis que $\varphi^{-1}(\Gamma_{\Delta})$ est la projection des centres de cellules. L'enveloppe convexe de ces derniers est une autre copie de P_{24} , qui est en ce sens auto-dual.

Conclusion

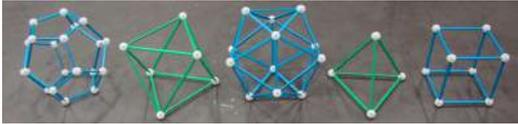
Le matériel peut être manipulé dès l'école primaire, mais même des mathématicien-ne-s étudiant-e-s ou professionnel-le-s y trouveront joie et profit, comme j'espère l'avoir fait apercevoir ici. Zome se prête particulièrement à des projets de construction collective, par exemple d'un des polytopes (semi)-réguliers décrits dans cet article, dans une classe ou dans un atelier public comme j'en anime parfois lors de la Fête de la science – surpris, chaque fois, par les créations des visiteurs.

Terminons par quelques images :

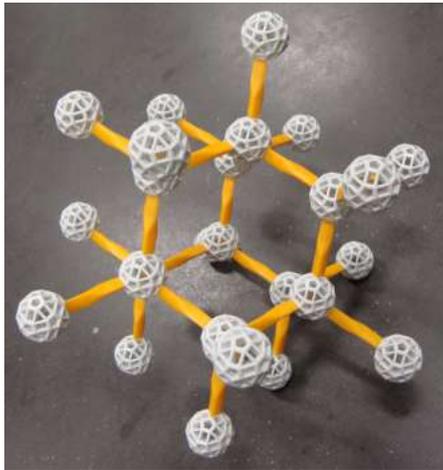
Polygones plans



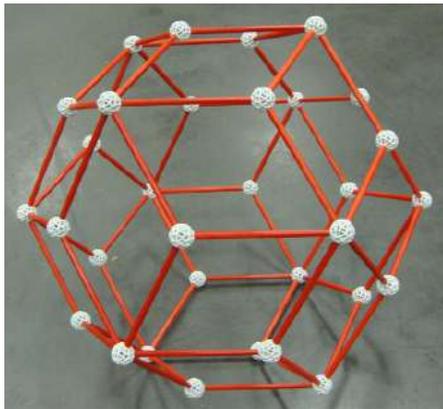
Solides platoniciens



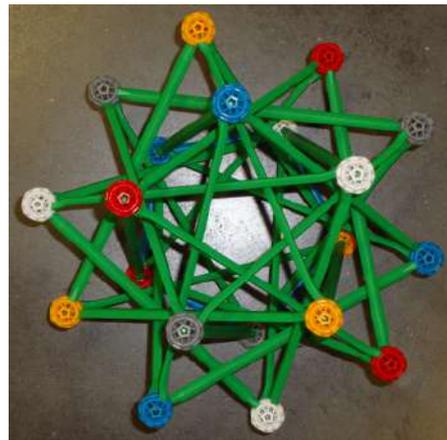
Structure cristalline du diamant



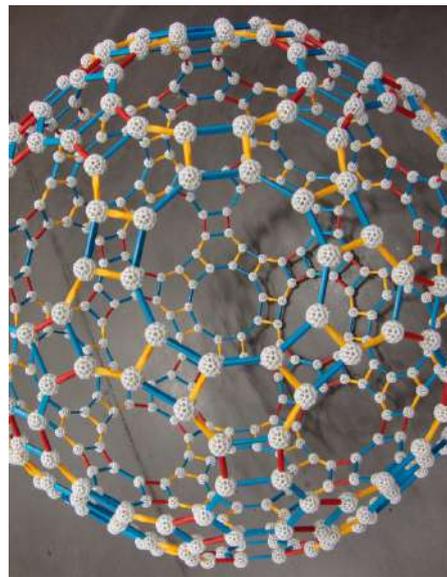
Rhomboèdre à 30 faces qui apparaît dans certains quasi-cristaux



Cinq tétraèdres inscrits dans un dodécaèdre, permutés par le groupe de symétrie A_5



Somme de Minkowski de tous les segments Zome



François GUÉRTAUD

CNRS / Université de Lille
francois.gueritaud@univ-lille.fr

François Guéritaud est chargé de recherche en mathématiques à Lille, spécialisé en géométrie et topologie de basse dimension.

Je remercie Gaël Benabou, Damien Gayet, Sophie Grivaux, Pallavi Panda, Barbara Tumpach et l'équipe de la Gazette pour leurs remarques sur des versions préalables de ce texte, et Claire Ropartz pour son aide avec les figures. Ce travail a bénéficié d'une aide de l'État gérée par l'Agence nationale de la recherche au titre du programme *Investissements d'avenir* portant la référence ANR-11-EQPX-0023 et soutenu par les fonds européens par le biais du programme FEDER SCV IRDIVE.



... les plongements de Nash-Kuiper

• V. BORRELLI

On a coutume d'appeler *plongement de Nash-Kuiper* tout plongement isométrique obtenu à partir des principes de construction exposés dans les années 50 par John Nash et Nicolaas Kuiper dans deux articles restés célèbres [22, 18]. Ces plongements ont immédiatement intrigué la communauté par leur faible régularité – seulement C^1 – et par le caractère paradoxal des objets géométriques qu'ils permettent de créer. Dans ce *Raconte-moi*, nous mettons plus particulièrement l'accent sur l'un d'entre eux : la *sphère réduite*.

1. La rigidité des sphères

On sait depuis 1900 et les travaux de Heinrich Liebmann que les sphères sont des objets rigides, elles ne peuvent être déformées isométriquement. On dit qu'une application de la sphère S^2 dans un espace euclidien E^3 est isométrique si elle préserve la longueur de toutes les courbes tracées sur S^2 . Si l'on s' imagine la sphère comme étant réalisée matériellement, la condition d'isométrie signifie que l'on ne s'intéresse qu'aux applications qui n'étirent ni ne contractent le matériau. Le résultat de Liebmann énonce que toute application isométrique de classe C^2 de la sphère dans l'espace euclidien tridimensionnel $E^3 = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est la restriction d'une isométrie globale de E^3 , c'est-à-dire d'un déplacement ou d'un anti-déplacement [20]. Ce résultat n'est pas propre à la sphère, Stephan Cohn-Vossen le généralise en 1927 aux *ovoïdes*, c'est-à-dire aux surfaces fermées sans bord et à courbure de Gauss strictement positive [8]. Il montre de plus que cette rigidité cesse dès que l'on ôte une portion quelconque de l'ovoïde. Autant qu'on puisse en juger, ces résultats sont conformes à l'expérience. Une balle de ping-pong est indéformable sauf à la « poquer » c'est-à-dire à réduire brutalement sa régularité à celle du continu. En revanche, elle devient légèrement déformable après la découpe d'une calotte¹. Si l'on admet en première approximation que le celluloid

n'est ni étirable ni contractile, cette déformation peut être considérée comme isométrique. Théorie et sens commun sont donc au diapason... mais cette belle harmonie ne va pas durer.

2. Le théorème de Nash-Kuiper

Les articles de Nash et Kuiper vont en effet ajouter quelques notes dissonantes et mettre en tension le couple théorie/intuition. Le responsable de cette disharmonie est le résultat suivant, obtenu en codimension supérieure à deux par Nash en 1954 puis étendu au cas de la codimension un par Kuiper en 1955 :

Théorème 1 (Théorème de Nash-Kuiper). *Tout plongement strictement court $f_0 : (M^m, g) \rightarrow E^q$ d'une variété riemannienne de dimension m dans un espace euclidien de dimension $q > m$ peut être approché au sens C^0 par un plongement C^1 -isométrique.*

Un plongement est dit *strictement court* si la longueur des courbes tracées sur la variété est strictement plus grande que celle des courbes images². Par exemple, si la variété riemannienne est la sphère unité S^2 alors toute homothétie de rapport $k < 1$ fournit un plongement court dont l'image est une sphère de rayon k . Le théorème affirme que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un plongement isométrique

1. Si vous réalisez l'expérience, n'hésitez pas à enlever une calotte relativement importante afin d'obtenir un résultat tangible.

2. Précisément, on demande $f_0^*(\dots) \leq K g$ où $0 < K < 1$ est constant.

$f_\epsilon : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ qui est ϵ -proche de f_0 au sens C^0 i. e.

$$\sup_{x \in \mathbb{S}^2} \|f_\epsilon(x) - f_0(x)\| \leq \epsilon.$$

En particulier, si ϵ est choisi tel que $k + \epsilon < 1$ alors l'application f_ϵ envoie isométriquement la sphère unité dans une boule de rayon $k + \epsilon < 1$.

Corollaire 1. *On peut plonger C^1 -isométriquement la sphère unité dans une boule de rayon arbitrairement petit.*

L'image de la sphère par un tel plongement est appelée une *sphère réduite* et sa simple existence constitue un pied de nez aux résultats de rigidité de Liebmann et Cohn-Vossen.

3. Vie et mort de la dimension de Janet

Un résultat célèbre de Hassler Whitney énonce que toute variété de dimension m admet un plongement C^∞ dans \mathbb{R}^{2m} , autrement dit, il existe une application $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ de classe C^∞ réalisant un homéomorphisme sur son image et dont la différentielle df_x en chaque point $x \in M^m$ est injective [26, 27]. Si la variété (M^m, g) est compacte, en faisant suivre ce plongement par une homothétie h de rapport suffisamment petit, l'application composée $f_0 = h \circ f$ est strictement courte et, d'après le théorème de Nash-Kuiper, tout choix de $\epsilon > 0$ fournit un plongement isométrique f_ϵ de cette variété riemannienne dans un espace euclidien de dimension $2m$. Ce fait est déjà en lui-même très étonnant puisque localement la condition d'isométrie fait apparaître $\frac{m(m+1)}{2}$ équations : si \mathcal{U} est un ouvert de \mathbb{R}^m et si $(g_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ sont les coefficients de la métrique g , alors $f : (\mathcal{U}, g) \rightarrow \mathbb{E}^q$ préserve la longueur des courbes si et seulement si pour tout $1 \leq i, j \leq m$ on a

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle = g_{ij}.$$

Génériquement, pour espérer avoir une solution au problème du plongement isométrique, on s'attend donc à ce que la dimension de l'espace d'arrivée q soit au moins égale au nombre de contraintes appelé *dimension de Janet* :

$$s_m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

3. Le résultat de Hilbert sera démontré en régularité C^2 par Nikolai Efimov en 1964 [21].

4. Dans le cas non compact, une simple homothétie ne suffit pas.

Et c'est effectivement ce qu'il advient dans le cas analytique. Ludwig Schläfli conjecture en 1871 que $q = s_m$ suffit pour le problème local [23], Maurice Janet et Élie Cartan le démontrent en 1927 [16, 6]. Mais là encore, le théorème de Nash-Kuiper vient tout bousculer. Au prix de la baisse drastique de régularité que constitue le passage de l'analytique à la classe C^1 , il substitue à la dimension de Janet, quadratique en m , une fonction linéaire.

4. Anémie d'une hypothèse métrique

La dissolution de la dimension de Janet met en évidence un point remarquable du théorème de Nash-Kuiper : l'hypothèse métrique – à savoir le caractère strictement court du plongement – est quasi-indolore. Elle disparaît complètement si la variété est compacte puisque, comme on l'a vu, seul compte dans ce cas l'existence d'un plongement. Si la variété est non compacte, Kuiper montre en 1959 que l'existence d'un plongement dans \mathbb{R}^q n'implique pas nécessairement celle d'un plongement strictement court dans \mathbb{E}^q . En revanche, il est toujours possible d'en obtenir un dans \mathbb{E}^{q+1} [17]. Dans le cas non compact, l'hypothèse métrique peut donc forcer l'ajout d'une dimension. Il s'avère que cet ajout n'est pas nécessaire pour une vaste famille de variétés non compactes et en particulier pour l'espace hyperbolique \mathbb{H}^2 . C'est la raison pour laquelle le théorème de Nash-Kuiper permet aussi de déduire l'existence d'un plongement isométrique C^1 de cet espace dans \mathbb{E}^3 , un résultat qui contraste une nouvelle fois avec ce qui était établi auparavant : l'impossibilité démontrée par David Hilbert en 1901 de plonger isométriquement l'espace hyperbolique de façon analytique³ [14].

5. Réductionnisme aiguë

Ainsi, que la variété (M^m, g) soit compacte ou non, il existe un plongement court f_0 de celle-ci dans \mathbb{E}^q avec $q \leq 2m + 1$. Choisissons un nombre $r > 0$ de préférence petit et considérons la boule ouverte $B(r)$ de rayon r de \mathbb{E}^q . Quitte à composer f_0 par un difféomorphisme strictement court⁴ $\varphi : \mathbb{E}^q \rightarrow B(r/2)$, on peut toujours supposer que l'image de f_0 est incluse dans une boule de rayon $r/2$. En prenant $0 < \epsilon < r/2$ dans le théorème de

Nash-Kuiper, on obtient un plongement isométrique C^1 de la variété dans une boule $B(r) \subset \mathbb{E}^q$. On peut donc non seulement réduire les sphères mais également toutes les variétés riemanniennes compactes ou non.

6. Courbure

Le théorème de Nash-Kuiper révèle que le monde des plongements isométriques se métamorphose complètement lorsque l'on place le curseur de la régularité sur la classe C^1 . Le point clé est que le *tenseur de courbure*, le plus célèbre des invariants de la géométrie riemannienne, nécessite deux ordres de dérivation pour être défini et que c'est lui qui, bien souvent, fournit la première obstruction à l'existence de plongements isométriques. À titre d'illustration, considérons le cas des sphères réduites. Une telle sphère est l'image par un plongement isométrique de la sphère unité dans une boule de rayon $r < 1$. Imaginons qu'une telle sphère existe en régularité C^2 et notons-la Σ^2 . Sous cette régularité, le tenseur de courbure existe et il est préservé par le plongement isométrique. La dimension étant deux, il se réduit à un seul nombre appelé la *courbure de Gauss*. Celle-ci vaut un pour la sphère unité et, puisqu'elle est conservée, elle vaut également un pour Σ^2 . Diminuons le rayon de la boule qui contient Σ^2 jusqu'à ce que son bord vienne toucher la sphère réduite. On montre, et c'est assez intuitif, qu'au point(s) de contact la courbure de Σ^2 doit être supérieure ou égale à la courbure de la sphère qui constitue le bord de la boule. Cette dernière courbure vaut $1/r^2$ où r est le rayon de la boule. Il faut donc nécessairement que $r \geq 1$, en contradiction avec notre hypothèse. En fin de compte, la courbure fait bel et bien obstruction à l'existence des sphères réduites en classe C^2 .

7. H-principe

En classe C^1 , l'absence d'un tenseur de courbure invalide le raisonnement précédent. Il reste malgré tout très étonnant qu'aucune autre obstruction n'apparaisse et que l'on puisse effectivement réaliser des sphères réduites. Cette constatation, ainsi que quelques autres relatives à différents domaines de la géométrie différentielle, seront la

source d'un questionnement qui conduira Mikhaïl Gromov à découvrir la notion de *h-principe*⁵ dans les années 70 [12]. Ce principe nomme une propriété des systèmes différentiels qui, lorsqu'elle est satisfaite, réduit la recherche de solutions à une question topologique. Le résultat de Nash-Kuiper montre que les équations aux dérivées partielles qui traduisent la préservation de la longueur satisfont au *h-principe*. C'est la raison pour laquelle, dans leur théorème, l'hypothèse métrique s'évanouit : l'existence d'un plongement isométrique se déduit de celle d'un simple plongement, c'est-à-dire d'un problème de nature essentiellement topologique⁶.

8. Le défaut isométrique

Comment ces plongements isométriques sont-ils construits par Nash et Kuiper ? Le point de départ est le plongement court f_0 que l'on va déformer itérativement pour réduire à chaque étape le *défaut isométrique* Δ . Voyons de quoi il retourne. La longueur d'une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow M^m$ tracée sur (M^m, g) est donnée par l'intégrale

$$\text{Long}(\gamma) = \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))^{\frac{1}{2}} dt$$

et celle de la courbe image par

$$\text{Long}(f_0 \circ \gamma) = \int_0^1 \langle df_0(\gamma'(t)), df_0(\gamma'(t)) \rangle^{\frac{1}{2}} dt.$$

Dans cette dernière intégrale, pour ne pas alourdir l'écriture, nous n'avons pas fait apparaître la dépendance au point $\gamma(t)$ de la différentielle df_0 . La différence $\Delta_x(\cdot, \cdot) := g_x(\cdot, \cdot) - \langle d_x f_0(\cdot), d_x f_0(\cdot) \rangle$ représente donc l'écart à la situation isométrique au point $x \in M^m$; on l'appelle le *défaut isométrique*. Notons que, puisque f_0 est strictement courte, Δ_x est un produit scalaire. Sur chaque carte $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ de la variété, ce défaut définit une application $\Delta : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$ à valeurs dans l'espace des formes bilinéaires symétriques définies positives de \mathbb{R}^m . Cet espace est un cône convexe ouvert de dimension s_m , la dimension de Janet, dans l'espace vectoriel $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}^m)$ des applications bilinéaires symétriques de \mathbb{R}^m . Son bord contient tous les carrés $\ell \otimes \ell$ où ℓ est une forme linéaire de \mathbb{R}^m ; une telle forme bilinéaire est en effet symétrique positive mais dégénérée. Considérons s_m formes linéaires $\ell_1, \dots, \ell_{s_m}$. L'ensemble de toutes

5. Le lecteur intéressé trouvera dans le numéro 122 de la *Gazette* (octobre 2009) un article consacré au *h-principe*.

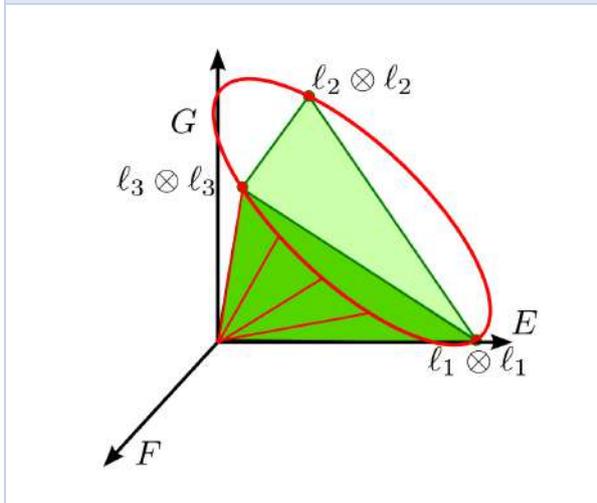
6. Exactement, la condition sur le rang de la différentielle se réduit, via un autre *h-principe* dû à Stephen Smale et Morris Hirsch, à un problème purement topologique [24, 15].

les combinaisons

$$\sum_{i=1}^{s_m} \rho_i \ell_i \otimes \ell_i$$

où les coefficients ρ_i sont strictement positifs est un sous-cône de $\mathcal{S}^+(\mathbb{R}^m)$. Pour simplifier, nous allons supposer qu'il existe un choix judicieux⁷ des $\ell_1, \dots, \ell_{s_m}$ tel que ce sous-cône soit ouvert et contienne l'image $\Delta(\mathcal{U})$.

Le cône $\mathcal{S}^+(\mathbb{R}^2)$ (en rouge) et le sous-cône engendré par trois carrés de formes linéaires (en vert) représentés dans l'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) = \{E dx \otimes dx + F(dx \otimes dy + dy \otimes dx) + G dy \otimes dy \mid (E, F, G) \in \mathbb{R}^3\}$.



Dans ce cas, pour tout $x \in \mathcal{U}$, le défaut isométrique s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients strictement positifs des $\ell_i \otimes \ell_i$:

$$\Delta_x = \sum_{i=1}^{s_m} \rho_i(x) \ell_i \otimes \ell_i.$$

Qu'a-t-on gagné? Une stratégie. Cette écriture suggère que pour réduire complètement le défaut isométrique, il suffit de corriger le défaut de longueur des courbes dans les s_m directions duales aux ℓ_i .

9. Corrugations

Commençons par faire disparaître le coefficient ρ_1 . Pour ce faire, on feuillette $f_0(\mathcal{U})$ par des courbes dont les vecteurs tangents sont perpendiculaires à $df_0(\ker \ell_1)$. Puis, en faisant osciller toutes ces

courbes dans la direction normale de façon à augmenter leur longueur, on déforme f_0 en une application $f_{1,1}$ dont le défaut isométrique ne comporte plus le terme $\ell_1 \otimes \ell_1$. C'est tout à fait possible car construire des courbes oscillantes dont la norme de la dérivée est prescrite ne pose pas de difficulté. On ajuste en même temps les fréquences de manière à obtenir des amplitudes d'oscillation compatibles avec la condition d' ϵ -proximité. L'effet des oscillations est de couvrir la surface de vagues à la manière d'une tôle ondulée. On appelle ces ondulations des *corrugations*, un terme introduit par William Thurston lors de ses travaux sur le retournement de la sphère [19]. Il ne reste plus qu'à itérer s_m fois pour obtenir une application f_{1,s_m} dont tous les termes du défaut isométrique ont disparu... sauf que cela ne marche pas! En effet, chaque nouvelle vague d'oscillations vient perturber les précédentes et réintroduit les termes d'erreur tout juste anéantis. L'amplitude de chacune de ces nouvelles erreurs est certes sous contrôle, elle est inversement proportionnelle à la fréquence des oscillations, mais en revanche on ne connaît rien sur son signe. Si celui-ci est négatif, il faut non plus allonger mais raccourcir les longueurs pour espérer faire disparaître l'erreur, or un tel raccourcissement est hors de portée d'une corrugation...

10. La gourmandise est un vilain défaut

Voici comment contourner cette difficulté : plutôt que de vouloir réduire le défaut isométrique directement à zéro, Nash préfère être moins gourmand et se contenter, au moyen des mêmes corrugations, de diminuer ledit défaut de moitié. Et ceci change tout. En effet, diviser chaque coefficient ρ_i par deux préserve leur stricte positivité ce qui autorise à poursuivre l'ajout de corrugations à l'infini. On obtient donc une suite d'applications $(f_{n,s_m})_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que

$$0 \leq \Delta(f_{n,s_m}) \leq \frac{1}{2} \Delta(f_{n-1,s_m}) \leq \dots \leq \frac{1}{2^n} \Delta(f_0).$$

Toutefois, le contrôle des perturbations induites par l'ajout de chaque corrugation nécessite de choisir des fréquences de plus en plus élevées ce qui, mécaniquement, force les amplitudes à être de plus en plus faibles. Cet accroissement des fréquences n'affecte pas la convergence C^1 des appli-

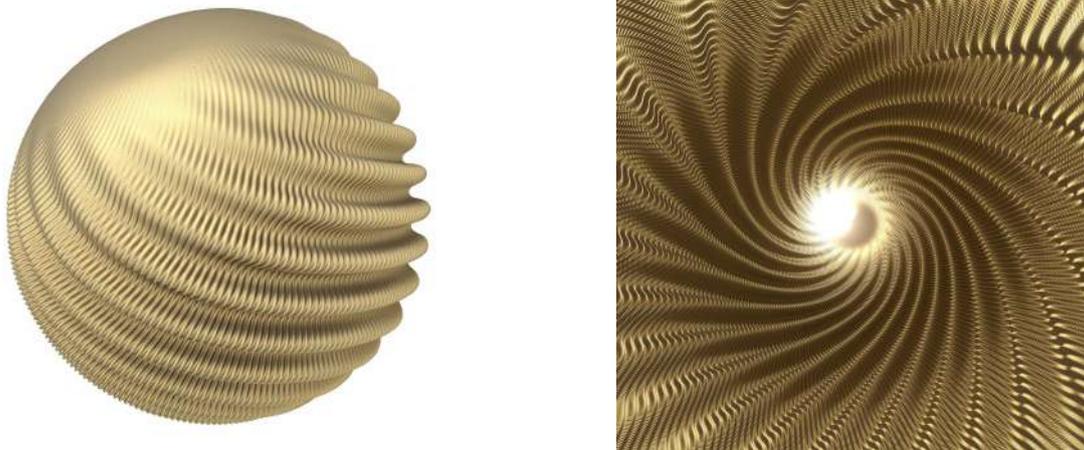
7. Un tel choix n'est évidemment pas toujours possible sauf à réduire la taille de \mathcal{U} .

À gauche, un plongement strictement court f_0 de la sphère unité ; à droite, le plongement $f_{1,1}$ obtenu après corrugation.



© Projet Hévéa

À gauche, une sphère réduite, son diamètre vaut environ la moitié de celui de la sphère unité ; à droite l'accumulation infinie des corrugations vue depuis l'intérieur de la sphère



© Projet Hévéa

cations f_{n,s_m} car on peut assurer par un choix convenable des paramètres la décroissance rapide des amplitudes des oscillations des dérivées premières. En revanche les amplitudes s'envolent pour les dérivées secondes et c'est la raison pour laquelle la convergence n'est pas de classe C^2 . L'application limite f_∞ , qui est évidemment isométrique, possède donc une régularité de classe C^1 .

11. Les fruits de Nash-Kuiper

Les plongements de Nash-Kuiper ont été à l'origine de bien des développements. La méthode de construction a inspiré à Gromov sa théorie de

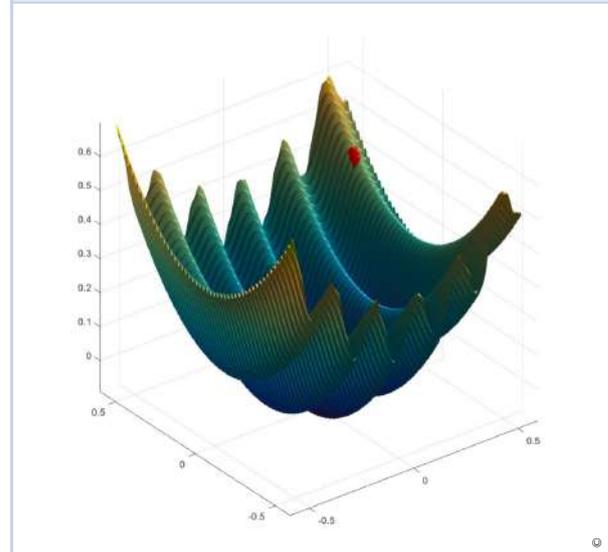
l'intégration convexe, un outil puissant pour résoudre certaines familles de relations différentielles et démontrer l'existence de h -principes [12]. La question de leur régularité $C^{1,\alpha}$ a conduit à conjecturer l'existence d'un réel $\alpha(m)$ dépendant de la dimension et donnant génériquement la régularité maximum. Parmi tous les travaux que cette question a motivés citons ceux de Yurii Borisov [3] en 2004 et ceux de Sergio Conti, Camillo De Lellis et László Székelyhidi [9] en 2012. Un lien inattendu entre l'existence des plongements C^1 de Nash-Kuiper et celle de solutions « sauvages » de l'équation d'Euler brisant la conservation de l'énergie – le fameux *paradoxe de Scheffer-Schnirelmann* – a été mis en évidence en 2010 par De Lellis et Szé-

kelyhidi [10, 11, 25]. Les travaux se poursuivent désormais en direction de l'équation de Navier-Stokes. Tout récemment, Marshall Slemrod et al. ont exploré une autre voie mettant directement en correspondance les solutions de l'équation d'Euler 2D incompressible avec des familles dépendant du temps de plongements isométriques de surfaces dans \mathbb{E}^3 . Leurs travaux suggèrent que l'on pourrait détecter le caractère sauvage d'une solution au moyen de la géométrie de la famille de surfaces duales [1]. La géométrie des surfaces de Nash-Kuiper a été décrite en 2012 par Saïd Jabrane, Francis Lazarus, Boris Thibert et moi-même. Elle a conduit à la mise en évidence de la structure C^1 -fractale : le plongement est C^1 mais le graphe de sa normale est un objet fractal [4]. Des expressions explicites des plongements de Nash-Kuiper ont permis de visualiser⁸ un tore plat [5] en 2012 et une sphère réduite [2] en 2017. Enfin, dans un travail non encore publié, Luca Codenotti et Marta Lewicka utilisent l'intégration convexe pour construire des solutions $C^{1,\alpha}$ de l'équation de Monge-Ampère. Les images qu'ils obtiennent devraient facilement vous convaincre qu'il existe un air de famille avec les plongements de Nash-Kuiper [7].

Bref, le sujet est en pleine ébullition. Dans un article récent intitulé *Geometric, Algebraic and Analytic Descendants of Nash Isometric Embedding*

Theorems, Gromov présente une cascade de questions ouvertes et prédit que « les plus intéressantes d'entre elles nécessiteront un afflux d'idées nouvelles » [13]. Plus de 60 ans après leur parution, les travaux de Nash-Kuiper n'ont certainement pas encore donné tous leurs fruits.

Image tirée de [7] et montrant une solution de l'équation de Monge-Ampère construite par intégration convexe



Références

- [1] A. ACHARYA et al. « Fluids, elasticity, geometry, and the existence of wrinkled solutions ». *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **226**, n° 3 (2017), p. 1009-1060.
- [2] E. BARTZOS et al. « An Explicit Isometric Reduction of the Unit Sphere into an Arbitrarily Small Ball ». *Foundations of Computational Mathematics* **18**, n° 4 (2018), p. 1015-1042.
- [3] Y. F. BORISOV. « Irregular $C^{1,\beta}$ -Surfaces with an Analytic Metric ». *Siberian Mathematical Journal* **45**, n° 1 (2004), p. 19-52.
- [4] V. BORRELLI et al. « Flat tori in three-dimensional space and convex integration ». *Proceedings of the National Academy of Sciences* (2012).
- [5] V. BORRELLI et al. « Isometric embeddings of the square flat torus in ambient space ». *Ensaïos Matemáticos* **24** (2013), p. 1-91.
- [6] É. CARTAN. « Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien ». *Ann. Soc. Polon. Math.* **6** (1927), p. 1-7.
- [7] L. CODENOTTI et M. LEWICKA. « Visualization of the convex integration solutions to the Monge-Ampère equation ». *arXiv preprint arXiv:1807.06730* (2018).
- [8] S. COHN-VOSSEN. « Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen. » *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.* **1927** (1927), p. 125-134.
- [9] S. CONTI, C. DE LELLIS et L. SZÉKELYHIDI. « H-principle and rigidity for $C^{1,\alpha}$ isometric embeddings ». In : *Nonlinear partial differential equations*. Springer, 2012, p. 83-116.
- [10] C. DE LELLIS et L. SZÉKELYHIDI JR. « The Euler equations as a differential inclusion ». *Annals of mathematics* (2009), p. 1417-1436.

8. Le lecteur pourra trouver de nombreuses images en haute définition sur le site du *Projet Hévéa* : <http://hevea-project.fr>

- [11] C. DE LELLIS et L. SZÉKELYHIDI. « On admissibility criteria for weak solutions of the Euler equations ». *Archive for rational mechanics and analysis* **195**, n° 1 (2010), p. 225.
- [12] M. GROMOV. *Partial differential relations, volume 9 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)[Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. 1986.
- [13] M. GROMOV. « Geometric, algebraic, and analytic descendants of Nash isometric embedding theorems ». *Bulletin of the American Mathematical Society* **54**, n° 2 (2017), p. 173-245.
- [14] D. HILBERT. « Ueber Flächen von constanter Gausssscher Krümmung ». *Transactions of the American mathematical Society* **2**, n° 1 (1901), p. 87-99.
- [15] M. W. HIRSCH. « Immersions of manifolds ». *Transactions of the American Mathematical Society* **93**, n° 2 (1959), p. 242-276.
- [16] M. JANET. « Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien ». *Annales de la Société Polonaise de Mathématique T. 5 (1926)* (1927).
- [17] N. H. KUIPER. « Isometric and short imbeddings ». *Indag. Math* **21** (1959), p. 11-25.
- [18] N. H. KUIPER. « On C^1 -isometric imbeddings. I ». In : *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*. Vol. 58. Elsevier. 1955, p. 545-556.
- [19] S. LEVY et W. P. THURSTON. *Making waves: A guide to the ideas behind Outside In*. Geometry Center, 1995.
- [20] H. LIEBMANN. « Über die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung ». *Mathematische Annalen* **53**, n° 1-2 (1900), p. 81-112.
- [21] T. K. MILNOR. « Efimov's theorem about complete immersed surfaces of negative curvature ». *Advances in Mathematics* **8**, n° 3 (1972), p. 474-543.
- [22] J. NASH. « C^1 isometric imbeddings ». *Annals of mathematics* (1954), p. 383-396.
- [23] L. SCHLÄFLI. « Nota alla Memoria del sig. Beltrami, «Sugli spazii di curvatura costante» ». *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1867-1897)* **5**, n° 1 (1871), p. 178-193.
- [24] S. SMALE. « A classification of immersions of the two-sphere ». *Transactions of the American Mathematical Society* **90**, n° 2 (1959), p. 281-290.
- [25] C. VILLANI. « Le paradoxe de Scheffer-Shnirelman revu sous l'angle de l'intégration convexe ». *Séminaire Bourbaki, Astérisque* **332** (2010), p. 101-134.
- [26] H. WHITNEY. « Differentiable manifolds ». *Annals of Mathematics* (1936), p. 645-680.
- [27] H. WHITNEY. « The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$ -space ». *Annals of Mathematics* (1944), p. 220-246.



Vincent BORRELLI

Université Lyon 1
borrelli@math.univ-lyon1.fr

Vincent Borrelli est maître de conférence à l'université Claude Bernard-Lyon 1. Ses travaux portent sur les applications de l'intégration convexe.

Un grand merci à Roland Denis, Damien Gayet, Francis Lazarus et Boris Thibert pour leur relecture attentive et leurs remarques pertinentes.



Bilan 2018 du CNU section 26

L'actuel Conseil National des Universités (CNU) a été mis en place à la fin de l'année 2015 pour un mandat de quatre ans.

La section 26 est composée de 48 membres titulaires et de 48 membres suppléants, elle est chargée du domaine « Mathématiques appliquées et applications des mathématiques » et représente environ les trois cinquièmes des enseignants-chercheurs en mathématiques en France. Une présentation générale du CNU se trouve sur le site de la CP-CNU¹. La section dispose également d'un site propre².

1. Remarques générales

En 2018, trois changements sont intervenus dans le fonctionnement du CNU.

1. L'examen des demandes de CRCT (Congés pour Recherches ou Conversions Thématiques) a eu lieu en février, avec les demandes de qualification, au lieu de mai avec les demandes de promotion.
2. La procédure pour les qualifications a été dématérialisée, et la recevabilité des dossiers est maintenant décidée par le ministère. Ceci, du fait d'une application rigide des critères, et de certains malentendus, a entraîné le rejet de plusieurs dossiers de candidats qui auraient certainement été qualifiés.
3. Un nouvel échelon de la hors-classe des maîtres de conférences a été créé, pour lequel les promotions sont proposées par le CNU et les établissements.

Vous trouverez plus de précisions sur les points 2) et 3) dans ce bilan.

Il a été remarqué cette année que certains dossiers de qualification, promotion ou PEDR, comportent parmi leur liste de publications des articles parus dans des journaux dits « prédateurs », c'est-à-dire où la publication est payante et la procédure

de revue fictive. Ceci traduit une insincérité dans la présentation des travaux et ne peut que nuire au candidat. Seuls quelques dossiers sont concernés.

2. Suivi de carrière

Les sections 25 et 26 ont par un vote commun décidé de reconduire la décision prise en 2017 de ne pas mettre en place le suivi de carrière en 2018.

3. Bilan de la session qualifications

Les candidats ont connaissance des deux rapporteurs désignés par le bureau de la section, il est important de préciser que la décision de qualification, ou de refus de qualification, est le fait de la section dans son ensemble, le rôle des rapporteurs étant avant tout de présenter les éléments factuels du dossier, en particulier en liaison avec nos critères de qualification.

La section 26 a constaté que ses critères de qualification ne sont pas toujours connus, elle invite les candidats à les consulter sur les pages web mentionnées ci-dessus. Un nombre trop important de refus provient du fait que les dossiers ne comportent pas les informations nécessaires à leur évaluation.

En 2018 a été mise en place la procédure dite dématérialisée. Les candidats déposent leur dossier en ligne, la recevabilité des dossiers est étudiée par le ministère, au fur et à mesure du dépôt des pièces par les candidats et alors que les rapporteurs ont déjà accès au dossier. Plusieurs candidats ont vu leur dossier déclaré irrecevable bêtement, parce que manquait une attestation du diplôme de thèse, *le procès verbal ne suffisant pas* ou, dans le cas de candidats étrangers, du fait de l'absence de traduction du diplôme. Il est à noter qu'une traduction par le candidat lui-même est suffisante.

Le nombre de dossiers effectivement examinés par la section (333) a diminué d'environ 25% par

1. <https://www.conseil-national-des-universites.fr>

2. <http://cnu26.emath.fr>

rapport à l'année dernière (462), des explications possibles étant la mise en place de la nouvelle procédure, et le peu de postes mis au concours ces dernières années.

3.1 – Qualifications aux fonctions de Maître de conférences

Résultats de la session 2018. Nombre de dossiers : 412. Irrecevables ou non transmis : 79. Hors-section : 69. Non qualifiés : 15. Qualifiés : 249.

Le pourcentage de dossiers qualifiés parmi les dossiers examinés est de 75%, contre 85% en 2017, 67% en 2016, 69% en 2015.

Les dossiers avec thèse à l'étranger sont au nombre de 77 (94 en 2016, 81 en 2017), dont 51 qualifiés. Les demandes proviennent de 21 pays différents, dont le Mexique ou la Nouvelle-Zélande. Le pays le plus représenté est l'Italie avec 18 demandes (12 qualifiés), ensuite la Suisse et l'Algérie avec 7 demandes chacun (6 qualifiés pour la Suisse, 2 pour l'Algérie) et les USA avec 6 demandes.

Critères de qualification. Deux repères importants sont utilisés dans l'évaluation des dossiers, en particulier pour les candidats dont le parcours ne s'inscrit pas de façon canonique dans les thématiques de la section. D'une part l'aptitude à enseigner les mathématiques. D'autre part l'activité scientifique, qui dans les domaines d'application des mathématiques ne doit pas se limiter à une description de modèles classiques et une utilisation de méthodes et algorithmes éprouvés.

L'activité de recherche est évaluée à partir :

1. des travaux de la thèse en particulier à travers les rapports de thèses (ou s'ils n'existent pas tout autre document équivalent attestant de la qualité de la thèse). Pour les candidats titulaires d'un doctorat français récent, il est naturel d'attendre qu'un ou plusieurs membres du jury de thèse, et si possible un des rapporteurs, relèvent de la section du CNU dans laquelle le candidat demande la qualification.
2. des publications. Si la présence d'une publication dans une revue à comité de lecture n'est pas exigée pour les thèses de l'année, elle représente un élément d'appréciation décisif pour les thèses plus anciennes.
3. l'évaluation prend aussi en compte l'apport méthodologique en mathématiques, la mise

en place de modèles originaux, le développement de nouveaux algorithmes, la validation par des applications réalistes.

À noter : l'utilisation d'un outil mathématique standard dans un travail de recherche relevant d'une autre discipline n'est pas considéré comme suffisant à lui seul pour la qualification en section 26. (C'est en général ce critère qui entraîne le plus de refus de qualification). Les candidats qui s'estiment dans le champ « applications des mathématiques » sont encouragés à ne pas restreindre leurs candidatures de qualification à la 26^e section.

Par ailleurs le CNU s'attend à ce que les exigences précédentes sur l'activité de recherche soient aussi vérifiées sur les deux dernières années en cas de thèses datant de plus de deux ans (ceci est particulièrement examiné en cas de requalification).

Il est recommandé de rédiger le dossier de candidature en français.

3.2 – Qualifications aux fonctions de Professeur

Résultats de la session 2018. En ce qui concerne les PR, la répartition est la suivante.

Le nombre de dossiers était de 126 (147 en 2017), dont 99 qualifiés, 13 non qualifiés, 14 hors section.

Le pourcentage de dossiers qualifiés est de 78%, il était de 80% en 2017, 78% en 2016, de 77% en 2015.

L'examen des dossiers a révélé un nombre important de dossiers de requalification (28% contre 25% l'année dernière). Sur 36 dossiers de requalification, 31 sont qualifiés. Ceci est la traduction de l'embouteillage qui se forme depuis plusieurs années au niveau des recrutements PR.

Critères de qualification et recommandations aux candidats. Les points essentiels examinés dans un dossier de candidature à la qualification aux fonctions de Professeur sont les suivants : l'aptitude à enseigner les mathématiques jusqu'au niveau Master, l'activité et le rayonnement scientifiques, la démonstration d'une réelle autonomie scientifique, l'aptitude à l'encadrement et à la direction de recherches.

L'activité de recherche en mathématiques appliquées est évaluée selon plusieurs aspects.

1. Une production scientifique régulière et significative, qualitativement et quantitativement suffisante, sous forme d'articles publiés ou de logiciels (une attention particulière sera portée aux travaux postdoctoraux des quatre dernières années).
2. Le rayonnement, estimé entre autres critères par la participation aux colloques, les invitations dans les conférences internationales, les séjours à l'étranger, les collaborations internationales.
3. Les rapports de l'habilitation.

L'autonomie scientifique est en particulier évaluée par le nombre et la qualité des publications (hormis celles issues de la thèse), ainsi que la variété des thèmes abordés et leur nouveauté par rapport aux travaux de thèse.

La capacité à encadrer des doctorants est évaluée à travers l'expertise scientifique, l'autonomie, l'expérience d'encadrement ou co-encadrement de thèses ou de mémoires de Master...

En ce qui concerne les dossiers relevant pour une grande part d'une autre discipline que les mathématiques (informatique, biologie, physique, mécanique, traitement du signal...), le dossier doit faire clairement apparaître la contribution du candidat dans le domaine des mathématiques appliquées, et préciser la nature de l'apport des mathématiques au domaine d'application.

Le dossier de candidature doit être présenté avec soin et clarté. Il est demandé que les rapports préalables à la soutenance de l'HDR soient joints au dossier (quand ils existent et sont publics, ce qui est le cas des HDR françaises).

Pour les candidats étrangers non titulaires de l'HDR française, le CNU a l'obligation en cas de qualification de délivrer une dispense de cette HDR. Pour les candidats provenant d'un pays où existe un deuxième doctorat du niveau de l'HDR, il paraît souhaitable qu'ils l'aient obtenu. Par ailleurs il est recommandé de rédiger le dossier de candidature en français.

Dans tous les cas, le niveau du dossier scientifique reste un critère déterminant.

À noter cependant : la section est souveraine dans ses choix et ses délibérations ont lieu à huis clos. En aucun cas les critères décrits ci-dessus ne font l'objet d'une application automatique.

4. Promotions

Les candidatures se font par voie électronique et avant l'examen par le CNU les dossiers sont préalablement examinés par les conseils académiques des établissements qui émettent un avis sur les tâches administratives et l'activité d'enseignement des candidats. La section 26 du CNU a choisi de ne pas mettre d'évaluation sur les dossiers des candidats qu'elle ne propose pas à la promotion. Elle a donc transmis aux établissements l'avis suivant pour les candidats non promus « La section 26 du CNU ne souhaite pas émettre d'avis sur les candidats qu'elle ne propose pas à la promotion sur le contingent qui lui est attribué ». Pour les membres du CNU, la section indique à l'établissement qu'elle n'examine pas les dossiers de candidature à une promotion émanant de ses membres.

Chaque dossier est examiné par deux rapporteurs du CNU, désignés par le bureau, après consultation du bureau élargi. Pour les dossiers examinés plusieurs années consécutives par notre section, nous nous efforçons de choisir chaque année des rapporteurs différents.

Nous attirons l'attention sur les points importants suivants.

1. Les dossiers de candidature à une promotion doivent contenir un descriptif de l'ensemble de la carrière et *faire apparaître clairement les éléments nouveaux par rapport à la dernière promotion.*
2. En ce qui concerne l'encadrement doctoral, fournir pour chaque encadrement le taux d'encadrement de la thèse, son financement, le devenir du docteur, ses publications.
3. En ce qui concerne les conférences, distinguer les simples participations, posters, conférences invitées, invitations comme conférencier plénier.

De façon générale, chaque élément (publication, logiciel, responsabilité collective, activité pédagogique...) doit impérativement être décrit de façon suffisamment claire pour permettre sa juste prise en compte par la section.

À noter cependant : la section est souveraine dans ses choix et ses délibérations ont lieu à huis clos. En aucun cas les critères décrits ci-dessus ne font l'objet d'une application automatique.

Le bilan chiffré de la session promotions est résumé dans le tableau suivant :

	MCF HC	MCF EX	PR 1C	PR EX1	PR EX2
Promouvables	273	111	190	228	113
Candidats	92	76	93	85	43
dont Candidates	35	25	18	8	8
Promus	23	28	14	15	9
dont Promues	10	11	3	2	2
Âges min et max	38 - 59	59 - 67	35 - 52	43 - 52	43 - 63

4.1 – Promotions à la hors-classe des mcf

Liste des promus : Ailliot Pierre, Balac Stéphane, Bayen Terence, Boulakia Muriel, Brofferio Sara, Bry Xavier, Cardoulis Laure, Charve Frédéric, Cheze Guillaume, De Gournay Frédéric, Djellout Hacene, Dolean Victorita, Dupaix Cédric, Guérin Hélène, Guiol Hervé, Hausberger Thomas, Hocine Nacima, Ibazizen Mohamed, Mancini Simona, Petrov Adrien, Puig Bénédicte, Soury-Lavergne Sophie, Theret Marie.

Pour les promotions à la hors-classe, le CNU examine l'ensemble de la carrière des candidats. Outre le travail de recherche et l'activité d'enseignement, un investissement particulier dans le domaine pédagogique ou au service de la communauté scientifique est apprécié. Un objectif de ces promotions étant d'offrir une fin de carrière valorisée à des collègues méritants, le CNU est vigilant à une juste répartition des âges des collègues promus.

Promus au nouvel échelon MCF EX

Liste des promus : Aimar Marie-Thérèse, Allain Geneviève, Bahlali Khaled, Bailly Françoise, Barrère Rémi, Becar Jean-Paul, Beguin Maryse, Benhenni Karim, Bertrand Patrice, Cabassut Richard, Duceul Yves, Duvallet Jeanne, Fourati Sonia, Hamdan Doureid, Issard-Roch Françoise, Laydi Mohamed, Le Gruyer Yves, Merrien Jean-Louis, Morillon Jean-Paul, Najmi Mohammed, Postel Marie, Rahmania Nadji, Roubaud Marie-Christine, Schindler Ian, Sili Ali, Tchou Nicoletta, Truffert Annick, Zine Abdel-Malek.

L'effectif du nouvel échelon doit à terme représenter 10% de l'effectif du corps des MCF, cet effectif devant être atteint au bout de 7 ans. Cette année ont été proposées des promotions au titre de 2017 et de 2018. Le nombre de promotions proposées à l'avenir devrait donc être significativement plus faible.

La section a décidé, au moins pour cette première année, d'utiliser de façon importante mais non exclusive le critère de l'âge pour cette promotion. En effet la promotion d'un nombre important

de collègues trop jeunes tarirait les promotions proposées au terme des 7 années de mise en place du dispositif, celles-ci venant principalement des départs en retraite de collègues promus les années précédentes. Il nous a semblé qu'après quelques années la dynamique du système apparaîtrait plus clairement et permettrait des choix différents, en toute connaissance de cause.

Cette année le critère principal a donc été l'âge, choisi plutôt que l'ancienneté dans le grade MCF-HC. Ce critère a été modulé au vu de l'investissement des candidats dans tous les aspects du métier d'enseignant-chercheur, et également avec un souci de prendre en compte les difficultés particulières de la carrière des collègues femmes.

4.2 – Promotions à la première classe des PR

Liste des promus : Beauchard Karine, Bigot Jérémie, Bouveyron Charles-Henri, Breton Jean-Christophe, Choquet Catherine, De Coster Colette, Dereudre David, Dombry Clément, Garban Christophe, Ignat Radu, Magal Pierre, Mortazavi Iraj, Roberto Cyril, Schapira Bruno.

Pour l'examen des promotions à la première classe des Professeurs, le CNU dégage de chaque dossier de candidature les éléments suivants : domaine scientifique, âge et ancienneté comme Professeur, faits marquants de la carrière, distinctions scientifiques, activité et responsabilités pédagogiques, responsabilités diverses (direction d'équipe ou d'établissement, appartenance à différentes commissions...), activités éditoriales, direction de projets (type ANR, réseaux européens, GDR...), rapports de thèses ou d'HDR, invitations à l'étranger et dans des conférences internationales, activité scientifique (nombre et qualité des publications, communications), encadrement doctoral (thèses encadrées et devenir des docteurs).

Les candidats sont invités à mettre clairement ces éléments en avant dans leur dossier. Le CNU veille à une répartition équilibrée entre les sous-disciplines (analyse des EDP et analyse numérique, calcul scientifique, didactique, optimisation, probabilités, statistique), ce qui n'exclut pas les dossiers transversaux ou atypiques. Le conseil est attentif à une juste répartition des âges des collègues promus. Étant donnée la pression très forte sur ce type de promotion, en 2018 le conseil a privilégié les candidats qui étaient professeurs depuis au moins trois ans.

4.3 – Promotions au premier échelon de la classe exceptionnelle des PR

Liste des promus : Asselah Amine, Bardet Jean-Marc, Cardot Hervé, Carlier Guillaume, Chafaï Djilil, Coutin Laure, Giacomoni Jacques, Helluy Philippe, Klein Christian, Le Rousseau Jérôme, Masson Roland, Maume Véronique, Moisan Lionel, Rifford Ludovic, Rousset Frédéric.

Le CNU attend des candidats à une promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle qu'ils aient fait preuve de compétences exceptionnelles dans les différentes missions d'un professeur des universités, que ce soit par l'excellence de leurs travaux de recherche, ou en jouant un rôle majeur dans la communauté scientifique en termes d'encadrement, de diffusion, et de structuration de la recherche. Le conseil est attentif à une juste répartition des âges des collègues promus. Étant donnée la pression assez forte sur ce type de promotion, en 2018 le conseil a privilégié les candidats qui étaient professeurs de 1ère classe depuis au moins trois ans.

4.4 – Promotions au second échelon de la classe exceptionnelle des PR

Liste des promus : Agnan Christine, Debussche Arnaud, Francfort Gilles, Gamboa Fabrice, Garnier Jocelyn, Lepski Oleg, Liandrat Jacques, Maury Bertrand, Saint-Raymond Laure.

Parmi les candidats dont le dossier démontre une activité soutenue dans les différentes missions des professeurs d'université, le critère essentiel pour le changement d'échelon est l'ancienneté dans la classe exceptionnelle.

4.5 – Promotions hors CNU

Le bilan des promotions locales pour l'année 2018 n'est pas encore disponible. En 2017, il y a eu en promotions locales :

Promotions MCF Hors classe : Begout Pascal, Bertholon Henri, Devulder Alexis, Domelevo Komla, Gey Servane, Kettani Sedya, Mercier Sabine. Soit 7 promotions (contre 23 proposées par le CNU).

Promotions PR 1^{re} classe : Clautiaux François, Delon Julie, Gayraud Ghislaine, Giraud Christophe, Jacques Julien, Samson-Leclercq Adeline, Lescot Paul, Predda Christian, Richard Frédéric. Soit 9 promotions (contre 14 proposées par le CNU).

Promotions PR Classe Exceptionnelle, 1^{er} échelon : Barkatou Moulay, Broniatowski Michel, Delabaere Éric, Hoffmann Marc, Logak Elisabeth, Paoli Laetitia, Paragios Nikos, Prud'homme Christophe. Soit 8 promotions (contre 15 proposées par le CNU).

Promotions PR Classe Exceptionnelle, 2^e échelon : Chauvin-Almayrac Brigitte, Cohen Serge, Giacomini Giambattista, Goubet Olivier, Mischler Stéphane, Souplet Philippe, Vila Jean-Paul. Soit 7 promotions (contre 9 proposées par le CNU).

5. Attribution de semestres de congés pour recherches ou conversions thématiques

Cette année pour la première fois les semestres de CRCT étaient attribués en février, lors de la session qualifications, au lieu du mois de mai, lors de la session promotions.

Il y avait 19 demandes de CRCT pour les PR, et 57 pour les MCF, pour 10 semestres attribués (7 MCF et 3 PR). Une liste complémentaire ordonnée de 9 noms a été établie.

Liste principale : Lagnoux-Renaudies Agnès, Guérin Hélène, Ersoy Mehmet, Dardé Jérémie, Greff Isabelle, Giletti Thomas, Pautrat Yann, Comets Francis, Goubet Olivier, Lévy Thierry.

Liste complémentaire : 1. Vivier Laurent, 2. Ifimie Dragos, 3. Bonneau Florent, 4. Coutin Laure, 5. Picard Christophe, 6. Bousquet Pierre, 7. Jouan Philippe, 8. Rachdi Mustapha.

L'attribution d'un CRCT nécessite un projet scientifique de qualité, précis et clairement défini. Le CNU privilégie particulièrement les dossiers comportant des séjours scientifiques à l'étranger, des participations à des trimestres thématiques... Le conseil favorise également les candidats qui n'ont pas ou ont peu bénéficié de CRCT ou de délégations dans le passé, ainsi que les demandes suite à un congé maternité ou longue maladie.

Il est indispensable que les CRCT et délégations passées des candidats soient clairement mentionnés. Il est choquant que des collègues encore en délégation CNRS fassent une demande de CRCT sans le mentionner. Dans la constitution des dossiers, il est vivement recommandé d'inclure des copies de pièces à l'appui de ces projets : lettres d'invitation, programme des semestres...

6. Bilan de la session PEDR

Depuis 2014, ce sont les sections du CNU qui évaluent les candidats des établissements souhaitant faire appel au CNU : en 2017, toutes les universités l'avaient fait sauf 6 établissements (Clermont-Ferrand 1, Corte, Lille 2, Toulouse 1, Paris 6 et l'École pratique des hautes études). Le CNU 26 a dès le début estimé qu'il serait préférable que les PEDR soient évaluées par une commission distincte de celle évaluant les promotions. Hormis le président de section, aucun membre du CNU n'a participé à la fois à la session promotions et à la session PEDR en 2018.

Chaque section du CNU doit classer les candidats dans trois catégories désignées par les seuls quotas qu'elles représentent : « 20 % », « 30 % » et « 50 % ». Depuis cette année, toutes les sections du CNU sont tenues de respecter ces quotas dans chaque corps, ce que la 26^e faisait déjà.

Comme en 2017, la section a procédé à un examen séparé des dossiers de candidats ayant postulé trois fois sans succès à la PEDR. Nous avons à cette fin demandé aux candidats qui étaient dans cette situation de le mentionner explicitement dans leur dossier de candidature. Ces candidats ont été classés dans les catégories 20%, 30% et 50% en fonction des notes intermédiaires uniquement. Ceci concernait 10 dossiers MCF (sur 169), dont 4 ont été classés dans les 20% et 3 dans les 30%. Parmi les 141 dossiers PR, ceci concernait 3 dossiers, dont 2 ont été classés dans les 20%, et 1 dans les 30%.

En plus du classement dans une des catégories globales précédentes, chaque candidat se voit attribuer une appréciation A (De la plus grande qualité), B (Satisfait pleinement aux critères), C (Doit être consolidé en vue d'une prime) ou X (Insuffisamment renseigné) pour chacune des rubriques **P** : Publications / production scientifique, **E** : Encadrement doctoral et scientifique, **D** : Diffusion des travaux, **R** : Responsabilités scientifiques.

Le classement de chaque candidat dans une des catégories (« 20 % », « 30 % », « 50 % ») et les appréciations de chaque critère sont ensuite transmis aux universités qui décident souverainement de l'attribution éventuelle de primes et de leur montant. Les informations remontées des universités montrent une certaine disparité concernant l'utilisation des notes fournies par le CNU pour cette attribution finale. Globalement, en 2015, la totalité des candidats de 26^e section classés dans les 20% ont obtenu la prime, ainsi que 75% des candidats

classés dans les 30%.

L'évaluation est faite sur la période des quatre dernières années. En cas de congé maternité pendant cette période, l'appréciation porte sur les cinq années précédentes (plus s'il y a plusieurs congés dans la période).

6.1 – Fonctionnement de la section

L'examen des dossiers PEDR a eu lieu sur deux jours en mai. Il a été convenu que les membres du CNU présents ne s'exprimeraient pas sur les dossiers de candidats de leur établissement ni sur les candidats dont ils auraient été trop proches. Le bureau de la section avait nommé deux rapporteurs par dossier. L'un était proche de la spécialité du candidat, l'autre était un rapporteur commun à tous les candidats (dans certains cas tous les candidats PR ou tous les candidats MCF) d'un même établissement (ou plus largement d'un même site géographique), de manière à assurer une cohérence inter-disciplinaire et interne aux établissements.

Les quotas 20% et 30% ont été appliqués dans chaque corps MCF et PR. Par ailleurs les notes intermédiaires A, B, C ont été attribuées en tenant compte de l'ancienneté des candidats, par souci d'inclure dans le dispositif de façon équilibrée les enseignants-chercheurs à tous les stades de leur carrière, et de maintenir une certaine attractivité des postes de jeunes enseignants-chercheurs. Ceci conduit à un niveau d'exigence élevé pour les PR2 voire très élevé pour les PR1/PREX. Ce mode de fonctionnement n'est pas généralisé dans les autres sections du CNU.

Le niveau des dossiers déposés est globalement très bon et a conduit à classer dans les 30% plusieurs dossiers de recherche *de tout premier plan* et dans les 50% des dossiers de collègues *très actifs* effectuant bien leur métier selon les quatre critères. Être classé dans les 50% ne doit donc pas être interprété comme une appréciation négative, d'autant plus que de nombreux dossiers se situant à la limite des 30% sont de niveaux proches, et que donc l'ordre du classement entre eux comporte une part arbitraire inévitable.

Soulignons que des MCF récemment recrutés ont obtenu, cette année comme la précédente, des évaluations « 20% » ou « 30% », car la jeunesse de leur dossier a été prise en compte. Ils ne doivent donc pas hésiter à postuler.

La section a décidé d'attribuer les notes intermédiaires A, B, C sans tenir compte des quotas, afin

qu'elles reflètent réellement la valeur du dossier dans une catégorie donnée. Cela aboutit naturellement à ce que des dossiers ayant des notes intermédiaires excellentes aient une note globale décevante. C'est le reflet d'un niveau moyen des dossiers de candidature élevé, et ceci est accentué par le fait qu'une faible proportion de collègues postule. Par ailleurs les universités attribuent les PEDR selon des critères qui varient assez fortement, notamment en ce qui concerne l'utilisation des notes intermédiaires. Néanmoins nous n'en avons pas tenu compte pour attribuer ces notes, estimant que cela rendrait les avis du CNU illisibles.

6.2 – Résultats de la session

Il y a eu cette année 169 candidats MCF et 141 candidats PR (contre 195 MCF et 148 PR en 2017).

Sur les 195 candidats MCF il y avait 47 femmes. Il y a eu 10 femmes classées dans les 20% et 13 femmes dans les 30%. Sur les 141 candidats PR il y avait 16 femmes. Il y a eu 4 femmes classées dans les 20% et 4 femmes dans les 30%.

Il est important de noter qu'un congé de maternité pendant les 4 années précédant la candidature conduit à prendre en compte l'activité sur une période de 5 ans au lieu de 4. Les candidates doivent en tenir compte dans la constitution de leur dossier.

6.3 – Recommandations aux candidats

Le CNU 26 a rendu public sur le site du CNU <http://www.cpcnu.fr/web/section-26> et sur le site <http://cnu26.emath.fr/> des conseils aux candidats. En particulier il était précisé comment il serait tenu compte des rubriques P, E, D et R.

Ces quatre rubriques sont évaluées de manière différenciée suivant que le candidat appartienne à l'une des trois catégories suivantes : MCF, PR2 ou PR1-PREX, et selon l'ancienneté du candidat. Pour les maîtres de conférences récemment nommés les rubriques encadrement doctoral et responsabilités scientifiques n'ont en général pas grand sens.

Cependant, la présence d'éléments comme les encadrements de M2, co-encadrements de thèse, responsabilité d'un séminaire... sera un élément crucial d'appréciation pour certains jeunes MCF particulièrement actifs. De manière générale, pour les jeunes MCF, l'autonomie acquise par rapport au directeur/travaux de thèse est un élément d'appréciation important.

Les rubriques encadrement doctoral (E) et responsabilités scientifiques (R) sont particulièrement prises en compte pour les professeurs. L'absence de responsabilités administratives ou d'encadrement doctoral dans le dossier d'un PR2 et surtout d'un PR1-PREX est une anomalie qui peut éventuellement être compensée par une activité scientifique particulièrement brillante. Il est anormal qu'un PR ne prenne pas sa part d'activités administratives, la même analyse sera appliquée aux MCF « expérimentés » (recrutés depuis au moins 6 ans).

Comme dans le cas des dossiers de promotion, nous attirons l'attention sur les points suivants.

1. En ce qui concerne l'encadrement doctoral, il est important de fournir pour chaque encadrement le taux d'encadrement de la thèse, son financement, le devenir du docteur, ses publications.
2. En ce qui concerne les conférences, il faut distinguer les simples participations, posters, conférences invitées, invitations comme conférencier plénier.
3. De façon générale, chaque élément (publication, logiciel, tâche ou responsabilité collective, activité pédagogique...) doit être décrit de façon suffisamment claire pour permettre sa juste prise en compte par la section.

À noter cependant : la section est souveraine dans ses choix et ses délibérations ont lieu à huis clos. En aucun cas les critères décrits ci-dessus ne font l'objet d'une application automatique.

Le Bureau de la section 26

Rapport sur les sessions du CNU 25 pour l'année 2018

Le Bureau de la section 25 est composé comme suit.

- Président, Philippe Briet, université de Toulon;
- 1^{er} vice-président, David Hernandez, université Paris Diderot;
- Assesseur, Caroline Gruson, université de Lorraine;
- 2^e vice-président, Olivier Ruatta, université de Limoges;
- Assesseur, Gioia Vago, université de Dijon;
- Assesseur, Constantin Vernicos, université de Montpellier.

1. Le suivi de carrière

Pour rappel, en 2017, la section 25 et la section 26, après consultation de l'ensemble de leurs membres (titulaires et suppléants) avaient adopté la position suivante :

les sections CNU 25 et 26 ne feront pas le SDC tant que ses objectifs ne seront pas précisés et que des garanties suffisantes, sur la non-utilisation pour la modulation de service notamment, ne seront pas données.

Les bureaux des sections 25 et 26 ont décidé de consulter les sections (titulaires et suppléants) pour savoir s'il était opportun de revoir la position prise en 2017. Une consultation électronique a été organisée de manière anonyme à partir du 16 février 2018, les résultats du vote sont :

Non (il n'est pas utile de revoir la position de 2017),
nombre de voix : 148;

Oui (il est nécessaire de revoir la position de 2017),
nombre de voix : 15;

Nombre de votes blancs : 2;

Refus de vote : 0.

La section n'a donc pas organisé la session suivie de carrière.

2. Les qualifications

Les critères de qualification 2018 utilisés par la section sont identiques à ceux de 2017 et 2016 (cf. rapport d'activité 2016 <http://cnu25.emath.fr/comptes-rendus/rapport-2016-7.pdf>).

Pour 2018 la procédure de qualification a subi des modifications importantes à cause de l'introduction de la dématérialisation. En particulier la décision d'irrecevabilité des dossiers est prononcée par le Ministère sur la base des pièces dites obligatoires que les candidats doivent fournir lors du dépôt de leur candidature.

Lors de cette première mise en place un certain nombre de problèmes sont survenus, dus à une utilisation assez complexe de l'application GALAXIE ou encore au manque de précision concernant la caractérisation de certaines pièces exigées.

Cela a conduit à des situations regrettables, par exemple des dossiers d'un excellent niveau scientifique qui se retrouvent classés *non transmis* ou *irrecevables*. Malgré de nombreuses interventions de la section auprès de la DGRH, ces candidats n'ont pas obtenu leur qualification.

Pour cette raison la section a adopté la motion suivante.

2.1 – Motion 1 (procédure dématérialisée de qualification)

La section 25 du CNU constate une grande opacité dans la procédure dématérialisée de qualification aux fonctions de Maître de conférences et Professeur, décidée et mise en place par le MESRI. Elle conduit à écarter des candidats de très grande qualité pour des motifs non essentiels. Ces candidats ne pourront pas participer aux concours de recrutement des enseignants-chercheurs. Par conséquent la section 25 demande à ce que cette procédure fasse l'objet d'une révision en profondeur. Elle demande en particulier :

- la révision de l'ensemble des pièces obligatoires en concertation avec les sections ;
- que la décision d'irrecevabilité ne soit prise qu'après la consultation du Bureau de la section concernée ;
- la possibilité pour le candidat de corriger et de compléter son dossier sur la demande du Bureau de la section.

2.2 – Qualification aux fonctions de Maître de conférences

Il y avait 258 candidats dont 55 femmes à la qualification aux fonctions de mcf. Parmi ces dossiers, 24 dossiers ont été déclarés irrecevables par la DGRH et 1 dossier a été déclaré irrecevable par la section. Nous avons examiné les dossiers classés recevables mais aussi les dossiers irrecevables pour lesquels les rapporteurs avaient l'information nécessaire. Mais pour ces derniers la DGRH n'a pas confirmé leur qualification.

209 candidats ont été qualifiés, 19 candidats ont été déclarés hors section, 6 n'ont pas été qualifiés.

Il faut noter une stabilisation du nombre de candidats à la qualification mcf par rapport à 2017 : 258 candidats contre 259 en 2017. D'autre part le nombre de candidates a légèrement augmenté, il passe à 55 contre 37 en 2017.

2.3 – Qualification aux fonctions de Professeur

Le nombre de candidats à la qualification aux fonctions de Professeur était de 117, dont 17 femmes. Nous avons procédé de la même façon que pour la qualification aux fonctions de mcf. Il y avait 109 candidats dont le dossier était recevable. 103 candidats ont été qualifiés, 1 candidat a été jugé hors section et 5 candidats n'ont pas été qualifiés.

Le nombre de candidats à la qualification Professeur (117) est en augmentation par rapport à 2017 (98) et 2016 (88).

2.4 – Congés pour Recherches ou Conversions Thématiques (CRCT)

À partir de 2018, l'attribution des CRCT est couplée avec la session des qualifications. Nous devons attribuer 7 semestres pour 62 demandes. Nous avons utilisé les mêmes critères que les années précédentes toujours en considérant de manière prioritaire les demandes faites dans le cadre de retour de maternité.

Les 7 candidats suivants, dont 4 candidates, ont obtenu un CRCT de 6 mois : Féjot Jacques, Moreau Anne, Amiot Claire, Charollois Pierre, Geninska Slavyana, Morier-Genoud Sophie, Souafi Sofiane

Liste complémentaire : Moncourant François, Henn Hans Werner, Klopp Frédéric.

3. Les promotions

3.1 – Motion 2 (addendum déontologie et règles de déport)

Dans le cadre de la déontologie et des règles de déport, la section a voté en début de session un addendum à la motion sur son fonctionnement votée le 16 février 2016¹ : « Dans le cas d'une démission en cours de mandat, cette disposition s'étend pour une année à compter de la date de démission. »

3.2 – Avancement à l'échelon exceptionnel pour la hors classe du corps des Maîtres de conférences

On rappelle que le décret du 9 mai 2017 modifie le statut des Maîtres de conférences en procédant à la création d'un échelon terminal - appelé « échelon exceptionnel ». Les règles, ainsi que les critères d'évaluation pour l'accès à cet échelon, sont précisés par exemple dans le Bulletin Officiel 12 du 22 mars 2018. À titre exceptionnel le décret prévoit que les avancements au titre de l'année 2017 soient prononcés en 2018. La campagne d'attribution de l'échelon exceptionnel (B) au titre de 2017 se fera dans un même temps que celle de 2018, avec rattrapage de salaire pour les collègues qui seront nommés au 1^{er} septembre 2017.

1. Les membres titulaires et suppléants du CNU 25 ne pourront bénéficier ni d'une promotion ni d'un congé de recherche ou de conversion thématique au niveau du CNU durant leur appartenance au conseil. Ils peuvent néanmoins être candidats à une promotion ou un CRCT au niveau de leur établissement d'origine. Il est demandé aux membres du conseil, lors d'une éventuelle candidature à la promotion ou à un CRCT au niveau local, de préciser qu'ils ne postulent pas au titre du CNU en raison de la position affichée ci-dessus.

En tenant compte du fait que le passage à l'échelon B est automatique pour le corps des Agrégés et le corps des PR classe 2, et qu'il est contingenté pour les MCF, la section a voté à l'unanimité la motion suivante.

Motion 3 (échelon exceptionnel pour la hors classe du corps des Maîtres de conférences)

La 25^e section du CNU demande à ce que le passage à l'échelon exceptionnel de la Hors Classe du corps des Maîtres de conférences soit automatiquement attribué à l'ancienneté.

3.3 – Avancement à l'échelon exceptionnel pour la hors classe du corps des Maîtres de conférences

Pour l'attribution de l'échelon exceptionnel, en plus des critères habituels et du cadre défini par l'article 16 n° 2017-854, nous avons tenu compte de l'ancienneté et de l'âge des candidats.

Nous pouvions attribuer un total de 33 avancements à l'échelon B, dont 17 au titre de 2017 et 16 au titre de 2018, pour 68 candidats dont 11 femmes.

Les 33 candidats, dont 5 candidates, proposés à l'échelon B sont : Asch Joachim (18), Aubry Yves (18), Bardy-Panse Nicole (18), Benamor Hédi (17), Bouche Thierry (18), Boukhemair Abdesslem (17), Brouzet Robert (18), Cerri Jean-Paul (17), Chemla Sophie (18), Chen Guoting (18), Coornaert Michel (17), Ducrot François (18), El Amrani Mohamed (17), Esbelin Henri (17), Fabbri Jean (17), Iordan Andrei (17), Jebrane Moulay-Ahmed (17), Koseleff Pierre-Vincent (18), Laytimi Fatima (17), Malgoire Jean (17), Mardesic Pavao (18), Milhorat Jean-Louis (18), Nacheff Tardivel Valérie (18), Nervi-Gasparini Josiane (17), Nicoleau François (18), Pouyanne Nicolas (18), Ribeiro Carlos (17), Rolin Jean-Philippe (18), Rouleux Michel (17), Smati Abdelhakim (17), Vallin Jean-Michel (17), Vassalo Valerio (17), Zarrabi Mohamed (18).

3.4 – Promotion à la Hors Classe des Maîtres de conférences

Le nombre de candidats était de 54, dont 7 femmes. 17 candidats ont été proposés à la promotion, dont 3 candidates.

Liste des candidats retenus : Abbes Samy, Belliard Jean-Robert, Bertrand Jérôme, Biagioli Riccardo, Bourqui David, Charles Laurent, Florens Vincent, Genzmer Johann, Grosjean Jean-François, Haak Bernhard-Hermann, Hardouin Charlotte, Minguez Alberto, Rebolledo-Dhuin Marusia, Rond Guillaume, Souaifi Sofiane, Stalder Yves, Tumpach Alice Barbara.

3.5 – Promotion à la Première Classe des Professeurs

Le nombre de candidats était de 68, dont 11 femmes. 11 candidats ont été proposés à la Première classe des Professeurs, dont 2 candidates. Nous constatons toujours un trop faible nombre de promotions accordées par le ministère. Il est anormal que beaucoup de collègues ayant des dossiers scientifiques de grande qualité se retrouvent bloqués au passage PRC1.

Liste des candidats retenus : Chalendar Isabelle, Costantino Francesco, Hartmann Andreas, Hillairet Luc, Houdayer Cyril, Lanneau Erwan, Livernet Muriel, Marin Ivan, Ricard Éric, Salinier Alain, Van Leeuwen Marcus.

3.6 – Promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle des Professeurs

Le nombre de candidats était de 44, dont 3 femmes. 10 candidats ont été proposés à la promotion, dont 2 candidates.

Liste des candidats retenus : Amoroso Francesco, Ben Yaacov Itai, Benameur Moulay, Dat Jean-François, Fresse Benoît, Guédon Olivier, Mangolte Frédéric, Milonet Dal'bo Françoise, Tazzioli Rossana, Youssfi El Hassan.

3.7 – Promotion au deuxième échelon de la classe exceptionnelle des Professeurs

Le nombre de candidats était de 28, dont 2 femmes. 7 candidats ont été retenus, dont aucune candidate.

Liste des candidats retenus : Bavard Christophe, Biquard Olivier, D'Almeida Jean, Henn Hans-Werner, Le Merdy Christian, Sorger Christoph, Velickovic Bo-ban.

4. Session PEDR

Rappelons que nous devons attribuer à chaque candidature 4 notes intermédiaires et une note globale, choisies parmi les notes A, B ou C. Les 4 notes intermédiaires correspondent aux activités suivantes dans les 4 dernières années : P-Publications ; E-Encadrement ; D-Diffusion ; R-Responsabilités.

Les périodes d'arrêt de travail (congé maternité, de maladie...) ne sont pas prises en compte dans la période de référence d'évaluation.

La note finale est la seule pour laquelle le Ministère impose pour chaque corps les quotas suivants : au plus 20% de A du nombre total de candidatures, et au plus 30% de B du nombre total de candidatures.

Cette année nous avons 88 candidats PR dont 8 femmes et 117 candidats MCF dont 10 femmes. Ces chiffres sont moins bons que ceux des années précédentes ce qui implique une baisse du nombre de A et B dans les évaluations finales.

- 2017 : 102 candidatures PR et 133 candidatures MCF.
- 2016 : 107 candidatures PR et 111 candidatures MCF.

- 2015 : 86 candidatures PR et 88 candidatures MCF.

La section s'est basée sur les critères qu'elle avait déjà utilisés en 2017 et en 2016 (cf. rapport d'activité 2016 <http://cnu25.emath.fr/comptes-rendus/rapport-2016-7.pdf>). Nous avons attribué les notes globales suivantes :

- MCF : 23 A contre 26 en 2017 ; 35 B contre 41 en 2017
- PR : 18 A contre 21 en 2017 ; 26 B contre 30 en 2017

D'autre part nous rappelons que les sections du CNU ne donnent qu'une évaluation des dossiers, l'attribution des primes étant sous la responsabilité des établissements. Un des problèmes pour les sections, c'est qu'en général nous n'avons pas de retour sur les attributions effectives.

Comme chaque année, les membres de la section ont tenté de faire au mieux pour arriver au résultat le plus juste et le plus impartial possible. Néanmoins, les quotas A/B/C imposés ont obligé à des décisions difficiles. Dans ces conditions, être classé C, aussi bien pour les MCF que pour les PR, ne doit pas être considéré comme une appréciation négative du dossier par la section, mais simplement comme le résultat de choix difficiles et fortement contraints. Cela ne doit en aucun cas décourager les futures candidatures à la PEDR.

Le Bureau de la section 25

Forum 2018 des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens

• A. ESTRADE

Pour la 18^e fois, l'Association Femmes et Maths¹, en partenariat avec la Mission pour la place des femmes du CNRS, a organisé son Forum des Jeunes Mathématicien.ne.s². Les collègues du laboratoire de mathématiques de l'université d'Orléans, nouvellement fusionné avec celui de Tours sous le nom d'Institut Denis Poisson, ont ainsi accueilli une

soixantaine de participant.e.s, dans une ambiance sympathique et dans le magnifique cadre de l'Hôtel Dupanloup, du 28 au 30 novembre 2018. Le comité d'organisation, présidé par Marguerite Zani, était composé de Stéphane Cordier, Diara Fall, Christine Georgelin, Marie-France Grespier, Simona Mancini, Monique Pontier et Marina Ville. Sous le thème Ma-

1. <http://www.femmes-et-maths.fr/>

2. <https://forum18.sciencesconf.org/>

thématiques et Sciences du Vivant, des conférences plénières et des exposés courts donnés par des jeunes en cours de doctorat ou de post-doctorat ont permis à l'auditoire de découvrir comment les mathématiques se mettent au service de la biologie pour modéliser, prévenir, prédire, calculer, optimiser, coder des phénomènes complexes, et comment les mathématiques s'enrichissent de cette complexité. Les titres des conférences plénières sont éloquentes quant à la diversité des domaines mathématiques et la diversité des domaines d'application : « Localisation de sources en imagerie cérébrale » par Maureen Clerc (INRIA, Sophia Antipolis), « Nouveaux problèmes autour de l'agrégation et de la fragmentation des protéines » par Marie Doumic (INRIA, Sorbonne université), « Modélisation aléatoire de l'évolution des micro-organismes » par Sylvie Méléard (CMAP, École polytechnique), « Modèles de mélange pour la croissance de biofilms » par Magali Ribot (IDP, Orléans). Plusieurs interventions ont aussi été consacrées aux différents métiers des mathématiques, que ce soit dans les carrières académiques, la recherche publique, mais aussi l'entreprise, les métiers du conseil ou les postes en recherche & développement dans l'industrie et les instituts privés : Monique Pontier pour les carrières académiques, Vé-

ronique Maume-Deschamps au nom de AMIES³, Emeline Perthame (Institut Pasteur). Cette rencontre aurait pu ressembler à beaucoup d'autres, sauf que... les organisateurs étaient des organisatrices, les conférenciers pléniers des conférencières plénières, les orateurs des oratrices (en majorité). Des mathématiques de haut niveau au féminin ? C'est tout à fait possible. Qu'on se le dise ! Clémence Perronnet, sociologue (Centre Max Weber, ÉNS Lyon), Colette Guillopé et Didier Chavrier, chargé de mission parité à l'université d'Orléans, ont rappelé combien les sciences en général, et les mathématiques en particulier, accordent peu de place aux femmes et combien on manque de modèles féminins à proposer en exemples aux jeunes générations. Ils ont aussi montré comment les stéréotypes de genre agissent dès le plus jeune âge et conduisent finalement peu de femmes à faire une carrière en mathématiques. L'image du tuyau percé ou du plafond de verre ne fait que traduire la réalité : les femmes représentent la moitié de l'humanité, 61% des bacheliers généraux, 25% des maîtres de conférences et 11% des professeurs des universités en mathématiques fondamentales et appliquées. Et si on trouvait un modèle pour colmater les fuites ?

3. Agence pour les Mathématiques en Interaction avec les Entreprises et la Société.



Michel Raynaud

1938 - 2018

• L. ILLUSIE

Ce texte est la traduction d'un article paru dans le numéro de janvier 2019 (volume 66, numéro 1) des Notices of the American Mathematical Society. Nous remercions l'AMS pour son aimable autorisation de publier la traduction française dans ce numéro de la *Gazette*.



© Fred Hullin - COMPAS Université Paris-Sud

Michel Raynaud est né à Riom (Puy-de-Dôme) le 16 juin 1938. Ses parents, dont il est le fils unique, habitaient la station thermale de Châtel-Guyon, à quelques kilomètres au nord-ouest. Son père était menuisier, et sa mère, femme de ménage. Michel va à l'école primaire à Châtel-Guyon, puis au collège à Riom. Il effectue le reste de sa scolarité comme pensionnaire au lycée de Clermont-Ferrand. Il y prépare le concours d'entrée à l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, où il est reçu en 1958. J'y entre moi-même l'année suivante, et c'est là que nous faisons connaissance. Je me rappelle qu'il m'avait impressionné par l'aisance avec laquelle il avait assimilé le livre de Lang sur les variétés abéliennes et les premiers volumes des EGA [7, 6], qui venaient de paraître. Ce fut le début d'une amitié qui dura jusqu'à sa mort.

En 1961, il est reçu premier à l'agrégation. À l'issue d'une quatrième année à l'École, il est admis au CNRS, où il restera jusqu'en 1967. Entre-temps, il a rencontré Michèle Chaumartin, entrée à l'École normale supérieure de jeunes filles en 1958. Il l'épouse en 1962. Ils auront un fils, Alain, né en 1970, qui habite aujourd'hui en Californie, avec sa femme et ses deux filles.

En 1962, Michel et Michèle commencent à suivre le cours de Serre au Collège de France et le séminaire de géométrie algébrique de Grothendieck [37, 38, 39] à l'IHÉS. Grothendieck devient leur patron

de thèse, et ils contribueront à plusieurs de ses séminaires (SGA 3 et 6 pour Michel, SGA 1, 2 et 7 pour Michèle). Après avoir rejeté diverses suggestions que Grothendieck lui avait faites, Michel choisit son propre sujet pour sa thèse, et la soutient en 1968 [23]. Dans *Récoltes et semailles*, Grothendieck écrit : « Michel Raynaud prend une place à part, ayant trouvé par lui-même les questions et notions essentielles qui font l'objet de son travail de thèse, qu'il a de plus développé de façon entièrement indépendante; mon rôle de "directeur de thèse" proprement dit s'est donc borné à lire la thèse terminée, à constituer le jury et à en faire partie ». Il est nommé professeur à Orsay en 1967. Il y fera toute sa carrière, jusqu'à sa retraite en 2001.

de thèse, et ils contribueront à plusieurs de ses séminaires (SGA 3 et 6 pour Michel, SGA 1, 2 et 7 pour Michèle). Après avoir rejeté diverses suggestions que Grothendieck lui avait faites, Michel choisit son propre sujet pour sa thèse, et la soutient en 1968 [23]. Dans *Récoltes et semailles*, Grothendieck écrit : « Michel Raynaud prend une place à part, ayant trouvé par lui-même les questions et notions essentielles qui font l'objet de son travail de thèse, qu'il a de plus développé de façon entièrement indépendante; mon rôle de "directeur de thèse" proprement dit s'est donc borné à lire la thèse terminée, à constituer le jury et à en faire partie ». Il est nommé professeur à Orsay en 1967. Il y fera toute sa carrière, jusqu'à sa retraite en 2001.

Raynaud était modeste. Il n'aimait pas les honneurs. Il en recevra cependant plusieurs. En 1970, il est conférencier invité au Congrès international de Nice [33]. En 1987, le prix Ampère lui est décerné. Il est élu Membre correspondant de l'Académie des sciences en 1994. En 1995, il reçoit, conjointement avec David Harbater, le Frank Nelson Cole Prize, pour la démonstration de la conjecture d'Abhyankar. À l'occasion de son départ à la retraite, une conférence en son honneur intitulée *Algebraic Geometry and Applications to Number Theory* s'est tenue à Orsay du 18 au 22 juin 2001.

Raynaud était la figure emblématique de notre département. En 1976, il fonde l'*Équipe d'arithmétique et géométrie algébrique*, une unité associée au CNRS, dont il assure la direction jusqu'en 1983. Il m'en confie alors la responsabilité. En 1985, nous créons ensemble le SAGA (Séminaire d'arithmétique et géométrie algébrique), qui devient rapidement attractif, et est encore très actif aujourd'hui.

Raynaud arrivait à son bureau tous les matins à 7h. On venait de toute part le consulter, parfois de fort loin. Mais son travail de recherche ne l'empêchait pas de prendre l'enseignement très au sérieux. Il a enseigné à tous les niveaux, et dirigé dix thèses. Ses élèves se rappellent sa générosité, et son exigence de rigueur, empreinte de bienveillance. Modèles de clarté, ses cours ont marqué des générations d'étudiants. Il a été responsable du département d'enseignement pendant de nombreuses années. Avec Guy Henniart, il a mis en place une préparation à l'agrégation en deux ans, qui a connu un grand succès, et à laquelle ses anciennes étudiantes Lucile Béguéri et Renée Elkik, devenues ses collègues à Orsay, ont activement participé.

Raynaud a joué un rôle important dans le développement de nos relations avec le Japon et la Chine. Son étudiant chinois Xiao Gang, mort prématurément en 2014, a créé toute une école de géométrie complexe à Shanghai. Avec Tetsuji Shioda, Raynaud organise en 1982 une conférence franco-japonaise de géométrie algébrique à Tokyo et Kyoto [35], qui sera le point de départ d'une durable et fructueuse collaboration entre les géomètres algébristes des deux pays. Il se rendra plusieurs fois au Japon. Il ira aussi une fois en Chine, au printemps 2004. Dans le cadre d'un programme de coopération supervisé par Jean-Marc Fontaine, et avec l'aimable assistance de notre collègue chinois Yi Ouyang, Michel et moi avons alors donné un cours à l'université de Tsinghua, à l'issue duquel nous avons sélectionné des étudiants pour poursuivre leurs études à Orsay. Son dernier étudiant en thèse, Jilong Tong, est l'un d'eux. D'autres vinrent par la suite, et bon nombre d'entre eux sont maintenant professeurs d'université en Chine. Cet échange de 2004 en a suscité beaucoup d'autres depuis.

L'œuvre de Raynaud est vaste et porte sur de nombreux sujets. Je me bornerai à de brefs commentaires sur les points qui me paraissent les plus saillants.

1. La conjecture de Manin-Mumford

Raynaud a démontré la généralisation suivante de cette conjecture. Soit A une variété abélienne sur un corps algébriquement clos k de caractéristique zéro, et soit X un sous-schéma fermé intègre

de A . Notons T le sous-groupe de torsion de $A(k)$. Si $T \cap X(k)$ est Zariski dense dans X , alors X est translaté d'une sous-variété abélienne de A^1 . Raynaud traite d'abord le cas où X est une courbe [21], par des techniques de réduction modulo p^2 , puis le cas général [30], à l'aide de résultats de géométrie rigide tirés de son approche décrite dans la partie 3 ci-dessous.

2. La conjecture d'Abhyankar

Pour la droite affine X sur un corps algébriquement clos k de caractéristique $p > 0$, cette conjecture affirme que tout groupe fini G engendré par ses p -sous-groupes de Sylow est le groupe de Galois d'un revêtement étale galoisien connexe de X . Raynaud prouve ceci dans [27], à nouveau par des techniques de géométrie rigide tirées de son travail décrit dans la partie 3. Le problème lui avait été proposé par Serre, qui avait traité le cas où G est résoluble. Peu après, Harbater [10], à partir du travail de Raynaud, prouve le cas général de la conjecture d'Abhyankar (pour les courbes affines lisses sur k).

3. Un nouveau regard sur la géométrie rigide

Les espaces analytiques rigides sur des corps complets non archimédiens K ont été définis et étudiés par Tate en 1961. Ils ont fait l'objet de travaux de Kiehl quelques années plus tard. Vers la fin des années 60, Raynaud introduit une nouvelle façon de concevoir ces espaces, au moyen d'une catégorie de modèles formels, où certains éclatements, appelés « admissibles », sont inversés. Un exemple typique est sa construction de la *fibres générique* d'un schéma formel (plat, de présentation finie) sur l'anneau des entiers de K . Le dictionnaire qu'il établit entre géométrie formelle et géométrie rigide lui permet notamment de retrouver les résultats de Tate et de Kiehl par une simple application de techniques des EGA [7, 6]. Il l'utilisera dans [33] pour construire des uniformisations rigides des variétés abéliennes sur un corps de valuation discrète complet K ayant une réduction semi-abélienne sur l'anneau des entiers de K (généralisant la construction de Tate de la *courbe de Tate*), et, plus tard, pour des généralisations de cette construction aux 1-motifs sur K au sens de Deligne [16]. Ce point de vue, qui joue un rôle crucial ici, ainsi que dans les parties

1. La conjecture de Manin-Mumford concernait le cas d'une courbe plongée dans sa jacobienne.

1 et 2, a été extrêmement fécond, par exemple en cohomologie cristalline (théorie de cohomologie rigide de Berthelot) et en théorie de Hodge p -adique (théorème de Faltings de presque pureté et applications).

4. Platitude

Grothendieck a montré l'importance de la platitude en géométrie algébrique : les bonnes familles de variétés algébriques sont celles qui correspondent à un morphisme plat f entre schémas. De tels morphismes f , souvent assujettis à être en outre localement de présentation finie, font l'objet d'une étude systématique dans EGA IV [7], laquelle ne suffisait toutefois pas pour les fondements de la nouvelle approche de Raynaud à la géométrie rigide. Dans un long article en collaboration avec Gruson [34], Raynaud prouve que, si $f : X \rightarrow S$ est un morphisme de présentation finie, avec S quasi-compact et quasi-séparé, il existe un éclatement $g : S' \rightarrow S$ tel que le transformé strict $f' : X' \rightarrow S'$ de f soit plat (et que si f est plat au-dessus d'un ouvert U de S , on peut imposer à g d'être un isomorphisme au-dessus de U). Ce *théorème de platisation*, qui est au cœur de la théorie de Raynaud de la géométrie rigide, a eu beaucoup d'autres applications (c'est d'ailleurs l'article de Raynaud le plus souvent cité).

5. Foncteur de Picard et modèles de Néron

L'essentiel de ce travail a été réalisé dans les années soixante. Il reflète l'intérêt que Raynaud manifestait pour les variétés abéliennes depuis l'École, et l'influence de Grothendieck, qui, entre autres, lui avait proposé de traduire la construction de Néron des modèles de Néron dans le langage des schémas. Vers la fin des années cinquante, Grothendieck avait établi la représentabilité (par un schéma) du foncteur de Picard relatif $\text{Pic}_{X/S}$ pour tout morphisme $X \rightarrow S$ qui est projectif, plat, et à fibres géométriques intègres. Dans [31] Raynaud étudie le cas où S est un trait (spectre d'un anneau de valuation discrète), mais où les fibres géométriques ne sont plus supposées intègres. En particulier, pour une courbe propre et plate X/S , de

fibre générique lisse et géométriquement irréductible, il donne des conditions pratiques assurant que $\text{Pic}_{X/S}^0$ est la composante neutre du modèle de Néron A de la jacobienne de la fibre générique de X . Il donne aussi une description combinatoire du groupe des composantes connexes de la fibre spéciale de A en termes des composantes irréductibles de la fibre spéciale de X . Ces résultats ont eu d'importantes applications : ils jouent un rôle essentiel dans l'article de Deligne et Mumford [2]; ils interviendront plus tard dans l'analyse de l'arithmétique de la courbe modulaire $X_0(N)$ dans des travaux de Deligne-Mazur-Rapoport², et de Ribet (dans sa démonstration du fait que la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil implique Fermat [36]). On trouve une exposition détaillée de ces résultats, ainsi que du matériel pédagogique fort utile, dans le beau livre de Bosch, Lütkebohmert et Raynaud [1].

6. Schémas en groupes de type (p, \dots, p)

Raynaud a apporté plusieurs contributions à la théorie des schémas en groupes : dans sga 3 (Exp. XV, XVI, XVII) [38], et dans sa thèse [23], mais certainement la plus connue est son article [28] sur les schémas en groupes de type (p, \dots, p) , c'est-à-dire les schémas en groupes commutatifs, finis et plats annulés par un nombre premier p . Soit R un anneau de valuation discrète strictement hensélien, de caractéristique mixte $(0, p)$, d'indice de ramification absolue e , de corps des fractions K . Soient \bar{K} une clôture algébrique de K et $I = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ le groupe d'inertie. Les deux principaux résultats de Raynaud dans [28] sont les suivants :

- (a) pour $e \leq p-1$, si G est un schéma en groupes de type (p, \dots, p) sur R , alors tout quotient de Jordan-Hölder H de G est un schéma en espaces vectoriels sur un corps \mathbb{F}_{p^r} , l'inertie I agit de façon modérée sur le \mathbb{F}_{p^r} -espace vectoriel $H(\bar{K})$, par homothéties via un caractère $\mathbb{F}_{p^r}^* \rightarrow \mathbb{F}_{p^r}^*$, produit de caractères fondamentaux d'exposants $\leq e$. Ceci prouve une conjecture de Serre;
- (b) si G est un groupe p -divisible sur R , de hauteur h et de dimension d , de module de Tate $T = T_p(G_K)$, alors $\Lambda^h T = \mathbb{Z}_p(d)$, où $\mathbb{Z}_p(d) = T_p((\mu_{p^\infty})_K)^{\otimes d}$.

2. En particulier, pour la courbe modulaire $X_0(p)$, $p \geq 5$, le groupe des composantes connexes de la fibre spéciale en p du modèle de Néron de la jacobienne de $X_0(p)_\mathbb{Q}$ est, sur une clôture algébrique de \mathbb{F}_p , un groupe cyclique d'ordre le numérateur de $(p-1)/12$ [14, Appendix].

Ces résultats, qui sont indépendants, ont été très féconds. Par exemple, (b) a été utilisé par Faltings [8, 9] dans sa démonstration de la conjecture de Mordell pour borner la hauteur modulaire dans une classe d'isogénie de variétés abéliennes (Raynaud a donné des raffinements effectifs dans le séminaire Szpiro [26]).

7. Théorie de Cartier-Dieudonné et cohomologie cristalline

Dans sa démonstration du résultat (b) de la partie 6, Raynaud utilise la théorie de Cartier des groupes formels. Il y revient – ainsi qu'au foncteur de Picard – dans [15], où, pour R comme dans la partie 6³, et X/R propre et lisse, il fait une étude systématique du R -schéma en groupes propre $\text{Pic}_{X/R}^c$. Cela l'amènera à s'intéresser à la cohomologie cristalline et au complexe de de Rham-Witt des schémas propres et lisses sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$. Depuis la fin des années soixante-dix, on savait que le terme initial de la suite spectrale dite *suite spectrale des pentes* associée à ce complexe fournit, modulo p -torsion, des groupes p -divisibles, mais la structure de la p -torsion du terme initial restait mystérieuse. Nous l'explicitons dans [11] en termes de certains modules gradués sur un anneau gradué qu'on appelle maintenant *l'anneau de Raynaud*, une extension du classique anneau de Cartier-Dieudonné. Raynaud se vantait souvent, par jeu, de ne pas comprendre les suites spectrales. Il avait cependant découvert la propriété la plus profonde de la suite spectrale des pentes (et de sa partenaire, la *suite spectrale conjuguée*), qu'il avait suggéré d'appeler la *survie du cœur*. En dépit de son nom romantique, cette propriété est toujours trop technique pour pouvoir être décrite ici. La théorie fut ensuite considérablement développée par Ekedahl [3, 4, 5]⁴. D'autres applications géométriques et arithmétiques furent obtenues plus tard par Joshi et Milne-Ramachandran.

8. Géométrie des courbes et des surfaces

Dans [20] Raynaud donne le premier exemple d'une surface propre et lisse X sur un corps algébriquement clos k de caractéristique $p > 0$ pos-

édant un faisceau inversible ample \mathcal{L} tel que $H^1(X, \mathcal{L}^{-1}) \neq 0$, montrant ainsi que le théorème d'annulation de Kodaira ne s'étend pas à la caractéristique > 0 ⁵. Sa construction est basée sur certaines courbes étudiées par Tango. Des variantes relatives ont ensuite été développées en collaboration avec Szpiro, et de nouveaux exemples ont été donnés. Ces courbes sont appelées aujourd'hui *courbes de Tango-Raynaud*.

Vers le milieu des années soixante-dix, Raynaud a étudié les surfaces fibrées en courbes elliptiques ou quasi-elliptiques. Son travail est resté inédit, mais des notes ont circulé. Il intervient de manière essentielle dans les articles en collaboration avec Liu et Lorenzini [12, 13], où est prouvé le résultat suivant. Soient X une surface propre, lisse, et géométriquement connexe sur un corps fini k , $f : X \rightarrow V$ un morphisme propre et plat, à fibre générique lisse et géométriquement connexe, où V est une k -courbe propre, lisse, et géométriquement connexe. Alors :

- (a) (sous une certaine hypothèse nécessaire sur des invariants locaux numériques de f) les conjectures d'Artin-Tate et de Birch et Swinnerton-Dyer sont équivalentes;
- (b) si, pour un nombre premier ℓ , la partie de ℓ -torsion du groupe de Brauer $\text{Br}(X)$ est finie, alors l'ordre de $\text{Br}(X)$ est un carré. Cette dernière assertion résout une question longtemps ouverte.

Soit maintenant X une courbe propre, lisse et connexe, de genre $g \geq 1$, sur un corps algébriquement clos k de caractéristique $p > 0$, et notons $F : X \rightarrow X^{(p)}$ le morphisme de Frobenius relatif. Le faisceau $B \subset F_* \Omega_{X/k}^1$ des différentielles localement exactes est un fibré vectoriel de rang $p-1$ et pente $g-1$ sur $X^{(p)}$, qui était apparu dans la définition des courbes de Tango-Raynaud. Raynaud [29] montre que B admet un *diviseur thêta* $D \subset J^{(p)}$ (où J est la jacobienne de X), paramétrant les faisceaux inversibles L de degré zéro tels que $h^0(B \otimes L) \neq 0$. Ce diviseur D s'est avéré être un ingrédient essentiel dans la démonstration par Tamagawa [40] du fait que, sur une clôture algébrique de F_p , il n'existe qu'un nombre fini de classes, à isomorphisme près, de courbes lisses, hyperboliques, dont le groupe fondamental modéré est isomorphe à un groupe profini donné.

3. Supposé de plus complet et de corps résiduel algébriquement clos.

4. Voir [35, p. 20-72] pour un survol.

5. Mumford avait précédemment donné un exemple avec une surface normale singulière.

9. Séminaire Bourbaki

Raynaud a fait plusieurs exposés au séminaire Bourbaki, sur une large palette de sujets. Voir les références à la fin. Je terminerai sur une note plus personnelle. Raynaud adorait la nature. Son bureau à Orsay donnait sur les bois. Il y voyait parfois un écureuil roux bondir de branche en branche. Il gardait une amaryllis sur sa table de travail. Il avait, dans sa jeunesse, fait des ascensions avec Michèle dans les Alpes, principalement dans le massif de l'Oisans. Pendant près de quarante ans, ils étaient allés, chaque année, skier à Val d'Isère. À partir de la fin des années soixante, ils faisaient régulièrement de l'escalade avec Serre dans les rochers de Fontainebleau. Michel et Michèle jouaient au tennis trois fois par semaine. Il était resté en assez bonne santé, mais un jour, en novembre 2017, il se

sentit tout à coup désorienté, près de chez lui, à Palaiseau. Une IRM révéla une tumeur au cerveau, dont il fut opéré avec succès peu avant Noël. Pendant quelques semaines, il semblait avoir récupéré. Cependant, en février, son état se dégradait rapidement. Il dut être hospitalisé, sombra dans le coma, et mourut le 10 mars.

Jusqu'à ses derniers moments de conscience, sa vivacité intellectuelle et son sens aigu de l'humour sont restés intacts. Quand je lui ai rendu visite à l'hôpital, nous avons plaisanté à nouveau à propos des suites spectrales, dont il m'assurait qu'elles avaient fort heureusement disparu pendant l'opération, ainsi que des couronnes rigides, qu'il affectonnait, particulièrement celles d'épaisseur nulle, qui avaient joué un rôle clé dans sa démonstration de la conjecture d'Abhyankar.

Références

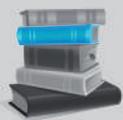
- [1] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT et M. RAYNAUD. *Néron models*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 21. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [2] P. DELIGNE et D. MUMFORD. « The irreducibility of the space of curves of given genus ». *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* 36 (1969), p. 75-109.
- [3] T. EKEDAHL. *Diagonal complexes and F-gauge structures*. Travaux en cours. Hermann, Paris, 1986.
- [4] T. EKEDAHL. « On the multiplicative properties of the de Rham-Witt complex. I ». *Arkiv för matematik* 22, n° 2 (1984), p. 185-239.
- [5] T. EKEDAHL. « On the multiplicative properties of the de Rham-witt complex. II ». *Arkiv för Matematik* 23, n° 1 (1985), p. 53-102.
- [6] *Éléments de Géométrie Algébrique*. Par A. Grothendieck (rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné). Grundlehren der mathematische Wissenschaften 166. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [7] « Éléments de Géométrie Algébrique ». Par A. Grothendieck (rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné). *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32 (1960-1967).
- [8] G. FALTINGS. « Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern ». *Inventiones mathematicae* 73, n° 3 (1983), p. 349-366.
- [9] G. FALTINGS. « Erratum: "Finiteness theorems for abelian varieties over number fields" ». *Inventiones Mathematicae* 75, n° 2 (1984), p. 381.
- [10] D. HARBATER. « Abhyankar's conjecture on Galois groups over curves ». *Inventiones mathematicae* 117, n° 1 (1994), p. 1-25.
- [11] L. ILLUSIE et M. RAYNAUD. « Les suites spectrales associées au complexe de de Rham-Witt ». *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* 57 (1983), p. 73-212.
- [12] Q. LIU, D. LORENZINI et M. RAYNAUD. « Néron models, Lie algebras, and reduction of curves of genus one ». *Inventiones mathematicae* 157, n° 3 (2004), p. 455-518.
- [13] Q. LIU, D. LORENZINI et M. RAYNAUD. « On the Brauer group of a surface ». *Inventiones mathematicae* 159, n° 3 (2005), p. 673-676.
- [14] B. MAZUR. « Modular curves and the Eisenstein ideal ». *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* 47 (1977), p. 33-186.
- [15] M. RAYNAUD. « " p -torsion" du schéma de Picard ». *Astérisque* 64 (1979). Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (juillet 1978) II, p. 87-148.
- [16] M. RAYNAUD. « 1-motifs et monodromie géométrique ». *Astérisque* 223 (1994). Périodes p -adiques (Bures-sur-Yvette, 1988), p. 295-319.
- [17] M. RAYNAUD. « Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes ». In : *Séminaire Bourbaki (1964/1965), Exposé 286. Dix exposés sur la cohomologie des schémas*. Advances and Studies in Pure Mathematics 3. North-Holland, Amsterdam, 1968, p. 12-30.

- [18] M. RAYNAUD. « Compactification du module des courbes ». In : *Séminaire Bourbaki (1970/71), Exposé 385*. Lecture Notes in Mathematics **244**. Springer-Verlag, Berlin, 1971, p. 47-61.
- [19] M. RAYNAUD. « Construction analytique de courbes en géométrie non archimédienne (d'après David Mumford) ». In : *Séminaire Bourbaki (1972/73), Exposé 427*. Lecture Notes in Mathematics **383**. Springer-Verlag, Berlin, 1974, p. 171-185.
- [20] M. RAYNAUD. « Contre-exemple au "vanishing theorem" en caractéristique $p > 0$ ». In : *C. P. Ramanujam - a tribute*. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics **8**. Springer-Verlag, Berlin, 1978, p. 273-278.
- [21] M. RAYNAUD. « Courbes sur une variété abélienne et points de torsion ». *Inventiones mathematicae* **71**, n° 1 (1983), p. 207-233.
- [22] M. RAYNAUD. « Faisceaux amples et très amples (d'après T. Matsusaka) ». In : *Séminaire Bourbaki (1976/77), Exposé 493*. Lecture Notes in Mathematics **677**. Springer-Verlag, Berlin, 1978, p. 46-58.
- [23] M. RAYNAUD. *Faisceaux amples sur les schémas en groupes*. Lectures Notes in Mathematics **119**. Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [24] M. RAYNAUD. « Familles de fibrés vectoriels sur une surface de Riemann (d'après C. S. Seshadri, M. S. Narasimhan et D. Mumford) ». In : *Séminaire Bourbaki (1966/68), Exposé 316*. Société mathématique de France, 1995, p. 45-60.
- [25] M. RAYNAUD. « Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl, ... » In : *Table ronde d'analyse non archimédienne (Paris, 1972)*. Bulletin de la Société Mathématique de France, Mém. 39-40. Société Mathématique de France, Paris, 1974, p. 319-327.
- [26] M. RAYNAUD. « Hauteurs et isogénies ». *Astérisque* **127** (1985). Séminaire sur les pincesaux de courbes elliptiques (la conjecture de Mordell), p. 199-234.
- [27] M. RAYNAUD. « Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar ». *Inventiones mathematicae* **116**, n° 3 (1994), p. 425-462.
- [28] M. RAYNAUD. « Schémas en groupes de type (p, \dots, p) ». *Bulletin de la Société mathématique de France* **102** (1974), p. 241-280.
- [29] M. RAYNAUD. « Sections des fibrés vectoriels sur une courbe ». *Bulletin de la Société mathématique de France* **110**, n° 1 (1982), p. 103-125.
- [30] M. RAYNAUD. « Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion ». In : *Arithmetic and geometry, vol. I*. Progress in Mathematics. Birkhäuser, Boston, 1983, p. 327-352.
- [31] M. RAYNAUD. « Spécialisation du foncteur de Picard ». *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* **38** (1970), p. 27-76.
- [32] M. RAYNAUD. « Travaux récents de M. Artin ». In : *Séminaire Bourbaki (1968/69), Exposé 363*. Lecture Notes in Mathematics **175**. Springer, 1971, p. 279-295.
- [33] M. RAYNAUD. « Variétés abéliennes et géométrie rigide ». In : *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), vol. 1*. Gauthier-Villars, Paris, 1971, p. 473-477.
- [34] M. RAYNAUD et L. GRUSON. « Critère de platitude et de projectivité ». *Inventiones mathematicae* **13** (1971), p. 1-89.
- [35] M. RAYNAUD et T. SHIODA, éd. *Algebraic Geometry, Proceedings, Tokyo/Kyoto 1982*. Lecture Notes in Mathematics **1016**. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [36] K. A. RIBET. « On modular representations of $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ arising from modular forms ». *Inventiones mathematicae* **100**, n° 2 (1990), p. 431-476.
- [37] *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA 1, 2, 3 (vols. 1 et 3))*. Dirigé par A. Grothendieck. Documents mathématiques **3, 4, 7, 8**. Société Mathématique de France, Paris, 2003-2011.
- [38] *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA 1, 3, 4, 5, 6, 7)*. Dirigé par A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics **151, 152, 153, 224, 225, 269, 270, 288, 305, 340, 589**. Springer-Verlag, Berlin, 1971-1977.
- [39] *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA 2)*. Dirigé par A. Grothendieck. Advanced Studies in Pure Mathematics **2**. North-Holland, Amsterdam, 1968.
- [40] A. TAMAGAWA. « Finiteness of isomorphism classes of curves in positive characteristic with prescribed fundamental groups ». *Journal of Algebraic Geometry* **13**, n° 4 (2004), p. 675-724.

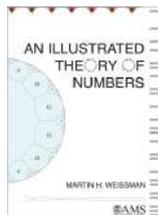
Luc ILLUSIE

Luc Illusie est professeur retraité à l'université Paris-Sud.

Je remercie Lucile Bégueri, Renée Elkik, Jean-Marc Fontaine, Nick Katz, Michèle Raynaud et Jean-Pierre Serre pour de précieuses remarques sur une version préliminaire de ce texte.



LIVRES



An Illustrated Theory of Numbers

Martin H. WEISSMAN

AMS, 2017. 323 p. ISBN : 978-1-4704-3493-9

Lecteur, arrête-toi cinq minutes : ce livre est un chef-d'œuvre, et je vais essayer de t'en convaincre. Au premier abord il s'agit d'un cours de théorie élémentaire des nombres comme il en existe pas mal sur le marché. Mais c'est surtout un très très beau livre que n'importe quel lecteur intéressé par les mathématiques aura du plaisir à feuilleter.

Le contenu n'est pas si original puisque le livre est avant tout conçu comme livre de cours, mais il est très cohérent et propose de jolis à-côtés. Ainsi commence-t-il par du dénombrement, puis la division euclidienne et les nombres premiers, mais les nombres constructibles et les entiers de Gauss apparaissent très vite, complétés par et comparés aux entiers d'Eisenstein (les nombres de la forme $a + jb$ pour a, b entiers, où j est une racine tierce de l'unité). La seconde partie traite d'arithmétique modulaire et de résidus quadratiques, et se termine sur une très jolie preuve (visuelle évidemment) de la réciprocité quadratique, à l'aide du lemme de Zolotarev. Enfin la troisième partie traite des formes quadratiques, en particulier de liens entre formes quadratiques et représentation des entiers. Pour cela il suit les idées de Conway (le topographe), et réussit à rendre encore plus accessible ce que Conway avait brillamment exposé dans *The sensual (quadratic) form*.

En quoi est-il original ?

Ce qui est franchement original, c'est la forme du livre. Le format, d'abord : grand, *US-letter*. Et surtout l'aspect visuel : des figures presque à toutes les pages, pour illustrer toutes les preuves, toutes les définitions. Il y en a de plusieurs sortes : des petits schémas qui complètent un argument, de grandes et belles figures qui prennent la moitié d'une page, ou bien encore des visualisations de données, par exemple sur les problèmes de répartition de nombres premiers ayant telle ou telle propriété. Ajoutons que le livre est rempli d'exemples et d'exercices qui doivent rendre son utilisation pédagogique très facile.

La mise en page est aussi sérieusement étudiée. Par exemple en mettant en regard sur deux pages opposées les propriétés des entiers de Gauss et de ceux d'Eisenstein. Sur la page suivante on a reproduit une double page mettant en regard la définition du déterminant 2×2 et la formule de Pick pour l'aire des polygones à sommets entiers.

Ce livre n'est pas le premier ni le seul à choisir ce chemin ultra-visuel (on peut penser aux divers livres de John Conway, à *Visual complex analysis* de Tristan Needham, *Elementary applied topology* de Robert Ghrist ou encore *A singular mathematical promenade* d'Étienne Ghys), mais assurément c'est l'un des plus beaux et des plus réussis.

Qui sera intéressé ?

Ce livre provient d'un cours enseigné plus de dix ans par l'auteur, au niveau de la licence. Les premiers chapitres (voire plus) sont probablement accessibles à un lycéen motivé. La suite est accessible à tout étudiant du supérieur. Elle contient d'ailleurs de belles preuves élémentaires qui raviraient sans

doute un jury d'agrégation. Mais l'ensemble est intéressant pour n'importe quel mathématicien, pour soit y apprendre de l'arithmétique, soit y trouver des idées sur comment l'enseigner. Ceux qui n'aiment vraiment pas les dessins vont peut-être souffrir en ouvrant ce livre. Ceux qui ne regardent que les dessins vont sans doute être ravis. Mais surtout l'ensemble est tellement travaillé et léché qu'il pourrait faire basculer une partie des indécis dans le camp de ceux qui pensent qu'un bon dessin est souvent le plus court chemin pour comprendre et retenir un bel argument.

THE DETERMINANT HAS A GEOMETRIC INTERPRETATION.

Theorem 9.5 (Area interpretation of the determinant) Let (x, y) and (z, w) be nonzero vectors. Suppose that the angle²⁸ swept out, counter-clockwise from (x, y) to (z, w) , is less than 180° . The determinant $ad - bc$ equals the area of the parallelogram with sides given by the vectors (a, b) and (c, d) .

²⁸In this theorem, we may take (x, y) and (z, w) to be vectors of real numbers; by the next page, $a, b, c,$ and d must be integers.

²⁹We give a proof which is valid for angles between 0 and 90° ; for angles between 90° and 180° , see the exercises.

PROOF: We dissect the rectangle of width $a + c$ and height $b + d$.

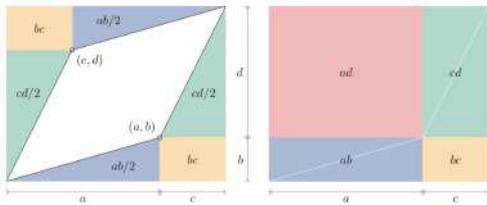
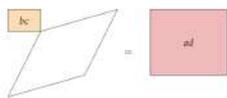


Figure 9.5: Two dissections of the same rectangle, with width $a + c$ and height $b + d$.

The blue triangles on the left add up to the blue rectangle on the right. The green triangles on the left add up to the green rectangle on the right. The yellow rectangles at the southeast corners are equal. Thus the remaining areas, a parallelogram and rectangle on the left, and a rectangle on the right, must be equal.



Subtracting bc from both sides demonstrates that the area of the parallelogram equals $ad - bc$.

What happens if (a, b) and (c, d) are vectors lying on the same line?²⁹ The parallelogram degenerates to a line segment, a figure with area zero. If (a, b) and (c, d) lie on the same line, $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$.

The pictured parallelogram lies on the counterclockwise sweep from (x, y) to (z, w) , and our area interpretation of the determinant is valid in this setting. If instead, the parallelogram lies in the clockwise sweep from (x, y) to (z, w) , then swap the vectors (x, y) and (z, w) , or equivalently, swap the signs of the determinant.

In any case, the absolute value of the determinant equals the area of the parallelogram.

²⁹Nonzero vectors (x, y) and (z, w) lie on a line if $(x, y) = k \cdot (z, w)$ for some number k . In this case,

$$\det \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = akb - aka = 0.$$

IMPOSING A GRID, we can compute area by counting dots.

Theorem 9.6 (Pick's theorem for parallelograms) On a unit grid, draw a parallelogram with corners at grid points. Then the area of the parallelogram equals $I + 1/2E + 1$, where I is the number of interior grid points, and E the number of grid points crossed by edges (not including corners).

To illustrate, we count I and E for the parallelogram shown here. There are 137 grid points in the interior of the parallelogram, so $I = 137$. There is one grid point each on the top and bottom edges, and five each on the left and right edges. Hence $E = 1 + 1 + 5 + 5 = 12$. The area equals

$$137 + \frac{1}{2} \cdot 12 + 1 = 144.$$

PROOF: We dissect the rectangle of width $a + c$ and height $b + d$, taking care to dissect thickened dots along the way.

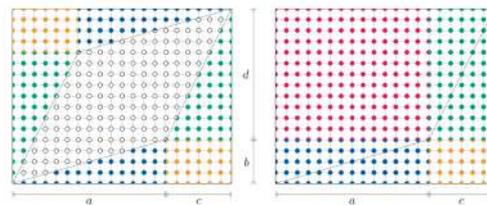


Figure 9.6: The same dissection as the opposite page, now with dots.

The blue and green dots on the left, whole or dissected, can be arranged and stitched³⁰ to form the blue and green dots on the right. The yellow dots at the southeast are the same, left and right. The remaining dots – white and yellow on left, and pink on right – have the same number³¹. The number of yellow dots on top-left is³²

$$(c - 1)(b - 1) + (c - 1) + (b - 1) + 1 = bc.$$

For the same reason, the number of pink dots on right is:

$$(a - 1)(d - 1) + (a - 1) + (d - 1) + 1 = ad.$$

Hence the number of white dots equals the number of pink minus the number of yellow on left; this number is $ad - bc$, which equals the area of the parallelogram.

The number of white dots equals $I + 1/2E + 1$. Indeed, each edge-point contributes a half white dot, and the corners together contribute one whole white dot.



Thus $I + 1/2E + 1 = ad - bc$, the area of the parallelogram.

³⁰By "stitching" a dot, we mean that two half-dots can be assembled to a full dot.

³¹Even if the number of dots were fractional, they are the same number or either side.

³²We count the dots in a rectangle.



There are $(b - 1) \times (c - 1)$ full dots in the interior. The top and bottom half-dots stitch to form $c - 1$ full-dots. The left and right half-dots stitch to form $b - 1$ full-dots. The four corners stitch to form one full dot. The total number of dots is

$$(b - 1)(c - 1) + (b - 1) + (c - 1) + 1.$$

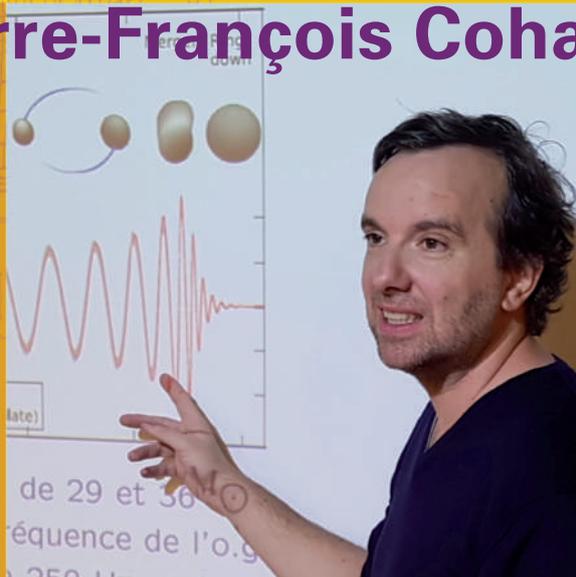
Pierre DEHORNOY
Université Grenoble Alpes

Union des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques
Société Mathématique de France
Société Française de Physique
Institut Henri Poincaré



une question, un chercheur

Pierre-François Cohadon



La détection
des ondes
gravitationnelles



Conférence
ouverte
en particulier
aux élèves
de classes
préparatoires
et aux étudiants

14 février 2019
19h30

Institut d'Astrophysique
98 bis boulevard Arago, 75014 Paris

Inscription gratuite obligatoire :
smf.emath.fr/conference-cohadon

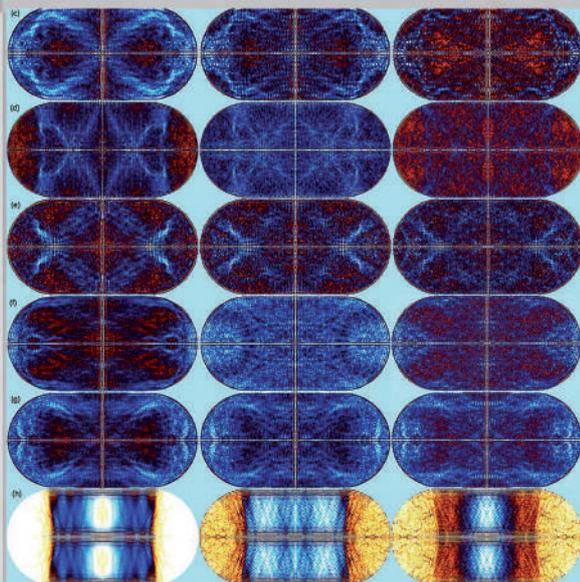


Société Mathématique de France

ÉTATS DE LA RECHERCHE

Thematic school/École thématique

From Quantum to Classical *Du Quantique au Classique*



Organisateurs :
Stéphane Nonnenmacher
Université Paris-Sud
Julien Sabin
Université Paris-Sud

Mini-cours

Yan Pautrat - Univ. Paris-Sud
Effective dynamics of open quantum systems, decoherence and indirect measurements

Guillaume Aubrun - Univ. Lyon
Entanglement as a resource in quantum information theory

Gabriel Rivière - Univ. Nantes
Semiclassical behaviour of quantum eigenstates

Frédéric Faure - Univ. Grenoble-Alpes
Microlocal methods in chaotic dynamics: from classical to quantum

Nicolas Rougerie - Univ. Grenoble-Alpes
Mathematical topics around fractional quantization

Marcello Porta - Univ. Tübingen
Mean field dynamics of many-body fermionic systems

22-26 avril 2019

CIRM

Campus de Luminy - Marseille

Renseignements et inscriptions :
<http://www.mathconf.org/fqtc2019>



Société mathématique de France
Bibliothèque nationale de France

un texte, un mathématicien 2019

mercredi 23 janvier 18h30

Emmanuel Trélat
Sorbonne Université

*De la pomme de Newton
aux courants de gravité :
un ticket gratuit vers les étoiles ?*

mercredi 20 février 18h30

Emmanuel Kowalski
ETH Zürich

*Les graphes, un autre
univers en expansion*

mercredi 13 mars 18h30

Ingrid Daubechies
Duke University

*Mathématiques,
déraisonnablement
efficaces,
profondément
humaines*

mercredi 17 avril 18h30

Timothy Gowers
Université de Cambridge

*Comment découvrir
une démonstration
pourtant longue et complexe :
les leçons de Pólya*

{BnF

Bibliothèque François Mitterrand – Grand auditorium
Quai F. Mauriac 75013 Paris – métro : quai de la Gare ou Bibliothèque
Entrée libre – <http://smf.emath.fr/BNF/2019>



Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (<http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/>).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (gazette@smf.emath.fr), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier \TeX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe \LaTeX *gztarticle* fournie par les distributions \TeX courantes (\TeX Live et Mac \TeX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiK \TeX), et sinon téléchargeable depuis la page <http://ctan.org/pkg/gzt>. Sa documentation détaillée se trouve à la page <http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf>. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution \TeX à jour.

Classe \LaTeX : Denis BITOUZÉ (denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr)

Conception graphique : Nathalie LOZANNE (n.lozanne@free.fr)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe CAIGNAERT.

