OCTOBRE 2016 – N° 150

la Gazette des Mathématiciens

- **SMF2016**
- **Mathématiques** – La diversité des cultures mathématiques : un passé et quelques futurs possibles
- **Raconte-moi...** – la propriété (T)
- **Tribune libre** – L'ANR avant l'heure

Société Mathématique de France
SMF

la Gazette des Mathématiciens

Comité de rédaction

Secrétariat de rédaction :
SMF – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@dma.ens.fr – http://smf.emath.fr

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

ISSN : 0224-8999

À propos de la couverture. Yang Hui, Explications détaillées sur les méthodes mathématiques des neuf chapitres, 1261. Diagrammes introduits pour rendre compte du problème résolu par une équation quadratique et de la correction de sa résolution.

Nº 150

Éditorial

Chère lectrice, cher lecteur,

En cette rentrée scolaire, période propice au changement, j'ai décidé de me rallier au tutoiement généralement de mise chez les mathématiciens.

L'été, pour nombre d'entre nous, s'accompagne d'une étrange torpeur, voire d'une douce langueur, mais il ne dure qu'un temps. Et celui-ci est à présent révolu. Aussi ai-je plaisir à t'imaginer, lecteur, tel l'ours au sortir de l'hivernation, sa grosse patte prête à fondre sur le premier rucher venu. Impatient de tourner ces pages, désireux de nouvelles mathématiques, avide de connaissance. En bons artisans, les membres de notre équipe ont travaillé dur, sans connaître ni trêve ni repos, afin de façonner ce numéro. Grâce à leurs efforts et à de merveilleux auteurs, un espace unique de fraternité, de liberté, de connaissance et de conscience, s'ouvre à toi.

Fraternité. La rencontre SMF2016 fut en juin dernier le tout premier congrès organisé par notre chère société savante et, à la satisfaction générale, une grande fête réunissant des mathématiciens de tous horizons. Elle te sera contée dans cette *Gazette*. Joie, mais tristesse également. Les hommages émouvants rendus à Tan Lei et Jacques Neveu te rappelleront que derrière chaque mathématicien se trouve une femme ou un homme.

Liberté. Tu la devras à Jean Bertoin et Erich Baur. Est-il en effet d'autre endroit où, au mépris de toute pensée écologiste, il te serait permis de te réjouir des progrès effectués dans la destruction aléatoire de grands arbres ?

Connaissance. Celle qui demeurait peu soucieuse de la diversité des cultures mathématiques ou de la mystérieuse propriété T, se sentira étonnamment sereine, apaisée, après la lecture des textes de Karine Chemla et Mickael de la Salle. Celui qui détournait fébrilement le regard à toute évocation de la conjecture de Sarnak, retrouvera grâce à Thierry Delarue sa démarche altière et l'œil vif, désormais prompt à disserter à loisir sur les propriétés de la fonction de Möbius.

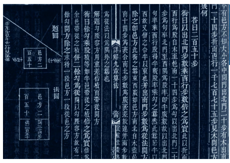
Conscience. Laurence Broze t'invite à réfléchir, données chiffrées et déchiffrées à l'appui, aux questions de parité liées aux recrutements en mathématiques dans nos universités depuis la réforme des comités de sélection.

Pour finir, n'oublie pas de jeter un œil à notre tribune libre. Tu y trouveras un extrait saisissant d'un roman d'anticipation de Léo Szilárd. Comme l'écrit Pierre Arnoux : l'ANR avant l'heure. Étrangement, le texte complet semble aujourd'hui introuvable. De là à imaginer quelque complot perpétré en haut lieu dans le but de ralentir l'éveil de nos consciences, voici un pas que je ne franchirai pas.

En te souhaitant une agréable lecture,

Boris Adamczewski

la Gazette des Mathématiciens



N° 150

Sommaire

la Gazette des Mathématiciens

Société Mathématique de France SMF

Nº 150

Mot du président

Chères et chers collègues,

J'espère tout d'abord que vous avez passé un bon été.

Celui-ci a vu Hugo Duminil-Copin, Vincent Calvez recevoir le prix EMS à Berlin, et plus récemment Claire Voisin devenir la première mathématicienne médaille d'or du CNRS. Ces récompenses démontrent que les mathématiques françaises se portent encore bien ; que cela ne masque pas les importantes questions liées au financement de la recherche, et les inquiétudes face aux nouveaux programmes de collège et lycée, notamment en mathématiques. La SMF sert de relai à notre communauté, aussi n'hésitez pas à nous transmettre, via la *Gazette* par exemple, vos réactions et vos avis sur ces sujets, ou d'autres.

Le premier congrès SMF2016 a eu lieu en juin dernier lors d'une semaine riche en émotions mathématiques, sur laquelle revient d'ailleurs ce numéro. Nous avions tenté le pari d'une conférence généraliste, et cette audace a été récompensée : d'excellents exposés, une participation soutenue, une après-midi grand-public festive (mais sérieuse !), et des participants très satisfaits. Devant le succès de notre première édition, nous préparons dès maintenant SMF2018, qui aura lieu à Lille dans deux ans ! Je remercie les responsables de la Fédération de Recherche Mathématique du Nord Pas de Calais, du Labex CEMPI, du Laboratoire Paul Painlevé, pour leur enthousiasme devant ce projet qui nous tient à cœur.

En ce mois de septembre, la SMF se lance dans de nouveaux projets. Nous comptons grandement sur votre implication et votre motivation pour leur réussite !

Nous préparons un concours « SMF junior » pour l'année 2017, destiné à promouvoir la recherche en mathématiques auprès des étudiants de master. C'est en effet un grand enjeu d'attirer les jeunes vers la recherche, et la SMF peut certainement jouer un rôle dans ce processus. Le concours, organisé par la SMF et une équipe composée de Julien Barral, Jérôme Le Rousseau, Régine Marchand et Pierre Pansu, durera 10 jours, avec une dizaine de sujets à traiter couvrant un large spectre mathématique. Préparez-vous à être sollicités pour proposer des sujets à partir du mois de novembre !

Nous espérons également votre soutien pour transmettre ces informations auprès de vos étudiants, et pour les inciter à participer, seul ou par petits groupes.

La SMF met en place un appel d'offres pour des semaines de conférences au CIRM, que nous financerons partiellement. Cet appel d'offres sera ouvert à tous, et cherchera à favoriser les échanges avec les plus jeunes de nos collègues. Pour déposer un dossier, vous pourrez consulter le site web de la SMF ainsi que celui du CIRM, entre le 1er novembre et le 31 décembre 2016, pour des semaines de conférence début 2019. Les modalités précises seront données sur nos sites web. N'hésitez pas à déposer votre projet !

Enfin, plusieurs manifestations auront lieu dans l'année qui vient pour rendre hommage à Jean-Christophe Yoccoz. La SMF participera naturellement à plusieurs d'entre elles, par exemple en préparant un numéro spécial de la *Gazette des Mathématiciens*, courant 2017, édité par Pierre Berger, Sylvain Crovisier, Patrice Le Calvez et Carlos Matheus. Ce volume contiendra des contributions originales et des témoignages sur la vie et l'héritage scientifiques de Jean-Christophe.

N'oubliez pas que vous lisez cet exemplaire de la *Gazette* car vous êtes adhérent à la SMF : il est encore temps de nous soutenir en 2016, et déjà celui de préparer 2017 !

Pour terminer, et même si celle-ci est déjà bien entamée, je vous souhaite une bonne rentrée !

Le 1er octobre 2016
Stéphane Seuret, président de la SMF

SMF2016

La Société Mathématique de France avait confié à la Fédération Denis Poisson Orléans-Tours (FR CNRS 2964), regroupant les laboratoires MAPMO (UMR CNRS 7349) et LMPT (UMR CNRS 7350) l'organisation du premier congrès national de la SMF : **SMF2016**. Notre congrès s'est déroulé du 6 au 10 juin 2016 à la faculté des Sciences et Techniques de l'université François-Rabelais de Tours. Chaque journée, organisée autour de deux thématiques principales, a regroupé plus d'une centaine de participants, le point culminant étant le mercredi où cent cinquante participants étaient présents. Au total 214 inscriptions ont été enregistrées sur le site web, ce qui a dépassé nos prévisions !

Une semaine riche en émotions... mathématiques !

SMF2016 avait pour objectif de regrouper la communauté mathématique française sur une semaine, des thèmes les plus fondamentaux aux aspects les plus appliqués, afin d'en afficher le dynamisme et l'unité. Ce premier congrès d'une société savante dont la création remonte à 1872 était très attendu, cependant l'organisation d'une telle manifestation durant laquelle peuvent se rencontrer des mathématiciens travaillant sur des sujets assez éloignés les uns des autres, constituait un formidable pari. Les participants ont largement validé ce choix audacieux, ce succès étant surtout dû aux conférenciers pléniers qui ont réussi à faire partager à l'ensemble de leurs collègues les avancées récentes en mathématiques.

La liste des oratrices et orateurs était, il est vrai, extrêmement prestigieuse, comprenant plusieurs membres de l'Académie des sciences et un médaillé Fields. Mais les sessions parallèles où intervenaient une grande majorité de jeunes collègues ont été plus qu'à la hauteur, donnant une image très dynamique des mathématiques et des mathématicien(ne)s.

Les nombreux événements organisés autour de SMF2016 ont également été largement suivis et très interactifs, et notamment la demi-journée Grand Public qui a constitué un temps fort de la semaine.

Tout d'abord, nous avons assisté aux présentations de Mark Asch qui a expliqué le positionnement et les évolutions récentes de l'ANR, notamment du côté des mathématiques, et de Patrick Foulon qui a détaillé les futurs projets du CIRM impliquant de nouveaux appels d'offres pour des semaines de conférences à partir de 2018.

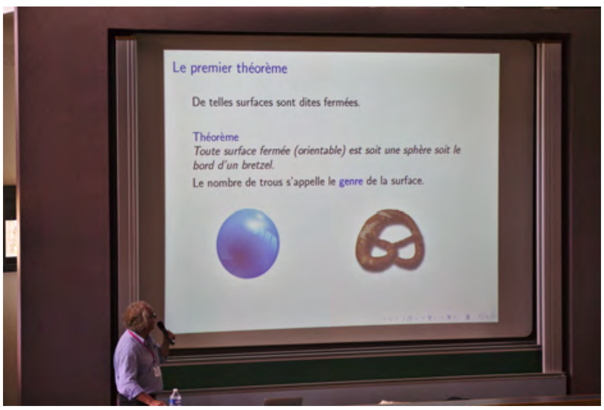
L'assemblée générale de la SMF (jeudi 9 juin) a cette fois été suivie par plus d'une cinquantaine de participants ! Cela a permis de dresser le bilan du travail fait par la SMF cette dernière année (publié dans la dernière *Gazette*). Nous espérons que la prochaine AG rencontrera un succès au moins comparable : elle sera couplée avec la remise d'un nouveau prix créé par la SMF.

La demi-journée Grand Public du mercredi 8 juin 2016 comprenait :

- une table ronde « Quelles mathématiques pour le futur scientifique ? » ;
- un exposé à destination d'un public large par Gérard Besson (Institut Joseph-Fourier, Grenoble) sur la résolution de la conjecture de Poincaré ;
- la remise du prix d'Alembert.

La table ronde a été très animée en lien avec les réformes récentes de l'enseignement des mathématiques du secondaire (le compte-rendu de cette table ronde est donné dans les pages qui suivent).

L'exposé grand public a été organisé dans un amphithéâtre de grande taille permettant d'accueillir, outre les participants de la conférence, des groupes d'enseignants et de lycéens pour l'exposé de Gérard Besson. Sont venues cinq classes de lycéens : trois de Tours, une d'Orléans et une de Dreux, soit plus de deux cents jeunes passionnés de mathématiques. Ainsi, 380 personnes ont assisté à la conférence de Gérard Besson. Ce dernier a parcouru l'odyssée de quelques cent ans qui ont séparé le texte de Poincaré aux *Rend. Circ. Mat. Palermo* en 1904, les dépôts de trois articles sur *Arxiv* par Perelman en 2002-2003, la vérification qui a suivi, en passant par le travail de classification de Thurston dans les année 1970. Gérard Besson a rendu son exposé accessible au plus grand nombre, ponctué de moments d'interaction et d'humour avec son jeune public.



Les nombreuses questions en fin d'exposé ont été le signe clair que l'objectif de cet exposé, à savoir sensibiliser les plus jeunes au métier de chercheur en mathématiques, était largement atteint.

À la suite de cet exposé, le prix d'Alembert 2016 de la SMF, a été decerné à l'association marseillaise *Pi Day*. Ce prix, décerné tous les deux ans, d'un montant de 2000 euros, financé par la SMF, récompense « *une personne ou un groupe étant parvenu, par la réalisation d'un ouvrage, d'un film, d'une émission de radio ou de télévision, d'une exposition ou de tout autre moyen, à intéresser le public aux développements des mathématiques et à les relier aux préoccupations de nos contemporains* ».

L'association *Pi Day* a été récompensée pour les animations qu'elle a organisées au théâtre de la Criée à Marseille, rassemblant quelques huit cents spectateurs le 14 mars 2016. Quatre de ses membres, tous jeunes docteurs ou doctorants de l'université d'Aix-Marseille, étaient présents à Tours et ont reçu le prix. Ils ont offert un extrait de leur spectacle marseillais, assorti d'animations musicales par des musiciens, venus spécialement pour l'occasion.

Honorer ainsi les plus jeunes membres de la communauté mathématique devant un parterre de lycéens a été un grand moment de cette journée grand public avec un impact incontestablement positif. Une interview des *Pi Day* est proposée un peu plus bas dans ce dossier spécial SMF2016.

L'ensemble de cette après-midi Grand Public, conclue par un cocktail accompagné d'un concert pour l'ensemble des participants, lycéens compris, a été un grand succès.

Le seul contretemps de la semaine a été l'annulation de la table ronde « Mathématiques à Venir en Entreprises » qui était organisée par AMIES, la Société Française de Statistiques (SFDS), la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI) et la SMF. Cette annulation a été causée par le mouvement social qui a perturbé les transports ferroviaires. La table ronde a été remplacée par un débat sur le financement de la recherche en mathématiques qui a donné lieu à une motion diffusée sur le site web de la SMF et du congrès, notamment. L'actualité était brûlante puisque le comité en charge de l'évaluation des projets scientifiques ANR relevant des mathématiques et de l'informatique (CES40) avait décidé à l'unanimité de démissionner et de ne pas transmettre de classement à l'ANR. Cette information avait été rendue publique le premier jour du congrès par la vice-présidente de ce comité, oratrice à SMF2016.

Et la suite ?

Étant donnée la grande satisfaction et l'enthousiasme des participants, des orateurs, et des personnels SMF qui ont apprécié de rencontrer les acteurs avec lesquels ils ont depuis longtemps de nombreux échanges, nous allons nous atteler à l'organisation d'une seconde édition, et espérons que ce congrès SMF s'inscrira dans le temps. Ainsi, c'est avec un grand plaisir que nous annonçons que SMF2018 est déjà en préparation ! La Fédération de Recherche Mathématique du Nord Pas de Calais, le Labex CEMPI, et le Laboratoire Paul Painlevé ont manifesté leur volonté pour organiser notre prochain congrès. La SMF les remercie pour leur enthousiasme et toute l'énergie qu'ils mettent déjà en œuvre pour la préparation de SMF2018. Préparez-vous donc dès maintenant à réserver une semaine en 2018 pour partager avec nous de grands moments mathématiques !

La SMF tient à remercier le comité d'organisation (notamment à travers la mobilisation globale de la Fédération Denis-Poisson) et le comité scientifique, qui ont réalisé un énorme travail pour faire de cette semaine un événement chaleureux et dense mathématiquement.

Nous soulignons également le soutien de nombreux sponsors :

- la fédération Denis-Poisson et ses tutelles : l'Insmi, l'université François-Rabelais de Tours et l'université d'Orléans ;
- les collectivités locales : la Région Centre-Val de Loire, le Conseil Départemental d'Indre-et-Loire et la communauté d'agglomération Tour(s)Plus ;
- de nombreux Labex : l'agence AMIES, les Labex Archimède, Bézout, CIMI, Cempi, la Fondation Mathématique Jacques Hadamard, le Centre Henri Lebesgue, les Labex Milyon et MME-DII ;
- ainsi que beaucoup de membres de l'IUF qui ont soutenu le congrès individuellement.

La SMF remercie Emmanuel Chasseigne pour les photos de ce dossier.

L'association *Pi Day* reçoit le prix d'Alembert

En juin dernier, la SMF a décerné le prix d'Alembert à l'association *Pi Day*, essentiellement composée de doctorant.e.s et jeunes chercheur.e.s en mathématiques de l'université Aix-Marseille. La *Gazette* est allée à la rencontre des plus jeunes de nos collègues qui ont récemment pris la question de la médiation scientifique à bras le corps, avec un enthousiasme et une bonne humeur communicatifs.

Comment l'aventure *Pi Day* a-t-elle commencé ? Comment avez-vous monté l'association ? Combien étiez-vous au départ ? Quand a-t-elle été montée ?

L'aventure a commencé en 2013 avec une petite équipe réunie autour de la création d'un séminaire des doctorants à Marseille. Le séminaire avait une part scientifique (les exposés des doctorants), et une conviviale (des goûters, des repas entre doctorants, séminaire à la plage).

L'un des séminaires devait tomber le 14 mars ; comme nous connaissions la fête américaine du π day, l'idée est alors naturellement venue d'organiser une manifestation festive et ouverte au public ce jour-là. Sur le plan personnel, il faut dire que cette obsession du nombre π nous vient de l'excellent livre « Le Fascinant Nombre π » de J.-P. Delahaye sur le sujet.

Le coup d'envoi de la journée de π à Marseille est donc donné le 14 mars 2013, sur le campus de l'université. L'affiche (dessinée à la main) promettait « une journée de célébration des mathématiques et des tartes » !

Au programme : un concours de tartes (pie en anglais), un exposé de mathématiques (autour de π, naturellement), et la diffusion du film *Dimensions* par A. Alvarez, É. Ghys et J. Leys. Nous nous sommes alors très vite pris au jeu de l'organisation d'un projet captivant. Au fil des éditions, nous avons fait mûrir l'idée et grandir l'événement pour toucher un public plus large. L'initiative a commencé à prendre vraiment de l'ampleur en 2015, quand nous sommes sortis des locaux de l'université, pour organiser l'événement au centre ville dans les locaux du MuCEM, le nouveau musée marseillais ouvert en 2013. L'association en elle-même n'existe sur le plan administratif que depuis 2015, afin d'obtenir plus d'indépendance pour mener à bien le projet de 2016.

Combien êtes-vous maintenant ? Pourriez-vous décrire vos activités ?

Nous sommes une dizaine de membres actifs de l'association, doctorants et docteurs en mathématiques et informatique pour la plupart, et amis, à nous réunir tous les dimanches pour nos « π meetings ». Autour d'une tarte, nous discutons de l'avancée du projet : les finances, les invités scientifiques, la logistique, la communication, l'écriture et la réalisation du spectacle, etc. Dans une petite équipe, nous sommes un peu tous au four et au moulin !

Le jour J (ou plutôt jour π), une douzaine de bénévoles (la plupart étudiants) nous ont épaulés dans la logistique, l'accueil dans le hall, les ateliers mathématiques, le concours de tartes, la boutique. Il y a aussi évidemment tous les artistes que nous avons mobilisés dans ce projet : graphiste, metteur en scène, acteurs, costumière, musiciens, chanteurs, vidéastes, photographes, etc.

Interagissez-vous avec d'autres associations de culture/médiation scientifique ? Comme *Maths pour Tous* par exemple.

Tout à fait. Les étudiants de *Maths pour Tous* par exemple présentaient des ateliers de jeux mathématiques dans le hall du théâtre. Nous avons également des liens avec la cellule de culture scientifique de notre université et l'association *Animath* qui nous a soutenus. En marge de la journée de π en elle-même, nous participons à de nombreux événements grands ou petits de culture scientifique dont la Fête de la Science, les Treize Minutes Jeunes Chercheurs, etc. Nous espérons que nous serons amenés à tisser beaucoup d'autres liens à l'avenir. Nous avons d'ailleurs eu l'occasion lors des journées *AuDiMath* en juin de rencontrer de nombreux acteurs de la diffusion mathématique.

Que représente pour vous de recevoir le prix d'Alembert ?

C'est un immense honneur pour nous. D'autant plus que nous avons beaucoup d'admiration pour les lauréats de ce prix, et certains nous ont même inspirés. Nous le voyons aussi comme un encouragement à poursuivre dans la diffusion mathématique, pour nous ainsi que pour les doctorants et jeunes chercheurs en général. Nous espérons que cette reconnaissance permettra au projet de rayonner plus largement, et nous mesurons aussi la responsabilité que cela représente.

Quels sont vos projets pour l'année prochaine ? À plus long terme ?

Pour 2017, la journée de π deviendra la tournée de π ! Nous prévoyons trois dates, à Marseille, Lyon et Paris respectivement, qui auront lieu lors de la semaine des mathématiques du 13 au 17 mars. Nous reprendrons la formule de 2016 : un spectacle musical mathématique entrelacé de courtes conférences tout public ; avec un nouveau spectacle pour 2017 « From Marseille to Vegas », et des orateurs différents pour chaque ville. Nous cherchons d'ailleurs actuellement des soutiens et bénévoles dans ces trois villes. N'hésitez pas à nous contacter à *staff@piday.fr* si le projet vous intéresse. Nous ne pouvons pas en révéler plus pour l'instant, mais nous vous donnons rendez-vous sur notre site internet `www.piday.fr` pour vous tenir informés.

À plus long terme, nous espérons pouvoir porter ou contribuer à des projets de culture mathématique et scientifique au-delà de la journée de π. C'est un enjeu important au regard du rôle grandissant des mathématiques dans la société. Et il y aurait beaucoup de choses à faire dans le domaine, notamment Marseille aurait besoin un jour d'un lieu pour la culture scientifique.

Quelles mathématiques pour les futur.e.s scientifiques ?

Table ronde

- P. Arnoux
- M. Quéffelec
- A. Szpirglas

On sait qu'un certain nombre d'acteurs s'inquiètent de la qualité de la formation des futurs scientifiques tant au lycée que dans l'enseignement supérieur, particulièrement depuis la mise en place des nouveaux programmes de lycée : les premiers étudiants « issus » de cette réforme sont arrivés dans les formations post-bac en 2013 et il semble que le constat soit alarmant. Il est donc naturel, lors de ce premier congrès de la smf qui est très engagée sur les questions d'enseignement des mathématiques, que ce thème soit présent.

1. Les intervenants

- Pierre Arnoux, université d'Aix-Marseille, président du Comité Scientifique des irem ;
- Sylvie Bonnet, présidente de l'Union des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques (ups) ;
- Marie Line Chabanol, université de Bordeaux, directrice adjointe de l'irem d'Aquitaine et responsable de la licence de mathématiques ;
- Stéphane Leborgne, université de Rennes, membre de la Commission Enseignement de la smf ;
- Andrea Sambusetti, université La Sapienza, Rome.

Andrea Sambusetti parle, comme il se doit, de la situation italienne. Par son expérience, il souligne que chez lui les programmes des lycées ne sont pas la raison principale de l'échec de la formation des élèves en mathématiques ; voici quels sont les problèmes de fond.

- Un problème de budget : l'Italie est le pays qui actuellement, en Europe, dépense le moins pour l'éducation et l'enseignement.
- Un problème de cohérence : il y a eu 3 réformes de l'enseignement dans les 15 dernières années, sans aucune évaluation. Le parcours universitaire destiné à l'enseignement change sans arrêt, de façon aléatoire, ce qui conduit aujourd'hui à 100 000 emplois précaires dont 80 000 dans le secondaire.
- Un problème d'image : le rôle et le métier d'enseignant sont particulièrement déconsidérés, tous partis confondus.

En conclusion, un exemple à ne pas suivre !

Stéphane Leborgne, qui intervient sur l'enseignement des mathématiques à l'université, pose la question des mathématiques que nous devrions enseigner aux futurs professeurs du secondaire. Actuellement nous sommes déçus par le peu de choses acquises en 3 ans de licence, par rapport à notre investissement : nous passons beaucoup de temps à introduire un langage et des notions pour constater, au niveau du Master Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation (meef), qu'il ne reste rien (par exemple l'enseignement de l'analyse avec les quantificateurs). Peut-être faudrait-il mieux passer plus de temps sur des notions moins abstraites (géométrie, fonctions et suites concrètes, etc.) quitte à réduire les programmes ? Ne faudrait-il pas faire moins mais mieux ?

Pierre Arnoux introduit le débat à l'aide de données numériques et de tableaux. Il présente en particulier trois graphiques comparatifs montrant l'état actuel des études scientifiques dont on retiendra les points suivants.

- La stabilité depuis 20 ans, avec une remontée récente, du nombre de candidats au bac général, face à la baisse des bacs technologiques et l'explosion des bacs professionnels.
- 160 000 bacheliers scientifiques ces dernières années, dont 35 000 seulement viennent à l'université, avec un grand taux d'échec.
- Le nombre de postes offerts au CAPES qui oscille constamment avec, en décalé, des oscillations forcées du nombre de candidats.

Il déplore vivement que l'interdisciplinarité ait disparu du lycée et milite pour un retour à une liaison forte math-physique-info.

Sylvie Bonnet revient quant à elle sur les programmes de lycée. Les réformes de programmes dans le secondaire se font cruellement sentir jusqu'en classe préparatoire depuis 2013 et, à la rentrée 2017, arriveront au lycée les premiers élèves touchés par la réforme des collèges. Il faut alerter le Conseil Supérieur des Programmes (CSP) afin qu'il adapte les programmes de seconde en vue de véritables études scientifiques ! En effet le bac S ne vise plus la formation de futurs « scientifiques », puisque la majorité des bacheliers poursuivent en médecine ou en droit.

Sa suggestion : proposer au lycée un parcours purement scientifique en consacrant les heures d'accompagnement personnel (par exemple) à des compléments sur les matières scientifiques.

Marie-Line Chabanol insiste aussi, rejoignant ainsi Andrea Sambusetti, sur le fait que les problèmes ne viennent pas tant des programmes que de leurs modalités d'application. Il y a en effet un divorce entre les programmes (même quand ils sont cohérents et bien intentionnés) et les consignes d'application qui les accompagnent.

- En collège, l'initiation au raisonnement mathématique prévoit de formuler des conjectures… mais pas de les démontrer.
- Au lycée, il n'y a aucune obligation et aucun encouragement à la rigueur.

Cela se traduit par

- aucun cours véritablement construit ;
- aucun contrôle sur l'acquisition des notions abordées ;
- et donc aucune véritable acquisition.

Les bacheliers ne savent pas écrire les mathématiques (ni même calculer car les mathématiques ont disparu de la physique) et n'ont aucun goût pour les preuves.

Lors du débat qui a suivi, questions et commentaires ont été nombreux.

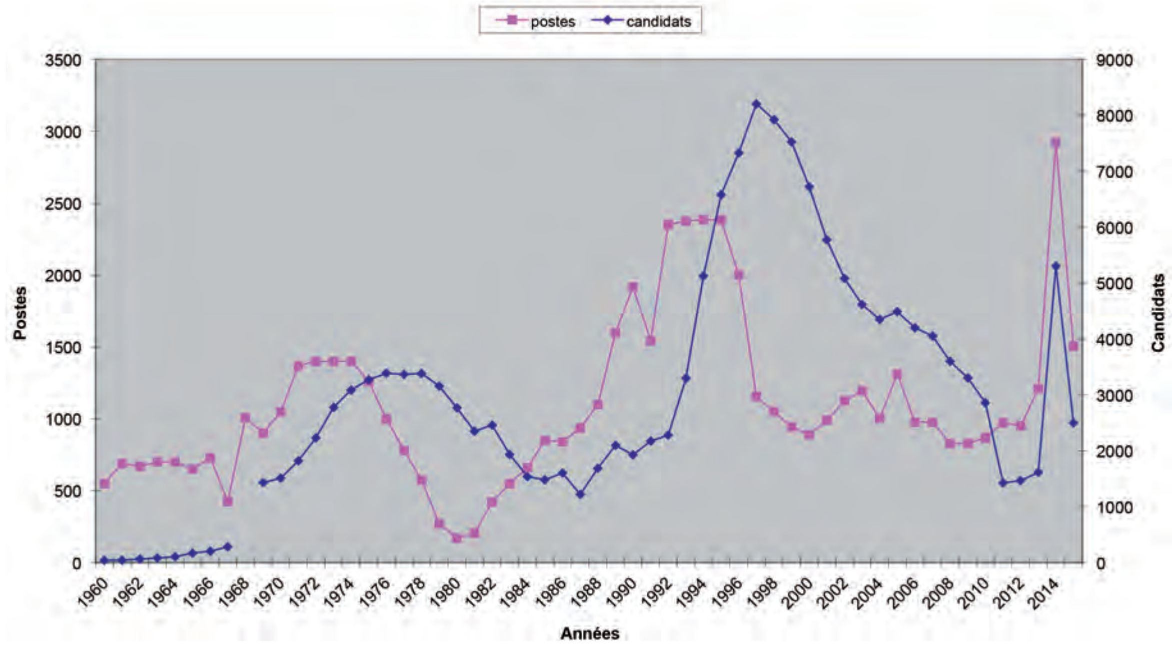
2. Le débat

Sur l'interdisciplinarité. Il ne semble pas raisonnable, comme il a été suggéré, de faire enseigner des cours de physique par des profs de mathématiques, car aucun matheux ne peut enseigner la physique telle qu'elle apparaît au lycée : elle est conçue comme un apprentissage « d'extraction d'informations […] les connaissances étant sur le net ». Le mot d'ordre des IPR d'ailleurs est « vous n'avez rien à transmettre » ! Le programme de physique de première S consiste en 16 pages de texte, dont les 8 premières sont une introduction générale (un « chapeau »)… Plus de commentaires que de contenu !

Il est pourtant possible de faire des enseignements pluri-disciplinaires à tous les niveaux : les IREM ont des propositions très alléchantes pour créer une vraie inter-disciplinarité dans le secondaire. Les étudiants de licence peuvent, par exemple à Marseille, suivre une licence pluri-disciplinaire qui fonctionne mieux que la licence de mathématiques. Elle fonctionne aujourd'hui avec de petits effectifs, mais est en forte croissance, et beaucoup de moyens (nombre d'enseignants, conférences, voyages à l'étranger, etc.). On peut se demander s'il est possible de mettre de tels moyens au service d'un nombre important d'étudiants ; la réponse est très certainement « oui », car si l'enseignement est deux fois plus cher avec trois fois plus de succès, c'est rentable, comme le montrent d'ailleurs les classes préparatoires.

En revanche l'inter-disciplinarité demande une grande réflexion commune sur les programmes ; c'est un travail à long terme, demandant des groupes interdisciplinaires, qui n'est pas compatible avec le mode de travail du ministère qui se fait dans l'urgence, d'où le « coloriage » des programmes. Pour donner un exemple, le programme d'informatique du collège, réparti entre les mathématiques et la technologie, n'a fait l'objet d'aucune réflexion commune.

CAPES Mathématiques : évolution du nombre de postes, et du nombre de candidats de 1960 à 2014.



Sur les programmes. Les programmes de lycée sont aujourd'hui rédigés par le CSP, instance indépendante créée en 2013 par la loi Peillon, et successeur du Conseil National des Programmes (CNP) créé en 1989 par la loi Jospin et supprimé en 2005 par la loi Fillon ; cette histoire chaotique explique l'absence de travail de fond, puisqu'il est impossible d'arriver à un fonctionnement stable abordant les problèmes de long terme.

Les programmes de licence sont, entre autres, contraints par les programmes des concours de recrutement et celui de l'agrégation ne diminue pas. On peut craindre que les préparations à l'agrégation disparaissent dans les petites universités si les programmes de licence diminuent. Cependant, la préparation à l'agrégation concerne très peu d'étudiants de licence. Par exemple, à Rennes, la préparation à l'agrégation fonctionne bien, mais avec 3 ou 4 étudiants seulement venus de L1. Il faudrait faire en licence ce qu'on peut utilement y faire, sans se préoccuper du programme de l'agrégation, qui concerne une petite minorité.

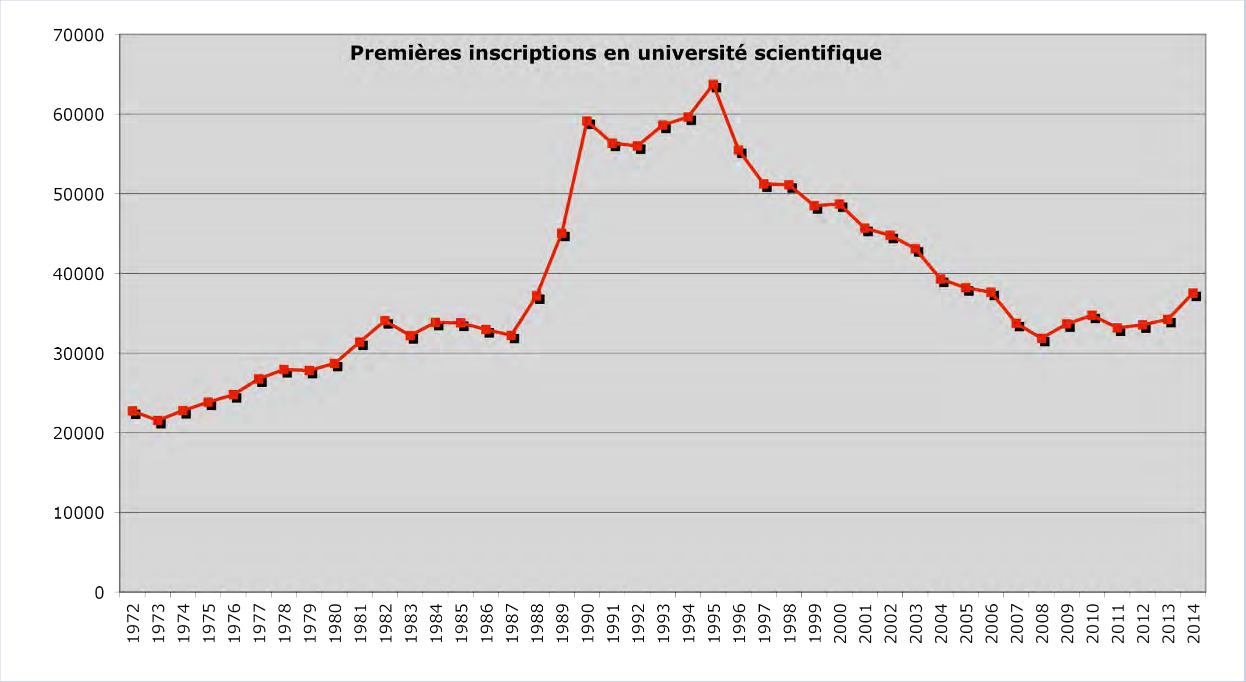
Plus généralement, les examens nationaux (brevet, bac) permettent de fixer un niveau raisonnable et d'entraîner les élèves ; de même, à l'université, les préparations aux concours de recrutement tirent les formations vers le haut. Cependant, ne pourrait-on avoir plus de liberté par rapport aux programmes ? Difficile quand on sait par exemple que les injonctions pédagogiques sont de plus en plus strictes en classes préparatoires, ce qui ne permet pas d'être optimiste sur ce point.

Qui sont les étudiants scientifiques ? Chaque année sortent 10 000 médecins et 36 000 ingénieurs (en comptant la formation universitaire), plus environ 15.000 master scientifiques. Certains pensent que les ingénieurs sont aujourd'hui plus tournés vers le « management », que la technologie : la proportion des ingénieurs formés en management-gestion est passée en 15 ans de 3,7% à 9,8%, mais ce sont aussi des scientifiques (même si certains dans l'assistance en doutent).

Comment entretenir le goût pour les sciences fondamentales ?

En soignant la formation des enseignants dont nous sommes responsables à l'université. Pour cela ne devrait-on pas faire figurer dans les objectifs l'apprentissage de la rigueur, de l'expression, de la clarté de pensée et simplifier les programmes pour y parvenir ?

Le nombre d'étudiants en L1 scientifique, qui avait diminué de 50% depuis 1995, est en légère augmentation (cette année +8,5%, entre autres pour des raisons démographiques : entre 2009 et



2016, il y a eu 280 000 élèves supplémentaires dans le secondaire) avec équirépartition entre les filières SV et SMP. Mais ce n'est pas seulement une question d'effectifs : même si on a les moyens de faire réussir les étudiants, l'incertitude qui pèse sur leur futur ne les incite pas à travailler.

Au niveau européen, en vue d'améliorer les résultats aux tests « Pisa », est apparue la vague des « mathématiques opérationnelles » (en droite ligne de Finlande) : il s'agit d'insister sur les bases de raisonnement et les méthodes de calcul, au détriment des théorèmes. Le signe « = » disparaît, remplacé par « résultat » ce qui n'est pas la même chose.

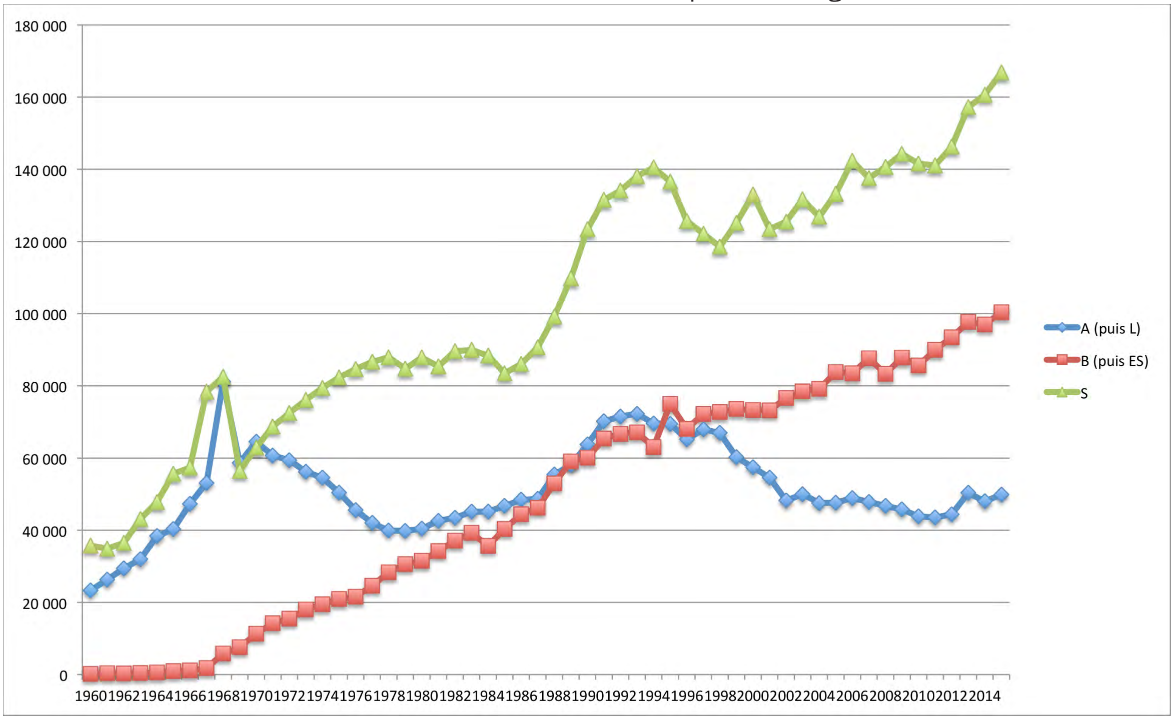
Précarité dans l'Éducation nationale. Andrea Sambusetti nous a parlé de la situation précaire des enseignants en Italie. Qu'en est-il en France ? Les chiffres sont les suivants : il y a actuellement en France environ 10 000 professeurs agrégés dans le secondaire, 45.000 certifiés et moins de 8% de précaires (ce qui représente une nette amélioration depuis 4 ans). Pour l'année qui vient, on est à –1500 postes par rapport aux besoins et tous les TZR seront occupés. Mais il n'y a plus de recours à Pôle Emploi et le nombre de départs en retraite est en baisse.

Peut-on proposer des solutions ?

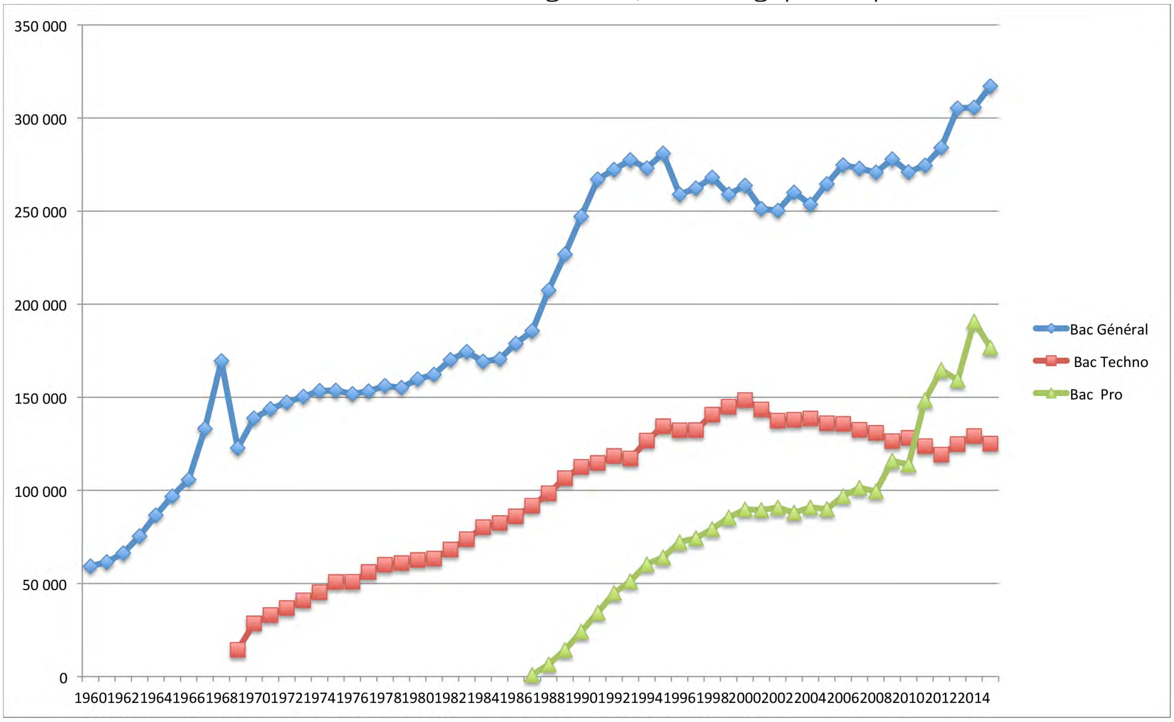
– À l'échelle internationale, on ne peut rien contre les phénomènes de mode.
– À l'échelle nationale, on peut essayer de convaincre les responsables politiques.
– À l'échelle locale, nous sommes les acteurs, nous pouvons peser au niveau des licences en faveur de l'interdisciplinarité et sur les programmes. Par exemple, l'agrégation concerne peu d'étudiants, tous n'ont pas besoin de Baire ! Mais surtout il nous faut insuffler le désir d'apprendre, sans quoi rien ne sera possible.

On peut donc agir en tant que communauté (associée aux physiciens) pour faire des propositions et les soutenir.

Évolution du nombre de candidats suivant les filières pour le bac général de 1960 à 2014.



Évolution du nombre de candidats au bac général, technologique et « pro » de 1960 à 2014.



La diversité des cultures mathématiques : un passé et quelques futurs possibles

• K. Chemla

L'auteur présente ici quelques résultats d'une recherche menée dans le contexte du projet saw (« Sciences mathématiques dans les mondes anciens ») qui a été financé par le Conseil Européen de la Recherche. Cet article dérive de la conférence plénière donnée dans le cadre du Congrès Européen de Mathématiques (Berlin, juillet 2016).

1. Introduction

Voici longtemps que, comme historienne, aussi bien que comme observatrice des pratiques mathématiques contemporaines, je suis frappée par la diversité des manières de faire des mathématiques. Je ne parle pas ici de la variété des styles individuels, qui a déjà fait l'objet de bien des travaux, mais plutôt de la diversité des façons, collectivement partagées, de s'adonner aux mathématiques. Ce phénomène me paraît mériter une attention qu'il n'a pas pleinement reçue à ce jour. J'aimerais, dans cet article, exposer quelques-unes des raisons qui me convainquent de l'intérêt que pourrait présenter pour nous la description de ces réalités sociales et culturelles, qu'il me semble approprié de concevoir comme des « cultures mathématiques » différentes. J'ai eu l'occasion de préciser, à l'aide d'un exemple longuement développé, ce que j'entendais par cette dernière expression [5], et je reviendrai plus loin sur la question. Il me faut, toutefois, auparavant écarter une source possible de malentendus. Si je propose de parler de « cultures mathématiques », c'est sans rapport aucun avec une autre acception, par trop courante, de la même expression, qui me paraît dénuée de sens et, de surcroît, dangereuse.

Depuis le xix^e siècle, en effet, une certaine manière de penser la diversité des pratiques mathématiques s'est imposée largement : elle se trouve aux antipodes de celle que je défends ici. Pour rester brève, je serai sans nuances, et j'illustrerai cette autre conception par une déclaration du physicien Jean-Baptiste Biot, qui a le mérite de révéler en quelques lignes un bon nombre des facettes de la représentation que je récuse. C'est à l'occasion d'un compte-rendu de la traduction par Jean-Jacques Sédillot d'un ouvrage en arabe intitulé *Traité des instruments astronomiques des Arabes* qu'en 1841 Biot publie le verdict suivant (les italiques sont de moi, sauf pour la phrase finale en latin) :

> ...on y trouve [KC : à savoir : dans l'ouvrage] une nouvelle preuve de cette *singulière habitude de l'esprit*, en vertu de laquelle les Arabes, comme les Chinois et les Hindous, *bornaient* leurs compositions scientifiques à l'exposition d'une *suite de règles*, qui, une fois posées, devaient *se vérifier par leurs applications* mêmes, *sans besoin de démonstration logique, ni de connexion* entre elles : ce qui donne à ces *nations orientales* un caractère *remarquable de dissemblance*, et j'ajouterai d'*infériorité intellectuelle, comparativement aux Grecs*, chez lesquels *toute proposition s'établit par raisonnement*, et *engendre des conséquences logiquement déduites*. Cette fixation des méthodes scientifiques, *sous forme de préceptes*, doit avoir offert un grand *obstacle au développement des idées nouvelles* chez les *peuples* chez lesquels elle a été en usage, et elle *contraste terriblement* avec *notre* devise européenne : *nullius in verba*.[1]

1. [1]. Ce texte a été mis au jour par F. Charette [2].

Si Biot conclut en citant la devise de la Royal Society : « ne croyez personne sur parole », qui enjoignait à ses membres de rejeter toute forme d'autorité, c'est pour dresser un contraste. La devise exhorte à une forme de « liberté » d'esprit, qui pour Biot caractérise l'Europe – ailleurs, il dira l'Occident – et qu'on a depuis lors régulièrement exaltée comme l'attitude intellectuelle spécifique qui permit l'émergence de la « science moderne ». Selon Biot, les « Orientaux » se contentent, eux, d'énoncer des suites de « règles » (en termes modernes : des algorithmes) et procèdent donc par des prescriptions (« préceptes ») qui supposent, par contraste, obéissance de la part de leurs utilisateurs. Entendez : il leur était de ce fait impossible de provoquer une révolution scientifique. C'est ici l'un des éléments clefs d'une opposition plus globale entre pratiques mathématiques des uns et des autres que Biot façonne dans ces lignes. Ainsi, sur un autre plan, les « Orientaux » n'éprouveraient pas la nécessité de démontrer, s'accommodant de simples « vérifications ». C'est, aux yeux de Biot, la fonction des problèmes mathématiques que contiennent leurs textes et qu'il qualifie d'« applications ». Par contraste, « les Grecs », eux, démontrent tout. Par suite, si les règles des uns ne présentent aucune relation entre elles, les autres, eux, élaborent des édifices déductifs.

Au total, la déclaration ci-dessus en témoigne : Biot croit en une différence de nature entre les peuples, dont l'exposé ne requiert que deux catégories : d'un côté, les « nations orientales » et, de l'autre, « les Grecs » et les « Européens », au nombre desquels lui-même se range. Cette différence se reflète pour lui dans un contraste entre pratiques mathématiques des uns et des autres – un contraste auquel il assigne des conséquences sur le long terme (les uns connaissent le progrès tandis que les autres avancent à grand peine). Si l'on examine de plus près comment Biot articule différence entre les peuples et contraste entre mathématiques, l'on constate qu'à ses yeux, la manière dont les « Orientaux » opèrent en mathématiques *dérive* d'une « singulière habitude de l'esprit » que ces peuples ont en partage : les mathématiques ne font ici qu'illustrer un fait plus général. C'est tant sa croyance en la véracité du fait général, que la confirmation qu'il croit trouver dans sa description de leurs activités mathématiques, qui conduisent Biot à énoncer une hiérarchie entre les peuples. En revanche, la déclaration donne à l'*inverse* les mathématiques et la science moderne comme la preuve de la supériorité des Grecs et de l'Europe. L'histoire des sciences a de fait longtemps servi de laboratoire pour élaborer des conceptions avec lesquelles certains ont cru pouvoir penser les « caractéristiques » des peuples et asseoir la thèse d'une disparité irréductible entre eux. Nous avons amorcé, dans le contexte du projet SAW, l'étude historique de ces formes d'histoire des sciences et de leurs usages, mais cela nous entraînerait ici trop loin. Revenons plutôt à notre propos.

Biot écrivait ces lignes en 1841. Je peux témoigner de ce que bien des éléments de la représentation de la diversité des pratiques mathématiques à laquelle il souscrivait ont persisté jusqu'à aujourd'hui, sous des formes variées, et sont même très répandus, sinon au sein du milieu mathématique, du moins plus largement dans nos sociétés. Dans le contexte du monde d'aujourd'hui, les effets en sont potentiellement aussi ravageurs qu'ils l'étaient hier. Il est intéressant d'examiner la base documentaire sur laquelle Biot appuyait son verdict. C'est chose assez aisée pour ce qui est de la Chine, car le fils de Biot, Édouard (1803-1850), fut le premier spécialiste de la Chine à publier en Europe sur l'histoire des mathématiques, et les quatre articles qu'il commit sur le sujet entre 1835 et 1841 firent tous l'objet de discussions avec son père. Comme bon nombre de sinologues de l'époque, Édouard ne voyagea jamais en Chine, et ses investigations durent se limiter aux documents chinois accessibles en Europe. Les collections de la Bibliothèque Royale mirent entre ses mains un livre mathématique chinois publié en 1593, auquel il consacra ses deux premiers articles. En 1839, il publie une étude sur un second ouvrage, qu'il peut consulter grâce à un prêt de son mentor en matière de sinologie, Stanislas Jullien. Isolé dans son travail sur les mathématiques de la Chine ancienne, Édouard date à tort ce livre, achevé en 1259, du VIII^e siècle et paraît ne pas avoir compris le symbolisme algébrique qui était central au projet de l'auteur. Enfin, c'est à nouveau à la Bibliothèque Royale qu'il déniche un ouvrage datant des débuts de l'ère commune et traitant de connaissances mathématiques nécessaires à l'astronomie et à la cosmographie, dont il publiera la traduction en juin 1841. C'est à ceci que se résument les données sur la base desquelles, la même année, Jean-Baptiste Biot formulera son avis définitif des mathématiques du « peuple » chinois de l'Antiquité jusqu'à son temps. Ce n'est pas parce que nous pouvons lire aujourd'hui plusieurs dizaines d'ouvrages mathématiques rédigés en Chine entre les derniers siècles avant notre ère et le XIX^e siècle qu'il ferait plus sens de parler de « mathématiques chinoises ».

En tout état de cause, ce n'est pas à des « cultures mathématiques » conçues en des termes de ce type que je pense lorsque je me propose d'argumenter l'intérêt qu'il y aurait à prendre en considération la diversité des manières, collectivement partagées, de faire des mathématiques. Les « nations » ou les « peuples » me paraissent des entités beaucoup trop énormes pour ce que j'ai en vue. À vouloir à tout prix dire quelque chose des mathématiques dans un cadre de cet ordre de grandeur, on se trouve condamnés, comme Biot, à généraliser de façon indue. À moins que la recherche d'un dénominateur commun aux mathématiques d'une « nation » ou d'un « peuple » ne nous conduisent à nous tenir bien trop loin de ce que font vraiment ceux que nous observons et qu'à la manière des anthropologues, j'appellerai des « acteurs » : on ne saisit à cette distance que des points communs peu significatifs, minimisant le plus souvent tout ce qui contredit des conclusions totalisantes, et c'est par décret qu'on donne ces points communs comme caractéristiques de l'entité observée. Dans les deux cas, c'est par postulat que « nation » ou « peuple » sont posés comme des cadres pertinents, et on ne peut donc pas s'étonner de retrouver le postulat dans les conclusions.

2. Une autre approche des cultures mathématiques

Comme la majeure partie des historiens, je préfère partir de documents. Et ce qui me frappe, à considérer des écrits produits dans des contextes variés, c'est que ces documents forment des grappes, qui attestent des manières partagées, mais différentes, de faire des mathématiques. De quels types de collectifs humains ces grappes d'écrits témoignent-elles ? On ne peut répondre à la question en général, et il faudrait l'examiner au cas par cas. J'esquisserai plus loin quelques manières de l'aborder. Mon objectif principal sera, cependant, ici d'illustrer par des exemples les phénomènes qui m'intéressent et que je suggère d'approcher en termes de « cultures » différentes. Chemin faisant, ces exemples me permettront d'expliquer pourquoi je suis convaincue de l'importance de prendre ces phénomènes en compte pour interpréter de façon plus approfondie et rigoureuse nos documents, et je dégagerai également de leur exploration les questions générales nouvelles qu'ils me semblent soulever.

La première illustration de ce que j'entends par « culture mathématique » provient d'un champ avec lequel je suis familière. Ce n'est pas un hasard : une approche de ce type requiert une connaissance intime des sources. J'ai choisi cet exemple dans l'histoire ancienne, dans la mesure où les problèmes d'interprétation des documents sont souvent d'autant plus aigus que les écrits ont été produits dans un passé lointain. J'espère, de ce fait, que l'aide à l'interprétation que peut procurer une approche en termes de culture sera d'autant plus manifeste. Je me pencherai donc sur une grappe d'ouvrages mathématiques chinois anciens présentés au trône en 656 par Li Chunfeng et des érudits travaillant sous sa direction : *Les dix canons de mathématiques*.

C'est sur ordre de l'Empereur que Li et ses collègues s'attelèrent à la préparation de cette anthologie, sélectionnant des classiques du passé ainsi que des commentaires qui avaient été composés à leur sujet, puis préparant une édition critique et leurs propres commentaires pour l'ensemble de ces documents. Ce travail à peine achevé, dès 656, ces ouvrages furent employés comme manuels dans l'École de Mathématiques qui avait été établie au sein de l'Université impériale et où des étudiants pouvaient suivre un parcours spécialisé de mathématiques en vue d'accéder à une carrière dans la bureaucratie. Ces dix canons formèrent, selon un agencement différent de l'ordre chronologique de leur composition, la matière de deux cursus [7]. Je ne m'intéresserai ici qu'au plus élémentaire de ces cursus, n'évoquant de fait que deux des ouvrages étudiés dans ce contexte : le premier canon travaillé, le *Classique mathématique de maître Sun*, qui fut mis au point aux environs de l'an 400 (même si le texte que nous pouvons lire montre des marques de modifications datant du VIIIe siècle), et le canon qui formait la pièce maîtresse de ce parcours : *Les Neuf chapitres sur les procédures mathématiques*, dont je date l'achèvement du Ier siècle de notre ère. L'étude de cet ouvrage et des commentaires rédigés à son propos par Liu Hui au IIIe siècle et par l'équipe travaillant avec Li Chunfeng au VIIe siècle requérait, en effet, par comparaison avec les autres livres, le nombre d'années de loin le plus important.

Ces éléments d'histoire permettent d'énoncer deux points importants de méthode. Si ces canons et leurs commentaires étaient enseignés dans les mêmes cursus, cela signifie que les acteurs du VIIe siècle les considéraient de fait comme associés à une même culture mathématique. De plus, les six premiers canons du premier cursus sont pour l'essentiel composés de problèmes mathématiques et d'algorithmes permettant de les résoudre : ils sont de ce fait difficiles à interpréter. Par contraste, les commentaires sélectionnés ou rédigés par l'équipe de Li Chunfeng comportent, eux, des discussions sur les mathématiques et des références explicites à la pratique des mathématiques. Ces commentateurs sont concrètement les lecteurs des canons les plus anciens que nous puissions observer, et ils nous fournissent des indices essentiels pour décrire la culture mathématique qui constitue mon premier exemple. J'insiste sur ce point : la description d'une culture mathématique ne doit pas dériver d'impressions ou d'intuitions, mais s'appuyer sur des démonstrations historiques basées sur des documents. Les affirmations que je formulerai plus loin se fondent autant qu'il est possible sur de longs arguments que je ne redévelopperai pas ici.

La question clef est à présent de comprendre comment se pratiquait l'activité mathématique dont ces documents témoignent. Une page typique de canons comme *Les Neuf chapitres* (c'est ainsi que j'abrègerai le titre dans ce qui suit) se compose de problèmes et d'algorithmes, tandis que les commentaires, qui figurent en caractères plus petits et le plus souvent entre les énoncés des algorithmes, en établissent systématiquement la correction, émaillant ces développements de toutes sortes de remarques et de discussions.

Comme le montrent les éditions les plus anciennes, tous ces écrits ne comportent que des caractères, sans aucun graphisme de quelque sorte que ce soit. En revanche, canons comme commentaires font référence à des baguettes avec lesquelles représenter des nombres sur une surface sur laquelle les calculs s'effectuaient. Faute de représentations de l'usage des baguettes ou de la surface à calculer dans les textes, tout ce qui se produisait sur cette surface doit être reconstitué à l'aide d'indices à glaner dans les écrits et sur la base d'arguments historiques. Notre situation est sans doute comparable à celle des historiens du futur qui se préoccuperont de comprendre la partie de l'activité mathématique qui se déroule aujourd'hui sur les tableaux noirs.

Les baguettes constituent le premier objet matériel que signalent les textes : nous verrons qu'elles jouaient un rôle clef dans la culture mathématique dont témoignent les canons. Par ailleurs, des canons comme *Classique mathématique de maître Sun* ou Les *Neuf chapitres* ne contiennent, ni ne mentionnent, aucune figure, ni même aucun autre auxiliaire visuel. En revanche, les commentaires, eux, évoquent, dans le contexte de certaines démonstrations, des figures et des blocs, optant pour les unes ou les autres selon qu'ils traitent de géométrie dans le plan ou dans l'espace. Avec les blocs, qui évoquent les modèles de plâtre ou de ficelle qu'utilisaient certains milieux mathématiques de la seconde moitié du XIXe siècle ou du début du XXe siècle, nous rencontrons donc un second type d'objet matériel auquel l'activité mathématique recourait. Les éditions anciennes de ces classiques ne comportent pas les figures dont parlent les commentateurs, et l'examen des indices que nous pouvons rassembler à leur sujet m'a conduite à conclure qu'elles aussi étaient, à l'époque dont nous parlons, des objets matériels. J'y renverrai par le terme de « diagramme », pour nous rappeler qu'il s'agit là d'auxiliaires visuels différents de ceux que nous associons volontiers au terme de « figure ».

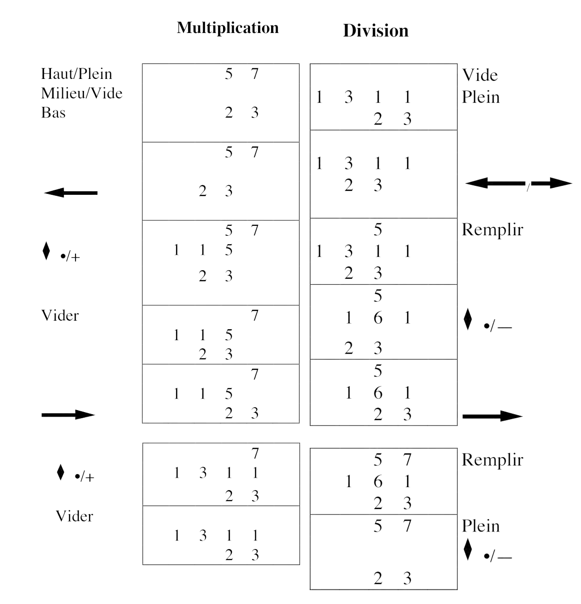
Au total, et par contraste avec ce que les documents ultérieurs attestent, l'activité mathématique dont témoignent notre première grappe d'écrits s'appuie, d'une part, sur des ouvrages ne comportant que du texte et, d'autre part, sur trois types d'objets : les baguettes, les blocs et les diagrammes [3].

Au fil d'une série d'articles, j'ai montré comment la description de ce que les acteurs faisaient avec les éléments qui figurent dans les écrits aussi bien qu'avec les objets que nous venons d'identifier (c'est ce que recouvre partiellement l'expression de « manière de faire des mathématiques ») est essentielle pour interpréter les écrits et pour saisir plus pleinement les connaissances mathématiques dont ils disposaient. Je n'illustrerai ici cette thèse qu'à l'aide d'un de ces aspects, en me concentrant à présent sur la manière dont les acteurs travaillaient avec la surface à calculer, selon ce que nous pouvons en reconstituer, et en montrant comment cette approche nous permet de saisir les connaissances qu'ils avaient développées sur les opérations arithmétiques.

Mon raisonnement commence avec les premières pages de *Classique mathématique de maître Sun*, à savoir, avec le début du cursus élémentaire. L'ouvrage y décrit, entre autres choses, l'usage des baguettes pour représenter les nombres sur la surface à calculer : sans entrer dans les détails, nous pouvons reconnaître, dans cette description, un système positionnel décimal au sens où l'écriture des signes 123 à ces positions implique que 1 signifie cent, 2 vingt, et 3 trois.

L'ouvrage s'appuie ensuite sur ce système de numération (purement matériel, donc, et absent à l'époque dans les écrits) pour proposer deux algorithmes, l'un pour multiplier et l'autre pour diviser – la division est ici dénommée *chu*. Le texte de ce dernier algorithme ouvre non pas par une prescription, mais par une affirmation : « cet algorithme est l'exact opposé de celui pour la multiplication. » Le sens de cet énoncé n'est pas évident sur la seule base du texte de ces deux algorithmes. En revanche, les calculs pour l'exécution de ces deux opérations que nous pouvons reconstituer sur la base des textes et dont je donne un exemple à la figure 1 suggèrent une interprétation. Ils seront essentiels à mon argument, et j'entrerai donc ici dans les détails.

Figure 1 –



Ces algorithmes s'appuient sur deux types de « positions », toutes deux désignées par le même terme chinois (*wei*). Tout d'abord, les nombres sont écrits horizontalement, comme suites de positions décimales. À cette notation positionnelle fait écho la propriété des algorithmes d'itérer la même suite d'opérations élémentaires le long de ces suites de chiffres. Par ailleurs, les algorithmes mettent tous deux en œuvre trois positions disposées verticalement l'une au-dessus de l'autre (haut, milieu et bas). La multiplication débute par la mise en place du multiplicateur (23 dans mon exemple) et du multiplicande (57) dans les positions, respectivement, inférieure et supérieure, laissant vide la position médiane. La disposition initiale de la division de 1311 par 23 lui est strictement opposée pour ce qui est des deux positions médiane et supérieure : contrairement à la multiplication, c'est la position supérieure qui se trouve vide, au début du calcul, tandis que la position médiane est, elle, pleine, puisqu'elle reçoit le dividende. Pour l'une comme pour l'autre des opérations, le calcul procèdera de la même manière, en emplissant celle de ces lignes qui est vide tout en vidant la ligne pleine. Opérant sur des configurations initiales opposées, les processus sont par suite eux-mêmes opposés l'un à l'autre. Le « résultat » de la multiplication sera donc produit au milieu tandis que celui de la division sera produit en haut. On voit ainsi apparaître les linéaments d'une relation d'opposition entre les deux opérations à travers les processus mêmes de leur exécution sur la surface à calculer. C'est la première propriété de ces flots d'opérations qui exécutent multiplication et division, nous y reviendrons.

À la différence des positions médiane et supérieure, opposées les unes aux autres entre la multiplication et la division, la position inférieure reçoit pareillement les opérateurs que sont le multiplicateur et le diviseur. Tous deux agissent de la même manière au cours de leurs opérations respectives : leurs chiffres significatifs ne sont pas modifiés, mais leurs positions décimales seront, elles, déplacées à chaque itération. La disposition des deux opérations et les algorithmes ont pour effet que l'exécution de la multiplication s'achève sur la position de départ de la division, et vice versa : si l'on enchaîne de la sorte multiplication et division, les opérations s'annulent réciproquement. C'est une seconde propriété de ces flots d'opérations.

À ces mises en place pour partie opposées et pour partie identiques des algorithmes sur la surface à calculer correspondent des flots de calcul qui donnent à voir la relation d'opposition entre multiplication et division. Ainsi, une fois les opérandes de la multiplication disposés, le multiplicateur 23 est déplacé vers la gauche jusqu'à ce que son chiffre des unités soit à la verticale du chiffre d'ordre de grandeur le plus élevé du multiplicande (5). Le multiplicateur étant ainsi multiplié par la puissance de 10 correspondant à ce dernier chiffre, les produits des chiffres de 23 par 5 peuvent alors être progressivement ajoutés à la position médiane, immédiatement au-dessus des chiffres correspondants du multiplicateur. Une fois cette sous-procédure achevée, 5 est éliminé de la ligne supérieure, 23 est décalé d'un cran vers la droite, et la même sous-procédure est répétée avec le chiffre suivant 7, qui sera à son tour éliminé en fin d'exécution. C'est ainsi que « ce que la multiplication produit » se trouve « au milieu » tandis que le multiplicande est lui éliminé. Le déroulement d'une division « produira », de façon opposée, le résultat « dans la position supérieure » tandis que le nombre dans la position médiane sera progressivement éliminé. Les chiffres du quotient sont en effet, par contraste, progressivement ajoutés dans la position supérieure (5, puis 7), tandis que les produits des chiffres du diviseur, dans la position adéquate correspondante, par 5 d'abord, puis par 7, sont retranchés (et non pas ajoutés) au fur et à mesure du dividende. Incidemment, si nous avions divisé non pas 1311, mais 1312 par 23, le quotient serait donné comme 57 + 1/23. Le fait que les résultats des divisions soient toujours exacts joue un rôle clef, mais cela requerrait un autre développement que je ne peux donner ici.

Dans le contexte de cette manière de faire des mathématiques, inculquée dès le début du premier cursus de l'École de Mathématiques, les algorithmes pour la multiplication et la division ont donc été façonnés pour donner à voir globalement, position par position, dans la dynamique même des exécutions sur la surface à calculer, un réseau d'oppositions et de similarités. C'est, je pense, à cela (et non pas au fait que multiplication et division annulent chacune l'effet de l'autre), que renvoie la déclaration du *Classique mathématique de maître Sun*, placée au début du texte de l'algorithme de division : « cet algorithme est l'exact opposé de celui pour la multiplication. » Cette conclusion mérite d'être examinée plus avant.

Tout d'abord, elle implique que les pratiques matérielles que l'activité mathématique mettait en œuvre dans ce contexte doivent être reconstituées pour que nous puissions interpréter pleinement les écrits. Cette affirmation a de fait une validité générale. Par ailleurs, l'interprétation que je propose tout à la fois de la déclaration du texte et des procédures de calcul implique que les processus d'exécution d'opérations sur la surface à calculer ne visent pas simplement à produire des résultats, mais qu'ils énoncent également des propriétés – ici une forme de relation entre multiplication et division.

Cet exemple élémentaire suffit à illustrer ce que j'entends par des « cultures mathématiques » différentes, et il permet également d'entrevoir l'intérêt que leur description revêt. Les idées mises en œuvre par les algorithmes représentés dans la figure 1 sont identiques à celles qui inspirent la manière dont nous avons appris nous-mêmes à exécuter multiplication et division. Et pourtant, aux yeux des acteurs qui emploient les uns ou les autres, les sens des deux ensembles d'algorithmes diffèrent partiellement, et nous allons voir que cette différence a des conséquences importantes. Par contraste avec cette manière de travailler autre, nos pratiques de calcul n'invitent pas à interpréter comme significatives les relations entre les flots d'opérations exécutant multiplication et division, ou à travailler avec ces flots. C'est l'un des traits qui confère sa singularité à la pratique de calcul dispensée dans le premier cursus au VII^e siècle en Chine, et la déclaration du *Classique mathématique de maître Sun* permet d'en saisir l'enjeu. Analysons à présent ce que nous apporte la connaissance de cet élément spécifique d'une telle « manière de faire des mathématiques ».

Un travail sur les relations entre les opérations

L'énoncé du *Classique mathématique de Maître Sun*, associé aux flots de calcul que nous pouvons reconstituer sur la base des textes d'algorithmes, nous a permis d'établir l'existence d'une pratique de calcul propre à un certain contexte : l'emploi de « positions » pour explorer et exprimer une interprétation des relations entre opérations. Ce faisant, il révèle l'existence d'un intérêt mathématique pour de telles relations. La connaissance de cette pratique va nous permettre de saisir plus généralement un savoir mathématique sur les relations entre opérations tel qu'il a été élaboré dans ce contexte, savoir qui n'avait pas été véritablement perçu jusqu'à présent. Sauf à lire ce que textes et inscriptions matérielles expriment de façon spécifique, nous passerions donc à côté d'une partie des savoirs mathématiques des acteurs, mais aussi d'une question fondamentale qui a animé leur recherche.

Le fait d'avoir mis au jour une telle pratique nous dote par ailleurs d'outils pour interpréter d'autres textes du même corpus et aller plus loin dans la reconstitution des pratiques des acteurs sur la surface à calculer. C'est ainsi que nous pourrons saisir plus avant le travail théorique que les acteurs ont déployé sur les opérations et appréhender également l'histoire de ce travail. Les opérations de multiplication et surtout de division, ainsi que leurs exécutions sur la surface à calculer décrites plus haut, s'avèreront alors avoir joué un rôle clef dans cette histoire.

Pour établir ce point, nous retournerons tout d'abord aux *Neuf Chapitres* dont le texte atteste la même pratique de calcul sur la surface ainsi que le même intérêt pour les relations entre opérations. Examinons, par exemple, – sans pour l'instant tenter de les interpréter – les textes des algorithmes fournis pour l'extraction de racines carrées ou cubiques (je n'en cite ici que les débuts, qui suffisent à mettre en évidence les phénomènes qui m'intéressent) : [2]

> « Procédure pour l'extraction de la racine carrée. On place le nombre-produit comme **dividende**. On emprunte une baguette et on la **fait progresser** en sautant *une* colonne. Une fois le **quotient** obtenu, on en multiplie *une* fois la baguette empruntée, ce qui fait le **diviseur**, puis **on divise par ceci**. Après avoir **divisé**, on *double* le **diviseur**, ce qui fait le **diviseur** déterminé. Si l'on **divise à nouveau**, on **diminue le diviseur en le rétrogradant**. On place à nouveau une baguette empruntée, et on la fait progresser comme au début. On multiplie ceci *une fois* par le **nouveau quotient** [...] »

> « Procédure pour l'extraction de la racine cubique. On place le nombre-produit comme **dividende**. On emprunte une baguette et on la **fait progresser** en sautant *deux* colonnes. Une fois le **quotient** obtenu, on en multiplie *deux* fois la baguette empruntée, ce qui fait le **diviseur**, puis **on divise par ceci**. Après avoir **divisé**, on *triple* ceci, ce qui fait le **diviseur** déterminé. **Si l'on divise à nouveau**, on **diminue (le diviseur) en le rétrogradant**. On multiplie par trois la quantité que l'on a obtenue, et on place ceci dans la rangée du milieu. On emprunte à nouveau une baguette et on la place dans la rangée du dessous. On les fait progresser, ce qui est au milieu en sautant une colonne, ce qui est au-dessous en sautant *deux* colonnes. **On place à nouveau un quotient** et on en multiplie ce qui est au milieu une fois, ce qui est au-dessous, *deux fois*. [...] »

Si l'on considère ces textes d'algorithmes indépendamment de tout contexte, ils sont difficiles à interpréter avec certitude. En particulier, les dispositions des calculs auxquels ils renvoient paraissent hors d'atteinte. Deux points essentiels sont en revanche manifestes.

J'ai marqué en gras les termes que ces textes reprennent à l'algorithme de division. Ils montrent à l'évidence que les formulations des algorithmes d'extraction façonnent – tacitement, à savoir : sans autre forme de commentaire – ces procédures de calcul comme des types de divisions. Sur la base de ce que nous avons vu plus haut, nous pouvons avancer l'hypothèse que les textes, comme les exécutions, énoncent une forme de relation entre extraction et division. Nous retrouvons donc l'intérêt des acteurs pour cette même question et son exploration à l'aide des mêmes outils de travail ainsi que, maintenant, des textes d'algorithmes.

J'ai, par ailleurs, souligné, dans les traductions des deux textes, les termes et expressions qui affichent ce en quoi les extractions de racines ne sont pas de véritables divisions. Ils montrent les modifications de l'algorithme de division par le biais desquelles les extractions ont été coulées dans le moule des divisions. Ces termes et expressions manifestent, eux aussi, un intérêt pour les relations entre opérations puisqu'ils se correspondent d'un texte à l'autre, donnant à voir comment ce sont des modifications corrélées de l'algorithme de division qui conduisent à l'extraction de racines carrées ou cubiques. Les mots en italiques soulignent les variations corrélées, mais différentes d'un algorithme à l'autre. L'emploi d'expression comme « multiplier une fois », au lieu de simplement « multiplier », qui accentue le parallèle avec l'expression de « multiplier deux fois » dans l'énoncé correspondant, met en évidence la volonté des auteurs de rédiger les deux textes en relation l'un avec l'autre.

L'ensemble de ces propriétés confirme ce que j'ai avancé plus haut : à côté du travail sur les flots de calcul exécutant les opérations sur la surface à calculer, nous voyons émerger, à travers les formulations des textes des algorithmes, une seconde facette des modalités d'exploration des relations entre opérations. Nous avions rencontré plus haut une pratique spécifique à l'aide d'objets matériels (baguettes et positions sur la surface à calculer). Nous découvrons à présent une manière spécifique de travailler – et d'exprimer des significations mathématiques – avec certains éléments qui composent les textes mêmes. Ces remarques nous dotent d'outils pour reconstituer de façon rigoureuse les flots de calcul auxquels renvoient les procédures d'extraction de racines carrées et cu-

2. [6] contient une traduction complète et annotée de ces textes.

biques. L'hypothèse essentielle que l'argumentation précédente nous permet d'avancer, hypothèse qui joue un rôle clef dans cette reconstitution, pose que les processus d'exécution mettent en évidence, ou « écrivent », sur la surface à calculer la similarité entre extractions et division de la même manière qu'ils donnaient à lire, plus haut, l'opposition entre multiplication et division. Nous savons donc que le premier chiffre de la racine – ou « quotient » –, $a.10^n$, puis les suivants, étaient placés successivement dans la position supérieure, tandis que le nombre A dont la racine était cherchée était placé comme « dividende ». Dans la position inférieure, un nombre faisant office de « diviseur » se distinguait de la position homonyme de la division du fait que sa valeur devait être ajustée. L'interprétation donne le flot de calculs reconstitué dans la figure 2.

FIGURE 2 –

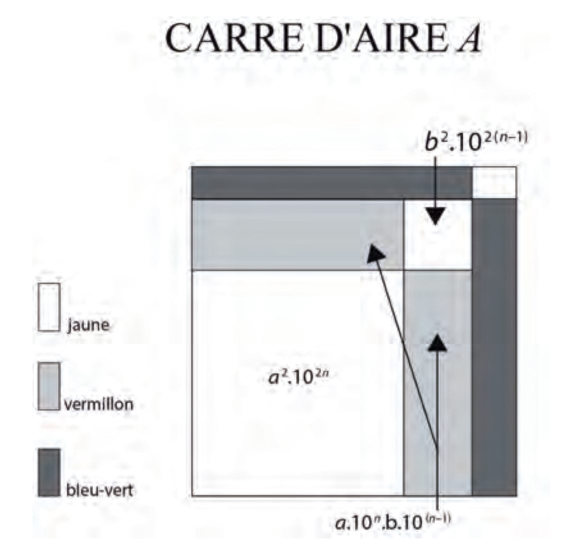
Pas 1	Pas 2	Pas 3	Pas 4	Pas 5	Pas 6	Pas 7	Pas 8	(Pas)
			2	2	2	2	2	haut
55225	55225	55225	55225	55225	15225	15225	15225	milieu
1	1	1	1	2	2	4	4	bas

Pas 1	Pas 2	Pas 3	Pas 4	Pas 5	Pas 6	Pas 7	Pas 8
			$a.10^n$	$a.10^n$	$a.10^n$	$a.10^n$	$a.10^n$
A	A	A	A	A	$A - a.a.10^{2n}$	$A - (a.10^n)^2$	$A - (a.10^n)^2$
1	10^2	10^{2n}	10^{2n}	$a.10^{2n}$	$a.10^{2n}$	$2a.10^{2n}$	$2a.10^{2n-1}$

Si nous avions lu les textes dans le seul but de savoir comment les racines étaient extraites – ce que la majeure partie des historiens ont fait –, nous aurions manqué le travail effectué pour façonner un ensemble de relations entre ces opérations aussi bien que les manières de travailler mises au point pour mener cette recherche (usage des positions et de la dynamique des calculs, formulation des textes d'algorithmes). Certes, nous nous serions convaincus, une fois de plus, que les idées mises en œuvre sont pour l'essentiel identiques à celles mobilisées par l'algorithme que certains d'entre nous ont appris enfants pour extraire des racines. Mais nous serions passés à côté de ce qui fait la différence entre ce dernier algorithme et celui des *Neuf Chapitres*. La reconstitution de la pratique d'écriture des textes d'algorithmes, comme de la pratique des calculs sur la surface (deux facettes de cette manière spécifique de faire des mathématiques qui illustre ce que j'entends par « culture mathématique »), invite à une lecture différente des textes comme des flots de calculs et par suite nous permet de saisir une autre facette du travail mathématique des acteurs qu'aucun autre discours ne formule. Ce point illustre clairement, je pense, le lien que j'ai affirmé entre, d'une part, la description de la « culture mathématique » des acteurs et, de l'autre, une meilleure compréhension de leurs connaissances mathématiques ainsi que des questions qu'ils poursuivaient.

Un autre indice confirme les conclusions qu'on peut tirer de cette forme d'interprétation, qui dérive d'une attention prêtée aux pratiques : il provient de la manière dont ces opérations étaient prescrites dans les algorithmes. En effet, les textes renvoient à l'opérande d'une extraction de racine par le terme de « dividende » et prescrivent l'opération, selon les cas, par les expressions : « on divise ceci par extraction de la racine carrée », ou « on divise ceci par extraction de la racine cubique ». Autrement dit, la prescription énonce, elle aussi sans autre forme de procès, la même structure pour l'ensemble des opérations, signalant la division *chu* comme leur fondement.

FIGURE 3 –



Ce n'est pas tout, et il nous sera utile, pour aller plus loin, d'évoquer les démonstrations que le commentateur Liu Hui développe pour établir la correction des algorithmes d'extraction de racines, et en particulier les auxiliaires visuels sur lesquels elles s'appuient. Cette démonstration est l'occasion pour Liu Hui de mettre en relation les pas élémentaires des extractions avec ceux de la division *chu*. Par ailleurs, c'est en vue de formuler le sens des étapes de l'extraction que le commentateur introduit un diagramme pour la racine carrée et des blocs pour la racine cubique. Si le texte du commentaire y renvoie, comme nous l'avons vu, aucune illustration ne figure dans les textes, et là aussi il revient aux historiens de les reconstituer. La figure 3 illustre la reconstitution que tous les historiens s'accordent à proposer pour l'auxiliaire visuel relatif à la racine carrée sur lequel Liu Hui appuie l'explicitation du sens des calculs. Je restitue les couleurs que le texte du commentaire signale – c'est un trait fréquent des diagrammes dans le contexte de cette culture. J'ajoute par ailleurs des marques permettant de relier l'exécution de l'extraction et la figure. Peut-être le diagramme employé par le commentateur comportait-il des caractères remplissant la même fonction, mais nous n'avons aucun indice à ce sujet. Nous reviendrons plus loin sur ce diagramme, dans la mesure où nous verrons qu'il joue un rôle dans la structuration d'un ensemble toujours plus large d'opérations.

La division *chu* au fondement d'un ensemble d'opérations

Pour résumer les conclusions que nous avons obtenues jusqu'ici, nous avons rencontré plusieurs traits caractéristiques d'une culture mathématique en nous concentrant sur la pratique des calculs. Au nombre de ces traits, nous avons relevé l'usage de positions sur la surface à calculer pour établir, par les flots de calcul, des liens entre les opérations. Les positions décimales de la notation positionnelle des nombres s'inscrivent dans ce paysage, au sens où elles constituent l'une des sortes de positions mises en œuvre par la pratique du calcul. À leur usage correspond l'emploi d'algorithmes uniformes opérant sur les suites de chiffres des opérandes et produisant, pour ce qui est des opérations de la famille des divisions, les résultats chiffre à chiffre. Par ailleurs, la division *chu* s'est avérée, dans ce contexte, jouer un rôle central. La combinaison de l'ensemble de ces traits se retrouve dans deux autres sujets traités dans Les *Neuf chapitres*. Analysons-les successivement. Le premier concerne la résolution des systèmes d'équations linéaires, qui fait l'objet du chapitre 8 de l'ouvrage. L'algorithme central décrit tout d'abord une mise en forme initiale des données sur la surface à calculer, et permet donc aisément de la reconstituer comme suit (le système en termes modernes, donné à gauche, correspond à l'inscription sur la surface reconstituée à droite) :

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
. \\
. \\
. \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
a_{n1} & \dots & a_{21} & a_{11} \\
a_{n2} & \dots & a_{22} & a_{12} \\
. & . & . & . \\
. & . & . & . \\
. & . & . & . \\
a_{nn} & \dots & a_{2n} & a_{1n} \\
b_n & \dots & b_2 & b_1
\end{array}
$$

Ainsi chaque équation linéaire correspond à une colonne, et les coefficients associés à une même inconnue sont tous placés dans une même ligne. Là aussi, donc, les acteurs ont élaboré une notation positionnelle pour le système d'équations. L'algorithme, lui, correspond à la méthode du pivot de Gauss. Il opère de la façon suivante : à supposer que les termes supérieurs des deux colonnes les plus à droite soient non nuls, le terme supérieur de la colonne de droite multiplie la colonne immédiatement à sa gauche, à la suite de quoi le terme supérieur de cette dernière colonne est éliminé en opérant sur ces deux colonnes. Cette sous-procédure est répétée jusqu'à obtenir le système triangulaire suivant :

$$
\begin{array}{llll}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
0 & + & c_{22}x_2 & + \dots + c_{2n}x_n = d_2 \\
. & & & \\
. & & & \\
. & & & \\
0 & + & 0 & + \dots + c_{nn}x_n = d_n
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
0 & \dots & 0 & a_{11} \\
0 & \dots & c_{22} & a_{12} \\
 & . & . & . \\
 & . & . & . \\
0 & . & . & . \\
c_{nn} & \dots & c_{2n} & a_{1n} \\
d_n & \dots & d_2 & b_1
\end{array}
$$

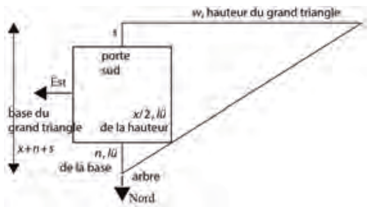
L'algorithme est conclu en déterminant x_n par une simple division, puis en calculant successivement les autres inconnues de manière semblable. Notons en passant que la division qui produit x_n présente le dividende sous le diviseur. Ici aussi, à une notation positionnelle du système, correspond un algorithme uniforme, puisqu'il détermine la suite des inconnues à l'aide d'une itération des mêmes sous-procédures, lesquelles traitent les positions de façon uniforme. Des marques positives et négatives sont introduites au cours du chapitre pour permettre d'achever les opérations dans tous les cas, puis pour étendre l'ensemble des systèmes que l'algorithme peut traiter. Remarquons, enfin, que les opérations de l'algorithme exploitent de façon centrale la structuration des données sur la surface à calculer.

De la même manière que précédemment, l'interprétation de l'algorithme comme identique à la méthode du pivot de Gauss est pertinente, mais elle ne saisit qu'une partie du savoir mathématique élaboré. En effet, l'observation des mêmes éléments que plus haut (les termes employés pour désigner les opérandes, le texte de l'algorithme et le flot des calculs) met ici encore en évidence un fait inattendu. Il s'avère que les termes constants des équations se voient assigner la dénomination de « dividendes », tandis que les coefficients des inconnues sont décrits comme formant « des diviseurs en carré » – c'est d'ailleurs, selon moi, le sens du nom de l'algorithme (en chinois *fang cheng* « mesures en carré »). Enfin, l'opération centrale d'élimination des termes supérieurs non nuls des colonnes est prescrite comme une « division *chu* verticale ». Il apparaît donc une fois de plus, par les mêmes biais, que le travail des acteurs ne s'est pas limité à déterminer un algorithme pour produire des résultats. Ils ont mené, au-delà, une réflexion conceptuelle sur les relations entre les opérations, qui a conduit à concevoir la résolution des systèmes d'équations linéaires comme une division généralisée, opposant une suite de dividendes à un carré de diviseurs (les dividendes sont ici aussi sous les diviseurs), et articulant des formes de division horizontales et verticales [4]. Nous retrouvons là encore, d'une part, un intérêt pour la structuration d'un ensemble d'opérations et, de l'autre, la division *chu* comme soubassement de cet ensemble élargi. Et, dans ce contexte, les positions semblent avoir une fois de plus servi d'outil de travail pour la menée de l'exploration.

Nous avions dégagé, grâce à l'observation d'aspects de la culture mathématique, une réflexion des acteurs sur les opérations et les relations entre elles. Nous constatons que la mise au jour de ce programme de travail, qu'aucun texte ne paraît formuler explicitement, nous permet de donner sens à un ensemble croissant d'indices que recèlent les textes et de saisir un savoir mathématique propre aux acteurs qui était jusqu'à présent demeuré invisible. Que l'équation linéaire soit conçue dans ce contexte comme l'opposition d'un dividende et de diviseurs, ce n'est en fait qu'un aspect d'un fait plus général, comme nous le verrons à présent, en nous tournant vers le second sujet traité dans Les *Neuf chapitres* où positions et division *chu* jouent également un rôle clef.

J'introduirai ce sujet en montrant comment la description de facettes de la culture mathématique dans le contexte de laquelle l'écrit fut rédigé, avec la restitution des flots de calculs sur la surface et des diagrammes qui s'en déduit, fournit des outils clefs pour l'interprétation. L'algorithme à comprendre est formulé à la suite du problème que je représenterai par la figure 4 (en respectant la représentation des directions cardinales usuelle à l'époque) :

Figure 4 –

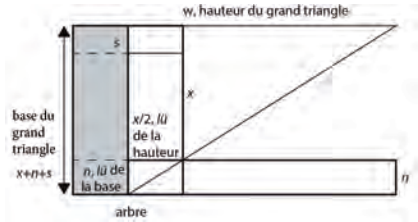


Il s'agit de déterminer le côté d'une ville carrée, sachant qu'une personne marchant *s bu* (unité de distance) à l'extérieur de la porte sud, puis *w bu* vers l'ouest aperçoit un arbre situé à *n bu* de la porte nord. L'algorithme que proposent Les *Neuf chapitres* est formulé comme suit (je souligne certains mots par des italiques) :

« On multiplie, par la quantité de *bu* à l'extérieur de la porte nord, la quantité de *bu* marchés vers l'Ouest, et on double ceci, ce qui fait le *dividende*. On somme les quantités de *bu* à l'extérieur de la porte Sud et de la porte Nord, ce qui fait le *diviseur rejoint*. Et on *divise par extraction de la racine carrée*, ce qui donne le côté de la ville carrée. »

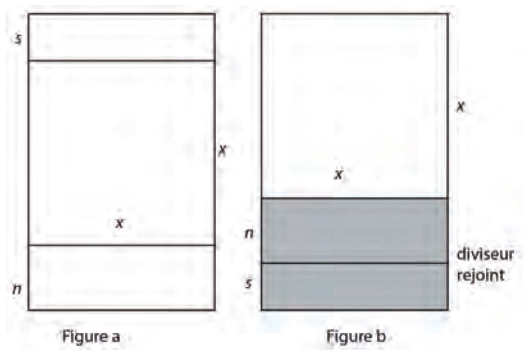
L'algorithme calcule donc deux opérandes (« dividende » et « diviseur rejoint ») et prescrit l'opération comme une « extraction de racine carrée ». Quel est le sens de cette opération ? De fait, elle ne peut être une extraction de racine carrée, puisque l'opération ne devrait avoir qu'un opérande, pas plus qu'elle ne peut être une division. Le commentaire de Liu Hui fournit, ici, des indices précieux pour traiter la difficulté. Le commentateur décrit un processus graphique auquel ne correspond aucune illustration dans le texte et que je traduirai en une suite de figures. J'ai marqué sur la figure 4 la hauteur et la base d'un grand triangle. Le terme *lü* accolé à la hauteur et à la base d'un second triangle de la figure signale la similitude entre ces deux triangles. De cette observation, Liu Hui tire l'égalité entre les aires du rectangle horizontal, de côtés, respectivement, w et n, et du rectangle vertical, de côtés, respectivement, $x/2$ et $n+x+s$ (voir figure 5).

Figure 5 –



Le double de cette aire correspond à ce que l'algorithme dénomme « dividende » : Liu Hui l'interprète comme l'aire du rectangle vertical auquel on a adjoint le rectangle grisé. Elle correspond au rectangle de la figure 6a. Liu Hui interprète enfin le calcul du diviseur rejoint, par la prescription de faire se rejoindre les deux rectangles supérieur et inférieur, ce qui produit le rectangle grisé de la figure 6b. L'établissement de cette figure conclut son commentaire.

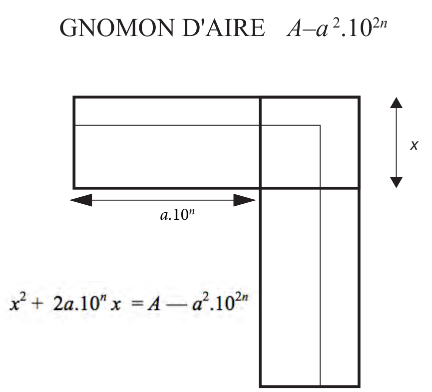
Figure 6 –



Le commentateur interprète donc l'opération mobilisée par l'algorithme comme l'équation représentée en termes modernes par : $x^2+(s+n)x = 2nw$

Pourquoi son exécution est-elle prescrite comme une extraction de racine ? La réponse à la question s'obtient en considérant la démonstration que Liu Hui a formulée pour ce dernier algorithme, et en particulier le diagramme qu'il introduit pour énoncer un sens aux opérations de l'algorithme et dont la figure 3 propose une reconstitution. Le commentateur interprète les pas 1 à 6 de l'algorithme (voir figure 2) comme visant à soustraire de A l'aire du carré de côté $a.10^n$. Si l'on écarte ce carré de la figure, il reste un gnomon, représenté à la figure 7.

Figure 7 –



En dépliant ce gnomon, on obtient une figure comparable à celle avec laquelle Liu Hui établit l'équation quadratique. De fait, en omettant la première partie de l'algorithme d'extraction de racine (en supprimant donc du résultat le chiffre de la racine calculé à ce point) et en débutant l'algorithme au pas 8, on résout l'équation quadratique qu'écrit ce gnomon (ou rectangle). Or, si l'on observe la configuration de la surface à calculer au pas 8, on constate qu'il reste, à ce point du calcul, deux termes qui correspondent exactement aux opérandes de l'équation quadratique décrite par l'algorithme dont nous élaborons l'interprétation. L'équation quadratique est donc une opération qui dérive de l'extraction de racine au sens où la procédure qui l'exécute est une sous-procédure de l'exécution de l'extraction : on comprend tout à la fois comment elle s'introduit et comment elle s'exécute dans ce contexte. De ceci, plusieurs conséquences s'ensuivent.

Tout d'abord, nous constatons qu'un grand nombre d'ingrédients entre dans l'élaboration de l'interprétation : les démonstrations par lesquelles le commentateur établit la correction tant de l'algorithme résolvant le problème cité, que de l'algorithme d'extraction de racine ; les reconstitutions des diagrammes et des flots de calcul sur la surface à calculer, appuyées sur une connaissance des pratiques à l'œuvre dans ce contexte. On voit que, dans le contexte d'une manière donnée de faire des mathématiques, des pratiques élémentaires (pratiques des diagrammes, pratiques des calculs, etc.) s'articulent de façon spécifique.

Par ailleurs, nous observons qu'ici, à nouveau, les opérations d'extraction de racine carrée et d'équation quadratique sont liées par les processus de calcul sur la surface à calculer, et tout particulièrement par la manière de gérer les positions. Tant pour ce qui est des processus de calcul que pour le rôle joué par les diagrammes, la relation est toutefois établie de façon différente de ce que nous avions décrit pour la multiplication et la division. Malgré tout, comme plus haut, le lien entre les opérations s'exprime également par la terminologie choisie pour désigner les opérandes et les opérations. Tout ceci explique tout à la fois les moyens graphiques employés pour établir l'équation que le fait que seuls deux opérandes soient identifiés pour l'équation quadratique (le terme en x^2 ne sera identifié qu'au XIe siècle).

Cette dernière remarque soulève une question cruciale, particulièrement intéressante. Le fait que l'équation quadratique ne se voit associer que deux opérandes met en évidence une *corrélation* entre des manières de faire des mathématiques (ici, en particulier, la pratique des calculs sur la surface en lien avec l'établissement de relations entre opérations) et les concepts ou plus largement les savoirs mathématiques produits. Il s'agit d'un fait, je pense, tout à fait général, et que seul l'examen attentif des « cultures mathématiques » permettrait d'explorer plus avant. Cette problématique fournit à mes yeux une raison fondamentale pour justifier que nous accordions de l'intérêt à la diversité des manières de faire des mathématiques. Il s'agit de comprendre comment les connaissances mathématiques sont corrélées à des manières de travailler collectivement partagées. Telle est l'une des questions nouvelles à laquelle nous sommes conduits et sur laquelle j'espère qu'historiens des mathématiques et mathématiciens pourront réfléchir de façon conjointe.

Mais il y a plus. Si nous revenons à l'équation quadratique, nous réalisons que le texte des *Neuf Chapitres* ne contient à son propos que les noms des opérandes et la formulation de la prescription. En reconstituant de façon méthodique les manières de faire, nous avons pu faire apparaître une représentation de l'équation sur la surface à calculer et un processus d'exécution ainsi qu'une représentation graphique essentielle à son établissement. De fait, toutes les équations quadratiques établies dans des sources chinoises anciennes correspondent à la lecture de gnomons ou de rectangles. En d'autres termes, si nous n'avions pas prêté attention aux pratiques concrètes avec des objets matériels, nous aurions manqué des aspects clefs des manières dont les acteurs dans ce contexte ont travaillé avec cet objet mathématique et les outils qu'ils ont forgé dans ce but.

Plus important pour notre propos, nous serions également passés à côté du travail et des moyens que les acteurs ont déployés pour structurer un ensemble d'opérations. Or nous constatons à présent l'ampleur de la connaissance élaborée à ce sujet. Nous voyons que tant les équations linéaires que les équations quadratiques ont été dans ce contexte conceptualisées comme des formes de division. De fait, nombre de traditions qui ont pris leur essor en s'appuyant sur les canons qui sont au centre de cette culture mathématique, que ce soit en Chine, en Corée, ou au Japon, développeront le chapitre des équations algébriques dans ce cadre conceptuel. Et je montre, dans la version complète de l'article à paraître dans les actes de l'ECM, qu'il ne s'agit là encore que de l'un des aspects d'un phénomène beaucoup plus général.

Une autre culture mathématique en Chine ancienne et les enjeux

Récapitulons ce que l'observation de certaines facettes d'une culture mathématique (pour l'essentiel, un usage des positions et des processus de calcul) nous a permis de faire jusqu'à présent. Nous avons appuyé sur elle une interprétation plus rigoureuse des textes. Nous avons également reconstitué des manières de travailler avec des entités mathématiques. Enfin, nous avons saisi un corps de connaissances que les acteurs avaient élaboré au sujet des relations qu'entretiennent certaines opérations et dont l'étude systématique était demeurée jusqu'à présent invisible aux yeux des historiens. Dans ce contexte, l'opération de division *chu* est apparu comme un pivot. J'ai approché l'ensemble de ces aspects sur la base d'une grappe de documents provenant de la Chine ancienne : les canons édités avec certains commentaires au VII^e siècle et utilisés comme manuels dans des cursus mathématiques dispensés officiellement.

Or, récemment, deux autres grappes de documents mathématiques provenant également de la Chine ancienne ont refait surface, et une observation rapide des manières de faire des mathématiques dont ils témoignent nous permettrait de poser des questions, spécifiques comme générales, des plus intéressantes pour nous. Je me contenterai ici d'évoquer la première grappe de documents, renvoyant le lecteur à l'article publié dans les actes pour l'exploitation de la seconde.

Je parlerai donc seulement des documents nouvellement produits par l'archéologie. Depuis les années 1970, un nombre grandissant de tombes scellées en Chine dans les derniers siècles avant notre ère ont été fouillées, et les archéologues ont rapidement découvert que, dans certaines d'entre elles, des bibliothèques avaient été enterrées parmi les objets funéraires supposés accompagner le mort dans l'au-delà. Ces documents apportent des témoignages inédits sur les derniers siècles avant notre ère et bouleversent nos connaissances sur cette époque. Au cours de l'hiver 1983-1984, un premier document de mathématiques, de la taille d'un ouvrage, fut mis au jour dans un ensemble d'écrits de ce type. Depuis lors, les fouilles ou le marché des antiquités ont produit plusieurs autres documents semblables, et on peut s'attendre à de nouvelles trouvailles : toutes modifient en profondeur notre compréhension de l'histoire des mathématiques en Chine à l'époque. Pour l'instant, seuls deux des textes mathématiques découverts ont été complètement publiés (le premier en 2001) ; pour les autres, nous pouvons consulter quelques extraits, en attendant leur publication intégrale. Les conclusions que je proposerai sont donc fragiles, et elles pourraient être contredites par de nouvelles découvertes.

Ceux de ces documents que nous pouvons étudier paraissent en tout cas refléter une même manière de pratiquer les mathématiques : dans les termes que j'ai introduits plus haut, ils forment une même grappe. Par ailleurs, à ce que nous pouvons voir, ces écrits partagent plusieurs traits en commun avec les canons et leurs commentaires. On peut donc supposer que l'ensemble de ces documents ont eu des liens historiques étroits, sans pouvoir pour l'instant en préciser la nature exacte. L'important pour nous est que ces deux grappes de documents présentent également des différences capitales l'une avec l'autre, ce qui m'amène à avancer l'hypothèse que ces deux grappes témoignent de manières de faire des mathématiques différentes, même si toutes deux présentent des ressemblances entre elles. Je me concentrerai ici sur un ensemble de similarités et de différences essentielles pour mon propos.

Tout d'abord, comme les canons et leurs commentaires, ces documents ne comportent aucune illustration, se composant uniquement de caractères chinois et de signes de ponctuation. Ils renvoient eux aussi à des baguettes de calcul pour la représentation des nombres et à la disposition de valeurs numériques hors du texte. Cependant, aucune trace ne permet de déceler l'usage d'un système positionnel décimal pour l'écriture des nombres. Au contraire, un certain nombre d'indices glanés sur les opérations suggèrent que les nombres étaient représentés à l'aide d'un système de numération différent.

C'est le premier d'un ensemble de faits qui paraissent indiquer que la surface sur laquelle les calculs étaient effectués faisait l'objet d'une pratique différente. Plus généralement, en effet, nulle référence n'est faite à l'emploi d'un système de positions dans l'exécution des algorithmes, tandis qu'aucun de ces écrits n'utilise des termes comme « ligne », « colonne », ou « position ».

Autant pour les aspects matériels de la pratique du calcul. Si l'on se tourne à présent vers les opérations, un premier fait frappe d'emblée : la division paraît avoir été perçue comme une opération spécifique, différente de toutes les autres. J'en veux pour première preuve le fait qu'alors que les autres opérations peuvent être prescrites par de simples verbes, la division, elle, l'est toujours, au moins dans ce contexte, par des expressions complexes. Le terme *chu*, en particulier, ne peut seul prescrire une division, au contraire de ce que nous avons vu plus haut pour l'autre grappe de textes. Et lorsqu'on le rencontre isolé, il renvoie en fait à la soustraction. Il semble donc qu'on puisse percevoir tout à la fois un changement de sens du verbe *chu* et un changement de pratique de la division.

Ces documents récemment découverts comportent des algorithmes extrayant des racines carrées. Mais ces procédures ne déterminent pas les racines position décimale par position décimale et ne semblent itérer des sous-procédures sur une écriture positionnelle des nombres. Elles ne paraissent pas non plus présenter de relation à un processus comme celui de division comme nous avons pu l'observer dans les canons. Plus généralement, nulle trace ne paraît révéler un intérêt pour les relations entre les opérations.

Enfin, aucun des algorithmes dont nous avons vu la relation intime à la division, et à l'usage de positions, comme la résolution de systèmes d'équations linéaires ou d'équations quadratiques ne figure pour l'instant parmi les sujets traités dans ces documents.

En conclusion, que ce soit du point de vue des manières de travailler avec les processus de calcul, ou du point de vue des connaissances ou des projets, nous ne trouvons là aucun des éléments de la constellation de faits décrits plus haut. Ceci suggère une autre problématique d'intérêt à mon sens parfaitement général. En effet, ces nouveaux documents incitent à penser que Les *Neuf chapitres* et les autres canons témoignent de l'émergence, au plus tard au Ier siècle de notre ère, de deux ensembles de choses étroitement associées : d'une part, une manière de faire des mathématiques (plus précisément une manière de travailler avec les processus de calcul et un intérêt pour les algorithmes uniformes) ; de l'autre, des connaissances nouvelles, au nombre desquelles je compte de nouvelles façons d'exécuter des opérations connues, plusieurs nouvelles opérations, une manière de comprendre les relations entre ces opérations et un système positionnel décimal de numération. Ainsi donc, c'est tout à la fois une manière de travailler et un corps de connaissance qui apparaitraient de concert.

Quand les historiens des mathématiques se sont intéressés à l'activité mathématique en tant que telle, ils se sont en général plutôt penchés, sauf exception que je ne peux développer ici, sur l'histoire de la connaissance mathématique. Pourtant, les phénomènes que j'ai évoqués plus haut suggèrent qu'il existe également une histoire des manières de faire des mathématiques. Qui plus est, ces deux dimensions (la connaissance et la pratique mathématique) paraissent constituer des facettes inséparables de la même réalité. C'est ce que nous avons vu pour la Chine ancienne, et je pense qu'il en va de même partout et de tous temps.

Je pose la conjecture que ces deux facettes se sont transformées conjointement. C'est sans doute l'une des raisons fondamentales pour laquelle la description des manières de faire peut aider à l'interprétation des écrits et permettre de mieux saisir les connaissances qu'ils attestent. Cette articulation intime entre ces deux ordres de faits constitue un autre motif au nom duquel l'histoire des mathématiques devrait s'intéresser à la description des cultures mathématiques. Après tout, les manières de faire des mathématiques ne tombent pas du ciel. Elles ont été façonnées et transformées par les acteurs, au cours du processus d'exploration des problèmes qu'ils cherchaient à résoudre et des questions auxquelles ils réfléchissaient. Elles représentent l'un des résultats de leur recherche, le travail mathématique produisant tout à la fois connaissances et pratiques. C'est en tout état de cause l'une des motivations principales de mon plaidoyer en faveur du fait que l'histoire des mathématiques prenne comme objet d'étude non pas seulement les connaissances, mais également les pratiques, et en fin de compte les relations entre les unes et les autres.

J'ai argumenté l'intérêt de se pencher sur les manières de faire des mathématiques en illustrant mon propos à partir d'exemples prélevés dans les documents chinois anciens. Bien d'autres grappes de textes produits plus près de nous, voire aujourd'hui, me paraissent relever de la même analyse. Je forme pour conclure cet article le vœu que les problématiques générales que j'y ai formulées inspirent des discussions et des travaux sur des cultures mathématiques dans d'autres périodes et dans d'autres champs, et, pourquoi pas, des coopérations entre mathématiciens et historiens pour aborder les pratiques mathématiques contemporaines sous ce jour. Je suis persuadée que de telles coopérations pourraient être fructueuses pour les historiens, et qui sait, elles pourraient apporter des aperçus intéressants sur les mathématiques d'aujourd'hui.

Références

[1] J.-B. Biot. « Compte-rendu de *Traité des instruments astronomiques des Arabes* traduit par J. J. Sédillot ». *Journal des Savants* (sept. 1841), p. 513–20, 602–10, 659–79.

[2] F. Charette. « The logical Greek Versus the imaginative Oriental : On the Historiography of 'Non-Western' Mathematics during the Period 1820-1920. » In : *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*. Sous la dir. de K. Chemla. Cambridge University Press, 2012, p. 274–93.

[3] K. Chemla. « Changes and Continuities in the use of diagrams *tu* Chinese mathematical writings (3rd century-14th century) [I] ». *East Asian Science, Technology, and Society An International Journal* **4** (2010), p. 306–26.

[4] K. Chemla. « Les problèmes comme champ d'interprétation des algorithmes dans les *Neuf chapitres sur les procédures mathématiques* et leur commentaires ». *Oriens Occidens* **3** (2000), p. 189–234.

[5] K. Chemla. « Mathématiques et culture. Une approche appuyée sur les sources chinoises les plus anciennes (version révisée de "Matematica e cultura nella Cina antica", traduite par Delphine Vernerey) ». *In La mathématique 1. Les Lieux et les temps.* Sous la dir. de C. Bartocci, et P. Odifreddi. Éditions du CNRS. **1** (2009), p. 103–152.

[6] K. Chemla et S. Guo. *Les neuf chapitres. Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires.* Dunod, 2004.

[7] A. Volkov. « Mathematics Education in East- and Southeast Asia ». In : *Handbook on the History of Mathematics Education*. Sous la dir. d'A. Karp et G. Schubring. Springer, 2014, p. 55–72, 79–82.

Karine Chemla

sphere umr 7219 (cnrs, université Paris Diderot) & projet erc saw.

Après des études de mathématiques à l'Énsjf, K. Chemla s'est tournée vers l'histoire des mathématiques et la sinologie. Chercheure au cnrs depuis 1982 (umr sphere, cnrs-Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité), elle travaille sur la diversité des pratiques et des cultures mathématiques, en particulier en Chine ancienne, et sur la circulation des savoirs. Elle anime aujourd'hui, avec Agathe Keller et Christine Proust, le projet d'études avancées financé par l'European Research Council « Sciences mathématiques du monde ancien » (saw). K. Chemla est l'auteur, avec Guo Shuchun, de l'ouvrage *Les Neuf Chapitres*, Dunod 2004. Elle a coordonné *The History of mathematical proof in the ancient traditions*, Cambridge University Press, 2012 ; avec J. Virbel, *Texts, Textual Acts and the History of science*, Springer, 2015 ; avec Renaud Chorlay et David Rabouin, *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences*, Oxford University Press, 2016 ; et, avec E. Fox Keller, *Cultures without culturalism in the making of scientific knowledge*, Duke University Press, à paraître en 2017.

Une version plus complète de ce texte est à paraître dans les actes du congrès de Berlin, et sera également déposé sur hal-shs. Je suis reconnaissante à Bruno Belhoste et à Nad Fachard pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée au long de la préparation de cet article. La recherche présentée ici a été financée par le Conseil Européen de la Recherche, dans le contexte du 7e programme cadre (fp7/2007-2013, erc Grant agreement n. 269804).

La fonction de Möbius à la rencontre des systèmes dynamiques

• T. de la Rue

On désigne par $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers, et on note $\#A$ le cardinal d'un ensemble fini A.

1. Des conjectures sur le caractère aléatoire de la fonction de Möbius

La fonction de Möbius μ est définie sur l'ensemble des entiers strictement positifs par

$$\mu(n) := \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré d'un nombre premier,} \\ (-1)^m & \text{si } n \text{ est le produit de } m \text{ nombres premiers distincts.} \end{cases}$$

C'est un cas particulier de *fonction multiplicative*, ce qui signifie que $\mu(n_1 n_2) = \mu(n_1)\mu(n_2)$ à chaque fois que n_1 et n_2 sont deux entiers premiers entre eux.

Déjà utilisée par Euler et Gauss, c'est August Ferdinand Möbius qui l'étudia de manière systématique en 1832. Cette fonction apparaît en effet de manière naturelle dans différentes branches des mathématiques. On mentionnera notamment ici son importance en théorie analytique des nombres : le comportement de la fonction de Möbius se révèle étroitement lié à la répartition des nombres premiers. Ainsi, il est possible de montrer de manière « élémentaire » l'équivalence du théorème des nombres premiers, selon lequel le nombre $\pi(x)$ de nombres premiers inférieurs à x est asymptotiquement équivalent à $x/\ln(x)$, avec le fait que les 1 et les -1 dans la fonction de Möbius se compensent asymptotiquement :

$$\frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \mu(n) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \tag{1}$$

(Voir par exemple [17].)

Figure 1 – August Ferdinand Möbius (1790–1868)

La vitesse à laquelle cette compensation s'effectue est actuellement inconnue. Une conjecture raisonnable serait que l'ordre de grandeur de la somme des N premiers termes de la fonction de Möbius se comporte asymptotiquement comme si les signes de ses termes non nuls étaient tirés indépendamment à pile ou face, et serait donc de l'ordre de $\sqrt{N}$. Ainsi, on aurait

$$\forall \varepsilon > 0, \ \frac{1}{N^{1/2+\varepsilon}} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \mu(n) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0, \tag{2}$$

ce qui constitue un énoncé équivalent à l'hypothèse de Riemann [21].

Mais ce sont d'autres aspects du caractère apparemment aléatoire de la fonction de Möbius qui nous intéressent ici. La *loi de l'aléa de Möbius*, énoncée informellement par exemple par Iwaniec et Kowalski [13, p. 338], stipule que la fonction de Möbius est si chaotique qu'à chaque fois que l'on considère une suite bornée de nombres complexes $\xi = \big(\xi(n)\big)_{n\geqslant 0}$ « raisonnablement simple », il n'existe aucune corrélation entre μ et ξ, au sens où l'on a l'orthogonalité suivante :

$$\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \xi(n)\mu(n) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \qquad (3)$$

Notons que (1) fournit déjà l'orthogonalité de μ à toute suite constante. Il s'agit maintenant de préciser ce que l'on entend par une suite ξ « raisonnablement simple ». C'est précisément ce qu'a fait Peter Sarnak en 2010, dans des notes mises en lignes sur sa page web [20]. (Voir aussi une version postérieure de ces notes [19], publiée en 2012.) Il y propose un énoncé mathématiquement précis, en se plaçant dans le cadre des systèmes dynamiques : selon Sarnak, la bonne façon de définir la complexité d'une suite dans ce contexte est de la mesurer par la complexité du système dynamique « le plus simple » qui la produit.

1.1 – Suites produites par un système dynamique

Les systèmes dynamiques considérés ici sont ce que l'on appelle des systèmes dynamiques *topologiques*, qui sont définis par l'action d'une transformation continue T sur un espace métrique compact X. Voyons dès maintenant une classe importante d'exemples de tels systèmes : on part d'un ensemble fini $\mathbb{A}$ (appelé *alphabet*), et on considère l'ensemble $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ des suites infinies d'éléments de $\mathbb{A}$, qui est un compact pour la topologie produit. Sur $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$, la transformation $S : \big(x(n), n\geqslant 0\big) \mapsto \big(x(n+1), n\geqslant 0\big)$, qui décale les suites d'un cran vers la gauche, est continue. On la nomme usuellement le *décalage*, ou *shift*. On appelle *sous-shift* un sous-ensemble fermé $Y\subset \mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ qui est stable par S. Chaque sous-shift Y fournit alors un système dynamique dit *symbolique* (Y,S).

Une suite $\xi = \big(\xi(n)\big)_{n\geqslant 0}$ est dite *produite par un système dynamique* (X,T) s'il existe un point $x\in X$ et une fonction f continue sur X tels que pour tout n, $\xi(n) = f(T^n x)$. Sarnak note que ce n'est pas restreindre le problème que de considérer uniquement des suites ξ produites par de tels systèmes dynamiques. En effet, si par exemple ξ est une suite dont les termes ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, disons $\xi(n)\in\mathbb{A}$ pour un sous-ensemble fini $\mathbb{A}\subset\mathbb{C}$, il suffit de prendre le système symbolique $(\mathbb{A}^{\mathbb{N}},S)$, la fonction f qui à une suite associe sa coordonnée d'indice 0, et la suite $x\in\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$ définie par $x(n) := \xi(n)$ pour tout $n\geqslant 0$: on a alors $\xi(n) = f(S^n x)$ pour tout $n\geqslant 0$. (Le cas général où ξ est une suite bornée de nombres complexes n'est pas plus difficile, puisque la construction du système fonctionne encore si l'on remplace l'ensemble fini $\mathbb{A}$ par un compact de $\mathbb{C}$.)

Il existe une façon naturelle de mesurer la complexité d'un système dynamique, en considérant son *entropie topologique* $h_{\text{top}}(X,T)$. Sans entrer dans les détails pour le cas général (pour lequel on renvoie le lecteur par exemple à [22]), on peut en donner la définition dans le cas d'un système symbolique (Y,S). On introduit d'abord, pour chaque entier $\ell\geqslant 1$, l'ensemble $B_\ell(Y)\subset\mathbb{A}^\ell$ des *blocs de longueur* ℓ *dans* Y : $B_\ell(Y)$ est l'ensemble des $w = w_0w_1\cdots w_{\ell-1}$ dans $\mathbb{A}^\ell$ pour lesquels il existe une suite $y\in Y$ et un entier $k\geqslant 0$ tels que $y(k) = w_0,\ldots,y(k+\ell-1) = w_{\ell-1}$. Alors l'entropie topologique de (Y,S) est donnée par

$$h_{\text{top}}(Y,S) = \lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{\ell}\log_2 \#B_\ell(Y).$$

(Voir par exemple [15].)

La suite ξ est dite *déterministe* si elle est produite par un système dynamique d'entropie topologique nulle. Par exemple, toute suite ξ appartenant à un sous-shift d'entropie topologique nulle est déterministe, et le choix de ce terme se justifie dans ce contexte par l'argument suivant : le nombre de blocs de longueur ℓ dans la suite croît avec ℓ de manière sous-exponentielle. Donc si ℓ est grand, la plupart des blocs de longueur ℓ qui apparaissent dans la suite se prolongent (à droite) de manière unique en un bloc de longueur $\ell+1$, *i.e. déterminent* le symbole suivant dans la suite.

1.2 – La conjecture de Sarnak

C'est précisément cette notion de suite déterministe qui est proposée par Sarnak pour jouer le rôle de suite « raisonnablement simple ». En remontant le fil, on arrive donc à cet énoncé :

Conjecture 1 (Conjecture de Sarnak). *Pour tout système dynamique* (X,T) *d'entropie topologique nulle, pour toute fonction* $f : X\to\mathbb{C}$ *continue sur* X*, pour tout* $x\in X$*,*

$$\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N} f(T^n x)\mu(n) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \qquad (4)$$

Ce type de résultat était déjà connu bien avant 2010 pour certaines suites déterministes. Comme on l'a déjà souligné, le cas des suites constantes revient au théorème des nombres premiers. Sarnak note également que le cas d'une suite ξ périodique (autrement dit, produite par un système dynamique *fini*), est lui-même équivalent au théorème des nombres premiers le long des suites arithmétiques. En fait, l'estimation suivante, prouvée par Davenport en 1937 [8], permet de traiter une classe plus générale de suites : pour tout $A > 0$, il existe une constante $C_A > 0$ telle que, pour tout $N \geqslant 2$,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \sum_{1\leqslant n\leqslant N} e^{i2\pi nt} \boldsymbol{\mu}(n) \right| \leqslant C_A \frac{N}{(\ln N)^A}. \qquad (5)$$

La relation d'orthogonalité (3) s'en déduit dès que ξ est un polynôme trigonométrique, c'est-à-dire de la forme $\xi(n) = \sum_{1\leqslant j\leqslant k} z_j e^{i2\pi nt_j}$, puis s'étend immédiatement au cas où ξ est une limite uniforme de tels polynômes trigonométriques, ce qui correspond à la classe des suites *presque périodiques*. Or, les suites presque périodiques sont exactement celles qui sont produites par des systèmes dynamiques particuliers, appelés *systèmes de Kronecker* ([9], Théorème 1.9). Les systèmes de Kronecker sont ceux pour lesquels l'espace est un groupe métrisable compact, et la transformation correspond à la multiplication par un élément fixé du groupe. Ces systèmes sont d'entropie topologique nulle, et la conjecture de Sarnak est donc valide pour eux.

Beaucoup plus récemment, un résultat prouvé par Green et Tao en 2008 étend la validité de (3) pour les suites produites par des *nilsystèmes* [11]. Dans le cas des nilsystèmes, l'espace est un groupe de Lie nilpotent quotienté par un sous-groupe discret cocompact, et la transformation est encore la multiplication par un élément fixé du groupe.

Après la publication des notes de Sarnak, la conjecture 1 a été vérifiée dans de nombreuses autres classes de systèmes dynamiques, incluant des exemples beaucoup moins structurés que ceux décrits ci-dessus. L'un des travaux les plus importants dans ce domaine, dû à Bourgain, Sarnak et Ziegler [6] concerne les *flots horocycliques*. Outre le fait qu'il prouve pour la première fois la conjecture de Sarnak pour un système *mélangeant*, ce travail fournit également un critère fondamental pour prouver l'orthogonalité de la fonction de Möbius (en fait, de n'importe quelle suite multiplicative bornée) à une suite donnée. On reviendra sur ce critère dans la section 3.3.

1.3 – La conjecture de Chowla

Mais l'argument le plus marquant avancé par Sarnak en faveur de sa conjecture vient du rapprochement avec une autre conjecture formulée par Chowla en 1965, et qui traite des corrélations multiples de la fonction de Möbius. (En fait, Chowla formula cette conjecture pour la fonction de Liouville, qui vaut 1 ou -1 suivant la parité du nombre de diviseurs premiers de n, comptés avec multiplicité.)

Conjecture 2 (Conjecture de Chowla). *Pour tout entier $s \geqslant 1$, pour tout choix d'entiers $1 \leqslant a_1 < \ldots < a_s$, et pour tout choix des exposants $i_0, i_1, \ldots, i_s \in \{1,2\}$ avec au moins l'un d'entre eux égal à 1,*

$$\frac{1}{N} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \boldsymbol{\mu}(n)^{i_0} \boldsymbol{\mu}(n+a_1)^{i_1} \cdots \boldsymbol{\mu}(n+a_s)^{i_s} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \quad (6)$$

Sarnak donne une interprétation dynamique de la conjecture de Chowla, qui sera présentée dans la section 2.3. Puis il explique que la validité de la conjecture de Chowla entraînerait celle de la conjecture 1. On donnera dans la section 3.1 les grandes lignes d'une preuve ergodique de cette implication, et en section 3.2 un argument en faveur de la conjecture de Chowla.

2. Des systèmes symboliques liés à la fonction de Möbius

Au-delà de la conjecture 1, Sarnak suggère plus généralement d'étudier la fonction de Möbius du point de vue des systèmes dynamiques, en introduisant notamment deux systèmes symboliques liés à la fonction de Möbius.

2.1 – Système dynamique engendré par une suite et généricité

On a expliqué ci-dessus que toute suite ξ à valeurs dans un ensemble fini $\mathbb{A}$ est produite par un système dynamique symbolique, ce qui revient à considérer la suite comme un point d'un sous-shift particulier. Parmi tous les sous-shifts contenant la suite ξ, il en existe un plus petit, qui est donné par

$$X_\xi := \overline{\{S^n\xi : n \geqslant 0\}}.$$

Ainsi, l'action du décalage sur le sous-shift X_ξ peut être considérée comme le système dynamique « le plus simple » produisant la suite ξ.

Ce système peut être étudié du point de vue topologique, et sous cet angle les questions soulevées relèvent essentiellement de l'identification des blocs de longueur finie apparaissant dans la suite ξ (par exemple, l'entropie topologique de (X_ξ, S) est obtenue à partir du nombre de blocs de longueur finie donnée). Mais un point de vue complémentaire consiste également à envisager (X_ξ, S) sous l'angle des *systèmes dynamiques mesurés*, c'est-à-dire en munissant X_ξ d'une mesure de probabilité invariante par l'action du décalage, et qui soit naturelle dans ce contexte. Ce sont cette fois les *fréquences* avec lesquelles les blocs apparaissent dans la suite ξ qui sont déterminantes, et la notion essentielle est ici celle de *généricité*.

Dans un système dynamique topologique (X, T), un point x est dit *générique* (sous l'action de T) pour une mesure de probabilité ν sur X si la suite des *mesures empiriques* $\left(\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\delta_{T^n x}\right)_{N\geqslant 1}$ converge faiblement vers ν, autrement dit si pour toute fonction f continue sur X,

$$\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N} f(T^n x) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int f\,d\nu.$$

Si l'on sait seulement que la convergence a lieu le long d'une suite d'entiers (N_k) tendant vers l'infini, on dit que x est *quasi-générique* pour ν le long de (N_k). On notera que si x est quasi-générique pour une mesure de probabilité ν, alors celle-ci est automatiquement *T-invariante* : pour toute fonction f continue sur X, on a $\int_X f\,d\nu = \int_X f\circ T\,d\nu$. Observons également que, par compacité de l'ensemble des mesures de probabilité muni de la convergence faible, tout point $x \in X$ est quasi-générique pour au moins une mesure de probabilité (ce qui au passage prouve l'existence de mesures de probabilité T-invariantes).

Dans le cas d'un système symbolique, dire qu'une suite ξ est générique sous l'action du décalage pour une mesure de probabilité ν revient à dire que, pour tout bloc fini $w = w_0 \cdots w_{\ell-1} \in \mathbb{A}^\ell$, la fréquence avec laquelle on observe w dans la suite ξ est égale à la mesure ν du cylindre $C_w := \left\{x = (x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}} : x_0 = w_0, \dots, x_{\ell-1} = w_{\ell-1}\right\}$:

$$\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \mathbb{1}_{C_w}(S^n\xi) \xrightarrow[N\to\infty]{} \nu(C_w).$$

En partant de $\xi = \boldsymbol{\mu}$[1], on obtient le système dynamique (X_μ, S), qui est le plus simple produisant la fonction de Möbius. La proposition de Sarnak consiste à étudier pour lui-même ce système dynamique, appelé *flot de Möbius*. En particulier, identifier la (ou les) mesure(s) de probabilité pour laquelle (lesquelles) la fonction de Möbius est (quasi-)générique serait extrêmement intéressant, mais comme on va le voir, cela reviendrait essentiellement à résoudre le problème posé par la conjecture de Chowla.

La compréhension de la dynamique engendrée par la fonction de Möbius passe d'abord par l'étude d'un système symbolique plus simple, lui-même naturellement lié à la fonction de Möbius.

2.2 – Le flot des sans-carré

Introduisons la suite η définie comme le carré de la fonction de Möbius :

$$\boldsymbol{\eta}(n) := \boldsymbol{\mu}^2(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par le carré} \\ & \text{d'un nombre premier,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sarnak nomme le système symbolique (X_η, S) le *flot des sans-carré*, et énonce un certain nombre de résultats précis sur ce système, dont on donnera une esquisse de preuve un peu plus loin.

Tout d'abord, il est possible de caractériser précisément les suites appartenant au sous-shift X_η. Remarquons que si A est une partie finie de $\mathbb{N}$ telle que $\boldsymbol{\eta}(n) = 1$ pour tout $n \in A$, et si p est un nombre premier, alors il n'existe aucun entier $n \in A$ tel que $n = 0 \mod p^2$ (c'est la définition de $\boldsymbol{\eta}$). En particulier, le nombre

$$t(A, p^2) := \#\Big\{q \in \{0,1,\dots,p^2-1\} : \\ \exists n \in A,\ n = q \mod p^2\Big\} \quad (7)$$

de classes de congruence modulo p^2 que l'on voit dans A vérifie toujours

$$t(A, p^2) < p^2. \quad (8)$$

On dit qu'un ensemble A est *admissible* s'il vérifie l'inégalité ci-dessus pour tout p premier. De même, un bloc fini $w = w_0 \cdots w_{\ell-1} \in \{0,1\}^\ell$ est dit *admissible* si $\{j : w_j = 1\}$ est admissible, puis qu'une suite ξ à valeurs dans $\{0,1\}$ est *admissible* si chacun de ses sous-blocs finis l'est. C'est le cas de $\boldsymbol{\eta}$, et comme l'ensemble des suites admissibles est visiblement stable par le décalage et fermé, toute suite de X_η

1. Pour que la construction fonctionne, on doit pouvoir considérer $\boldsymbol{\mu}$ comme un point de $\{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$, ce que l'on peut faire en prolongeant naturellement en 0 par $\boldsymbol{\mu}(0) := 0$.

est admissible. Or, il se trouve que cette condition nécessaire est également suffisante : une suite ξ à valeurs dans $\{0,1\}$ appartient à X_η si et seulement si elle est admissible.

En comptant le nombre de blocs admissibles de longueur ℓ donnée, on peut en déduire que l'entropie topologique du flot des sans-carré est donnée par

$$h_{\mathrm{top}}(X_\eta, S) = \prod_{p\in\mathscr{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}. \tag{9}$$

De plus, η est générique pour une mesure de probabilité ν_M qui peut être caractérisée par la formule suivante : pour toute partie finie A de $\mathbb{N}$, si l'on note

$$C_A := \left\{x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \forall n \in A,\ x(n) = 1\right\},$$

alors

$$\nu_M(C_A) = \prod_{p\in\mathscr{P}} \left(1 - \frac{t(A,p^2)}{p^2}\right). \tag{10}$$

On appelle ν_M la *mesure de Mirsky*, car elle apparaît implicitement dans un travail de Mirsky de 1949 [16] (en fait dans un cadre un peu plus général où les carrés des nombres premiers sont remplacés par les puissances r-ièmes de nombres premiers pour un certain $r \geqslant 2$).

Enfin, Sarnak identifie un *facteur* particulier du système mesuré (X_η, S, ν_M) : considérons le groupe compact $\Omega := \prod_{p\in\mathscr{P}} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, sur lequel agit la translation T définie par l'addition de $(1,1,\ldots)$. Alors (Ω, T) est un système de Kronecker, qui de plus est *minimal* : toutes les orbites sont denses dans Ω (ce qui découle du fait que les p^2 sont premiers entre eux, en utilisant le théorème chinois). La mesure de Haar (normalisée) sur Ω, que l'on note $\mathbb{P}$, est l'unique mesure de probabilité sur Ω invariante par T (on dit que (Ω, T) est *uniquement ergodique*). Remarquons que cette mesure est particulièrement simple à décrire. Écrivons les points de Ω sous la forme $\omega = (\omega_p)_{p\in\mathscr{P}}$, avec $\omega_p \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Alors sous $\mathbb{P}$, les coordonnées ω_p sont indépendantes et uniformément distribuées dans chaque $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Sarnak annonce que le système mesuré $(\Omega, T, \mathbb{P})$ est un *facteur mesurable* de (X_η, S, ν_M), ce qui signifie qu'il existe une application mesurable ψ, définie sur une partie de X_η de mesure 1 et à valeurs dans Ω, la mesure image de ν_M par ψ étant $\psi_*(\nu_M) = \mathbb{P}$, et telle que $T \circ \psi = \psi \circ S$. Autrement dit, on « voit » le système de Kronecker $(\Omega, T, \mathbb{P})$ dans le système symbolique (X_η, S, ν_M) en observant $\psi(x)$.

Quelque temps après la parution des notes de Sarnak, Cellarosi et Sinai [7] sont parvenus à montrer qu'en fait, les deux systèmes mesurés $(\Omega, T, \mathbb{P})$ et (X_η, S, ν_M) sont même *isomorphes*, c'est-à-dire que l'on peut construire un ψ comme ci-dessus qui soit de plus inversible sur une partie de Ω de mesure 1. Ainsi les propriétés « mesurables » du flot des sans-carré sont exactement celles du système de Kronecker $(\Omega, T, \mathbb{P})$. Leur méthode repose sur l'analyse spectrale du système (X_η, S, ν_M) : en utilisant notamment les résultats de Mirsky [16], on montre que l'espace $L^2(\nu_M)$ admet une base hilbertienne de vecteurs propres pour l'opérateur de Koopman $U_S : f \mapsto f \circ S$. (On dit alors que le système est *à spectre discret*.) De plus, les valeurs propres sont précisément les $e^{i2\pi j/p^2}$, $p \in \mathscr{P}$, $0 \leqslant j < p^2$. Or ces propriétés spectrales sont partagées par $(\Omega, T, \mathbb{P})$, et il suffit alors d'invoquer un fameux théorème dû à von Neumann : si deux systèmes ergodiques à spectre discret ont le même spectre, alors ils sont mesurablement isomorphes [12].

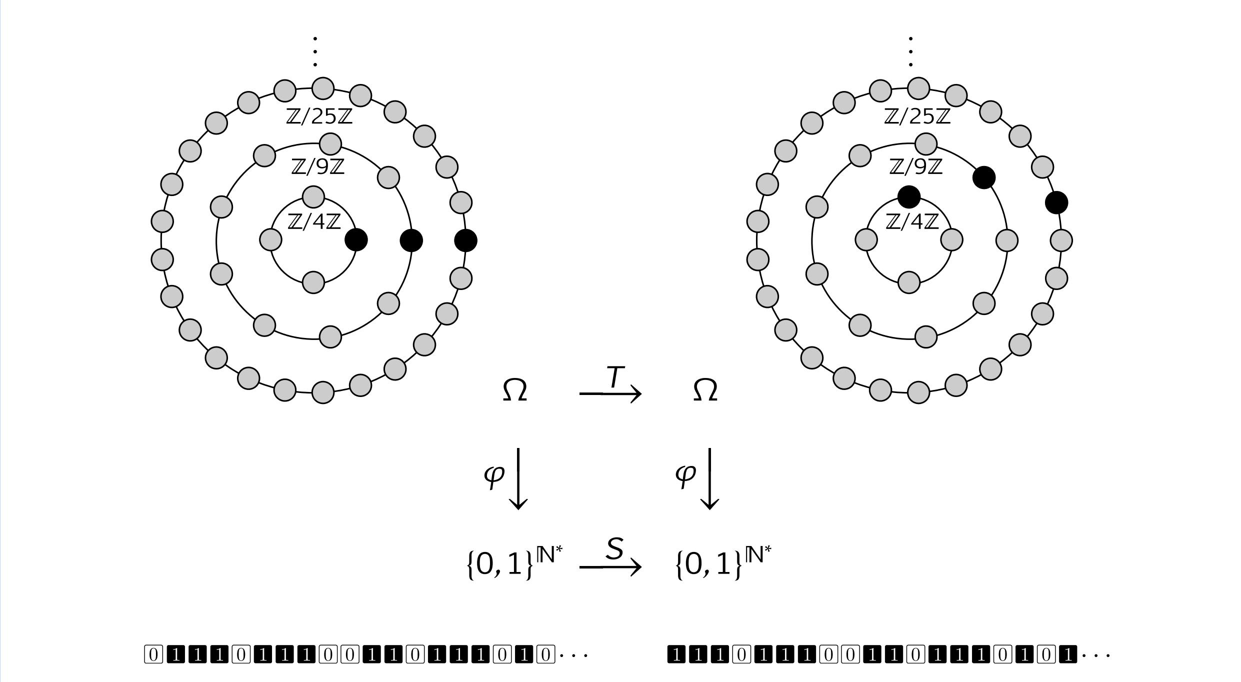
Il existe une méthode plus directe pour prouver l'isomorphisme entre $(\Omega, T, \mathbb{P})$ et (X_η, S, ν_M), qui de plus fournit explicitement un isomorphisme, une interprétation naturelle de la mesure de Mirsky, et des preuves dynamiques des propriétés du flot des sans-carré annoncées par Sarnak. Elle est exposée dans [1] dans un cadre plus général, où les carrés des nombres premiers peuvent être remplacés par une famille $\mathscr{B} = \{b_k : k \geqslant 1\}$ d'entiers deux-à-deux premiers entre eux et vérifiant $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{b_k} < \infty$. Un entier qui n'est divisible par aucun des éléments de $\mathscr{B}$ est dit *$\mathscr{B}$-libre*, et tous les résultats exposés ci-dessus se généralisent au cas où la suite η est remplacée par la suite $\eta_{\mathscr{B}}$, indicatrice des entiers $\mathscr{B}$-libres. On se contentera cependant de rester dans le cadre des entiers sans facteur carré pour exposer rapidement les grandes lignes de l'argument.

On commence par remarquer que la suite η elle-même peut être observée le long d'une orbite du système de Kronecker (Ω, T) : en effet, en partant du point $\mathbf{0} := (0,0,\ldots) \in \Omega$, et en considérant la fonction $f : \Omega \to \{0,1\}$ définie par

$$f(\omega) := \begin{cases} 0 & \text{si } \exists p \in \mathscr{P} : \omega_p = 0, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on vérifie que pour tout $n \geqslant 0$, $\eta(n) = f(T^n\mathbf{0})$. (Notons toutefois que η n'est pas *produite* par (Ω, T) au sens défini précédemment, car la fonction f utilisée ici n'est pas continue.) De manière équivalente, on peut aussi écrire $\eta = \varphi(\mathbf{0})$, en définissant la fonction

Figure 2 – La suite η observée dans le système de Kronecker (Ω, T)



mesurable $\varphi : \Omega \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ par

$$\varphi(\omega) := \left(f(T^n\omega)\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Par construction, on a évidemment $\varphi \circ T = S \circ \varphi$. L'image $\varphi_*(\mathbb{P})$ de la mesure de Haar sur Ω, qui est l'unique mesure de probabilité T-invariante, est alors S-invariante sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, et on peut facilement calculer ses valeurs sur les cylindres de la forme C_A : on constate qu'elles coïncident avec les expressions données en (10), et ainsi $\varphi_*(\mathbb{P})$ n'est autre que la mesure de Mirsky ν_M. La généricité de $\boldsymbol{\eta}$ pour ν_M se déduit ensuite du fait que, dans (Ω, T), $\mathbf{0}$ est générique pour $\mathbb{P}$ (conséquence de l'unique ergodicité). Le passage à la généricité de $\boldsymbol{\eta}$ serait direct si φ était continue. Mais φ n'est pas continue, et on a besoin d'un argument d'approximation qui utilise la convergence de la série de terme général $\frac{1}{p^2}$ pour conclure. Enfin, la caractérisation du sous-shift X_η s'obtient par le raisonnement suivant. On sait déjà que toute suite de X_η est admissible. À partir de (10), on montre que le support de ν_M est précisément constitué de l'ensemble des suites admissibles. Mais comme $\boldsymbol{\eta}$ est générique pour ν_M, le support de ν_M doit être contenu dans X_η.

2.3 – Le flot de Möbius, et une interprétation de la conjecture de Chowla

On a donc une bonne compréhension du flot des sans-carré, ce qui fournit déjà une connaissance partielle sur le flot de Möbius (X_μ, S). En effet, considérons l'application π qui à une suite $\xi \in \{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$ fait correspondre la suite $\left(\xi^2(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, de sorte que $\boldsymbol{\eta} = \pi(\boldsymbol{\mu})$. Alors π est continue sur X_μ, $\pi \circ S = S \circ \pi$, et $\pi(X_\mu) = X_\eta$. On dit que (X_η, S) est un *facteur topologique* de (X_μ, S), et le flot de Möbius en hérite un certain nombre de propriétés. Notamment, l'entropie topologique du flot de Möbius vaut au moins celle du flot des sans-carré, donc elle est strictement positive. C'est la moindre des choses, sinon $\boldsymbol{\mu}$ serait elle-même une suite déterministe, ce qui contredirait la conjecture de Sarnak. En effet, $\boldsymbol{\mu}$ ne peut pas être orthogonale à elle-même, car par généricité de $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\mu}^2$ pour la mesure ν_M, et par application de (10) lorsque $A = \{1\}$, on obtient la formule suivante qui donne la densité des termes non nuls de $\boldsymbol{\mu}$:

$$\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \boldsymbol{\mu}^2(n) \xrightarrow[N\to\infty]{} \prod_{p\in\mathscr{P}}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}.$$

On sait aussi que toute mesure de probabilité ν pour laquelle $\boldsymbol{\mu}$ est quasi-générique doit vérifier $\pi_*(\nu) = \nu_M$, par généricité de $\boldsymbol{\eta}$ pour ν_M. Malheureusement, ce que l'on sait du flot de Möbius s'arrête essentiellement à ce que le flot des sans-carré lui apporte, et aller plus loin nécessite de retourner dans le domaine des conjectures.

Parmi toutes les mesures de probabilité invariantes par le décalage sur $\{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$ et qui se projettent sur ν_M, Sarnak considère *l'extension complètement aléatoire de* ν_M. C'est la loi d'une suite aléatoire $\xi \in \{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$ obtenue de la façon suivante : on tire d'abord une suite de 0 et de 1 suivant ν_M, qui fixe la place des symboles 0 dans ξ, puis on détermine le signe de chaque position restante par une suite de tirages indépendants à pile ou face (un tirage par position). Plus formellement, on définit l'opération $\odot$, « produit terme à terme » de $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$, et on munit $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ de la mesure de probabilité produit $\beta := (1/2, 1/2)^{\otimes\mathbb{N}}$. Alors l'extension complètement aléatoire de ν_M est la mesure image de $\nu_M \otimes \beta$ par l'application $(\eta, \rho) \mapsto \eta \odot \rho$. Dans la suite, on l'appellera la *mesure de Sarnak*, et on la notera ν_S.

Conjecture 3 (Conjecture de Sarnak-Chowla). *La suite $\boldsymbol{\mu}$ est générique pour la mesure de Sarnak ν_S, extension complètement aléatoire de ν_M.*

En fait, Sarnak explique que la conjecture ci-dessus est équivalente à la conjecture de Chowla. On trouve dans [1, théorème 6.1] une preuve élémentaire de cette équivalence, valable dans un cadre plus général que le contexte de la fonction de Möbius. L'essentiel de l'argument se résume ainsi : prouver la généricité de $\boldsymbol{\mu}$ pour la mesure de Sarnak revient à vérifier la convergence

$$\frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} f(S^n \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[N \to \infty]{} \int f \, d\nu_S \tag{11}$$

pour toute fonction $f : \{-1,0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}$ qui est un polynôme en les variables $\xi(j)$, $j \in \mathbb{N}$ (par densité des polynômes dans l'espace des fonctions continues). Or, (6) n'est rien d'autre que (11) exprimée pour une fonction f qui est un monôme de la forme $f(\xi) = \xi(0)^{i_0} \xi(a_1)^{i_1} \cdots \xi(a_s)^{i_s}$, dans lequel les exposants $i_0, \ldots, i_s$ ne sont pas tous pairs. Par ailleurs, le cas d'une fonction monôme pour laquelle les exposants sont tous pairs découle de la généricité de $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\mu}^2$ pour la mesure de Mirsky.

3. Le point de vue ergodique, et l'utilisation de la théorie des couplages

Le but de cette section est d'apporter l'éclairage de la théorie ergodique, en particulier de la théorie des couplages de systèmes dynamiques mesurés initiée par Furstenberg [9], sur les différentes conjectures exposées ci-dessus. En particulier, on va donner les idées principales d'un argument ergodique, déjà esquissé dans les notes de Sarnak [20], prouvant que si la conjecture de Chowla est vraie, alors celle de Sarnak est vraie également (voir aussi [4, section 4.3]).

3.1 – Pourquoi Chowla implique Sarnak

On suppose donc ici la validité de la conjecture de Chowla, que l'on interprète dynamiquement par la généricité de la suite $\boldsymbol{\mu}$ pour la mesure de Sarnak ν_S. Considérons un système dynamique (X, T) d'entropie topologique nulle, une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ continue, et un point $x \in X$. Il s'agit d'établir la convergence (4). Pour cela, on écrit

$$\frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} f(T^n x) \boldsymbol{\mu}(n) = \int_{X \times \{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}} f \otimes F_0 \, d\sigma_N,$$

où σ_N est la mesure de probabilité empirique

$$\sigma_N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \delta_{(T^n x, S^n \boldsymbol{\mu})},$$

et F_0 la fonction qui à une suite associe son terme d'indice 0. Par compacité de l'ensemble des mesures de probabilité sur $X \times \{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie de la convergence faible, il suffit de vérifier que si, pour une suite d'entiers (N_k) tendant vers l'infini, σ_{N_k} converge faiblement vers une mesure de probabilité ν, alors ν vérifie $\int_{X \times \{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}} f \otimes F_0 \, d\nu = 0$. Supposons donc que le point $(x, \boldsymbol{\mu})$ est quasi-générique, le long de la suite (N_k), pour une mesure de probabilité ν. La transformation sous-jacente est ici $T \times S$, et donc ν est $T \times S$-invariante. Quitte à remplacer si nécessaire la suite (N_k) par une sous-suite, on peut supposer également que le point x lui-même est quasi-générique, le long de la même suite (N_k), pour une mesure de probabilité ν_x sur X, qui est T-invariante. En rappelant que $\boldsymbol{\mu}$ est supposée générique pour ν_S, on obtient donc que ν est une mesure de probabilité invariante sous l'action produit $T \times S$ sur $X \times \{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$, dont les marginales respectives sur X et $\{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$ sont ν_x et ν_S. On dit que ν est un *couplage* de ν_x et ν_S.

Par ailleurs, rappelons que ν_S est la mesure image de la mesure produit $\nu_M \otimes \beta$ par l'opération produit terme à terme de $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$. En formant ce que l'on appelle un *couplage relativement indépendant* au-dessus de $\left(\{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}, S, \nu_S\right)$ (voir par exemple [10], p. 126), on obtient un couplage γ des deux systèmes mesurés

$$(X, T, \nu_x) \text{ et } \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{-1,1\}^{\mathbb{N}}, S \times S, \nu_M \otimes \beta\right),$$

qui vérifie

$$\int_{X\times\{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}} f \otimes F_0 \, d\nu = \int_{X\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}\times\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} f(y)\eta(0)\xi(0)\, d\gamma(y,\eta,\xi). \quad (12)$$

Appelons ν' la marginale de γ sur $X \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$: ν' est elle-même un couplage de (X, T, ν_x) et $\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, S, \nu_M\right)$, et la mesure de probabilité γ peut être vue comme un couplage des deux systèmes

$$\left(X \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}, T \times S, \nu'\right) \text{ et } \left(\{-1,1\}^{\mathbb{N}}, S, \beta\right). \quad (13)$$

L'argument se termine en établissant que γ est nécessairement la mesure produit $\nu' \otimes \beta$: alors l'intégrale à droite de (12) se factorise par $\int_{\{-1,1\}^{\mathbb{N}}} \xi(0)\, d\beta$, qui vaut 0.

Il reste à expliquer pourquoi le couplage γ est le produit de ses deux marginales. Cela découle du fait que les deux systèmes mesurés présentés en (13) sont si différents qu'il n'existe pas d'autre couplage possible que le couplage produit : on dit qu'ils sont *disjoints*. La notion de disjonction a été introduite par Furstenberg [9], qui donne les premiers exemples de classes de systèmes disjoints parmi lesquels se trouve celui utilisé ici.

On a besoin pour l'exposer d'utiliser la notion d'*entropie de Kolmogorov-Sinai*, ou *entropie métrique* qui est l'analogue pour les systèmes dynamiques mesurés de l'entropie topologique pour les systèmes dynamiques topologiques (historiquement, elle fut d'ailleurs introduite par Kolmogorov en 1959 six ans avant l'entropie topologique par Adler, Konheim et McAndrew). À nouveau, on renvoie le lecteur à un ouvrage de référence (par exemple [5]) pour la définition générale de l'entropie de Kolmogorov-Sinai, et on se limitera ici à ce dont on a besoin dans ce contexte.

D'une part, dans le cadre d'une transformation continue sur un espace métrique compact, l'entropie métrique associée à une mesure de probabilité invariante est toujours majorée par l'entropie topologique. (En fait, l'entropie topologique est même le supremum des entropies métriques sur toutes les mesures de probabilité invariantes : c'est le *principe variationnel*. Voir par exemple [18, théorème 3.10].) Puisque (X, T) est supposé d'entropie topologique nulle, le système (X, T, ν_x) est donc d'entropie métrique nulle. De même, l'entropie du système mesuré $\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, S, \nu_M\right)$ coïncide, par isomorphisme, avec celle de l'addition de $(1,1,\ldots)$ sur $\prod_{p\in\mathscr{P}} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ muni de la mesure de Haar, qui est nulle également (rappelons qu'un système de Kronecker est d'entropie topologique nulle).

D'autre part, l'entropie métrique d'un système obtenu comme un couplage de deux autres systèmes est toujours majorée par la somme des entropies métriques des deux systèmes couplés. Ici, on en déduit que le système $\left(X \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}, T \times S, \nu'\right)$ est d'entropie métrique nulle.

Enfin, rappelons que, sous β, les termes successifs d'une suite aléatoire de -1 et de 1 sont identiquement distribués et indépendents. On dit que le système dynamique $\left(\{-1,1\}^{\mathbb{N}}, S, \beta\right)$ est un *schéma de Bernoulli*. Les schémas de Bernoulli sont toujours d'entropie strictement positive et, dans l'univers des systèmes mesurés, ils sont aussi loin que possible des systèmes d'entropie nulle. Ainsi, Furstenberg prouve qu'un schéma de Bernoulli est toujours disjoint d'un système d'entropie métrique nulle [9, théorème 1.2].

3.2 – Chowla à la limite

En se basant sur l'interprétation dynamique de la conjecture de Chowla donnée en 2.3, et par des arguments de couplages très similaires à ceux exposés dans la section précédente, on peut aussi apporter un élément en faveur de cette conjecture. Pour tout entier $\ell \geqslant 1$, considérons l'approximation $\boldsymbol{\mu}_\ell$ de la fonction de Möbius, obtenue en ne comptant que les nombres premiers jusqu'à ℓ :

$$\boldsymbol{\mu}_\ell(n) := \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ possède un facteur carré,} \\ (-1)^{m_\ell(n)} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $m_\ell(n)$ est le nombre de facteurs premiers de n inférieurs ou égaux à ℓ. Par les mêmes techniques que celles exposées dans [1] pour établir la généricité de $\boldsymbol{\eta}$, on peut montrer que $\boldsymbol{\mu}_\ell$ est générique pour une certaine mesure de probabilité ν_ℓ, invariante par le décalage sur $\{-1,0,1\}^{\mathbb{N}}$. On peut aussi écrire $\boldsymbol{\mu}_\ell = \boldsymbol{\eta} \odot \pi_\ell$, où $\pi_\ell(n) := (-1)^{m_\ell(n)}$ (pour les entiers n divisibles par un carré, $m_\ell(n)$ est ici compté sans multiplicité). De même, on prouve aussi que π_ℓ est générique pour une mesure de probabilité ρ_ℓ, invariante par le décalage sur $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$. Il s'en suit, comme en 3.1, que ν_ℓ est la mesure image d'un couplage γ_ℓ de ν_M et ρ_ℓ par l'application produit terme à terme. Or, d'après [1, théorème 6.4], on a la convergence de ρ_ℓ vers β quand $\ell \to \infty$. Ainsi, toute mesure de la forme $\lim_{k\to\infty} \nu_{\ell_k}$ pour une suite d'entiers ℓ_k tendant vers l'infini doit provenir d'un couplage de ν_M et de β. Mais par disjonction, un tel couplage ne peut être que la mesure produit, d'où l'on conclut que la suite de mesures de probabilité (ν_ℓ) converge vers la mesure de Sarnak.

3.3 – Couplages de puissances de T et conjecture de Sarnak

On présente enfin une autre application de la théorie des couplages, utile pour prouver la validité de la conjecture de Sarnak dans certains systèmes dynamiques. Cette méthode fut initiée par Bourgain, Sarnak et Ziegler [6], et reprise dans de multiples autres travaux sur la conjecture de Sarnak. Le point de départ est un critère d'orthogonalité à toutes les fonctions multiplicatives bornées [6, Théorème 2], dont une version avait déjà été obtenue par Kátai en 1986 [14]. On en donne ici une reformulation.

Théorème (Critère de Kátai-Bourgain-Sarnak–Ziegler). *Si ξ est une suite bornée de nombres complexes qui satisfait à l'égalité*

$$\limsup_{\substack{p_1,p_2\to\infty \\ p_1,p_2\in\mathscr{P},\ p_1\neq p_2}} \ \limsup_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \xi(p_1 n)\overline{\xi(p_2 n)} \right| = 0, \tag{14}$$

et si $\boldsymbol{m}$ est une fonction multiplicative bornée, alors ξ et $\boldsymbol{m}$ sont orthogonales, i.e. on a

$$\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \xi(n)\,\boldsymbol{m}(n) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Si l'on veut appliquer ce critère pour prouver la conjecture de Sarnak dans un système donné (X,T), donc pour une suite ξ de la forme $\xi(n) = f(T^n x)$, on est amené à contrôler

$$\limsup_{N\to\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} f(T^{p_1 n}x)\bar{f}(T^{p_2 n}x) \right|$$

pour deux nombres premiers distincts et assez grands p_1 et p_2.

Par compacité, il suffit de voir ce qui se passe pour une suite (N_k) tendant vers l'infini, le long de laquelle le couple (x,x) est quasi-générique sous l'action de $T^{p_1}\times T^{p_2}$ pour une mesure de probabilité γ sur $X\times X$. On a alors

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k} \sum_{1\leqslant n\leqslant N_k} f(T^{p_1 n}x)\bar{f}(T^{p_2 n}x) = \int_{X\times X} f\otimes\bar{f}\,d\gamma. \tag{15}$$

Maintenant, supposons par exemple que le système (X,T) est uniquement ergodique, et soit ν l'unique mesure de probabilité invariante par T. Alors x est automatiquement générique pour ν sous l'action de T. Si de plus on sait que le système dynamique mesuré (X,T,ν) est *totalement ergodique* (ce qui en gros signifie que l'on n'observe aucun phénomène périodique dans ce système), on peut en déduire que pour chaque $k\neq 0$, ν est aussi la seule mesure de probabilité invariante par T^k. Alors x est aussi générique pour ν sous l'action de chaque T^k, $k\neq 0$, et donc γ est un couplage de (X,T^{p_1},ν) et (X,T^{p_2},ν).

À ce stade, si l'on arrive à montrer que ces deux systèmes sont disjoints, alors γ est la mesure produit et la limite dans (15) est $\left|\int_X f\,d\nu\right|^2$. Or, en ce qui concerne l'orthogonalité à la fonction de Möbius, on peut toujours grâce à (1) retirer une constante à la fonction f, donc remplacer f par $f - \left(\int_X f\,d\nu\right)$. Cela revient à supposer que $\int_X f\,d\nu = 0$, et grâce au critère de Bourgain-Sarnak-Ziegler on obtient (4). C'est par exemple la méthode appliquée dans [3] pour montrer la conjecture de Sarnak dans une classe de systèmes symboliques dits *de rang un*, où la disjonction des puissances de T s'obtient de manière spectrale.

Mais la méthode peut aussi fonctionner quand les puissances de T ne sont pas disjointes, et même dans certains cas où elles sont toutes isomorphes ! En effet, il arrive que l'on connaisse suffisamment les façons de coupler les puissances T^{p_1} et T^{p_2} pour pouvoir contrôler l'intégrale $\int_{X\times X} f\otimes\bar{f}\,d\gamma$. C'est ce qui est fait dans [2], pour la classe des sytèmes dits *à spectre quasi-discret* (généralisation des systèmes à spectre discret).

L'utilisation du critère de Bourgain-Sarnak-Ziegler connaît toutefois une limitation inhérente à la puissance du résultat qu'il permet de démontrer : si la méthode s'applique à un système donné, elle permet d'obtenir l'orthogonalité d'une suite produite par le système non seulement à la fonction de Möbius, mais également à toute fonction multiplicative $\boldsymbol{m}$ pour laquelle

$$\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \boldsymbol{m}(n) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Or, pour tout entier $\ell \geqslant 2$ il existe une fonction multiplicative non nulle, de période ℓ, et qui satisfait à la propriété ci-dessus : pour $\ell = 2$, on peut prendre $\boldsymbol{m}(n) := (-1)^{n+1}$, et pour $\ell > 2$ on peut prendre pour $\boldsymbol{m}$ un caractère de Dirichlet non principal. Le système auquel on applique le critère ne peut donc pas produire une telle suite. On en déduit alors que la condition demandée par le critère n'est jamais satisfaite pour un système capable de produire une suite périodique non constante.

Références

[1] H. el Abdalaoui, M. Lemańczyk et T. de la Rue. « A dynamical point of view on the set of $\mathcal{B}$-free integers ». *International Mathematics Research Notices* **2015**, nº 16 (2015), p. 7258–7286.

[2] H. el Abdalaoui, M. Lemańczyk et T. de la Rue. « Automorphisms with quasi-discrete spectrum, multiplicative functions and average orthogonality along short intervals ». hal-01176039.

[3] H. el Abdalaoui, M. Lemańczyk et T. de la Rue. « On spectral disjointness of powers for rank-one transformations and Möbius orthogonality ». *J. Funct. Anal.* **266**, nº 1 (2014), p. 284–317.

[4] H. el Abdalaoui et al. « The Chowla and the Sarnak conjectures from ergodic theory point of view ». hal-01070531.

[5] P. Billingsley. *Ergodic theory and information*. Reprint of the 1965 original. Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, N.Y., 1978, p. xiii+194.

[6] J. Bourgain, P. Sarnak et T. Ziegler. « Disjointness of Möbius from horocycle flows ». In : *From Fourier analysis and number theory to Radon transforms and geometry*. Sous la dir. de Springer. Vol. 28. 2. New-York, 2013, p. 67–83.

[7] F. Cellarosi et Y. G. Sinai. « Ergodic properties of square-free numbers ». *J. Eur. Math. Soc.* **15** (2013), p. 1343–1374.

[8] H. Davenport. « On some infinite series involving arithmetical functions (II) ». *Q. J. Math* **8** (1937), p. 313–320.

[9] H. Furstenberg. « Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation ». *Math. Systems Theory* **1** (1967), p. 1–49.

[10] E. Glasner. *Ergodic theory via joinings*. **101**. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[11] B. Green et T. Tao. « The Möbius function is strongly orthogonal to nilsequences ». *Ann. of Math. (2)* **175**, nº 2 (2012), p. 541–566.

[12] P. R. Halmos et J. von Neumann. « Operator methods in classical mechanics. II ». *Ann. of Math. (2)* **43** (1942), p. 332–350.

[13] H. Iwaniec et E. Kowalski. *Analytic number theory*. **53**. American Mathematical Society Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004, p. xii+615.

[14] I. Kátai. « A remark on a theorem of H. Daboussi ». *Acta Math. Hungar.* **47**, nº 1-2 (1986), p. 223–225.

[15] D. Lind et B. Marcus. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995, p. xvi+495. isbn : 0-521-55124-2; 0-521-55900-6.

[16] L. Mirsky. « Arithmetical pattern problems relating to divisibility by rth powers ». *Proc. London Math. Soc. (2)* **50** (1949), p. 497–508. issn : 0024-6115.

[17] D. J. Newman. « Simple analytic proof of the prime number theorem ». *Amer. Math. Monthly* **87**, nº 9 (1980), p. 693–696.

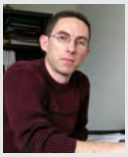
[18] K. Petersen. *Ergodic theory*. **2**. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1983, p. xii+329.

[19] P. Sarnak. « Mobius randomness and dynamics ». *Not. S. Afr. Math. Soc.* **43**, nº 2 (2012), p. 89–97.

[20] P. Sarnak. *Three lectures on the Möbius function, randomness and dynamics*. `http://publications.ias.edu/sarnak/`. 2010.

[21] E. C. Titchmarsh. *The theory of the Riemann zeta-function*. Second. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown. New York : The Clarendon Press Oxford University Press, 1986, p. x+412. isbn : 0198533691.

[22] P. Walters. *An introduction to ergodic theory*. **79**. Graduate Texts in Mathematics. New York : Springer-Verlag, 1982, p. ix+250.



Thierry de la Rue

Thierry de la Rue est chargé de recherche cnrs au Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem (Rouen), qu'il a dirigé de 2008 à 2011. Ses travaux de recherches portent essentiellement sur la théorie ergodique (étude des systèmes dynamiques mesurés), en lien avec la théorie des probabilités et la théorie des nombres.

L'auteur tient à remercier El Houcein el Abdalaoui, Élise Janvresse, Mariusz Lemańczyk, Christian Mauduit et un relecteur anonyme pour leurs conseils dans la rédaction de cet article.

Sur la destruction de grands arbres aléatoires récursifs

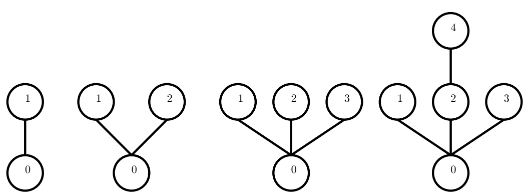
L'objet de ce texte est de présenter aussi simplement que possible les principaux résultats d'un programme récent portant sur l'étude des différents régimes observés lors de la destruction d'un arbre aléatoire récursif en supprimant ses arêtes les unes après les autres, uniformément au hasard.

• E. Baur
• J. Bertoin

1. Arbres aléatoires récursifs et modèles afférents

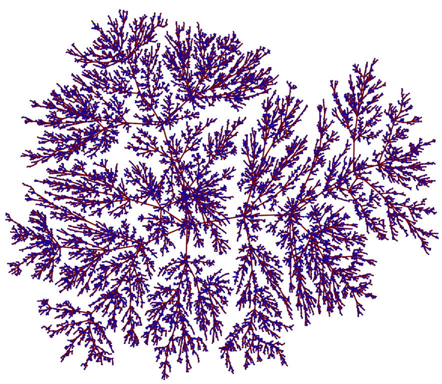
Rappelons qu'au sens de la théorie des graphes, un *arbre* est un graphe fini connexe dont le nombre de sommets est égal au nombre d'arêtes plus un ; cette dernière propriété étant alors équivalente à l'absence de cycles. Comme son nom l'indique, un arbre *récursif* est un arbre que l'on peut construire de façon récursive en incorporant les sommets les uns après les autres, voir la Figure 1 ci-dessous. Autrement dit, on part d'un ensemble totalement ordonné, disons $\{0,1,\dots,n\}$, le sommet 0 étant en quelque sorte distingué et pouvant être vu comme la racine. Pour chaque $j = 1,\dots,n$, on relie le sommet j par une arête à l'un des sommets précédents $0,1,\dots,j-1$. Clairement, on obtient un graphe connexe avec $n+1$ sommets et n arêtes, donc un arbre, et plus précisément, la famille des arbres qu'on peut construire ainsi a $n!$ éléments. Une propriété immédiate de cette construction est que la suite des sommets le long d'une branche quelconque de l'arbre qui part de la racine, est toujours croissante. Pour cette raison, les arbres récursifs sont parfois nommés également *arbres croissants*, voir [6].

Figure 1 – Un exemple de quatre premières étapes de la construction d'un arbre récursif



On parle d'*arbre aléatoire récursif uniforme*, souvent en omettant l'adjectif uniforme, pour désigner un arbre T_n choisi uniformément au hasard parmi les $n!$ arbres récursifs ayant n arêtes. Un tel arbre aléatoire est construit par un algorithme stochastique très simple : le sommet auquel j est rattaché est choisi uniformément au hasard parmi les précédents, et ce, indépendamment des arêtes déjà créées. On peut ainsi décrire la construction en termes d'urnes : on considère n boules numérotées de 1 à n, et une urne qui contient initialement une seule boule numérotée 0. À la j-ième étape, on tire une boule uniformément au hasard parmi les j boules déjà dans l'urne, on note son numéro, disons i. On la remet ensuite dans l'urne ainsi que la boule numérotée j, et on représente ce tirage par une arête (i,j). Quand les n boules ont été mises dans l'urne, l'arbre ainsi construit est une version de T_n. La figure 2, réalisée par Igor Kortchemski, est une simulation de T_{15000}. Signalons que certaines arêtes sont représentées beaucoup plus longues que d'autres afin de permettre le plongement du graphe dans le plan.

Figure 2 – Représentation planaire d'un arbre aléatoire récursif de taille 15000 (Igor Kortchemski)



Les arbres aléatoires récursifs forment l'une des familles les plus simples et les plus naturelles d'arbres aléatoires ; voir Drmota [10]. Ils sont intimement liés à d'autres processus stochastiques également bien connus. Tout d'abord, la construction récursive est essentiellement une variante de celle du *restaurant chinois* qui permet de simuler une permutation aléatoire uniforme de $\{1,\dots,n\}$, et dont nous rappelons brièvement la dynamique (voir Pitman [20]). Imaginons un restaurant ayant un nombre infini de tables, chacune de capacité infinie. Au temps initial, le restaurant est vide ; un premier client entre et prend place à une première table. Lorsque le j-ième client arrive, il s'assoit à la droite du i-ième client avec probabilité $1/j$ pour chaque $i = 1,\dots,j-1$ (on crée alors une arête reliant i à j), et s'assoit seul à une nouvelle table avec probabilité $1/j$ (on crée alors une arête reliant la racine 0 à j). Les tables du restaurant correspondent aux cycles de la permutation aléatoire, et peuvent être interprétées comme les sous-arbres obtenus en supprimant la racine 0 d'un arbre aléatoire récursif. En particulier, le degré de la racine 0 de T_n peut ainsi être vu comme le nombre de cycles d'une permutation aléatoire uniforme de n éléments.

On peut également voir les arbres aléatoires récursifs comme ceux décrivant la généalogie d'un *processus de Yule*. Rappelons tout d'abord qu'un processus de Yule [23] est un modèle élémentaire d'évolution de populations qui s'accroissent au cours du temps, pour lequel chaque individu donne naissance à un enfant à taux 1 (c'est-à-dire après un temps aléatoire qui suit une loi exponentielle de moyenne 1), indépendamment des autres individus. Si on attribue le numéro 0 à l'ancêtre et énumère les enfants dans l'ordre de leur naissance, l'arbre généalogique des n premiers enfants est un arbre aléatoire récursif sur $\{0,1,\dots,n\}$. Cette interprétation généalogique est particulièrement importante, de nombreuses propriétés des arbres aléatoires récursifs trouvant alors des justifications très simples en termes de processus de branchement. Il est important de noter que la structure des processus de Yule est plus riche que celle des arbres aléatoires récursifs, car l'arbre généalogique ne permet pas de retrouver les temps de naissance des enfants. Cette information additionnelle contenue dans un processus de Yule peut s'avérer très utile pour l'étude des arbres aléatoires récursifs.

Nous nous intéresserons dans ce texte aux effets d'un algorithme de destruction sur des arbres aléatoires récursifs de grandes tailles, notamment en identifiant différents régimes remarquables. Commençons par rappeler l'origine de ces questions.

2. Aux origines de la destruction : isolation de la racine

Au début des années 1970, Meir et Moon [17, 18] se sont intéressés à un processus de destruction d'arbres par suppression de leurs arêtes les unes après les autres, uniformément au hasard. Ils ont étudié plus particulièrement le nombre d'arêtes appartenant au sous-arbre contenant la racine qu'on doit retirer jusqu'à ce que celle-ci soit isolée. Autrement dit, dans le processus de destruction, on ne compte que les arêtes qui jouent un rôle dans l'isolation de la racine, et on ignore celles qui, au moment où elles sont retirées, appartenaient à un sous-arbre déjà déconnecté de la racine.

Dans le cas d'un arbre aléatoire récursif T_n de taille (i.e. nombre d'arêtes) n, Meir et Moon ont déterminé le comportement asymptotique au premier ordre de ce nombre X_n d'arêtes qu'on doit retirer pour isoler la racine :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} X_n = 1 \qquad \text{en probabilité.} \tag{1}$$

Pour cela, ils ont d'abord noté la *propriété fractale* suivante des arbres aléatoires récursifs. Si on retire une arête de T_n uniformément au hasard, disons la j-ième avec $1 \leqslant j \leqslant n$, on obtient deux sous-arbres aléatoires, l'un contenant la racine 0, et l'autre le sommet j qu'on peut voir comme la racine de ce second sous-arbre. Alors conditionnellement à ce que la taille du premier soit, disons, $n-k$, et celle du second donc $k-1$, ces deux sous-arbres sont indépendants et ont eux-mêmes une structure d'arbres aléatoires récursifs : le premier a la même loi que T_{n-k} et le second que T_{k-1}. Cette observation élémentaire est très utile car elle permet évidemment d'itérer le processus. Pour obtenir des informations quantitatives, on a besoin de connaître la loi des tailles des deux sous-arbres, et Meir et Moon ont montré que la loi du nombre de sommets du sous-arbre qui ne contient pas la racine est particulièrement simple : c'est la même que celle d'une variable ξ conditionnée à être au plus égale à n, où

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \qquad k \geqslant 1. \tag{2}$$

À l'aide de ces deux résultats, Meir et Moon obtiennent des équations de récurrence pour les premiers et seconds moments de X_n, desquelles l'estimation au premier ordre (1) découle facilement.

Le problème de caractériser les fluctuations de X_n, c'est-à-dire de l'approximation au second ordre, est resté ouvert pendant près de 35 ans avant que Drmota, Iksanov, Möhle et Rösler [11] ne parviennent à établir leur caractère non-gaussien. Plus précisément, ils ont montré que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln^2 n}{n}X_n-\ln n-\ln\ln n\right)=X \qquad \text{en loi}, \qquad (3)$$

où X désigne une variable de Cauchy complètement asymétrique ayant pour fonction caractéristique

$$\mathbb{E}(\exp(\mathrm{i}tX))=\exp\left(\mathrm{i}t\ln|t|-\frac{\pi}{2}|t|\right), \qquad t\in\mathbb{R}. \qquad (4)$$

C'est un résultat *a priori* plutôt surprenant, car on aurait pu s'attendre à ce que $X_n - n/\ln n$ renormalisé par sa variance converge en loi vers une variable gaussienne, comme c'est très souvent le cas. Non seulement il n'en est rien, mais on peut aussi souligner qu'en plus du recentrage par $n/\ln n$ auquel on s'attendait, il est nécessaire de faire une seconde correction déterministe en $n(\ln\ln n)/\ln^2 n$ avant de renormaliser. L'approche initiale de Drmota et al. s'inscrit dans la lignée des méthodes de combinatoire analytique développées notamment par Philippe Flajolet : on utilise la propriété fractale des arbres aléatoires récursifs pour obtenir une équation sur la fonction génératrice $\varphi(s,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}(s^{X_n})t^n$ de X_n, puis des techniques d'analyse complexe pour étudier le comportement asymptotique de $\varphi(\cdot,t)$ quand $t\to 1$.

Iksanov et Möhle [15] ont proposé peu de temps après une élégante explication probabiliste, qui nécessite très peu de calculs. Elle repose sur le couplage suivant, qui est une conséquence facile de la propriété fractale. Introduisons une suite $(\xi_j : j\in\mathbb{N})$ de variables aléatoires indépendantes et toutes distribuées selon la loi (2). On considère d'abord la marche aléatoire $S_k=\xi_1+\cdots+\xi_k$, pour $k\geqslant 0$. Puis, pour n fixé, on modifie $S=(S_k)_{k\geqslant 0}$ en supprimant tous les pas qui lui feraient dépasser le niveau n. Plus précisément, on pose $S_0^*=0$ et $k_0=0$, et on définit par itération $S_1^*=S_0^*+\xi_{k_1}$ avec $k_1=\inf\{j\geqslant k_0 : S_0^*+\xi_j\leqslant n\}$, $S_2^*=S_1^*+\xi_{k_2}$ avec $k_2=\inf\{j\geqslant k_1 : S_1^*+\xi_j\leqslant n\}$, ... L'algorithme se termine lorsque S^* atteint la valeur n. Iksanov et Möhle ont observé que la marche modifiée S^* a la même loi que la suite du nombre de sommets qui sont déconnectés de la racine, lorsqu'on supprime une à une les arêtes du sous-arbre qui contient la racine, et cela uniformément au hasard. Ainsi, la loi de X_n est la même que celle du nombre de pas de la marche modifiée S^*, et on peut établir que quand n est grand, cette dernière est proche du premier temps de passage de la marche aléatoire S au-dessus du niveau n. La formule (1) montre que la marche aléatoire S appartient au domaine d'attraction d'un processus de Cauchy asymétrique, et le théorème limite (3) découle enfin de résultats classiques sur les premiers temps de passages de marches aléatoires positives.

Pour conclure cette section, mentionnons encore que le problème initial d'isolation de la racine a été par la suite étendu dans plusieurs directions ; voir notamment l'article récent de Kuba et Panholzer [16], ainsi que [3] et les références qui y sont citées.

3. Régimes de percolation

Lorsqu'on travaille avec le graphe complet K_n avec n sommets (et donc $n(n-1)/2$ arêtes) au lieu de l'arbre récursif T_n, le processus de destruction doit être vu comme une version dynamique du modèle du *graphe aléatoire* introduit par Erdős et Rényi [12, 13] et Gilbert [14]. Rappelons que pour $0<p<1$, $G(n,p)$ désigne le graphe aléatoire obtenu à partir de K_n après une percolation de paramètre p, c'est-à-dire en conservant chaque arête avec probabilité p et en la supprimant avec probabilité $1-p$, indépendamment des autres arêtes. Parmi les résultats asymptotiques classiques dans ce domaine quand $n\to\infty$, l'un des plus importants concerne les régimes où le paramètre de percolation $p=p(n)$ dépend de n avec $p(n)\sim c/n$, pour une constante $c\in(0,\infty)$:

- lorsque $c<1$, avec grande probabilité pour $n\gg 1$, la plus grande composante connexe de $G(n,p)$ est de l'ordre de $\ln n$; on parle du régime *sous-critique* ;
- lorsque $c>1$, avec grande probabilité pour $n\gg 1$, il existe une unique composante connexe géante, plus précisément de taille proche de $\theta(c)n$, où $\theta(c)\in(0,1)$, et les composantes connexes suivantes sont d'ordre $\ln n$ seulement ; on parle du régime *sur-critique* ;
- une transition de phase a donc lieu pour $c=1$, et c'est dans la fenêtre dite *critique* que la composante connexe géante est en train de se former.

Les résultats asymptotiques présentés dans la section précédente pour la destruction de grands arbres récursifs aléatoires concernent seulement le sous-arbre qui contient la racine, et il est naturel de s'intéresser plus généralement à l'évolution des tailles de tous les sous-arbres lors du processus de destruction. Comme dans le cadre du graphe aléatoire, on peut distinguer trois régimes principaux que nous allons décrire plus en détails dans les trois sous-sections suivantes.

Lorsqu'on interprète un arbre aléatoire récursif comme l'arbre généalogique d'un processus de Yule, la percolation peut être vue comme modélisant des mutations [1] neutres (c'est-à-dire sans effets sur la reproduction), qu'on superpose à la généalogie. Ceci conduit à deux points de vue conceptuellement assez différents. On peut soit construire d'abord l'arbre aléatoire récursif de taille n, T_n, puis ensuite effectuer une percolation de paramètre $p = p(n)$, soit réaliser ces deux opérations simultanément : à chaque étape où l'on incorpore un nouveau sommet, on décide avec probabilité p de rattacher ce sommet à un des précédents choisi uniformément au hasard, et avec probabilité $1-p$ de ne créer aucune arête. Ces deux points de vue sont complémentaires ; le premier est mieux adapté à une approche dynamique de la percolation, notamment grâce au couplage d'Iksanov et Möhle, le second, plus robuste dans le sens où des arguments analogues restent valables pour d'autres familles d'arbres aléatoires, permet de mieux utiliser la propriété de branchement.

3.1 – Régime sur-critique

Il est facile de montrer que la hauteur d'un sommet typique de T_n, c'est-à-dire la distance à la racine d'un sommet choisi uniformément au hasard, est proche de $\ln n$ avec grande probabilité lorsque $n \gg 1$; voir par exemple [9]. Il s'ensuit que si le paramètre de percolation $p = p(n)$ est tel que

$$1 - p(n) \sim c/n, \qquad \text{pour un certain } c > 0, \tag{5}$$

alors la probabilité qu'un sommet typique reste connecté à la racine est proche de

$$p(n)^{\ln n} \sim (1 - c/\ln n)^{\ln n} \sim \mathrm{e}^{-c}.$$

De même, la probabilité que deux sommets choisis uniformément au hasard soient toujours connectés après percolation est voisine de $p(n)^{2\ln n} \sim \mathrm{e}^{-2c}$. Des calculs simples de premier et deuxième moments montrent alors qu'avec grande probabilité pour $n \gg 1$, la taille du sous-arbre contenant la racine [2], C_0, reste alors de l'ordre de n :

$$C_0 \sim \mathrm{e}^{-c} n. \tag{6}$$

La composante qui contient la racine est donc géante, et il est facile de vérifier que c'est la seule. Plus précisément, si on note $C_1 \geqslant C_2 \geqslant \cdots$ la suite ordonnée des tailles des sous-arbres ne contenant pas la racine, alors il est établi dans [8] que dans le régime (5), pour tout $j \geqslant 1$, le vecteur aléatoire

$$\left(\frac{\ln n}{n} C_1, \ldots, \frac{\ln n}{n} C_j\right)$$

converge en loi vers $(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_j)$, où $\mathrm{x}_1 > \mathrm{x}_2 > \ldots$ désigne la suite ordonnée des points d'un processus de Poisson ponctuel sur $(0, \infty)$ avec intensité $c\mathrm{e}^{-c} x^{-2} \mathrm{d}x$. La loi limite peut également être décrite plus simplement de la façon suivante : $1/\mathrm{x}_1, 1/\mathrm{x}_2 - 1/\mathrm{x}_1, \ldots, 1/\mathrm{x}_j - 1/\mathrm{x}_{j-1}$ forment une suite de j variables i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $c\mathrm{e}^{-c}$.

On notera que la taille de ces sous-arbres est de l'ordre de $n/\ln n$. De façon informelle, les plus grandes composantes qui ne contiennent pas la racine sont donc *presque géantes*, ce qui contraste nettement avec le cas du graphe aléatoire. Le couplage d'Iksanov et Möhle qui a été décrit à la fin de la section précédente, joue un rôle fondamental pour les preuves.

Ce résultat a été étendu dans [2] à tout le régime sur-critique

$$1/n \ll 1 - p(n) \ll 1. \tag{7}$$

La borne inférieure $1/n$ est due au fait que pour $1 - p(n) = o(1/n)$, avec grande probabilité, aucune arête n'est supprimée, puisque le nombre moyen d'arêtes qu'on supprime vaut $(1 - p(n)) \times n = o(1)$. Un argument proche de celui du début de cette section montre que le sous-arbre contenant la racine est de taille $C_0 \sim n^{p(n)}$, et pour tout $j \geqslant 1$, la suite des j sous-arbres suivants les plus grands convenablement normalisés

$$\left(\frac{n^{-p(n)}}{1 - p(n)} C_1, \ldots, \frac{n^{-p(n)}}{1 - p(n)} C_j\right)$$

1. Il est intéressant de signaler qu'à l'origine, Yule s'était intéressé précisément à un modèle d'évolution de populations avec mutations ; voir [23].

2. Pour alléger la notation, la dépendance en la taille n de l'arbre sera systématiquement omise dans la notation.

converge en loi quand $n \to \infty$ vers $(\mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_j)$, où $\mathrm{y}_1 > \mathrm{y}_2 > \dots$ désigne la suite ordonnée des points d'un processus Poisson ponctuel sur $(0, \infty)$ avec intensité $y^{-2}\mathrm{d}y$. On observera que cette mesure est l'intensité des sauts d'un processus de Cauchy totalement asymétrique, ce qui est bien sûr très lié à (3). On notera également que dans tout le régime sur-critique (7), avec grande probabilité quand $n \gg 1$, le sous-arbre contenant la racine est le plus gros et les suivants sont plus petits par un facteur $1 - p(n)$.

Avant de nous pencher sur les autres régimes, revenons brièvement sur (5). L'estimation du premier ordre (6) peut être vue comme une loi des grands nombres ; les fluctuations, autrement dit l'estimation au second ordre, sont données comme suit. Dans le régime (5), lorsque $n \to \infty$, la convergence en distribution suivante a lieu :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(n^{-1} C_0 - \mathrm{e}^{-c} \right) \ln n - c\mathrm{e}^{-c} \ln \ln n \right) = - c\mathrm{e}^{-c} (\ln c - X) \qquad \text{(en loi)}$$

où la variable X suit une loi de Cauchy complètement asymétrique dont la fonction caractéristique est donnée par (4). Ce résultat a été établi initialement par Schweinsberg [21] ; une preuve plus simple en a ensuite été donnée dans [7], en s'appuyant à la fois sur le couplage d'Iksanov et Möhle et les liens avec les processus de Yule. Les fluctuations non-gaussiennes de C_0 rappellent bien sûr celles de (3) relatives à l'isolation de la racine, même s'il n'y a probablement pas de façon simple de rapprocher ces deux résultats. Elles contrastent nettement avec les fluctuations pour la composante géante du graphe aléatoire dans le régime sur-critique, qui elles sont gaussiennes (voir [22]).

3.2 – Régime sous-critique

Nous avons vu que le régime sur-critique était donné par (7). Il n'est alors pas surprenant que le régime sous-critique, qui a été étudié très récemment dans [5], corresponde à

$$1/n \ll p(n) \ll 1.$$

À nouveau, la borne inférieure $1/n$ s'explique par le fait que pour $p(n) = o(1/n)$, avec grande probabilité, toutes les arêtes sont supprimées. Nous allons nous intéresser aux effets de la percolation dans certains sous-régimes naturels plus spécifiques.

L'une des premières questions concerne le seuil pour lequel les plus grandes composantes connexes ont une taille donnée. La réponse est simple : pour tous $a > 0$ et $\ell \in \mathbb{N}$ fixés, considérons le régime

$$p(n) \sim an^{-1/\ell}. \tag{8}$$

Alors avec grande probabilité lorsque $n \gg 1$, il n'existe pas de sous-arbres de taille strictement plus grande que $\ell + 1$, et la probabilité de trouver exactement k sous-arbres de taille $\ell + 1$ converge vers

$$\exp(-\ell! a^\ell) \frac{(\ell! a^\ell)^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, \dots.$$

Il est intéressant de rappeler que dans un arbre récursif de taille n, le degré de la racine est voisin de $\ln n$ avec grande probabilité quand $n \gg 1$. En conséquence, dans le régime (8), toutes les arêtes contiguës à la racine sont supprimées et la racine est isolée, avec grande probabilité. Il est dès lors naturel de considérer également le régime pour lequel la racine cesse d'être isolée, c'est-à-dire

$$p(n) \sim a/\ln n, \tag{9}$$

où $a > 0$ est une constante. Il est facile de montrer, par exemple en utilisant les liens avec les processus de Yule, qu'asymptotiquement, la taille du sous-arbre contenant la racine suit une loi géométrique de paramètre e^{-a}, c'est-à-dire que la probabilité que cette taille soit k vaut $(1 - \mathrm{e}^{-a})^k e^{-a}$. Le plus grand sous-arbre a quant à lui une taille de l'ordre de $\ln n$. Plus précisément, il est établi dans [5] que dans le régime (9), avec grande probabilité pour $n \gg 1$, le plus grand sous-arbre a pour taille

$$t^* \ln n - \frac{\ln \ln n}{2(\ln(at^*) - \ln(1 + at^*))} + O(1)$$

où $t^* > 0$ désigne l'unique solution de l'équation

$$1 + t^* \ln(at^*) - \frac{1 + at^*}{a} \ln(1 + at^*) = 0.$$

3.3 – Fenêtre critique

Nous venons de voir qu'avec grande probabilité quand $n \gg 1$, le sous-arbre qui contient la racine est le plus grand de tous dans le régime de percolation sur-critique où $p(n)$ converge vers 1, alors que quand $p(n)$ converge vers 0, ce n'est plus le cas. Nous nous intéressons maintenant à la transition de phase, correspondant au cas où le paramètre p ne dépend pas de n. Plus précisément, nous considérons une percolation dynamique en assignant à chaque arête une variable aléatoire de loi exponentielle qui correspond au temps en lequel cette arête est supprimée, et ce bien sûr, indépendamment des autres arêtes. Ainsi, au temps $t \geqslant 0$, nous obtenons une percolation de Bernoulli, avec paramètre $p = \mathrm{e}^{-t}$.

Rappelons que C_0 désigne la taille du sous-arbre qui contient la racine, et $C_1 \geqslant C_2 \geqslant \cdots$ la suite ordonnée des tailles des autres composantes. Les résultats suivants ont été obtenus dans [4].

Tout d'abord, il est facile de montrer qu'au temps t, C_0 est de l'ordre de $n^p = n^{\mathrm{e}^{-t}}$. Plus précisément, on a pour tout $t \geqslant 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\mathrm{e}^{-t}} C_0 = X_0(t) \qquad \text{en probabilité,}$$

où $(X_0(t))_{t\geqslant 0}$ est un processus dit de Mittag-Leffler. Ce dernier a notamment pour loi marginale

$$\mathbb{P}(X_0(t) \in \mathrm{d}x)/\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^t}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \Gamma(k\mathrm{e}^{-t}+1) x^{k-1} \sin(\pi k \mathrm{e}^{-t});$$

et a été étudié indépendamment par Möhle [19].

Plus généralement, pour tout $i = 0, 1, 2, \ldots$, on a

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\mathrm{e}^{-t}} C_i = X_i(t) \qquad \text{en probabilité,} \tag{10}$$

où $(X_0(t), X_1(t), \ldots)$ est un exemple remarquable de processus de *croissance-fragmentation*. Le terme de croissance peut être surprenant au premier abord (puisqu'après tout on considère une dynamique purement de destruction), il s'explique par le fait que la normalisation (10) dépend du temps t. À un retournement du temps près, il s'agit de l'analogue de la description de l'évolution du graphe aléatoire dans la fenêtre critique due à Aldous [1].

Références

[1] D. Aldous. « Brownian excursions, critical random graphs and the multiplicative coalescent ». *Ann. Probab.* **25**, nº 2 (1997), p. 812–854.

[2] E. Baur. « Percolation on random recursive trees ». *Random Structures Algorithms* **48**, nº 4 (2016), p. 655–680.

[3] E. Baur et J. Bertoin. « Cutting edges at random in large recursive trees ». In : *Stochastic analysis and applications 2014*. Vol. 100. Springer Proc. Math. Stat. Springer, Cham, 2014, p. 51–76.

[4] E. Baur et J. Bertoin. « The fragmentation process of an infinite recursive tree and Ornstein-Uhlenbeck type processes ». *Electron. J. Probab.* **20** (2015), no. 98, 20.

[5] E. Baur et J. Bertoin. « Weak limits for the largest subpopulations in Yule processes with high mutation probabilities ». *ArXiv: 1603.06564* (2016).

[6] F. Bergeron, P. Flajolet et B. Salvy. « Varieties of increasing trees ». In : *CAAP '92 (Rennes, 1992)*. Vol. 581. Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, Berlin, 1992, p. 24–48.

[7] J. Bertoin. « On the non-Gaussian fluctuations of the giant cluster for percolation on random recursive trees ». *Electron. J. Probab.* **19** (2014), no. 24, 15.

[8] J. Bertoin. « Sizes of the largest clusters for supercritical percolation on random recursive trees ». *Random Structures Algorithms* **44**, nº 1 (2014), p. 29–44.

[9] L. Devroye. « Applications of the theory of records in the study of random trees ». *Acta Inform.* **26**, nº 1-2 (1988), p. 123–130.

[10] M. Drmota. *Random trees*. An interplay between combinatorics and probability. SpringerWienNewYork, Vienna, 2009, p. xviii+458.

[11] M. Drmota et al. « A limiting distribution for the number of cuts needed to isolate the root of a random recursive tree ». *Random Structures Algorithms* **34**, nº 3 (2009), p. 319–336.

[12] P. Erdős et A. Rényi. « On random graphs. I ». *Publ. Math. Debrecen* **6** (1959), p. 290–297.

[13] P. Erdős et A. Rényi. « On the evolution of random graphs ». *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **5** (1960), p. 17–61.

[14] E. N. Gilbert. « Random graphs ». *Ann. Math. Statist.* **30** (1959), p. 1141–1144.

[15] A. Iksanov et M. Möhle. « A probabilistic proof of a weak limit law for the number of cuts needed to isolate the root of a random recursive tree ». *Electron. Comm. Probab.* **12** (2007), p. 28–35.

[16] M. Kuba et A. Panholzer. « Multiple isolation of nodes in recursive trees ». *Online J. Anal. Comb.* nº 9 (2014), p. 26.

[17] A. Meir et J. W. Moon. « Cutting down random trees ». *J. Austral. Math. Soc.* **11** (1970), p. 313–324.

[18] A. Meir et J. W. Moon. « Cutting down random trees ». *Mathematical Biosciences* **21** (1974), p. 173–181.

[19] M. Möhle. « The Mittag-Leffler process and a scaling limit for the block counting process of the Bolthausen-Sznitman coalescent ». *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **12**, nº 1 (2015), p. 35–53.

[20] J. Pitman. *Combinatorial stochastic processes*. **1875**. Lecture Notes in Mathematics. Lectures from the 32nd Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 7–24, 2002, With a foreword by Jean Picard. Springer-Verlag, Berlin, 2006, p. x+256.

[21] J. Schweinsberg. « Dynamics of the evolving Bolthausen-Sznitman coalescent ». *Electron. J. Probab.* **17** (2012), p. 1–50.

[22] V. E. Stepanov. « The probability of the connectedness of a random graph $\mathcal{G}_m(t)$ ». *Teor. Verojatnost. i Primenen* **15** (1970), p. 58–68.

[23] G. Yule. « A mathematical theory of evolution, based on the conclusions of Dr. J. C. Willis, F.R.S. » *Philosophical Transactions of the Royal Society of London (series B)* **213** (1925), p. 21–87.

Erich Baur

École normale supérieure de Lyon

erich.baur@ens-lyon.fr

Erich Baur a étudié en Allemagne, il a obtenu son diplôme de Master à Bonn en 2009. Il a ensuite effectué son doctorat à l'université de Zurich en Suisse et y a soutenu sa thèse en 2013, sous la direction de Erwin Bolthausen et Jean Bertoin. Depuis 2014 il est post-doctorant à l'École normale supérieure de Lyon dans le groupe de Grégory Miermont. Ses recherches portent sur les cartes planaires et les graphes aléatoires, et sur les marches aléatoires.

Jean Bertoin

Universität Zürich

jean.bertoin@math.uzh.ch

Jean Bertoin est né le 25 mai 1961 à Lyon. Il est élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud de 1980 à 1985, il soutient sa thèse en 1987, sous la direction de Marc Yor, à l'université Pierre et Marie Curie (UPMC). Il est ensuite chargé de recherches au CNRS, puis professeur à l'UPMC. Depuis 2011, il est professeur à l'Institut de mathématiques de l'université de Zurich. Le prix Thérèse Gautier lui est attribué en 2015 : « Ses travaux sur les processus aléatoires appelés processus de Levy, dont le prototype est le mouvement brownien, ont conduit à un renouveau de cette branche importante des probabilités. Jean Bertoin a aussi apporté des contributions majeures aux processus de coalescence, qui fournissent des modèles mathématiques en génétique des populations. Il a enfin inventé la théorie des processus de fragmentation, qui étudie la manière dont un objet se fragmente de façon aléatoire au cours du temps. »

Merci à Marielle Simon, Michele Triestino et Clément M. pour leur relecture. Erich Baur souhaiterait également remercier le Fonds National Suisse (bourse P300P2-161011) et le Labex MILYON/ANR-10-LABX-0070 pour leurs aides lors de la réalisation de ce projet.

Ce texte est issu d'un partenariat avec le site Images des Maths qui publiera parallèlement un entretien avec Jean Bertoin à l'adresse suivante :
http://images.math.cnrs.fr/Fragmentation-d-arbres-aleatoires-Une-interview-de-Jean-Bertoin.html.

Recrutements en mathématiques : premier bilan de la réforme des comités de sélection

• L. Broze

1. Les comités de sélection : repères juridiques

1.1 – Règles générales, effectifs et disciplines

L'article 9 du décret du 6 juin 1984 (modifié par le décret n° 2014-997 du 2 septembre 2014) prévoit :

> Le comité de sélection est créé par délibération du conseil académique [...] siégeant en formation restreinte aux représentants élus des enseignants-chercheurs, des chercheurs et des personnels assimilés. Cette délibération précise le nombre de membres du comité, compris entre huit et vingt, et [...] le nombre de ceux choisis hors de l'établissement et le nombre de ceux choisis parmi les membres de la discipline en cause.

Une deuxième délibération du conseil académique réuni en formation restreinte est consacrée au choix des membres du comité de sélection à l'issue d'un vote sur une liste de noms. Au cours de cette même réunion est également désigné·e le ou la président·e du comité de sélection.

Dans sa décision n° 316927 du 15 décembre 2010, le Conseil d'État précise qu'aucun texte ou principe n'oblige que les disciplines devant être représentées au sein du comité de sélection soient définies selon les disciplines de référence des sections du Conseil national des universités.

Ces règles sont bien plus souples que celles des anciennes commissions de spécialistes : par exemple, les membres extérieurs à l'établissement peuvent être plus nombreux que les membres internes, les membres extérieurs peuvent être en poste à l'étranger, le comité peut comporter des membres d'autres disciplines (pas plus de la moitié) et ces disciplines ont une interprétation assez large (plus large que la section CNU). Le décret donne ainsi la possibilité aux disciplines à effectif faible de constituer des comités de taille raisonnable.

En outre, le décret reconnaît que la participation à un comité de sélection n'est pas réservée aux seuls spécialistes du champ scientifique, parfois pointu, pour lequel on recrute. *L'excellence scientifique ne souffre pas de l'élargissement disciplinaire des comités*. De nombreuses autres compétences sont en effet mobilisées pour réaliser un recrutement de qualité d'un·e collègue qui aura à s'intégrer dans un laboratoire, une équipe.

1.2 – La parité dans les comités : une idée ancienne

L'introduction de la parité dans les commissions chargées du recrutement remonte à la loi n° 2001-397 du 9 mai 2001 relative à l'égalité professionnelle entre les femmes et les hommes (dite loi Génisson) :

> Les jurys et les comités de sélection, dont les membres sont désignés par l'administration, sont composés de façon à concourir à une représentation équilibrée entre les femmes et les hommes.

Le décret n° 2002-766 du 3 mai 2002 précisait dans son article 1 :

> Pour la désignation des membres des jurys et des comités de sélection constitués pour le recrutement des fonctionnaires de l'État [...], l'administration chargée de l'organisation du concours

> doit respecter une proportion minimale d'un tiers de personnes de chaque sexe justifiant des compétences nécessaires.

Mais, ce même décret prévoyait une exception pour les *chercheurs* des Établissements publics à caractère scientifique et technologique (EPST). Cette exception s'est étendue à tous les établissements d'enseignement supérieur et de recherche.

C'est ainsi que la règle introduite par la loi Génisson imposant un minimum d'un tiers pour chaque sexe a été appliquée dans toute la fonction publique, pendant plus de 10 ans, sauf pour les postes de chercheurs dans les EPST et les postes d'enseignants-chercheurs dans les universités.

1.3 – Sur le terrain

Pendant cette période où la parité n'était pas imposée aux universités, très peu d'efforts ont été entrepris pour faire évoluer les pratiques en matière de recrutement en mathématiques.

Les règles de composition des commissions de spécialistes étaient assez contraignantes mais une part des postes, dévolue aux membres extérieurs nommés, aurait pu être utilisée à cet effet.

La réforme introduisant les comités de sélection en avril 2008 permettait de changer la donne, avec ses règles plus souples. Certaines universités ont commencé à travailler sur la parité dans les comités de sélection dès 2009 (Strasbourg), ou 2011 (Grenoble I). D'autres ont appliqué la loi Génisson (université Paris-Est Créteil à partir de 2012 ou 2013).

Cela n'a pas été le cas partout, bien au contraire. Ainsi, en mathématiques, en 2010, 24% des comités de sélection (53 sur 220) ne comportaient *aucune* femme. En 2011, on en comptait 20% (41 sur 208) [1].

Ces chiffres scandaleux ont été rendus publics et ont eu un large écho dans la communauté mathématique. Ils ont provoqué une prise de conscience du problème. C'est ainsi qu'en 2013, on ne comptait plus que 6% de comités sans femmes (8 sur 127). La question était cependant loin d'être réglée et le souhait d'obtenir une forme de parité dans les comités faisait son chemin.

1.4 – Introduction de la parité dans les comités de sélection

Le principe de parité inscrit dans la loi Génisson a été renforcé par la loi Sauvadet du 12 mars 2012 et introduit dans l'article 9 du décret du 6 juin 1984 (modifié par le décret nº 2014-997 du 2 septembre 2014) : « Les comités de sélection comprennent une proportion minimale de 40% de personnes de chaque sexe et au moins deux personnes de chaque sexe. » Cette disposition a suscité le rejet de la part d'une partie de la communauté scientifique universitaire. Certains lobbys disciplinaires se sont mobilisés pour obtenir des dérogations. Pour répondre à cela, le décret prévoit :

> Un décret en Conseil d'État fixe la liste des disciplines, dans lesquelles, compte tenu de la répartition entre les sexes des enseignants-chercheurs, il peut être dérogé à la proportion minimale de 40% , ainsi que la proportion minimale dérogatoire que doit respecter chacune de ces disciplines.

Les dérogations ne portent que sur le pourcentage minimal et pas sur la règle fondamentale du nombre minimal de deux personnes de chaque sexe. Elles ne concernent que les postes de professeurs. Ce décret est entré en vigueur le lendemain du jour de sa publication, c'est-à-dire le 24 avril 2015, *pour une durée de deux ans.*

Les disciplines autorisées à déroger à la proportion de 40% de personnes de chaque sexe sont listées dans le décret nº 2015-455 du 21 avril 2015 :

Section CNU	Numéro	Proportion minimale
Science politique	04	33%
Mathématiques	25	14%
Mathématiques appliquées	26	30%
Milieux denses et matériaux	28	26%
Constituants élémentaires	29	18%
Milieux dilués et optique	30	29%
Structure de la Terre	35	22%
Terre solide	36	18%
Mécanique	60	17%
Génie informatique	61	21%
Génie électrique	63	22%

1. Voir L. Broze, C. Ternynck, « En France, les femmes sont largement exclues du recrutement des enseignants-chercheurs en mathématiques », *Gazette des Mathématiciens* 128, SMF, 2011, pp. 83-89. `http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2011/128/smf_gazette_128_83-89.pdf`

Il faut noter que rien n'oblige les universités à mettre en œuvre ces dérogations. Les conseils d'administration des universités peuvent toujours prendre des décisions plus contraignantes et, par exemple, imposer la règle des 40%, voire même la parité stricte.

À l'époque où ces taux dérogatoires ont été calculés (données de mai 2013) pour être présentés lors d'un CTU (Comité technique des personnels enseignants de statut universitaire) en octobre 2014, ils correspondaient au double de la proportion de femmes professeurs dans la section CNU, arrondi à la valeur supérieure. Les disciplines où le pourcentage ainsi obtenu était inférieur à 35% (soit moins de 17% de femmes professeurs) ont été inscrites sur la liste des dérogations publiée dans le décret nº 2015-455 du 21 avril 2015.

Les taux de féminisation dans le corps professoral ont évolué (voir tableau 2) : parmi les disciplines dérogatoires, ils ont augmenté sauf en sections 25 (mathématiques pures) et 30 (milieux dilués et optique).

On note que la science politique (section 4) ne figurerait plus sur la liste des disciplines dérogatoires si les taux étaient recalculés à ce jour. En revanche, l'histoire du droit (section 3) y figurerait. Ces sections sont assez similaires : 21 femmes professeurs en 2013, 23 en 2015 en science politique, 23 en 2013, 19 en 2015 en histoire du droit. Dans des sections à faible effectif, quelques femmes en plus ou en moins suffisent à modifier les pourcentages d'un point.

La question de l'effectif du corps professoral féminin peut aussi être mentionnée. Un argument parfois avancé est celui de la charge qui pourrait peser sur peu de femmes pour assurer l'ensemble des comités. Cet argument doit être relativisé car c'est précisément dans les disciplines à faible effectif que le nombre de postes est le plus faible et la charge en matière de recrutement la moins lourde. C'est le cas de la section de mathématiques pures. Le tableau 3 montre que des disciplines à effectif très faible n'ont pas de dérogation. Il montre aussi que la section de mathématiques appliquées, avec 104 femmes professeurs, n'est pas dans ce profil.

1.5 – Profil théorique des comités les moins favorables à la présence des femmes

Avec la nouvelle réglementation, les « pires » comités en termes de parité (= ceux qui comportent le nombre le plus faible de femmes) seraient composés de :

- pour un poste de professeur :
  - en section 25 : 2 femmes et 12 hommes
  - en section 26 : 3 femmes et 7 hommes
- pour un poste de maître de conférences :
  - en sections 25 et 26 : 4 femmes et 6 hommes.

Les comités pour les postes de maîtres de conférences doivent être strictement paritaires professeurs/maîtres de conférences, ce qui induit un nombre pair de membres et une contrainte supplémentaire qui ne semble jamais poser problème alors même que la part des professeurs dans l'ensemble d'une discipline est bien plus faible que celle des maîtres de conférences (38% en section 25 et 35% en section 26).

2. Analyse des comités de sélection 2016

L'analyse porte sur la session synchronisée 2016 en mathématiques. Elle ne concerne que la *composition théorique* des comités, celle qui est votée par les conseils des universités et rendue publique (selon le décret nº 2014-997). Dans la pratique, certains membres peuvent être absents sans que cela mette en cause la validité du recrutement (pour autant que le nombre de présents soit au minimum de 4 et que le nombre de membres extérieurs à l'établissement qui recrute ne soit pas inférieur au nombre de membres internes). En effet, aucune disposition réglementaire n'impose le respect de la proportion minimale de 40% de personnes de chaque sexe (ni de la parité maîtres de conférences-professeurs des universités) lors des *délibérations* des comités de sélection.

Les données concernent 117 postes : 79 postes de maître de conférences et 38 postes de professeur.

Parmi les 79 postes de maître de conférences, on dénombre 22 postes en section 25 seule, 38 en section 26 seule, 10 en sections 25/26 et 9 en section 26 accompagnée d'au moins une autre section (sauf 25).

Parmi les 38 postes de professeur, on dénombre 13 postes en section 25 seule, 18 en section 26 seule, 5 en sections 25/26 et 2 en section 26 accompagnée d'au moins une autre section (sauf 25).

2.1 – Conformité à la loi

On compte 6 comités non conformes à la loi (pour 6 postes de MCF), cela représente 5% des postes en mathématiques :

– Poste MCF 25 à l'université d'Angers
Profil : Mathématiques fondamentales (géométrie complexe, géométrie réelle, topologie algébrique, physique mathématique)
3 femmes sur 12 membres : 25% < 40%.
– Poste MCF 25 à l'université Grenoble Alpes
Profil : Géométrie
5 femmes sur 16 membres : 31% < 40%.
– Poste MCF 25/26 à l'université Paris 11
Profil : Analyse et géométrie
4 femmes sur 12 membres : 33% < 40%.
– Poste MCF 26 à l'université du Mans
Profil : Statistique
4 femmes sur 12 membres : 33% < 40%.
– Poste MCF 26 à Mayotte
Profil : Didactique des mathématiques
3 femmes sur 8 membres : 37,5% < 40%.
– Poste MCF 26 à Mayotte
Profil : Mathématiques appliquées
3 femmes sur 8 membres : 37,5% < 40%.

2.2 – Présidence des comités

Sur 79 comités relatifs à des postes de maîtres de conférences, 15 ont été présidés par une femme (19%), dont 6 pour un poste en section 25.

Sur 38 comités pour des postes de professeurs, 4 ont été présidés par des femmes (11%), tous en section 26. *Aucun comité pour un poste en section 25 n'a été présidé par une femme.*

2.3 – Composition des comités pour les postes de professeurs

Pour les 38 comités relatifs à des postes de professeurs, l'effectif varie de 8 à 14 membres, le nombre de femmes de 2 à 6, le nombre d'hommes de 4 à 11.

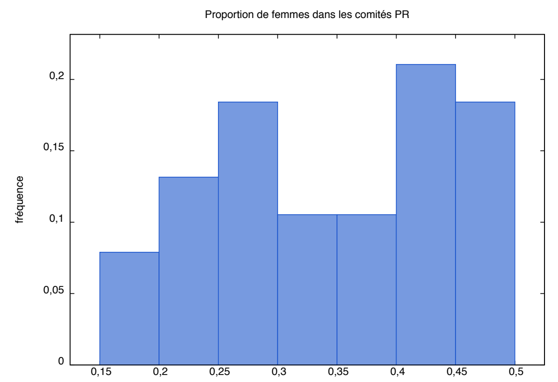
La figure 1 montre que la proportion de femmes varie de 15% à 50% : aucun comité ne comportait plus de femmes que d'hommes. La proportion moyenne était de 34%. On voit clairement que de nombreux comités n'ont pas utilisé la dérogation (15 comités sur 38 (39% des comités)).

Sept comités étaient strictement paritaires (18%) : pour la section 26, les établissements concernés sont : ÉNS Cachan, Évry, Paris 5, Rennes 1, Nice ; pour la section 25 : Mulhouse ; pour un poste mixte 25-26 : Dijon.

Les comités comportant le moins de femmes et le plus d'hommes appartenaient aux universités suivantes :

– en section 25
  – Université Lyon 1 (profil : géométrie, théorie des groupes, logique) : 2 femmes, 11 hommes
  – Université de Bordeaux (profil : théorie des nombres et géométrie algébrique) : 2 femmes, 10 hommes
  – Université de Marne la Vallée (profil : analyse et interactions) : 2 femmes, 10 hommes
– en section 26
  – Université de Caen (profil : Statistique et interactions) : 3 femmes et 7 hommes
  – Université Paris 13 (profil : Équations aux dérivées partielles non linéaires, mathématiques appliquées à la biologie et aux sciences du vivant) : 3 femmes et 7 hommes

FIGURE 1 – Distribution des pourcentages de femmes dans les comités des postes de professeurs



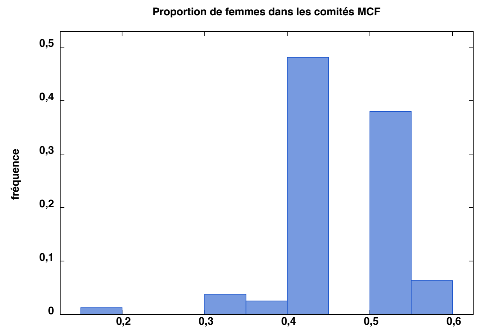
2.4 – Composition des comités pour les postes de maîtres de conférences

Pour les 79 comités relatifs à des postes de maîtres de conférences, l'effectif varie de 8 à 20 membres, le nombre de femmes de 3 à 8, le nombre d'hommes de 4 à 15.

La figure 2 montre que la proportion de femmes varie de 17% à 60%. La proportion moyenne était de 45%. De nombreux (30 sur 79) comités étaient strictement paritaires et *quatre comités compor-*

taient plus de femmes que d'hommes. Les établissements concernés sont : le cnam avec 60% de femmes, et les universités Aix-Marseille, Artois, Montpellier avec 58% de femmes.

Figure 2 – Distribution des pourcentages de femmes dans les comités des postes de maîtres de conférences



3. Conclusion

Voilà deux ans que l'obligation de parité dans les comités de sélection a été mise en place. Ce dispositif a suscité beaucoup de discussions et même parfois d'oppositions au sein de la communauté mathématique.

On constate aujourd'hui que, si quelques établissements n'ont pas respecté la loi ou ont minimisé autant que possible la place réservée aux femmes dans les comités, beaucoup d'universités ont proposé des comités où la place des femmes ne se réduisait pas au strict minimum. 32% de ces comités étaient tout à fait paritaires (50/50) et 4% d'entre eux comportaient même plus de femmes que d'hommes. Seuls 39% des comités pour des postes de professeurs ont mis en œuvre le taux dérogatoire. On rappelle que les universités ont parfaitement le droit d'adopter la règle des 40% *pour toutes les disciplines, sans possibilité de dérogation*.

La mise en œuvre pratique de la parité ne semble donc pas poser de réels problèmes. Subsistent des oppositions idéologiques, et c'est sans doute à elles qu'il s'agit de s'intéresser désormais.

Deux lignes d'argumentation se combinent. L'une expose qu'une présence accrue des femmes dans les comités créerait une charge trop lourde pour elles. Dans les faits, très peu de femmes sont sur-sollicitées et bon nombre ne le sont jamais (à noter que c'est ce qui se passe aussi pour les hommes). L'enjeu d'une présence dans les comités est aussi celui du pouvoir sur et dans la communauté. En écarter les femmes c'est renforcer le pouvoir de ceux qui siègent et influencent les recrutements.

L'autre argument est plus étrange : la parité pourrait nuire à l'excellence scientifique. L'excellence scientifique a ses propres critères de reconnaissance, largement partagés par les mathématiciennes et les mathématiciens. L'exigence de parité s'adresse à un autre objet, social. C'est parce que les femmes ne sont pas socialement reconnues égales que leur présence est ressentie comme relevant d'une forme d'imposture et que leur légitimité a (encore) besoin d'être confortée par une parité imposée.

Sur la double base de l'absence de difficultés pratiques et de l'importance de la reconnaissance sociale demeurée nécessaire, il semble que la pertinence du maintien de dérogations au delà du 24 avril 2017 puisse légitimement être remise en cause.

Laurence Broze

Université de Lille

Présidente de l'association *femmes et mathématiques*.

Ce travail a été réalisé avec la collaboration de Pauline Gaffez, étudiante en licence Lettres-Mathématiques à l'université Lille 3. Je remercie Colette Guillopé, Aline Bonami et les participant·e·s de la Journée Parité 2016 pour leurs commentaires, suggestions et discussions stimulantes.

Tableau 2 – Proportion de femmes professeurs par section CNU (source : DGRH, MENESR, mars 2015)

Section CNU	Proportion de femmes PR	Proportion double et arrondie 2015	Taux dérogatoire 2013
Mathématiques	6%	13%	14%
Mécanique	9%	18%	17%
Constituants élémentaires	10%	20%	18%
Génie informatique	10%	21%	21%
Génie électrique	11%	23%	22%
Terre solide	11%	23%	18%
Structure de la Terre	13%	27%	22%
Milieux dilués et optique	14%	28%	29%
Milieux denses et matériaux	15%	30%	26%
Mathématiques appliquées	16%	33%	30%
Histoire du droit	17%	34%	
Astronomie	18%	36%	
Science politique	18%	36%	33%
Informatique	19%	38%	
Météorologie	19%	38%	
Sciences économiques	20%		
STAPS	21%		
Philosophie	21%		
Chimie théorique	22%		
Energétique, génie des procédés	22%		
Biologie des organismes	22%		
Chimie des matériaux	23%		
Histoire des sciences	23%		
Géographie physique	23%		
Cultures et langues régionales	24%		
Chimie organique	25%		
Biochimie	25%		
Anthropologie	26%		
Physiologie	26%		
Histoire moderne et cont.	27%		
Sciences de gestion	28%		
Droit public	28%		
Neurosciences	28%		
Urbanisme	29%		
Biologie des populations	30%		
Autres langues	30%		
Arts	32%		
Biologie cellulaire	34%		
Sociologie	34%		
Histoire ancienne et médiévale	34%		
Sciences de l'éducation	35%		
Communication	35%		
Droit privé	38%		
Psychologie	41%		
Langues germaniques	42%		
Littératures comparées	42%		
Langues anciennes	45%		
Littérature française	46%		
Linguistique	48%		
Langues slaves	51%		
Anglais	52%		
Langues romanes	56%		

Tableau 3 – Nombre de femmes professeurs par section CNU (source : DGRH, MENESR, mars 2015)

Section CNU	Nombre de femmes PR	Taux dérogatoire
Histoire des sciences	5	
Cultures et langues régionales	6	
Météorologie	11	
Astronomie	13	
Terre solide	14	18%
Anthropologie	17	
Constituants élémentaires	18	18%
Histoire du droit	19	
Langues slaves	19	
Science politique	23	33%
Structure de la Terre	26	22%
Urbanisme	27	
Biologie des organismes	32	
Mathématiques	33	14%
Neurosciences	33	
Autres langues	33	
Milieux dilués et optique	34	29%
STAPS	35	
Littératures comparées	36	
Philosophie	37	
Langues germaniques	43	
Langues anciennes	51	
Physiologie	55	
Biologie des populations	55	
Génie informatique	56	21%
Sciences de l'éducation	60	
Géographie physique	62	
Génie électrique	63	22%
Arts	63	
Communication	63	
Mécanique	69	17%
Chimie théorique	72	
Chimie des matériaux	72	
Milieux denses et matériaux	75	26%
Biochimie	77	
Energétique, génie des procédés	87	
Sociologie	87	
Biologie cellulaire	90	
Histoire ancienne et médiévale	92	
Chimie organique	102	
Mathématiques appliquées	104	30%
Sciences économiques	109	
Histoire moderne et cont.	113	
Linguistique	117	
Sciences de gestion	122	
Langues romanes	141	
Droit public	144	
Psychologie	152	
Littérature française	169	
Informatique	180	
Anglais	208	
Droit privé	220	

FIGURE 3 – Proportion de femmes professeurs par section CNU (source : DGRH, MENESR, mars 2015).

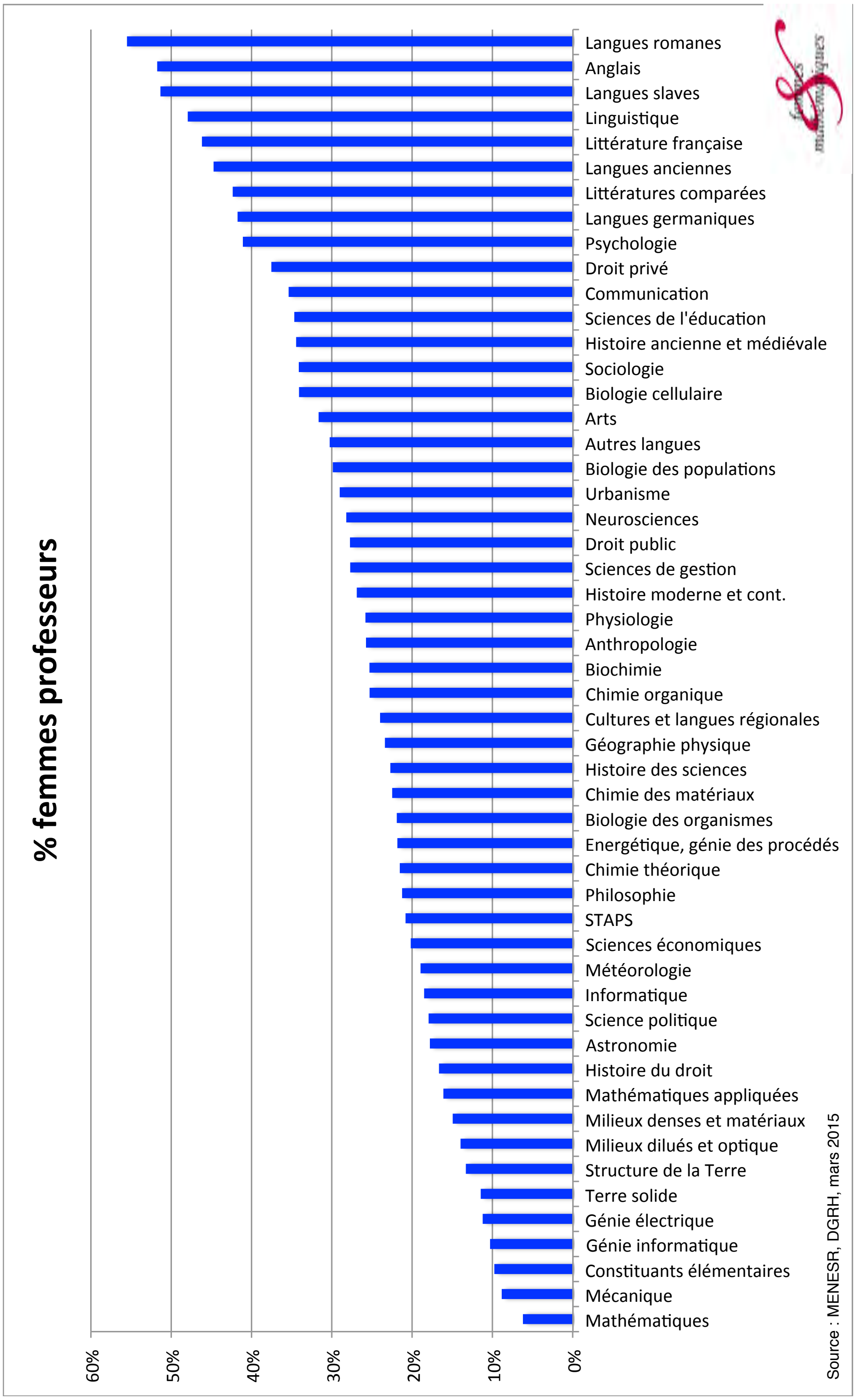
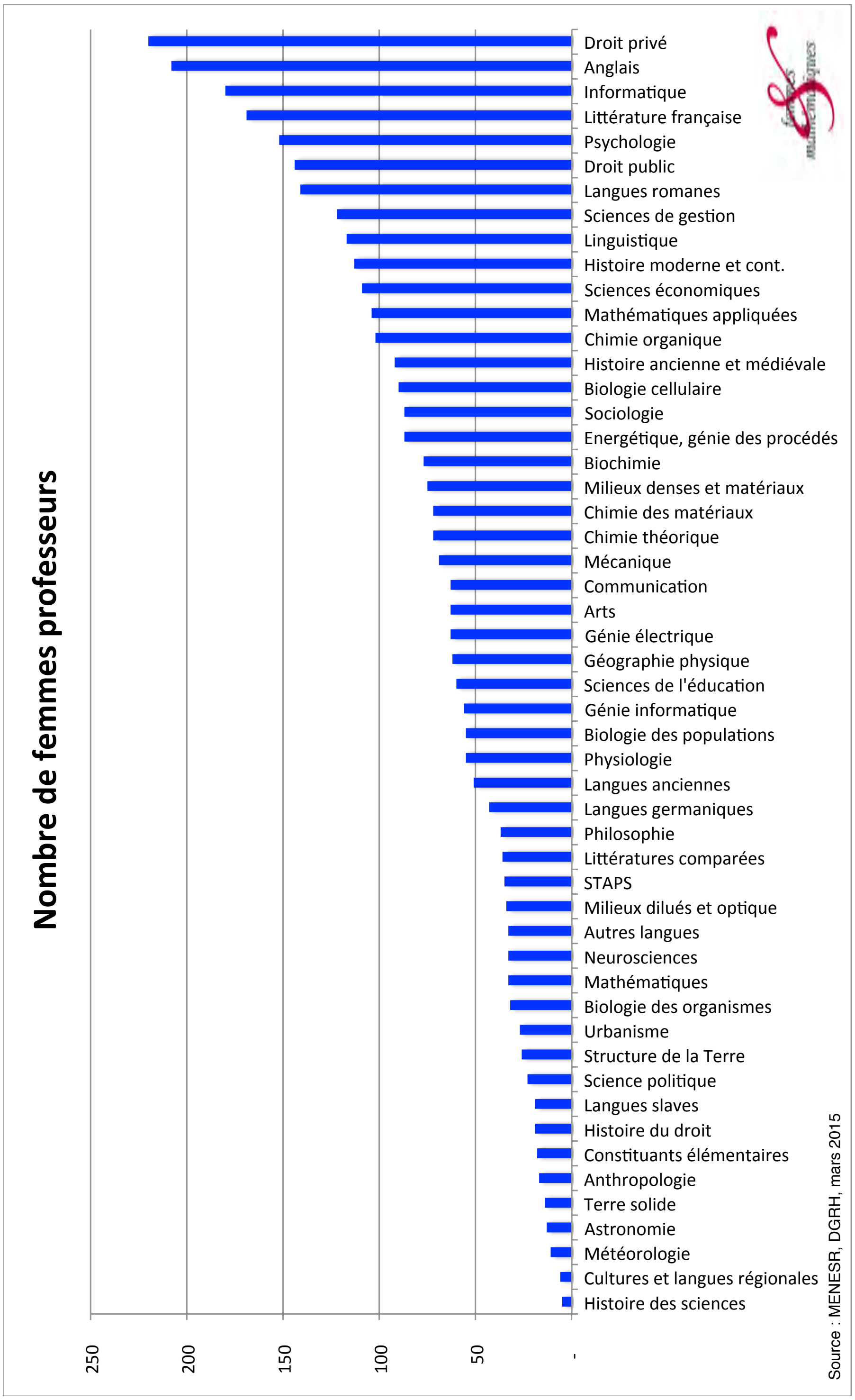


FIGURE 4 – Nombre de femmes professeurs par section CNU (source : DGRH, MENESR, mars 2015).



... la propriété (T)

• M. de la SALLE

1. Introduction

La propriété (T) est une propriété de groupe, définie par Kazhdan [7] en terme de ses représentations unitaires et qui, par ses nombreuses applications à des problèmes qui ne font a priori pas intervenir de représentation, est devenue un concept central dans l'étude des aspects analytiques et géométriques des groupes.

Pour raconter la propriété (T), il faut malheureusement commencer par l'étape pénible des définitions, assez techniques. On essaiera ensuite de convaincre le lecteur de l'intérêt de cette notion en décrivant certaines de ses nombreuses applications, avant de donner des exemples.

Une représentation unitaire d'un groupe [1] G est la donnée d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et d'un morphisme π de ce groupe vers le groupe $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ des isométries linéaires surjectives de $\mathcal{H}$. Un vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ est dit invariant lorsque $\pi(g)\xi = \xi$ pour tout g dans G. On dit qu'une représentation est triviale lorsque $\pi(g)$ est l'identité de $\mathcal{H}$ pour tout g. *La* représentation triviale est l'unique représentation triviale sur l'espace de Hilbert $\mathbb{C}$ de dimension 1.

La définition savante de la propriété (T) est la suivante : un groupe a la propriété (T) de Kazhdan si sa représentation triviale est isolée dans l'espace de ses représentations irréductibles unitaires. Cela revient à dire que si une représentation est suffisamment proche de la représentation triviale, alors elle contient une sous-représentation triviale, c'est-à-dire a des vecteurs invariants non nuls.

Cependant, il n'est pas nécessaire de définir précisément l'espace des représentations de G et sa topologie pour définir la propriété (T). Une définition plus concrète est :

un groupe a la propriété (T) s'il existe une partie finie $S \subset G$ et un nombre réel strictement positif ε tels que, pour toute représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$ sans vecteur invariant non nul et tout $\xi \in \mathcal{H}$,

$$\left(\sum_{s \in S} \|\pi(s)\xi - \xi\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \varepsilon \|\xi\|. \qquad (1)$$

Une telle paire (S, ε) est appelée une *paire de Kazhdan* [2].

Pour comprendre le lien entre la définition savante et la définition concrète, il suffit d'admettre que pour la topologie que l'on n'a pas décrite – et que l'on ne décrira pas –, une représentation π est *proche* de la représentation triviale si elle admet des vecteurs de norme 1 qui sont *peu* bougés par tous les éléments d'une partie finie $S \subset G$ *grande*. En effet, la définition concrète exprime qu'une représentation sans vecteur invariant non nul n'admet pas de vecteurs $\xi \in \mathcal{H}$ pour lequel (1) est violée, c'est-à-dire – ce qui revient au même par homogénéité – pas de vecteurs de norme 1 peu bougés par tous les éléments de S. Autrement dit, elle affirme qu'une représentation sans vecteur invariant ne peut pas être proche de la représentation triviale, ce qui est bien (par contraposée) le sens de la définition savante.

Les exemples « évidents » de groupes avec la propriété (T) sont les groupes finis. Voici comment s'en convaincre avec la définition concrète : si $(\pi, \mathcal{H})$ est une représentation d'un groupe fini G, alors le vecteur $\sum_{s \in G} \pi(s)\xi$ est invariant pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, puisque par linéarité et réarrangement de la

1. Le lecteur qui connaît déjà la propriété (T) sait qu'elle a un sens pour tout groupe topologique. Pour simplifier, dans ce texte on ne considérera que des groupes sans topologie. Ou, si on préfère, des groupes munis de la topologie discrète.

2. Cette définition de paire de Kazhdan est une variante de la définition classique, où dans (1) le signe $\sum_{s \in S}$ est habituellement remplacé par $\max_{s \in S}$. Mais comme S est fini, cela ne fait que changer la valeur de ε.

somme, pour tout $g \in G$:

$$\pi(g)\left(\sum_{s\in G}\pi(s)\xi\right) = \sum_{s\in G}\pi(gs)\xi = \sum_{s\in G}\pi(s)\xi.$$

Donc si π n'a pas de vecteur invariant non nul alors $\sum_{g\in G}\pi(g)\xi = 0$ et en développant $\sum_{s\in S}\|\pi(s)\xi - \xi\|^2 = 2|G|\|\xi\|^2$, ce qui implique que $(G, \sqrt{2|G|})$ est une paire de Kazhdan pour G. Trouver des groupes infinis avec la propriété (T) est une autre affaire. On verra plus tard que $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ est un tel exemple.

Pour toute représentation unitaire $(\pi, \mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ se décompose comme la somme directe de l'espace des vecteurs invariants et de son orthogonal. De plus π préserve cette décomposition. Une paire (S, ε) est donc une paire de Kazhdan si et seulement si (1) est valide pour toute représentation unitaire π et tout $\xi \in \mathcal{H}$ orthogonal à l'espace des vecteurs invariants, ou encore si et seulement si pour tout π et tout $\xi \in \mathcal{H}$,

$$\sum_{s\in S}\|\pi(s)\xi - \xi\|^2 \geqslant \varepsilon^2\|\xi - P_\pi\xi\|^2 \qquad (2)$$

où P_π désigne la projection orthogonale sur l'espace des vecteurs invariants.

2. Conséquences

La propriété (T) est donc une propriété de rigidité des représentations unitaires d'un groupe : il n'est pas possible de déformer la représentation triviale. Depuis son introduction par Kazhdan, la propriété (T) a eu beaucoup d'applications en dehors de la théorie des représentations, au point que c'est devenu un des concepts les plus importants en théorie analytique ou géométrique des groupes, en algèbre d'opérateurs ou encore en théorie ergodique.

Tout d'abord il y a de nombreuses façons de construire des représentations unitaires, et donc la propriété (T) a de nombreuses conséquences sur la structure algébrique d'un groupe ou sur ses actions. Par exemple, si un groupe G agit sur un ensemble X – on peut penser à $X = G/H$, l'ensemble des classes à gauche suivant un sous-groupe H de G –, on peut considérer l'espace de Hilbert $\ell_2(X)$ des fonctions complexes de carré sommable sur X pour la norme

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{x\in X}|f(x)|^2)\right)^{\frac{1}{2}},$$

et l'action de G sur X définit une représentation unitaire λ_X de G sur $\ell_2(X)$ – appelée représentation quasi-régulière – par la formule

$$\lambda_X(f)(x) = f(g^{-1}x). \qquad (3)$$

La construction précédente est l'exemple le plus simple d'un principe plus général, où X est muni d'une structure additionnelle et où il y a une manière d'associer – fonctoriellement – à X un espace de Hilbert $\mathcal{H}(X)$ qui encode cette structure [3]. Alors si G agit sur X en préservant cette structure [4], on obtient une représentation unitaire sur $\mathcal{H}(X)$. Par exemple si X est muni d'une tribu $\mathcal{A}$ et d'une mesure μ qui sont toutes les deux préservées par l'action de G (on parle d'action préservant une mesure), alors la formule (3) définit aussi une représentation unitaire sur l'espace de Hilbert $L_2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Donc si, comme dans le cas de la propriété (T), on peut dire quelque chose sur toutes les représentations de G, on dit en particulier des choses sur tous ses sous-groupes, sur toutes ses actions préservant une mesure d'autre part, et sur beaucoup d'autres types d'actions.

La première conséquence concrète de la propriété (T) – c'était la motivation originale de Kazhdan – est qu'un groupe qui a la propriété (T) est de type fini. *Plus précisément, si* (S, ε) *est une paire de Kazhdan alors* G *est engendré par* S. Pour le prouver, on considère $H \subset G$ le sous-groupe engendré par S, et on applique la définition de la propriété (T) (sous sa forme (2)) à la représentation quasi-régulière λ_X pour $X = G/H$.

Une autre conséquence, due à Delorme, concerne les actions de G par isométries sur les espaces de Hilbert. Si G a la propriété (T) alors il a la propriété (FH) de point fixe sur les espaces de Hilbert : toute action par isométries affines sur un espace de Hilbert a un point fixe. La preuve repose sur le principe général précédent et sur l'existence d'une façon d'associer à tout espace de Hilbert affine un espace de Hilbert linéaire. La réciproque, due à Guichardet, est vraie pour les groupes dénombrables (l'hypothèse de dénombrabilité, nécessaire,

3. Si on veut être formel, X est un objet dans une catégorie $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ est un foncteur de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des espaces de Hilbert et isométries linéaires.

4. C'est-à-dire par automorphismes dans $\mathcal{C}$.

vient du fait que la preuve repose sur le théorème de Baire, via le théorème de l'application ouverte).

Une action par isométries affines sur un espace de Hilbert d'un groupe avec (T) est donc une représentation unitaire déguisée, dans laquelle l'origine a changé de nom. Cela a des conséquences pour d'autres types d'actions : toute action par isométries sur un arbre est triviale dans le sens où elle fixe un sommet ou une arête. Et toute action par difféomorphismes suffisamment réguliers sur le cercle est triviale dans le sens où elle transite par un groupe fini.

Il n'est pas bien difficile de se convaincre que $\mathbb{Z}$ n'a pas la propriété (T) (considérer les représentations de dimension 1). Comme la propriété (T) passe aux quotients, un groupe avec la propriété (T) ne peut pas avoir un quotient isomorphe à $\mathbb{Z}$, et donc son abélianisé est fini. Encore une conséquence algébrique de la propriété (T).

Dans une direction un peu différente, l'existence même de groupes infinis avec la propriété (T) permet la construction, en dehors de la théorie des groupes, d'objets pathologiques, ou particulièrement intéressants. Par exemple, en algèbre d'opérateurs et plus précisément dans la classification des algèbres de von Neumann, elle a par exemple permis à Connes [3] (puis Popa) de construire des facteurs avec un groupe fondamental [5] discret (respectivement trivial). Toujours en algèbre d'opérateurs, elle permet [6] de construire un nombre non dénombrable d'espaces d'opérateurs de dimension $n \geqslant 3$ bien séparés, ce qui a des conséquences pour les produits tensoriels de C^*-algèbres. La section suivante décrit en détail comment la propriété (T) permet de construire explicitement des graphes expanseurs.

3. Graphes expanseurs

Par graphe on entendra toujours graphe non orienté, dans lequel on autorise les arêtes multiples ou les boucles. Informellement, les graphes expanseurs sont des familles de graphes finis qui, tout en n'ayant pas trop d'arêtes, ont de bonnes propriétés de connexité : pour disconnecter un de ces graphes en deux parties, le nombre d'arêtes à supprimer est grand – proportionnel au nombre de sommets dans la plus petite des parties. On devine bien que ces graphes sont utiles pour la conception de réseaux de communications, puisqu'ils fournissent des exemples de graphes à la fois économiques et robustes. Ils ont de très nombreuses autres applications, à la fois en informatique (par exemple pour construire des codes correcteurs d'erreurs, ou bien pour la dérandomisation d'algorithmes) et en mathématiques [5].

La condition que le graphe n'a pas trop d'arêtes est quantifiée en demandant que le graphe est d-régulier pour un certain entier d (c'est-à-dire que chaque sommet appartient à exactement d arêtes). La condition de connexité est quantifiée de la façon suivante : un graphe d'ensemble de sommets V est c-expanseur si, pour toute partie $A \subset V$, le nombre d'arêtes dont une extrémité est dans A et l'autre dans son complémentaire est au moins $c \min(|A|, |V \setminus A|)$. On dit qu'une suite de graphes d-réguliers X_n est une suite d'expanseurs si le nombre de sommets de X_n tend vers l'infini et s'il existe $c > 0$ tel que X_n est c-régulier pour tout n. On insiste sur le fait que, sans quantificateurs, cela n'a pas de sens de dire qu'un graphe est un expanseur : il s'agit d'une propriété asymptotique d'une famille de graphes.

L'existence même de suites d'expanseurs n'est intuitivement pas évidente ; elle a été établie par Pinsker par un argument de comptage (si $c > 0$ est assez petit, un graphe choisi au hasard uniformément parmi les graphes 3-réguliers à $2n$ sommets sera un c-expanseur avec probabilité $1 - o(1)$ lorsque n tend vers l'infini). Malheureusement, cette preuve d'existence ne permet pas de mettre la main sur des exemples. La première construction explicite de graphes expanseurs est due à Margulis, la voici.

La construction repose sur l'existence d'un groupe infini avec la propriété (T) et résiduellement fini. Cela veut dire que G admet une suite de sous-groupes H_n d'indices finis mais tendant vers l'infini. Toute la difficulté de la construction vient de l'existence de tels groupes, mais on peut prendre $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ – qui a bien la propriété (T) comme on le verra bientôt – et H_n le sous-groupe des matrices qui (par réduction de chaque coefficient) sont congrues à l'identité modulo n. Soit (S, ε) une paire de Kazhdan pour G. Quitte à agrandir S on peut supposer que S est stable par inverse.

On peut munir $X_n = G/H_n$ d'une structure de graphe $|S|$-régulier – appelé graphe de Schreier, ou graphe de Cayley lorsque H_n est distingué – en dé-

5. Il s'agit de l'invariant introduit par Murray et von Neumann pour mesurer le degré d'autosimilarité d'une algèbre de von Neumann, pas de la notion de Poincaré en topologie algébrique.

crétant qu'il y a autant d'arêtes entre gH_n et $g'H_n$ que d'éléments s de S tels que $sgH_n = g'H_n$. Le nombre de sommets de X_n est l'indice de H_n ; il est donc fini et tend vers l'infini avec n. Vérifions que cette suite de graphes est une suite d'expanseurs, et plus précisément que chaque graphe est $\frac{\varepsilon^2}{4}$-expanseur. Si $A \subset X_n$, il s'agit d'appliquer la définition de la propriété (T) à la représentation $\pi = \lambda_{X_n}$ et à ξ la fonction indicatrice de A : pour ces choix la quantité $\sum_{s\in S}\|\lambda_{G/H_n}(s)\xi - \xi\|^2$ est égale à 2 fois le nombre d'arêtes entre A et son complémentaire, alors que $\|\xi - P_\pi\xi\|^2$ est égal à $\frac{|A||X_n \setminus A|}{|X_n|}$ et est en particulier plus grand que $\frac{1}{2}\min(|A|,|X_n \setminus A|)$. L'inégalité (2) exprime donc que le nombre d'arêtes entre A et son complémentaire est minoré par $\frac{\varepsilon^2}{4}\min(|A|,|X_n \setminus A|)$, ce qu'il fallait démontrer.

4. Exemples

Il existe des groupes infinis avec la propriété (T), mais ce n'est pas du tout évident. Si l'on ne devait retenir qu'un exemple, ce serait sans doute $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$. Ou alors $\mathrm{SL}_3(\mathbf{F}_p[X])$ où, pour un nombre premier p, $\mathbf{F}_p[X]$ désigne l'anneau des polynômes à coefficients dans le corps fini de cardinal p. Il est d'ailleurs remarquable qu'on puisse démontrer que ces groupes ont la propriété (T), alors que leur théorie des représentations est trop sauvage pour qu'on puisse espérer toute forme de classification satisfaisante. Ces groupes ont le point commun d'être respectivement des réseaux (c'est-à-dire des sous-groupes discrets de covolume fini) dans les groupes de Lie $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_3(\mathbf{F}_p((X^{-1})))$. C'est dans ce contexte que la propriété (T) a été introduite par Kazhdan, qui a prouvé que, pour $n \geqslant 3$ et pour un corps local $\mathbf{F}$, tous les réseaux dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F})$ ont la propriété (T) – et par conséquent ils sont tous de type fini et d'abélianisé fini. Il l'a fait en démontrant que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{F})$ [6] avait la propriété (T) (dans une forme adaptée aux groupes topologiques : on ne considère que les représentations continues, et on remplace partie finie par compacte), et en démontrant que la propriété (T) passe aux réseaux et réciproquement.

À l'inverse, si $n = 2$, ni $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F})$ ni ses réseaux n'ont la propriété (T).

Les preuves de ces résultats sont trop difficiles pour être présentées ici. Mais il y a une manière très élémentaire de démontrer la propriété (T), que même – surtout ! – un ordinateur peut comprendre. C'est une preuve en termes de trou spectral du Laplacien. Notons $\mathbb{R}G$ l'algèbre du groupe de G : c'est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base G, que l'on munit d'une structure d'algèbre en étendant par bilinéarité la multiplication de G, et d'une involution $*$ en étendant linéairement l'inverse $s \mapsto s^{-1}$. Alors toute représentation unitaire de G s'étend par linéarité en une représentation de l'algèbre involutive $\mathbb{R}G$. Si S est une partie finie de G, l'élément

$$\Delta_S = \sum_{s\in S}(s-1)^*(s-1) = \sum_{s\in S} 2 - s - s^{-1} \in \mathbb{R}G$$

est appelé Laplacien [7]. Par (2) (S,ε) est une paire de Kazhdan si et seulement si pour toute représentation unitaire π de G, l'opérateur autoadjoint positif

$$\pi(\Delta_S) = \sum_{s\in S}(\pi(s)-\pi(1))^*(\pi(s)-\pi(1))$$

a un spectre contenu dans $\{0\} \cup [\varepsilon^2, \infty)$. En utilisant que la fonction $t \mapsto t^2 - \varepsilon^2 t$ est positive exactement en dehors de l'intervalle $(0,\varepsilon^2)$, c'est équivalent à ce que $\pi(\Delta_S)^2 - \varepsilon^2\pi(\Delta_S)$ est un opérateur positif. C'est évidemment le cas si $\Delta_S^2 - \varepsilon^2\Delta_S$ est déjà une somme de carrés dans $\mathbb{R}G$, c'est-à-dire s'il y a une écriture

$$\Delta_S^2 - \varepsilon^2\Delta_S = \sum_{k=1}^{n} b_k^* b_k, \tag{4}$$

puisqu'alors pour toute représentation unitaire

$$\pi(\Delta_S)^2 - \varepsilon^2\pi(\Delta_S) = \sum_{k=1}^{n}\pi(b_k)^*\pi(b_k).$$

Depuis les années 90, il y a eu un certain nombre de groupes pour lesquels la propriété (T) a été prouvée en exhibant une décomposition comme dans (4). Par exemple Żuk [11] donne des conditions suffisantes sur une présentation de groupe qui garantissent l'existence d'une telle décomposition. En particulier il démontre que pour certains modèles aléatoires de présentations de groupes, un groupe a la propriété (T) avec grande probabilité.

Très récemment, Ozawa [10] a démontré une réciproque à l'observation que (4) implique (T) : si G a la propriété (T) et S est une partie génératrice finie, alors une décomposition (4) existe pour un certain $\varepsilon > 0$. Il existe même une décomposition avec des

6. dont la théorie des représentations est bien ou assez bien comprise.

7. Le lecteur qui est familier avec l'analyse sur les graphes et qui a retenu les notations des sections 2 et 3 trouvera une justification pour cette terminologie en vérifiant que, si H est un sous-groupe de G, alors l'opérateur $\lambda_{G/H}(\Delta_S)$ sur $\ell_2(G/H)$ est le Laplacien combinatoire sur le graphe de Schreier de G/H relativement à l'union de S et $S^{-1} = \{s^{-1}, s \in S\}$.

termes $b_k \in \mathbb{R}G$ à coefficients rationnels. Et donc un ordinateur qui sait faire des calculs avec G peut essayer de montrer que G a (T), et il finira par y arriver si c'est le cas : si $\varepsilon > 0$ et n sont fixés et si on ne cherche b_k que dans l'espace vectoriel engendré par une partie finie fixée de G, c'est un problème de programmation semi-définie de résoudre (4). Motivés par ce résultat théorique, Netzer et Thom [9] ont osé se lancer dans cette tâche pour $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ et S les 6 matrices élémentaires (les matrices avec des 1 sur la diagonale, exactement un 1 en dehors de la diagonale, et des 0 ailleurs). À l'aide d'un ordinateur, ils ont obtenu une décomposition (4) avec $n = 121$ et $\varepsilon^2 = \frac{1}{6}$ — une amélioration substantielle de la meilleure valeur connue auparavant, de l'ordre de $\varepsilon^2 = \frac{1}{1800}$.

Le défi suivant pour les programmateurs est le groupe $\mathrm{Aut}(F_4)$ des automorphismes du groupe libre à 4 générateurs, dont on ne sait toujours pas s'il a la propriété (T) (on sait que ce n'est le cas ni pour $\mathrm{Aut}(F_2)$ ni pour $\mathrm{Aut}(F_3)$).

5. Pour aller plus loin

Cette courte présentation ne fait qu'effleurer le sujet, les exemples et les applications. Le texte [4] est une très bonne présentation de la propriété (T). En anglais, mais plus à jour et plus complet, on peut lire [2].

Des formes de la propriété (T) ont été aussi définies dans de nombreux autres contextes : pour les paires de groupes, les relations d'équivalences, les algèbres de von Neumann, les espaces métriques... Généraliser la propriété (T) pour des représentations qui ne sont pas unitaires (sur des espaces de Hilbert ou des espaces de Banach plus généraux) est intéressant mais difficile [1, 8].

Références

[1] U. Bader et al. « Property (T) and rigidity for actions on Banach spaces ». **1**, nº 198 (2007), p. 57–105.

[2] B. Bekka, P. de la Harpe et A. Valette. « Kazhdan's property (T), volume 11 of New Mathematical Monographs » (2008).

[3] A. Connes. « A factor of type II_1 with countable fundamental group ». **1**, nº 4 (1980), p. 151–153.

[4] P. de la Harpe et A. Valette. *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger)*. **175**. Astérisque 158. Société mathématique de France, 1989.

[5] S. Hoory, N. Linial et A. Wigderson. « Expander graphs and their applications ». *Bulletin of the American Mathematical Society* **43**, nº 4 (2006), p. 439–561.

[6] M. Junge et G. Pisier. « Bilinear forms on exact operator spaces andB (H) B (H) ». *Geometric & Functional Analysis GAFA* **5**, nº 2 (1995), p. 329–363.

[7] D. A. Každan. « Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés ». *Funkcional. Anal. i Priložen* **1** (1967), p. 71–74.

[8] V. Lafforgue et al. « Un renforcement de la propriété (T) ». *Duke Mathematical Journal* **143**, nº 3 (2008), p. 559–602.

[9] T. Netzer et A. Thom. « Kazhdans Property (T) via semidefinite optimization ». *Experimental Mathematics* **24**, nº 3 (2015), p. 371–374.

[10] N. Ozawa. « Noncommutative real algabraic geometry of Kazhdans property (T) ». *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* **15**, nº 01 (2016), p. 85–90.

[11] A. Zuk. « Property (T) and Kazhdan constants for discrete groups ». *Geometric & Functional Analysis GAFA* **13**, nº 3 (2003), p. 643–670.

Mikael de la Salle

Éns de Lyon

mikael.de.la.salle@ens-lyon.fr

Mikael de la Salle est chargé de recherche à l'umpa, Éns de Lyon. Il travaille dans les domaines de l'analyse fonctionnelle et de la théorie des groupes.

L'auteur remercie Vincent Calvez, Yves de Cornulier, Damien Gaboriau, Sophie Grivaux et un relecteur anonyme pour leurs nombreuses relectures et leurs conseils avisés.

L'ANR avant l'heure

• P. Arnoux

La démission récente du comité Agence Nationale pour la Recherche (ANR) m'a remis en mémoire le texte ci-dessous. Il est dû à Leo Szilard, physicien hongrois émigré aux États-Unis dans les années 30, et qui a participé à la construction de la bombe atomique, avant d'être à l'origine des premiers mouvements pour le contrôle des armes nucléaires. Il était considéré par ses contemporains comme un esprit vif et original, et il a publié en 1961 un recueil de nouvelles, *The voice of the Dolphins*, publié en français chez Denoël en 1962 (malheureusement, la version anglaise comme la version française, sur papier ou numériquement, sont actuellement introuvables, et je n'en ai lu que ce passage).

C'est de la science-fiction du meilleur niveau ; celle qui, avec 50 ans d'avance, décrit précisément ce qui va se passer. Il s'agit d'une conversation sur le progrès scientifique entre le narrateur et un grand industriel, Mark Gable.

60 LA FONDATION MARK GABLE

avis, le progrès scientifique est déjà bien assez rapide.

— Je partage votre point de vue », dis-je avec une ferveur due à la conviction, « mais alors pourquoi ne pas faire quelque chose pour retarder le progrès scientifique ?

— Cela me plairait beaucoup, dit Mark Gable, mais comment m'y prendre ?

— Eh bien, dis-je, je crois que ce ne serait pas très difficile. Ce serait même très facile en fait. Vous pourriez créer une Fondation, dotée de 30 millions de dollars par an. Les chercheurs impécunieux pourraient demander une subvention, à condition que leurs arguments soient convaincants. Organisez dix comités, composés chacun de douze savants, et donnez-leur pour tâche de transmettre ces demandes. Enlevez à leurs laboratoires les savants les plus actifs et nommez-les membres de ces comités. Prenez les plus grands savants du moment et faites-en des présidents aux honoraires de 50 mille dollars par an. Fondez vingt prix de 100 mille dollars à attribuer aux meilleures publications scientifiques de l'année. C'est à peu près tout ce que vous aurez à faire. Vos avocats pourront facilement préparer une Charte de la fondation. Tous les projets de loi pour la Fondation Scientifique Nationale présentés au 79e et au 80e

LA FONDATION MARK GABLE 61

Congrès pourraient parfaitement servir de modèles.

— Il me semble que vous devriez expliquer à Mr. Gable comment cette fondation retarderait le progrès de la science », fit un jeune homme portant lunettes assis à l'autre bout de la table, et dont je n'avais pas saisi le nom quand on me l'avait présenté.

« Cela me paraît évident, dis-je. D'abord les meilleurs savants seraient enlevés à leurs laboratoires, et passeraient leur temps dans les comités à transmettre les demandes de subvention. Ensuite, les travailleurs scientifiques impécunieux s'appliqueraient à résoudre des problèmes fructueux qui leur permettraient presque certainement d'arriver à des résultats publiables. Il est possible que la production scientifique s'accroisse énormément pendant quelques années. Mais en ne recherchant que l'évident, la science serait bientôt tarie. Elle deviendrait quelque chose comme un jeu de société. Certaines sujets seraient considérés comme intéressants, d'autres non. Il y aurait des modes. Ceux qui suivraient la mode recevraient des subventions, les autres, non. Et ils apprendraient tous bien vite à suivre la mode.

— Voulez-vous rester avec nous ? me de-

Léo Szilard, « La fondation Mark Gable » dans La voix des dauphins, Éditions Denoël, 1962.

Comment décrire de façon plus concise le fonctionnement de l'ANR, et plus généralement de notre communauté scientifique, avec ses couches de bureaucratie (UFR, COMUE, PIA, IDEX...) et ses multiples appels à projet ? On remarquera que Szilard ne donne pas à ces comités formés de savants prestigieux la tâche de choisir les projets qui seront financés ; leur rôle est uniquement de « transmettre les demandes ». C'est en cela que pêchait la formule initiale de l'ANR, et les réformes successives ont consisté à rapprocher progressivement son fonctionnement du modèle idéal proposé par Szilard il y a plus de 50 ans, dans le but de ralentir le progrès scientifique.

Il reste encore des modifications à faire : la présidence d'un comité ANR ne rapporte pas des dizaines de milliers de dollars par an ! Mais peut-être voulait-il parler de la présidence d'une COMUE bien choisie ?

Pierre Arnoux

Institut de Mathématiques de Marseille, UMR 7373, Site Sud, Campus de Luminy, Case 907 13288 Marseille Cedex 9, France.

pierre@pierrearnoux.fr

Pierre Arnoux est professeur au département de mathématiques de l'université d'Aix-Marseille. Il étudie les systèmes dynamiques, plus précisément les liens entre la dynamique symbolique et la théorie des nombres.

Retour d'expérience sur le lancement de l'*Épijournal de Géométrie Algébrique*

- P.-E. Chaput
- B. Claudon
- L. Fresse
- A. Genestier
- D. Mégy
- A. Perego
- M. Toma

Face aux pratiques de certains éditeurs commerciaux, proposer des solutions de publication alternatives, vertueuses, et ayant une légitimité scientifique incontestable devient de plus en plus urgent. C'est en grande partie poussé par cette urgence que l'*Épijournal de Géométrie Algébrique* a récemment vu le jour. Les auteurs reviennent sur les différentes étapes qui ont jalonné la création de ce journal, ainsi que sur le modèle de publication que constitue un épijournal.

Un nouveau journal, l'*Épijournal de Géométrie Algébrique*, a récemment vu le jour. Nous profitons de cet événement pour revenir sur la notion d'épijournal et sur la plateforme Épisciences.

Nous nous pencherons ensuite sur le cas du journal susmentionné.

1. Un nouveau mode de publication scientifique : l'épijournal

Il est peut-être bon de rappeler ce que désigne le terme *épijournal* (*overlay journal* outre-Manche). À défaut d'en donner une définition rigoureusement exacte, en voici une bonne approximation : un épijournal est un journal électronique en libre accès adossé à une archive ouverte. Arrêtons-nous un moment sur ces quelques mots. En tout premier lieu, un épijournal est donc un journal scientifique et il se doit donc de respecter les standards du genre (pour ce qui nous concerne : comité de lecture, évaluation par les pairs, référencements, ... nous reviendrons un peu plus loin sur ces points). Ensuite, les articles publiés dans un épijournal le sont de façon électronique ; un épijournal n'a donc pas vocation à exister sous forme papier (excepté peut-être pour des raisons d'archivage). Enfin, et c'est ici que réside la spécificité, un épijournal utilise une ou plusieurs archives ouvertes du champ disciplinaire comme vivier de publications. Les articles soumis le sont depuis une archive ouverte : un auteur souhaitant soumettre un article dans un épijournal doit d'abord le déposer dans une archive ouverte et ensuite le soumettre. En cas de publication, un lien renvoyant à l'archive ouverte apparaît sur le site du journal. Les méta-données (sur l'archive ouverte) de la version de l'article qui a été acceptée sont également modifiées : mention y est faite de la publication.

La description donnée ci-dessus justifie donc le dernier terme sur lequel nous ne sommes pas revenus, à savoir le libre accès. Par essence même, un épijournal offre donc la libre consultation des articles publiés. Nous préciserons un peu plus loin le modèle économique des épijournaux dans le cas d'Épisciences.

Citons au passage les références [1] et [3] qui présentent à la fois la notion d'épijournaux et le modèle Épisciences en particulier.

2. La plateforme Épisciences

Un épijournal est donc une couche supplémentaire au-dessus d'une ou plusieurs archives ouvertes et a en général recours à l'utilisation d'une plateforme web pour assurer le lien avec celles-ci. Il en existe plusieurs « sur le marché » ; citons par exemple la plateforme *Scholastica* sur laquelle s'appuie le journal *Discrete Analysis* lancé très récemment par Tim Gowers [1].

Venons-en à la plateforme *Épisciences*. Il s'agit d'une plateforme web qui a pour vocation l'hébergement d'épijournaux. Les thématiques présentes sont pour l'instant les mathématiques et l'informatique [2]. La plateforme se trouve donc adossée aux archives ouvertes suivantes : arXiv et Hyper Articles en Ligne (hal) bien entendu, mais également cwi (*Centrum Wiskunde & Informatica*) et prodINRA (archive ouverte des productions de l'Institut National de la Recherche Agronomique). Cette plateforme est l'un des projets [3] du ccsd. Du point de vue économique, les épijournaux hébergés sur Épisciences relèvent d'un modèle vertueux puisqu'ils ne perçoivent pas de frais [4] de publication : les coûts financiers sont ici supportés par les institutions publiques.

La plateforme propose une infrastructure web permettant de gérer le flux éditorial. Il nous semble intéressant de souligner que le développement (au moins dans les premiers temps) de la plateforme se fait en lien direct avec les utilisateurs, c'est-à-dire nous les chercheurs. Les développeurs essayent de répondre au mieux au besoin des uns et des autres : dans les différents domaines scientifiques, les habitudes éditoriales sont en effet parfois très éloignées les unes des autres. Autre point important : la plateforme n'accueille pas seulement des nouvelles revues. Les journaux existants décidant de basculer en mode épijournal peuvent également rejoindre [5] le giron d'Épisciences.

À l'heure actuelle, les épijournaux hébergés par la plateforme Épisciences sont les suivants :

en Mathématiques. *Hardy Ramanujan Journal* (théorie des nombres) et *arima Journal* (revue Africaine de la Recherche en Informatiques et Mathématiques Appliquées).

en Informatique. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* (dmtcs), **Journal d'Interaction.** Homme Machine (jips), *Journal of Data Mining and Digital Humanities* (jdmdh) et *Journal of Interdisciplinary Methodologies and Issues in Science* (jimis).

3. Le petit dernier : l'Épijournal de Géométrie Algébrique

3.1 – Nos motivations

Avec quelques collègues nancéiens [6], nous avons eu envie de profiter de l'opportunité offerte par le projet Épisciences pour lancer un journal de mathématiques utilisant cette plateforme. Comme le montre la courte liste ci-dessus, les épijournaux de mathématiques ne sont pas légion (d'autant que le journal *arima* n'avait pas encore basculé sur Épisciences au moment où nous avons commencé à discuter de tout cela) et il nous a semblé urgent de contribuer à allonger cette fameuse liste.

Il va sans dire que, dans le contexte actuel de l'édition scientifique, la perspective de participer à une action allant dans le sens d'un modèle vertueux et d'une alternative pérenne aux modèles existants nous a également paru une excellente motivation pour nous lancer dans ce projet.

Comme il nous a semblé plus aisé de créer une revue spécialisée (notamment pour constituer le comité de rédaction), nous avons donc vite opté pour un journal de géométrie algébrique. Un journal électronique et en libre accès de géométrie algébrique existe déjà : il s'agit [7] de *Algebraic Geometry* financé par la fondation *Compositio*. Cependant la géométrie algébrique est une discipline dynamique, avec un champ très vaste, et les prépublications de bon niveau dans ce domaine ne manquent pas. De

1. `http://discreteanalysisjournal.com/`. Rappelons au passage que ce journal ne demande pour l'instant pas de frais de publication grâce à une dotation spécifique de l'université de Cambridge.
2. Les épijournaux ne sont pas l'apanage des mathématiciens et des informaticiens, voir par exemple [2].
3. Le Centre pour la Communication Scientifique Directe (ccsd) (`https://www.ccsd.cnrs.fr/`) est une Unité Mixte de Service cnrs/inria/Université de Lyon. À titre d'information, les autres projets développés par le ccsd sont : hal, Thèses En ligne, SciencesConf.org, medihal (dépôt d'imagerie scientifique) et Héloise (recensement de la politique des éditeurs en matière d'archives ouvertes).
4. Connus sous le doux nom d'APC, pour *Article Processing Charges*.
5. C'est d'ailleurs le cas de plusieurs épijournaux de la liste ci-dessus.
6. Les auteurs de ces lignes, qui se sont ensuite constitués en comité de suivi.
7. `https://algebraicgeometry.nl/`

plus, il peut être intéressant de multiplier les possibilités pour les chercheurs de publier dans des revues suivant un modèle économique vertueux.

3.2 – La genèse du projet

Nos premières tâches furent donc de trouver un nom, constituer un comité éditorial (en pratique, faire une liste de gens susceptibles d'accepter et prendre contact avec eux) et d'établir les règles de fonctionnement. Une fois ceci fait, nous avons rassemblé toutes ces informations pour déposer notre demande de création auprès du comité [8] *épiMaths*. Le rôle de ce dernier est de susciter la création de nouvelles épirevues et d'étudier les dossiers déposés à cette fin. Notre demande fut acceptée en décembre 2015, avec en prime quelques conseils de l'épi-comité concernant le fonctionnement du journal.

De janvier à juin 2016, nous sommes alors entrés dans une phase de test. En effet, une fois la création du journal validée, le nouvel épijournal s'est vu attribué une url [9] et les membres du comité de suivi ont pu faire leurs gammes sur une page de test, véritable épi-bac à sable pour rédacteurs en herbe. Nous avons ainsi pu appréhender les différentes fonctionnalités de la plateforme en simulant le processus éditorial, de la soumission d'un article à son acceptation (ou rejet). Cette découverte/apprentissage du système s'est doublé également de rapports de dysfonctionnements (légers, ne vous inquiétez pas). Pour ce faire, nous sommes [10] en relation avec Ariane Rolland (de l'Institut Fourier) qui participe au développement de la plateforme et qui se trouve donc en contact direct avec le ccsd. Avant le lancement, il a également fallu nous occuper du contenu du site web, d'informer les rédacteurs sur le fonctionnement de la plateforme, de commencer à prospecter pour d'éventuelles soumissions... Enfin, le moment nous a semblé opportun pour annoncer le lancement du journal : ce fut chose faite le 24 juin dernier avec les premières annonces diffusées sur la liste institutionnelle gagc (Géométrie Algébrique et Géométrie Complexe) du cnrs et sur la liste européenne eager-gen.

3.3 – Les missions du journal

Comme son nom l'indique, l'Épijournal de Géométrie Algébrique a pour vocation de publier des articles originaux en géométrie algébrique, l'acception de la discipline devant être prise dans un sens assez large allant de la géométrie arithmétique à l'étude des variétés kählériennes compactes en passant par la théorie des groupes algébriques et de leurs représentations. Les articles publiés le sont en anglais ou en français et doivent bien entendu consister en des productions originales (non publiées par ailleurs).

Le comité de rédaction assure la sélection des articles soumis (*via* un processus classique de relecture par les pairs). Il est composé des personnes suivantes :

- Valery Alexeev, University of Georgia ;
- Joseph Ayoub, Universität Zürich ;
- Michel Brion, Université de Grenoble, éditeur coordinateur ;
- Frédéric Campana, Université de Lorraine ;
- Dennis Gaitsgory, Harvard University ;
- Xuhua He, University of Maryland ;
- Michael Rapoport, Universität Bonn ;
- Guy Rousseau, Université de Lorraine ;
- Ravi Vakil, Stanford University ;
- Misha Verbitsky, National Research University HSE, Moscou.

Un des rédacteurs a donc un rôle particulier : le coordinateur. Il a pour rôle d'assigner les articles à l'un (ou plusieurs) des rédacteurs et il a également un rôle d'animateur dans les discussions concernant le statut d'un article soumis. Les décisions sont en effet prises de manière collégiale quant à l'acceptation ou au rejet d'un article.

Comme il en a été fait mention plus haut, les auteurs de ces lignes constituent le comité de suivi du journal. Le rôle de ce comité est d'assurer le bon fonctionnement logistique du journal (mise en route du site web du journal, test de l'interface, mise au point d'une feuille de style LaTex pour le journal, veille logistique...). Nous nous associons également aux rédacteurs pour assurer la promotion du journal dans ses premiers temps de vie (diffusion de l'information sur diverses listes et sollicitation de nouvelles soumissions).

8. Pour la composition de ce comité, nous renvoyons à la page `http://episciences.org/page/epimath`. Il est à noter que *Épisciences-Maths* est un projet porté par l'institut Fourier (Grenoble).

9. `http://epiga.episciences.org/` Pour des raisons évidentes, nous n'avons pu choisir les initiales du journal comme acronyme...

10. La syntaxe française exigerait une forme au passé mais il s'avère que le processus éditorial d'Épisciences évolue encore et nous sommes donc encore en contact avec Ariane Rolland.

3.4 – Ce qu'il reste à faire

Nous venons de le dire : susciter des soumissions est une tâche d'importance. Les premiers articles ont été soumis au journal mais toutes les soumissions (du moins celles relevant du domaine de la revue) sont les bienvenues. Nous espérons que ces lignes y auront servi !

Enfin, pour que le journal soit connu de toute la communauté mathématique et pour que les articles publiés soient facilement accessibles, il nous reste à nous assurer du bon référencement du journal : demande de numéro ISSN et référencement dans les bases de données MathScinet et Zentralblatt (ceci ne pouvant être fait qu'une fois que le journal aura publié du contenu).

4. Conclusion

Les alternatives pérennes et institutionnelles aux modèles économiques proposés par les éditeurs commerciaux existent sous différentes formes. Le projet Épisciences en est un exemple, tout comme les projets de la cellule [11] Mathdoc. À nous de nous en saisir et de multiplier les possibilités pour que les chercheurs désireux de publier leurs travaux dans des revues économiquement vertueuses aient un choix de plus en plus large.

Références

[1] C. Berthaud et al. « EPISCIENCES - an overlay publication platform ». In : *ELPUB2014 - International Conference on Electronic Publishing*. Sous la dir. de D. P. Polydoratou. Alexander Technological Education Institute of Thessaloniki. Thessalonique, Greece : IOS Press, juin 2014, p. 78–87. DOI : 10.3233/978-1-61499-409-1-78. URL : https://hal.inria.fr/hal-01002815.

[2] E. Gibney. « Open journals that piggyback on arXiv gather momentum ». *Nature* **530** (fév. 2016), p. 117–118. DOI : 10.1038/nature.2015.19102. URL : http://www.nature.com/news/open-journals-that-piggyback-on-arxiv-gather-momentum-1.19102.

[3] G. Rivérieux et al. « Episciences IAM: an editorial project between rupture and continuity ». In : *Libre accès et recherche scientifique : vers de nouvelles valeurs*. Sous la dir. de M. B. Romdhane. Tunis, Tunisia : Editions de l'Institut Supérieur de la Documentation, nov. 2014, p. 15. URL : https://hal.inria.fr/hal-01100144.

Pierre-Emmanuel Chaput et al.

Université de Lorraine

Prenom.Nom@univ-lorraine.fr

Nous tenons à remercier les personnes suivantes pour leurs lectures attentives et leurs remarques pertinentes : Michel Brion, Karim Ramdani et Ariane Rolland.

11. http://www.mathdoc.fr/

Souvenirs de Tan Lei

1963-2016

Notre collègue Tan Lei, professeur à Angers, est décédée d'un cancer en avril, à 53 ans. Ses collègues et amis lui rendent hommage dans les textes qui suivent.

Photographie : François Tisseyre.

John Hamal Hubbard

Je me souviens bien de mes premiers contacts avec Tan Lei, encore que j'aie de la peine à les dater, probablement 1985-86, au cours de visites à Paris dont je n'ai plus la trace. Souvent elle avait rendez-vous avec Adrien Douady au café des Ursulines, où Adrien et moi prenions le café le matin. On la voyait remonter la rue Gay-Lussac, toute sautillante et guillerette ; elle venait nous rejoindre et discuter, essentiellement d'accouplements mais aussi de points paraboliques de l'ensemble de Mandelbrot, et plus généralement de dynamique holomorphe. Tan Lei parlait avec un accent chinois prononcé, ce qui donnait à ces discussions un ton chantant et saccadé ; cet accent a fini par s'estomper mais n'a jamais disparu. Elle discutait de mathématiques avec passion, une passion qu'elle n'a jamais perdue non plus : cet enthousiasme l'a menée loin.

Ces conversations ont donné naissance aux premiers résultats de Tan Lei :

- La ressemblance (pour la métrique de Hausdorff) entre l'ensemble de Mandelbrot au voisinage d'un point c tel que pour le polynôme $p_c(z) = z^2 + c$ le point critique est strictement prépériodique, et l'ensemble de Julia de p_c au voisinage de c.
- L'existence d'accouplements pour les paires de polynômes post-critiquement finis si et seulement si les polynômes n'appartiennent pas à des membres conjugués de l'ensemble de Mandelbrot M.

Le second résultat a fait l'objet de sa thèse, qui est un des grands classiques du sujet. C'est une application du théorème de Thurston sur la caractérisation topologique des applications rationnelles. Il faut voir qu'il y a une obstruction de Thurston si et seulement si les polynômes appartiennent à des membres conjugués de M. Dans un sens c'est facile, mais dans l'autre cela demande énormément d'astuce.

Tan Lei a passé un peu plus tard un semestre au Max Plank Intitute à Bonn, où il y avait une année dédiée aux systèmes dynamiques. Elle y a eu des collaborations longues et fructueuses ; cinq articles en commun avec Kevin Pilgrim, deux avec Mistuhiro Shishikura, dont un extrêmement important sur les accouplements de polynômes cubiques. Les travaux avec Pilgrim ont beaucoup approfondi notre vision de la combinatoire des fonctions rationnelles. Je lui suis aussi très reconnaissant pour une activité qui a dû commencer à cette époque : elle a méticuleusement lu les thèses de beaucoup de mes étudiants.

Qui d'autre savait vraiment ce qui se trouvait dans les thèses de Ben Wittner, Janet Head, Yuval Fisher, Ben Bielefeld, Larry Ma, Darroch Faught et Jiaqi Luo ?

Pendant cette période, il y avait une ombre au tableau. Tan Lei s'est mariée en 1986 (à la grande surprise d'Adrien et de moi-même). Ce mariage a été un désastre ; il a duré (comme vie de mariés) tout juste quelques mois, et a fini en divorce en 1988. On peut croire que c'est une histoire banale, mais pas pour elle : elle a ressenti ce mariage comme un échec personnel. Dans la communauté chinoise (de l'époque toujours) une femme divorcée n'était plus candidate au mariage. Tan Lei pensait donc que son rêve de se marier, et surtout d'avoir un jour des enfants, était impossible. À Bonn, elle venait souvent jouer avec mes enfants ; son désir d'en avoir elle aussi était évident. Elle était stoïque (un trait très chinois aussi), mais bien déprimée.

J'ai un peu perdu Tan Lei de vue dans les années qui ont suivi ; elle a été à l'Éns Lyon, puis à Warwick, et je l'ai peu côtoyée. Mais quel plaisir de la voir revenir d'Angleterre heureuse, et mariée à Hans-Henrik Rugh, avec qui elle a eu par la suite deux enfants, Charlotte et Paul. Un miracle !

Je laisse la période de Cergy, puis d'Angers, à ses collègues de cette époque, ainsi que sa collaboration avec Peng Wenjuan et Cui Guizhen. Mais un aspect que ses collègues ne connaissent peut-être pas est sa relation avec Bill Thurston. J'ai mentionné plus haut que sa thèse était une application d'un théorème de Thurston, et beaucoup de ses travaux ultérieurs ont tourné autour de ce résultat. Selon Hans-Henrik, Tan Lei a rencontré Thurston en 1986, mais ils n'ont appris à se connaître qu'en 2010, à la conférence à l'IHP sur la solution de la conjecture de Poincaré organisée par la fondation Clay. Elle a eu par la suite de nombreux contacts avec Thurston, par courrier électronique et en personne ; elle a fait plusieurs voyages à Cornell. Et quand il a été atteint de son horrible cancer, elle a été parmi ses amis les plus dévoués ; elle est venue à Cornell, elle l'a soigné, elle l'a entraîné dans des conversations mathématiques qui l'ont distrait de sa maladie.

Puis elle a été atteinte de son cancer. Quelle horreur, ce cancer du pancréas. Comme beaucoup d'autres, je regrette intensément son absence. Pour Hans-Henrik, pour Charlotte, pour Paul, pour tous ses collègues d'Angers, pour toute la communauté qui l'a connue et aimée, je ne peux qu'exprimer ma plus grande sympathie.

Michel Zinsmeister

Tan Lei était avant tout pour moi une amie : nos intérêts mathématiques s'intersectaient en théorie des systèmes dynamiques, dont Tan Lei était une experte reconnue. Comme ce n'est pas mon cas, je préfère parler d'un autre aspect de la carrière de Tan Lei, à savoir son implication dans la coopération scientifique avec la Chine. C'était pour elle une préoccupation constante et ses efforts dans ce sens ont été extrêmement fructueux. Sa collaboration avec Cui Guizhen s'est élargie en une coopération active avec l'académie des Sciences à Pékin qui s'est concrétisée par de nombreux échanges de doctorants et de post-doctorants. Elle a également organisé de nombreux colloques en liaison avec les dynamiciens de Shangaï, Nanjing et Hangzhou, qui ont aussi débouché sur des co-tutelles.

Le meilleur hommage que l'on puisse rendre à Tan Lei concernant son implication avec la Chine est de prendre le relais : la Chine a maintenant une politique très ambitieuse en matière de recherche scientifique, à nous d'en profiter pour perpétuer l'œuvre pionnière de Tan Lei.

Ricardo Pérez Marco

La première fois que j'ai rencontré Tan Lei c'était dans le séminaire de Dynamique Holomorphe à Orsay en 1989 où j'étais nouveau venu. Avec son sourire énigmatique de Joconde asiatique elle nous a expliqué pourquoi à certains endroits l'ensemble de Mandelbrot ressemblait à des ensembles de Julia. La dernière fois que je l'ai rencontrée c'était chez elle. Elle se préparait au traitement qui l'attendait, sereinement, avec son beau sourire, un grand courage, et une grande humilité. Elle regrettait de devoir laisser de côté pour un temps ses responsabilités académiques. Elle était très consciencieuse et exigeante avec elle-même à cause de l'éducation qu'elle avait reçue. Elle s'effaçait volontairement et ne se valorisait pas. Nous qui avons eu la chance de la connaître, sommes conscients de ses grandes qualités humaines et mathématiques qui resteront pour toujours dans notre mémoire.

Mohammed El Amrani, Michel Granger, Jean-Jacques Loeb

Tan Lei à Angers

Nous avons eu le plaisir d'accueillir Tan Lei comme professeur à Angers en septembre 2009. Son passage parmi nous, hélas bien trop court, a profondément marqué ses collègues du LAREMA, en particulier, le petit groupe des Harmonistes comme elle aimait à nous appeler. Aussitôt arrivée, elle a mis en place le séminaire « Systèmes dynamiques et géométrie » dont elle fera rapidement un remarquable lieu d'échanges et de discussions et dont elle sera bien évidemment un élément moteur. Par son enthousiasme communicatif et son dynamisme elle a su y attirer des interlocuteurs d'horizons mathématiques les plus divers. Parallèlement, s'est installé un groupe de travail sur le thème des points critiques d'applications harmoniques. C'est dans ce cadre qu'elle engagera une collaboration avec un post-doc chinois, Fan Shilei, sur l'étude géométrique des polynômes cubiques harmoniques planaires. Sa curiosité intellectuelle, son enthousiasme communicatif et son insatiable envie d'apprendre et de partager ont été unanimement appréciés par nos collègues du LAREMA. Son intuition géométrique exceptionnelle n'a cessé de nous impressionner. Souvent, à l'aide d'un simple dessin, elle nous dévoilait la nature profonde d'un résultat qu'une approche algébrique ou calculatoire n'avait pas mise en évidence. La diversité de nos expériences mathématiques nous a réciproquement enrichis, provoquant quelquefois des échanges passionnés (et passionnants).

Nos discussions ne se limitaient pas aux mathématiques. Nous parlions souvent de tout ce qui touchait à la vie, sa vie ici ou en Chine, à notre propre expérience, au choc de cultures qui a accompagné sa venue en France. Elle cherchait toujours à comprendre ce qui n'était pas inné pour elle parce que différent de ce qui avait cours en Chine.

Tan Lei a grandement contribué au rayonnement de notre laboratoire en tissant de nombreux contacts aussi bien au niveau national qu'international. En tant que représentante auprès de la Fédération de Recherche Mathématique des Pays de la Loire, elle n'a eu de cesse d'encourager les jeunes collègues à mettre en place des projets de collaboration.

Tan Lei percevait l'enseignement comme un partage aussi bien avec ses collègues, qu'avec ses étudiants envers lesquels elle manifestait une indéfectible bienveillance. Un module d'algèbre linéaire en première année restera comme un de nos meilleurs souvenirs collaboratifs en enseignement. Elle n'hésitait pas à contribuer régulièrement et élégamment à la vulgarisation des mathématiques, notamment à travers la désormais traditionnelle « fête de la science ».

Tan Lei laisse, à 53 ans, une œuvre riche et variée. Mathématicienne respectée, elle aura conservé une activité scientifique intense jusqu'à ses derniers jours.

Son insatiable curiosité scientifique, sa générosité exceptionnelle et sa profonde modestie marqueront à tout jamais celles et ceux qui ont eu la chance et le bonheur de partager des moments privilégiés avec elle. Nous garderons de Tan Lei un souvenir lumineux.

Michèle Loday

J'ai fait la connaissance de Tan Lei à mon arrivée à Orsay fin 1987 alors que Tan Lei s'apprêtait à en partir. En 2009 Tan Lei est arrivée à Angers alors que j'en partais, de fait libérant le poste sur lequel elle a été nommée. On pourrait penser que le sort s'acharnait à nous séparer : il n'en est rien. J'ai eu de nombreuses occasions de rencontrer Tan Lei et de partager des moments précieux. Ce fut d'abord, jusqu'en 2006, à l'occasion de ses visites au groupe de dynamique holomorphe d'Orsay et en priorité à Adrien Douady. Tan Lei débordait toujours de questions, de la plus naïve (en apparence du moins) à la plus sophistiquée. Elle avait très souvent une vision géométrique globale des problèmes. Il sautait aux yeux qu'elle était passionnée par son sujet, toujours souriante et enthousiaste. Tan Lei était à la fois lumineuse et attentive aux autres. À partir de 2011 nous sommes devenues presque voisines en région parisienne où sa famille s'est installée. Malgré sa charge de travail, les déplacements, sa famille et surtout ses souffrances – car depuis quelques temps elle souffrait beaucoup – nous trouvions de-ci de-là quelques instants à partager. Tan Lei a aimé ses années au larema d'Angers grâce à l'ambiance qui y règne et aux collaborations qu'elle a pu y développer.

Puis est arrivé ce 24 décembre 2014 où elle est entrée à l'hôpital. Je l'ai rejointe dès que j'ai eu l'information au mépris des heures de visite autorisées, libérant du même coup Hans, son mari, pour qu'il puisse rejoindre leurs enfants. Tan Lei était triste mais pas désespérée comme je pensais la trouver. Nous avons longuement parlé de nos enfances respectives à sa demande, dans une conversation presque normale de salon. J'étais impressionnée par la maîtrise dont elle faisait preuve. Puis, peu à peu, l'évidence s'est imposée à elle dans tout ce qu'elle avait d'irrémédiable et elle a courageusement affronté tous les soins impuissants à la sauver.

Pendant toute cette période Tan Lei a gardé sa même énergie face à la vie et aux mathématiques. Elle a encore accordé du temps à ses élèves et post-docs mais elle souffrait de plus en plus. Elle s'inquiétait souvent de l'avenir de ses élèves, les plus jeunes en particulier. Je n'oublierai pas les nombreuses promenades que nous avons partagées au marché ou au Parc de Sceaux à cette époque-là. Tan Lei y parlait de tout, y compris de mathématiques ; nous y avons déchiffré une prépublication sur un sujet auquel elle avait réfléchi et alors que je l'encourageais à contacter l'auteur pour une publication commune, elle m'a dit qu'elle avait des projets plus vastes sur ce sujet ; elle pensait donc pouvoir encore terminer ce travail. Mais son état s'est rapidement dégradé.

En congé de maladie, Tan Lei s'est beaucoup concentrée sur sa vie de famille et je veux croire que les beaux souvenirs qu'elle y a construits permettront à Hans, son mari, à Charlotte et à Paul, ses enfants, d'affronter l'avenir avec énergie et sérénité. Je le leur souhaite.

Sébastien Godillon

Curieux des systèmes dynamiques mais étant né trop tard pour profiter du célèbre cours d'Adrien Douady, on m'a conseillé de suivre le dea de Cergy-Pontoise. C'est là que j'ai rencontré Tan Lei, en septembre 2004.

Elle y enseignait l'itération des fractions rationnelles. À l'époque je ne savais pas encore que derrière tous les auteurs qu'elle a toujours pris soin de citer précisément se cache une grande famille de mathématiciens dont elle était l'un des membres les plus éminents, ni qu'elle m'y introduirait pour mon plus grand honneur.

Je me rappelle avoir été déstabilisé dès ses premiers cours par les nombreux dessins qu'elle utilise pour illustrer ses propos et ses idées. J'ai cependant été très rapidement séduit par sa capacité à repérer précisément les points qui posent problème chez ses interlocuteurs puis à les clarifier par des petits schémas mûrement réfléchis et aussi rigoureux que l'exige le formalisme mathématique. Juste après qu'elle a accepté de m'encadrer pour une thèse, elle m'a envoyé à Rennes suivre un mini-cours sur les exemples de Lattès et ainsi rencontrer quelques membres de cette communauté de dynamiciens. À mon retour, j'avais l'impression de n'avoir pas compris ni retenu grand chose et j'étais un peu désespéré. Mais lorsque j'en ai parlé avec Tan Lei, elle a réussi à lever toutes mes incompréhensions en dessinant un oreiller, le déchirant sur une longueur, le retournant comme une chaussette, le recollant, le découpant à nouveau, l'assemblant avec un autre oreiller, un disque, un anneau, un pantalon, etc. Lorsque je relis aujourd'hui les notes de toutes nos conversations, je réalise à quel point ses petits dessins ont contribué à me faire progresser.

Tan Lei m'a appris à faire des maths vivantes, à exposer mes idées, à échanger, à confronter, à m'imprégner de points de vue différents, puis à rédiger très précisément ce que je comprends, non pas pour moi mais avant tout pour les autres. Aujourd'hui encore, lorsque je prépare mes enseignements, je m'efforce de soigner autant la forme que le fond.

Elle considérait cette générosité mathématique comme un héritage transmis par Adrien Douady. Son admiration pour lui, puis pour William Thurston, m'a toujours impressionné. J'ai pourtant pu observer ses qualités personnelles de stimulatrice et de meneuse, sans oublier son énorme capacité de travail. Malgré ça, Tan Lei est toujours restée humble.

Je me rappellerai à jamais les sourires que nous avons partagés, en particulier son sourire surpris lorsque je lui ai demandé de m'encadrer pour une thèse, son sourire ravi à la fin de mon premier exposé en séminaire, son sourire amusé par ma naïveté lors de mon premier trajet en avion, son sourire heureux à la fin de la conférence qu'elle a organisée pour les 70 ans d'Adrien, son sourire fier lors du pot de ma soutenance de thèse, et surtout son sourire radieux lorsque nous nous sommes baladés dans les rues de Pise oubliant notre relation de professeur à étudiant et profitant seulement du moment présent.

Arnaud Chéritat

C'est dans un des textes fondateurs du renouveau de la dynamique holomorphe que je découvris le nom de Tan Lei pour la première fois. Dans le domaine, tout le monde les surnomme « les notes d'Orsay ». Elle y a écrit plusieurs chapitres, dont un sur la ressemblance entre l'ensemble de Mandelbrot et les ensembles de Julia, un résultat frappant.

En tant qu'étudiant qui suivait le cours de Douady en 1998, je me figurai un Panthéon du domaine, dont les divinités comprenaient Douady, Hubbard, Milnor, Shishikura, Tan Lei, Thurston, etc. Quand je rencontrai Tan Lei en cours d'année, je vis une personne encore jeune et d'une grande modestie : je lui fis part de mon admiration pour son résultat de similarité et elle tenta aussitôt de minimiser la chose. De douze ans mon aînée, elle me traitait rapidement en égal. Ce serait bientôt ma sœur de thèse : Douady fut notre directeur à tous les deux.

Quel contraste entre le caractère discret d'un Milnor ou d'une Tan Lei et celui d'un Douady ou d'un Hubbard ! Je me demande si sa modestie ne lui a pas joué des tours quand il s'est agit de présenter sa candidature à des postes. Peut-être a-t-elle aussi rencontré un plafond de verre. J'imagine que son éducation en Chine lui avait appris à ne pas se mettre en avant – mais qu'est-ce que j'en sais en réalité ? Elle concentrait ses exposés sur ses collaborateurs et sur les aspects techniques, plutôt que de faire son auto-promotion. Chinoise elle était... Jusqu'à la fin, puisque la France lui a refusé plusieurs fois la nationalité au point de la décourager. Elle savait être exigeante. Je me souviens avoir plusieurs fois reçu des suggestions d'améliorations là où j'attendais un compliment.

Après ma thèse, je suis parti en poste à Toulouse, fin 2002. Je la revoyais dans la plupart des conférences où j'allais. Quand elle a déménagé pour Antony, elle et sa famille ont plusieurs fois invité la mienne dans son agréable maison, où nous pouvions discuter longuement et goûter à sa cuisine au wok ou à la française. Peu à peu elle est devenue une grande amie. Vers la fin j'ai pris prétexte de me faire héberger chez eux lors de mes déplacements sur Paris pendant que s'écoulaient les derniers grains du sablier.

En recherche, les travaux de Tan Lei et de ses étudiants touchent à de nombreux aspects de la dynamique holomorphe. La place manque dans ces colonnes pour en faire la liste. Je cite donc une sélection parmi ceux que j'ai rencontrés de près. L'article *A family of cubic rational maps and matings of cubic polynomials* de Shishikura et Tan Lei contient des exemples de cas où la procédure d'accouplement des polynômes ne se passe pas bien pour une raison subtile. J'ai fait des films illustrant un de leurs exemples. L'implosion parabolique est une technique essentielle pour mon travail et il n'est pas étonnant que son article avec Xavier Buff, *Dynamical convergence and polynomial vector fields*, m'ait été utile. Il y a aussi *A tableaux approach to the κss nest*, qu'elle a écrit avec son ex-étudiante de thèse Pascale Roesch et des collègues chinois : Peng W., Qui W. et Yin Y. J'aurais aimé réussir à comprendre cet outil fantastique, malheureusement je ne suis pas doué pour la combinatoire.

Je me souviens d'un exposé qu'elle donnait sur ce dernier thème. Elle m'avait demandé de passer pour elle les pages vidéo-projetées depuis son ordinateur pendant qu'elle expliquait. La complexité du sujet m'a perdu, je me suis endormi, réveillé par un soudain silence, réalisant qu'elle et le public attendaient que je passe la diapo suivante...

Personnellement, elle m'a appris à écouter les mathématiques des autres. C'est un exercice très difficile car on n'y comprend rien au début et on peut se décourager très vite, immédiatement dans mon cas. Elle commençait par me raconter les questions qui l'occupaient et je ne m'y intéressais pas. Mais elle savait insister et je finissais par en voir l'intérêt, ce qui me donnait une leçon a posteriori.

Autre leçon, son stoïcisme et sa sobriété face à une maladie incurable. Elle avait supprimé le sucre de son alimentation pour ralentir le processus. Elle nous interdisait de la serrer dans nos bras, elle disait que son traitement diminuait son système immunitaire. Elle a continué de réfléchir aux mathématiques, à soutenir ses étudiants, à partager ses idées et à nous accueillir chez elle, jusqu'à la fin.

Pascale Roesch

J'ai connu Tan Lei alors que j'étais élève à l'Éns de Lyon. Elle m'enseignait l'analyse complexe et plus tard la dynamique holomorphe. J'ai toujours été frappée par la clarté et la simplicité de ses arguments. Elle s'intéressait à tout ce qui se faisait en mathématiques. Ainsi, par son enthousiasme permanent, elle m'a attirée – sans le vouloir peut être –

dans le monde de la dynamique complexe. Lorsqu'elle a accepté de diriger ma thèse, elle était très jeune et n'avait pas passé son habilitation. Mais, je crois qu'elle aimait les défis et elle a obtenu son diplôme d'HDR avant que je ne soutienne.

Elle voyageait beaucoup et j'ai pris plaisir à la suivre pendant ma thèse au MSRI à Berkeley où elle était partie pour un semestre, puis à Warwick où elle a obtenu un poste avec son mari Hans Henrik Rugh. Elle était une mathématicienne d'une grande richesse et très appréciée de ses collègues. Elle a toujours su développer de nouvelles idées, mettre à profit les nouvelles techniques et y entraîner ses collègues partout où elle est allée.

Par la suite, elle m'a appris énormément de choses, en particulier le courage. Tan Lei n'a jamais cessé de se battre, discrètement, avec persévérance, pour ce qui lui tenait à cœur et contre tout ce qui entravait à sa liberté.

Un de ses grands traits que je retiendrai particulièrement, c'est sa vigilance. Elle ne voulait laisser passer aucune erreur. Peut-être parce que son directeur de thèse, Adrien Douady, était un grand spécialiste des contre-exemples. Elle vérifiait tous les articles et toutes les thèses.

Et puis, à l'image d'Adrien, elle aimait accueillir chez elle. On y parlait de mathématiques en faisant la cuisine. On y côtoyait des collègues ou des amis, sa façon de mettre de la vie dans notre petit monde. Jusqu'au bout.

C'est ainsi qu'avec beaucoup de talent, elle a fait avancer la dynamique complexe. Charismatique elle le restera, avec cette bonté débordante et lucide, en mathématiques et dans la vie de tous les jours. Elle aimait faire connaître à tous les dernières avancées du domaine, elle nous laisse de nombreux projets qu'elle a patiemment défrichés. Attentive à chacun, elle consacrait aux autres beaucoup de son temps tout particulièrement aux jeunes.

Elle m'a toujours soutenue et aidée, comme elle a soutenu de nombreux élèves et postdoctorants. Sa maladie m'a profondément touchée. Son sourire ne me quittera jamais.

Carsten Lunde Petersen

With the decease of Tan Lei, my danish colleagues, my family and I have lost a compassionate friend and colleague. I first met her in 1989 in Adrien and Regine Douady's apartment. I was just about to start my Ph.D studies in holomorphic dynamics and Tan Lei, though a few years younger, was a post doc in Bremen and already a bright star in our field. Through Tan Lei I have learned not only a lot of mathematics, but also a lot about life in communist China, the Cultural revolution and Chinese culture in general. As the first thing I learned: the full Moon means thinking of and missing the family far away.

I have had the privilege to collaborate with Tan Lei through a long period of time. I would come to Cergy-Pontoise in May and she and her family would come to Copenhagen in July–August. I remember especially meandering through the streets of Copenhagen from café to café, discussing mathematics and life, both present and past. Mathematically we were amongst other things working on how to understand the cubic connectedness locus and the limits of quasi-conformal deformations, both as a tool and concretely.

I also remember sitting outside on mild summer evenings, dining with both our families as well as with Bodil Branner and her husband and with Dan Sørensen and Pia Willumsen and their family. The last time we met was last year in August on such a danish summer evening. Though clearly physically marked by her illness, she was still full of life and perhaps even theorems.

We all miss you.

Photographie : François Tisseyre.

Jacques Neveu
1932-2016

Jacques Neveu, figure historique des probabilités en France, pédagogue renommé, ancien président de la SMF, est décédé en mai 2016.

Francis Comets

De nationalité belge, Jacques Neveu vient à Paris pour ses études et soutient sa thèse de doctorat sous la direction de Robert Fortet sur les semi-groupes de Markov en 1955.

Dès le début de sa carrière son impact sur la communauté mathématique et l'école de probabilités française est évident et marquant, à une époque où les mathématiques appliquées et les probabilités en particulier sont encore en train d'acquérir droit de cité. Les premiers séminaires qu'il dirige à Paris ont dynamisé toute une génération de jeunes probabilistes, en tandem implicite avec Paul-André Meyer et l'École de Strasbourg. Tout au long par la suite, il jouera un rôle central dans le développement des probabilités, notamment par les groupes de travail qu'il animait.

Ses travaux de recherche figurent parmi les plus belles pages de probabilités : chaînes et processus de Markov, processus gaussiens, théorie ergodique, théorie du potentiel, martingales, mesures ponctuelles, arbres aléatoires et processus de branchement.

Au delà des aspects fondamentaux, il a également contribué au développement des applications. Dans le domaine des réseaux stochastiques, ses travaux fondateurs ainsi que le groupe de lecture qu'il animait sur ce sujet à la fin des années 70, ont structuré la communauté française. Par la suite, il a contribué aux liens avec l'informatique fondamentale, la combinatoire et la physique statistique. Il a aussi fondé le groupe « Modélisation Aléatoire et Statistique » de la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI).

Enseignant à la Faculté des Sciences de Paris, à l'université Paris VI et à l'École polytechnique, il prenait beaucoup de plaisir et grand soin à son enseignement, et il a communiqué sa passion à plusieurs générations de probabilistes, de scientifiques et d'ingénieurs aux vocations variées. Ses cours étaient toujours d'une clarté lumineuse, merveilleusement compacts, et empreints de cette élégance qui font de ses livres autant de références aujourd'hui.

Son action au sein du laboratoire de probabilités à Jussieu puis du Centre de Mathématiques Appliquées de l'École polytechnique reste un exemple de clairvoyance, de générosité et de discernement. Sympathique et prévenant, d'une grande culture et d'une grande sensibilité, sa compagnie était recherchée. Comme beaucoup d'entre nous, je garde un souvenir très vif de l'intelligence rapide de Jacques Neveu, de son goût inexhaustible pour la rigueur, de l'élégance de sa pensée.

Michel Zisman

Jacques Neveu jardinier

J'ai fait la connaissance de Jacques Neveu en un moment très particulier de l'histoire des universités parisiennes, 1969-71, où l'unique Université de Paris avec son siège à la Sorbonne allait donner naissance aux treize universités que nous connaissons aujourd'hui. Jacques – mais je ne l'ai appelé ainsi que bien plus tard – n'avait pas encore acquis la nationalité française mais dans son désir de se sentir déjà Français à part entière il suivait de près les soubresauts douloureux et complexes qui accompagnaient la naissance des deux universités Paris 6 et Paris 7, issues, en ce qui concernait les mathématiques, du vieil IHP, l'Institut Henri Poincaré. Souvent nous discutions au pied des tours de Jussieu de l'avenir qui s'offrait à nous, de notre capacité d'agir, de contribuer à l'orienter selon notre idéal. À l'époque le département de mathématiques de Paris avait une direction bicéphale, chacune des deux têtes représentant l'une des deux universités en gestation, et j'étais, sur l'initiative de François Bruhat, l'une de ces deux têtes, celle de la future Paris 7. Mes discussions avec Jacques tournaient donc le plus souvent autour de ce qu'il adviendrait à cette université encore en projet et à laquelle Bruhat consacrerait dix années de sa vie. En principe les enseignants étaient libres de choisir leur université, mais dans la pratique le choix du patron de laboratoire déterminait celui de ses collaborateurs, et c'est ainsi que Jacques, à la suite de R. Fortet, se retrouva à Paris 6, où, m'a-t-il dit, il ne se plaisait pas ; aussi, dès qu'il le put, il partit à l'École polytechnique. Nous ne nous voyions donc plus ; cela aurait dû entraîner la fin de notre amitié : le hasard en décida autrement.

Ma femme possède une petite maison familiale à La Ripe, un hameau d'une dizaine d'habitants au dessus de l'Yonne, où nous passions toutes nos vacances. Nous faisions nos courses à Mailly-le-Château, de l'autre côté de l'Yonne. Un jour nous rencontrons Jacques et sa femme, Monique, chez le boulanger ! Les Neveu avaient acheté une belle propriété dans ce village bourguignon, à trois kilomètres de chez nous. Une belle maison bourgeoise, un très beau jardin fleuri en terrasse sur l'arrière donnant sur la rivière et, de l'autre côté de la rue, un jardin potager. Dans le salon, Jacques avait installé une magnifique cheminée construite sur ses plans, dans laquelle il aimait brûler des troncs d'arbre de belle taille, pour la grande joie de ses invités lorsque le temps fraîchissait. C'est dans ce cadre que Jacques découvrit une nouvelle passion. Il aimait depuis toujours cuisiner, et il cuisinait fort bien ; il cuisina désormais les légumes et les fruits de son propre jardin. Selon les saisons, retournant la terre, taillant les arbres ou les rosiers, préparant des semis, récoltant les fraises ou les poireaux, il était toujours à l'ouvrage ! Difficile de quitter cette accueillante maison sans emporter un pot de confiture de mirabelle ou de gelée de coing.

D'autres universitaires, des scientifiques, quelques archéologues de renom, des physiciens, des conservateurs du musée du Louvre, ont choisi d'acheter une résidence secondaire à Mailly-le-Château et se sont retrouvés autour des Neveu. Ce paisible village à deux heures de Paris qui pendant des décennies évoquait la pêche à la ligne dans l'Yonne ou l'escalade sur les falaises du Saussois haut lieu de la grimpe connues du monde entier devint sans le savoir le siège d'un curieux cénacle où la qualité de la cuisine de Jacques et Monique le disputait à la richesse de la conversation !

Ces jours heureux appartiennent aujourd'hui au passé. L'âge venant et la fatigue s'accumulant, Jacques dut faire appel à un professionnel pour exécuter le gros œuvre dans ses jardins. Leur belle maison de Mailly-le-Château resta close toute l'année 2015. Monique mourut d'un cancer et Jacques la suivit peu après. Quelques jours avant sa mort, il m'appela pour me dire qu'il était à l'hôpital...

Jean-Pierre Conze

La preuve du théorème de Chacon-Ornstein donnée par Jacques Neveu

Des semi-groupes et processus de Markov (note aux CRAS en 1955) jusqu'à l'article sur le modèle de Sherrington-Kirkpatrick en mécanique statistique en collaboration avec F. Comets en 1995, les travaux de J. Neveu ont porté sur les principaux domaines des Probabilités et ses connexions avec la théorie ergodique : de la théorie du potentiel à la mécanique statistique, en passant par martingales, processus gaussiens, chaînes de Harris, théorie de la mesure, mouvement brownien, processus ponctuels, files d'attente, arbres et processus de branchement, processus de branchement et excursions browniennes...

Dans les lignes qui suivent, à travers un exemple, nous voudrions évoquer deux traits marquants des travaux et des ouvrages pédagogiques de J. Neveu, inséparables de sa personnalité : la profondeur de l'analyse et l'élégance des méthodes.

L'exemple de l'article sur le « schéma de remplissage » et son application en théorie ergodique en est une bonne illustration. Le « filling scheme » est un procédé utilisé par Chacon et Ornstein dans la démonstration de leur célèbre théorème ergodique quotient ([1], voir aussi [3]). Rappelons l'énoncé du théorème de Chacon-Ornstein.

Théorème 1. *Soient $(E, \mathcal{F}, m)$ un espace mesuré σ-fini et T un opérateur linéaire positif sur $L^1(m)$ (i.e., il envoie l'espace L^1_+ des fonctions intégrables positives dans lui-même) tel que $\|Tf\|_1 \leqslant \|f\|_1$ pour toute fonction $f \in L^1$. Alors, pour $f \in L^1$ et $g \in L^1_+$, la limite de la suite des quotients $Q_n(f,g) = \sum_{k<n} T^k f / \sum_{k<n} T^k g$ existe et est finie presque partout sur $\bigcup_{n \geqslant 1} \{T^n g > 0\}$.*

Ce théorème généralise le résultat classique de Birkhoff (convergence des moyennes ergodiques $S_n f = \frac{1}{n}(f + Tf + ... + T^{n-1} f)$ quand T est la composition par une transformation mesurable préservant une mesure de probabilité, qui lui-même étend la loi forte des grands nombres correspondant au cas où $f, Tf, \cdots$ sont indépendants) et son extension par Hopf à la convergence de $S_n f / S_n g$ quand T préserve une mesure de masse infinie.

Dans [4], J. Neveu propose une preuve très courte du théorème de Chacon-Ornstein reposant sur un emploi efficace de la technique du schéma de remplissage. Nous décrirons sa preuve lorsque T est l'opérateur de composition par une transformation mesurable et préservant la mesure de E dans E, conservative et ergodique (i.e., si $f \in L^1_+$ n'est pas nulle presque partout, alors $\sum_{n\geqslant 1} T^n f = \infty$ presque partout). Nous reproduisons sa preuve du théorème de Chacon-Ornstein, dont l'énoncé est dans ce cas :

$$\forall f, g \in L^1_+,\ \lim_{n\uparrow\infty} Q_n(f,g) = \frac{\int f}{\int g} \text{ p.p. si } \int g > 0. \tag{1}$$

Le schéma de remplissage

Le schéma de remplissage (voir une analyse détaillée par Y. Derriennic [2]) associe à une fonction $h \in L^1$, la suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ dans L^1 définie par les formules de récurrence

$$h_0 = h,\ h_{n+1} = Th_n^+ - h_n^-,\ n \geqslant 1, \tag{2}$$

où h^+ et h^- sont les parties positives et négatives de h. Intuitivement, partant d'une partie positive h^+ et d'une partie négative h^-, on transfère la masse positive disponible par la transformation T, puis on en simplifie autant que possible avec la masse négative h^- (qu'on n'a pas déplacée), et on recommence ce processus.

Il est immédiat que, pour tout n,

$$h_{n+1}^- \leqslant h_n^-,\ \ h_{n+1}^+ \leqslant Th_n^+,\ \int h_{n+1} = \int h_n. \tag{3}$$

De plus $\int h_n^- \downarrow \int H^-$, où $H^- := \lim_n \downarrow h_n^-$, ce qui implique $\int h = \lim_n \int h_n = \lim_n \int h_n^+ - \int H^- \geqslant -\int H^-$.

Étant données $f, g \in L^1_+$, le schéma de remplissage $(h_n)_{n\geqslant 1}$ associé à $h = f - g$ par (2) est intimement lié à la suite des sommes partielles de $T^k f$ et $T^k g$. En effet, définissons par récurrence la suite (u_n) par

$$u_0 = 0,\ u_{n+1} = g - h_n^- + Tu_n.$$

Nous avons alors $u_n \in L^1_+$, car $g \geqslant h^- \geqslant h_n^-$. Par ailleurs, à partir de $\sum_{k=0}^{n-1} h_k^+ - T\sum_{k=0}^{n-1} h_k^+ = h - h_n$, $n \geqslant 1$, les relations suivantes se vérifient par récurrence :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} T^k f &= \sum_{k=0}^{n-1} h_k^+ + u_n,\\ \sum_{k=0}^{n-1} T^k g &= \sum_{k=0}^{n-1} T^{n-1-k} h_k^- + u_n.\end{aligned} \tag{4}$$

Notons I_B l'opérateur de multiplication par 1_B pour un ensemble B et T^* l'opérateur dual de T. Si B est non négligeable, alors « comme tous les probabilistes et la plupart des ergodiciens le savent » (dans les mots même de J. Neveu), $\sum_p (I_{B^c} T^*)^p 1_B = 1$, car T est conservative et ergodique. Pour les lecteurs ne faisant pas partie des catégories sus-citées, ce fait est expliqué dans la remarque 1.

L'observation clef est le lemme suivant :

Lemme 1. *Si $h \in L^1$ est telle que $H^- = \lim_n \downarrow h_n^- \not\equiv 0$, nous avons*

$$\lim_n \downarrow \int h_n^+ = 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} h_n^+ < \infty \text{ presque partout.}$$

Preuve. Soient $A := \{H^- > 0\}$ et $v_p := (I_{A^c} T^*)^p 1_A$, pour $p \geqslant 0$. Par hypothèse A est non négligeable et donc $\sum_p (I_{A^c} T^*)^p 1_A = 1$. Par ailleurs, l'inégalité $h_{n+1}^+ \leqslant Th_n^+$ peut s'écrire $h_{n+1}^+ \leqslant (TI_{A^c})h_n^+$ puisque $h_n^+ = 0$ sur A, car $h_n^- \geqslant H^- > 0$ sur A. Donc $h_n^+ \leqslant (TI_{A^c})^n h^+, \forall n \geqslant 1$. De cette inégalité et de la définition des v_p, il résulte

$$\begin{aligned}\int h_n^+ \cdot v_p &\leqslant \int (TI_{A^c})^n h^+ \cdot v_p\\ &= \int h^+ \cdot (I_{A^c} T^*)^n v_p = \int h^+ \cdot v_{p+n}.\end{aligned}$$

En sommant cette équation en p puis en n, on obtient par le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned}&\int h_n^+ = \int h_n^+ \cdot \sum_p v_p \leqslant \int h^+ \sum_p v_{p+n} \downarrow 0,\\ &\int \sum_n h_n^+ \cdot v_p \leqslant \int h^+ \sum_n v_{p+n} \leqslant \int h^+ < \infty.\end{aligned}$$

La série $\sum_n h_n^+$ est donc finie sur l'ensemble $\{v_p > 0\}$, donc presque partout puisque $\sum_p v_p = 1$. □

Une preuve simple du théorème de Chacon-Ornstein

Soit $f, g \in L^1_+$. Pour montrer (1), il suffit de considérer le cas où $\int f < \int g$. La fonction H^- associée à $h = f - g$ n'est pas la fonction nulle, car

$0 > \int h \geqslant -\int H^-$. Donc par le lemme la série $\sum_n h_n^+$ est finie presque partout.

On a $\sum_{k=0}^{\infty} T^k g = \infty$ presque partout par conservativité, et $u_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} T^k g$. D'après (4) les quotients $Q_n(f,g)$ vérifient donc

$$\limsup_n Q_n(f,g) \leqslant \limsup_n \Big(\sum_{k<n} h_k^+ / \sum_{k<n} T^k g\Big) + \limsup_n \Big(u_n / \sum_{k<n} T^k g\Big) \leqslant 0 + 1 = 1.$$

En appliquant cette inégalité à (af,g) pour tout $a > 0$ tel que $a\int f < \int g$, on obtient $\limsup_n Q_n(f,g) \leqslant \int f / \int g$, puis, en échangeant f et g, $\limsup_n Q_n(f,g) \geqslant \int f / \int g$. Ceci conclut la preuve de (1). □

Remarque 1. La propriété $\sum_p (I_{B^c} T^*)^p 1_B = 1$, pour une transformation conservative ergodique inversible, peut s'interpréter ainsi. Pour tout B non négligeable, le premier temps de passage $t(x)$ de x dans B par l'itération de T^{-1} est fini pour m-presque tout x. La fonction $(I_{B^c} T^*)^p 1_B$ est la fonction indicatrice de $\{x : t(x) = p\}$ et les ensembles $\{x : t(x) = p\}$ pour $p \geqslant 0$ forment une partition de E.

Remarque 2. Les inégalités (3) restent vérifiées pour un opérateur positif tel que $\|Tf\|_1 \leqslant \|f\|_1$, sauf l'égalité des intégrales qui est à remplacer par $\int h_{n+1} \leqslant \int h_n$. La preuve précédente peut être adaptée au cas général, moyennant une extension du lemme.

Remarque 3. Le lemme maximal, un résultat crucial pour les théorèmes limites en théorie ergodique, est également obtenu de façon simple dans l'article de J. Neveu par la méthode du schéma de remplissage.

Références

[1] R. V. Chacon et D. S. Ornstein. « A general ergodic theorem ». *Illinois J. Math.* **4** (1960), p. 153–160. issn : 0019-2082.

[2] Y. Derriennic. « Ergodic theorem, reversibility and the filling scheme ». *Colloq. Math.* **118**, nº 2 (2010), p. 599–608. issn : 0010-1354. doi : `10.4064/cm118-2-16`. url : `http://dx.doi.org/10.4064/cm118-2-16`.

[3] J. Neveu. *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1964, p. xiii+203.

[4] J. Neveu. « The filling scheme and the Chacon-Ornstein theorem ». *Israel J. Math.* **33**, nº 3-4 (1979). A collection of invited papers on ergodic theory, 368–377 (1980). issn : 0021-2172. doi : `10.1007/BF02762170`. url : `http://dx.doi.org/10.1007/BF02762170`.

En cheminant avec Kakeya - Voyage au cœur des mathématiques
Vincent Borrelli et Jean-Luc Rullière
École normale supérieure, 2014. 158 p. isbn : 9782847884159

« Quelle est la plus petite surface à l'intérieur de laquelle il est possible de déplacer une aiguille de façon à la retourner complètement ? » Telle est la jolie question posée par le mathématicien japonais S. Kakeya au début du xx^{e} siècle, et qui sert ici de prétexte à une introduction au calcul différentiel et intégral, sous un format très original.
De fait, s'agissant d'un ouvrage échappant aux calibrages usuels, classes préparatoires, concours de l'agrégation ou autre annabac, il est difficile de dire avec certitude quel est son meilleur public. Je dirais cependant que le lecteur idéal est probablement un étudiant en début de cycle universitaire. Lorsqu'on a déjà été exposé aux notions de dérivée et d'intégrale, mais avec le risque de percevoir ces techniques comme des recettes de calculs avec peu de conscience de l'intuition géométrique sous-jacente, ni de l'origine historique des concepts, ce livre peut certainement faire œuvre de révélation. Cela a en tout cas été le cas pour ma fille qui s'est exclamée « mais pourquoi ne m'a-t'on pas expliqué les intégrales comme ça en Terminale ? »
La première partie du livre nous entraîne d'exemple en exemple, explorant les aires de différentes figures de plus en plus sophistiquées qui toutes permettent le retournement de l'aiguille de Kakeya, en introduisant au passage les outils mathématiques nécessaires. On établit ainsi une liste semblable à des records sportifs, en faisant monter le suspense quant à laquelle sera finalement la figure championne :

page	figure	aire
p. 13	Disque	0.78539...
p. 13	Triangle de Reuleaux	0.70477...
p. 15	Triangle équilatéral	0.57735...
p. 37	Hélice de Releaux	0.48649...
p. 37	Hélice du triangle équilatéral	0.42217...
p. 58	Triangle à paraboles	0.41296...
p. 77	Triangle à boucles	0.40475...
p. 88	Deltoïde	0.39269...
p. 97	Étoile à 11 branches	0.39140...

Le thriller se dénoue de façon surprenante dans les derniers chapitres, avec Besicovitch et ses figures en dentelle de triangles d'aire arbitrairement petite, et une plongée dans le monde des objets mathématiques d'aire nulle bien qu'ils conservent certaines propriétés des surfaces. Mais chut !, j'en ai sans doute déjà trop dit...
Pour donner une idée du style transversal du livre, voici une brève description du contenu du chapitre « Le calcul intégral », qui en une vingtaine de pages offre un feu d'artifices d'informations. On commence avec l'histoire des défis mathématiques tels qu'ils se pratiquaient aux alentours du xvii^{e} , avec en particulier la question proposée par Pascal de calculer l'aire sous une cycloïde. Puis on envisage une forme géométrique (triangle à paraboles) qui viendra améliorer le record du chapitre précédent concernant la question de Kakeya... Mais reste à déterminer l'aire de cette figure, et

voici le calcul intégral dûment motivé ! On est ensuite initié au partage d'Archimède, qui permet de découper un carré en trois parts d'aires égales à l'aide de morceaux de paraboles. C'est l'occasion d'introduire les fondamentaux du calcul intégral avec en particulier les sommes de Riemann, mais qui sont appelées ici les « petites et grandes palissades ». La notation $\int_a^b f$ est introduite, on notera l'absence du $f(x)dx$ qui perturberait inutilement le néophyte (il ne s'agit pas ici de proposer des exercices de changement de variables !), on apprend par contre au passage que la notation vient du S allongé tel qu'on l'écrivait avant la Révolution... On nous glisse aussi, à propos des limites lorsque la largeur des planches de nos palissades deviennent de plus en plus petites, qu'un même nombre peut admettre deux écritures décimales différentes : par exemple 0,49999... et 0,5. Après une application au problème de Kakeya, on se penche ensuite sur les intégrales généralisées, au travers de la question « peut-on peindre un mur infini avec un nombre fini de pots de peinture ? ». Et on finit avec une discussion de la somme $\sum \frac{1}{n^2}$, dont on nous dévoile qu'elle est égale à $\pi^2/6$, « mystérieuse coïncidence entre les carrés des nombres entiers et le fameux nombre π. »

Un autre aspect du livre est qu'il donne à voir ce que sont les mathématiques dans la pratique quotidienne des chercheurs. Se trouve ainsi explicité comment on peut être amené à formuler une conjecture, suite à l'étude de nombreux exemples et en regard d'évidences géométriques. Mais nous sommes aussi sensibilisés au fait qu'une conjecture, aussi raisonnablement fondée soit-elle, peut se révéler fausse ! On apprend par ailleurs qu'une question peut se révéler être mal posée : ici, Kakeya supposait implicitement l'existence d'une surface optimale, ce qui se révèle a posteriori trop optimiste. Enfin, une fois une question mathématique « résolue », on constate qu'elle engendre, par analogie ou généralisation , toute une ribambelle de nouvelles questions ouvertes : dimension fractales des exemples de mesures nulles, situation en dimension supérieure, ajout de contraintes géométriques - cas des domaines étoilés par exemple -... Ces nouvelles questions viennent de plus entrer en résonnance avec d'autres domaines des mathématiques, par exemple ici la théorie des nombres et les questions à propos de la répartition des nombres premiers, jusqu'à la fameuse hypothèse de Riemann !

En conclusion, ce livre est un petit bijou, expérience de transmission originale, qui parvient dans un format très court à jouer avec succès sur différents registres : pédagogique, historique, vulgarisation. Le grand soin apporté aux illustrations, les appartés historiques ou biographiques, les calculs menés dans des cadres à part pour ne pas couper le flux du texte, tout a été pensé et mûrement soupesé pour une grande accessibilité et un vrai plaisir de lecture. J'ai assisté à quelques-uns des innombrables déjeuners des deux auteurs au moment de la – longue ! – gestation de l'ouvrage, je vous livre mon verdict, ces deux-là sont des perfectionnistes maladifs ! Lisez donc leur livre (pour un aperçu, le fichier pdf est en libre accès sur le site de l'éditeur), faites-le acheter par vos bibliothèques, et conseillez sa lecture à vos proches, ainsi qu'à vos étudiants, juste pour le plaisir, ça ne compte pas pour l'examen final...

Stéphane Lamy
Université de Toulouse

Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (`http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/`).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (`gazette@dma.ens.fr`), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier TEX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe LATEX *gztarticle* fournie par les distributions TEX courantes (TEX Live et MacTEX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiKTEX), et sinon téléchargeable depuis la page `http://ctan.org/pkg/gzt`. Sa documentation détaillée se trouve à la page `http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf`. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution TEX à jour.

Classe LATEX : Denis Bitouzé (`denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr`)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (`n.lozanne@free.fr`)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.