AST

Introduction et Table des matières

Astérisque, tome 73 (1980), p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__73__1_0>

INTRODUCTION

Ce volume contient les rédactions détaillées et organisées d'un certain nombre d'exposés du séminaire sur les modèles de l'arithmétique de Péano, qui se tient à Paris VII depuis l'automne 1977. L'arithmétique de Péano est la théorie axiomatique dont le modèle "standard" est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers non-négatifs muni de sa structure d'ordre et des opérations d'addition et de multiplication. En plus d'un nombre fini d'axiomes pour la structure d'ordre et la définition par récurrence de l'addition et de la multiplication, cette théorie comprend une infinité d'axiomes qui expriment que tout ensemble non-vide défini au moyen d'une formule du premier ordre possède un élément minimum (schéma d'axiomes d'induction).

D'après les travaux de Skolem et de Gödel dans les années 1930, on sait que cette théorie possède des modèles qui ne sont pas isomorphes au modèle standard. Un tel modèle non-standard est composé des éléments non-négatifs d'un anneau ordonné et non-archimédien; cependant à cause des axiomes d'induction, les modèles non-standards sont munis d'une structure extrêmement riche et pratiquement inextricable. Or, en utilisant des codages classiques, on peut définir, par des formules ne portant que sur l'addition et la multiplication, les autres fonctions et relations arithmétiques telles que l'exponentiation, la mise en facteurs etc et en prouver les propriétés usuelles. Gödel a exploité ce pouvoir d'expression de la théorie dans la démonstration de son célèbre Théorème d'Incomplétude; ce théorème moyennant les travaux de J. Robinson et Y. Matijasevich, a pour conséquence qu'il existe un modèle M de l'arithmétique de Péano et une équation diophantienne qui possède des solutions dans M sans en avoir dans le modèle standard $\mathbb{N}$. Ce théorème établit donc la "faiblesse" de la théorie axiomatique, et, en même temps, "l'étendue" de la classe de ses modèles.

Depuis les découvertes de Skolem et de Gödel, l'étude des modèles de l'arithmétique se poursuit dans l'espoir que ce travail contribuera, à terme, à mieux comprendre la structure de $\mathbb{N}$, soit en servant à démontrer de nouveaux théorèmes d'arithmétique, soit en précisant des difficultés, tant techniques que conceptuelles, qu'on risque de rencontrer en théorie des nombres ou en combinatoire. Bien que cet espoir soit loin d'être pleinement réalisé, les développements récents ne l'ont pas trahi; bon nombre de résultats exposés dans ce volume mettent en évidence la richesse structurale des modèles étudiés, et certains mènent à de nouveaux théorèmes combinatoires d'énoncé simple, et qui, cependant, ne sont pas démontrables dans l'arithmétique de Péano; ce qui donne de nouveaux exemples, au niveau de l'arithmétique, du phénomène d'incomplétude.

Dans ce volume il y a six exposés .

Les deux premiers traitent de travaux de J.Paris, L.Kirby et L.Harrington. Pour analyser les sous-modèles d'un modèle non-standard, Kirby et Paris ont introduit un outil élégant et puissant, la méthode des indicatrices, et leurs travaux ont abouti à un nouveau théorème d'incomplètude; or Paris a trouvé des variantes du théorème de Ramsey qui sont indépendantes de l'arithmétique de Péano; une telle variante particulièrement limpide était trouvée ensuite par Harrington. Ces travaux sont relatés dans l'Exposé 1 (L. Kirby) et l'Exposé 2 (D. Lascar). Dans les Exposés 3 et 4 (K. Mc Aloon), on établit le rapport entre le "nouveau" théorème d'incomplètude et "l'ancien", et on étend les résultats de Paris-Harrington sur les théorèmes combinatoires à une progression transfinie de théories axiomatiques.

Dans l'Exposé 5 (M.A. Dickmann) et l'Exposé 6 (J.P. Ressayre) on change de point de vue et on étudie les extensions d'un modèle. Pour celà on fait une analyse des types à la façon de H. Gaifman. Un type au-dessus d'un modèle correspond à "un point à l'infini" et l'analyse des types permet d'étudier les extensions possibles du modèle. Dans ces deux exposés, on insiste sur le fait que l'existence de certains types et donc de certaines extensions de modèles, est liée de façon spécifique à certains théorèmes combinatoires de l'arithmétique de Péano. Enfin on applique la "machinerie" ainsi élaborée pour démontrer un beau résultat de F. Abramson et L. Harrington sur l'existence de modèles non-dénombrables n'admettant aucune suite d'éléments indiscernables de longueur supérieure à un nombre entier fixé à l'avance.

Ces textes ont été dactylographiés avec soin et persévérance par Mme Colette Pradier et Melle Bornia Chaouche; nous leur exprimons tous nos remerciements.

K. Mc Aloon.

TABLE DES MATIÈRES

L. A. S. KIRBY

La méthode des indicatrices et le théorème d'incomplètude

Astérisque, tome 73 (1980), p. 5-18
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__73__5_0>

EXPOSÉ 1

LA MÉTHODE DES INDICATRICES ET LE THÉORÈME d'INCOMPLÈTUDE

L.A.S. Kirby

I. PRÉLIMINAIRES

Le langage de l'arithmétique est celui du calcul des prédicats du premier ordre avec égalité ayant deux symboles de fonction binaire, $+$ et $.$, pour l'addition et la multiplication, un symbole de fonction unaire, S, pour le successeur et un symbole de constante 0, pour le zéro. Dans toute la suite sauf indication au contraire, "terme" ou "formule" voudront dire terme ou formule de ce langage; "théorie" signifiera une théorie non-contradictoire ou consistante de ce langage. Pour toute formule Φ on conviendra que l'écriture $\Phi(v_1,\ldots,v_k)$ signifie que les variables libres de Φ sont comprises parmi $v_1,\ldots,v_k$. Les axiomes de Péano du premier ordre sont composés des axiomes pour les fonctions primitives

$$\forall v(Sv \neq 0)$$
$$\forall u \quad \forall v(u \neq v \rightarrow Su \neq Sv)$$

$$\forall u(u+0 = u)$$
$$\forall u \quad \forall v(u+Sv) = S(u+v)$$

$$\forall u(u.0 = 0)$$
$$\forall u \quad \forall v(u.Sv = u.v+u)$$

et le schéma d'induction : pour toute formule $\Theta(x,v_1,\ldots,v_n)$

$$\forall v_1 \ldots \forall v_n [[\Theta(0,v_1,\ldots,v_n) \wedge \forall x [\Theta(x,v_1,\ldots,v_n) \rightarrow \Theta(Sx,v_1,\ldots,v_n)]] \rightarrow \forall x \quad \Theta(x,v_1,\ldots,v_n)]$$

Nous notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des conséquences de ces axiomes.

Par un modèle ou structure pour le langage de l'arithmétique nous comprenons la donnée d'un ensemble non-vide M, d'un élément distingué $0^M \in M$, de fonctions binaires $+^M$ et $.^M$ de M^2 dans M et une fonction unaire S^M de M dans M.

Pour alléger les notations nous confondrons systématiquement l'ensemble de base M avec le modèle dont il est le domaine et nous omettrons les indices M des fonctions et du zéro. Si M et M' sont deux modèles nous disons que M est un <u>sous-modèle</u> ou <u>sous-structure</u> de M' ou que M' est une <u>extension</u> de M si (i) $M \subset M'$ en tant qu'ensembles, (ii) les deux modèles ont le même élément zéro, et (iii) les fonctions du modèle M sont les restrictions de celles de M'. Quand M est un sous-modèle de M', nous écrirons $M \subset M'$. Si $\Phi(v_1,\ldots,v_n)$ est une formule et si M est un modèle, nous écrirons $M \models \Phi(a_1,\ldots,a_n)$ pour signifier que la suite $a_1,\ldots,a_n$ d'éléments de M satisfait la formule $\Phi(v_1,\ldots,v_n)$ dans M. Nous noterons souvent une suite finie $a_1,\ldots,a_n$ par $\bar{a}$ et une suite $v_1,\ldots,v_n$ de variables par $\bar{v}$; nous écrirons indifferemment $\Phi(a_1,\ldots,a_n)$ ou $\Phi(\bar{a})$ et $\Phi(v_1,\ldots,v_n)$ ou $\Phi(\bar{v})$; on écrira aussi à l'occasion $\bar{a} \in M$ au lieu de $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle \in M^n$.

Une partie $X \subseteq M^k$ est <u>définissable</u> (dans M) s'il existe une formule $\Phi(v_1,\ldots,v_k,u_1,\ldots,u_n)$ et des éléments $a_1,\ldots,a_n$ de M tels que, pour tous $b_1,\ldots,b_k \in M$, on a

$$\langle b_1,\ldots,b_k\rangle \in X \iff M \models \Phi(b_1,\ldots,b_k,a_1,\ldots,a_n) .$$

Si M est un modèle de $\mathcal{P}$ il y a un ordre linéaire canonique définissable sur M : on pose $a \leq b$ ssi $M \models \exists v(a+v = b)$. Le schéma d'induction entraine alors le <u>principe de l'élément minimum</u> : si $M \models \mathcal{P}$ et si $X \subseteq M$ est une partie définissable non-vide, alors X a un élément minimum pour l'ordre canonique sur M. Nous dirons qu'une fonction $F : M^k \to M$ est définissable si son graphe est une partie définissable de M^{k+1}. Notons que pour les modèles de $\mathcal{P}$, les fonctions définissables satisfont à "l'axiome de remplacement" : si $F : M \to M$ est définissable, alors pour tout $a \in M$, il existe $b \in M$ tel que $M \models \forall x(x < a \to F(x) < b)$, autrement dit, l'image par F d'un sous-ensemble borné de M est aussi bornée dans M.

Les entiers naturels $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ munis des opérations arthmétiques usuelles forment un modèle de $\mathcal{P}$ que nous appelons le modèle standard; tout modèle qui ne lui est pas isomorphe s'appelle non-standard. L'ensemble des formules closes satisfaites dans $\mathbb{N}$ est noté $\mathcal{T}$ et est appelé la théorie de $\mathbb{N}$ ou la vráie arithmétique. Une partie I d'un modèle M de $\mathcal{P}$ est un segment initial de M si pour tous $a,b \in M$,

$$b \in I \text{ et } a \leq b \Rightarrow a \in I.$$

Dans ce cas, nous disons que M est une extension finale de I et nous écrivons, si $I \neq M$, $I \subset_f M$ ou $I < M$. Si $a \in M-I$, on écrira parfois $I < a$. Clairement, tout modèle non-standard M de $\mathcal{P}$ possède un segment initial propre isomorphe à $\mathbb{N}$ que nous identifierons toujours avec $\mathbb{N}$. Donc $\mathbb{N} < M$ ou $\mathbb{N} \subset_f M$. Si $\mathbb{N} < M$ et si $\mathbb{N} < a \in M$, on dit que a est un entier infini ou non-standard de M.

Le principe de débordement se formule de la façon suivante : soit $M \models \mathcal{P}$ et soit $I < M$ sans élément maximum (c'est-à-dire, fermé pour l'opération de successeur); alors I n'est pas définissable dans M. Ce principe est une conséquence facile du principe de l'élément minimum appliqué à $M - I$. Plus généralement, on voit que toute partie de M sans élément maximum qui est bornée dans M ne peut être définissable.

Remarquons que, pour tout modèle non-standard dénombrable M de $\mathcal{P}$, le type d'ordre de la partie non-standard $M - \mathbb{N}$ est $(\omega^* + \omega)\eta$, où $\omega^* + \omega$ est le type d'ordre des entiers $\mathbb{Z}$ et η est celui des rationnels. En effet, pour $a,b \in M-\mathbb{N}$ posons

$$a \sim b \iff a = b \pm n \text{ pour un entier standard } n \in \mathbb{N}.$$

Alors chaque classe d'équivalence a le type d'ordre de $\mathbb{Z}$. Voyons qu'il y a une collection dense de ces classes d'équivalence : soit $a,b \in M-\mathbb{N}$ tel que $a < b$ et $b - a > \mathbb{N}$, c'est-à-dire, a et b sont inéquivalents; alors il existe un entier c de M tel que $a < c < b$ et $b - c$ et $c - a$ sont tous deux non standards - il suffit de choisir c tel que $M \models b + a = 2c \vee b + a = 2c + 1$.

Démontrons maintenant un résultat classique du sujet, le théorème de Mac Dowell-Specker, [M,S] qui sera souvent utile dans la suite.

Si M' est une extension élémentaire de M - $M \subset M'$ et $M \models \Phi(\bar{a}) \iff M' \models \Phi(\bar{a})$ pour tout $\bar{a} \in M$ et toute formule Φ - nous écrirons $M \prec M'$. Si $M \prec M'$ et $M \subset_f M'$, nous écrirons $M \prec_f M'$.

I.1. Théorème (Mac Dovell-Specker) Tout modèle dénombrable de $\mathcal{P}$ a une extension élémentaire finale propre.

Démonstration Soit M un modèle dénombrable de $\mathcal{P}$. Nous construisons un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur les ensembles définissables de M tel que

(i) $X \in \mathcal{U} \Rightarrow X$ est non-borné dans M

(ii) si $F : M \to M$ est une fonction définissable dans M qui a pour image une partie bornée de M, alors il existe $x \in M$ tel que $F^{-1}\{x\} \in \mathcal{U}$. Afin de construire $\mathcal{U}$, prenons une liste F_i, $i \in \mathbb{N}$, de toutes les fonctions ayant la propriété évoquée dans (ii). Définissons une suite X_i, $i \in \mathbb{N}$, de parties définissables et non-bornées de M ainsi : $X_o = M$, $X_{i+1} = X_i \cap F_i^{-1}\{x\}$ pour un x tel que $X_i \cap F_i^{-1}\{x\}$ est non-borné. Soit $\mathcal{U}$ le filtre engendré par les X_i. Il est alors clair que si X est une partie définissable de M, alors soit $X \in \mathcal{U}$ soit $M - X \in \mathcal{U}$ - la fonction caractéristique de X sera F_i pour un $i \in \mathbb{N}$ et donc la construction assurera que $X \supseteq X_{i+1}$ ou $M - X \supseteq X_{i+1}$. Soit M' l'ultrapuissance de M formée à partir de $\mathcal{U}$ en n'utilisant que les fonctions définissables de M dans M. Le principe de l'élément minimum permet de définir des fonctions de Skolem dans M; donc on vérifie comme pour les ultrapuissances ordinaires que $M \prec M'$. Pour vérifier que M' est une extension finale de M, supposons que $\bar{F} \in M'$ où F est la classe d'équivalence de la fonction définissable $F : M \to M$ et que $M' \models \bar{F} < a$ pour un certain $a \in M$. Nous avons donc

$$\{x \in M : M \models F(x) < a\} \in \mathcal{U}$$

Soit $G(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } F(x) < a \\ a & \text{sinon} \end{cases}$; alors G est définissable dans M et $M' \models \bar{F} = \bar{G}$. Mais, par (ii), il existe $b \in M$ tel que

$$\{y : G(y) = b\} \in \mathcal{U} \text{ ; c'est-à-dire, } M' \models \bar{G} = b.$$

Si b était égal à a on aurait

$$\{y \in M : M \models F(y) \geq a\} \in \mathcal{U},$$

ce qui est impossible puisque $\mathcal{U}$ est un filtre. Donc nous avons $b < a$ et $M' \models \bar{F} = b$, ce qui démontre que $M \subset_f M'$ C.Q.F.D.

II. LES CODAGES.

On écrit $\forall x < y\ \Phi$ pour abréger $\forall x(x < y \rightarrow \Phi)$ et $\exists x < y\ \Phi$ pour abréger $\exists x(x < y \wedge \Phi)$; les quantificateurs qui apparaissent dans ce contexte sont appellées des quantificateurs bornés. Une formule est dite Σ^o_o ou Π^o_o ou Δ^o_o ou à quantification bornée si elle contient que des quantificateurs bornés; en continuant par récurrence, on dit qu'une formule est Σ^o_{n+1} (resp. Π^o_{n+1}) si elle est de la forme $\exists x_1 \ldots \exists x_k\ \Psi$ (resp. $\forall x_1 \ldots \forall x_k\ \Psi$) où Ψ est Π^o_n (resp. Σ^o_n). Soit $\mathcal{A}$ une extension de $\mathcal{P}$, $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{P}$. Nous dirons qu'une formule $\Phi(v_1,\ldots,v_k)$ est Σ^o_n (resp. Π^o_n) dans $\mathcal{A}$ s'il existe une formule Σ^o_n (resp. Π^o_n) $\Psi(v_1,\ldots,v_k)$ telle que $\mathcal{A} \vdash \forall v_1,\ldots, \forall v_k(\ \Phi(v_1,\ldots,v_k) \longleftrightarrow \Psi(v_1,\ldots,v_k)$; nous dirons que $\Phi(v_1,\ldots,v_k)$ est Δ^o_n dans $\mathcal{A}$ si Φ est à la fois Σ^o_n et Π^o_n dans $\mathcal{A}$. Donc une formule $\Psi(v_1,\ldots,v_k)$ est Δ^o_1 dans $\mathcal{T}$ - la théorie du modèle standard N - si et seulement si Ψ définit dans $\mathbb{N}$ une relation récursive. Si $\Psi(v_1,\ldots,v_k)$ est Δ^o_1, dans $\mathcal{A}$, alors Ψ est absolue dans le sens suivant : soient $M \subset_f M'$ deux modèles de $\mathcal{A}$; alors pour $a_1,\ldots,a_k \in M$, $M \models \Psi(a_1,\ldots,a_k) \Leftrightarrow M' \models \Psi(a_1,\ldots,a_k)$. (La réciproque est aussi exacte : si $\Psi = \Psi(v_1,\ldots,v_k)$ est absolue pour $\mathcal{A}$, alors Ψ est Δ^o_1 dans $\mathcal{A}$. Pour une démonstration rapide de ce fait, on peut utiliser les résultats de Gaifman dans [G] : il y est démontré, comme conséquence des travaux de Robinson-Matijasevich, que si $M \subset M'$ sont des modèles de $\mathcal{P}$, alors on a $M \prec M'' \subset_f M'$ où $M'' = \{x \in M' :$ il existe $a \in M,\ x < a\}$; Donc quant aux modèles de $\mathcal{A}$ où $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{P}$, si une formule $\Phi(v_1,\ldots,v_k)$ est persistante par rapport aux extensions finales, Φ est persistante par rapport à toute extension et, par des résultats bien connus, une telle Φ doit donc être équivalente dans $\mathcal{A}$ à une formule existentielle, alors Σ^o_1.)

Soit $F(v_1,\ldots,v_k,x)$ une formule et soit $\mathcal{A}$ une extension de $\mathcal{P}$; on dira par abus de langage que F est une fonction dans $\mathcal{A}$ si l'on a

$\mathcal{A} \vdash \forall v_1,\ldots, \forall v_k\ \exists! u\ F(v_1,\ldots,v_k,u)$; dans ce cas, on parlera de la fonction $F(v_1,\ldots,v_k)$ et on écrira $F(v_1,\ldots,v_k) = u$ plutôt que $F(v_1,\ldots,v_k,u)$. Si $F(v_1,\ldots,v_k)$ est une fonction dans $\mathcal{A}$ et si $F(v_1,\ldots,v_k) = u$ est Σ^o_1 dans $\mathcal{A}$, alors il est aisé de voir que $F(v_1,\ldots,v_k) = u$ est en fait Δ^o_1 dans $\mathcal{A}$ et donc absolue. Les fonctions usuelles de l'arithmétique $x + y$, $x.y$, Sx, 2^x, $x^y,\ldots$ sont toutes Δ^o_1 dans $\mathcal{P}$.

Si $F(v_1,\ldots,v_k) = u$ est une fonction Δ^o_1 dans $\mathcal{A}$ où $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{P}$ et si $M \subset_f M'$ sont des modèles de $\mathcal{A}$, alors quels que soient $a_1,\ldots,a_k,b \in M$, $M \models F(a_1,\ldots,a_k) = b \Leftrightarrow M' \models F(a_1,\ldots,a_k) = b$. Dans ce contexte on peut donc parler sans ambiguité de la valeur $F(a_1,\ldots,a_k)$ pour $a_1,\ldots,a_k \in M$.

Soit $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ une fonction récursive; s'il existe une fonction Δ_1^0 dans $\mathcal{P}$, disons $F(x_1,\ldots,x_k) = y$, qui satisfait

$$\mathbb{N} \models F(n_1,\ldots,n_k) = m \Leftrightarrow f(n_1,\ldots,n_k) = m$$

alors on dit que f est une fonction récursive prouvable. Les fonctions récursives prouvables constituent une classe très riche qui contient les fonctions primitives récursives; cependant elle n'épuise pas la classe des fonctions récursives et dans le §2 de l'exposé suivant on donnera un exemple d'une fonction récursive définie par une propriété de type Ramsey qui "croît plus vite" que toutes les fonctions récursives prouvables.

D'après les travaux de Gödel on sait définir dans $\mathcal{P}$ de façon Δ_1^0 les fonctions primitives récursives et en particulier la fonction $i \to p_i$, le $i^{\text{ème}}$ nombre premier. On définit alors une "relation d'appartenance" :

$$E(m,n) \Longleftrightarrow p_m \text{ divise } n$$

et l'on a le schéma de compréhension suivant :

II.1. $\quad \mathcal{P} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_k \;\; \forall v \;\; \exists y \;\; \forall x(E(x,y) \leftrightarrow x \leq v \wedge \Phi\; x,x_1,\ldots,x_k)$

Quant aux modèles M de $\mathcal{P}$, si $X \subseteq M$ est une partie définissable de M et si $a \in M$, alors $\{x \in M : x \in X \wedge x \leq a\}$ est codé dans M en tant qu'ensemble fini au sens de M. Notons ici aussi le fait évident que tout sous-ensemble fini (dans le sens usuel) $X \subseteq M$ est définissable dans M et est codé dans M en tant qu'ensemble fini.

Au moyen des fonctions et des relations primitives récursives on peut formuler les diverses notions élémentaires de la Logique - formule, variable,.., de la théorie des ensembles (héréditairement) finis, de la combinatoire finie et de la théorie des jeux finis. A titre d'exemple, on peut formuler et démontrer dans $\mathcal{P}$ le théorème suivant :

II.2. THÉORÈME Soit J un jeu fini à information parfaite à deux joueurs sans partie nulle. Alors un des joueurs a une stratégie gagnante.

III. LES INDICATRICES

L'idée d'une indicatrice est due surtout à J.B. Paris et a été développée par celui-ci et l'auteur dans [K,P], [K] et [P]. Une anticipation certaine de cette technique se trouve chez H. Friedman dans [ ]. Si l'on se donne une classe de segments initiaux d'un modèle M non-standard de l'arithmétique, une "indicatrice" est une fonction qui, tout en étant définie dans M, nous donne de l'information sur la répartition dans M des segments initiaux de la classe. J. Paris a exploité cette méthode pour donner une nouvelle démonstration sans "autoréférence" du théorème d'Incomplétude de Gödel ce que nous verrons dans la suite.

III.1. DÉFINITION

Soit S une fonction qui associe à tout modèle M de $\mathcal{P}$ une classe S^M de segments initiaux de M, soit Y une fonction à deux arguments qui est Δ_1^0 dans $\mathcal{P}$. On dit que Y est une indicatrice pour S si, quel que soit le modèle dénombrable $M \models \mathcal{P}$, on a pour tous $a,b \in M$

$$Y(a,b) > \mathbb{N} \iff \text{il existe } I \in S^M \text{ tel que } a < I < b$$

Bien des classes naturelles de segments initiaux possèdent des indicatrices; par exemple, la fonction

$$Y(x,y) = \text{le plus petit } z \text{ tel que } y < (x+2)^z$$

est une indicatrice pour la classe des segments initiaux d'un modèle qui sont fermés par rapport à la multiplication.

Soit $\mathcal{A}$ une théorie, la classe des segments initiaux d'un modèle M qui sont (en tant que sous-structures de M) des modèles de $\mathcal{A}$, sera notée $S_{\mathcal{A}} = S_{\mathcal{A}}^M$ et elle jouera un rôle important dans la suite. Nous démontrerons qu'il existe pour toute théorie récursivement axiomatisable $\mathcal{A}$ une indicatrice $Y_{\mathcal{A}}$. Comme nous verrons dans les exposés 2, 3 et 4 certaines théories, notamment $\mathcal{P}$, possèdent des indicatrices "combinatoires" et celles-ci y seront étudiées en détail; pour les exposés suivants, donc, à l'exception du §III du troisième exposé, on n'aura pas besoin d'un théorème général pour l'existence des indicatrices $Y_{\mathcal{A}}$, ce théorème sera tout de même nécessaire pour établir le théorème d'incomplétude en toute généralité dans le paragraphe suivant.

III.2. THÉORÈME

Toute théorie récursivement axiomatisable possède une indicatrice.

DÉMONSTRATION

On fixe tout d'abord une énumération primitive récursive $< \theta_n >$ des formules du langage de l'arithmétique telle que la $n^{\text{ième}}$ formule a au plus n-variables libres et aussi une énumération primitive récursive $\langle A_n \rangle$ d'un système d'axiomes pour $\mathfrak{A}$; un tel système existe toujours par un résultat bien connu de Craig. Ces énumérations s'étendent donc canoniquement à la partie infinie de tout modèle non standard de $\mathcal{P}$. Plaçons nous maintenant à l'intérieur d'un modèle non-standard M de $\mathcal{P}$. Soient a,b,c des entiers, avec $a < b$. Définissons un jeu $J_c(a,b)$ à deux joueurs que l'on nomme 1 et 2. L'idée du jeu est la suivante : 2 prétend qu'il existe un segment initial $I \models \mathfrak{A}$ tel que $a < I < b$; 1 pose des questions à 2 en espérant l'amener à contredire son affirmation. Le jeu dure pendant c coups : au $n^{\text{ième}}$ coup 1 pose les questions « Est-ce que $\bar{e} \in I$ » où $\bar{e}$ est une suite de longueur au plus n d'éléments $\leq b$; si la réponse de 2 est «oui», 1 pose la question «Est-ce que $I \models \Theta(e)$» où $\Theta = \Theta(v_1,\dots,v_n)$ est une des n premières formules de l'énumération ; 2 doit répondre soit «$I \models \Theta(\bar{e})$» soit «$I \models \neg\Theta(e)$»; si la réponse de 2 est que «$I \models \Theta(\bar{e})$», alors si Θ est de la forme $\exists u\ \Theta'(u,v_1,\dots,v_n)$, 2 doit fournir un entier $d \leq b$ et la réponse «$\Theta(d,e)$» et si Θ est de la forme $\Theta' \vee \Theta''$ 2 doit affirmer soit «$I \models \Theta'$» soit «$I \models \Theta$». Après c coups le joueur 1 a gagné si, parmi la liste des réponses de 2 lors de ces c coups se trouve

soit (i) une réponse «$I \models \Theta$» où Θ est parmi les c-premiers axiomes $A_1,\dots,A_c$ de $\mathfrak{A}$.

soit (ii) des réponses qui contredisent l'affirmation de 2 que $a < I < b$ et que I est une sous-structure de M close pour les fonctions primitives; à savoir une combinaison de réponses d'un des types suivants

ou «$a \notin I$»
ou «$b \in I$»
ou «$d \in I$» et «$e \notin I$», bien que $e \leq d$
ou «$d \in I$», «$e \in I$» mais «$d.e$» $\notin I$
ou «$d+e \notin I$»
ou «$d+c = f$», bien que $d+e \neq f$
ou «$d.e = f$», bien que $d.e \neq f$
ou «$d+e \neq f$», bien que $d+e = f$
ou «$d.e \neq f$», bien que $d.e = f$

(iii) une combinaison qui contredit la définition Tarskienne de la vérité dans I; c'est-à-dire,

ou bien «$I \models \neg\Theta$» et «$I \models \Theta$»
ou bien «$I \models \neg\exists v\ \theta(v,\bar{e})$» et «$I \models \Theta(d,e)$»
ou bien «$I \models \neg(\Theta' \vee \Theta'')$» et «$I \models \Theta'$» ou «$I \models \Theta''$»

Autrement 2 gagne la partie. Dans M - où nous raisonnons - $J_c(a,b)$ est un jeu fini à information complète sans partie nulle. Or, c'est un théorème de $\mathcal{P}$ que dans un tel jeu, l'un des joueurs a une stratégie gagnante. Définissons alors pour $a < b$

$Y_{\mathfrak{a}}(a.b) =$ le plus petit c tel que 1 a une stratégie gagnante pour $J_c(a.b)$

Vérifions que $Y_{\mathfrak{a}}$ est bien définie : un tel c existe toujours parce que 1 a la stratégie gagnante suivante pour $J_{b-a+1}(a,b)$:
Au $x^{\text{ième}}$ coup, 1 pose la question «$a+x-1$ est-il dans I»; après $b-a+1$ coups l'ensemble des x tels que 2 a dit «$x \notin I$» est définissable et donc cet ensemble a un élément minimum, disons x_o, s'il est non-vide. Le joueur 2 a donc produit une contradiction de type (ii) : «$x_o - 1 \in I$», «$x_o \notin I$».

Maintenant supposons qu'il existe $I_o < M$ tel que $a \in I_o < b$ et $I_o \models \mathfrak{a}$. Nous voulons en déduire que $Y_{\mathfrak{a}}(a,b) > \mathbb{N}$. Mais supposons que 1 ait une stratégie gagnante pour un jeu $J_n(a,b)$, $n \in \mathbb{N}$. Imaginons une partie du jeu ou 1 joue selon cette stratégie et 2 répond avec la vérité dans I_o, c'est-à-dire, 2 dit «$\bar{e} \in I$» si et seulement si $\bar{e} \in I_o$ et «$I \models \Theta$» si et seulement si $I_o \models \Theta$. La suite des réponses de 2 est vraiment finie, donc définie dans M; ce qui signifie que l'on peut jouer cette partie dans M. Mais 2 n'a pu produire aucune combinaison contradictoire de type (i), (ii) ou (iii), donc 2 a gagné ce qui contredit notre supposition que la stratégie de 1 était gagnante.

Alors, parce que le jeu $J_n(a,b)$ est déterminé dans M pour tout $n \in \mathbb{N}$, le joueur 2 doit avoir une stratégie gagnante. Par le principe de débordement, 2 doit avoir une stratégie gagnante pour un jeu $J_c(a,b)$ avec $c > \mathbb{N}$; donc $Y_{\mathfrak{a}}(a,b) > \mathbb{N}$.

Réciproquement, supposons que $Y_{\mathfrak{a}}(a,b) > \mathbb{N}$, nous allons construire un $I_o \models \mathfrak{a}$ entre a et b. Prenons $c > \mathbb{N}$ et une stratégie gagnante $\sigma \in M$ pour 2 dans le jeu $J_c(a,b)$. En utilisant le fait que M est dénombrable, construisons une liste $< \bar{e}_i, \Theta_i >$, $i \in \mathbb{N}$, de tous les couples correspondant aux questions possibles de 1, où la longueur de $\bar{e}_i$ est au plus i et où Θ_i est une des i premières formules de l'énumération fixée au départ. On supposera aussi qu $< \bar{e}_{2n}, \Theta_{2n} > = < \phi, A_n >$ Bien sûr cette liste n'est pas définie dans M !

Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons la partie de $J_n(a,b)$ jouée par 2 selon sa stratégie σ pour $J_c(a,b)$, et par 1 jouant $<\bar{e}_1, \Theta_1>, \ldots, <\bar{e}_n, \Theta_n>$. Cette partie est vraiment finie et elle est donc définie dans M; nous pouvons la prolonger en une partie semblable de $J_{n+1}(a,b)$ et plus généralement de $J_m(a,b)$ pour tout $m \in N$, $m \geqslant n$, ces parties étant toujours codées dans M. Soit R la réunion des réponses de 2 dans toutes ces parties des jeux $J_m(a,b)$ pour $m \in \mathbb{N}$; dans R ne se trouve aucune combinaison contradictoire de type (i), (ii) ou (iii). En effet, s'il en existait une, elle aurait dû paraître avant le $m^{\text{ième}}$ coup pour un $m \in \mathbb{N}$ et alors 2 aurait perdu $J_m(a,b)$, ce qui est impossible parce que σ est gagnante pour $J_c(a,b)$ et donc pour $J_m(a,b)$.

Soit $I_o = \{e : «e \in I» \in R\}$. Vérifions que I_o est le segment initial cherché. Puisqu'il n'y a pas de contradiction de type (ii), $a < I_o < b$ et I_o est un segment initial de M qui est clos pour successeur , addition et multiplication; puisqu'il n'y a pas de contradiction de type (iii), on peut démontrer par récurrence sur la complexité des formules que

$$I_o \models \Theta(\bar{e}) \iff «I \models \Theta(\bar{e})» \in R$$

Quelle que soit la formule θ. Traitons, par exemple, de la clause d'induction pour la quantification existentielle : d'une part, si $I_o \models \exists x\, \Theta(x,\bar{e})$, on a $I_o \models \Theta(d,\bar{e})$ pour un $d \in I_o$ et par l'hypothèse de récurrence, $«I \models \Theta(d,\bar{e})» \in R$; donc par le choix des questions de 1, et (iii), on a forcément $«I \models \exists x\, \Theta(x,\bar{e})» \in R$; réciproquement, si $«I \models \exists x\, \Theta(x,\bar{e})» \in R$, les règles du jeu requièrent $«I \models \Theta(d,\bar{e})» \in R$ pour un $d < b$, et par l'ypothèse de récurrence, $I_o \models \Theta(d,\bar{e})$ et $I_o \models \exists x\, \Theta(x,\bar{e})$. Les autres clauses d'induction se traitent exactement de la même façon. Pour avoir $I_o \models \mathcal{A}$, il suffit de remarquer que le $n^{\text{ième}}$ axiome A_n de $\mathcal{A}$ doit paraître dans notre liste comme Θ_m pour $m = 2n$ et que $«I \models A_n» \in R$ parce que 2 doit gagner dans le jeu $J_{2n}(a,b)$.

Pour finir, il suffit de noter que notre construction fournit une fonction $Y_{\mathcal{A}}(x,y) = z$ qui est Δ_1^o dans $\mathcal{P}$; en effet les énumérations, les fonctions et les relations qui servent à définir les jeux $J_z(x,y)$ les parties de ces jeux et les stratégies gagnantes sont absolues, et nous venons de voir que $Y_{\mathcal{A}}(x,y) = z$ définit une fonction totale dans un modèle non-standard arbitraire M de $\mathcal{A}$; autrement dit, $\mathcal{P} \vdash \forall x,y\, \exists! z\, Y(x,y) = z$ et $Y_{\mathcal{A}}(x,y) = z$ est bien une fonction Δ_1^o dans $\mathcal{P}$. C.Q.F.D.

IV. LE THÉORÈME d'INCOMPLÈTUDE

Dans ce paragraphe, soient $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$ une théorie récursivement axiomatisable, $Y = Y_{\mathcal{A}}$ une indicatrice pour $\mathcal{A}$ qui est Δ_1^0 dans $\mathcal{A}$, M un modèle dénombrable non-standard de $\mathcal{A}$, et $S = S_{\mathcal{A}}^M$ la classe des segments initiaux de M qui satisfont $\mathcal{A}$. Nous supposerons, sans perte de généralité, que

$$M \models \forall x \, \forall y \;\; Y(x,y) \leq y$$

Ceci est vrai pour les indicatrices ci-dessus et une modification triviale de Y l'assure pour toute indicatrice Y.

IV.1. PROPOSITION Soient $a,b \in M$ tels qu'il existe $I \in S$ avec $a < I < b$. Alors il existe une infinité de $I \in S$ tel que $a < I < b$.

DÉMONSTRATION Il suffira de produire c tel que $a < c < b$ et $Y(a,c) > \mathbb{N}$, $Y(c,b) > \mathbb{N}$. La proposition suivra par itération de ce processus. Considérons l'ensemble

$$X = \{x : a \leq x \leq b \text{ et } Y(x,b) < Y(a,x)\} \cdot$$

Cet ensemble est non-vide (puisque $b \in X$) et il est défini dans M. Soit c le plus petit élément de X. Alors $Y(a,c) > Y(c,b)$. Si $Y(c,b) > \mathbb{N}$, alors $Y(a,c) > \mathbb{N}$ ce qui nous suffit. Donc supposons que $Y(c,b) \in \mathbb{N}$: c'est-à-dire, qu'il n'existe pas de $I \in S$ entre c et b. Mais il existe un tel segment entre a et b, et alors celui-ci se trouve entre a et c; ce segment étant fermé pour successeur, il se trouve entre a et $c-1$; donc $Y(a,c-1) > \mathbb{N}$. Par le même raisonnement, il n'y aucun élément de S entre $c-1$ et b, donc $Y(c-1,b) < \mathbb{N}$, ce qui implique que $c-1 \in X$. C'est une contradiction parce que c est l'élément minimum de X.

IV.2. COROLLAIRE Soit $\mathbb{N} < b \in M$ et supposons que $\mathbb{N} \models \mathcal{A}$. Il existe alors $I \in S$ tel que $\mathbb{N} < I < b$.

DÉMONSTRATION En effet, d'après la proposition il existe une infinité d'éléments de S entre 0 et b parce que $\mathbb{N} \in S$.

IV.3. PROPOSITION Soit $a \in M$; alors il existe $I \in S$ tel que $a < I < M$.

DÉMONSTRATION Prenons $M' \prec_f M$, ce qui existe par le théorème de Mac Dowell-Specker. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $c \in M' - M$, on a $M' \models Y(a,c) > n$ puisque $M \in S_{\mathcal{A}}^{M'}$. Soit c_0 le plus petit élément de l'ensemble suivant qui est défini dans $M - \{x \in M' : M' \models Y(a,x) > n\}$. Alors $c_0 \in M$ (par débordement) et $M \models Y(a,c_0) > n$, par l'absoluité de Y. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M \models Y(a,y) > n$. Par débordement, il existe $e > \mathbb{N}$ tel que $M \models \exists y \; Y(a,y) > e$, ce qui suffit pour la proposition.

Après ces exemples de résultats sur la structure des classes qui ont des indicatrices, nous nous mettons en chemin vers le Théorème d'Incomplétude. D'abord notons que, M étant arbitraire dans la démonstration de la proposition , on peut déduire :

IV.4. <u>COROLLAIRE</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} \vdash \forall x \; \exists y \; Y(x,y) > n$.

Le lemme décisif ressemble à la proposition IV.1.

IV.5. <u>LEMME</u> Soient $a,b \in M$ tels que $Y(a,b) > \mathbb{N}$. Alors pour tout $c > \mathbb{N}$ il existe $d \in M$ tel que $a < d \leq b$ et $\mathbb{N} < Y(a,d) < c$.

<u>DÉMONSTRATION</u> Par l'absurde. Supposons que $c > N$ et que pour tout $d \leq b$

$$Y(a,d) > \mathbb{N} \Rightarrow Y(a,d) \geq c$$

Prenons le plus petit élément e de M tel que $M \models Y(a,e) \geq c$. Alors il existe $I \in S$ avec $a < I < e$. Le segment initial I étant fermé pour successeur, on a $I < e < 1$ et $Y(a,e-1) > \mathbb{N}$. Donc $Y(a,e-1) \geq c$ ce qui contredit la minimalité de e.

IV.6. <u>DÉFINITION</u> <u>L'index</u> de I est défini par

$$i(I) = \{ x \in M : Y(a,b) > x \text{ quels que soient } a \in I, \; b \in M-I \}$$

L'ensemble $i(I)$ est un segment initial de M qui n'est pas forcément fermé pour successeur. Nous avons toujours $i(I) \subseteq I$ parce que $Y(a,b) \leq b$ pour tout b; et aussi $I \in S$ entraine $i(I) \geq \mathbb{N}$. Si $\mathbb{N} \models \mathfrak{A}$, alors $i(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

IV.7. <u>COROLLAIRE</u> Soient $a,b \in M$. S'il existe $I \in S$ satisfaisant $a < I < b$, alors il existe $I \in S$ satisfaisant $a < I < b$ et $i(I) < I$.

<u>DÉMONSTRATION</u> Dans le lemme nous pouvons prendre $c = a-1$, en supposant que a est non-standard.

IV.8. <u>LEMME</u> Il existe une formule close Π^0_2, disons Ψ, telle que

$$i(I) = I \Leftrightarrow I \models \Psi$$

quel que soit $I \in S$.

<u>DÉMONSTRATION</u> En se rappelant que Y est absolue, il est facile de voir que l'on peut prendre pour Ψ la formule

$$\forall x \; \forall z \; \exists y \; Y(x,y) \geq z$$

IV.9. <u>THÉORÈME</u> (Le Théorème d'Incomplètude de Paris). Soit $\mathfrak{A}$ une extension récursivement axiomatisable de $\mathcal{P}$ et soit Y une indicatrice absolue pour $\mathfrak{A}$. Supposons $\mathfrak{A} \cup \mathcal{C}_1$ est consistante, où $\mathcal{C}_1$ dénote l'ensemble des formules Π^0_1 satisfaites dans $\mathbb{N}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

(i) $\mathfrak{A} \vdash \forall x \; \exists y \; Y(x,y) > n$ et (ii) $\mathbb{N} \models \forall x \; \exists y \; Y(x,y) > n$
Or, l'énoncé $\forall z \; \forall x \; \exists y \; Y(x,y) \geq z$ n'est pas dénombrable dans $\mathfrak{A} \cup \mathcal{T}_1$.

DÉMONSTRATION La partie (i) est le corollaire IV.4.; pour $m \in \mathbb{N}$, nous avons $\mathfrak{A} \vdash \exists y \; Y(m,y) > n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. L'énoncé $\exists y \; Y(m,y) > n$ est Σ_1^0 et, parce que $\mathfrak{A} \cup \mathcal{T}_1$ est consistante, cette formule est satisfaite dans $\mathbb{N}$. Pour finir, soit M un modèle dénombrable de $\mathfrak{A} \cup \mathcal{T}_1$; par IV.3., IV.6., et IV.7., il existe $I < M$, $I \models \mathfrak{A}$, $I \models \exists x \; \forall y \; Y(x,y) \leq x$. Du fait que $I < M$, on a aussi $I \models \mathcal{T}_1$.

IV.10. REMARQUE La condition que $\mathfrak{A} \cup \mathcal{T}_1$ soit consistante est analogue à la condition de ω-consistance que l'on trouve dans le théorème d'incomplètude comme formulé par Gödel [Gö]. Pour un théorème d'incomplètude analogue à celui de Rosser pour les théories axiomatisables en général, voir §III du troisième exposé.

BIBLIOGRAPHIE

[Gö] K. Gödel, Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematika und verwandter System I, Monatshefte für Mathematik und Physik, 38 (1931).

[K] L.A.S. Kirby, Thèse, Manchester, 1977.

[K.P] L.A.S. Kirby and J. Paris, Initial segments of models of Peano's axioms, Springer Lecture Notes, 619.

[M.S] R. Mac Dowell and E. Specker, Modelle der Arithmetik, Infinitistic Methods Pergamon, Oxford, PWN Warsaw, 1961.

[P] J. Paris, Some independence results for Peano arithmetic, JSL, 1978

Astérisque

DANIEL LASCAR

Une indicatrice de type "Ramsey" pour l'arithmétique de Peano et la formule de Paris-Harrington

Astérisque, tome 73 (1980), p. 19-30

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__73__19_0>

EXPOSÉ 2

UNE INDICATRICE DE TYPE "RAMSEY" POUR L'ARITHMÉTIQUE DE PEANO ET LA FORMULE DE PARIS-HARRINGTON

Daniel LASCAR

I.- PRÉLIMINAIRES ET LE THÉORÈME PRINCIPAL

Le but de cet exposé est de donner un exemple d'indicatrice pour l'arithmétique de Péano qui est d'inspiration combinatoire et dont la formulation ne fait nullement intervenir de notions métamathématiques telles que les axiomes du système, la notion de preuve ou la non-contradiction. De telles indicatrices furent élaborées en premier lieu par J. Paris, voir [P,bis], suite à ses travaux en collaboration avec L. Kirby, voir le premier exposé. L'exemple fort élégant que nous détaillons ci-dessous représente un "raffinement" par rapport à ceux de Paris et il est dû à L. Harrington, voir [P,H] ou [P,bis]. Ici, contrairement à [P,H] et conformément à [P,bis] nous présentons cet exemple en utilisant la méthode des indicatrices, voir aussi [M].

Evoquons d'abord quelques notions de la combinatoire finie qui sont formulables dans $\mathcal{P}$. Soient X un ensemble non-vide d'entiers et n un entier ; l'ensemble des parties de X à n éléments se note $[X]^n$ et la cardinalité de X se note $|X|$. On confondra les éléments de $[X]^n$ avec les suites extraites de X strictement croissantes et de longueur n. Dans ce contexte, nous identifierons aussi l'entier k et l'ensemble $\{0,\dots,k-1\}$; donc $P : [X]^n \to k$ signifie que P est une application de $[X]^n$ dans l'ensemble $\{0,\dots,k-1\}$. Si $P : [X]^n \to k$ et si $H \subseteq X$ est tel que P soit constante sur $[H]^n$, on dit que H est <u>homogène</u> pour P. La notation $X \to (m)^n_k$, où il est entendu que $m \geq n+1$, signifie que pour toute partition $P : [X]^n \to k$ il existe une partie homogène $H \subseteq X$ telle que $|H| \geq m$. La notation $\ell \to (m)^n_k$ abrège

$[1,\ell] \to (m)^n_k$ où $[1,\ell] = \{1,\dots,\ell\}$ et, en général, $[s,\ell] = \{s,s+1,\dots,\ell\}$. On écrira $[m,n]^k$ pour abréger $[[m,n]]^k$. Il est bien connu, voir [E,R] par exemple, que dans $\mathcal{P}$ on peut démontrer le :

I.1.- THÉORÈME DE RAMSEY. Pour tous $m,n,k \in \mathbb{N}$ il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\ell \to (m)^n_k$.

Appelons un ensemble fini non vide X un ensemble dense, [P] , ou relativement grand , [H,P] , ssi $|X| \geq \min X$. Nous allons étudier une variante de la relation $X \to (m)^n_k$ où l'on demandera que la partie homogène soit dense. Ecrivons $X \underset{*}{\to} (m)^n_k$ ssi pour toute P, $P : [X]^n \to k$, il existe une partie homogène H telle que H est dense et $|H| \geq m$. Nous définissons une fonction Y de deux arguments en posant :

I.2. $Y(a,b)$ = le plus grand entier c tel que $[a,b] \underset{*}{\to} (2\ c)^c_c$.

Remarquons tout de suite que la relation à cinq arguments $[a,b] \underset{*}{\to} (r)^t_s$ s'exprime par une formule de l'arithmétique qui est Δ^0_1 dans $\mathcal{P}$. D'autre part, il est clair que pour $c > b$, on ne peut avoir $[a,b] \underset{*}{\to} (2c)^c_c$. Il s'ensuit que Y est une application Δ^0_1 dans $\mathcal{P}$ et donc absolue.

Il est aussi évident que l'application Y est (prouvablement) monotone en la seconde variable.

I.3.- $\mathcal{P} \vdash \forall x,y,u\ (y \leq u \wedge x < y \to Y(x,y) \leq Y(x,u))$.

Afin de travailler un peu avec la relation $\underset{*}{\to}$ et l'application Y, nous notons quelques propriétés qui peuvent être démontrées dans $\mathcal{P}$.

I.4.- PROPOSITION. Si $[a,b] \underset{*}{\to} (r)^s_t$ est faux, alors $[a,b] \underset{*}{\to} (r+1)^{s+1}_{t+1}$ est également faux.

DÉMONSTRATION.- Rappelons que s doit être inférieur à r ; soit P une application de $[a,b]^s$ dans $\{0,\dots,t-1\}$ qui n'admet pas de partie homogène dense de cardinalité supérieure ou égale à r. Définissons $P' : [a,b]^{s+1} \to t+1$ par :

$$P'(\alpha_1,\dots,\alpha_{s+1}) = \begin{cases} P(\alpha_1-1,\dots,\alpha_s-1) & \text{si } \alpha_1 \neq a \\ t & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit X un sous-ensemble dense de [a,b] de cardinalité supérieure ou égale à r+1. Si $a \in X$, alors X n'est pas homogène pour P' ; en effet, il existe dans $[X]^{s+1}$ une suite u contenant a et une autre v qui ne le contient pas ; alors $P'(u) = t$ et $P'(v) < t$. Si $a \notin X$, posons $X^* = \{\alpha-1 : \alpha \in X \wedge \alpha \neq \max X\}$; alors X^*

est un ensemble dense de cardinalité au moins r ; X^* n'est donc pas homogène pour P ; il en résulte que X n'est pas homogène pour P'. Ceci montre en particulier que $[a,b] \underset{*}{\rightarrow} (2\ c)^c_c$ si et seulement si $c \leq Y(a,b)$.

I.5.- REMARQUES. Nous aurons un raffinement puissant de ce résultat plus loin au moyen de la proposition II.1.

Nous allons voir maintenant que la fonction Y jouit d'une certaine propriété de convexité, à savoir

I.6 $Y(0,x+y) \leq 1 + \max(Y(0,x),Y(x,x+y),2)$.

Posons $c = 1 + \max(Y(0,x),Y(x,x+y),2)$. D'après ce que l'on vient de voir, il existe des applications P et Q de $[0,x]^c$ et $[x,x+y]^c$ dans c n'admettant pas de partie homogène dense de cardinalité au moins 2c. Considérons les applications P' et Q' suivantes de $[0,x]^{c+1}$ et $[x,x+y]^{c+1}$ dans $\{0,\ldots,c\}$

$$P'(\alpha_1,\ldots,\alpha_{c+1}) = \begin{cases} P(\alpha_1-1,\ldots,\alpha_c-1) & \text{si } \alpha_1 \neq 0 \\ c & \text{si } \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

$$Q'(\alpha_1,\ldots,\alpha_{c+1}) = \begin{cases} Q(\alpha_1-1,\ldots,\alpha_c-1) & \text{si } \alpha_1 \neq x \\ c & \text{si } \alpha_1 = x \end{cases}$$

Considérons aussi l'application R de $[0,x+y]^{c+1}$ dans $\{0,\ldots,c\}$ définie par

(i) $R = P'$ sur $[0,x]^{c+1}$

(ii) $R = Q'$ sur $[x,x+y]^{c+1}$

(iii) Si $|\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{c+1}\} \cap [0,x]| \geq 2$ et si $|\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{c+1}\} \cap [x,x+y]| \geq 2$, alors on pose $R(\alpha_1,\ldots,\alpha_{c+1}) = |\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{c+1}\} \cap [0,x]|$

(iv) Si $\alpha_1 < x < \alpha_2$ ou $\alpha_c < x < \alpha_{c+1}$, on pose $R(\alpha_1,\ldots,\alpha_{c+1}) = c$.

Soit X un ensemble dense ayant au moins 2c+2 éléments, et montrons que X n'est pas homogène pour R. Enumérons $X = \{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{c+2},\ldots,\alpha_\ell\}$. Si $X \subseteq [0,x]$ ou si $X \subseteq [x,x+y]$, la conlcusion est évidente ; sinon et si $X \cap [0,x]$ et $X \cap [x,x+y]$ ont tous deux au moins deux éléments, alors $\alpha_2 < x < \alpha_{\ell-1}$. Il existe donc une suite $u \in X^{c+1}$ qui contient $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_{\ell-1}$ et α_ℓ. Remarquons que $c+1 \geq 4$ par définition. Or u n'épuise pas X et l'on peut trouver une autre suite v telle que

$v \cap [0,x]$ ait un élément de plus ou de moins que $u \cap [0,x]$ et par conséquent $R(u) \neq R(v)$. Dans le cas où $\alpha_1 < x < \alpha_2$, il est clair que $R(\alpha_1,\ldots,\alpha_{c+1}) = c$ tandis que $R(\alpha_2,\ldots,\alpha_{c+2}) \neq c$; il en est de même si $\alpha_{\ell-1} < x < \alpha_\ell$.

Nous allons démontrer :

I.7.- <u>THÉORÈME</u>. (Paris-Harrington) La fonction $Y(x,y)$ est une indicatrice pour $\mathcal{P}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé, vérifions que

$$\text{I.8 } n \qquad \mathcal{P} \vdash \forall x,u,v\ \exists\ y([x,y] \underset{*}{\to} (u)^{\bar{n}}_{v}).$$

Pour ce faire, nous devons rappeler tout d'abord la forme infinie du Théorème de Ramsey :

I.9.- <u>THÉORÈME DE RAMSEY</u> (Forme Infinie) <u>Soit</u> $P : [\mathbb{N}]^n \to k$; <u>alors il existe un ensemble homogène infini pour</u> P.

Une analyse de la preuve de ce résultat, voir [P],[J], permet de voir qu'il existe un ensemble infini homogène qui est arithmétiquement définissable à partir de P. En fait, la démonstration "usuelle" donne une partie infinie homogène H pour P qui est Σ^{o}_{n+1} en P. Dans [J], il est démontré que l'on peut trouver une partie infinie homogène H qui est π^{o}_{n} en P. (Il y est aussi démontré qu'en général on <u>ne</u> peut <u>pas</u> trouver une partie homogène infinie Σ^{o}_{n} en P). Pour le système d'axiomes $\mathcal{P}$, ceci veut dire qu'il existe une fonction primitive récursive qui associe à toute formule $\Phi(y_1,\ldots,y_k,v_1,\ldots,v_n,z)$ de $\mathcal{L}$ une formule $\psi(y_1,\ldots,y_k,v,z)$ telle que

$$\text{I.10} \qquad \mathcal{P} \vdash \forall y_1,\ldots,y_k\ \forall z\ [\forall v_1,\ldots,v_n\ \exists!\ u \le z\ \Phi(y_1,\ldots,y_k,v_1,\ldots,v_n,u)$$

$$\longrightarrow\ \exists\ u \le z\ [\ \exists^{\infty} v\ \psi(y_1,\ldots,y_k,v,z) \wedge \forall v_1,\ldots,v_n (\bigwedge_{i=1}^{n} \psi(y_1,\ldots,y_k,v_i,z) \to$$

$$\Phi(y_1,\ldots,y_k,v_1,\ldots,v_n,u))]]$$

Soit M un modèle de $\mathcal{P}$ et soient $a,b,c \in M$ et soit $n \in \mathbb{N}$ l'entier standard fixé, $n \ge 2$. Il s'agit de trouver $d \in M$ tel que $M \models [a,d] \underset{*}{\to} (b)^n_c$. Travaillons dans M : supposons qu'un tel d n'existe pas. Définissons alors par récurrence sur $d \ge a$ une application f_d de $[a,d]$ dans c, prolongeant f_{d-1} et jouissant de la propriété suivante : quel que soit $d' \ge d$, il est possible d'étendre f_d en une application $g : [a,d']^n \to c$ qui n'admet pas d'ensemble homogène dense ayant au moins b éléments. Notre hypothèse nous assure que la fonction vide qui est le seul choix pour f_{a+n-2} satisfait cette condition ; pour définir f_d à partir de f_{d-1}, on remarque d'abord qu'il n'y a qu'un nombre fini d'extensions de f_{d-1} à des fonctions de $[a,d]^n$ dans c ; pour chaque d' > d au moins une de ces extensions peut se prolonger à son tour en une fonction g de $[a,d']^n$ dans c qui n'admet pas d'ensemble homogène dense de cardinalité au moins b ; il existe donc une extension f_d de f_{d-1}, $f_d : [a,d]^n \to c$, qui pour une infinité de d' > d (et donc pour tout d' > d) peut s'étendre en une telle fonction g. La suite f_d étant construite, on définit une application F des n-uplets d'entiers dans c en posant $F(x_1,\dots,x_n) = f_d(x_1,\dots,x_n)$ pour $d > x_1,\dots,x_n$. Revenant à l'extérieur de M, nous avons donc une définition de la fonction F par une formule comportant les paramètres a,b,c et n, disons $F(x_1,\dots,x_n,u,a,b,c)$, telle que

$$M \models \forall x_1 \dots \forall x_n \ \exists!\ n \leq c\ F(x_1,\dots,x_n,u,a,b,c).$$

Par I.10, il existe une partie A définissable dans M, non bornée dans M et qui est homogène pour F. Soit α_1 un élément de A qui est plus grand ou égal à a et soit $X = \{\alpha_1,\dots,\alpha_\ell\}$ une suite croissante extraite de A dans M telle que $\ell \geq b, \alpha_1$. Alors

$$M \models X \text{ est dense} \wedge X \text{ est homogène pour } f_{\alpha_\ell}$$

ce qui contredit la construction des f_d.

Le modèle M ayant été arbitraire, nous avons donc démontré que

I.11 $\quad \mathcal{P} \vdash \forall x\ \forall y\ \forall u\ \exists z\ ([x,z] \underset{*}{\to} (u)_y^{\overline{n}})$

La relation $[x,z] \underset{*}{\to} (u)_y^v$ étant Δ_1^o dans $\mathcal{P}$, donc absolue pour les modèles de $\mathcal{P}$, il nous reste à démontrer que $Y(a,b) > \mathbb{N}$ entraîne l'existence de $I \models \mathcal{P}$, $a < I < b$.

Supposons alors que $M \models \mathcal{P}$, que $a,b \in M$ et que $c \in M-\mathbb{N}$ et que l'on ait

$$M \models [a,b] \underset{*}{\to} (2c)_c^c .$$

Il faut trouver un segment initial a < I < b qui est un modèle de $\mathcal{P}$. Nous allons supposer que les notions syntactiques -formule variable, etc- ont été formulées en termes arithmétiques, voir [Fe] par exemple ; nous identifions donc les formules et leurs nombres de Gödel. Moyennant cette identification, soit $i \mapsto \varphi_i$ une énumération des formules Δ_o^o de $\mathcal{L}$. Pour ces formules, la relation de satisfaction entre les formules $\varphi_i = \varphi_i(v_1,\dots,v_\ell)$ et les suites finies d'entiers $\langle n_1,\dots,n_k\rangle$, $\ell \leq k$,

$$S(\varphi_i, \langle n_1,\dots,n_k\rangle) \equiv \text{la suite } \langle n_1,\dots,n_k\rangle \text{ satisfait } \varphi_i$$

est une relation récursive, même Δ_1^0 dans $\mathcal{P}$, qui est définie par récurrence sur la complexité logique de φ_i. On vérifie d'ailleurs par induction sur la complexité de φ_i que l'on a pour chaque $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P} \vdash \forall v_1,\dots,v_k\ [\varphi_i(v_1,\dots,v_k) \leftrightarrow S(\bar{\varphi}_i, < v_1,\dots,v_k >)].$$

Soit $\delta > \mathbb{N}$ tel que $M \models 2^\delta \leq c$. Travaillant dans M, posons pour $i < \delta$ et $X = \{x_1,\dots,x_c\} \in [a,b]^c$, $f(i,x) = 0$ si $S(\varphi_i, < x_1,\dots,x_c >)$, 1 sinon. On obtient donc une partition de $[a,b]^c$ en $2^\delta \leq c$ classes en posant

$$f(x) = <f(0,x),\dots,f(\delta-1,x)>$$

Soit H' une partie de $[a,b]$ homogène dense pour f de cardinalité $\geq 2c$, posons $H' = \{e_1,\dots,e_{\ell'}\}$. Soit $\ell = E(\frac{1}{2}\ell')$, la partie entière de $\frac{1}{2}\ell'$ et soit $H = \{e_1,\dots,e_\ell\}$; évidemment, $\ell \geq c$ et $2\ell + 1 \geq e_1$.

Revenant à l'extérieur de M, notons que H est un ensemble d'indiscernables pour les formules φ_i, $i \in \mathbb{N}$: soient $s = \{e_{s_1},\dots,e_{s_k}\}$ et $t = \{e_{t_1},\dots,e_{t_k}\}$ deux suites croissantes extraites de H, et soit $\varphi_i = \varphi_i(v_1,\dots,v_k)$, alors

I.12 $\quad M \models \varphi_i(e_{s_1},\dots,e_{s_k}) \leftrightarrow \varphi_i(e_{t_1},\dots,e_{t_k})$

Pour le voir, on remarque que les suites s et t se prolongent dans M dans des suites $x = \{e_{s_1},\dots,e_{s_k},\dots\}$ et $y = \{e_{t_1},\dots,e_{t_k},\dots\}$ de longueur c extraites de H et que $M \models f(i,x) = f(i,y)$. On va maintenant montrer que $H - \{e_1\} = \{e_2,e_3,\dots\}$ est un ensemble d'indiscernables pour les formules Δ_0^0 à paramètres inférieurs ou égaux à e_1. Raisonnons par l'absurde, et soit n le plus petit nombre de paramètres $< e_1$ nécessaire pour distinguer deux suites croissantes d'éléments de $H - \{e_1\}$ de même longueur par une formule Δ_0^0. Par l'indiscernabilité (I.12), on a $n > 0$. On suppose donc qu'il existe $d_1,\dots,d_n < e_1$ et une formule ψ à quantification bornée tels que

$$M \models \neg[\psi(e_1,d_1,\dots,d_n,e_{s_1},\dots,e_{s_k}) \leftrightarrow \psi(e_1,d_1,\dots,d_n,e_{t_1},\dots,e_{t_k})]$$

pour deux suites $e_{s_1} <\dots< e_{s_k}$, $e_{t_1} <\dots< e_{t_k}$ avec $e_1 < e_{s_1}$, $e_1 < e_{t_1}$. Dans la suite, on pose $s = \{e_{s_1},\dots,e_{s_k}\}$, $t = \{e_{t_1},\dots,e_{t_k}\}$, et on écrit $s < t$ pour signifier que $e_{s_k} < e_{t_1}$ et $\varphi(s)$ pour abréger $\varphi(e_{s_1},\dots,e_{s_k})$. On voit donc qu'il existe des suites s et t qui vérifient

$$\text{I.13} \qquad M \models \exists v_1 < e_1 \ldots \exists v_n < e_1 [\neg(\varphi(v_1,\ldots,v_n,s) \leftrightarrow \psi(v_1,\ldots,v_n,t))]$$

Par l'indiscernabilité de H, on peut supposer que les suites vérifiant I.13 sont extraites de $\{e_2,\ldots,e_{2k+1}\}$. En posant $u = \{e_{2k+2},\ldots,e_{3k+1}\}$ on a

$$\text{soit } M \models \neg[\psi(e_1,d_1,\ldots,d_n,s) \leftrightarrow \psi(e_1,d_1,\ldots,d_n,u)]$$

$$\text{soit } M \models \neg[\psi(e_1,d_1,\ldots,d_n,t) \leftrightarrow \psi(e_1,d_1,\ldots,d_n,u)]$$

ce qui nous permet de supposer que dans I.13, les suites s et t satisfont en plus $s < t$. Divisons d_1 par 5k pour trouver $d_1 = 5k\delta_1 + \varepsilon_1$, avec $\delta_1 \le \frac{d_1}{5k}$ et $\varepsilon_1 < 5k$; donc $\varepsilon_1 \in \mathbb{N}$. Nous avons alors

$$M \models \exists v_1 < \frac{e_1}{5k} \; [\, (\psi(e_1,5k\,_1 + \varepsilon_1,d_2,\ldots,d_n,s) \leftrightarrow \psi(e_1,5kv_1 + \varepsilon_1,d_2,\ldots,d_n t))]$$

Posons $\varphi(e_1,v_1,\ldots,v_n,s) \equiv \psi(e_1,5kv_1 + \varepsilon_1,v_2,\ldots,v_n,s)$. D'après le choix de l'entier n, si s' et t' sont dans $[H-\{e_1\}]^k$, et si $s' < t'$, on doit avoir $M \models A(e_1,d_2,\ldots,d_n,s',t')$ pour toute formule A à quantification bornée telle que $M \models A(e_1,d_2,\ldots,d_n,s,t)$. Par suite

$$M \models \exists v_1 < \frac{e_1}{5k} [\neg[\varphi(e_1,v_1,d_2,\ldots,d_n,s') \leftrightarrow \varphi(e_1,v_1,d_2,\ldots,d_n,t')\ ]]$$

Posons

$$s_1 = \{e_2,\ldots,e_{k+1}\}$$

$$s_2 = \{e_{k+2},\ldots,e_{2k+1}\}$$

$$\vdots$$

$$s_{2\alpha} = \{e_{(2\alpha-1)k+2},\ldots,e_{2\alpha k+1}\}$$

avec $\alpha = E(\frac{\ell-1}{2k})$. Evidemment, le fait que $k \in \mathbb{N}$, $e_1 \notin \mathbb{N}$ et $2\ell+1 \ge e_1$ entraîne $\alpha > \frac{e_1}{5k}$. Considérons la fonction π à 2k arguments

$$\pi(s,t) = \mu x\ [\ x < \frac{e_1}{5k} \wedge (\neg\, \varphi(e_1,x,d_2,\ldots,d_n,s) \leftrightarrow \varphi(e_1,x,d_2,\ldots,d_n,t))]$$

Alors la suite $\pi(s_{2i-1},s_{2i})$, $1 \le i \le \alpha$, prend des valeurs inférieures à $E(\frac{e_1}{5k})$; du fait que $\alpha > \frac{e_1}{5k}$, il en découle qu'il existe $1 \le i < j \le \alpha$ tels que

$$\pi(s_{2i-1},s_{2i}) = \pi(s_{2j-1},s_{2j}) \ .$$

Or, la fonction π est définie au moyen d'une formule Δ_o^o à paramètres e_1 et $d_2,\dots,d_n$; par le choix de n, pour tous $i < j < i' < j'$ dans $[1,2\alpha]$, on doit avoir $\pi(s_i,s_j) = \pi(s_{i'},s_{j'})$. Posons $d = \pi(s_1,s_2) = \pi(s_3,s_4) = \pi(s_4,s_5)$. Alors nous avons

$$M \models \neg[\varphi(e_1,d,d_2,\dots,d_n,s_3) \leftrightarrow \varphi(e_1,d,d_2,\dots,d_n,s_4)]$$

$$M \models \neg[\varphi(e_1,d,d_2,\dots,d_n,s_3) \leftrightarrow \varphi(e_1,d,d_2,\dots,d_n,s_5)]$$

$$M \models \neg[\varphi(e_1,d,d_2,\dots,d_n,s_4) \leftrightarrow \varphi(e_1,d,d_2,\dots,d_n,s_5)]$$

ce qui est absurde et ce qui termine la démonstration.

Utilisant de nouveau l'indiscernabilité I.12 des éléments de H, nous concluons que, pour $m \in \mathbb{N}$ les éléments de $H - \{e_1,\dots,e_m\}$ sont indiscernables pour les formules Δ_o^o à paramètres inférieurs ou égaux à e_m.

Le lemme étant établi, posons $I = \{a \in M : \text{il existe } n \in \mathbb{N},\ a < e_n\}$; nous disons que $I \models \mathcal{P}$. Tout d'abord, remarquons que I est clos pour la multiplication et donc pour l'addition : si $e_n^2 \geq e_{n+1}$, on aurait $e_{n+1} = e_n \cdot \mu + \lambda$ avec $\mu,\lambda \leq e_n$ et $e_{n+2} \neq e_n \cdot \mu + \lambda$, contrairement à l'indiscernabilité des e_k, $k \in \mathbb{N}$.

I.14.- <u>LEMME DE VÉRITÉ</u>. Soit $E(y_1,\dots,y_m) = Q\,v_n \dots Q\,v_1\ F(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ où F est sans quantificateur et Qv_i est soit $\forall v_i$, soit $\exists x_i$, $1 \leq i \leq n$. Alors pour tous $a_1,\dots,a_m \in I$, pour tous $e_{i_1} > \dots > e_{i_n} > I$, on a

$$I \models E(a_1,\dots,a_m) \Longleftrightarrow M \models Qv_n < e_{i_n} \dots Qv_1 < e_{i_1}\ F(x_1,\dots,x_n,a_1,\dots,a_m).$$

<u>Démonstration</u>. Par récurrence sur n. Pour fixer les idées, supposons $Qv_{n+1} = \forall v_{n+1}$ et que $a_1,\dots,a_m < e_k$. Alors

$$I \models \forall b\ Qv_n \dots Qv_1\ F(v_1,\dots,v_n,b,a_1,\dots,a_m) \Longleftrightarrow \text{pour tout } s \geq k,\ s \in \mathbb{N},$$

$$I \models \forall b < e_{s+1} Qv_n \dots Qv_1\ F(v_1,\dots,v_n,b,a_1,\dots,a_m)$$

$$\Longleftrightarrow \text{(par l'hypothèse de récurrence) pour tout } s \geq k,$$

$$M \models \forall v_{n+1} < e_{s+1}\ Qv_n < e_{i_n} \dots Qv_1 < e_{i_1}\ F(v_1,\dots,v_n,v_{n+1},a_1,\dots,a_m)$$

$$\Longleftrightarrow \text{(indiscernabilité) pour tout } e_{i_{n+1}}, e_k < e_{i_{n+1}} < e_{i_n}$$

$$M \models \forall v_{n+1} < e_{i_{n+1}} Qv_n < e_{i_n} \dots Qv_1 < e_{i_1} F(v_1,\dots,v_{n+1},a_1,\dots,a_m).$$

Le lemme prouvé, quelques remarques termineront la démonstration. Le segment $I < M$ est clos pour l'addition et la multiplication de M ; les axiomes sur les fonctions primitives de $\mathcal{P}$ sont universels et donc automatiquement satisfaits dans I. Le schéma d'induction ou ce qui lui est équivalent, le principe de l'élément minimum, est satisfait dans I parce que d'après le Lemme de Vérité, toute partie X définissable de I est la restriction à I d'une partie définissable $\overline{X}$ de M ; l'élément minimum de $\overline{X}$ est donc l'élément minimum de X.

CQFD.

Par les résultats de l'exposé précédent, nous avons comme corollaire du Théorème de Paris-Harrington :

I.15.- <u>COROLLAIRE</u>. L'énoncé $\forall x\, \forall y\, \forall z([x,z] \underset{*}{\to} (2y)^y_y)$ est satisfait dans $\mathbb{N}$, mais il n'est pas prouvable dans $\mathcal{P} + \mathcal{C}_1$.

Il est clair, d'après la convexité de la fonction Y que nous avons

I.16.- <u>COROLLAIRE</u>. Dans $\mathcal{P} + \mathcal{C}_1$ on ne peut prouver l'énoncé $\forall m,n,k\, \exists \ell\, (\ell \underset{*}{\to} (m)^n_k)$.

II.- <u>RAFFINEMENTS ET APPLICATION</u>

Nous allons voir maintenant quelques raffinements des résultats que nous venons d'obtenir. Pour k entier, notons $\sqrt{k}$ le plus petit entier n tel que $n^2 \geq k$. On voit aisément (et dans $\mathcal{P}$) que pour $k > 7$, $1 + 2\sqrt{k} < k$. La proposition suivante est aussi démontrable dans $\mathcal{P}$ et elle est effectivement démontrée dans [P,H].

II.1.- <u>PROPOSITION</u>. (i) Soit $P : [X]^n \to k$ et soit $H \subseteq X$. Pour que H soit homogène pour P il faut et il suffit que toutes les parties de H à $n+1$ éléments soient homogènes pour P

(ii) Soit $P : [X]^n \to k$; alors il existe $P' : [X]^{n+1} \to 1 + 2\sqrt{k}$ telle que pour toute $H \subseteq X$, $|H| \geq n+2$, si H est homogène pour P' alors H est homogène pour P.

<u>Démonstration</u>.- (i) Supposons que $H = \{\alpha_1,\dots,\alpha_s\}$ n'est pas homogène pour P ; ordonnons les suites croissantes de longueur n lexicographiquement et soit $\beta_1 < \dots < \beta_n$ la première suite extraite de H telle que $P(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \neq P(\beta_1,\dots,\beta_n)$ et soit k le premier entier tel que $\alpha_k \neq \beta_k$. Alors $\{\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_k,\dots,\beta_n\}$ n'est pas homogène pour P.

(ii) Soit $m = \sqrt{k}$. Rappelons notre convention $k = \{0,\dots,k-1\}$; $\ell \leq k-1$ s'écrit $\ell = m.g+r$ où $g < m$, $r < m$. On définit deux applications $Q : [X]^n \to m$ et $R : [X]^n \to m$ par

$$P(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = m \,.\, Q(\alpha_1,\dots,\alpha_n) + R(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$

et on définit $P' : [X]^{n+1} \to 1 + 2m$ par

$$P'(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}) = \begin{cases} 0 \text{ si } \{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\} \text{ est homogène pour } P \\ 1 + R(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \text{ si } \{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\} \text{ est homogène} \\ \qquad \text{pour } Q \text{ mais pas pour } P \\ 1 + m + Q(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \text{ si autrement.} \end{cases}$$

Soit $H = \{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+2}\}$ une partie homogène pour P'. Nous disons que $P'(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}) = 0$. Supposons que $P'(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}) = 1+m+s_o$; alors pour $\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_n}$ extraits de $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\}$, on a $P'(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_n},\alpha_{n+2}) = 1+m+s_o$ ce qui veut dire que $Q(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_n}) = s_o$; ceci est impossible parce qu'alors $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\}$ est homogène pour Q.

Pour finir, supposons que $P'(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}) = 1+s_1$, $s_1 < m$, alors $\{\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\}$ est homogène pour Q et pour R et donc pour P, ce qui est de nouveau une contradiction. C.Q.F.D

Posons $\theta(n) = m \Longleftrightarrow m$ est le plus grand entier tel que $1+2\sqrt{m} \leq n$. Pour $n \geq 7$, nous avons $\theta(n) > n$, donc la suite itérée $\theta^{(t)}(n)$ pour $n \geq 7$ est strictement croissante. Par la Proposition 1, on a que $[a,b] \underset{*}{\to} (r)^s_n$ entraîne $[a,b] \underset{*}{\to} (r)^{s-1}_{\theta(n)}$; en itérant on trouve que $[a,b] \underset{*}{\to} (r)^s_n$ entraîne $[a,b] \underset{*}{\to} (r)^{s-t}_{\theta^{(t)}(n)}$. Donc si $\theta^{(t)}(7) \geq k$ et si $s-t \geq n$ et $s+1 \geq m$, alors $\ell \underset{*}{\to} (s+1)^s_7$ entraîne $\ell \underset{*}{\to} (m)^n_k$.

Nous avons donc

$$\mathcal{P} \vdash \forall n \, \exists \ell \, (\ell \underset{*}{\to} (n+1)^n_7) \to \forall m,n,k \, \exists \ell \, (\ell \underset{*}{\to} (m)^n_k)$$

d'où

II.2 $\quad \mathcal{P} \vdash \mathcal{C}_1 \nvdash \forall n \, \exists \ell \, (\ell \underset{*}{\to} (n+1)^n_7$.

D'autres raffinements sont aussi possibles - par exemple, définissons relation $\underset{\sqrt{*}}{\longrightarrow}$ en demandant que la partie homogène H satisfasse $|H| \geq \sqrt{\min H}$; alors on peut voir que la relation $[a,b] \underset{\sqrt{*}}{\longrightarrow} (2c)^c_c$ donne aussi une indicatrice pour P et donc, en raisonnant comme ci-dessus,

II.3 $\quad \mathcal{P} + \mathcal{C}_1 \nvdash \forall n \; \exists \ell (\ell \underset{\sqrt{*}}{\longrightarrow} (n+1)^n_7)$.

Nous terminons cet exposé avec quelques applications de ces résultats aux fonctions récursives prouvables (voir la fin du § 1 du premier exposé).

Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto$ le plus petit ℓ tel que $\ell \underset{*}{\rightarrow} (n+1)^n_n$. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction récursive prouvable. Nous disons qu'il existe uun entier k_f tel que $\sigma(x) \geq f(x)$ quel que soit $x \geq k_f$. Pour arriver à une contradiction, supposons que $X = \{x \in \mathbb{N} : f(x) > \sigma(x)\}$ soit infini. Reprenons alors la démonstration du Théorème de Mac Dowell-Specker, I.1,en imposant $X = X_o$, ce qui assure $X \in \mathcal{U}$. On obtient alors $M \succ_e \mathbb{N}$ tel que $M \models f(c) > \sigma(c)$ ou c est le point infini représenté dans l'ultrapuissance par la fonction identité. Par la convexité, voir I.6, de $\underset{*}{\rightarrow}$ on a $M \models [c,\sigma(c)] \underset{*}{\rightarrow} (c)^{c-1}_{c-1}$. Alors il existe un segment initial I de M tel que $c < I < \sigma^M(c)$ et $I \models \mathcal{P}$, cependant, $f^M(c) > I$ ce qui contredit l'hypothèse que f est une fonction absolue. Le lecteur se convaincra facilement qu'il en est de même pour la fonction $\tau : n \longmapsto$ le plus petit ℓ tel que $\ell \underset{*}{\rightarrow} (n+1)^n_7$.

Soit $P_1, P_2, \ldots$ une énumération des axiomes de $\mathcal{P}$. En examinant la preuve du Théorème I.14, on voit que pour chaque entier s, il existe $n = n(s)$ tel que $\bigwedge_{i \in s} P_i \nvdash \forall m \; \exists \ell (\ell \underset{*}{\rightarrow} (m)^{\bar{n}}_m)$ et même que la fonction $\sigma_s(m)$ = le plus petit ℓ tel que $\ell \underset{*}{\rightarrow} (m)^{n_s}_m$ majore finalement toutes les fonctions récursives prouvables dans $\bigwedge_{i \leq s} P_i$. Ce résultat fut noté en premier lieu par Solovay qui utilisait une analyse des fonctions récursives prouvables en termes de la hiérarchie de GregorcyckWainer, [S].Plus récemment, Paris utilisant les travaux de Ketonen et Solovay, [K.S] , a démontré des résultats optimaux dans ce sens, voir [P,ter] .

BIBLIOGRAPHIE

[Fe] S. Feferman, Arithmetization of metamathematics in a general setting, F.M. 49.

[J] C. Jockusch, Ramsey's Theorem and recursion theory, JSL 37

[K.S] J. Ketonen and R. Solovay, Rapidly growing Ramsey functions, à paraître.

[M] K. Mc Aloon, Formes combinatoires du Théorème d'Incomplétude, Séminaire Bourbaki 1977-78, SLN

[P] J. Paris, On models of arithmetic, Proceedings of the London Logic Conference, 1970, SLN.

[P.bis] J. Paris, Some in dependence results for Peano arithmetic, JSL 1978.

[P.ter] J. Paris, A hierarchy of cuts for models of arithmetic, à paraître.

[P.H] J. Paris and L. Harrington, A mathematical incompleteness in Peano's arithmetic, Handbook of Mathematical Logic, North-Holland

[S] R. Solovay, Fast growing Ramsey functions, manuscrit.

[E.R] P. Erdös et R. Rado, Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set, Proc. London Math. Soc. (3) 2 (1952).

KENNETH MCALOON

Les rapports entre la méthode des indicatrices et la méthode de Godel pour obtenir des résultats d'indépendance

Astérisque, tome 73 (1980), p. 31-39
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__73__31_0>

EXPOSÉ 3

LES RAPPORTS ENTRE LA MÉTHODE DES INDICATRICES ET LA MÉTHODE DE GODEL POUR OBTENIR DES RÉSULTATS D'INDÉPENDANCE

Kenneth Mc Aloon

I - PRÉLIMINAIRES ET L'ÉQUIVALENCE ENTRE LA FORMULE DE PARIS-HARRINGTON ET UNE FORMULE DE GÖDEL.

L'exposé précédent met en évidence le lien remarquable entre le système $\mathcal{P}$ et la relation combinatoire $[a,b] \underset{*}{\rightarrow} (2c)^c_c$ qui définit une indicatrice pour $\mathcal{P}$; on en déduit que l'énoncé $\forall m,n,k\ \exists l (l \underset{*}{\rightarrow} (m)^n_k)$ n'est pas prouvable dans $\mathcal{P} + \mathcal{C}_1$ La question se pose alors de savoir si les énoncés indépendants obtenus par la méthode des indicatrices ont un rapport avec les énoncés du type découvert par Gödel portant sur la non-contradiction de systèmes d'axiomes. Il s'avère que l'énoncé de Paris-Harrington et ceux de $[\mathcal{P},\text{bis}]$ qui correspondent à d'autres indicatrices pour $\mathcal{P}$ sont tous équivalents dans $\mathcal{P}$ à une même formule de Gödel, celle qui exprime que "$\mathcal{P}$ est consistant avec toute formule universelle close qui est vraie". Dans cet exposé nous formulons et nous démontrons l'équivalence de la formule de Paris-Harrington et celle de Gödel;or l'équivalence de celle-ci avec les autres formules de Paris s'établit de façon tout à fait analogue. Ensuite nous traitons des rapports entre la méthode de Gödel et celle des indicatrices à un niveau plus général.

Nous allons avoir souvent recours aux méthodes de la Théorie des Modèles pour établir des résultats qui relèvent plutôt de la Théorie de la Démonstration. Nos arguments modèle-théoriques seront tout de même formalisables dans l'arithmétique de Péano; nous faisons donc ici quelques remarques sur le caractère arithmétique du théorème de complètude et sur la façon que nous pouvons utiliser celui-ci en conjonction avec des définitions partielles de satisfaction dans l'arithmétique. Rappelons tout d'abord la situation standard, c'est-à-dire au niveau de $\mathbb{N}$. Soit $\mathcal{A}$ une théorie dans le langage de l'arithmétique. Nous supposerons toujours que les notions syntactiques - formules, variables, etc. - ont été formulées en termes arithmétiques pour pouvoir identifier les formules et leurs nombres de Gödel. Si, moyennant cette identification, la théorie $\mathcal{A}$ constitue un ensemble

Σ^0_{n+1} d'entiers et si elle est non-contradictoire, alors la construction de Henkin démontre que $\mathcal{A}$ possède un modèle M qui jouit des propriétés suivantes : le domaine de M est un ensemble récursif de nouvelles constantes individuelles $c_1, c_2, \ldots$ et la relation de satisfaction $M \models \Phi(c_1, \ldots, c_n)$ entre les formules $\Phi(v_1, \ldots, v_k)$ et les suites finies de constantes $c_1, \ldots, c_n$ est une relation Δ^0_{n+2}.

Rappelons aussi que pour les formules Δ^0_0 closes la relation de satisfaction dans $\mathbb{N}$ est primitive récursive, donc Δ^0_1 ; notons $\mathcal{T}_0$ l'ensemble des formules closes Δ^0_0 qui sont satisfaites dans $\mathbb{N}$; $\mathcal{T}_0$ est donc défini dans $\mathbb{N}$ par un prédicat Δ^0_1 que nous notons $Tr_0(\phi)$. Par récurrence, nous définissons la classe $\mathcal{T}_n$ des formules closes Π^0_n satisfaites dans $\mathbb{N}$ et un prédicat $Tr_n(\phi)$ qui est également Π^0_n, $n \geq 1$, et qui exprime la satisfaction dans $\mathbb{N}$ des formules closes Π^0_n. Nous avons donc pour toute formule $F(v_1, \ldots, v_s)$ de type Π^0_n et tous $k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{N} \models F(k_1, \ldots, k_s) \Leftrightarrow \mathbb{N} \models Tr_n(\bar{F}(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_s))$$

Il est interessant de noter que ces remarques amènent à un théorème d'incomplètude : l'ensemble $\mathcal{T}_2$ n'est pas une partie Σ^0_2 des entiers (et ceci se démontre par un simple argument diagonal qui n'utilise pas de théorème de point-fixe); donc si M est un modèle de $\mathcal{P}$ dont la relation de satisfaction est Δ^0_2 il faut qu'il y ait un énoncé Π^0_2 qui est vraie dans $\mathbb{N}$ et qui n'est pas satisfaite dans M. Donc si $\mathcal{A}+\mathcal{T}_2$ est consistant et $\mathcal{A}$ est récursivement axiomatisable, il y a un énoncé Π^0_2 indépendant de $\mathcal{A}$.

Supposons maintenant que $\mathcal{A}$ est une théorie récursivement axiomatisable; alors $\mathcal{T}_n \cup \mathcal{A}$ est un ensemble Σ^0_{n+1} , $n \geq 0$. La consistance de $\mathcal{A} \cup \mathcal{T}_n$ s'exprime au moyen d'une formule arithmétique $Cons(T_n + \mathcal{A})$, voir [Mc] ; si $\mathbb{N} \models Cons(T_n + \mathcal{A})$, alors $\mathcal{A} \cup \mathcal{T}_n$ possède un modèle M pour lequel la relation de satisfaction est Δ^0_{n+2}; or, M est une extension Π^0_n-élémentaire de $\mathbb{N}$, ce que nous abrègeons $\mathbb{N} \prec_n M$.

Nous reprenons les notations de [Mc] . La fonction " - " qui applique $\mathbb{N}$ dans les termes de $\mathcal{L}$, le langage de l'arithmétique

$$\bar{n} = 0+1 \underbrace{+\ldots+1}_{n \text{ fois}}$$

est une fonction récursive; la fonction définie dans $\mathcal{P}$ qui représente "-" sera notée $y = \tilde{x}$; i.e., "~" dénote la version formalisée dans $\mathcal{P}$ de " - " . Dans [Mon] , voir aussi [L] , [K,L] , on démontre le schéma

I.1. $\quad \mathcal{P} \vdash F \longleftrightarrow Tr_n(\bar{F})$, $\quad$ F une formule close Π^0_n

Fixons une énumération $P_1, P_2, \ldots$ des axiomes de $\mathcal{P}$ et notons $\mathcal{P}^s \equiv \bigwedge_{i \leq s} P_i$. Montague a démontré, en effet, que pour tout n il existe s_n tel que

I.2 $\quad \mathcal{P}^{s_n} \vdash F \longleftrightarrow Tr_n(F)$, F une formule close Π^0_n

et, pour ce faire, il établit le schéma

I.3 $\mathcal{P}^{s_n} \vdash \forall v_1,\dots,v_k\, [F(v_1,\dots,v_k) \leftrightarrow Tr_n(\bar{F}(\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_k))]$,

Finalement, il faut remarquer que s_n est une fonction primitive récursive de n, donc Δ_1^o dans $\mathcal{P}$ et absolue. Moyennant le schéma I.3 on peut voir que l'induction pour les formules Π_n^o , n fixé, est prouvable dans un sous-système fini de $\mathcal{P}$; c'est-à-dire, il existe t_n tel que

I.4 $\mathcal{P}^{t_n} \vdash \forall v_1,\dots,v_k)\ [[F(O,v_1,\dots,v_k)) \wedge \forall x\, F(x,v_1,\dots,v_k) \rightarrow F(x+1,v_1,\dots,v_k))] \rightarrow \forall x\, F(x,v_1,\dots,v_k)]$, F une formule Π_n^o

Pour ce voir, on doit prendre t_n suffisamment grand pour que $t_n \geq s_n$ et pour que dans $\mathcal{P}^{t_n}$ l'on puisse démontrer le théorème

$$\forall\phi[\phi\in \Pi_n^o \wedge \phi = \phi(v) \rightarrow [Tr_n(\phi(\tilde{O})) \wedge \forall x(Tr_n(\phi(\tilde{x})) \rightarrow Tr_n(\phi(x+1)) \rightarrow \forall x\ Tr_n(\phi(x))$$

Les remarques ci-dessus sur le théorème de complètude ont aussi une version formalisable dans $\mathcal{P}$. Notons $\mathcal{L}^*$ le langage de l'arithmétique augmenté par les constantes $c_1, c_2,\dots$ Soit $\mathcal{A}$ une théorie dans $\mathcal{L}$ qui est récursivement axiomatisable, et soit $\mathcal{A}(v)$ une formule Σ_1^o qui définit $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{N}$. La formule close $Cons(T_n+\mathcal{A})$ qui exprime la consistance de $\mathcal{A} \cup \mathcal{T}_n$ est Π_{n+1}^o dans $\mathcal{P}$. Si $R(\phi)$ est une formule à une variable libre, nous écrirons " $R(\phi)$ est une relation de satisfaction" pour abréger

$$\forall\phi\forall\psi[\phi \text{ et } \psi \text{ des formules closes de } \mathcal{L}^* \rightarrow$$
$$[(R(\phi) \leftrightarrow \neg R(\neg\phi)) \wedge (R(\psi) \vee R(\phi) \longleftrightarrow R(\phi \vee \psi))$$
$$\wedge \forall\rho(\exists u\, \rho(u) = \phi \rightarrow (R(\phi) \leftrightarrow \exists i\ R(\rho(c_i)))]]$$

Alors pour chaque $\mathcal{A}(x)$ et pour tout n, il existe une formule $R_n^{\mathcal{A}}(\phi)$ qui est Δ_{n+2}^o dans $\mathcal{P}$ et qui satisfait

I.5 $\mathcal{P} \vdash Cons(T_n+\mathcal{A}) \rightarrow [$"$R_n^{\mathcal{A}}(\phi)$ est une relation de satisfaction"
$\wedge \forall\phi(Tr_n(\phi) \vee \mathcal{A}(\phi) \rightarrow R_n^{\mathcal{A}}(\phi))]$

Aussi d'après les travaux de Montague et de Kreisel-Levy, a-t-on

I.6 $\mathcal{P} \vdash Cons(T_n + \mathcal{P}^t)$ $\quad n,t \in \mathbb{N}$

Il en suit que pour chaque n il existe R_n qui est Δ_{n+2}^o dans $\mathcal{P}$ et r_n tel que

I.7 $\mathcal{P}^{r_n} \vdash$ "$R_n(\phi)$ est une relation de satisfaction" $\wedge \forall\phi\ (Tr_n(\phi) \rightarrow R_n(\phi))$
$\wedge\ \exists i\ \ \forall x(\neg R_n(\tilde{x} = c_i))$

Autrement dit, I.7 exprime l'existence d'une extension Π_n^o-élémentaire et non-standard des entiers. Remarquons aussi qu'il y a une version formalisable dans $\mathcal{P}$ de la réciproque du théorème de complètude - que toute théorie ayant un modèle est consistante :

I.8 $\quad \mathcal{P} \vdash$ "$R(\phi)$ est une relation de satisfaction"
$$\rightarrow \forall\psi(R(\psi) \rightarrow \mathrm{Cons}(\psi))$$

et

I.9 $\quad \mathcal{P} \vdash [$"$R(\phi)$ est une relation de satisfaction"
$$\wedge\ \forall\psi(\mathcal{A}(\psi) \vee Tr_n(\psi) \rightarrow R(\psi))] \rightarrow \mathrm{Cons}(T_n + \mathcal{A})$$

Donnons une application - due à Harrington et à nous-mêmes indépendamment - de cette série de remarques.

I.10 <u>THÉORÈME</u> Soit $Y(x,y)$ l'indicatrice de Paris-Harrington. Alors on a :
$$\mathcal{P} \vdash \forall x\ \forall y\ \exists z\,[Y(x,y) = z] \leftrightarrow \mathrm{Cons}(T_1 + \mathcal{P})$$

<u>DÉMONSTRATION</u> Soit k un entier suffisamment grand; travaillons informellement dans $\mathcal{P}^k + \forall x\, \forall y\, \forall z\, [Y(x,z) \geqslant y]$. Soit M une extension Π^o_3 - élémentaire non-standard des entiers de domaine $c_1, c_2, \ldots$ dont la relation de satisfaction est Δ^o_4 . Notons que M satisfait l'induction pour les formules Σ^o_1. Choisissons dans M des entiers non-standard α, β tels que
$$M \models Y(\alpha,\beta) = 2\alpha$$
(de tels α, β existent parce que le principe de débordement s'applique à M pour les formules Σ^o_1). En appliquant la construction donnée dans l'exposé précédent, nous trouvons de façon Δ^o_2 à partir de M une structure I qui est un segment initial de M telle que la relation de satisfaction dans I se réduit récursivement à la satisfaction des formules Δ^o_o dans M; d'ailleurs I vérifie les axiomes de $\mathcal{P}$ et I vérifie les mêmes formules Π^o_1 que les entiers standard : en effet, M est un modèle de $\mathcal{T}_1$ et I est un segment initial de M. On conclut que I est un modèle de $\mathcal{P} + \mathcal{T}_1$; on a donc $\mathrm{Cons}(T_1 + \mathcal{P})$ par I.9. Quant à la réciproque, on voit que dans la démonstration du théorème I.7. de l'exposé précédent la suite f_b et donc la fonction F sont définies explicitement à partir des paramètres a,b,c. Il existe donc une formule $F(a,b,c,v_1,\ldots,v_n,v)$ telle que
$$\mathcal{P} \vdash \forall a,b,c\ [(\neg\, \exists d([a,d] \underset{*}{\rightarrow} (b)^{\bar{n}}_c)) \rightarrow F : [\mathbb{N}]^n \rightarrow c \quad \forall d (F \restriction [a,d]^n \text{ n'a pas de partie homogène dense de cardinalité } b)] \,.$$
Or, la formule F et cette démonstration dans $\mathcal{P}$ sont calculables de façon primitive récursive en n. Par 2. I.8 on voit que pour tous m,n,k
$$\mathcal{P} \vdash \forall a\ \exists d([a,d] \underset{*}{\rightarrow} (\bar{m})^{\bar{n}}_{\bar{k}})$$
et qu'il existe une fonction primitive récursive qui associe à m,n,k cette démonstration. Alors, dans $\mathcal{P}$ on peut prouver le théorème

$\forall x\, \forall y\, \forall u\, \forall v\ \ \exists w\, \mathrm{Prov}(\mathcal{P}^{w}, \overline{\exists d}([\tilde{x},d] \underset{*}{\to} (\tilde{u})^{\tilde{y}}_{\tilde{v}}))$ où $\mathrm{Prov}(\phi,\psi)$ exprime "$\phi \to_{1} \psi$ est prouvable dans le calcul des prédicats". On a donc

$$\mathcal{P} + \mathrm{Cons}(T_1 + \mathcal{P}) \vdash \forall x,y,u,v\ \mathrm{Cons}(T_1 + \overline{\exists d}([\tilde{x},d] \underset{*}{\to} (\tilde{u})^{\tilde{y}}_{\tilde{v}}))$$

La formule $\exists d[x,d] \underset{*}{\to} (u)^{y}_{v}$ étant Σ^{o}_{1} dans $\mathcal{P}$ on déduit que

$$\mathcal{P} + \mathrm{Cons}(T_1 + \mathcal{P}) \vdash \forall x,y,u,v(\neg \mathrm{Tr}_1 (\overline{\forall d}([\tilde{x},d] \underset{*}{\not\to} (\tilde{u})^{\tilde{y}}_{\tilde{v}}))$$

et par I.3 on conclut que

$$\mathcal{P} + \mathrm{Cons}(T_1 + \mathcal{P}) \vdash \forall x,y,u,v\ \exists d([x,d] \underset{*}{\to} (u)^{y}_{v})$$

II- REMARQUES ET GÉNÉRALISATIONS

Une formule $Cons(T_1 + \mathcal{A})$ qui exprime la non-contradiction de $\mathcal{A} + \mathcal{T}_1$ est élaborée à partir d'une énumération fixée d'axiomes pour $\mathcal{A}$. Le passage de l'énumération des axiomes à la formule de consistance est dévelloppé de façon systématique dans [Fe] : à toute RE-énumération $\alpha(n) = A_n$ d'axiomes pour $\mathcal{A}$ est associée une formule de Gödel $Cons_\alpha(T_1 + \mathcal{A})$; or il y est démontré que les formules ainsi obtenues sont sensibles aux choix de α et ne sont pas toutes équivalentes dans $\mathcal{P} + \mathcal{T}_1$. Dans la section précédente nous avons passé sous silence le fait que pour avoir l'équivalence du théorème I.10 il faut prendre $Cons(T_1 + \mathcal{P})$ à partir d'une énumération $P_1, P_2, \ldots$ dont on peut démontrer dans $\mathcal{P}$ qu'elle liste les axiomes pour $',+,.$ et tous les axiomes d'induction et exactement ceux-ci. Or, de différentes indicatrices pour une théorie peuvent amener à des formules indépendantes inéquivalentes : J. Paris a construit une indicatrice pour $\mathcal{P}$ qui donne une formule indépendante strictement plus forte (relativement à $\mathcal{P}$) que celle de l'exposé précédent et nous en avons construit une qui donne une formule strictement moins forte; en perservérant on peut étendre ces résultats et démontrer que toute formule $Cons_\alpha(T_1 + \mathcal{A})$ où $\mathcal{A}$ est une extension récursivement axiomatisable de $\mathcal{P}$ est équivalente dans $\mathcal{P}$ à une formule associée à une indicatrice pour $\mathcal{A}$. Nous allons donner ici une réciproque quoique partielle qui établit que la formule indépendante associée à une indicatrice pour $\mathcal{A}$ doit toujours entrainer dans $\mathcal{P}$ une formule de Gödel de la forme $Cons_\alpha(T_1 + \mathcal{A})$.

II.1. THÉORÈME Soit $\mathcal{A}$ une extension récursivement axiomatisable de $\mathcal{P}$ et soit $K(x,y) = z$ une indicatrice pour $\mathcal{A}$ par rapport aux modèles d'un sous-système fini $\mathcal{P}^t$ de $\mathcal{P}$. Alors il existe une RE-énumération α d'axiomes pour $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{P} \vdash \forall x\, \forall z\, \exists y (K(x,y) \geq z) \to Cons_\alpha(T_1 + \mathcal{A})$.

DÉMONSTRATION Soit $A_1, A_2, \ldots$ une **énumération** primitive récursive d'axiomes pour $\mathcal{A}$; notons $\mathcal{A}^s \equiv \bigwedge_{i \leq s} A_i$. Posons $\pi \equiv \forall x\, \forall z\, \exists y\, K(x,y) \geq z$.
Dans la section II du premier exposé, il a été prouvé qu'il existe, uniformément en s, des indicatrices $Y_{\mathcal{A}^s}(x,y) \equiv Y(s,x,y)$ pour $\mathcal{A}^s$ par rapport aux modèles M d'un sous-système fini $P_1 \wedge \ldots \wedge P_{t'}$ de $\mathcal{P}$. D'ailleurs, par la méthode de preuve de l'implication $\to$ du théorème I.10, pour t'' suffisamment grand on a

$$P_1 \wedge \ldots \wedge P_{t''} \vdash \forall s\, [\forall x\, \forall z\, \exists y\, Y(s,x,y) \geq z \to Cons(T_1 + \mathcal{A}^s)]$$

Parce que $\mathcal{A} \vdash Cons(T_1 + \mathcal{A}^m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\mathcal{A} \vdash \forall x\, \forall z\, \exists y\, Y(\bar{m},x,y) \geq z$$

On définit l'énumération α en stipulant que α énumère les axiomes $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$ tant que

$P_1 \wedge \ldots \wedge P_{t''} \wedge \pi \vdash \forall x\, \forall z\, \exists y\; Y(\bar{m},x,y) \geq z.$

Vérifions que α énumére bien les axiomes $A_1, A_2, \ldots$ de $\mathfrak{A}$. Supposons au contraire qu'il existe m_o tel que $P_1 \wedge \ldots \wedge P_{t''} \wedge \pi \wedge \exists x\, \exists z\, \forall y\; Y(\bar{m}_o,x,y) \leq z$ ait un modèle M que l'on suppose non-standard. Soient a,b,c des entiers infinis de M tels que

$$M \models \forall y\; Y(m_o,a,y) \leq b \wedge K(b,c) \geqslant a$$

Soit I un segment initial de M satisfaisant $b < I < c$, $I \models \mathfrak{A}$. Alors $I \models \exists y\; Y(m_o,a,y) > b$ et donc il existe $b' < b$ tel que $I \models Y(m_o,a,b') > b$ ce qui contredit le fait que $Y(m_o,x,y)$ est une fonction Δ_1^o dans $P_1 \wedge \ldots \wedge P_{t'}$. Pour finir, en utilisant les définitions de satisfaction $Tr_n(\phi)$ appliquées à $P_1 \wedge \ldots \wedge P_{t''} \wedge \pi$, on a que

$$\mathcal{P} \vdash \pi \rightarrow \forall s(\alpha(s) \text{ défini} \rightarrow \forall x\, \forall z\, \exists y\; Y(s,x,y) \geq z)$$

et donc $\mathcal{P} \vdash \pi \rightarrow Cons_\alpha(T_1 + \mathfrak{A})$ C.Q.F.D.

Pour finir nous donnons au moyen de la méthode des indicatrices une version du théorème de Rosser. A la différence du résultat d'incomplètude noté au début du §I, le résultat suivant fournit une formule indépendante de $\mathcal{A}$ sans l'hypothèse que $\mathcal{A} + \mathcal{T}_2$ soit consistant.

II.2. <u>THÉORÈME</u> Soit $\mathcal{A}$ une extension récursivement énumérable de $\mathcal{P}$. Alors il existe une formule close Π_2^0 indépendante de $\mathcal{A}$.

<u>DÉMONSTRATION</u> Nous utilisons d'abord une astuce de H. Lessan : l'ensemble $\mathcal{T}_1$ des formules closes Π_1^0 satisfaites dans $\mathbb{N}$ n'étant pas récursif, par un argument d'omission de types, on voit qu'il existe un modèle dénombrable non-standard M de $\mathcal{A}$ tel que pour tout $X \subseteq M$, X définissable dans M entraine $X \cap \mathbb{N} \neq \mathcal{T}_1$. Par conséquence, on a que pour tout $\beta \in M-\mathbb{N}$, il existe une formule $\psi(x)$ de type Δ_0^0, telle que $\mathbb{N} \models \forall x \neg \psi(x)$ et $M \models \exists x(x\leq \beta \wedge \psi(x))$. Ensuite en reprenant la notation du théorème précédent, nous avons pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} \vdash \forall x \forall z \exists y\ Y(m,x,y) \geq z$. Par débordement il y a $\beta \in M-\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{A} \vdash \forall x \forall z \exists y\ Y(\beta,x,y) \geq z$ et tel que $M \models \psi(\beta) \wedge \forall x<\beta \neg \psi(x)$, pour une $\psi \in \Delta_0^0$; autrement dit $M \models \forall \beta [\psi(\beta) \wedge \forall x < \beta \neg\psi(x) \rightarrow \forall x \forall z \exists y\ Y(\beta,x,y) \geq z]$.
Soit $M' \succ_f M$ une extension finale élémentaire dénombrable de M.
Parce que $\beta > \mathbb{N}$, il est clair que si $M' \models Y(\beta,a,b) = c$ avec $c > \mathbb{N}$, alors il existe $a < I < b$ tel que $I \models \mathcal{A}$. En reprenant l'argument du lemme 1.IV.5, on trouve qu'il existe I, $M < I < M'$ tel que $I \models \mathcal{A}$ et $I \models \exists x \exists z \forall y\ Y(\beta,x,y) \leq z$; autrement dit, $I \models \exists\beta [\psi(\beta) \wedge \forall x < \beta \neg\psi(\beta) \wedge \exists x \exists z \forall y\ Y(\beta,x,y) \leq z]$. C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[Fe] S. Feferman, Arithmetization of metamathematies in a general sitting, F.M. 49

[K,L] G. Kreisel et A. Levy, Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems, Z. Math. Logik Grundlagen Math., 14.

[Mc] K. Mc Aloon Completeness theorems, incompleteness theorems and models of arithmetic, TAMS, 239.

[Mon] R. Montague, semantical closure and non-finite axiomatizability, Infinitistic Methods, Pergamon, Oxford, PWN, Warsaw 1961, pp. 45-69.

KENNETH MCALOON

Progressions transfinies de théories axiomatiques, formes combinatoires du théorème d'incomplétude et fonctions récursives à croissance rapide

Astérisque, tome 73 (1980), p. 41-58
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__73__41_0>

EXPOSÉ 4

PROGRESSIONS TRANSFINIES DE THÉORIES AXIOMATIQUES, FORMES COMBINATOIRES DU THÉORÈME D'INCOMPLÉTUDE ET FONCTIONS RÉCURSIVES A CROISSANCE RAPIDE

Kenneth Mc Aloon

I - LE CAS INITIAL

Ici nous nous adressons au problème de trouver des théories axiomatiques autres que $\mathcal{P}$ qui admettent des indicatrices combinatoires. Exploitant le lien établi dans l'exposé précédent entre la méthode des indicatrices et la méthode de Gödel, nous définissons une hiérarchie transfinie de théories qui sont axiomatisées à la fois par des schémas affirmant des principes combinatoires et par des schémas affirmant des principes métamathématiques; ces théories admettront à leur tour des indicatrices combinatoires.

Dans ce paragraphe nous traitons du cas initial et dans le paragraphe suivant nous considérons l'itération dans le transfini. Nous terminerons avec quelques remarques sur une autre progression transfinie ayant des propriétés analogues et sur des questions annexes.

Considérons la théorie $\mathcal{P}^+$ qui est obtenue en ajoutant à $\mathcal{P}$ le schéma de <u>reflection uniforme</u>, c'est-à-dire, le schéma $\mathrm{Cons}(T_n + \mathcal{P})$, $n \in \mathbb{N}$. Nous allons voir ci-dessous que cette théorie admet une axiomatisation "combinatoire". Soit $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction totale; on définit une relation $[a,b] \underset{*}{\overset{F}{\to}} (m)^n_k$ en analogie avec $\underset{*}{\to}$:

$[a,b] \underset{*}{\overset{F}{\to}} (m)^n_k \leftrightarrow$ pour toute partition $P : [a,b]^n \to k$ il existe une partie homogène H telle que $|H| \geq m$ et $|H| \geq F(\min H)$.

Soit $\mathcal{P}^*$ la théorie obtenue en ajoutant à $\mathcal{P}$ le schéma qui exprime que pour chaque fonction définissable $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pour tous m,n,k,s il existe l tel que $[m,l] \underset{*}{\overset{F}{\to}} (k)^n_s$:

$$\forall u_1 \dots \forall u_n \ [\forall x \, \exists! y \, F(x,y,u_1,\dots,x_k) \to \forall x \, \forall y \, \forall u \, \forall v \, \forall z \, ([x,z] \underset{*}{\overset{F}{\to}} (u)^y_v)] ,$$

nous avons le

I.1. <u>THÉORÈME</u> Les systèmes d'axiomes $\mathcal{P}^+$ et $\mathcal{P}^*$ axiomatisent la même théorie.

<u>DÉMONSTRATION</u> Fixons $n \geq 1$ et vérifions que $\mathrm{Cons}(T_n + \mathcal{P})$ est un théorème de $\mathcal{P}^*$. Soit k un entier suffisamment grand tel que dans $\mathcal{P}^k$ on peut prouver 3.I.3 pour $\mathrm{Tr}_{n+2}(\phi)$, donc $k \geq s_{n+2}$, et tel que l'on peut aussi y prouver l'induction

pour les formules Σ^o_{n+2}, donc $k \geq t_{n+2}$. Alors dans $\mathcal{P}^k$ on peut définir une fonction de Skolem $F(x) = y$ qui est Δ^o_{n+1} et qui jouit de la propriété suivante

I.2. $I < M \models \mathcal{P}^k$, I clos pour $F^M_s \Rightarrow \forall \phi \in I(I \models Tr_n(\phi) \Leftrightarrow M \models Tr_n(\phi))$.

En particulier, si $I \models \mathcal{P}$ (même $\mathcal{P}^n$), et si $I < M \models \mathcal{P}_k$ et I est clos pour F^M, alors $I \prec_n M$. Soit $m \geq k$ tel que $\mathcal{P}^k$ soit (en forme prénexe) de type π^o_m. Travaillons informellement dans $\mathcal{P}^*$. Soit M_o une extension non-standard π^o_m-élémentaire des entiers de domaine $c_1, c_2, \ldots$ dont la relation de satisfaction est Δ^o_{m+2}. Posons $\bar{F}(x) = \sup_{y \leq x} F(y) + x+1$; la fonction $\bar{F}$ est Δ^o_{n+1} dans $\mathcal{P}^k$ et $M_o \models \mathcal{P}^k$. Alors M_o satisfait l'induction pour les formules Σ^o_{n+1} et, donc par le principe de débordement, il existe α, β, γ non-standard tels que $2\gamma < \alpha$ et $M_o \models [\alpha,\beta] \overset{\bar{F}}{\underset{*}{\rightarrow}} (2\gamma)^\gamma_\gamma$. Définissons dans M_o une partition $P : [\alpha,\beta]^\gamma \rightarrow \gamma$ comme dans la démonstration du Théorème de Paris-Harrington page 24, en remplaçant le prédicat S par Tr_{n+2} et Δ^o_o par Σ^o_{n+2}; on trouve alors un ensemble $\bar{H} = \{e_1, \ldots, e_\ell\}$ tel que $M_o \models 2\gamma < e_1 \wedge \bar{F}(e_1) \leq e_\ell$ et tel que, par I.3, les éléments de l'ensemble tronqué $H = \{e_1, \ldots, e_{\ell-\gamma}\}$ sont indiscernables pour les formules Σ^o_{n+2}. On a évidemment $M_o \models \sup_{x \leq e_1} F(x) \leq e_{\ell-\gamma}$; donc par l'indiscernabilité, $M_o \models \sup_{x \leq e_1} F(x) \leq e_{i+1}$ pour $i < \ell-\gamma$. Soit $a \in I \Leftrightarrow a < e_s$ un $s \in \mathbb{N}$.
Parce que $\Delta^o_o \subseteq \Sigma^o_{n+2}$, on a en reprenant la démonstration du Théorème de Paris-Paris-Harrington que $I \models \mathcal{P}$ et de plus parce que I est clos pour F^{M_o}, on a $I \prec_n M_o$; or $\mathbb{N} \prec_n M_o$ et donc $\mathbb{N} \prec_n I$. Alors I est un modèle de $\mathcal{P} + \mathcal{T}_n$, ce qui prouve que l'on a $Cons(T_n + \mathcal{P})$.

Quant à la réciproque, l'analyse de la preuve de la forme infinie du théorème de Ramsey fournit l'information suivante : soit $\mathring{f}$ un nouveau symbole de fonction et soit $\mathcal{P}(\mathring{f})$ l'extension de $\mathcal{P}$ obtenue en ajoutant le schéma d'induction pour les formules en $\mathring{f}$. Alors il y a une fonction primitive récursive qui associe à chaque n,l,k une démonstration dans le système $\mathcal{P}(\mathring{f})$ de l'énoncé $\exists y(y \overset{f}{\underset{*}{\rightarrow}} (\bar{l})^{\bar{n}}_{\bar{k}})$. Pour chaque formule arithmétique $F(u_1,u_2,\bar{s}_1,\ldots,\bar{s}_t)$ qui est de type $\forall_m$ en forme prénexe, il existe pour chaque n,ℓ,k une démonstration dans $\mathcal{P}$ de l'énoncé $\forall u_1 \exists ! u_2 F(u,v,\bar{s}_1,\ldots,\bar{s}_t) \underset{*}{\rightarrow} \exists y(y \overset{F}{\underset{*}{\rightarrow}} (\bar{\ell})^{\bar{n}}_{\bar{k}})$ et l'application qui va de n,l,k à cette preuve est de nouveau primitive récursive. Alors dans $\mathcal{P}$ on peut prouver

$$\forall x_1 \ldots \forall x_t \ \forall u \ \forall v \ \forall w \ \exists x \quad Prov(\mathcal{P}^x \wedge \forall u_1 \exists ! u_2 \, F(u_1,u_2,\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_t), \ \bar{\exists} z(z \overset{F}{\underset{*}{\rightarrow}} (\tilde{u})^{\tilde{v}}_{\hat{w}})).$$

On a donc

$$\mathcal{P} + Cons(T_{m+1} + \mathcal{P}) \vdash \forall x_1 \ldots x \ [\forall u_1 \exists ! u_2 \, F(u_1,u_2,x_1,\ldots,x) \rightarrow$$
$$\forall u,v,w \, \exists z(z \overset{F}{\underset{*}{\rightarrow}} (u)^v_w)]$$

C.Q.F.D.

Nous donnons maintenant la définition d'une fonction qui sera une indicatrice pour la théorie $\mathcal{P}^+$; cette fonction se définit au moyen d'une notion combinatoire qui correspond à une "itération" de "$\underset{*}{\rightarrow}$".

Nous écrivons $X \underset{**}{\rightarrow} (m)^n_k$ pour signifier que pour toute partition $P : [X]^n \rightarrow k$

il existe une partie homogène H telle que $H \underset{*}{\to} (2\min^2 H)^{\min^2 H}_{\min^2 H}$ où $\min^2 H$ dénote le min $H^{\text{ième}}$ élément de H.

Posons $Y_1(a,b) = c$ ssi c est le plus grand entier tel que $[a,b] \underset{**}{\to} (2c)^c_c$. Il est clair que Y_1 est une fonction qui est Δ^0_1 dans $\mathcal{P}$. Nous allons démontrer que Y_1 est une indicatrice pour $\mathcal{P}^+$. Or dans la suite, nous allons poursuivre cette itération de $\underset{*}{\to}$ jusque dans le transfini en rapport avec une suite croissante d'extensions de $\mathcal{P}$; avant d'introduire toute la machinerie nécessaire pour l'itération transfinie, donnons tout de suite le résultat suivant :

I.3. <u>THÉORÈME</u> La fonction Y_1 est une indicatrice pour $\mathcal{P}^+$; et on a

(i) quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}^+ \vdash \forall x \forall y (Y_1(x,z) \geq n)$;
(ii) $\mathcal{P}^+ + \mathcal{T}_1 \not\vdash \forall x \forall y \exists z (Y_1(x,z) \geq y)$
(iii) $\mathcal{P} \vdash \forall x \forall y \exists z (Y_1(x,z) \geq y) \longleftrightarrow \mathrm{Cons}(T_1 + \mathcal{P}^+)$

<u>DÉMONSTRATION</u> Remarquons tout d'abord que l'on peut axiomatiser $\mathcal{P}^+$ en ajoutant à $\mathcal{P}$ le schéma $\forall v_1,\dots,v_k [\exists^\infty x\, E(x,v_1,\dots,v_k) \to (\forall u,v,w\, \exists X(X$ est un ensemble fini $\wedge \forall x(x \in X \to E(x,v_1,\dots,v_k)) \wedge X \underset{*}{\to} (u)^v_w)]$, E une formule. Ce schéma exprime que chaque ensemble infini d'entiers contient, quels que soient m,n,k, une partie finie X qui satisfait $X \underset{*}{\to} (m)^n_k$. Pour voir que ce schéma est équivalent au schéma qui définit $\mathcal{P}^+$, on utilise les arguments informels suivants : si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction (que l'on peut supposer croissante), on y associe un ensemble infini $A = \{f(0), f(f(0)),\dots,f^{(n)}(0),\dots\}$; étant donnés m,n,k, si $X \subseteq A$ et $X \underset{*}{\to} (m)^n_k$, alors $f^{-1}(X) \overset{f}{\underset{*}{\to}} (m)^n_k$; inversement, si $A \subseteq \mathbb{N}$ est infini, soit f la fonction qui énumère A; si $\ell \overset{f}{\underset{*}{\to}} (m)^n_k$, alors $X = \{f(0),\dots,f(\ell)\} \subseteq A$ et $X \underset{*}{\to} (m)^n_k$. On voit maintenant facilement que pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}^+ \vdash \forall x \exists z (Y_1(x,z) \geq \bar{n})$, en reprenant la démonstration de 2.I.7.

Soit donc M un modèle dénombrable de $\mathcal{P}$ et soient $a,b,c \in M$ tels que $M \models [a,b] \underset{**}{\to} (c+1)^c_c$ où $c > \mathbb{N}$. Parce que $c > \mathbb{N}$, on a $1+2\sqrt{c} \geq 3(c-1)$, et par la Proposition 2.II.1, on a $M \models [a,b] \underset{**}{\to} (2c)^{c-1}_{3(c-1)}$. Soit $\phi_0, \phi_1,\dots$ une énumération récursive des formules Σ^0_2 du langage de l'arithmétique; soit $\delta \in M$ tel que $\delta > \mathbb{N}$ et $M \models \delta < \log_2(c-1)$. On définit dans M, utilisant le prédicat $Tr_2(\phi)$, une fonction $f(i, <x_1,\dots,x_{c-1}>) : \delta \times [a,b]^{c-1} \to \{0,1\}$ par

$$f(i, < x_1,\dots,x_{c-1} >) = \begin{cases} 0 & \text{si } Tr_2(\phi_i(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_{c'})) \\ 1 & \text{si } \neg Tr_2(\phi_i(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_{c'})) \end{cases}$$

Rappelons que pour $i < \mathbb{N}$ et $\phi_i = \phi_i(v_1,\dots,v_n)$,

$$M \models f(i,<\alpha_1,\dots,\alpha_{c-1}>) = 0 \Longleftrightarrow M \models \phi_i(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$

Soit $g \in M$ une injection de 2^δ dans $c-1$; définissons une partition

$P : [a,b]^{c-1} \to 3(c-1)-a$ par

$$P(\alpha_1,\ldots,\alpha_{c-1}) = \begin{cases} 2(c-1)+g(<f(0,<\alpha_1,\ldots,\alpha_{c'}>),\ldots,f(\delta,<\alpha_1,\ldots,\alpha_{c'}>) \\ \qquad \text{si } \alpha_1 > 2(c-1) \\ \alpha_1 \qquad \text{si } \alpha_1 \leq 2(c-1) \end{cases}$$

Soit $\bar{H} \in M$ un ensemble homogène pour P tel que $M \models \bar{H} \underset{*}{\to} (\min^2 H+1)^{\min^2 H}_{\min^2 H}$. Alors, en posant $\bar{H} = \{e_1,\ldots,e_{\bar{\ell}}\}$ et $\ell = \bar{\ell} - (c-1)$, nous avons (i) $e_1 > 2(c-1)$ et (ii) les éléments de $H = \{e_1,\ldots,e_\ell\}$ sont indiscernables dans M pour les formules Σ^o_2. Notons par $\Delta^o_o(\Sigma^o_1)$ l'ensemble des formules engendrées à partir des formules Σ^o_1 par des quantifications bornées et des combinaisons booléennes. En appliquant l'induction Σ^o_1 l'on vérifie que dans $\mathcal{P}$ toute formule $\Delta^o_o(\Sigma^o_1)$ est équivalente à une formule Σ^o_2. Alors en reprenant la démonstration de 2.I.7, on voit que les éléments de $H - \{e_1,\ldots,e_m\}$ sont indiscernables par rapport aux formules $\Delta^o_o(\Sigma^o_1)$ à paramètres $\leq e_m$. De nouveau soit $I = \{x \in M : x \leq e_m$ pour un $m \in \mathbb{N}\}$. De nouveau, on a le lemme de vérité, 2.I.14, donc $I \models \mathcal{P}$. Nous disons que $I \models \mathcal{P}^{(*)}$. Afin de ce vérifier, soients $a_1,\ldots,a_m \leq e_r$, $r \in \mathbb{N}$, et soit $\Phi(v,a_1,\ldots,a_m) \equiv Q^1x_1\ldots Q^nx_n\, \Psi(v,x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)$ une formule en forme prénexe qui définit une partie non-bornée de I. Donc pour tout $p > r$, on a

$$I \models \exists v > e_p\ \Phi(v,a_1,\ldots,a_m)$$

Autrement dit, pour $p > r$

$$I \models \exists v\, Q^1x_1\ldots Q^nx_n\, [v > e_p \wedge \Psi(v,x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)]$$

Par le lemme de vérité, 2.I.14,

II.5 $\quad M \models \exists v < e_{\ell-n}\, Q^1x_1 < e_{\ell-(n-1)}\ldots Q^nx_n < e_\ell\ [v > e_p \wedge \Psi(v,x_1,\ldots x_n,a_1,\ldots a_m)]$

D'où quel que soit μ, $r < \mu < \ell-n$,

II.6 $\quad M \models \exists v < e_{\ell-1}\, Q^1x_1 < _{\ell-(n-1)}\ldots Q^nx_n < e_\ell\ [e_\mu < v < e_{\mu+1} \wedge \Psi(v,x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m]$

Pour $s = \{e_{s_1},\ldots,e_{s_{n+1}}\}$ une suite croissante extraite de H telle que $e_{r+1} < e_{s_1}$, posons

$$B(s) = \{v : M \models e_{r+1} < v < e_{s_1} \wedge Q^1x_1 < e_{s_2}\ldots Q^nx_n < e_{s_{n+1}}\ \Psi(v,x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)\}$$

Par l'indicernabilité des éléments de H, nous avons quelque soit γ, $r+1 \leq \gamma \leq \ell-(n+2)$,

$$M \models \exists v < e_{\gamma+1}(e_\gamma < v < e_{\gamma+1} \wedge Q^1x_1 < e_{\ell-n}\ldots Q^nx_n < e_{\ell-1}\ \Psi(v,x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m))$$

Autrement dit, $B(e_{r+2},e_{\ell-n},\ldots,e_{\ell-1}) \cap (e_\gamma,e_{\gamma+1}) \neq \emptyset$. Clairement, on a

$$M \models \bar{\bar{H}} \underset{*}{\to} (2e_{\ell_1})^{e^{e_1}}_{e_{e_1}-(r+n+2)-c} \quad \text{où } \bar{\bar{H}} = H - \{e_1,\ldots,e_{r+2},e_{\ell-(n+1)},\ldots,e_\ell\}.$$ La situation est alors que $\bar{\bar{H}} = \{e_{r+3},\ldots,e_{\ell-(n+2)}\}$ et $B(r+2,e_{\ell-n},\ldots,e_{\ell-1}) = \{b_1,\ldots,b_\mu\}$

sont tels que $b_1 < e_{r+3}$ et pour tout i, $r+3 \leq i < \ell-n-2$, il existe λ tel que $e_i < b_\lambda < e_{i+1}$. Il est alors facile de vérifier que

II.7 $\quad M \models B(e_{r+2}, e_{\ell-(n-1)}, \ldots, e_\ell) \ \underset{*}{\to} \ (2e_{e_1})^{e^{e_1}}_{e_{e_1}-\delta}$ où $\delta < e_1$.

Rappelons que la relation $X \underset{*}{\to} (u)^v_w$ est Δ^o_1 dans $\mathcal{P}$. Rappelons aussi qu'il existe une relation $E(x,X)$ qui est Δ^o_o dans $\mathcal{P}$ et qui exprime que "X code un ensemble fini $\wedge\ x \in X$" : à cause du Lemme Chinois, on peut prendre

$$E(x,X) \equiv \exists u,y,z \leq X(X = (u+(y+z)^2+y)^2 + u \wedge \exists i \leq u \ \exists g \leq y(y = ((i+1).z+1).g+x)).$$

Parce que $I \models \mathcal{P}$ et parce que les éléments de H ont cette propriété d'indiscernabilité, il est aisé de voir que pour tous $e_{r+1} < e_{s_1} < \ldots < e_{s_{n+1}} < e_\mu \leq e_\ell$

II.8 $\quad M \models \exists X < e_\mu \ \forall x < e_\mu \ [E(x,X) \leftrightarrow x \in B(s)]$

Donc

$$M \models \forall X < e_\ell \ [X = B(e_{r+2}, e_{\ell-n}, \ldots, e_{\ell-1}) \to (X \underset{*}{\to} (2e_{e_1})^{e^{e_1}}_{e_{e_1}-\delta})]$$

et, pour tous $e_{r+2} < e_t < e_{s_1} < \ldots < e_{s_n} < e_m$, $m \in \mathbb{N}$,

$$M \models \forall X < e_m \ [X = B(e_{r+2}, e_{s_1}, \ldots, e_{s_n}) \to (X \underset{*}{\to} (2e_t)^{e^{t}}_{e_t-\delta})]$$

Autrement dit,

$$I \models \forall X \ [X = \{v < e_{s_1} \ : \ \Phi(v,a_1,\ldots,a_m)\} \to (X \underset{*}{\to} (2e_t)^{e^{t}}_{e_t-\delta})]$$

et pour tout s, $r+1 < s < \mathbb{N}$,

$$I \models \exists X(\forall v(v \in X \to \Phi(v,a_1,\ldots,a_m)) \wedge X \underset{*}{\to} (2e_s)^{e^{s}}_{e_s-\delta})$$

Or $\delta < e_1$; **par** la propositio n 2.II.1, on obtient le résultat parce que e_s et $e_s - \delta$ sont cofinaux dans I. C.Q.F.D.

II - L'ITÉRATION TRANSFINIE

Il nous faut tout d'abord de la notation et quelques définitions au sujet des ordinaux transfinis. On dit qu'un ordinal α est <u>stable</u> pour l'exponentiation si $\beta^\gamma < \alpha$ quels que soient $\beta, \gamma < \alpha$. On note ε_o le premier ordinal $\alpha > \omega$ qui est stable pour l'exponentiation, et, plus généralement, on note ε_β le $\beta^{\text{ième}}$ ordinal $> \omega$ qui est stable pour l'exponentiation. On notera aussi $0 = \varepsilon_{-2}$ et $\omega = \varepsilon_{-1}$. On voit facilement que

$$\varepsilon_o = \lim_n \omega_n \quad \text{où} \quad \omega_o = \omega \text{ et } \omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}$$

$$\varepsilon_{\beta+1} = \lim_n (\varepsilon_\beta)_n \text{ où } (\varepsilon_\beta)_o = \varepsilon_\beta \text{ et } (\varepsilon_\beta)_{n+1} = \varepsilon_\beta^{(\varepsilon_\beta)_n}$$

et pour λ limite,

$$\varepsilon_\lambda = \lim_{\alpha < \lambda} \varepsilon_\alpha$$

La suite des ε_β est donc une suite strictement croissante et continue; soit alors η_o le plus petit ordinal α tel que $\varepsilon_\alpha = \alpha$. On voit que

$$\eta_o = \lim_n (\eta_o)_n \quad \text{où} \quad (\eta_o)_o = 0 \ , \ (\eta_o)_{n+1} = \varepsilon_{(\eta_o)_n}$$

Rappelons le

II.1. THÉORÈME (Forme Normale de Cantor). Soit $\alpha \geq 2$. Alors tout ordinal $\beta \neq 0$ s'écrit de façon unique

$$\beta = \alpha^{\gamma_1} \delta_1 + \ldots + \alpha^{\gamma_n} . \delta_n \quad \text{où } \gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_n \quad \text{et} \quad 0 < \delta_1 < \alpha, \ldots, 0 < \delta_n < \alpha$$

A l'aide de la Forme Normale de Cantor, nous allons associer à tout ordinal limite $\lambda < \eta_o$ une suite dite <u>fondamentale</u> $\lambda(n)$ telle que $\lambda = \lim_n \lambda(n)$. Pour les ordinaux successeur $\beta = \alpha+1$, on pose $\beta(m) = \alpha$ pour tout $m \in \mathbb{N}$; nous posons aussi $\omega(m) = m$. Pour α un ordinal limite, $\omega < \alpha < \eta_o$, remarquons qu'il existe $\mu < \alpha$ tel que $\varepsilon_\mu \leq \alpha < \varepsilon_{\mu+1}$ et $\alpha < \mu$. Nous définissons la suite $\alpha(n)$ par récurrence sur α en distinguant trois cas

(1) $\alpha = \varepsilon_\lambda$, λ limite. Alors $\lambda < \alpha$ et nous posons $\alpha(n) = \varepsilon_{\lambda(n)}$

(2) $\alpha = \varepsilon_{\beta+1}$. Alors nous posons $\alpha(0) = \varepsilon_\beta$ et $\alpha(n+1) = \varepsilon_\beta^{\alpha(n)} = (\varepsilon_\beta)_{n+1}$

(3) $\varepsilon_\mu < \alpha < \varepsilon_{\mu+1}$, $\mu < \alpha$. Soit $\alpha = \varepsilon_\mu^{\gamma_1} . \delta_1 + \ldots + \varepsilon_\mu^{\gamma_m} . \delta_m$ la forme normale de α à la base ε_μ . Nous distinguons quatre sous-cas :

(a) $\gamma_m = 0$; alors posons $\alpha(n) = \varepsilon_\mu^{\gamma_1} . \delta_1 + \ldots + \varepsilon_\mu^{\gamma_{m+1}} . \delta_{m+1} + \delta_m(n)$

(b) $\gamma_m = \xi+1$, $\delta_m = \beta+1$; alors posons $\alpha(n) = \varepsilon_\mu^{\gamma_1} . \delta_1 + \ldots + \varepsilon_\mu^{\gamma_m} . \beta + \varepsilon_\mu^{\xi} . \varepsilon_\mu(n)$

(c) $\gamma_m \neq 0$, δ_m limite; alors posons $\alpha(n) = \varepsilon_\mu^{\gamma_1} . \delta_1 + \ldots + \varepsilon_\mu^{\gamma_{m-1}} . \delta_{m-1} + \varepsilon_\mu^{\gamma_m} . \delta_m(n)$

(d) γ_m limite, $\delta_m = \beta+1$; alors posons $\alpha(n) = \varepsilon_\mu^{\gamma_1}.\delta_1 + \ldots + \varepsilon_\mu^{\gamma_m}.\beta + \varepsilon_\mu^{\gamma_m(n)}$

II.2. <u>REMARQUE</u>. Dans le cas (3), la suite fondamentale est déterminée par le dernier terme $\varepsilon_\mu^{\gamma_m}.\delta_m$ de la forme normale de α à la base ε_μ ; plus précisément, si $\sigma = \varepsilon_\mu^{\gamma_1}\delta_1 + \ldots + \varepsilon_\mu^{\gamma_{m-1}}\delta_{m-1}$ et $\rho = \varepsilon_\mu^{\gamma_m}.\delta_m$ on a $\alpha(n) = \sigma + \rho(n)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Nous définissons ensuite par récurrence sur α la relation $X \underset{\alpha}{\rightarrow} (m)^n_k$ où X est un ensemble fini d'entiers, $\alpha < \eta_0$ et m,n,k sont des entiers :

$$X \underset{0}{\rightarrow} (m)^n_k \leftrightarrow X \underset{*}{\rightarrow} (m)^n_k$$

et pour $\alpha > 0$,

$X \underset{\alpha}{\rightarrow} (m)^n_k \leftrightarrow$ pour toute partition $P : [X]^n \rightarrow k$ il existe une partie homogène H telle que $|H| \geq m$ et

$$H \underset{\alpha(n)}{\rightarrow} (2\min^2 H)^{\min^2 H}_{\min^2 H}$$

où, de nouveau, $\min^2 H$ dénote le $\min H^{\text{ième}}$ élément de H.

Aussi, étant donné une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, nous définissons la relation $X \overset{f}{\underset{\alpha}{\rightarrow}} (m)^n_k$ ainsi

$$X \overset{f}{\underset{0}{\rightarrow}} (m)^n_k \leftrightarrow X \overset{f}{\underset{*}{\rightarrow}} (m)^n_k$$

et pour $\alpha > 0$,

$X \overset{f}{\underset{\alpha}{\rightarrow}} (m)^n_k \leftrightarrow$ pour toute partition $P : [X]^n \rightarrow k$ il existe une partie homogène $H \subseteq X$ telle que $|H| \geq m$ et

$$H \underset{\alpha(n)}{\longrightarrow} (2\min^2 H)^{\min^2 H}_{\min^2 H} \text{ et } f(\min H) \geq |H|$$

II.3. <u>REMARQUE</u>. Il est clair que $X \subseteq Y$ et $X \overset{f}{\underset{\alpha}{\rightarrow}} (m)^n_k$ entrainent $Y \overset{f}{\underset{\alpha}{\rightarrow}} (m)^n_k$.

II.4. <u>REMARQUE</u> Par un argument tout à fait analogue à celui donné dans la preuve de 2.I.7, on démontre par récurrence sur α que pour tout ensemble infini d'entiers A et tous m,n,k il existe $X \subseteq A$ satisfaisant $X \overset{f}{\underset{\alpha}{\rightarrow}} (m)^n_k$, X fini.

Les ordinaux $\alpha < \eta_0$ sont "relativement simples" et peuvent être décrits en termes arithmétiques; dans le chapitre 9 de [S] , par exemple, il est donné un système de notations pour ces ordinaux; ainsi pour tout ordinal $\mu < \eta_0$, il existe un ordre récursif $<_{\varepsilon_\mu}$ qui est Δ^0_1 dans $\mathcal{P}$ et qui, sur $\mathbb{N}$, définit un ordre isomorphe à ε_μ . On définit aussi de façon Δ^0_1 dans $\mathcal{P}$ les opérations de successeur, addition, multiplication et exponentiation sur les éléments α de cet ordre et de même pour la fonction $(\alpha,n) \rightarrow \alpha(n)$.

Le schéma suivant s'abrège **TI**(ε_μ) :

$$\forall v_1,\ldots,\forall v_k [\forall x[\forall y \underset{\varepsilon_\mu}{<} x(E(y,v_1,\ldots,v_k) \to E(x,v_1,\ldots,v_k))] \to \forall x\, E(x,v_1,\ldots,v_k)]] \quad ,$$

Nous énonçons une proposition dont la démonstration est laissée au lecteur.

II.5. PROPOSITION Soit $-2 \le \mu < \eta_o$. Alors

(i) la relation $\alpha < \varepsilon_\mu \wedge X \underset{\alpha}{\to} (m)^n_k$ est Δ^o_1 dans $\mathcal{P}$ + TI (ε_μ);

(ii) la relation $\alpha < \varepsilon_\mu \wedge X \underset{\alpha(s)}{\to} (m)^n_k$ est aussi Δ^o_1 dans $\mathcal{P}$ + TI (ε_μ).

(iii) la relation $\alpha < \varepsilon_\mu \wedge X \underset{\alpha}{\overset{f}{\to}} (m)^n_k$ est $\Delta^o_1(\dot{f})$ dans $\mathcal{P}(\dot{f})$ + TI $(\dot{f})$ (ε_μ)

Nous considérons deux progressions de théories axiomatiques $Q^{(\alpha)}$, $\mathcal{P}^{(\alpha)}$, $\alpha < \eta_o$:

$$\mathcal{P}^{(o)} = Q^{(o)} = \mathcal{P}$$

$$\mathcal{P}^{(\alpha+1)} = \mathcal{P}^{(\alpha)} + \text{le schéma suivant}$$

$\forall v_1,\ldots,\forall v_k [\forall x\, \exists ! y\, F(x,y,v_1,\ldots,v_k) \to \forall u,v,w\, \exists \ell\, [\ell \underset{\alpha}{\overset{F}{\to}} (u)^v_w]]$ F une formule

$$Q^{(\alpha+1)} = Q^{(\alpha)} + \text{le schéma } \mathrm{Cons}(T_n + Q^{(\alpha)}),\ n \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{P}^{(\lambda)} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{P}^{(\alpha)} \quad , \quad \lambda \text{ limite}$$

$$Q^{(\lambda)} = \bigcup_{\alpha<\lambda} Q^{(\alpha)}, \quad \lambda \text{ limite}$$

Le résultat suivant est bien connu, voir [K,L], ou [Sc].

II.6. THÉORÈME (Gentzen-Kreisel-Levy). Pour tout $\alpha < \eta_o$, nous avons $Q^{(\alpha+1)} \vdash \mathrm{TI}(\varepsilon_\alpha)$ mais $Q^{(\alpha+1)} \nvdash \mathrm{TI}(\varepsilon_{\alpha+1})$.

Nous définissons les fonctions Y_α (qui seront des indicatrices pour les théories $\mathcal{P}^{(\alpha)}$ et $Q^{(\alpha)}$) : $Y_\alpha(a,b)$ = le plus grand c tel que $[a,b] \underset{\alpha}{\to} (2c)^c_c$.
Nous allons prouver le résultat suivant.

II. 7. THÉORÈME Soit $\alpha < \eta_o$ et soit ν tel que $\varepsilon_\nu \le \alpha < \varepsilon_{\nu+1}$

(i) Y_α est une indicatrice pour $\mathcal{P}^{(\alpha)}$ par rapport aux modèles de $\mathcal{P}$ + TI (ε_ν)

(ii) $Q^{(\alpha)}$ et $\mathcal{P}^{(\alpha)}$ axiomatisent la même théorie.

On aura le corollaire

II.8. COROLLAIRE Soit $\alpha < \eta_o$

(i) $\mathcal{P}^{(\alpha+1)} \vdash \mathrm{TI}(\varepsilon_\alpha)$

(ii) $\mathcal{P}^{(\alpha)} \vdash \forall x\, \forall y\, Y_\alpha(x,y) \ge n$, tout $n \in \mathbb{N}$

(iii) $\mathcal{P}^{(\alpha)} + \mathcal{J}_1 \nvdash \forall z\, \forall x\, \exists y (Y_\alpha(x,y) \ge z)$

<u>DÉMONSTRATION</u> <u>(du théorème)</u>. Par induction sur α . D'après ce qui précède le théorème est vérifié pour $\alpha = 0,1$. De manière générale, la partie (ii) pour $\alpha+1$ se déduit de la partie (i) pour α comme le théorème I.1. de cet exposé se déduit du résultat de Paris-Harrington; or la partie (ii) au niveau α limite est immédiate. Nous considérons alors la situation suivante : on suppose que le théorème est vérifié pour tout $\alpha < \alpha_o$ et que la partie (ii) est vérifiée au niveau α_o. Parce que $\alpha_o < \eta_o$, nous avons $\nu + 1 < \alpha_o$; donc par l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}^{(\alpha_o)} \vdash TI(\varepsilon_{\nu+1})$

On va avoir besoin d'une série de lemmes techniques dont les démonstrations sont données en appendice. L'intérêt de ces lemmes provient du fait que pour X fini, la relation $X \underset{\beta}{\rightarrow} (m)^n_k$ n'entraine pas $X \underset{\gamma}{\rightarrow} (m)^n_k$ pour n'importe quel $\gamma < \beta$; néanmoins dans des cas où γ "se déduit" de β d'une certaine manière par des applications successives de l'opération $\delta \rightarrow \delta(n)$, on a des implications du type en question . Les lemmes A-G qui suivent sont démontrables dans $\mathcal{P} + TI(\varepsilon_{\nu+1})$:

II.9. <u>LEMME A.</u> Soit $X = \{x_1,\dots,x_s\}$ et $Y = \{y_1,\dots,y_t\}$ deux ensembles finis tels que $s \geq t$ et $x_i \leq y_i$ pour tout $i \leq t$. Si $\beta < \varepsilon_{\nu+1}$ et si $Y \underset{\beta}{\nrightarrow} (m)^n_k$, alors $X \underset{\beta}{\rightarrow} (m)^n_k$.

II.10. <u>LEMME B.</u> Soit $\beta < \varepsilon_{\nu+1}$ et soit $k \geq 7$. Si $X \underset{\beta}{\nrightarrow} (m)^n_k$, alors $X \underset{\beta}{\nrightarrow} (m)^{n'}_k$ pour tout $n' < n$.

II.11. <u>LEMME C.</u> Soit $\alpha < \varepsilon_{\nu+1}$; soient $s < t$ et $2n,k \leq m$. Si $X \underset{\alpha(t)}{\longrightarrow} (m)^n_k$, alors $X \underset{\alpha(s)}{\longrightarrow} (m)^n_k$

II.12. <u>LEMME D.</u> Supposons que $\gamma<\beta < \varepsilon_{\nu+1}$. Alors pour tous m, n, k il existe m', n', k' tels que $X \underset{\beta}{\nrightarrow} (m')^{n'}_{k'}$ entraine $X \underset{\beta}{\nrightarrow} (m)^n_k$ quel que soit X.

II.13. <u>LEMME E.</u> Soient $\alpha < \varepsilon_{\nu+1}$ et $\mu \leq \nu$ tels que $\varepsilon_\mu \leq \alpha < \varepsilon_{\mu+1}$ et soit $m \geq 2n,k$. Alors $X \underset{\alpha}{\rightarrow} (m)^n_k$ entraine $X \underset{\varepsilon_\mu}{\longrightarrow} (m)^n_k$ quel que soit X.

II.14. <u>LEMME F.</u> Soit s tel que $(\eta_o)_s \leq \varepsilon_\mu < (\eta_o)_{s+1}$ où $\mu \leq \nu$ et soit $m \geq 2n,k$. Alors $X \underset{\varepsilon_\mu}{\rightarrow} (m)^n_k$ entraine $X \underset{(\eta_o)_s}{\longrightarrow} (m)^n_k$.

II.15. <u>LEMME G.</u> Soit $\alpha<\varepsilon_{\nu+1}$, soit s tel que $(n_o)_s \leq \alpha$ et soient $m \geq 2n,k$. Alors $X \underset{\alpha}{\rightarrow} (m)^n_k$ entraine $X \underset{(\eta_o)_s}{\longrightarrow} (m)^n_k$ quel que soit X.

Vérifions maintenant que Y_{α_o} est bien une indicatrice pour $\mathcal{P}^{(\alpha_o)}$ par rapport aux modèles de $TI(\varepsilon_{\nu+1})$. Soit donc M un modèle dénombrable de $\mathcal{P} + TI(\varepsilon_{\nu+1})$ et supposons que $M \models Y_{\alpha_o}(a,b) = c+1$ avec $c > \mathbb{N}$. Nous disons que $M \models [a,b] \underset{\alpha_o}{\longrightarrow} (2c)^c_{3c}$; en effet, $c > \mathbb{N}$ entraine que $c+1 \geq (1+2\sqrt{3c})$ et par 2.II.1, à toute partition $P: [a,b]^c \rightarrow 3c$ on peut associer une partition $\overline{P} : [a,b]^{c+1} \rightarrow c+1$ telle que toute partie homogène pour $\overline{P}$ ayant au moins $c + 2$ éléments est aussi homogène pour $\overline{P}$; ensuite, puisque nous avons la relation

$[a,b] \xrightarrow[\alpha_o]{} (2c+2)^{c+1}_{c+1}$ il existe une telle partie homogène K telle que

$K \xrightarrow[\alpha_o(c+1)]{} (2\min^2 K)^{\min^2 K}_{\min^2 K}$ et par le Lemme C on a $K \xrightarrow[\alpha_o(c)]{} (2\min^2 K)^{\min^2 K}_{\min^2 K}$

Cela étant, on peut trouver comme pour le Théorème I.3. un ensemble $\bar{H} \subseteq [a,b]$, $\bar{H} = \{e_1,\ldots,e_{\bar{\ell}}\}$ avec $\bar{\ell} > 2c$ tel que les éléments de l'ensemble tronqué $H = \{e_1,\ldots,e_\ell\}$, où $\ell = \bar{\ell} - c$, sont indiscernables pour les formules Σ^o_2 et tel que,

$$M \models H \xrightarrow[\alpha_o(c)]{} (2e_{e_1})^{e^{e_1}}_{e_{e_1}-c}$$

Or, les éléments de $H - \{e_1,\ldots,e_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, sont indiscernables pour les formules $\Delta^o_o(\Sigma^o_1)$ à paramètres $\leq e_m$. Soit, comme d'habitude, $I = \{x \in M : x \leq e_n$ pour un $n \in \mathbb{N}\}$. D'après les remarques faites au début de la démonstration du Théorème I.3., pour α_o successeur il suffit de démontrer que

(*) $I \models TI(\varepsilon_{\nu+1})$

et

(**) $I \models \forall v_1 \ldots \forall v_k\, [\exists^\infty x\, E(x,v_1,\ldots,v_k) \to \forall u,v,w\, \exists X\, [X$ est un ensemble fini $\wedge \forall x(x \in X \to E(x,v_1,\ldots,v_k)) \wedge X \xrightarrow[\alpha_o(c)]{} (n)^v_w]]$

Or, si α_o est un ordinal limite, on a $M_o \models \alpha_o(n) \leq \alpha_o(c)$ quel que soit n standard; donc par le Lemme C, si on démontre (i) et (ii) on a aussi

$$I \models \forall v_1 \ldots \forall v_k\, [\exists^\infty x\, E(x,v_1,\ldots,v_k) \to \forall u,v,w\, \exists X\, [X \text{ est un ensemble fini } \wedge \forall x(x \in X \to E(x,v_1,\ldots,v_k)) \wedge X \xrightarrow[\alpha_o(n)]{} (n)^v_w]]$$

ce qui entraine

$$I \models \wp^{(\alpha(n))} \quad \text{quel que soit } n \text{ standard}$$

ce qui donne la conclusion cherchée pour α_o limite.

Vérifions donc que l'on a (*) et (**). Nous savons déjà que $I \models \wp$. Soit n_o le plus grand entier n satisfaisant $(\eta_o)_n \leq \alpha_o$. Considérons le tableau à rebours suivant

II.16. $M \models B(e_{r+2},e_{s_1},\ldots,e_{s_m}) \xrightarrow[\alpha_o(c)]{} (2e_t)^{e_t}_{e_t-\delta}$

II.17. $M \models B(e_{r+2},e_{s_1},\ldots,e_{s_m}) \xrightarrow[\varepsilon_\nu]{} (2e_t)^{e_t}_{e_t-\delta}$

II.17.(η_o) $M \models B(e_{r+2},e_{s_1},\ldots,e_{s_m}) \xrightarrow[(\eta_o)_{n_o}]{} (2e_t)^{e_t}_{e_t-\delta}$

II.17.(η_o-1) $M \models B(e_{r+2},e_{s_1},\ldots,e_{s_m}) \xrightarrow[(\eta_o)_{n_o-1}]{} (2e_t)^{e_t}_{e_t-\delta}$

.

.

.

II.17$(\eta_o-(\eta_o-1))$ $M \models B(e_{r+2},e_{s_1},\ldots,e_{s_m}) \xrightarrow[(\eta_o)_1]{} (2e_t)^{e_t}_{e_t-\delta}$

II.17(0) $\quad M \models B(e_{r+2},e_{s_1},\ldots,e_{s_m}) \xrightarrow[0]{} (2e_t)^{e_t}_{e_t-\delta}$

Chaque entrée du tableau peut être vérifiée utilisant les Lemmes E, F et G. En remontant le tableau, on a par les Lemmes A et B, par la méthode de démonstration du Théorème I.3. et le cas initial $\alpha = 1$, que

II.18(0) $\quad I \models \mathcal{P}^{(1)}$, $I \models Q^{(1)}$, $I \models TI((\eta_o)_1)$

Continuant inductivement et invoquant l'hypothèse de récurrence on a

II.18(1) $\quad I = \mathcal{P}^{((\eta_o)_1+1)}$, $I \models Q^{((\eta_o)_1+1)}$, $I \models TI(\eta_o)_2)$

.

.

.

II.18.(n_o) $\quad I \models \mathcal{P}^{((\eta_o)_{n_o}+1)}$, $I \models Q^{((\eta_o)_{n_o}+1)}$, $I \models TI((\eta_o)_{n_o+1})$

Puisque $(\eta_o)_{n_o} \leq \varepsilon_\nu \leq \alpha_o < \varepsilon_{\nu+1} < (\eta_o)_{n_o+1}$, on a bien (*) et en même temps on a (**) par l'absoluité entre I et M de la relation $\xrightarrow[\alpha(c)]{}$ qui est assurée par la Proposition II.5.

Réciproquement, pour finir cette partie de la démonstration il faut prouver que

$$P^{(\alpha_o)} \vdash \forall x \, \exists y \;\; Y_{\alpha_o}(x,y) \geq \overline{n}, \text{ tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ceci se vérifie facilement par la méthode de démonstration de 2.I.8. et 3.I.10, c'est-à-dire par un argument de compacité et une application de la forme infinie du Théorème de Ramsey.

Nous avons remarqué au début de cette démonstration que la partie (ii) au niveau α_o+1 se déduit de la partie (i) au niveau α_o. Pour voir ceci, il faut noter que, pour α_o limite, la série d'équivalences $\mathcal{P}^{(\alpha)} \equiv Q^{(\alpha)}$, $\alpha < \alpha_o$, est elle-même prouvable dans $\mathcal{P}^{(\alpha_o)}$ et aussi que l'équivalence $\mathcal{P}^{(\beta)} \equiv Q^{(\beta)}$ est prouvable dans $\mathcal{P}^{(\beta)}$ quand $\alpha_o = \beta+1$. A partir de celà, la démonstration est tout-à-fait analogue à celle du Théorème I.3. et nous la laissons aux soins du lecteur. C.Q.F.D.

Quant au corollaire, la partie (i) est conséquence du théorème et de II.6., la partie (ii) a été notée au cours de la démonstration du théorème. Naturellement, la partie (iii) découle des résultats du premier exposé.

Les méthodes du troisième exposé donnent le

II.19. COROLLAIRE. Soit $\alpha < \eta_o$. Alors

$$P^{(\alpha)} \vdash \mathrm{Cons}(T_1 + P^{(\alpha)}) \longleftrightarrow \forall x \ \forall z \ \exists y \ (Y_\alpha(x,y) \geq z).$$

On peut extraire d'autres renseignements de la démonstration du théorème. Définissons une troisième progression de théories en posant

$$\mathcal{R}^o = \mathcal{P}$$

$$\mathcal{R}^{\alpha+1} = \mathcal{R}^\alpha + \text{le schéma suivant}$$

$$\forall v_1,\ldots, \forall v_k [\ \exists^\infty x\ E(x,v_1,\ldots,v_k) \rightarrow \forall u,\ v,\ w\ \exists X$$

$$X \text{ est un ensemble fini, } \forall x(x \in X \rightarrow E(x,v_1,\ldots,v_k)),$$

$$\text{et } X \underset{\alpha}{\rightarrow} (u)^v_w]$$

$$\mathcal{R}^{(\lambda)} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{R}^{(\alpha)}$$

On a alors le

II.20. COROLLAIRE. Pour $\alpha < \eta_o$, $\mathcal{R}^{(\alpha)}$, $\mathcal{Q}^{(\alpha)}$ et $\mathcal{P}^{(\alpha)}$ axiomatisent la même théorie.

III.- REMARQUES ET QUESTIONS CONNEXES

Notons tout d'abord que l'on peut faire une série de remarques analogues à celle du § 2.II. Par exemple, posons pour $\alpha < \eta_o$,

$$\sigma_\alpha(n) = \text{le plus petit entier m tel que } [1,m] \overset{\alpha}{\rightarrow} (n+1)^n_n$$

Alors la fonction σ_α majore toute fonction récursive prouvable de la théorie $\mathcal{P}^{(\alpha)}$ à un nombre fini d'arguments près. On peut également remplacer σ_α par τ_α où

$$\tau_\alpha\ (n) = \text{le plus petit m tel que } [1,m] \overset{\alpha}{\rightarrow} (n+1)^x_7\ .$$

Il est aussi possible de continuer l'itération transfinie au delà de η_o, voir [Mc,ter]. Récemment, H. Friedman a annoncé la découverte de théorèmes combinatoires indépendants de diverses théories des ensembles, voir [Fr].

Pour finir, notons une autre façon naturelle d'itérer à partir de la formule de Paris-Harrington.

De manière générale, pour la théorie $\mathcal{P}(\overset{\circ}{f}) + \forall x(\overset{\circ}{f}(x+1) > \overset{\circ}{f}(x))$, la fonction

$$Z(a,b) = c \quad \text{ssi c'est le plus grand entier tel que } [a,b] \xrightarrow[*]{\overset{\circ}{f}} (2c)^c_c$$

est une indicatrice pour les segments initiaux satisfaisant $\mathcal{P}(\overset{\circ}{f})$ par rapport aux modèles (M,f) de $\mathcal{P}(\overset{\circ}{f})$. En effet, si $(M,f) \models \mathcal{P}(\overset{\circ}{f})$ et si pour $c > N$

$$(M,f) \models Z(a,b) = c$$

alors, en reprenant les démonstrations du théorème 2.I.7 et du théorème I.3 de cet exposé, on trouve une suite $e_1,\dots,e_n,\dots$ d'indiscernables forts pour les formules $\overset{\circ}{\Delta}{}^o_o(\overset{\circ}{f})$ telle que $(M,f) \models f(e_n) < e_{n+1}$. Cette suite détermine alors un modèle de $\mathcal{P}(\overset{\circ}{f})$.

Pour $\alpha < \varepsilon_o$, nous définissons une suite transfinie de fonctions récursives ainsi :

$$f_o(n) = \text{le plus petit } m \text{ tel que } [1,m] \xrightarrow[*]{} (n+1)^n_n$$

$$f_{\alpha+1}(n) = \text{le plus petit } m \text{ tel que } [1,m] \xrightarrow[*]{f_\alpha} (n+1)^n_n$$

$$f_\lambda(n) = \sup_{m\leq n} f_{\lambda(m)}(m), \qquad \lambda \text{ limite}$$

ce qui amène à poser

$$Z_o(a,b) = c \quad \text{ssi c'est le plus grand entier tel que } [a,b] \xrightarrow[*]{} (2c)^c_c$$

$$Z_{\alpha+1}(a,b) = c \quad \text{ssi c'est le plus grand entier tel que } [a,b] \xrightarrow[*]{f_\alpha} (2c)^c_c$$

$$Z\ (a,b) = c \quad \text{ssi c'est le plus grand entier tel que } [a,b] \xrightarrow[*]{f_{\lambda(c)}} (2c)^c_c$$

et à introduire trois progressions de théories

$$\mathcal{R}^{(o)} = \mathcal{P}$$

$$\mathcal{R}^{(\alpha+1)} = \mathcal{R}^{(\alpha)} + \forall x \exists y\ f_\alpha(x) = y$$

$$\mathcal{R}^{(\lambda)} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{R}^{(\alpha)}$$

$$\mathcal{S}^{(o)} = \mathcal{P}$$

$$\mathcal{S}^{(\alpha+1)} = \mathcal{S}^{(\alpha)} + \forall x \forall z \exists y\ Z_\alpha(x\ y) = z$$

$$\mathcal{S}^{(\lambda)} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{S}^{(\alpha)}$$

$$\mathcal{T}^{(o)} = \mathcal{P}$$

$$\mathcal{S}^{(\alpha+1)} = \mathcal{P} + \mathrm{Cons}(T_1 + \mathcal{T}^{(\alpha)})$$

$$\mathcal{T}^{(\lambda)} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{T}^{(\alpha)}$$

Nous avons alors :

III.1. <u>THÉORÈME</u>. Pour $\alpha < \varepsilon_o$,

(i) $\mathcal{R}^{(\alpha)}$, $\mathcal{S}^{(\alpha)}$ et $\mathcal{T}^{(\alpha)}$ axiomatisent la même théorie

(ii) $Z^{(\alpha)}$ est une indicatrice pour $\mathcal{R}^{(\alpha)}$ par rapport aux modèles de $\mathcal{R}^{(\alpha)}$

(iii) $\mathcal{R}^{(\alpha)} \vdash \forall x \, \forall z \, \exists y \, (Z_\alpha(x\ y) \geq z) \leftrightarrow \mathrm{Cons}(T_1 + \mathcal{R}^{(\alpha+1)})$

(iv) Toute fonction récursive prouvable de $\mathcal{R}^{(\alpha)}$ est majorée à un nombre fini d'arguments près par f_α.

Nous omettons la démonstration. Toutefois, nous remarquons que pour $\alpha < \varepsilon_o$, il existe une fonction récursive prouvable $\varphi = \varphi_\alpha$ de deux arguments telle que pour $\beta < \gamma < \alpha$ on a $f_\beta(n) \leq f_\gamma(n)$ pour tout $n \geq \varphi(\beta,\gamma)$.

L'existence de φ assure que pour les indiscernables forts, $M \models f_\gamma(e_1) < e_2$ entraîne $M \models f_\beta(e_1) < e_2$ et que $M \models f_{\lambda(c)}(e_1) < e_2$ avec $c > \mathbb{N}$ entraîne $M \models f_{\lambda(n)}(e_1) < e_2$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \leq \alpha$.

Pour calculer φ, on procède de la façon suivante : pour tout $\beta < \alpha$ on définit pour $\beta \leq \gamma < \alpha$ un ensemble fini d'entiers $E(\beta,\gamma)$ par récurrence sur γ :

$$E(\beta,\gamma) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \beta = \gamma \\ E(\beta,\gamma(o)) & \text{si } \beta \leq \gamma(o) \\ E(\beta,\gamma(n+1)) \cup \{n+1\} & \text{si } \gamma(n) \leq \beta < \gamma(n+1) \end{cases}$$

Et on pose $\varphi(\beta,\gamma) = \sup E(\beta,\gamma)$.

Remarquons une différence qui apparaît entre cette itération et celle du paragraphe précédent : là on avait $\mathcal{P}^{(\alpha+1)} \vdash TI(\varepsilon_\alpha)$ alors qu'ici on n'a apparemment pas $\mathcal{R}^{(\alpha+1)} \vdash TI_1(\varepsilon_o)$ pour aucun $\alpha < \varepsilon_o$, ce qui empêche l'itération au-delà de ε_o étapes.

DÉMONSTRATION A Par récurrence sur β. Pour $\beta > 0$, étant donnés $P : [X]^n \to k$ on définit $\tilde{P} : [Y]^n \to k : (y_{i_1}, \dots, y_{i_n}) \to P(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$. Soit $\tilde{H}$ homogène pour $\tilde{P}$ tel que $\tilde{H} \xrightarrow[\beta(n)]{} (2\min^2\tilde{H})^{\min^2\tilde{H}}_{\min^2\tilde{H}}$. Soit $H = \{x_i : y_i \in \tilde{H}\}$. Alors, par l'hypothèse de récurrence, $H \xrightarrow[\beta(n)]{} (2\min^2\tilde{H})^{\min^2\tilde{H}}_{\min^2\tilde{H}}$, et comme pour I.4 du deuxième exposé, on en déduit que $H \xrightarrow[\beta(n)]{} (2\min^2 H)^{\min^2 H}_{\min^2 H}$.

DÉMONSTRATION B Le lemme est évident d'après la Proposition II.1. du deuxième exposé.

DÉMONSTRATION C Nous abrègeons $(\alpha(n_1))(n_2)$ par $\alpha(n_1)(n_2)$, $(\alpha(n_1)(n_2))(n_3)$ par $\alpha(n_1)(n_2)(n_3)$ etc. Nous aurons besoin d'un sous-lemme.

SOUS-LEMME Soit $s < t_1$. Si $\alpha(t_1)\dots(t_k) \le \alpha(s)$, alors il existe $i \le k$ tel que $\alpha(t_1)\dots(t_i) = \alpha(s)$.

DÉMONSTRATION Par récurrence sur α. Si $\alpha = 0$ ou si α est successeur, la vérification est immédiate. Pour α limite $\neq 0$, il y a trois cas qui correspondent aux clauses (1), (2), (3) de la définition de la suite fondamentale. On traite d'abord du troisième cas où $\varepsilon_\mu \le \alpha < \varepsilon_{\mu+1}$. Posons

$$\sigma = \varepsilon_\mu^{\gamma_1}\,\delta_1 + \dots + \varepsilon_\mu^{\gamma_{m-1}}\,\delta_{m-1} \text{ où } \alpha = \varepsilon_\mu^{\gamma_1}.\,\delta_1 + \dots + \varepsilon_\mu^{\gamma_m}.\,\delta_m$$

. Il y a alors quatre sous-cas selon le terme $\varepsilon_\mu^{\gamma_m}.\,\delta_m$:

a/ Ici $\gamma_m = 0$ et $\alpha = \sigma + \delta_m$, $\alpha(s) = \sigma + \delta_m(s)$. Parce que $\varepsilon_\mu^{o}.\,\delta_m$ est le terme du plus petit exposant de ε_μ dans la forme normale de α, il est clair que si $\alpha(t_1)\dots(t_k) < \sigma$, alors $\alpha(t_1)\dots(t_{k'}) = \sigma$ pour $k' < k$. On peut donc supposer que $\alpha(t_1)\dots(t_k) \ge \sigma$ et qu'on a $\alpha(t_1)\dots(t_i) = \sigma + \delta_m(t_1)\dots(t_i)$ quel que soit $i \le k$. Alors, $\sigma + \delta_m(s) > \sigma + \delta_m(t_1)\dots(t_k)$ entraine $\delta_m(s) > \delta_m(t_1)\dots(t_k)$; par l'hypothèse de récurrence, il existe $i < k$ tel que $\delta_m(s) = \delta_m(t_1)\dots(t_i)$ et $\alpha(s) = \sigma + \delta_m(t_1)\dots(t_i) = \alpha\,(t_1)\dots(t_i)$.

b/ Ici $\gamma_m = \xi + 1$ et $\delta_m = \beta + 1$. Si $\xi = 0$, la chose devient tout-à-fait analogue au cas que l'on vient de traiter. Si $\xi \neq 0$, posons $\tau = \sigma + \varepsilon_\mu^{\gamma_m}.\beta$. Nous avons que $\alpha(t) = \tau + \varepsilon_\mu^{\xi}\,.\,\varepsilon_\mu(t)$ pour tout $t \in N$. Alors $\alpha(s) \ge \tau$ et $\alpha(t_1) \ge \tau$; or $\varepsilon_\mu^{\xi}\,.\,\varepsilon_\mu(t_1)$ est le terme du plus petit exposant de ε_μ dans la forme normale de $\alpha(t_1)$. Ici, donc, on peut supposer que $\alpha(t_1)\dots(t_k) \ge \tau$

et que pour $i \leq k$, $\alpha(t_1)\ldots(t_i) = \tau + (\varepsilon_\mu^\xi . \varepsilon_\mu)(t_1)\ldots(t_i)$. On peut aussi supposer que $\alpha(t_1)\ldots(t_{k-1})$ $\alpha(s)$ et, même $\alpha(t_1)\ldots(t_{k-1}) > \alpha(s)$. Nous disons aussi que l'on peut également supposer que $\alpha(t_1)\ldots(t_{k-1}) = \tau + \varepsilon_\mu^\xi\ [\ \varepsilon_\mu(t_1')\ldots(t_k')]$. En effet, par la définition de la suite fondamentale, tant que $\varepsilon_\mu(t_1)\ldots(t_i)$, $i = 1,2,\ldots l$ est un ordinal limite, on a $\alpha(t_1)\ldots(t_i) = \tau + \varepsilon_\mu^\xi . \varepsilon_\mu(t_1)\ldots(t_i)$. Soit ℓ_o le premier entier, s'il en existe, tel que $\varepsilon_\mu(t_1)\ldots(t_{\ell_o})$ soit un ordinal successeur, disons $\zeta + 1$.

Alors, $\ell_o < k$ et $\alpha(s) < \alpha(t_1)\ldots(t_{\ell_o})$. A ce moment là,

$(\varepsilon_\mu^\xi . \varepsilon_\mu)(t_1)\ldots(t_{\ell_o}) = \varepsilon_\mu^\xi . \varepsilon_\mu(t_1)\ldots(t_{\ell_o}) = \varepsilon_\mu^\xi(\zeta+1)$ et

$(\varepsilon_\mu^\xi . \varepsilon_\mu)(t_1)\ldots(t_{\ell_o}) = \varepsilon_\mu^\xi . \gamma + \nu$

$$\text{où } \nu = \begin{cases} \varepsilon_\mu^{\xi(t_{\ell_o+1})} & \text{si } \xi \text{ est limite} \\ \varepsilon_\mu^\eta . \varepsilon_\mu(t_{\ell_o+1}) & \text{si } \xi = \eta+1 \end{cases}$$

Nous avons $\alpha(s) < \tau + \varepsilon_\mu^\xi(\gamma+1)$ et alors, parce que $\alpha(s) = \tau + \varepsilon_\mu^\xi . \varepsilon_\mu(s)$, nous avons $\varepsilon_\mu(s) \leq \gamma$. Parce que ν est le terme du plus petit exposant de ε_μ dans la forme normale de $\alpha(t_1)\ldots(t_{\ell_o})$, il existe $p, \ell_o+1 \leq p \leq k$ tel que

$\alpha(t_1)\ldots(t_p) = \tau + \varepsilon_\mu^\xi . \gamma$, autrement dit,

$$(\varepsilon_\mu^\xi . \varepsilon_\mu(t_1)\ldots(t_{\ell_o}))(t_{\ell_o+1})\ldots(t_p) = \varepsilon_\mu^\xi . \gamma$$

Nous avons donc, parce que $\gamma+1(t_p) = \gamma$,

$$(\varepsilon_\mu^\xi . \varepsilon_\mu)(t_1)\ldots(t_p) = \varepsilon_\mu^\xi\ (\varepsilon_\mu(t_1)\ldots(t_{\ell_o})(t_p)), \quad \text{ce qui donne}$$

$$\alpha(t_1)\ldots(t_p) = \tau + \varepsilon_\mu^\xi .(\varepsilon_\mu(t_1)\ldots(t_{\ell_o})(t_p)).$$

Continuant ainsi, on se ramène au cas où

$$\alpha(t_1)\ldots(t_{k-1}) = \tau + \varepsilon_\mu^\xi . \varepsilon_\mu(t_1')\ldots(t_{k'}').$$

D'ailleurs, puisque $\alpha(s) < \alpha(t_1)\ldots(t_{k-1})$, l'ordinal $\varepsilon_\mu(t_1')\ldots(t_{k'})$ ne peut être successeur, car sinon on aurait, comme ci-dessus,

$\alpha(s) < \tau + \varepsilon_\mu^\xi\ (\varepsilon_\mu(t_1')\ldots(t_{k'}'))(t_k) = \alpha(t_1)\ldots(t_k)$. Donc, $\varepsilon_\mu(t_1')\ldots(t_{k'}')$ doit être un ordinal limite et $\alpha(t_1)\ldots(t_k) = \tau + (\varepsilon_\mu^\xi\ \varepsilon_\mu(t_1')\ldots(t_k')(t_k))$. Cependant, $\varepsilon_\mu(t_1')\ldots(t_{k'}') > \varepsilon_\mu(s)$ entraine par l'hypothèse de récurrence, que $\varepsilon_\mu(s) \leq \varepsilon_\mu(t_1')\ldots(t_{k'}')(t_k)$ ce qui entraine $\alpha(t_1)\ldots(t_k) = \alpha(s)$.

c/ Ce sous-cas est tout à fait analogue à b/.

d/ La situation est analogue aux précédentes moyennant le sous-sous-lemme suivant :

<u>SOUS-SOUS-LEMME</u> Soit $\delta < \varepsilon_\mu$. Si $\varepsilon_\mu^{\delta+1}(t_1)\ldots(t_k) \leq \varepsilon_\mu^\delta$, alors

$\varepsilon_\mu^\delta = \varepsilon_\mu^{\delta+1}(t_1)\ldots(t_i)$ pour un $i \leq k$.

DÉMONSTRATION On procède par induction sur ξ, $1 \leq \xi < \varepsilon_\mu$ pour montrer que $(\varepsilon_\mu^\delta \cdot \xi)(t_1)\ldots(t_k) \leq \varepsilon_\mu^\delta$ entraine $(\varepsilon_\mu^\delta \cdot \xi)(t_1)\ldots(t_i) = \varepsilon_\mu^\delta$ pour un $i \leq k$. Pour $\xi = 1$ et ξ limite, le résultat est clair. Pour $\xi = \eta + 1$, nous avons $(\varepsilon_\mu^\delta(\eta+1))(t_1) = \varepsilon_\mu^\delta \cdot \eta + \varepsilon_\mu^\delta(t_1)$; le terme $\varepsilon_\mu^\delta(t)$ étant du plus petit exposant de ε_μ dans la forme normale de $\varepsilon_\mu^\delta . \eta + \varepsilon_\mu^\delta(t_1)$ à la base ε_μ, il est clair que $\varepsilon_\mu^\delta(\eta+1)(t_1)\ldots(t_k) \leq \varepsilon_\mu^\delta$ entraine la conclusion souhaitée.

Nous arrivons aux cas (1) et (2). De nouveau, moyennant le sous-sous-lemme qui vient d'être établi, ces cas se traitent de la même façon que le sous-cas b/.

Le sous-lemme ayant été démontré, remarquons que si $X \xrightarrow[\beta(t)]{} (m)_k^n$, $m \geq 2n,k$, alors il existe une partition $P: [X]^n \to k$ tel que, si H est homogène pour P ayant au moins m-éléments alors $\min^2 H \geq m$. Il existe donc une suite décroissante $X = X_o \supseteq X_1 \supseteq \ldots \supseteq X_k$ avec $\min^2 X_1 \geq m$ telle que pour $1 \leq i \leq k$, $X_i \xrightarrow[\beta(t_o)\ldots(t_i)]{} (2\min^2 X_i)_{\min^2 X_i}^{\min^2 X_i}$ où $t_1 = n$, $t_{i+1} = \min^2 X_i$ pour $i \geq 1$ et $\beta(t_o)\ldots(t_k) \leq \beta(s)$. Par le sous-lemme, alors, $\beta(t_o)\ldots(t_p) = \beta(s)$ pour un $p \leq k$ et $X_p \xrightarrow[\beta(s)]{} (m)_k^n$ par la Proposition 2.II.1.

DÉMONSTRATION D Par induction sur β. Si $\alpha = \beta(m)$, le lemme est évident par le lemme C; si $\alpha + m = \beta$, c'est évident d'après les définitions. Si $\alpha < \beta(m)$, par l'hypothèse d'induction, il existe m'', n'', k'' tels que $X \xrightarrow[\beta(m)]{} (m'')_{k''}^{n''}$ entraine $X \xrightarrow[\alpha]{} (m)_k^n$. Alors il suffit de prendre m', n', k' suffisamment grands pour assurer l'existence d'une partition pour lequel toute partie homogène H doit satisfaire $\min^2 H \geq m''$, n'', k''.

DÉMONSTRATIONS E, F, G La démonstration de E est implicite dans celle de C; les démonstrations de F et de G sont analogues à celle de C.

BIBLIOGRAPHIE

[S] K. Shütte, Proof Theory, Springer-Verlag, 1977.

[Fr] H. Friedman, Simpler combinatorial theorems independent of set theory, manuscrit.

[K,L] G. Kreisel et A. Levy, Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems, Z. Math. Logik Grundlagen Math., 14.

[Mc] Iterating the new, true improvable formulas, manuscrit.

Astérisque

M. A. DICKMANN

Types remarquables et extensions de modèles dans l'arithmétique de Peano, I

Astérisque, tome 73 (1980), p. 59-117
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__73__59_0>

EXPOSÉ 5

TYPES REMARQUABLES ET EXTENSIONS DE MODÈLES DANS L'ARITHMÉTIQUE DE PEANO, I

M.A. Dickmann

INTRODUCTION

Cet exposé forme un tout avec l'exposé 6, et la présente introduction vaut pour l'ensemble des deux. Ces deux exposés sont consacrés aux travaux de Gaifman, [G] et d'Abramson-Harrington, [A-H] , sur les types complets en Arithmétique, et sur les modèles de l'Arithmétique que ces types permettent de construire. En particulier, nous exposerons les notions de type définissable, uniforme, minimal et leur propriétés de base, étudiées par Gaifman (cf. cet exposé et le §I de l'exposé 6). Et nous démontrerons le théorème principal d'Abramson et Harrigton, que nous énoncerons seulement une fois introduites les notions nécessaires : cf. exposé 6, Théorème III.1. Ici nous indiquons seulement un corollaire de ce théorème : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une extension élémentaire M du modèle standard $\mathbb{N}$ telle que M est de cardinal $\beth_n$, mais ne contient aucune suite de $n+1$ points indiscernables pour l'ordre. Notons que ce résultat est optimum, puisque par le théorème d'Erdös-Rado [E,R] , M contient au moins n points indiscernables à cause de sa cardinalité. De ce corollaire on déduira facilement que le nombre de Hanf de la théorie complète du modèle $(\mathbb{N},+,.)$ est $\beth_\omega$: cf. exposé 6, corollaire III.

Sur les types en Arithmétique nous n'avons pas cherché à être exhaustif, mais plutôt à rédiger une introduction facile à lire et où quelques idées de base ressortent clairement; pour un exposé plus complet, voir les articles cités en référence. Le point de départ de nos exposés a été le cours professé par H. Gaifman sur le même sujet, en 1977 à l'Université de Paris VII. L'ensemble de ces deux composés ne comporte pas de nouveauté, excepté dans certaines démonstrations, dans la formulation des constructions de Gaifman et d'Abramson-Harrington, et dans la philosophie du sujet, telle qu'exposée dans l'exposé 6, fin du §I.

Le plan d'ensemble est approximativement le suivant : on expose d'abord séparément les divers aspects du sujets, à raison d'un aspect nouveau par paragraphe; puis on les étudie par combinaisons de deux ou trois d'entre eux, enfin on parviendra au théorème d'Abramson-Harrington en combinant le tout.

§0. PRÉLIMINAIRES.

(A) Dans cet exposé L désignera un langage du premier ordre contenant celui de l'arithmétique (cf. Exposé n°1). Nous supposons que L contient aussi l'opérateur minimum, désigné μ ; celui-ci permet de construire des termes à partir de formules : $\mu v\, \phi(v_o,\dots,v_{n-1},v)$ est le terme qui donne, pour chaque interprétation des variables $v_o,\dots,v_{n-1}$ dans une structure de signature L, le plus petit v tel que $v_o,\dots v_{n-1},v$ satisfont ϕ , s'il y en a un, 0 sinon.

Nous ferons l'hypothèse que le langage L a un nombre fini ou dénombrable de symboles de relation et de fonction à au moins un argument; le nombre des constantes individuelles peut être arbitraire. Cette hypothèse est utilisée dans le §III ci-dessous ("Existence des types") et dans tous les théorèmes qui font appel à l'existence des types, mais pas dans les paragraphes §§I, II et une partie de § IV.

(B) 1/ Etant donné L, on désigne par $\mathcal{P}_L$ - ou simplement par $\mathcal{P}$ s'il n'y a pas lieu à confusion - l'arithmétique de Péano généralisée, i.e., la théorie constituée par les axiomes de Péano (voir Exposé n°1) avec le schéma d'induction pour toutes les formules de L; on ajoute aussi le schéma d'axiome

$$\forall v_o\dots\forall v_{n-1}[\exists v\,\phi(v_o,\dots,v_{n-1},v) \to \phi(v_o,\dots,v_{n-1},\ \mu v\,\phi(v_o,\dots,v_{n-1},v))\ \wedge$$
$$\wedge\ \forall\, w(\phi(v_o,\dots,v_{n-1},\ ) \to \mu v\,\phi(v_o,\dots,v_{n-1},v) \le w)]$$

(pour toute formule ϕ de L), qui donne à l'opérateur μ son interprétation correcte.

Remarque. En particulier, $\mu v\,\phi(v_o,\dots,v_{n-1},v)$ est une fonction de Skolem canonique pour la formule $\phi(v_o,\dots,v_{n-1},v)$. Aussi toute fonction définissable est automatiquement représentée par un terme de L : si $f(v_o,\dots,v_{n-1})$ est définie par $\phi(v_o,\dots,v_{n-1},v)$, f coïncide dans tout modèle de $\mathcal{P}$ avec le terme $\mu v\phi(v_o,\dots,v_{n-1},v)$. Pour les mêmes raisons l'opérateur "l'unique v tel que $\phi(v_o,\dots,v_{n-1},v)$" est aussi représenté par $\mu v\,\phi(v_o,\dots,v_{n-1},v)$.

2/ Moyennant peu de changements, une bonne partie des résultats de cet exposé sont valables sous des hypothèses plus faibles . En gros, il suffit que L contienne le symbole de relation $<$ et qu'il s'agisse d'une théorie assurant que $<$ est un ordre total satisfaisant un minimum d'induction et qu'il y ait des fonctions de Skolem pour toutes les formules; voir Shelah [S] .

(C) Les conventions de l'Exposé n°1 concernant les notations restent valables ici. Ajoutons que si M est une structure de signature L, f^M, ϕ^M, Ψ^M , désignent respectivement les interprétations dans M du terme $f(\bar{v})$, de la formule $\phi(\bar{v})$ et de l'ensemble de formules $\Psi(\bar{v})$; ainsi, par exemple :

$$\Psi^M = \{\bar{a} \in M^n \mid \text{pour toute } \phi \in \Psi,\quad M \models \phi\,[\bar{a}]\,\}.$$

On utilise aussi les notations $\Psi \models \phi$, pour indiquer que $M \models \Psi[\bar{a}] \Rightarrow M \models \phi\,[\bar{a}]$ pour toute structure M et tout $\bar{a} \in M$ de longueur convenable; et $\mathcal{D}^c(M)$ pour le diagramme complet de M.

(D) Etant donnée une structure M de signature L on appelle type (ou n-type) sur M tout ensemble $t(v)$ de formules (où $\bar{v} = \{v_o, \dots, v_n\}$) à paramètres dans M tel que $\mathfrak{D}^c(M) \subseteq t(\bar{v})$, finiment consistant dans M (i.e., tel que $\Psi \subseteq t$ fini $\Rightarrow$ $M \models \exists v \bigwedge \Psi(\bar{v})$), et clos par la relation de conséquence logique (i.e., $t \models \phi \Rightarrow \phi \in t$) On dit que t est complet si pour toute formule $\phi(\bar{v})$ à paramètres dans M, $\phi \in t$ ou $\neg\phi \in t$.

Il convient de noter que si $\Psi(\bar{v})$ est un ensemble de formules finiment consistant avec $\mathfrak{D}^c(M)$, alors il existe un plus petit n-type sur M contenant $\Psi(\bar{v})$; c'est l'ensemble : $\hat{\Psi}(v) = \{ \phi(\bar{v}) \mid \phi(\bar{v})$ formule à paramètres dans M et $\mathfrak{D}^c(M) \cup \Psi \models \phi(\bar{v})\}$ .Lorsqu'il n'y a lieu à confusion nous identifierons $\Psi(\bar{v})$ et $\hat{\Psi}(\bar{v})$.

Remarquons, finalement, que la donnée d'un n-type sur M est manifestement équivalente à celle d'un filtre (propre) sur l'algèbre de Boole des parties définissables de M^n, et celle d'un n-type complet équivaut à la donnée d'un ultrafiltre.

(E) Si $M \models \mathcal{P}$, tout sous-ensemble $X \subseteq M$ est contenu dans un sous-modèle élémentaire minimal contenant X; son univers est

$$\{ f^M(\bar{a}) \mid f(\bar{v}) \text{ est un terme de } L \text{ et } \bar{a} \in X\} ,$$

et ses relations et fonctions sont celles de M restreintes à cet ensemble. Notons, en passant, que pour obtenir ce modèle minimal contenant X il suffit de considérer de termes à une seule variable; ceci parce que tout terme $f(v_o, \dots, v_{n-1})$ est égal (dans $\mathcal{P}$) au terme $g(v) = f((v)_o, \dots, (v)_{n-1})$ à une variable.

En particulier, si $X = \emptyset$, on obtient un modèle minimal de $\mathcal{P}$, ou, plus précisément, le modèle minimal d'une théorie complète de L qui étend $\mathcal{P}$, comme on le démontrera dans le (F) ci-après. Ses éléments sont tous les termes constants (= sans variables libres) de L. Du fait que chaque $n \in \omega$ est nommé par la constante $1 + \dots + 1$ (n fois), il suit que ce modèle minimal contient le modèle standard $\mathbb{N}$ de l'arithmétique de Péano.

Ce modèle minimal M_o peut coïncider ou non avec le modèle standard $\mathbb{N}$. Par exemple, si $M_o \models \neg\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$, où $\mathrm{Cons}(\mathcal{P})$ est la formalisation arithmétique de l'énoncé "$\mathcal{P}$ est consistant" (*), alors M_o n'est pas standard, puisque $\mathbb{N} \models \mathrm{Cons}(\mathcal{P})$.

(F) En général, si $M,N \models \mathcal{P}$ et $M \equiv N$, alors les sous-modèles minimaux respectifs M_o et N_o sont canoniquement isomorphes par l'application

$$F(\pi^M) = \pi^N$$

où π désigne un terme constant. La réciproque est aussi vraie et triviale.

Donc, toute extension complète T de $\mathcal{P}$ détermine à isomorphisme près un unique

(*) De tels modèles M_o existent grâce au théorème d'incomplètude de Gödel.

modèle minimal (et réciproquement, tout modèle minimal détermine de façon évidente une extension complète de $\mathcal{P}$). En particulier, si t est un type complet sur M,

$$\{\phi \mid t \models \phi \quad \text{et} \quad \phi \text{ énoncé de } L\}$$

est une théorie complète. Parfois il sera convenable de considérer t comme un type sur son modèle minimal.

(G) Notons aussi que si $N \models \mathcal{P}$ et $M \subseteq N$ (i.e., M est une sous-structure de N), alors $M \prec N$. En effet, si $\bar{m} \in M$, $\phi(\bar{u},v)$ est une formule quelconque et $N \models \exists v\, \phi(\bar{m},v)$, alors par (B.1) ci-dessus on a $N \models \phi(\bar{m}, \mu v \phi(\bar{m},v))$; or $a = \mu v \phi(\bar{m},v) \in M$; donc $N \models \phi(\bar{m},a)$ pour un certain $a \in M$, ce qui par le critère de Tarski pour l'inclusion élémentaire entraine $M \prec N$.

D'ici et de la remarque du (E) ci-dessus il s'en suit que si $X \subseteq M$ est un sous-ensemble clos par images (dans M) de termes à une variable, alors $X \prec M$.

(H) Rappelons que tout type $t(\bar{v})$ sur M est réalisé dans une extension élémentaire N de M : il existe $\bar{c} \in N$ tel que $N \models \phi(\bar{c})$ pour toute formule $\phi \in t$. Dans ce cas, $M(\frac{t}{\bar{c}})$ désigne le sous-modèle de N engendré par $M \cup \{\bar{c}\}$ (voir (F) dessus). On a $M \prec M(\frac{t}{\bar{c}}) \prec N$.

0.1. Lemme. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Deux modèles quelconques de la forme $M(\frac{t}{\bar{c}})$ sont isomorphes par un M-isomorphisme qui échange les générateurs $\bar{c}$.

(ii) t est complet.

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$(i). Si $M \prec N_1,N_2$ et les n-uples $\bar{c}_i \in N_i (i = 1,2)$ réalisent t, l'application $F : M(\frac{t}{\bar{c}_1}) \to M(\frac{t}{\bar{c}_2})$ donnée par

$$F(f^{N_1}(\bar{m},\bar{c}_1)) = f^{N_2}(\bar{m},\bar{c}_2)$$

pour tout terme f et tout $\bar{m} \in M$, est l'isomorphisme cherché, comme on vérifie aisément.

(i) $\Rightarrow$(ii). Si t n'est pas complet, il existe une formule $\phi(\bar{v})$ à paramètres dans M telle que $t_1 = t \cup \{\phi\}$ et $t_2 = t \cup \{\neg\phi\}$ sont tous deux consistants avec $\mathcal{D}^c(M)$. Si $\bar{c}_i$ réalise le type t_i dans $N_i \succ M$ $(i = 1,2)$, alors $M(\frac{t}{\bar{c}_1}) \models \phi(\bar{c}_1)$ et $M(\frac{t}{\bar{c}_2}) \models \neg\phi(\bar{c}_2)$. En particulier, il n'y a pas de M-isomorphisme $F : M(\frac{t}{\bar{c}_1}) \to M(\frac{t}{\bar{c}_2})$ tel que $F(c_1^i) = c_2^i$ pour $i = 1,\dots,n$.

(I) Pour faciliter la lecture et alléger les notations on emploiera systématiquement des abus de langage, des raccourcis et des énoncés informels au lieu de certaines formules de L; si besoin est, le lecteur pourra réécrire sans peine les formules originelles. Voici quelques exemples qu'on utilisera par la suite :

0.2 Exemples. (a) Si $\phi(v)$ est une formule et $f(v)$ un terme, "$f \restriction \phi$ constante" est l'abréviation de

$$\exists u \ \forall v \ [\ \phi(v) \rightarrow f(v) = u\ ].$$

(b) De même, "$f \upharpoonright \phi \ \rightarrow \infty$" abrégera :

$$\forall u \ \exists w \ \forall v \ [\ v > w \ \wedge \ \phi(v) \ \rightarrow f(v) > u\ ]$$

(c) "$f \upharpoonright \phi$ injective" abrégera :

$$\forall u \ \forall v \ [\ \phi(u) \wedge \ \phi(v) \wedge u \neq v \rightarrow f(u) \neq f(v)] \ .$$

(d) "$f \upharpoonright \phi > u$" abrégera :

$$\forall v \ [\ \phi(v) \rightarrow f(v) > u\ ] \ .$$

§I. LA RELATION ENTRE M ET $M(^t_c)$: ÉTUDE LOCALE.

La construction de $M(^t_c)$ est une sorte d'adjonction d'un "point à l'infini" ou "point idéal" à M, qui n'est pas sans rapport avec certaines constructions qu'on trouve ailleurs en mathématique. Par exemple, certains types de compactification en topologie où des nouveaux points sont ajoutés pour assurer la convergence de certains filtres; ou l'adjonction d'un zéro commun à certaines familles de polynômes sur un anneau; ou même l'adjonction d'un point ou une courbe à l'infini en géométrie projective.

D'autre part, un type $t(v)$ définit un filtre - et s'il est complet un ultrafiltre - sur l'ensemble des parties définissables du modèle M; notre analyse des types rappellera, donc, certaines considérations courantes dans l'étude des ultrafiltres sur ω.

Comme $M(^t_c)$ est une extension élémentaire de M, elle garde toutes les propriétés de premier ordre de M. Donc, la construction de $M(^t_c)$ facilite l'étude du type t et, inversement, les propriétés de t nous renseignent sur le modèle $M(^t_c)$.

Dans ce paragraphe nous entreprenons l'étude du premier aspect du sujet évoqué dans l'introduction : l'intéraction entre t et $M(^t_c)$ dans le cas local, c'est-à-dire, pour un M fixé.

Introduisons d'abord les concepts que nous allons utiliser :

I.1. Définition. Soient $M \models \mathcal{P}$, $M \prec N$ et $t(v)$ un type sur M.

(a) t est trivial ssi il existe un terme constant π (du langage L) tel que $(v = \pi) \in t$.

(b) t est non-borné ssi pour tout $a \in M$, $(a < v) \in t$.
Sinon t est dit borné.

(c) N est une extension finale de M, $M \underset{f}{\prec} N$, ssi pour tout $x \in N-M$ et tout $a \in M$, $N \models a < x$ (abrégé $M < x$).

(d) N est une extension finale minimale de N (abrégé N extension $\prec_f$-minimale de M) ssi $M \underset{f}{\prec} N$ et pour tout M', $M \prec_f M' \prec_f N$ implique $M' = M$ ou $M' = N$

(e) N est une extension élémentaire minimale de M (abrégé N extension $\prec$-minimale de M) ssi pour tout M', $M \prec M' \prec N$ entraîne $M' = M$ ou $M' = N$.

Pour commencer notre étude nous trouverons des conditions sur t nécessaires et suffisantes pour que $M(^t_c)$ soit une extension de M de chacun des types que nous venons de définir.

I.2. Théorème. Soit $t(v)$ un type complet et non-borné sur M; écrivons $M(t)$ pour abréger $M(^t_c)$, voir Lemme 0.1. Alors pour $i = 0,1,2$ nous avons les équivalences $(a_i) \Leftrightarrow (b_i) \Leftrightarrow (c_i)$ parmi les conditions suivantes :

(a_o) $M \prec_f M(t)$

(b_o) pour tout terme [*] $f(v)$, ou bien il existe $a \in M$ tel que $(f(v) = a) \in t$, ou bien pour tout $a \in M$, $(f(v) > a) \in t$;

(c_o) pour tout terme $f(v)$, ou bien il existe $\psi \in t$ tel que $M = f \upharpoonright \psi$ constante, ou bien pour tout $a \in M$ il existe

$$\psi \in t \quad \text{tel que} \quad M \models f \upharpoonright \psi > a^{(**)}$$

(a_1) $M(t)$ extension $\prec_f$ - minimale de M;

(b_1) pour tout terme $f(v)$, ou bien il existe $a \in M$ tel que $(f(v) = a) \in t$, ou bien il existe un terme $g(w)$ tel que $(g(f(v)) \geq v) \in t$;

(c_1) pour tout terme $f(v)$ il existe $\psi \in t$ tel que $f \upharpoonright \psi$ constant ou $f \upharpoonright \psi \to \infty$.

(a_2) $M(t)$ extension $\prec$ -minimale de M;

(b_2) pour tout terme $f(v)$, ou bien il existe $a \in M$ tel que $(f(v) = a) \in t$, ou bien il existe un terme $g(w)$ tel que $(g(f(v)) = v) \in t$;

(c_2) pour tout terme $f(v)$ il existe $\psi \in t$ tel que $f \upharpoonright \psi$ constant ou $f \upharpoonright \psi$ injectif.

Remarque. L'équivalence $(b_i) \Longleftrightarrow (c_i)$ $(i \leq 2)$ est une conséquence immédiate de la traduction des propriétés exprimées dans M en propriétés de t donnée par le lemme suivant :

II.3. Lemme. On a les équivalences (i) $\Leftrightarrow$ (i') pour $i \leq 3$:

(0) il existe $\psi \in t$ tel que $f \upharpoonright \psi$ constant;

(0') il existe $a \in M$ tel que $(f(v) = a) \in t$.

(1) Il existe $\psi \in t$ tel que $f \upharpoonright \psi > a$;

(1') $(f(v) > a) \in t$.

(2) il existe $\psi \in t$ tel que $f \upharpoonright \psi \to \infty$;

(2') il existe un terme $g(w)$ tel que $(g(f(v)) \geq v) \in t$.

(3) Il existe $\psi \in t$ tel que $f \upharpoonright \psi$ injective;

(3') il existe un terme $g(w)$ tel que $(g(f(v)) = v) \in t$.

Démonstration du lemme. On illustre l'argument en démontrant (0) $\Longleftrightarrow$ (0') et (3) $\Leftrightarrow$ (3') les autres équivalences sont laissées en exercice au lecteur.

(0) $\Rightarrow$ (0'). Si $M \models f \upharpoonright \psi$ constant, pour quelque formule $\psi \in t$, il existe $a \in M$ tel que $M \models \forall v(\psi(v) \to f(v) = a)$; comme cette formule contient seulement des paramètres dans M, elle appartient à $\mathfrak{D}^c(M)$, d'où $(\psi(v) \to f(v) = a) \in t$.

(*) Tous les termes dans ce théorème sont avec paramètres dans M.

(**) N'ayant aucun risque de confusion, dans ce paragraphe on omettra le référence à la satisfaction dans M; ainsi "$f \upharpoonright \psi$ injective" veut dire $M \models f \upharpoonright \psi$ injective.

Puisque $\psi(v) \in t$ on peut conclure que $(f(v) = a) \in t$.

$(0') \Rightarrow (0)$. Appelons $\psi(v)$ la formule $f(v) = a$; donc $\psi \in t$ et $M \models \forall v(\psi(v) \rightarrow f(v) = a)$, i.e., $f \restriction \psi$ constant.

$(3') \Rightarrow (3)$. Preuve analogue à celle de $(0') \rightarrow (0)$; soit $\psi(v)$ la formule $g(f(v)) = v$. Donc $\psi \in t$ et $\psi(u) \wedge \psi(v)$ implique $g(f(v)) = v \wedge g(f(u)) = u$; il s'en suit que

$$\psi(u) \wedge \psi(v) \wedge f(u) = f(v) \rightarrow u = v,$$

i.e., $f \restriction \psi$ injective.

$(3) \Rightarrow (3')$. Si $f \restriction \psi$ injective pour un $\psi \in t$, posons

$$g(w) = \mu v(\psi(v) \wedge f(v) = w).$$

Evidemment on a :

$$M \models \forall v [\psi(v) \rightarrow g(f(v)) = v].$$

L'argument utilisé dans la preuve de $(0) \Rightarrow (0')$ permet de conclure que $(\psi(v) \rightarrow g(f(v)) = v) \in t$ et donc aussi la formule $(g(f(v)) = v)$ y appartient.

Pour démontrer l'équivalence $(a_1) \Leftrightarrow (b_1)$ nous aurons besoin du fait suivant :

<u>I.4. Lemme</u>. Si $M \prec N$, alors le segment initial de N déterminé par M :

$$M' = \{b \in N \mid \text{il existe } a \in M \text{ tel que } b \leq a \},$$

est une sous-structure élémentaire de N.

<u>Démonstration</u>. Par (G) du §0 il suffit de voir que M' est clos par images dans N de termes à un argument. Soient $f(v)$ un tel terme et $b \in M'$; alors $b \leq a$ pour un $a \in M$, et aussi $f^N(b) \leq \max \{ f^N(v) \mid v \leq a \}$. Or $\max \{ f^N(v) \mid v \leq a\} \in M$, d'où $f^N(b) \in M'$.

<u>Démonstration du Théorème I.2</u>. En vertu de I.3. et la remarque qui lui précède il suffit de prouver $(a_i) \Leftrightarrow (b_i)$.

$(a_0) \Leftrightarrow (b_0)$. Les équivalences suivantes sont facilement vérifiées en utilisant les faits que tout $x \in M\binom{t}{c}$ est de la forme $x = f(c)$ pour un terme $f(v)$, que c réalise t et que t est complet :

$M \prec_f M\binom{t}{c} \Leftrightarrow$
pour tout $x \in M\binom{t}{c}$, soit $x \in M$, soit $M < x \Leftrightarrow$
pour tout terme $f(v)$, soit $f(c) \in M$, soit $M < f(c) \Leftrightarrow$
pour tout terme $f(v)$, soit il existe $a \in M$ tel que $f(c) = a$, soit $f(c) > a$ pour tout $a \in M \Leftrightarrow$
pour tout terme $f(v)$, ou bien il existe $a \in M$ tel que $(f(v) = a) \in t$, ou bien $(f(v) > a) \in t$ pour tout $a \in M$.

$(a_1) \Leftrightarrow (b_1)$. Par le lemme I.4. on a

$$(*)\quad \begin{cases} M(^t_c) \text{ extension } \prec_f\text{-minimale de } M \Leftrightarrow \\ \text{pour tout } x \in M(^t_c),\ x \in M \text{ ou } M(x) \text{ est cofinal dans } M(c). \end{cases}$$

En effet, si $M \underset{\neq}{\prec}_f N \underset{\neq}{\prec}_f M(^t_c)$ pour un certain N, en choisissant $x \in N - M$ on aura $M \underset{\neq}{\prec}_f M(x) \underset{\neq}{\prec}_f M(^t_c)$, et donc $c > M(x)$; il en résulte que $x \notin M$ et $M(x)$ n'est pas cofinal dans $M(c)$. Réciproquement, s'il existe $x \in M(^t_c) - M$ tel que $M(x)$ n'est pas cofinal dans $M(^t_c)$, comme on peut supposer $M \prec_f M(^t_c)$, par I.4 on aura $M \underset{\neq}{\prec}_f N \underset{\neq}{\prec}_f M(^t_c)$, où N' est le segment initial de $M(^t_c)$ déterminé par $M(x)$.

Vu la forme des éléments de $M(x)$ la condition "$M(x)$ est cofinal dans $M(c)$" équivaut à :

(**) il existe un terme $g(w)$ tel que $g(x) \geq c$.

En effet, si $g(x) \geq c$, alors pour tout $y \in M(c)$ - i.e., $y = h(c)$ pour quelque terme h - on a :

$y = h(c) \leq \max\{h(v) \mid v \leq g(x)\} \in M(x)$.

L'implication inverse est évidente.

Vu la forme des membres de $M(c)$, de (*) et (**) on obtient immédiatement l'équivalence entre (a_1) et

pour tout terme $f(v)$, ou bien $f(c) \in M$, ou bien
il existe un terme $g(w)$ tel que $g(f(c)) \geq c$.

Puisque c réalise t, il est évident que cette condition équivaut à (b_1).

$(a_2) \Leftrightarrow (b_2)$. Ceci suit des équivalences suivantes, que le lecteur pourra justifier sans peine :

$M(^t_c)$ extension $\prec$-minimale de M $\Longleftrightarrow$
pour tout $x \in M(^t_c)$, ou bien $x \in M$, ou bien $M(x) = M(c)$ $\Longleftrightarrow$
pour tout $x \in M(^t_c)$, ou bien $x \in M$, ou bien $c \in M(x)$ $\Longleftrightarrow$
pour tout terme $f(v)$, ou bien $f(c) \in M$, ou bien il existe un terme $g(w)$ tel que $g(f(c)) = c$.

I.5. Remarques. (a) La condition (b_1) du Théorème I.2. peut être améliorée; elle est équivalente à :

(b_1') pour tout terme $f(v)$, ou bien il existe $a \in M$ tel que $(f(v) = a) \in t$, ou bien il existe un terme *pur* (i.e. *sans paramètres*) $h(w)$ tel que $(h(f(v)) \geq v) \in t$.

L'implication $(b_1) \Rightarrow (b_1')$ s'obtient en posant

$$h(w) = \max\{g'(u,w) \mid u \leq w\},$$

où $g'(u,w)$ est un terme *pur* tel que le terme $g(w)$ est $g'(b,w)$ pour quelque $b \in M$. Ainsi on a : $\models u \leq w \to g'(u,w) \leq h(w)$. Comme on peut supposer que $(f(v) = a) \notin t$ pour tout $a \in M$ et que $M \prec_f M(^t_c)$, de (b_o) on obtient $(f(v) > a) \in t$ pour tout $a \in M$, d'où $(f(v) > b) \in t$, et donc la formule

$$v \leq g(f(v)) = g(b,f(v)) \leq h(f(v)),$$

i.e., $v \leq h(f(v))$ aussi appartient à t. L'autre implication est triviale.
Cette amélioration sera utilisée plus loin.

(b) Il est clair que $(c_2) \Rightarrow (c_0)$. Donc toute extension $\prec$ - minimale de M de la forme $M(^t_c)$, où t est complet et non-borné, est une extension finale. Ainsi nous avons :

<u>I.6. Corollaire</u> (de I.4). Soit N extension $\prec$ - minimale de M. Alors $M \prec_f N$ ou M est cofinal dans N. Si $N = M(^t_c)$, où t est un type complet et non-borné, alors $M \prec_f N$.

<u>Démonstration</u>. Soit M' le segment initial de N déterminé par M. Par I.4, $M \prec M' \prec N$. Si $M' = M$, alors $x > M$ pour tout $x \in N-M$ et $N \succ_f M$. Si $M' = N$, alors M est cofinal dans N. Si $N = M(^t_c)$, alors $c > M$, d'où $N \succ_f M$.

Le théorème I.2. admet une version pour des types non forcément complets.

<u>I.7. Proposition</u> (version de I.2 pour t non-complet). Si t est non-borné, on a pour chaque $i \leq 2$ l'équivalence $(a_i') \Leftrightarrow (c_i')$ suivante :

(a_i') Pour tout type t' complet sur M tel que $t' \supseteq t$, M et $M(^{t'}_c)$ ont la relation (a_i) du Théorème I.2;

(c_i') Pour tout terme $f(v)$ (et, dans le cas $i = 0$, pour tout $a \in M$) il existe un ensemble fini de formules $\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}$ telles que $t \models \bigvee_{k=0}^{n-1} \psi_k$ et pour chaque $j \leq n-1$, $f \restriction \psi_j$ vérifie la condition (c_i) du Théorème I.2.

<u>Démonstration</u> $(a_i') \Rightarrow (c_i')$. Ceci est une application simple de la compacité qui équivaut essentiellement au fait que t est l'intersection des types complets qui le contiennent.

Soit $f(v)$ donné et soit $P_i(\psi)$ la condition (c_i) de I.2 (par exemple, si $i = 2$, $P_i(\psi)$ est "$f \restriction \psi$ constante ou $f \restriction \psi$ injective"). Soit $\{t_j \mid j \in J\}$ la famille des types complets contenant t; noter que chaque t_j est non-borné. En appliquant l'implication $(a_i) \Rightarrow (c_i)$ de I.2 au type t_j on obtient une formule $\psi_j \in t_j$ telle que $P_i(\psi_j)$. Supposons qu'il n'y ait pas de sous-ensemble fini de $\{\psi_j \mid j \in J\}$ dont le disjonction est une conséquence de t. Ceci veut dire que l'ensemble $t \cup \{\neg \psi_j \mid j \in J\}$ est finiment consistant avec $\mathfrak{D}^c(M)$, et donc, par compacité, consistant. Donc il y aurait un type complet qui le contient, disons t_{j_o} ; alors $\psi_{j_o} \in t_{j_o}$ et $\neg\, \psi_{j_o} \in t_{j_o}$ ce qui contredit la consistance de t_{j_o}.

$(c_i') \Rightarrow (a_i')$. La condition (c_i') entraine que tout type complet t' contenant t contient une des formules ψ_k et donc $f \restriction \psi_k$ vérifie la condition (c_i) du théorème I.2. Puisque $(c_i) \Leftrightarrow (a_i)$, M et $M(^{t'}_c)$ ont la relation (a_i).

§II. L'UNIFORMISATION DES CONSIDÉRATIONS LOCALES.

Dans ce paragraphe nous cherchons à rendre globales les considérations locales du paragraphe précédent, c'est-à-dire à rendre ces considérations valables simultanément dans tout $N \succ M$.

Pour mettre ce programme en œuvre on devra d'abord trouver une manière de se donner un type non seulement sur M mais simultanément sur tout $N \succ M$. La seconde étape consiste à développer les constructions et les arguments locaux encore dans le modèle initial M mais cette fois de manière uniforme par rapport aux paramètres de M.

Nous discutons d'abord des manières de se donner des types simultanément pour tout $N \succ M$.

(A) Schémas de types.

II.1. Définition. Un schéma de type sur M est un ensemble t^* de formules $\psi(\bar{u},v)$ de L(*) clos par conjonction et tel que l'ensemble

$$t^*(M,v) = \{\psi(\bar{a},v) \mid \bar{a} \in M,\ \ell(\bar{u}) = \ell(\bar{a}) \text{ et } \psi(\bar{u},v) \in t^*\}$$

engendre un type sur M [i.e., est consistant avec $\mathcal{D}^c(M)$(**)] .

Un argument habituel de compactité montre qu'un schéma de type sur M définit auto-automatiquement un type sur chaque $N \succ M$.

II.2. Remarque. Tout schéma de type sur M est aussi un schéma de type sur chaque $N \succ M$.

Démonstration. Il faut voir que $t^*(N,v)$ engendre un type sur N, c'est-à-dire consistant avec $\mathcal{D}^c(N)$, pour tout $N \succ M$. Par compacité il suffit de voir que pour tout $n \in \omega$, $\psi_1(\bar{u}_1,v),\ldots,\psi_n(\bar{u}_n,v) \in t^*$ et $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n \in N$, $\ell(\bar{u}_i) = \ell(\bar{b}_i)$ $(i = 1,\ldots,n)$,

$$\mathcal{D}^c(N) \cup \{\psi_i(\bar{b}_i,v) \mid i = 1,\ldots,n\}$$

est consistant. Comme t^* est clos par conjonction il suffit de le prouver pour une seule formule, $\psi(\bar{b},v)$.

Désignons par $\bar{a}$ les éléments de $\bar{b}$ appartenant à M, et $\bar{b}'$ ceux appartenant à $N-M$; écrivons $\psi(\bar{b},v)$ dans la forme $\psi(\bar{a},\bar{b}',v)$. Si $\psi(\bar{b},v)$ n'est pas consistante avec $\mathcal{D}^c(N)$, on aura

$$\mathcal{D}^c(N) \models \forall v\ \neg\, \psi(\bar{a},\bar{b}',v)$$

d'où

$$\mathcal{D}^c(N) \models \exists \bar{w}\ \forall v\ \neg\, \psi(\bar{a},\bar{w},v).$$

Puisque $M \prec N$, on a

$$M \models \exists \bar{w}\ \forall v\ \neg\, \psi(\bar{a},\bar{w},\bar{v});$$

soit $\bar{a}' \in M$ tel que $M \models \forall v\ \neg\, \psi(\bar{a},\bar{a}',v)$. Ceci entraine

---

(*) La longueur de la suite $\bar{u}$ étant variable.

(**) Nous allons confondre par la suite l'ensemble $t^*(M,v)$ avec le type $\hat{t}^*(M,v)$ qu'il engendre; cf. §0.D.

$$\mathfrak{B}^c(M) \models \forall v \ \neg\psi(\bar{a},\bar{a}',v)$$

ce qui contredit les faits que $\psi(\bar{a},\bar{a}',v) \in t^*(M,v)$ et ceci est un type sur M.

Ensuite nous allons illustrer le second aspect de nos propos, à savoir, le principe que <u>la globalisation d'une propriété locale (de M) équivaut à l'uniformisation de cette propriété par rapport aux paramètres de M</u>.

<u>II.3. Définition</u>. (Les formules considérées ici peuvent avoir des paramètres dans M). On dit que la formule $\psi(v)$ <u>décide</u> la formule $\phi(v)$ ssi

$$M \models \forall v(\psi(v) \to \phi(v)) \vee \forall v(\psi(v) \to \neg\phi(v)).$$

On dit que $\psi(\bar{w},v)$ <u>décide</u> $\phi(v)$ s'il existe $\bar{b} \in M$ tel que $\psi(\bar{b},v)$ décide $\phi(v)$, c'est-à-dire

$$M \models \exists\bar{w}\ [\forall v(\psi(\bar{w},v) \to \phi(v)) \vee \forall v(\psi(\bar{w},v) \to \neg\phi(v))]\ .$$

On dit que $\psi(\bar{w},v)$ <u>décide</u> $\phi(\bar{u},v)$ (*) si $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(\bar{a},v)$ pour tout $\bar{a} \in M$, i.e.,

$$M \models \forall\bar{u}\ \exists\bar{w}\ [\forall v(\psi(\bar{w},v) \to \phi(\bar{u},v)) \vee \forall v(\psi(\bar{w},v) \to \neg\phi(\bar{u},v))]\ .$$

On dit que $\psi(\bar{w},v)$ <u>décide</u> $\phi(\bar{u},v)$ <u>positivement</u> ssi

$$M \models \forall\bar{u}\ \exists\bar{w}\ \forall v(\psi(\bar{w},v) \to \phi(\bar{u},v)).$$

Considérons les versions locales et globales de la propriété d'être un type complet, i.e. :

$(i)_M$ pour tout $N > M$, $t^*(N,v)$ est un type complet sur N.

Il est clair que (i) est la "globalisation" de $(i)_M$. Considérons maintenant les conditions :

$(ii)_M$ pour toute formule $\phi(v)$ (à paramètres dans M) il existe $\psi(v) \in t^*(M,v)$ telle que $\psi(v)$ décide $\phi(v)$;

(ii) pour toute formule $\phi(\bar{u},v)$ de L (i.e. sans paramètres) il existe $\psi(\bar{w},v) \in t^*$ telle que $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(\bar{u},v)$.

Il est clair que (ii) est l'uniformisation de $(ii)_M$ par rapport aux paramètres de M; en explicitant les paramètres dans $(ii)_M$ on voit plus clairement à quoi consiste l'uniformisation :

$(ii)_M$ s'explicite : pour toute formule $\phi(\bar{u},v)$ de L (sans paramètres) et pour tout $\bar{a} \in M$ il existe $\psi(\bar{w},v) \in t^*$ et $\bar{b} \in M$ tels que $\psi(\bar{b},v)$ décide $\phi(\bar{a},v)$;

(ii) s'explicite : pour toute formule $\phi(\bar{u},v)$ de L (sans paramètres) il existe $\psi(\bar{w},v) \in t^*$ telle que pour tout $\bar{a} \in M$ il existe $\bar{b} \in M$ tels que $\psi(\bar{b},v)$ décide $\phi(\bar{a},v)$. C'est-à-dire, on a "fait passer" un quantificateur existentiel devant un quantificateur universel : $\forall\forall\exists\exists \rightsquigarrow \forall\exists\forall\exists$.

On démontre par la suite que $(i)_M \Leftrightarrow (ii)_M$ et que $(i) \Leftrightarrow (ii)$; cette dernière équivalence illustre bien le "principe" énoncé plus haut.

(*) $\bar{w}$ et $\bar{u}$ n'ont pas forcément même longueur.

II.4. Proposition. Il y a équivalence entre $(i)_M$ et $(ii)_M$, et entre (i) et (ii).

Démonstration. $(i)_M \Rightarrow (ii)_M$ est démontré par un argument simple de compacité qu'on laisse comme exercice.

$(ii)_M \Rightarrow (i)_M$. Puisque $\psi \in t^*(M,v)$, on a $\phi \in t^*(M,v)$ si $M \models \psi \to \phi$, $\neg\phi \in t^*(M,v)$ si $M \models \psi \longrightarrow \neg\phi$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Pour tout $N > M$, (ii) $\Rightarrow (ii)_N \Rightarrow (i)_N$; donc (ii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons non (ii) : il existe $\phi(\bar{u},v)$ formule de L telle que pour tout $\psi(\bar{w},v) \in t^*$ il existe $a_\psi \in M$ tel que $\psi(\bar{w},v)$ ne décide pas $\phi(\bar{a}_\psi,v)$, ce qui s'exprime $M \models \theta_\psi[\bar{a}_\psi]$ où $\theta_\psi(\bar{u})$ est la formule

$$\forall w\ [\exists v(\psi(\bar{w},v) \wedge \phi(\bar{u},v)) \wedge \exists v(\psi(\bar{w},v) \wedge \neg\phi(\bar{u},v))]\ .$$

Il est facile à vérifier que $\vdash \theta_{\psi_1 \wedge \psi_2}(\bar{u}) \to \theta_{\psi_1}(\bar{u}) \wedge \theta_{\psi_2}(\bar{u})$; donc l'ensemble Θ des conséquences de $\{\theta_\psi(\bar{u}) \mid \psi \in t^*\}$ est clos par conjonction, puisque t^* l'est. Ceci et $M \models \theta_\psi[\bar{a}_\psi]$ impliquent que Θ est finiment consistant avec $\mathcal{D}^c(M)$. Donc il existe $N > M$ avec $\bar{a} \in N$ tels que $N \models \Theta[\bar{a}]$; la formule $\phi(\bar{a},v)$ n'est pas décidée dans N par aucune formule $\psi(\bar{w},v) \in t^*$, donc par aucune formule $\psi(v) \in t^*(N,v)$. Ceci prouve non $(ii)_N$ et donc non $(i)_N$, ce qui entraine non (i).

On appellera <u>schémas complets</u> ceux qui vérifient les conditions équivalentes (i) et (ii).

Remarque. On peut construire M et t^* tels que $(ii)_M$ est vérifié, mais pas uniformément, c'est-à-dire, (ii) est faux (cf. Exemple III.4). Donc, au contraire de ce qui se passe pour la consistance (cf. Remarque II.2) la complétude de $t^*(M,v)$ n'entraine pas celle du schéma t^* .

Il est parfois commode d'identifier les schémas de type selon la relation d'équivalence suivante :

II.5. Définition. Deux schémas de type t_1^*, t_2^* sur M sont <u>équivalents</u>, $t_1^* \equiv t_2^*$, ssi pour tout $N > M$, $t_1^*(N,v) = t_2^*(N,v)$.

Tout schéma t^* est équivalent dans ce sens à un autre schéma $\hat{t}^*$ - appelé la <u>clôture de</u> t^* - qui est souvent plus facile à manier.

II.6. Lemme. Soit t^* un schéma de type sur M et $\hat{t}^* = \{\phi(\bar{u},v) \mid$ il existe $\psi(\bar{w},v) \in t^*$ tel que $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(\bar{u},v)$ positivement$\}$. Alors $\hat{t}^*$ est un schéma de type sur M et $t^* \equiv \hat{t}^*$.

La démonstration est laissée au lecteur comme exercice facile.

D'après ce lemme on pourra substituer, sans perte de généralité, un schéma par sa clôture, c'est-à-dire, on pourra supposer qu'il est <u>clos</u> (i.e., $t^* = \hat{t}^*$).

On utilisera plus tard la propriété suivante :

II.7. Lemme. Soient t^* un schéma sur M, clos et complet, et $\phi(\bar{u},v)$ une formule. Si $\phi(\bar{a},v) \in t^*(M,v)$ pour tout $\bar{a} \in M$, alors $\phi(\bar{u},v) \in t^*$.

Démonstration. Comme t^* est complet, il existe $\psi(\bar{w},v)$ décidant $\phi(\bar{u},v)$:

$$M \models \forall\bar{u}\ \exists\bar{w}\ [\forall v(\psi(\bar{w},v) \to \phi(\bar{u},v)) \vee \forall v(\psi(\bar{w},v) \to \neg\phi(\bar{u},v))]\ .$$

Le fait que $\phi(\bar{a},v) \in t^*(M,v)$ pour tout $a \in M$ implique l'impossibilité de la seconde alternative pour aucun w; donc $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(\bar{u},v)$ positivement, d'où $\phi(\bar{u},v) \in t^*$ puisque t^* est clos.

(B) Types définissables.

Il s'agit d'une deuxième manière de se donner un type globalement, mais qui s'avère équivalente à la première.

II.8. Définition (a). On appelle définition de type sur M toute fonction d qu'à chaque formule $\phi(\bar{u},v)$ associe une formule $d_\phi(\bar{u})$ de façon telle que quels que soient $\phi_1(\bar{u}_1,v),\ldots,\phi_n(\bar{u}_n,v)$, on ait

$$M \models \forall\bar{u}_1 \ldots \forall\bar{u}_n \exists v\, [\bigwedge_{i=1}^{n} (d_{\phi_i}(\bar{u}_i) \rightarrow \phi_i(\bar{u}_i,v))] .$$

(b) On dira qu'une définition de type d est complète ssi pour toute formule $\phi(\bar{u},v)$,

$$M \models \forall\bar{u}(d_{\neg\phi}(\bar{u}) \longleftrightarrow \neg d_\phi(\bar{u})).$$

(c) Etant donné une définition de type d sur M et $N \succ M$, on pose :

$$d(N,v) = \{\phi(\bar{a},v) \mid \bar{a} \in N \text{ et } N \models d_\phi[\bar{a}]\}.$$

(d) Un type $t(v)$ sur M est définissable ssi il existe une définition de type d sur M telle que $t(v) = d(M,v)$; c'est-à-dire, ssi pour toute formule $\phi(\bar{u},v)$ et tout $\bar{a} \in M$,

$$\phi(\bar{a},v) \in t \Leftrightarrow M \models d_\phi[\bar{a}] .$$

On appellera la fonction d un schéma définissant t.

Remarques. (a) La définissabilité d'un type signifie que chaque propriété de premier ordre d'un élément réalisant t dans une extension de M peut être caractérisée déjà dans M.

(b) La formule d_ϕ peut, en général, avoir des paramètres dans M (auquel cas le type t sera appelé, si besoin est, définissable à paramètres).

(c) La condition de II.8 (a) est manifestement équivalente à ce que $d(N,v)$ soit finiment consistant avec $\mathfrak{D}^c(N)$; donc, si d est une définition de type sur M, $d(N,v)$ engendre un type sur N, pour tout $N \succ M$. Notons en plus que d est complète ssi $d(M,v)$ est un type complet ssi pour tout $N \succ M$, $d(N,v)$ est un type complet.

(d) Remarquons que si d est une définition de type complète et si $\phi(\bar{u})$ ne contient pas la variable v, alors par II.8 (a) et (b) on a $M \models \forall\bar{u}(d_\phi(\bar{u}) \leftrightarrow \phi(\bar{u}))$. Donc on peut supposer, sans perte de généralité, que toute définition de type complète est telle que $d_\phi = \phi$ pour toute formule ne contenant pas la variable v.

On montre maintenant que la donnée d'une définition de type complète est équivalent à celle d'un schéma de type complet :

II.9. Proposition (a). Si d est une définition de type complète sur M, il existe un schéma de type complet t^* sur M tel que pour tout $N \succ M$, $d(N,v) = t^*(N,v)$.

(b) Réciproquement, pour tout schéma de type complet t^* sur M, il existe une définition de type complète d sur M telle que pour tout $N \succ M$, $t^*(N,v) = d(N,v)$.

Démonstration. (a) Etant donné d, posons

$$t^*(v) = \{d_\phi(\bar{u}) \to \phi(\bar{u},v) \mid \phi(\bar{u},v) \text{ formule de } L\}.$$

Par II.8 (a) il est évident que pour $N \succ M$, $t^*(N,v)$ est finiment consistant avec $\mathcal{D}^c(N)$, i.e. il engendre un type sur N. D'autre part, de

$$\phi(\bar{a},v) \in d(N,v) \Leftrightarrow N \models d_\phi[a] \Leftrightarrow d_\phi(\bar{a}) \in \mathcal{D}^c(N),$$

et parce que $\mathcal{D}^c(N) \subseteq t^*(N,v)$, $(d_\phi(\bar{a}) \to \phi(\bar{a},v)) \in t^*(N,v)$ et $t^*(N,v)$ est clos par conséquence logique, on obtient l'inclusion $d(N,v) \subseteq t^*(N,v)$. Puisque $d(N,v)$ est un type complet on a forcément l'égalité.

(b) Réciproquement, étant donné un schéma de type complet sur M, soit d la fonction ainsi définie : par II.4, pour toute formule $\phi(\bar{u},v)$ il existe $\psi(\bar{w},v) \in t^*$ telle que $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(\bar{u},v)$; on choisit une telle ψ et on pose :

$d_\phi(\bar{u})$: $\exists \bar{w}\ \forall v(\psi(\bar{w},v) \to \phi(\bar{u},v)$ (i.e., $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(\bar{u},v)$ positivement)

Pour $N \succ M$ et $\bar{a} \in N$, on a :

$\phi(\bar{a},v) \in d(N,v) \Leftrightarrow$

$N \models d_\phi[\bar{a}] \Leftrightarrow$

il existe $\bar{b} \in N$ tel que $N \models \psi(\bar{b},v) \to \phi(\bar{a},v) \Leftrightarrow$

$\phi(\bar{a},v) \in t^*(N,v)$.

Les deux premières équivalences et l'implication $\Rightarrow$ dans la dernière sont évidentes; quant à l'implication réciproque, puisque $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(\bar{u},v)$, il y a bien $\bar{b} \in N$ tel que $N = (\psi(\bar{b},v) \to \phi(\bar{a},v)) \vee (\psi(\bar{b},v) \to \phi(\bar{a},v))$; le second membre de cette disjonction aurait comme conséquence l'inconsistance de $t^*(N,v)$; donc $N \models \psi(\bar{b},v) \to \phi(\bar{a},v)$.

Ceci prouve que $d(N,v)$ est un type sur N, et donc par la remarque (c) ci-dessus, que d est une définition de type sur M; en plus, puisque $t^*(M,v) = d(M,v)$ est un type complet sur M, encore par la remarque (c), d est complète.

La proposition ci-dessus complète l'information donnée jusqu'ici :

II.10. Proposition. Soit $t(v)$ un type complet sur M.

(a) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) pour toute relation R définissable (avec paramètres) dans $M(^t_c)$, $R \upharpoonright M$ est définissable (avec paramètres) dans M;

(2) t est définissable;

(3) il existe un schéma de type complet t^* sur M tel que $t(v) = t^*(M,v)$.

(b) La fonction d définissant t et le schéma t^* de (a) sont uniques dans le sens suivant : si d^1 est une définition de type et t_1^* un schéma de type complet sur M tels que

$$d^1(M,v) = t(v) = t_1^*(M,v),$$

alors pour tout $N \succ M$,

$$d^1(N,v) = d(N,v) = t^*(N,v) = t_1^*(N,v).$$

Démonstration. (a).

(1) $\Rightarrow$ (2). Soit $\phi(\bar{u},v)$ une formule de L; alors $\phi(\bar{u},c)$ définit une relation R sur $M(^t_c)$. Par (1) il existe une formule, que nous notons $d_\phi(\bar{u})$, telle que $R \restriction M = (d_\phi)^M$. On vérifie aisèment que $\phi(\bar{a},v) \in t(v) \Leftrightarrow M \models d_\phi [a]$, i.e. que d définit t dans M.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supposons que R est définie dans $M(^t_c)$ par la formule $\psi(\bar{u},\bar{b})$ avec paramètres $\bar{b} = \langle b_1,\ldots,b_k\rangle \in M(^t_c)$. Chaque paramètre s'écrit $b_i = f_i(\bar{a}_i,c)$ pour un terme f_i et $\bar{a}_i \in M$; donc $\psi(\bar{u},\bar{b}) = \phi(\bar{u},\bar{a},c)$ où $\bar{a} = \bar{a}_1 {}^\frown \ldots {}^\frown \bar{a}_k$ et $\phi(\bar{u},\bar{w},v) = \psi(\bar{u},f_1(\bar{w}_1,),\ldots,f_k(\bar{w}_k,v))$ avec $\bar{w} = \bar{w}_1 {}^\frown \ldots {}^\frown \bar{w}_k$. Comme c réalise t, pour $\bar{x} \in M(^t_c)$ on a :

$$\bar{x} \in R \Leftrightarrow M(^t_c) \models \phi\, [\bar{x},\bar{a},\bar{c}] \Leftrightarrow \phi(\bar{x},\bar{a},\bar{v}) \in t(v).$$

Si d est le schéma définissant t, puisque $\bar{a} \in M$ on obtient :

$$\bar{x} \in R \restriction M \Leftrightarrow \bar{x} \in M \wedge \bar{x} \in R \Leftrightarrow \bar{x} \in M \wedge \phi(\bar{x},\bar{a},v) \in t(v) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow M = d_\phi\, [\bar{x},\bar{a}]\ ,$$

c'est-à-dire, la formule $d_\phi(\bar{u},\bar{a})$ définit $R \restriction M$ dans M. Remarquez que cette équivalence reste valable même lorsque t n'est pas complet.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). Ceci est la Proposition II.9.

(b) Comme les schémas d et d^1 définissent tous les deux le type t dans M, on a :

$$\phi(\bar{a},v) \in t(v) \Leftrightarrow M \models d_\phi\, [\bar{a}]\ ,$$
$$\phi(\bar{a},v) \in t(v) \Leftrightarrow M \models d^1_\phi\, [\bar{a}]$$

pour toute formule ϕ et tout $\bar{a} \in M$; donc, $M \models \forall \bar{u}(d_\phi(\bar{u}) \leftrightarrow d^1_\phi(\bar{u}))$.
Cette équivalence étant à paramètres dans M, elle est valable dans tout $N \succ M$, d'où

(*) $d^1(N,v) = d(N,v)$.

Le schéma t^*_1 étant complet, de la Proposition II.4 il suit que pour toute formule $\phi(\bar{u},v)$ il existe $\psi(\bar{w},v) \in t^*$ telle que $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(\bar{u},v)$, i.e. la formule

(**) $\forall \bar{u}\ \exists \bar{w}(\forall v(\psi(\bar{w},v) \to \phi(\bar{u},v)) \vee \forall v(\psi(\bar{w},v) \to \neg\phi(\bar{u},v))$

est valable dans tout $N \succ M$. Nous démontrons,

(***) $\phi(\bar{a},v) \in t^*_1(N,v) \Rightarrow N \models d^1_\phi\ [\bar{a}]$.

Sinon, comme $d^1(M,v) = t(v)$ et t complet entraînent que d^1 est complète, on aurait $N \models \exists \bar{u}\ d^1_{\neg\phi}\ (\bar{u})$; puisque $N \succ M$ on aurait donc un $\bar{b} \in M$ tel que $M \models d^1_{\neg\phi}[\bar{b}]$, i.e. $\neg\phi(\bar{b},v) \in d^1(M,v)$. D'autre part, $\phi(\bar{a},v) \in t^*_1(N,v)$ implique que le second cas de (**) est impossible, d'où $\phi(\bar{b},v) \in t^*_1(M,v)$. Ainsi on a conclu $t^*_1(M,v) \neq d^1(M,v)$, ce qui contredit l'hypothèse du théorème.

En appliquant (***) à $\neg\phi$ on obtient l'implication réciproque, d'où :

(****) $t^*_1(N,v) = d^1(N,v)$ pour $N \succ M$.

Le même argument (ou, alternativement, la preuve de II.9) démontre que $t^*(N,v) = d(N,v)$ pour $N \succ M$. Ceci et (*) complètent la preuve de II.10.

Nous allons maintenant combiner ensemble l'aspect étudié au §I avec les présentes "considérations globales" : le théorème II.11 est une version globale, uniforme, de la Proposition I.2. Ci-dessous, pour tout schéma t^*, on note $M(^{t^*}_c)$ le modèle $M(^{t^*(M,v)}_c)$; et si $f(u,v)$, $\psi(u,v)$ sont un terme et une formule, et $a \in M$, on écrit f_a et ψ_a au lieu de $f(a,v)$ et $\psi(a,v)$.

<u>II.11. Théorème</u>. Soit t^* un schéma de type sur M, tel que $t^*(M,v)$ soit un type complet et non-borné sur M. Pour chaque $i \le 2$ on a les équivalences $(a_i) \Leftrightarrow (b_i) \Leftrightarrow (c_i)$:

(a_o) pour tout $N \succ M$, $N \prec_f N(^{t^*}_c)$;

(b_o) pour tout terme pur $f(u,v)$ il existe un terme pur $f_1(u)$ tel que pour tous $N \succ M$ et $a \in N$, soit $(f(a,v) = f_1(a)) \in t^*(N,v)$, soit pour tout $c \in N$, $(f(a,v) > c) \in t^*(N,v)$;

(c_o) pour tout terme pur $f(u,v)$ il existe $\psi(w,v) \in t^*$ telle que $M \models \forall a\, [\exists b(f_a \restriction \psi_b \text{ constante}) \vee \forall c\ \exists b(f_a \restriction \psi_b > c)]$.

(a_1) pour tout $N \succ M$, $N(^{t^*}_c)$ est extension $\prec_f$-minimale de N;

(b_1) pour tout terme pur $f(u,v)$ il existe des termes purs $f_1(u)$, $f_2(u)$ tels que pour tous $N \succ M$ et $a \in N$, $(f(a,v) = f_1(a) \in t^*(N,v)$ ou $(f_2(f(a,v)) \ge v) \in t^*(N,v)$;

(c_1) pour tout terme pur $f(u,v)$ il existe $\psi(w,v) \in t^*$ telle que $M \models \forall a\ \exists b(f_a \restriction \psi_b \text{ constante} \vee f_a \restriction \psi_b \to \infty)$.

(a_2) pour tout $N \succ M$, $N(^{t^*}_c)$ est extension $\prec$-minimale de N;

(b_2) pour tout terme pur $f(u,v)$ il existe des termes purs $f_1(u)$, $f_3(u,x)$ tels que pour tous $N \succ M$ et $a \in N$, $(f(a,v) = f_1(a)) \in t^*(N,v)$ ou $f_3(a,f(a,v)) = v) \in t^*(N,v)$;

(c_2) pour tout terme pur $f(u,v)$ il existe $\psi(w,v) \in t^*$ telle que $M \models \forall a\ \exists b(f_a \restriction \psi_b \text{ constante} \vee f_a \restriction \psi_b \text{ injective})$.

<u>Démonstration</u>. On montre $(a_i) \Rightarrow (c_i) \Rightarrow (b_i) \Rightarrow (a_i)$. La preuve s'appuie sur les équivalences correspondantes du Théorème 1.2. Comme illustration on fait la preuve du cas i=1.
$(a_1) \Rightarrow (c_1)$. Argument de compacité semblable à celui de la Proposition II.4.
Supposons non (c_1) : il existe un terme $f(u,v)$ tel que pour toute formule $\psi(w,v) \in t^*$ on a $M \models \exists a\ \theta_\psi(a)$, où $\theta_\psi(u)$ est la formule $\forall b(\neg(f_u \restriction \psi_b \text{ constante}) \wedge f_u \restriction \psi_b \to \infty)$. C'est-à-dire, chaque formule $\theta_\psi(u)$ est consistante avec $\mathfrak{D}^c(M)$. On vérifie aisèment que $\vdash \theta_{\psi_1 \wedge \psi_2}(u) \to \theta_{\psi_1}(u) \wedge \theta_{\psi_2}(u)$. Donc, l'ensemble $\Theta = \{\theta_\psi(u) \mid \psi(w,v) \in t^*\}$ est finiment constant avec $\mathfrak{D}^c(M)$, d'où il existe $N \succ M$ avec $a \in N$ tel que $N \models \Theta\,[a]$. Ceci veut dire que le terme $f(v) = f(a,v)$ viole la condition (c_1) du Théorème I.2 appliquée au type $t^*(N,v)$; en vertu de l'équivalence $(c_1) \Leftrightarrow (a_1)$ du I.2 il en résulte que $N(^{t^*}_c)$ n'est pas une extension $\prec_f$-minimale de N, i.e. non (a_1).

$(c_1) \Rightarrow (b_1)$. Etant donné le terme $f(u,v)$, soit $\psi(w,v)$ la formule de t^* dont l'existence est assurée par (c_1). Posons

$$f_1(u) = \mu x\,[\,\exists w\ \forall v(\psi(w,v) \to f(u,v) = x)] \quad ,$$
$$h(u,x) = \max\{v \mid \exists w\, \psi(w,v) \wedge f(u,v) \le x\} \ ,$$
$$f_2(x) = \max\{h(u,x) \mid u \le x\}\,.$$

Etant donné $N \succ M$ et $a \in N$, si $M \models \exists b(f_a \wedge \psi_b$ constante), ceci est aussi valable dans N; de $\psi(b,v) \in t^*(N,v)$ et de la définition de f_1 on conclut $(f(a,v) = f_1(a)) \in t^*(N,v)$. Si, par contre, $N \models \exists b(f_a \wedge \psi_b \to \infty)$, alors il existe $c \in N$ tel que $N \models \forall v(v > c \wedge \psi(b,v) \to f(a,v) \ge a)$. Par définition de h et f_2 :

$$N \models f(a,v) \ge a \to h(a,f(a,v)) \le f_2(f(a,v)),$$
$$N \models \psi(b,v) \to v \le h(a,f(a,v)).$$

Comme $t^*(N,v)$ est non-borné et $\psi(b,v)$ y appartient, on conclut que $(f_2(f(a,v)) \ge v) \in t^*(N,v)$.

$(b_1) \Rightarrow (a_1)$. Conséquence triviale de l'implication correspondante du Théorème I.2., appliquée à un $N \succ M$ arbitraire.

<u>Remarques</u>. (a) La définition du terme $f_3(u,x)$ dans la preuve de $(c_2) \Rightarrow (b_2)$ est la suivante :

$$f_3(u,x) = \mu y\,[\exists w(f_u \wedge \psi_w \text{ injective} \wedge \forall w'(f_u\ \psi_{w'} \text{ injective} \to w \le w') \wedge \wedge\, \psi(w,y)) \wedge f(u,y) = x]\,.$$

On ne sait pas si le terme f_3 peut être choisi à une seule variable; cf. Gaifman[G], Théorème 3.13 et discussion.

(b) L'hypothèse que $t^*(M,v)$ est complet et non-borné a servi pour appliquer le Théorème I.2. On aurait pu utiliser au lieu du Théorème I.2. sa version pour t non-complet, la Proposition I.7 : ainsi, on aurait pu se passer même de l'hypothèse que $t^*(M,v)$ est complet et obtenir une version du Théorème II.11 pour t^* quelconque (non-borné). Nous n'énonçons pas cette version, qui est simplement l'uniformisation de la Proposition I.7.

(c) On n'a pas eu besoin, dans II.11, de l'hypothèse plus forte "t^* est un schéma complet"; ce fait est exploité par le Corollaire II.12 ci-dessous. Pourtant sous cette hypothèse (et lorsque t^* est clos), les conditions (b_i) du théorème précédent peuvent être reformulées de manière plus élégante; voir Corollaire II.13.

<u>II.12. Corollaire</u>. Soit t^* un schéma tel que $t^*(M,v)$ est complet sur M. Sont équivalents :

(i) pour tout $N \succ M$, $N \prec_f N\binom{t^*}{c}$;

(ii) t^* est un schéma complet.

<u>Démonstration</u>. (i) $\Rightarrow$ (ii). Evidemment (i) implique (c_0) du Théorème II.11. Ceci appliqué quand $f(u,v)$ est la fonction caractéristique d'une formule $\phi(u,v)$ entraîne l'existence d'une $\psi(\bar{w},v) \in t^*$ telle que

(*) $\quad M \models \forall a\ \exists \bar{b}(f_a \wedge \psi_{\bar{b}}$ constante) (car f ne prenant que deux valeurs l'autre condition de (c_o) du II.11. est impossible). Or, (*) équivaut à dire que $\psi(\bar{w},v)$ décide $\phi(u,v)$; alors t^* est un schéma complet par la Proposition II.4.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Par la Proposition II.10, (ii) entraîne :

(**) pour tout $N \succ M$ et tout $X \subseteq N(^{t^*}_{c})$ définissable dans $N(^{t^*}_{c})$, $X \cap N$ est définissable dans N.

Mais cette condition implique $N \prec_f N(^{t^*}_{c})$; sinon, en choisissant $x \in N(^{t^*}_{c}) - N$ et $a \in N$ tels que $x \leq a$, on pourrait conclure que $X \cap N$ est définissable dans N, où $X = \{z \in N(^{t^*}_{c}) \mid x < z\}$; par le principe du minimum, $X \cap N$ aurait donc un premier élément; or, $X \cap N$, étant la partie supérieure de la coupure de N déterminée par $x \notin N$, n'a pas de premier élément.

<u>II.13. Corollaire</u>. Soit t^* un schéma de type sur M, clos, complet et tel que $t^*(M,v)$ est non-borné. Alors pour $i \leq 2$ on a les équivalences $(a_i) \Leftrightarrow (b_i') \Leftrightarrow (c_i)$, où (a_i) et (c_i) sont les énoncés du Théorème II.11, et :

(b_o') pour tout terme pur $f(u,v)$ il existe un terme pur $f_1(u)$ tel que la formule

$$f(u,v) = f_1(u) \vee f(u,v) > w$$

appartient à t^*.

(b_1') pour tout terme pur $f(u,v)$ il y a des termes purs $f_1(u)$, $f_2(u)$ tels que la formule

$$f(u,v) = f_1(u) \vee f_2(f(u,v)) \geq v$$

appartient à t^*.

(b_2') pour tout terme pur $f(u,v)$ il y a des termes purs $f_1(u)$ et $f_3(u,x)$ tels que la formule

$$f(u,v) = f_1(u) \vee f_3(u,f(u,v)) = v$$

appartient à t^*.

<u>Démonstration</u>. On prouve $(b_i) \Leftrightarrow (b_i')$.

$(b_o) \Rightarrow (b_o')$. Comme $t^*(M,v)$ est clos par conséquence logique, (b_o) implique

$$(f(a,v) = f_1(a) \vee f(a,v) > c) \in t^*(M,v)$$

pour tous $a,c \in M$. Comme t^* est clos et complet, en appliquant le Lemme II.7. à cette formule on obtient bien (b_o').

$(b_o') \Rightarrow (b_o)$. Ceci est immédiat en utilisant le fait qu'un type complet qui contient une disjonction, contient aussi l'un des cas disjoints.

<u>Remarque</u>. Le Lemme II.7 montre clairement que pour un schéma clos et complet t^* sur M, la condition "$t^*(M,v)$ est non-borné" équivaut à la "formule $(v > u)$ appartient à t^*".

<u>(C) Types uniformes.</u>

<u>II.14. Définition</u>. Soit $t(v)$ un type sur M; on dit que t est <u>uniforme</u> ssi :

(a) t est non-borné;

(b) pour tout $N \succ M$, $t(v) \cup \{v > a \mid a \in N\}$ est un type <u>complet</u> sur N.

Autrement dit, un type non-borné est uniforme ssi pour tout $N \succ M$ il n'a qu'une seule extension à un type complet non-borné sur N.

Essentiellement, cette notion est un cas spécial des schémas de type complets; en effet :

II.15. Remarques. (a) t uniforme $\Leftrightarrow t^* = t(v) \cup \{v > u\}$ est un schéma de type complet sur M.

(b) Si t est uniforme, pour tout $N \succ M$ l'unique extension non-bornée et complète de t à N coïncide avec $t^*(N,v)$.

Moyennant cette remarque, tout ce qui a été vu sur les schémas complets se spécialise au cas des types uniformes; par exemple on a :

II.16. Proposition. Un type t sur M est uniforme si et seulement si pour toute formule $\phi(\bar{u},v)$ il existe $\psi(v) \in t$ telle que

$$M \models \forall \bar{u} \ \exists v_o \ [(\forall v > v_o)(\psi(v) \to \phi(\bar{u},v)) \vee (\forall v > v_o)(\psi(v) \to \neg\phi(\bar{u},v))] \ .$$

Démonstration. Résulte de la caractérisation des schémas de type complets (Proposition II.4) par la Remarque II.15(a) ci-dessus).

II.17. Notations. On dira que $\psi(v)$ décide finalement $\phi(\bar{u},v)$ lorsque la formule de la proposition précédente est vérifiée. En général, on dit qu'une propriété s'exprimant par une formule de la forme $\forall u \ \theta(u)$ est finalement vraie (dans M) ssi $M \models \exists u_o(\forall u > u_o) \ \theta(u)$. Par exemple :

$f \restriction \psi$ est finalement égale à $u \Leftrightarrow \exists v_o \ \forall v > v_o \ [\psi(v) \to f(v) = u]$,

$f \restriction \psi$ est finalement constante $\Leftrightarrow \exists u \ \exists v_o \ \forall v > v_o \ [\psi(v) \to f(v) = u]$,

$f \restriction \psi$ est finalement injective $\Leftrightarrow \exists v_o(\forall u > v_o)(\forall v > v_o)$
$[\psi(u) \wedge \psi(v) \wedge u \neq v \to f(u) = f(v)]$.

Le Théorème suivant donne plusieures caractérisations de la notion de type uniforme.

II.18. Théorème. Soit $t(v)$ un type complet et non-borné sur M. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) t est uniforme;

(2) pour tout terme $f(u,v)$ il existe des termes $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$ tels que la formule

$\forall u \ [v > f_1(u) \to f(u,v) = f_2(u) \vee f_3(f(u,v)) \geq v]$

appartient à t;

(3) pour tout $N \succ M$ et toute extension non-bornée t' de t à N, $N(^{t'}_{c})$ est une extension $\prec_f$-minimale de N;

(4) pour tout $N \succ M$ et toute extension non-bornée t' de t à N, $N \prec_f N(^{t'}_{c})$;

(5) pour tout terme $f(u,v)$ il existe $\phi(v) \in t$ telle que

$M \models \forall a [f_a \restriction \phi$ finalement constante $\vee f_a \restriction \phi \to \infty]$;

(6) pour tout $N \succ M$, tout type complet et non-borné sur N qui étend t est définissable à paramètres dans M.

Démonstration. Celle-ci est faite suivant le schéma :

$$\begin{tikzcd}
 & (2) \arrow[rr, Rightarrow] & & (3) \arrow[d, Rightarrow] \\
(5) \arrow[r, Leftrightarrow] & (1) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & (4) \arrow[ll, Rightarrow] \\
 & & (6) \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

L'implication (3) $\Rightarrow$ (4) est triviale.

(1) $\Rightarrow$ (6) résulte directement de l'équivalence entre (2) et (3) de la Proposition II.10. (a).

(6) $\Rightarrow$ (4) suit du fait que toute extension $N \to N(^{t'}_{c})$, où t' est un type définissable et complet sur N, est une extension finale.

La preuve de ce fait est l'argument de (ii) $\Rightarrow$ (i) du II.12. (appliqué au type t' au lieu du schéma t^*) et l'équivalence entre (2) et (3) du II.10. (a). Ce même fait et la Remarque II.15. (a) prouvent l'équivalence entre (1) et

(1') pour tout $N \succ M$, $N \prec_f N(^{t^*}_{c})$

où ici (et par la suite) t^* désigne l'ensemble $t(v) \cup \{v > u\}$, qui manifestement est un schéma sur M puisque t est non-borné.

(1) $\Rightarrow$ (5). Par (1') et l'équivalence $(a_o) \Leftrightarrow (c_o)$ du II.11. appliquée à t^* on obtient que pour tout terme $f(u,v)$ il existe $\psi(w,v) \in t^*$ telle que

(*) $M \models \forall a\ [\ \exists b(f_a \restriction \psi_b \text{ constante}) \vee \forall c\ \exists b(f_a \restriction \psi_b > c)]$.

Or, vu la forme des formules dans t^* , $\psi(w,v)$ est $\phi(v) \wedge v > w$ pour quelque $\phi \in t$, et pour des formules ψ de cette forme le premier cas de la disjonction (*) équivaut à

$f_a \restriction \phi$ est finalement constante,

et le second cas équivaut à

$f_a \restriction \phi \to \infty$;

donc (5) est vérifiée.

(5) $\Rightarrow$ (1). On inverse pas par pas l'argument précédent.

(1) $\Rightarrow$ (2). Par ce qui précède on peut utiliser (5). Un calcul simple effectué sur la formule de (5) montre qu'en posant $\psi(w,v) = \phi(v) \wedge v > w$ on obtient :

$M \models \forall a\ \exists b(f_a \restriction \psi_b \text{ constante} \vee f_a \restriction \psi_b \to \infty)$.

Par (1) t^* est un schéma complet, qu'on peut supposer clos sans perte de généralité (Lemme II.6). L'équivalence $(b_1') \Leftrightarrow (c_1)$ du II.13. montre alors qu'il y a des termes $f_2(u)$, $f_3(u)$ tels que la formule $\sigma(u,v)$ suivante appartient à t^* :

$\sigma(u,v)$: $f(u,v) = f_2(u) \vee f_3(f(u,v)) \geq v$.

Par la Proposition II.16 il y a $\phi(v) \in t$ qui décide finalement $\sigma(u,v)$. Puisque $\sigma(u,v) \in t^*$ il est clair que ϕ décide σ positivement, i.e.

$M \models \forall u\ \ \exists v_o(\forall v > v_o)(\phi(v) \to \sigma(u,v))$.

Posons :

$g_1(u) = \mu v_o\ [\ (\forall v > v_o)(\phi(v) \to f(u,v) = f_2(u))\ ]$,

$g_2(u) = \mu v_o\ [\forall v > v_o(\phi(v) \to f_3(f(u,v)) \geq v\ ]$,

$f_1(u) = \max\{g_1(u), g_2(u)\}$.

On prouve aisèment que

$M \models \phi(v) \rightarrow \forall u(v > f_1(u) \rightarrow \sigma(u,v))$;

d'où il suit que la formule à droite est dans t, puisque $\phi(v) \in t$.

(2) $\Rightarrow$ (3). La condition (2) entraine qu'étant donnés $N \succ M$ et un type non-borné t' sur N tel que $t' \supseteq t$, on a

(**) pour tout $x \in N(^{t'}_{c})$, $x \in N$ ou $x \geq c$.

En effet, comme $x = f(a,c)$ pour quelque $a \in N$, il suffit d'appliquer (2) au terme pur $f(u,v)$. (**) implique trivialement que $N(^{t'}_{c})$ est une extension $\prec_f$-minimale de N.

(4) $\Rightarrow$ (1). La condition (1') est une conséquence immédiate de (4) en posant $t' = t^*(N,v)$; donc (4) $\Rightarrow$ (1).

<u>Remarques.</u> (a) Les versions affaiblies de (3) et (4) ci-dessous sont équivalentes aux énoncés du Théorème II.18 :

$(3')_*$ pour tout $N \succ M$ et tout schéma de type t_1^* sur M tel que $t_1^*(M,v) = t$, $N(^{t_1^*}_{c})$ est une extension $\prec_f$-minimale de N,

et similairement pour (4').

En effet, les implications (3) $\Rightarrow$ (3') $\Rightarrow$ (4') et (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (4') sont triviales, et l'argument utilisé pour démontrer (4) $\Rightarrow$ (1) prouve aussi (4') $\Rightarrow$ (1).

(b) La condition (b) du Théorème II.18. - ou, alternativement, l'équivalence entre (2) et (3) du Théorème II.10. (a) - montrent que <u>tout type uniforme est définissable</u>. La réciproque n'est pas vraie comme on verra au moyen d'un exemple simple au §III.5.

<u>(D) Types minimaux.</u>

Commençons par démontrer la proposition suivante dont les énoncés et la preuve sont parallèles à ceux du Théorème II.18 :

<u>II.19. Proposition.</u> Soit t un type complet et non-borné sur M. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) pour tout terme pur $f(u,v)$ il existe des termes purs $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u,w)$ tels que la formule

$\forall u\,[v > f_1(u) \rightarrow f(u,v) = f_1(u) \vee f_3(u,v)) = v]$

appartient à t;

(2) pour tout $N \succ M$ et toute extension non-bornée t' de t à N, $N(^{t'}_{c})$ est une extension $\prec$-minimale de N;

(3) pour tout terme pur $f(u,v)$ il existe $\phi(v) \in t$ telle que

$M \models \forall a\,[f_a \upharpoonright \phi$ finalement constant $\vee\ f_a \upharpoonright \phi$ finalement injective$]$.

<u>Démonstration.</u> (1) $\Rightarrow$ (2). Etant donnés N et t' vérifiant les hypothèses de (2), (1) entraîne :

(*) pour tout $x \in N(^{t'}_{c})$, $x \in N$ ou il existe un terme pur $g(u,w)$ et un $a \in N$ tels que $g(a,x) = c$.

Puisque $x = f(a,c)$ pour un terme pur f et un $a \in N$, (*) s'obtient en appliquant (1) à $f(u,v)$ et en posant $g = f_3$. Mais (*) implique (2); si $N \underset{\neq}{\prec} N' \prec N\binom{t'}{c}$ et $x \in N'-N$, alors $c = g(a,x) \in N(x) \subseteq N'$, d'où $N' = N(c)$.

Convenons d'appeler (2') le cas particulier de (2) lorsque $t' = t^*(N,v)$ et $t^* = t(v) \cup \{v > u\}$ (ceci est un schéma de type sur M puisque $t^*(M,v) = t$).

(2') $\Rightarrow$ (3). Ceci suit de l'équivalence $(a_2) \Leftrightarrow (c_2)$ du II.11 par exactement le même argument de l'implication (1) $\Rightarrow$ (5) du II.18.

(3) $\Rightarrow$ (1). Notons que (3) implique trivialement (5) du II.18. Donc t^* est un schéma de type complet (i.e. t est uniforme), que nous supposerons clos sans perte de généralité. En posant $\psi(w,v) = \phi(v) \wedge v > w$, (3) entraîne :

$$M \models \forall a\ \exists b\ [f_a \upharpoonright \psi_b \text{ constante } \vee f_a \upharpoonright \psi_b \text{ injective}]\ .$$

Par l'équivalence $(b_2) \Leftrightarrow (c_2)$ du II.13. il existe des termes $f_2(u)$, $f_3(u,x)$ tels que la formule

$$f(u,v) = f_1(u) \vee f_3(u,f(u,v)) = v$$

appartient à t^*. Puisque t est uniforme on peut appliquer la Proposition II.16. à cette formule et finir la démonstration comme dans (1) $\Rightarrow$ (2) du II.18.

On dit qu'un type complet et non-borné $t(v)$ sur M est <u>minimal</u> si il vérifie les conditions équivalentes de la Proposition II.19. <u>Tout type minimal est uniforme</u> : ce fait, qui a été déjà utilisé dans la démonstration précédente, résulte de ce que (3) du II.19. implique trivialement (5) du II.18. La réciproque n'est pas vraie (cf. Remarque III.8), mais la notion suivante établit le lien entre les types uniformes et les types minimaux : on dit qu'un type non-borné sur M est <u>rare</u> si il vérifie les conditions équivalentes de la proposition suivante :

<u>II.20. Proposition</u>. Pour un type non-borné t sur M, les conditions suivantes sont équivalentes :

(s_1) pour tous $N \succ M$, $a \in N$ et terme pur $h(u,v)$,

$$t(v_1) \cup t(v_2) \cup N < v_1 < v_2 \vdash h(a,v_1) < v_2;$$

(s_2) pour tout terme pur $h(v)$ il existe $\phi \in t$ telle que

$$\phi(v_1) \wedge \phi(v_2) \wedge v_1 < v_2 \vdash h(v_1) < v_2;$$

(s_3) pour tout terme $f(v)$, si $M \models f \to \infty$, alors il existe $\phi \in t$ telle que $M \models f \upharpoonright \phi$ est injective.

<u>Démonstration</u>. $(s_1) \Rightarrow (s_2)$ est trivial par compacité, en prenant $N = M$ dans (s_1).

$(s_2) \Rightarrow (s_1)$. Etant donné un terme $h(a,v)$ où $a \in N$, soit $h'(v) = \max\limits_{u \leq v} h(u,v)$. De (s_2) appliqué à $h'(v)$ on déduit

$$t(v_1) \cup t(v_2) \cup a < v_1 < v_2 \vdash h(a,v_1) < v_2\ ,$$

d'où (s_2).

$(s_2) \Rightarrow (s_3)$. Soit $f(v)$ un terme tel que $M \models f \to \infty$; soit $h(v)$ le terme : $h(v) = \mu u\ [(\forall x > u)(f(w) < v)]$. Par (s_2) appliqué au terme $h(f(v))$ il existe $\phi \in t$ telle que

$$\phi(v_1) \wedge \phi(v_2) \wedge v_1 < v_2 \vdash h(f(v_1)) < v_2,$$

ce qui entraîne $M \models f \upharpoonright \phi$ est injective (et même $f \upharpoonright \phi$ strictement croissante).

$(s_3) \Rightarrow (s_2)$. Notons d'abord que :

(*) $M \models g \to \infty$ implique $Im(g) \in t$ [$Im(g)$ est la formule $\exists u(v = g(u))$] .

En effet, soit $g'(v) = \mu u(v = g(u))$; on a $M \models g' \to \infty$, puisque si $Im(g')$ est bornée par w, comme $g(g'(v)) = g(v)$, $Im(g)$ serait bornée par $\max\{ g(u) \mid u \leq w\}$, contradiction. Il suffit maintenant d'appliquer (s_3) à g' pour obtenir $\psi' \in t$ telle que $g' \upharpoonright \psi'$ est injective; en posant $\psi = \psi' - \{0\}$ on a manifestement $\psi \in t$ et $\psi \subseteq Im(g)$, d'où $Im(g) \in t$.

Maintenant soit $h(v)$ un terme pur. Si $Im(h)$ est borné, (s_2) est trivialement vérifié. Supposons donc que $Im(h)$ est non-borné (i.e. $h \to \infty$); considérant $f(v) = \max\{h(u) \mid u \leq v\}$ au lieu de h on peut supposer, sans perte de généralité, que h est non-décroissant. Par (s_3) il existe $\sigma \in t$ telle que $h \upharpoonright \sigma$ est injective. Définissons par induction le terme g :

$$g(x+1) = \mu u\ [\sigma(u) \wedge (\forall y \leq x)(h(g(y)) < u)]$$

Il est clair que $Im(g) \subseteq \sigma$ et $h(g(x)) < g(x+1)$. Puisque $h \upharpoonright \sigma$ est injective, elle est strictement croissante et le principe du minimum entraîne $\vdash \sigma(u) \to u \leq h(u)$; en particulier on a $g(x) \leq h(g(x)) < g(x+1)$, et donc $g \to \infty$; par (*) on obtient : $\phi = Im(g) \in t$.

On peut maintenant vérifier (s_2) pour cette formule ϕ : si $\phi(v_1)$, $\phi(v_2)$ et $v_1 < v_2$, on a $v_i = g(x_i)$ pour certain x_i $(i=1,2)$; comme g est strictement croissante, $x_1 < x_2$, d'où :

$$h(v_1) = f(g(x_1)) < g(x_1+1) \leq g(x_2) = v_2.$$

<u>II.21. Proposition</u>. Soit $t(v)$ un type non-borné sur M. t est minimal si et seulement si t est à la fois uniforme et rare.

<u>Démonstration</u>. ($\Rightarrow$) Si t est minimal, on a vu que t est uniforme. La condition (3) de la Proposition II.19 entraîne trivialement la condition (s_3) ci-dessus, ce qui démontre que t est rare.

($\Leftarrow$) Inversement, si t est uniforme, la condition (5) de II.18. est vérifiée; celle-ci, jointe à la condition de rareté (s_3) entraîne la condition (3) de II.19, donc la minimalité de t.

§ III.- EXISTENCE DE TYPES

Dans la première partie A de ce chapitre, nous démontrons que, pour l'arithmétique de Péano $\mathcal{P}$, les classes de types introduites dans le chapitre précédent sont non-vides.

Rappelons que chacune des classes introduites dans le § II est contenue dans la précédente :

Définissable $\supseteq$ Uniforme $\supseteq$ Minimal

(cf. pages et). Dans la seconde partie B, nous montrons que ces inclusions sont propres.

La troisième partie C est une présentation de quelques notions et faits élémentaires du forcing dans les modèles de l'arithmétique, utilisés dans l'exposé suivant. On montre comment les arguments d'existence de la partie A se traduisent, en langage du forcing, en termes de densité.

A.- Existence de types minimaux.

Pour démontrer que ces classes sont non-vides, il suffit, évidemment, de prouver l'existence d'un type minimal.

III.1.- Théorème. Si le langage L a un nombre au plus dénombrable de symboles de relation et de fonction, alors pour tout $M \models \mathcal{P}$ il existe un type minimal sur M. De plus, t peut être choisi de façon telle que $\varphi \in t$ où $\varphi(v)$ est n'importe quelle formule donnée à l'avance telle que $M \models$ "φ est non-bornée".

Démonstration.- Nous démontrons le théorème pour le langage L_o obtenu en enlevant toutes les constantes individuelles de L, sauf 0 et 1. Dans une remarque ultérieure, nous montrerons comment le cas général peut être déduit de ce cas particulier (cf. III.2 ci-dessous). En vue de la Proposition II.19 (3), il suffit de prouver :

(*) pour tout terme pur f(u,v) et toute formule $\varphi(v)$, il existe une formule $\psi(v)$ telle que :

$$\mathcal{P} + \text{"}\varphi \text{ non-bornée"} \vdash \text{"}\psi \text{ non-bornée"} \wedge \psi \subseteq \varphi \wedge$$
$$\wedge \ \forall u(f_u \upharpoonright \psi \text{ finalement constante} \vee f_u \upharpoonright \psi \text{ finalement injective}).$$

En effet, si cette condition est remplie, on construit t en énumérant les termes à deux variables du langage, $f_o(u,v)$, $f_1(u,v)$,... et en choisissant inductivement à l'aide de (*) une suite de formules $< \psi_n(v) \mid n \in \omega >$ telle que

$\psi_o = \varphi$

ψ_{n+1} non-borné $\wedge$ $\psi_{n+1} \subseteq \psi_n$ $\wedge$ $\forall$ $u(f_n(u,.) \upharpoonright \psi_{n+1}$ est finalement constante ou finalement injective).

N'importe quel ensemble consistant et complet de formules étendant $\{\psi_n(v) \mid n \in \omega\} \cup \{v > a \mid a \in M\}$ sera alors un type minimal.

En parlant informellement, le problème (*) se pose ainsi : étant donné un ensemble infini d'entiers X (qui correspond à $\varphi(v)$) et une suite f_n d'applications des entiers dans les entiers (f_n correspond donc à $f(n,.)$), il s'agit de trouver un ensemble infini X^∞ (qui correspond à $\psi(v)$) tel que $X^\infty \subseteq X$ et tel que chaque f_n soit finalement injective ou finalement constante sur X^∞.

Voyons comment construire X^∞. D'abord de la notation : si g est une fonction définie sur un ensemble Y, on a canoniquement un ensemble infini d'éléments de Y sur lequel g est injective ou constante : soit $c_o = \mu\, y\ (y \in Y)$; $c_o,\dots,c_i$ étant supposés définis, s'il existe $y \in Y$, $y > c_i$ tel que $g(y) \neq g(c_o),\dots,g(c_i)$, on pose c_{i+1} égale au plus petit tel y, autrement $c_{i+1} = c_i$. Soit $I(g,Y) = \{c_o,c_1,\dots\}$. Par construction g est injective sur $I(g,Y) \subseteq Y$. Si $I(g,Y)$ est non-borné, la question est réglée. Sinon cela entraîne que $g\,[Y]$ est borné - notamment par le dernier élément de $I(g,Y)$ - d'où, comme dans la démonstration du théorème de Mac Dowell-Specker au § 1 du premier exposé, on doit avoir $g^{-1}(m) \cap Y$ non-borné pour au moins un $m \in g[Y]$; en posant

$$m(g,Y) = \mu\, x[g^{-1}(x) \cap Y \text{ non-borné}]$$

on aura certainement g constante [égale à $g(m(g,Y))$] sur l'ensemble non-borné $g^{-1}(m(g,Y)) \cap Y$.

Nous définissons maintenant une suite décroissante X_n, $n = -1,0,\dots$ avec $X_{-1} = X$ et avec, pour $n \geq 0$,

$$X_n = \begin{cases} I(f_n,X_{n-1}) & \text{si } I(f_n,X_{n-1}) \text{ est non-borné} \\ f_n^{-1}(m(f_n,X_{n-1})) \cap X_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par l'argument précédent, chaque X_n est non-borné et f_n est soit injective, soit constante sur X_n. Alors on peut prendre :

$X^\infty = \{i \mid i$ est le $(n+1)$-ième élément de $X_n\}$.

Il est clair que X^∞ a la propriété cherchée.

Cependant, pour s'assurer que la relation $i \in X_n$, et donc $i \in X^\infty$, puisse être définie arithmétiquement à partir de X et de la suite f_n de manière formalisable dans l'arithmétique de Péano, nous détaillons la construction de la façon suivante.

Etant donné u, posons

$X_u = \{x_o,\dots,x_u\}$ = l'ensemble des u+1 premiers éléments de X,

et

Seg(u) = l'ensemble des suites de longueur $\leq$ u extraites de l'intervalle [0,u];

pour $\sigma \in$ Seg(u), on pose

$\ell(\sigma)$ = longueur de σ (avec $\ell(\emptyset) = 0$).

On laisse au lecteur la tâche, facile, de normaliser dans $\mathcal{P}$ ces notions et celles de I(g,Y) et m(g,Y) ci-dessus, à l'aide de la machinerie des codages exposée au § II du premier exposé.

A chaque u on associe de façon récursive une famille $\{X^u_\sigma \mid \sigma \in \mathrm{Seg}(u)\}$ de parties $X^u_\sigma \subseteq X_u$ indexées par $\sigma \in$ Seg(u) ; par récurrence sur $\ell(\sigma)$ on pose $X^u_\emptyset = X_u$ et

$$X^u_{\sigma^\frown m} = \begin{cases} I(f_{\ell(\sigma)}, X^u_\sigma) & \text{pour } m = 0 \\ f^{-1}_{\ell(\sigma)}(m-1) \cap X^u_\sigma & \text{pour } m \neq 0. \end{cases}$$

Notons que $w > u$ entraîne $X^w_\sigma \supseteq X^u_\sigma$ pour $\sigma \in$ Seg(u) et que pour $u \geq z + 1$ et pour $\sigma, \tau \in$ Seg(u) avec $\ell(\sigma) = z - 1$, $\ell(\tau) \leq u - z$, nous avons :

(a) f_z est injective sur $X^u_{\sigma^\frown 0^\frown \tau}$,

(b) f_z est constamment égale à $w - 1$ sur $X^u_{\sigma^\frown w^\frown \tau}$ pour $1 \leq w \leq u$.

Nous notons $\mathrm{card}(X^u_\sigma)$ le terme des variables u,σ qui donne la cardinalité de X^u_σ ; le lecteur pourra donner sans difficulté la définition formelle de ce terme dans $\mathcal{P}$.

Parce que les ensembles X^u_σ sont monotones croissants en u pour l'inclusion, on a l'équivalence :

$$\forall z \, \exists u \, \forall w \geq u (\mathrm{card}(X^w_\sigma) \geq z) \longleftrightarrow \forall z \, \exists u (\mathrm{card}(X^u_\sigma) \geq z).$$

Nous aurons besoin de la remarque suivante :

(**) Soit σ une suite telle que $\forall z\ \exists u\ (\mathrm{card}(X^u_\sigma) \geq z)$. Alors il existe m tel que $\forall z\ \exists u(\mathrm{card}(X^u_{\sigma\, m}) \geq z)$.

En effet, soit $f_{\ell(\sigma)}[\bigcup_u X^u_\sigma]$ est non-borné, dans lequel cas on peut prendre m = 0, soit on peut prendre $m = m(f_{\ell(\sigma)}, \bigcup_u X^u_\sigma)$.

Puisque X est non-borné, on a $\forall z\ \exists u(\mathrm{card}(X^u_\emptyset) \geq z)$. En vertu de (**) on peut donc définir par récurrence une fonction h ainsi :

$$h(0) = \mu\, m(\forall z\ \exists u(\mathrm{card}(X^u_{<m>}) \geq z),$$

$$h(x+1) = \mu\, m(\forall z\ \exists u(\mathrm{card}(X^u_{<h(0),\ldots,h(x)>^\frown m}) \geq z).$$

On peut poser alors

$$i \in X_y \longleftrightarrow \exists u(i \in X^u_{<h(0),\ldots,h(y)>}),$$

ce qui donne la définition arithmétique cherchée de la relation $i \in X_n$.

III.2.- <u>Remarque.</u> Il est assez facile d'étendre le théorème III.1 au cas des langages L avec un nombre arbitraire de constantes individuelles.

Remarquez d'abord que la formule $\psi(v)$ construite dans le Théorème III.1 ne dépend que de la variable v ; la variable u du terme f(u,v) n'intervient pas. Si φ a des paramètres, alors ψ a les mêmes paramètres. Ensuite, l'analogue de (*) du III.1 pour des termes purs $f(\bar{u},v)$ de L_o à plusieurs variables $\bar{u} = (u_o,\ldots,u_n)$ est obtenu automatiquement en appliquant le cas précédent au terme $g(u,v) = f((u)_o,\ldots,(u)_n,v)$ Ces remarques donnent :

(†) pour tout terme pur $f(\bar{w},v)$ de L_o et pour toute formule $\varphi(\bar{c},v)$ où les constantes $\bar{c}$ appartiennent à $L - L_o$, il existe une formule $\psi(\bar{c},v)$ telle que :

$$\mathcal{P} + \text{"}\varphi_{\bar{c}}\text{ non-borné"} \vdash \psi_{\bar{c}} \subseteq \varphi_{\bar{c}} \wedge \psi_{\bar{c}} \text{ non-borné} \wedge \forall w(f_{\bar{w}} \upharpoonright \psi_{\bar{c}} \text{ finalement constante} \vee f_{\bar{w}} \upharpoonright \psi_{\bar{c}} \text{ finalement injective}).$$

Finalement, puisque chaque terme pur g(u,v) de L est de la forme $f(\bar{c},u,v)$ où $f(\bar{z},u,v)$ est un terme pur de L_o et les $\bar{c}$ des constantes individuelles de $L - L_o$, il est évident que la spécialisation de (†) à $\bar{w} = \bar{c}^\frown u$ donne ce même résultat pour le terme $g(u,v)$; d'où le type construit au III.1 est aussi minimal pour L.

Une variante de la démonstration du Théorème III.1 permet de déduire :

III.3.- <u>Proposition</u>. Etant donné L et M comme dans le Théorème III.1, la cardinalité des ensembles de types purs définissables, uniformes et minimaux est $K^{\aleph_0}$, où K est la cardinalité du sous-modèle minimal de M.

<u>Démonstration</u>.- Elle est basée dans (*) de III.1 et l'observation suivante :

(†) pour chaque formule $\varphi(v)$ il existe une formule $\sigma(u,v)$ telle que :

$$\mathcal{P} + \text{"}\varphi \text{ non-bornée"} \vdash \forall u(\sigma_u \subseteq \varphi \wedge \sigma_u \text{ non-borné}) \wedge$$
$$\wedge \ \forall u\, w(u \neq w \rightarrow \sigma_u \cap \sigma_w = \emptyset) \wedge \ \forall v\ \exists u(\varphi(v) \rightarrow \sigma(u,v)).$$

C'est-à-dire, la famille des σ_u, lorsque u varie, est une partition de φ en ensembles non-bornés.

Soit M_o le sous-modèle minimal de M. Pour chaque suite $s \in {}^{\omega}M_o$ on construit un type minimal t_s. En utilisant la même astuce que dans la remarque III.2, on peut ramener la construction de t_s à celle d'un type du langage L_o. Notez que chaque élément de M_o étant un terme constant, on peut l'insérer dans une formule sans y ajouter des paramètres. On définit par récurrence sur n une suite $\langle \theta^s_n(v) \mid n \in \omega \rangle$ de formules :

$$\theta^s_o = \varphi \quad ;$$

en supposant $\theta^s_o, \ldots \theta^s_n$ déjà définis et non-bornés, on pose ,

si n est impair, $n = 2m + 1$:

θ^s_{n+1} est obtenu à partir de θ^s_n et du terme $f_m(u,v)$ comme dans le Théorème III.1,

si n est pair, $n = 2m$:

$$\theta^s_{n+1} = \sigma^{\theta^s_n}_{s(m)}$$

(où σ^{ψ} désigne la formule σ de (†) construite à partir de ψ).

Le type t_s est n'importe quel ensemble consistant et complet de formules contenant $\{\theta^s_n(v) \mid n \in \omega\} \cup \{v > a \mid a \in M_o\}$.

Il est clair que si $s \neq s'$ sont des suites distinctes, les types t_s et $t_{s'}$ sont contradictoires, puisque $\sigma^{\theta}_{s(n)} \in t_s$, $\sigma^{\theta}_{s'(n)} \in t_{s'}$, et $\sigma^{\theta}_{s(n)} \cap \sigma^{\theta}_{s'(n)} = \emptyset$, où n est le plus petit rang auquel s et s' sont distinctes et $\theta = \theta^{s}_{2n} = \theta^{s'}_{2n}$.

La preuve de (†) est facile : soit p_u la fonction qui donne le u-ième nombre premier, avec $p_o = 1$. On pose :

$$\sigma(u,v) \longleftrightarrow \begin{cases} \text{il existe } w \text{ tel que } v \text{ est le} & \\ (p_u)^w\text{-ième membre de } \varphi & \text{si } u \neq 0 \\ v \in \varphi - \bigcup\limits_{w \neq 0} \sigma(w,v) & \text{si } u = 0 . \end{cases}$$

Cette définition est manifestement formalisable dans $\mathcal{P}$.

L'argument précédent montre qu'il y a au moins $K^{\aleph_o}$ types purs minimaux. D'autre part, il y a au plus $K^{\aleph_o}$ types purs <u>définissables</u> de L.

En effet, le type pur (ou type sur M_o) défini par un schéma d est (cf. II.8 (c)) :

$$d(M_o,v) = \{\varphi(\overline{\pi},v) \mid \overline{\pi} \text{ suite de termes constants de } L, \\ \varphi(\overline{u},v) \text{ formule de } L \text{ et } M_o \models d_{\varphi}[\overline{\pi}]\} .$$

En rajoutant à $\overline{\pi}$ les termes constants qui peuvent apparaître dans $\varphi(\overline{u},v)$, et puisque les termes constants de L sont des membres de M_o, on peut considérer un schéma d comme une application qui envoie les formules de L_o dans des formules de L_o <u>à paramètres dans</u> M_o (i.e., les paramètres qui peuvent apparaître dans d_{φ}). Evidemment il y au plus $K^{\aleph_o}$ possibilités pour le choix d'une telle fonction, et donc au plus $K^{\aleph_o}$ types définissables purs.

B.- <u>Exemples</u>

III.4.- <u>Exemple d'un type non-définissable engendrant une extension finale.</u>

Pour donner un exemple de type non-définissable t(v) sur un modèle dénombrable M de $\mathcal{P}$ tel que $M \prec_f M(^t_c)$, il suffit de construire une extension finale $M \prec_f N$ et une partie $Y \subseteq N$ telle que $Y \cap M$ ne soit pas une partie définissable de M, bien que $< N,Y > \models \mathcal{P}_{L(U)}$ où L(U) s'obtient du langage L de N en ajoutant un nouveau symbole de prédicat unaire U. En effet, étant donné de tels N,Y et $b \in N - M$, soit $c \in N - M$ qui satisfait :

$$< N,Y > \models (\forall u < b)(p_u \mid c \longleftrightarrow u \in Y).$$

On peut prendre alors comme $t(v)$ le type de c sur M dans le langage L de M. En effet, comme l'ensemble $Z = \{x \in N \mid x < b \wedge p_x \mid c\}$ est définissable dans N mais $Z \cap M = Y \cap M$ ne l'est pas dans M par hypothèse, la Proposition II.10 (a) entraîne que $t(v)$ n'est pas un type définissable. D'un autre côté, $M \prec_f N$ implique trivialement $M \prec_f M(\overset{t}{c})$.

Or, pour construire N, Y, il suffit d'avoir une partie non-définissable X de M telle que $< M,X > \models \mathcal{P}_{L(U)}$, car à partir de $< M,X >$ on peut construire le modèle cherché $< N,Y >$ en ajoutant un type définissable sur $< M,X >$(où alternativement par la méthode de démonstration du théorème de Mac Dowell-Specker).

Enfin, en utilisant la méthode de forcing de Cohen, on peut démontrer de manière élégante qu'une telle partie $X \subseteq M$ existe ; nous renvoyons le lecteur à Simpson [Si] pour plus de détails.

III.5.- Exemples de types définissables non-uniformes

Pour obtenir des exemples de cette situation, il suffit d'"itérer" deux ou plus de types définissables quelconques ; ces itérations seront l'objet d'une étude détaillée au § IV ci-dessous, auquel nous renvoyons le lecteur.

Par exemple, si $t_o(v)$, $t_1(v)$ sont des types définissables sur M, si $M\begin{pmatrix} t_o & t_1 \\ c_o & c_1 \end{pmatrix}$ désigne le modèle $M\begin{pmatrix} t_o \\ c_o \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t'_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ où t'_1 est l'unique extension définissable de t_1 à $M\begin{pmatrix} t_o \\ c_o \end{pmatrix}$ et si t désigne le type sur M réalisé par l'élément $c = <c_o,c_1>$ qui code la paire (c_o,c_1), alors t est un type définissable.

En effet, on prouvera par la suite (Proposition IV.2 (a)) que le 2-type $(t_o(v_o),\ t_1(v_1))$ réalisé par la paire (c_o,c_1) est définissable. D'autre part, le type t s'obtient par application à (t_o,t_1) de l'opération de contraction définie ci-dessous qui, manifestement, préserve la définissabilité. Etant donné un n-type $t'(v_o,\dots,v_{n-1})$, on pose :

$$< t'(v_o,\dots,v_{n-1}) > = \{\varphi(v) \mid \varphi((v)_o,\dots,(v)_{n-1}) \in t'\} \quad ;$$

(cf. Définition IV.15 et Lemme IV.16).

Enfin, le type t n'est pas uniforme puisque $M \prec_f M(c_o) \prec_f M(c) = M(c_o,c_1)$, c'est-à-dire $M(\overset{t}{c})$ n'est pas une extension $\prec_f$-minimale de M ; voir (3) du Théorème II.18.

Si on itère trois ou plusieurs types définissables, par exemple $N = M\begin{pmatrix} t_o & t_1 & t_2 \\ c_o & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$
on peut prendre $c = < c_o,c_2 >$, d'où $M(c_1)(c) = N$, mais $M(c_1) \not<_f N$ puisque $N \models c_o < c_1$, c'est-à-dire , $<(t_o,t_2)>$ n'est pas un type uniforme sur $M(c_1)$.

Nous laissons au lecteur comme exercice de démontrer que, d'une manière générale, on a :

III.6.- Fait. Si $t_o,\ldots,t_n$ $(n \geq 1)$ sont des types définissables sur un modèle M de $\mathcal{P}$, alors le type $< (t_o(v_o),\ldots t_n(v_n)) >$ est définissable mais non-uniforme.

Ce fait et l'existence de $K^{\aleph_o}$ types définissables ont comme conséquence immédiate :

III.7.- Corollaire. Etant donné L et M comme dans le Théorème III.1, il y a $K^{\aleph_o}$ types définissables non-uniformes, où K est la cardinalité du sous-modèle minimal de M.

Démonstration.- Il suffit de remarquer que, étant donné deux suites finies $t_o,\ldots,t_n,t'_o,\ldots t'_n$ $(n \geq 1)$ de types définissables tels que $t_i \neq t'_i$, et si $\varphi(v) \in t_i$ $\neg\varphi(v) \in t'_i$, alors

$$\varphi(< v_o,\ldots,v_n >) \in < (t_o,\ldots,t_n) >, \text{ tandis que } \neg\varphi(< v_o,\ldots,v_n >) \in < (t'_o,\ldots,t'_n)>.$$

III.8.- Remarques. (a) Il est possible de démontrer l'existence de types uniformes qui ne sont pas minimaux sur chaque modèle M de $\mathcal{P}$. Pourtant, la construction qui donne ces exemples, due à Paris et Gaifman,est relativement compliquée et donc ne sera pas incluse ici. Nous renvoyons le lecteur à Gaifman [G], Théorème 5.2.

(b) Comme corollaire des résultats du § IV nous allons obtenir un exemple d'extension minimale d'un modèle qui n'est pas une extension finale ; voir exemple IV.24.

C.- Forcing sur les modèles de l'arithmétique

Dans ce paragraphe, on introduit quelques notions élémentaires du forcing sur les modèles de l'arithmétique qui seront utilisés dans l'exposé suivant. Ceci est fait dans un cadre assez général pour couvrir toutes les applications ultérieures. Quelques-uns parmi les exemples concrets les plus courants serviront pour illustrer ces notions. On montre aussi la façon d'associer un type à chaque ensemble générique de conditions, et on analyse les propriétés de ces types. On verra que dans certains de nos exemples concrets l'existence de ces types en découle du même type d'argument que dans le paragraphe A ci-dessus.

Dans ce paragraphe, on travaille sur un modèle M de $\mathcal{P}$ fixé.

III.9.- Le cadre général.

(a) Soit $n \in \omega$ fixé. On appelle n-condition de forcing sur M à tout n+1-uplet $< \varphi, \sigma_1, \ldots, \sigma_n >$ de formules à paramètres dans M, contenant la variable libre v et éventuellement (mais pas forcément) une autre variable libre u, telle que $M \models \forall u\ (\varphi_u$ non-borné$)$ (*).

(b) On supposera qu'on s'est donné un ensemble $\mathcal{C}$ de n-conditions de forcing pour un n fixé, et un ordre partiel $\lessapprox$ sur $\mathcal{C}$. On ne suppose pas que $\mathcal{C}$ est arithmétiquement définissable (même si dans les applications on trouve fréquemment des $\mathcal{C}$ qui le sont). Par contre, $\lessapprox$ est supposé définissable dans le sens qu'il existe une formule $\Phi(X, X_1, \ldots, X_n, Y, Y_1, \ldots, Y_n)$ du langage L de l'arithmétique de Péano généralisée avec termes de classe X, X_i, Y, Y_i $(i = 1, \ldots, n)$, sans d'autres variables libres et ayant les variables v et u explicitement liées, telles que pour $< \varphi, \sigma_1, \ldots, \sigma_n >, < \psi, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_n > \in \mathcal{C}$, on ait :

$$M \models \Phi(\varphi, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \psi, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_n) \Longleftrightarrow < \varphi, \sigma_1, \ldots, \sigma_n > \lessapprox < \psi, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_n > .$$

(c) On demande que la relation $\lessapprox$ satisfasse la condition de cohérence finie suivante :

pour tous $k \in \omega$, $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathcal{C}$, si $\alpha = < \varphi, \sigma_1, \ldots, \sigma_n >$,
$\beta_i = < \psi_i, \sigma^i_1, \ldots, \sigma^i_n >$ et $\alpha \lessapprox \beta_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, alors
$$M \models \forall u\ \exists v\ [\varphi(u,v) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \psi_i(u,v)].$$

Dans tous les exemples qui suivent, cette condition de cohérence finie est trivialement vérifiée puisque $< \varphi, \sigma_1, \ldots, \sigma_n > \lessapprox < \psi, \sigma'_1, \ldots \sigma'_n >$ entraîne soit que $\varphi \subseteq \psi$ soit que φ est contenu dans ψ à partir d'un certain rang.

(*) Si φ contient seulement la variable libre v, cette condition doit être remplacée par $M \models \varphi$ non-borné.

III.10.- Exemples.

(a) Soient $n = 0$, $\mathcal{C}$ l'ensemble de toutes les formules non-bornées ayant v comme seule variable libre et $\lesssim$ la relation d'inclusion :

$$\varphi \lesssim \psi \Leftrightarrow M \models \forall v(\varphi(v) \to \psi(v))$$

(i.e., la formule $\Phi(X,Y)$ définissant $\lesssim$ est $\forall v\ (v \in X \to v \in Y)$).

(b) Avec le même $\mathcal{C}$ on peut considérer l'ordre $\lesssim$ d'inclusion finale (noté $\subseteq_f$) :

$$\varphi \lesssim \psi \Leftrightarrow M \models \exists v_o\ \forall v > v_o\ (\varphi(v) \to \psi(v)).$$

(c) Cas des familles. Ici $n = 0$ et $\mathcal{C}$ est l'ensemble des formules $\varphi(u,v)$ à deux variables telles que $M \models \forall u\ (\varphi_u$ non-borné). Il y a deux cas selon que des paramètres de M soient admis ou non dans les formules φ. L'ordre $\lesssim$ est :

$$\varphi \lesssim \psi \Leftrightarrow M \models \forall a\ \exists b\ (\varphi_a \subseteq_f \psi_b) \wedge \forall b\ \exists a\ (\varphi_a \subseteq_f \psi_b).$$

Un cas intéressant s'obtient lorsque les éléments de $\mathcal{C}$ sont des familles disjointes, i.e.,

$$M \models \forall u_1 u_2\ \forall v\ [u_1 \neq u_2 \to \neg(\varphi(u,v) \wedge \varphi(u_2,v))].$$

Abramson-Harrington [A-H] considèrent les exemples suivants :

(d) Le m-forcing. Ici $n = m - 1$, où m est un entier fixe ≥ 2, $\mathcal{C}$ est l'ensemble des n-uplets de formules non-bornées à une seule variable libre ; $\lesssim$ est l'ordre d'inclusion simultanée dans toutes les coordonnées :

$$< \varphi_1, \ldots, \varphi_n > \lesssim < \psi_1, \ldots, \psi_n > \Leftrightarrow M \models \bigwedge_{i=1}^{n} \forall v\ (\varphi_i(v) \to \psi_i(v)).$$

(e) Ici $n = 2$, $\mathcal{C}$ est l'ensemble des triplets $< \varphi, \sigma_1, \sigma_2 >$ où :

$\varphi(v)$ = formule non-bornée sur M avec v comme seule variable libre ;

et il existe $k \in \omega$ tel que

$\sigma_1(u,v)$ = fonction définie sur φ, à valeurs dans 2^{k+1} et telle que pour tout $s \in 2^{k+1}$ l'image inverse de s est non-bornée ;

$\sigma_2(v) : v = k$.

En appelant $< X,F,k >$ les éléments de $\mathcal{C}$, l'ordre $\lesssim$ est ainsi défini :

$$< X_2,F_2,k_2 > \lesssim < X_1,F_1,k_1 > \Leftrightarrow X_2 \subseteq X_1 \wedge k_2 \geq k_1 \wedge$$
$$\mathrm{Dom}(F_2) \subseteq \mathrm{Dom}(F_1) \wedge F_1 \upharpoonright \mathrm{Dom}(F_2) = F_2.$$

D'autres exemples des conditions de forcing seront considérés dans l'exposé suivant (cf. Lemme II.10).

III.11.- Ensembles génériques

(a) Notation. Etant donné une formule $\theta(X,X_1,\ldots,X_n)$ contenant les termes de classe $X,X_1,\ldots,X_n$, sans d'autres variables libres et ayant les variables v et u explicitement liées, on pose :

$$\mathcal{C}_\theta = \{ < \varphi,\sigma_1,\ldots,\sigma_n > \in \mathcal{C} \mid M \models \theta(\varphi,\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\}.$$

(b) On dit qu'un ensemble de conditions de forcing $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ est dense ssi pour tout $\alpha \in \mathcal{C}$ il existe $\beta \in \mathcal{D}$ tel que $\alpha \lesssim \beta$.

(c) Soit Θ un ensemble de formules de la forme spécifiée au (a) ci-dessus. On dit qu'un ensemble de conditions de forcing $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}$ est Θ-générique ssi

(i) $\alpha \in \mathcal{G} \wedge \alpha \lesssim \beta \Rightarrow \beta \in \mathcal{G}$

(ii) $\alpha,\beta \in \mathcal{G} \Rightarrow$ il existe $\gamma \in \mathcal{G}$ tel que $\gamma \lesssim \alpha$ et $\gamma \lesssim \beta$.

(iii) pour toute formule $\theta \in \Theta$, $\mathcal{C}_\theta$ dense $\Rightarrow \mathcal{G} \cap \mathcal{C}_\theta \neq \emptyset$.

Lorsque Θ est l'ensemble de toutes les formules de la forme spécifiée au (a) ci-dessus, on dit que $\mathcal{G}$ est générique.

III.12.- Existence d'ensembles génériques

Dans ce contexte ci - comme dans tout autre où la machinerie du forcing est utilisée - le premier point à considérer est celui de l'existence d'ensembles génériques. Ici, comme ailleurs, le critère principal est le suivant :

(a) Critère d'existence d'ensembles génériques. Pour tout ensemble $\mathcal{C}$ de conditions de forcing, si l'ensemble Θ de formules est dénombrable, alors il existe un ensemble Θ-générique de conditions contenu dans $\mathcal{C}$.

Démonstration.- Soit $< \theta_n \mid n \in \omega >$ une énumération de toutes les formules $\theta \in \Theta$ telles que $\mathcal{C}_\theta$ est dense. Par induction, on choisit pour chaque $n \in \omega$ un $\alpha_n \in \mathcal{C}$ tel que $\alpha_{n-1} \preccurlyeq \alpha_n$ et $\alpha_n \in \mathcal{C}_{\theta_n}$. L'ensemble

$$\mathcal{G} = \{\beta \in \mathcal{C} \mid \text{il existe } n \in \omega \text{ tel que } \alpha_n \preccurlyeq \beta\}$$

est manifestement Θ-générique.

En particulier, si le langage L et le modèle M sont tous deux dénombrables, dans tout ensemble $\mathcal{C}$ de conditions de forcing il existe un sous-ensemble générique. Mais le critère précédent prouve aussi l'existence d'ensembles génériques dans d'autres cas intéressants : par exemple, lorsque L est dénombrable, Θ est l'ensemble de toutes les formules de L (i.e., sans paramètres) de la forme spécifiée au III.11 (a), mais M n'est pas forcément dénombrable.

Pour familiariser le lecteur avec les concepts introduits, on laisse en exercice facile le suivant :

(b) Exercice. Soient L dénombrable, Θ l'ensemble de toutes les formules sans paramètres de la forme décrite au III.11 (a), M un modèle de $\mathcal{P}$, et $\mathcal{C}_2$ l'ensemble des conditions de forcing de l'exemple III.10 (b). Démontrer qu'il existe $M_o \prec M$ dénombrable, tel que si $\mathcal{C}_1$ est l'ensemble des conditions de forcing de l'exemple III.10 (a), avec formules à paramètres dans M_o, alors on a :

tout sous-ensemble générique de $\mathcal{C}_1$ est un sous-ensemble Θ-générique de $\mathcal{C}_2$.

On montre maintenant que tout sous-ensemble générique donne lieu de façon naturelle à un type.

III.13.- Le type associé à un ensemble générique

Proposition.- Soient $\mathcal{C}$ un ensemble de conditions de forcing sur M, Θ un ensemble arbitraire de formules de la forme décrite au III.11 (a), et $\mathcal{G}$ un ensemble Θ-générique. Alors :

(i) L'ensemble (des conséquences de) :

$$t_{\mathcal{G}}(v) = \{\varphi(a,v) \mid a \in M \text{ et il existe } \sigma_1,\dots,\sigma_n \text{ tel que } < \varphi(u,v),\sigma_1,\dots,\sigma_n > \in \mathcal{G}\}^{(*)}$$

(*) Omettre a si les formules de $\mathcal{C}$ ont v comme seule variable libre.

est un type sur M.

(ii) Soit $\delta_\varphi(X)$ la formule

$$X \text{ non-borné} \wedge X \text{ décide } \varphi(u,v)^{(*)} \ .$$

Si pour toute formule $\varphi(u,v)$, $\delta_\varphi \in \Theta$ et $\mathcal{C}_{\delta_\varphi}$ est dense, alors $t_{\mathcal{G}}$ est complet et non borné.

(iii) Soit $\delta^f_\varphi(X)$ la formule

$$X \text{ non-borné} \wedge X \text{ décide finalement } \varphi(u,v).$$

Si pour toute formule $\varphi(u,v)$, $\delta^f_\varphi \in \Theta$ et $\mathcal{C}_{\delta^f_\varphi}$ est dense, alors $t_{\mathcal{G}}$ est uniforme.

(iv) pour tout terme $f(u,v)$, soit $\theta_f(X)$ la formule

$$\exists b\ \forall a\ (f_a \upharpoonright X_b \text{ finalement constante} \vee f_a \upharpoonright X_b \text{ finalement injective}).$$

Si pour tout terme $f(u,v)$, $\theta_f \in \Theta$ et $\mathcal{C}_{\theta_f}$ est dense, alors $t_{\mathcal{G}}$ est minimal.

<u>Démonstration.</u>- (i) La condition de cohérence finie III.9 (c) garantit que $t_{\mathcal{G}}$ est finiment consistant avec $\mathfrak{D}^c(M)$: puisque si $\varphi_i(a_i,v) \in t_{\mathcal{G}}$, avec $a_i \in M$ et $\beta_i = \langle \varphi_i, \sigma^i_1, \dots, \sigma^i_n \rangle \in \mathcal{G}$ $(i = 1,\dots,k)$, alors par III.11 (c,ii) il existe $\alpha \in \mathcal{G}$ $\alpha = \langle \varphi, \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ tel que $\alpha \lesssim \beta_i$ $(i = 1,\dots,k)$; d'où par III.9 (c), on conclut :

$$M \models \exists v \bigwedge_{i=1}^{k} \varphi_i(a_i,v).$$

(ii) $t_{\mathcal{G}}$ est complet. Si $\varphi(a,v)$ est une formule quelconque, l'hypothèse entraîne que $\mathcal{C}_{\delta_\varphi} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, i.e. il existe $\langle \psi, \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle \in \mathcal{G}$ tel que $\psi(w,v)$ décide $\varphi(u,v)$; en particulier, $\psi(b,v) \in t_{\mathcal{G}}$ décide $\varphi(a,v)$ pour un certain $b \in M$; donc, $\varphi(a,v)$ ou $\neg\varphi(a,v)$ est dans $t_{\mathcal{G}}$ selon que $\psi(b,v)$ décide $\varphi(a,v)$ ou $\neg\varphi(a,v)$ positivement.

$t_{\mathcal{G}}$ est non-borné. En appliquant l'argument précédent à la formule $v > u$, on obtient $\langle \psi, \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle \in \mathcal{G}$ tel que $\psi(w,v)$ décide $v > u$; puisque $\psi(w,v) = \psi_w(v)$ est non-bornée, elle doit décider $v > u$ positivement ; d'où $v > a \in t_{\mathcal{G}}$ pour tout $a \in M$.

(iii) et (iv) La preuve de ces deux cas est semblable à celle de (ii) en utilisant les caractérisations des types uniformes et minimaux données par les Théorèmes II.18

(*) Si le terme de classe X contient une variable libre, disons w, alors δ_φ est la formule " $\forall w$ (W(w) est non-borné) $\wedge$ X(w) décide $\varphi(u,v)$". La même remarque s'applique à (iii).

et II.19 respectivement.

Cette proposition donne des conditions de densité le plus souvent utilisées en pratique. La vérification de l'une ou l'autre de ces conditions de densité dans des cas concrets peut être hautement non triviale ; cf.,par exemple, le lemme II.10 de l'exposé suivant.

Pour terminer ce paragraphe, remarquons que l'énoncé et la preuve du Théorème III.1 ci-dessus peuvent être reformulés de façon à montrer que les conditions de densité de la proposition précédente sont toujours vérifiées par les notions de forcing des exemples III.10 (a), (b) et (c). Ceci est immédiat dans les deux premiers cas. Pour l'exemple III.10 (c), il suffit de noter que l'argument que démontre (*) du Théorème III.1 donne ψ uniformément à partir de φ ; c'est-à-dire

> pour toute formule $\varphi(u,v)$ telle que $M \models \forall u(\varphi_u$ non-bornée),
> et pour tout terme $f(u,v)$ il existe une formule
> $\psi(u,v)$ telle que
> $M \models \forall u[\psi_u$ non-borné $\wedge\ \psi_u \subseteq \varphi_u \wedge \theta_f(\psi_u)]$.

(cf. aussi l'argument du III.2). Ceci veut dire que pour tout terme $f(u,v)$ l'ensemble $\mathcal{C}_{\theta_f}$ est dense.

On peut conclure donc que dans ces trois cas, pour tout ensemble générique $\mathcal{G}$ le type associé $t_{\mathcal{G}}$ est minimal. On peut aussi vérifier sans peine, en utilisant (ii) de la Proposition précédente, que tous ces types sont complets et non-bornés; pour ceci il suffit de modifier légèrement l'argument de (*) du Théorème III.1, de façon à prouver le suivant :

> pour toute formule $\varphi(u,v)$ telle que $M \models \forall u(\varphi_u$ non-borné)
> il existe une formule $\psi(w,v)$ telle que
> $M \models \forall w(\psi_w$ non-borné) $\wedge\ \psi(w,v)$ décide $\varphi(u,v)$.

Problème ouvert.- On ne sait pas si, réciproquement, pour ces notions de forcing et sous les restrictions de dénombrabilité du III.12, tout type minimal est de la forme $t_{\mathcal{G}}$ pour un ensemble générique $\mathcal{G}$.

IV.- ITÉRATION DES TYPES

Dans ce chapitre, nous allons étudier quelques propriétés des modèles obtenus par itération d'extensions de la forme $M \longmapsto M\binom{t}{c}$ définies au § 1, où t est un type définissable et complet (ces hypothèses sont indispensables ; cf. lemme 0.1 et discussion au début de § II. A et B).

Notons d'abord que la construction des modèles $M\binom{t}{c}$ peut être itérée un nombre fini quelconque de fois de manière évidente : étant donné des types définissables $t_o,\dots,t_n$ sur un modèle M de $\mathcal{P}$, $M\begin{pmatrix} t_o\dots t_n \\ c_o\dots c_1 \end{pmatrix}$ est le modèle obtenu en ajoutant d'abord un élément c_o qui réalise t_o, puis c_1 réalisant l'unique extension définissable de t_1 à $M\begin{pmatrix} t_o \\ c_o \end{pmatrix}$ - i.e., le type $d_1(M\begin{pmatrix} t_o \\ c_o \end{pmatrix},v)$, où d_1 est le schéma définissant t_1, cf. § II.B -, etc...

Dans un second temps, des itérations $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i\in I}$ le long d'un ensemble totalement ordonné arbitraire I sont obtenues comme limites directes des itérations sur tous les sous-ensembles finis de I.

Le paragraphe A est dédié à la définition et les propriétés élémentaires des itérations mentionnées ci-dessus. Dans B, on introduit la notion de bloc, outil permettant l'étude des itérations $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i\in I}$ quand les types t_i sont uniformes. Le paragraphe C est réservé à l'exposition de ce que nous appelons des "phénomènes d'exclusion", notamment des types minimaux ; ceux-ci consistent en ce que les types en question ne sont réalisés qu'une seule fois dans certaines parties des modèles. Dans D on prouve l'existence d'un support pour tout élément d'un modèle de la forme $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i\in I}$, c'est-à-dire d'un ensemble fini minimal de "coordonnées" $i \in I$ dont l'élément dépend ; dans les modèles obtenus par itération des types minimaux, le support d'un élément détermine complètement le sous-modèle engendré par cet élément.

IV.1.- RAPPEL DE FAITS ÉLÉMENTAIRES (les démonstrations détaillées sont laissées en exercice au lecteur).

(a) Si $M_1, M_2 \models \mathcal{P}$ et f est une application élémentaire, $\mathrm{Dom}(f) \subseteq M_1$, $\mathrm{Im}(f) \subseteq M_2$, alors f s'étend de façon unique en une application élémentaire entre les sous-modèles élémentaires de M_1, M_2 engendrés par Dom(f), Im(f), respectivement.

(b) Si $M_1, M_2 \models \mathcal{P}$, t est un type définissable et t_i (i = 1,2) l'unique extension définissable de t à M_i (i.e., $t_i = d(M_i, v)$ où d est le schéma définissant t), alors toute application élémentaire $h : M_1 \to M_2$ s'étend de façon unique en une application élémentaire $\bar{h} : M_1\begin{pmatrix} t_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \to M_2\begin{pmatrix} t_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ telle que $\bar{h}(c_1) = c_2$. En particulier, $M_1 \prec M_2$ entraine $M_1\binom{t}{c} \prec M_2\binom{t}{c}$.

(c) Sous les hypothèses de (b) on a

$$x \in M_1\begin{pmatrix} t_1 \\ c_1 \end{pmatrix} - M_1 \Leftrightarrow \bar{h}(x) \in M_2\begin{pmatrix} t_2 \\ c_2 \end{pmatrix} - M_2.$$

En particulier, si $M_1 \prec M_2$, on a

$$x \in M_1\begin{pmatrix} t_1 \\ c_1 \end{pmatrix} - M_1 \Leftrightarrow x \in M_2\begin{pmatrix} t_2 \\ c_2 \end{pmatrix} - M_2.$$

(a) est trivial (mettre $\bar{f}(\tau^{M_1}(\bar{a})) = \tau^{M_2}(f(\bar{a}))$ pour $\bar{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ et tout terme τ).
(b) est conséquence immédiate de (a).
(c) Tout $x \in M_1(c_1)$ est de la forme $x = \tau(\bar{a}, c_1)$ pour un terme τ et un $\bar{a} \in M_1$. En appelant $\varphi(\bar{u}, w, v)$ la formule $w = \tau(\bar{u}, v)$, pour tout $b \in M_1$ on a :

$$x = b \Leftrightarrow M_1(c_1) \models \varphi(\bar{a}, b, c_1) \Leftrightarrow \varphi(\bar{a}, b, v) \in t_1 \Leftrightarrow M_1 \models d_\varphi(\bar{a}, b),$$

et puisque h est élémentaire :

$$x \in M_1 \Leftrightarrow M_1 \models \exists w\, d_\varphi(\bar{a}, w) \Leftrightarrow M_2 \models \exists w\, d_\varphi(h(\bar{a}), w) \Leftrightarrow \bar{h}(x) \in M_2.$$

A.- Itération des types définissables le long d'un ensemble ordonné

Etant donné $M \models \mathcal{P}$ et $t_o, \ldots, t_n$ types définissables sur M, le modèle $M\begin{pmatrix} t_o \ldots t_n \\ c_o \ldots c_n \end{pmatrix}$ est défini par induction sur n de la manière suivante :

$$M\begin{pmatrix} t_o\dots t_n \\ c_o\dots c_n\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} t_o\dots t_{n-1} \\ c_o\dots c_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t'_n \\ c_n\end{pmatrix}$$

où t'_n est l'unique extension définissable de t_n à $M\begin{pmatrix} t_o\dots t_{n-1} \\ c_o\dots c_{n-1}\end{pmatrix}$:

$t'_n = d_n(M\begin{pmatrix} t_o\dots t_{n-1} \\ c_o\dots c_{n-1}\end{pmatrix},v)$, où d_n est le schéma définissant t_n (cf. § II.B).

Notons que si le type t_i est non-trivial on doit avoir $c_i \in M\begin{pmatrix} t_o\dots t_{i-1} \\ c_o\dots c_{i-1}\end{pmatrix}$.
On désigne ces modèles par $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i\end{pmatrix}_{i\le n}$.

IV.2.- Proposition. (a) Le n+1-type sur M réalisé par $(c_o,\dots,c_n)$ dans $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i\end{pmatrix}_{i\le n}$ est définissable. Son schéma de définition s'obtient récursivement à partir des schémas définissant les t_i.

(b) Si $0 \le i_o < i_n <\dots< i_k \le n$, alors $M\begin{pmatrix} t_{i_j} \\ c_{i_j}\end{pmatrix}_{j\le k} \prec M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i\end{pmatrix}_{i\le n}$.

(c) $m < n \Rightarrow \left[M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i\end{pmatrix}_{i\le m}\right]\begin{pmatrix} t_j \\ c_j\end{pmatrix}_{m+1\le j\le n} \simeq M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i\end{pmatrix}_{i\le n}$.

Démonstration. (a) Par induction sur n. Soient d_i les schémas définissant les t_i, et d' le schéma définissant le type de $(c_o,\dots,c_{n-1})$ sur M. Alors pour $\bar{a} \in M$ et toute formule φ , on a :

$$M(c_i)_{i\le n} \models \varphi(\bar{a},c_o,\dots,c_n) \Leftrightarrow M(c_i)_{i\le n-1} \models (d_n)_\varphi\ (\bar{a},c_o,\dots c_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow M \models d'_{(d_n)_\varphi}\ (\bar{a}).$$

(b) Ceci suit par induction de $M\begin{pmatrix} t_1 \\ c_1\end{pmatrix} \prec M\begin{pmatrix} t_1 \\ c_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_2 \\ c_2\end{pmatrix}$ et $M \prec N \Rightarrow M\binom{t}{c} \prec N\binom{t}{c}$.

(c) Induction facile sur $n \ge m+1$.

Soit I un ensemble totalement ordonné par < et supposons que pour chaque $i \in I$ on s'est donné un type définissable (non trivial) t_i de M. Pour chaque $i \in I$, soit c_i un élément tel que quels que soient $k \in \omega$ et $i_o <\dots <i_k < i$, on a

$c_i \not\in M\begin{pmatrix} t_{i_j} \\ c_{i_j} \end{pmatrix}_{j\leq k}$. Pour chaque $J \in \mathbb{P}_\omega(I)$, $J = \{i_o,\dots,i_k\}_<$ (i.e., $i_o < \dots < i_k$) posons $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i\in J} = M\begin{pmatrix} t_{i_j} \\ c_{i_j} \end{pmatrix}_{j\leq k}$. La proposition précédente montre que $\{M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i\in J} \mid J \in \mathbb{P}_\omega(I)\}$ est une famille filtrante pour la relation $\prec$ de sous-structure élémentaire lorsque $\mathbb{P}_\omega(I)$ est muni de l'ordre d'inclusion. On pose :

<u>Définition</u>.- $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i\in I} = \bigcup\{M\begin{pmatrix} t_j \\ c_j \end{pmatrix}_{j\in J} \mid J \in \mathbb{P}_\omega(I)\}$.

IV.3.- <u>Proposition</u>.- (a) $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i\in I}$ est un modèle de $\mathcal{P}$.

(b) - $J \in \mathbb{P}_\omega(I) \Rightarrow M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i\in J} \prec M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i\in I}$

(c) Si $t_i = t$ pour tout $i\in I$ et t est un type non-trivial, alors $\{c_i \mid i \in I\}$ avec l'ordre $c_i < c_j \Leftrightarrow i < j$ est un ensemble d'indiscernables sur M dans $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i\in I}$.

<u>Démonstration</u>.- (a) et (b) sont des conséquences immédiates du "lemme de la réunion" bien connu de Tarski.

(c) Etant donné deux suites $J = \{i_o,\dots,i_k\}_<$, $J' = \{i'_o,\dots,i'_k\}_<$ de la même longueur $k+1$, alors $(c_{i_o},\dots,c_{i_k})$ et $(c_{i'_o},\dots,c_{i'_k})$ réalisent dans $M(c_i)_{i\in J}$ et $M(c_i)_{i\in J'}$, respectivement, le même type sur M (à savoir le $k+1$-type construit comme dans la proposition IV.2(a) à partir de $t_o = t,\dots,t_k = t$). Donc, ces deux suites réalisent le même type également dans le modèle $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i\in I}$ puisque c'est une extension élémentaire de $M(c_i)_{i\in J}$ et $M(c_i)_{i\in J'}$.

<u>Notations</u>.- Comme d'habitude, nous abrégeons $M\begin{pmatrix} t_i \\ c_i \end{pmatrix}_{i\in I}$ par $M(c_i)_{i\in I}$ et même par $M(I)$, s'il n'y a pas de danger de confusion. En vue de (c) de la proposition qui précède, nous dirons, quand il y a lieu, que I (avec son ordre) est un ensemble d'indiscernables de $M(I)$.

Un argument semblable permet de démontrer les deux premiers points de :

IV.4. Proposition.- Soient I_1, I_2 des ensembles ordonnés . Alors

(a) $I_1 \subseteq I_2^{(1)} \Rightarrow M(c_i)_{i\in I_1} \prec M(c_i)_{i\in I_2}$

(b) Plus généralement, si $f : I_1 \to I_2$ est un monomorphisme d'ordre et si $t'_{f(i)} = t_i$ pour tout $i \in I_1$, alors il existe un unique plongement élémentaire

$$\overline{f} : M\begin{pmatrix} t_i \\ \\ c_i \end{pmatrix}_{i\in I_1} \longrightarrow M\begin{pmatrix} t'_j \\ \\ c'_j \end{pmatrix}_{j\in I_2}$$ tel que $\overline{f}(c_i) = c'_{f(i)}$ et $\overline{f} \restriction M$ est l'identité.

(c) Si I_1 est un segment initial de I_2, alors

$$M(c_i)_{i\in I_2} = (M(c_i)_{i\in I_1})(c_i)_{i\in I_2 - I_1} .$$

Démonstration.- (a) se déduit de manière évidente de (b). Pour prouver (b), il suffit de remarquer que pour $i_o <\ldots< i_k$ dans I_1, $(c_{i_o},\ldots,c_{i_k})$ et $(c'_{f(i_o)},\ldots,c'_{f(i_k)})$ réalisant le même type sur M ; donc l'application $c_i \mapsto c'_{f(i)}$ $(i \in I_1)$ et l'identité sur M est élémentaire, et par IV.1 (a) elle s'étend à $M(c_i)_{i\in I_1}$.

(c) Soient $N = M(c_i)_{i\in I_1}$, $N' = M(c_i)_{i\in I_2}$. (a) implique que $N(c_i)_{i\in K} \prec N'$ pour tout $K \in \mathbb{P}_\omega(I_2 - I_1)$, et en particulier que $N(c_i)_{i\in I_2 - I_1} \subseteq N'$. Réciproquement, si $J \in \mathbb{P}_\omega(I_2)$, le fait que I_1 est segment initial de I_2 et IV.2 (c) entraînent $M(c_i)_{i\in J} = [M(c_i)_{i\in J\cap I_1}](c_i)_{i\in J\cap(I_2 - I_1)}$; donc, par IV.1 (c) on a $M(c_i)_{i\in J} \prec N(c_i)_{i\in J\cap(I_2-I_1)}$, d'où il suit facilement l'inclusion $N' \subseteq N(c_i)_{i\in I_2 - I_1}$.

IV.5.- Corollaire.- (Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski)

Etant donné une structure infinie $\mathfrak{A}$ de langage quelconque [2] et un type d'ordre total τ, il existe $\mathfrak{B} \succ \mathfrak{A}$ contenant un ensemble d'indiscernables de type τ.

Démonstration.- Un argument standard de compacité montre qu'on peut se ramener au

---

(1) C'est-à-dire l'ordre de I_1 est la restriction de celui de I_2.

(2) de cardinalité arbitraire et n'étendant pas nécessairement celui de l'arithmétique.

cas où le langage L de $\mathfrak{A}$ est fini.

En "copiant" sur l'univers de $\mathfrak{A}$, au moyen d'une bijection quelconque la structure d'un modèle de l'arithmétique de même cardinalité que $\mathfrak{A}$ on enrichit $\mathfrak{A}$ en modèle de $\mathcal{P}$ (appeler L' le langage ainsi obtenu et noter que l'arithmétique et la L-strucutre initiale de $\mathfrak{A}$ ne sont pas nécessairement reliées).

On applique la Proposition IV.3 (c) avec $M = \mathfrak{A}$, I un ensemble de type τ et t un type définissable non-trivial quelconque (qui existe en vertu des résultats de § III puisque L' est fini).

La L'-structure $M\binom{t_i}{c_i}_{i\in I}$ a I comme ensemble d'indiscernables ; en particulier, I est aussi un ensemble d'indiscernables pour la L-structure $\mathfrak{B} = M\binom{t_i}{c_i}_{i\in I} \restriction L$.

B.- Blocs. Itération des types uniformes

On introduit ici l'importante notion de bloc. Celle-ci permet de décrire de manière simple et intuitive les modèles de la forme $M\binom{t}{c}$ où t est un type uniforme et, plus généralement, les modèles obtenus par itération des types uniformes.

IV.6.- Définition.- Si $M \models \mathcal{P}$ et $x,y \in M$, posons :

$x \sim y \Leftrightarrow$ il existe un terme pur (i.e. sans paramètres) $f(v)$ tel que $M \models x \leq f(y) \wedge y \leq f(x)$.

$B(x,M) = \{y \in M \mid x \sim y\}$ s'appelle le bloc de x en M.

IV.7. Proposition.- (1) Chacune des conditions suivantes équivaut à $x \sim y$.

(a) il existe des termes purs $f_1(v)$, $f_2(v)$ tels que

$$M \models x \leq f_1(y) \wedge y \leq f_2(x).$$

(b) il existe des termes purs $g_1(v)$, $g_2(v)$ tels que

$$M \models g_1(x) \leq x,y \leq g_2(g_1(x)).$$

(c) il existe un terme pur $h(v)$ tel que $M \models x,y \leq \min\{h(x),h(y)\}$.

(2) $\sim$ est une relation d'équivalence

(3) $B(x,M)$ est un segment de M.

Démonstration.- (1) $x \sim y \iff$ (a) est évidente en posant $f(v) = \max\{f_1(v), f_2(v)\}$. Pour (b) $\implies x \sim y$ mettre $f(v) = \max\{g_2(g_1(v)), g_2'(g_1'(v))\}$ où g_1, g_2, g_1', g_2' sont obtenus en appliquant (b) à x,y respectivement. Pour la réciproque mettre $f'(v) = \max\{f(u) \mid u \leq v\} + v$, $g_1(v) = \mu u(f'(u) \geq v)$ et $g_2(v) = f'(f'(v))$.

(c) $\iff x \sim y$ est prouvée en posant $h(v) = f(v) + v$.

(2) La réflexivité et la symétrie de $\sim$ sont triviales. Pour la transitivité, vérifier la condition (1.a) pour les termes $f_1'(f_2(v))$ et $f_2'(f_1'(v))$, où $f_i'(v) = \max\{f_i(u) \mid u \leq v\}$ $(i = 1,2)$ et f_1, f_2 sont donnés par les conditions $x \sim y$ et $y \sim z$. On obtient $x \sim z$.

(3) Etant donné $y_1, y_2 \in B(x,M)$ et $y \in M$ tels que $y_1 \leq y \leq y_2$, la conclusion $y \in B(x,M)$ est obtenue en appliquant (1.a) aux termes f_1', f_2', où $f_1'(v) = \max\{f_1(u) \mid u \leq v\}$, et les termes f_1, f_2 sont obtenus à partir des conditions $x \sim y_1 \sim y_2$.

Les blocs permettent de caractériser facilement les segments initiaux de M qui sont des sous-structures élémentaires :

IV.8.Proposition.- Soit S un segment initial de M ($M \models \mathcal{P}$). Alors $S \prec M$ ssi pour tout $x \in S$, $B(x,M) \subseteq S$.

Démonstration.- $\Rightarrow$) Si $S \prec M$, soient $x \in S$ et $y \in M$ tels que $x \sim y$; soit $f(v)$ un terme tel que $M \models x \leq f(y) \wedge y \leq f(x)$. Comme $f^M(x) \in S$, il est évident que $y \in S$.

$\Leftarrow$)Soient $\tau(v_1,\ldots,v_n)$ un terme et $x_1,\ldots,x_n \in S$; il suffit de prouver que $\tau^M(x_1,\ldots,x_n) \in S$. Posons $f(v) = \max\{\tau(v_1,\ldots,v_n) \mid v_1,\ldots,v_n \leq v\}$ et $x' = \max\{x_1,\ldots,x_n\}$. On a $\tau^M(x_1,\ldots,x_n) \leq f^M(x')$. Puisque S est un segment initial il suffit de voir que $f^M(x') \in S$. Si $M \models f(x') \leq x'$, alors $f^M(x') \in S$ puisque S est un segment initial. Si $M \models x' \leq f(x')$, alors $x' \sim f^M(x')$ par IV.7 (1.a) avec $x = x'$, $y = f^M(x')$, $f_2 = f$ et $f_1(v) = v$; donc $f^M(x') \in B(x',M) \subseteq S$.

IV.9. Corollaire.- Soient $M \models \mathcal{P}$ et $\{x_i \; i \in I\}$ un système complet de représentants pour la relation $\sim$ dans M, i.e.

$$x_i \not\sim x_j \quad \text{pour } i \neq j, \; i,j \in I,$$

pour tout $x \in M$ il existe $i \in I$ tel que $x \sim x_i$.

Définissons dans I l'ordre suivant :

$$i <_I j \Leftrightarrow M \models x_i < x_j.$$

Alors l'application $J \longmapsto \bigcup_{i \in J} B(x_i, M)$ est une bijection entre les segments initiaux de $< I, <_I >$ et les segments initiaux M' de M tels que $M' \prec M$.

Démonstration.- Si J est un segment initial de I, alors $\bigcup_{i \in J} B(x_i, M)$ est évidemment un segment initial de M clos par la relation $\sim$; par IV.8, il est donc une sous-structure élémentaire de M.

Réciproquement, si $M' \prec M$ est un segment initial, on pose $J = \{i \in I | B(x_i, M) \subseteq M'\}$, et l'on vérifie sans peine en utilisant IV.7 que J est un segment initial de I et $M' = \bigcup_{i \in J} B(x_i, M)$.

Nous montrons maintenant que rajouter à M un(élément réalisant un) type uniforme revient à lui ajouter un bloc.

IV.10. Théorème.- (a) Soit t un type uniforme. Alors $M(^t_c) - M = B(c, M(^t_c))$.

(b) Soit I un ensemble ordonné. Si t_i est un type uniforme pour chaque $i \in I$, alors

$$M(c_j)_{j \leq i} - M(c_j)_{j < i} = B(t_i, M(c_i)_{i \in I}).$$

Démonstration.- (a) L'inclusion $B(c, M(c)) \subseteq M(c) - M$ est évidente.

Pour prouver la réciproque, si $x \in M(c) - M$, alors $x = f(a,c)$ pour un terme pur $f(u,v)$ et un $a \in M$. En posant $f'(v) = \max \{f(u,v) | u \leq v\}$ on obtient $M(c) \models x \leq f'(c)$. D'autre part, la remarque (*) ci-dessous donne $M(c) \models c \leq g(x)$ pour un terme pur $g(v)$, d'où $x \sim c$ par IV.7 (1.a), i.e. $x \in B(c, M(c))$.

En utilisant la condition (2) du théorème II.18, on voit aisément que l'uniformité de t entraîne :

(*) pour tout $x \in M(c) - M$ il existe un terme pur $g(v)$ tel que $M(c) \models g(x) \geq c$ [(1)]

---

(1) En effet, cette condition pour tout $N \succ M$ équivaut à l'uniformité de t ; cf. démonstration de (2) $\Longrightarrow$ (3), théorème II.18.

(b) Posons $N = M(c_j)_{j\le i}$. Puisque $M(c_j)_{j\le i} = N(c_i)$ (cf.IV.5 (c)), de la partie (a) on obtient :

$$M(c_j)_{j\le i} - M(c_j)_{j<i} = B(c_i, N(c_i)).$$

Il suffit de voir que $B(c_i,N(c_i)) = B(c_i,M(c_j)_{j\in I})$. Par IV.4 (c et a), $N(c_i)$ est un segment initial et une sous-structure élémentaire de $M(c_j)_{j\in I}$; d'où par IV.8 :

$$B(c_i,M(c_j)_{j\in I}) \subseteq N(c_i) ;$$

ceci entraîne évidemment l'égalité voulue.

C.- Phénomènes d'exclusion

On va voir que tout point d'un modèle possède une "zone d'influence" dans laquelle il empêche tout autre point de réaliser le même type que lui ; d'où le nom de "phénomène d'exclusion" donné à ce genre de situation. Par exemple, on montre qu'un type minimal est réalisé par un seul élément du bloc qu'il détermine (et même mieux, cf. théorème IV.17 (c)). Un autre résultat important dans la même direction est le théorème IV.11 ci-dessous.

IV.11. Théorème.- (Ehrenfeucht-Gaifman). Soient M un modèle de $\mathcal{P}$, $f(v)$ un terme et $a \in M$. Si $f^M(a) \neq a$, alors a et $f^M(a)$ réalisent dans M des types distincts ; en effet, les types respectifs sont distingués par une formule ayant les mêmes paramètres que f. En particulier, si f est un terme pur, a et $f^M(a)$ ont des types purs distincts.

Démonstration.- Commençons par définir une relation d'équivalence entre éléments x,y de M :

$$x \underset{f}{\equiv} y \Leftrightarrow \text{il existe une suite finie } x_0 = x, x_1,\dots,x_z = y \text{ d'éléments de } M \text{ telle que pour chaque } i,\ 0 \le i \le z \text{ , ou bien } x_{i+1} = f(x_i) \text{ ou bien } f(x_{i+1}) = x_i.$$

On dira que la suite $x_0,\dots,x_z$ relie x à y.

Ces définitions sont formalisables dans $\mathcal{P}$ de manière évidente au moyen de la codification des suites finies. Remarquons que :

(a) $\equiv_f$ est, en effet, une relation d'équivalence.
La preuve est laissée en exercice.

(b) Si $x \equiv_f y$, alors il existe une chaîne $x_o = x, x_1, \ldots, x_t, x_{t+1}, \ldots, x_z = y$ telle que $x_{i+1} = f(x_i)$ pour $0 \le i \le t-1$ et $x_i = f(x_{i+1})$ pour $t \le i \le z-1$ (ici $1 \le t \le z-1$).

En effet, si $x_i = f(x_{i+1})$ et $x_{i+2} = f(x_{i+1})$, alors $x_i = x_{i+2}$ et on pourra supprimer des éléments de la chaîne initiale jusqu'à l'élimination de ce cas de figure. Evidemment, ce procédé d'élimination n'augmente pas la longueur d'une suite donnée reliant x à y ; en particulier, la plus courte suite reliant x à y doit avoir cette forme-ci.

Supposons maintenant que $a \in M$, $b = f^M(a)$ et $b \neq a$. Evidemment $a \equiv_f b$ par une chaîne de longueur 1. Posons :

$$g(v) = \mu u \; (u \equiv_f v)$$

et

$$h(v) = \mu w(\exists s \;\; (s \text{ code une suite reliant } v \text{ à } g(v) \wedge \ell(s) = w)).$$

(c) $\mathcal{P} \models g(v) = g(v') \longleftrightarrow v \equiv_f v'$.

Ceci est clair puisque g(v) est le plus petit élément de la classe d'équivalence de v modulo $\equiv_f$.

En particulier, $M \models g(a) = g(b)$. Soit c cet élément, et soit $s_o = c$, $s_1, \ldots s_{h(a)-1} = a$ une suite de longueur minimale reliant c à a. Deux cas sont possibles :

(d) b apparaît dans cette suite.

Disons $b = s_i$. Alors $i = h(a) - 2$, parce que sinon $s_o = c, s_1, \ldots, s_i = b = f(a)$, a serait une suite plus courte reliant c et a. Pratiquement, le même argument montre aussi que $s_o, \ldots, s_i$ est la plus courte suite reliant c à b. Donc $h(a) = h(b) + 1$. Ceci entraîne que l'un de h(a), h(b) est pair et l'autre impair, et donc que a et b ont des types distincts.

(e) b n'apparaît pas dans cette suite.

Dans ce cas, la suite doit être de la forme $s_o = c$, $s_1 = f(c)$, $s_2 = f(f(c)), \ldots,$ $s_{h(a)-1} = f^{(h(a)-2)}(c) = a$.

Sinon, vu que la suite $s_o,\ldots,s_{h(a)-1}$ a la forme établie dans (b), on aurait $s_{h(a)-2} = f(a) = b$.
Soit :

$$q(v) = \mu u(f^{(u)}(g(v)) = v),$$

(où f^u désigne le u-ième itéré de f). Comme $b = f(a)$, il est évident que $q(b) = q(a)+1$. Donc $q(a)$ et $q(b)$ n'ont pas même parité, et, en particulier, n'ont pas même type.

Remarque.- La preuve ci-dessus est due à Ehrenfeucht. Celle de Gaifman utilise des idées très semblables, mais elle est légèrement plus longue.

IV.12. Corollaire.- Si $N = M(b)$, le seul M-endomorphisme élémentaire de N est l'identité.

Démonstration.- Chaque $x \in N$ a la forme $x = f^N(b)$ où f est un terme à paramètres dans M . Si $x \neq b$, par IV.11 x et b ont types distincts sur M. En particulier, toute application élémentaire de N dans N qui laisse M fixe envoie b dans lui-même ; i.e., elle est l'identité sur $M \cup \{b\}$, et donc aussi sur N.

Dans le reste de ce paragraphe, nous étudions les phénomènes d'exclusion pour les types minimaux.

IV.13. Proposition.- Soient $M,N \models \mathcal{P}$, $M \prec N$, M_o le sous-modèle minimal de M, et a $a,b \in N$ tels qu'il existe un terme pur $f(v)$ tel que $M < a \leq b \leq f^N(a)$. Alors :

(a) il existe $x \in M_o(a) \cap M_o(b)$ tel que $M < x$;

(b) si $M' \prec M$ et $M'(b)$ est une extension $\prec$-minimale de M', alors $b \in M'(a)$; si $M'(a)$ est une extension $\prec$-minimale de M', alors $a \in M'(b)$.

Démonstration.- On peut supposer que $\mathcal{P} \models$ "f est strictement croissante et monotone"; sinon on prend $\max\{f(u) \mid u \leq v\} + v$ au lieu de f. Soit $f^{(u)}(v)$ un terme de variables u,v qui donne la u-ième itération de f, i.e. qui satisfait la condition d'induction

$$\mathcal{P} \models f^{(o)}(v) = v \wedge \forall u(f^{(u+1)}(v) = f(f^{(u)}(v))).$$

Soit $g(v) = \mu u(f^{(u)}(o) \geq v)$. On a :

(*) $\quad \mathcal{P} \models v_1 \leq v_2 \leq f(v_1) \to g(v_2) = g(v_1) \vee g(v_2) = g(v_1) + 1.$

En effet, si $g(v_1) = u$, on a $f^{(u)}(o) \geq v_1$, d'où soit $f^{(u)}(o) \geq v_2$, soit $f(f^{(u)}(o)) \geq f(v_1) \geq v_2$. Soit $w < u$; dans le premier cas par définition de $g(v_1)$ on a $f^{(w)}(o) < v_1 \leq v_2$, d'où $g(v_2) = u = g(v_1)$. Dans le second cas, $f^{(u)}(o) < v_2$, d'où $f^{(w+1)}(o) \leq f^{(u)}(o) < v_2$; on en conclut que $g(v_2) = u + 1 = g(v_1) + 1$.

Preuve de (a).- Soit $x = g^N(a)$; donc $N \models f^{(x)}(o) \geq a$ et $x \in M_o(a)$. Comme $M < a$ et $M \prec N$, ceci implique $M < x$. La relation (*) implique $x = g^N(b)$ ou $x = g^N(b)-1$, d'où $x \in M_o(b)$.

Preuve de (b).- Si $M' \prec M$ et $M'(b)$ est une extension $\prec$-minimale de M, comme $x \in M'(b) - M$, on obtient $M'(x) = M'(b)$, d'où $b \in M'(x) \subseteq M'(a)$. L'autre affirmation se démontre de manière analogue.

IV.14. Corollaire.- (a) Si $M \models a \leq b \leq f(a)$ pour un terme pur $f(v)$, $M_o < a$, (mais pas forcément $M < a$) et b réalise un type minimal, alors il y a un terme pur $g(v)$ tel que $M \models b = g(a)$; si a aussi réalise un type minimal, il existe un terme pur $h(v)$ tel que $M \models a = h(b)$.

(b) Si $M \prec N$, $a,b \in N$, et $M(a)$, $M(b)$ sont des extensions $\prec$-minimales de M chacune cofinale dans l'autre, alors $M(a) = M(b)$.

Démonstration.- (a) Utilisez la proposition IV.13(b) avec M au lieu de N et M_o = le modèle minimal de $\mathcal{P}$ au lieu de M et M'. Le résultat suit de ce que $M_o(c) = \{g^M(c) \mid g(v) \text{ terme pur de } L\}$, pour $c \in M$.

(b) On peut supposer que $N \models a \leq b$, l'autre cas étant symétrique. Le fait que $M(a)$ est cofinal dans $M(b)$ se traduit par l'existence d'un terme $f(v)$ à paramètres dans M tel que $N \models a \leq b \leq f(a)$. Or, $f(v)$ devient un terme pur dans $L(M)$, l'extension de L où chaque élément de M est nommé par une constante. Puisque $M < a$ (a réalise un type minimal, donc non-borné) on peut donc utiliser la proposition IV.13(b) avec $M' = M$ pour conclure que $b \in M(a)$ et $a \in M(b)$, c'est-à-dire $M(a) = M(b)$.

Remarque.- Si a,b réalisent le même type minimal, la partie (b) du corollaire peut être améliorée (voir théorème IV.17 (d)).

Dans le but d'établir la relation entre les blocs d'un modèle et les types minimaux réalisés dedans, nous introduisons une relation de dépendance entre des types :

IV.15. Définition.- (a) Soit $t(v)$ un type et $f(v)$ un terme. On pose :

$$f(t) = \{\varphi(v) \mid \varphi(f(v)) \in t\}.$$

(b) On dit qu'un type t_1 dépend d'un autre t_2 ssi il existe un terme $f(v)$ tel que $t_1 = f(t_2)$. On pose $t_1 \approx t_2$ ssi t_1 dépend de t_2 et t_2 dépend de t_1.

Remarques.- (a) $f(t)$ est un type dans la même théorie complète et dans le même langage que t.

(b) Si a réalise t dans M, alors $f^M(a)$ réalise $f(t)$ dans M.

(c) $\approx$ est une relation d'équivalence entre types d'une théorie complète donnée.

(d) Le théorème d'Ehrenfeucht-Gaifman (IV.11) peut être reformulé de la manière suivante : pour tout type t et tout terme $f(v)$, soit $(f(v) = v) \in t$, soit $f(t) \neq t$.

La vérification, facile, de ces faits est laissée en exercice au lecteur.

IV.16. Lemme.- Soit $t_2 = f(t_1)$ pour un terme f.

(a) Si t_1 est définissable, t_2 l'est aussi.

(b) Si t_1 est minimal, alors t_2 est minimal ou trivial (i.e. $(v = \pi) \in t_2$ pour un terme constant π). Si t_2 est minimal, alors il existe un terme $g(v)$ tel que $(g(f(v)) = v) \in t_1$, d'où $t_1 = g(t_2)$ et $t_1 \approx t_2$.

Remarque.- Il y a une condition semblable à (b) pour les types uniformes (que nous n'utilisons pas, et donc ne démontrons pas) :

Si t_1 est uniforme, alors t_2 est uniforme ou trivial.

Démonstration.- (a) Soit d^1 le schéma définissant t_1 ; t_2 est défini par le schéma :

$$d^2_\varphi = d^1_\psi \quad \text{où } \psi(\overline{u},v) = \varphi(\overline{u},f(v))$$

comme on peut le vérifier sans peine.

(b) Soit M le modèle minimal sur lequel t_1 est un type, et soit $M' = M\binom{t_1}{b}$.
Soit $b' = f^{M'}(b)$. Si $b' \in M$, alors il existe un terme constant π tel que $M' \models b' = \pi$; comme b' réalise t_2 on a $(v = \pi) \in t_2$. Si $b' \notin M$, comme M' est une extension $\prec$ - minimale de M, M(b') = M(b) ; donc il existe un terme g(v) tel que $M' \models g(b') = b$, i.e., $M' \models g(f(b)) = b$. Puisque b réalise t_1, $(g(f(v)) = v) \in t_1$; ceci donne :

$$\varphi(v) \in t_1 \Longleftrightarrow \varphi(g(f(v))) \in t_1 \Leftrightarrow \varphi(g(v)) \in t_2$$

pour toute formule φ , c'est-à-dire $t_1 = g(t_2)$. On a aussi $(f(g(f(v)))= f(v)) \in t_1$, c'est-à-dire $\psi(f(v)) \in t_1$, où $\psi(v)$ est la formule $f(g(v)) = v$; donc $\psi(v) \in t_2$, i.e., $(f(g(v)) = v) \in t_2$.

Pour voir que t_2 est minimal, la relation $M' \models g(b') = b$ et le fait que t_1 est non-borné montrent que $M < b'$ et donc que t_2 est non-borné. Si $N' = N(c)$ où $N \succ M$, $N < c$ et c réalise t_2, on a $N' \models f(g(c)) = c$, ce qui entraîne $N < c'$ et $N(c') = N(c)$, où $c' = g^{N'}(c)$. Puisque $t_1 = g(t_2)$, c' réalise t_1, d'où N(c') - et donc N(c) - est une extension $\prec$ -minimale de N.

IV.17. <u>Théorème</u>.- Soit $a \in N$ et supposons que a réalise dans N un type minimal t. Alors

(a) Pour tout $b \in B(a,N)$ il existe un terme pur f(v) tel que $a = f^N(b)$ (réciproquement, si $a = f^N(b)$, $b \in N$, alors $b \in B(a,N)$, comme l'on peut vérifier aisément).

(b) Si un élément de B(a,N) réalise un type minimal t', alors $t' \approx t$.

(c) Tout type t' tel que $t' \approx t$ est réalisé par un et un seul élement de B(a,N).

(d) Si $b \in N$ réalise le même type minimal t et $M \prec N$, alors $b \neq a$ implique que l'un de M(a), M(b) n'est pas cofinal dans l'autre.

<u>Démonstration</u>.- (a) Par IV.7 (1.c) il existe un terme pur h(v) tel que $N \models a \leq b \leq h(a)$ ou bien $N \models b \leq a \leq h(b)$. Dans les deux cas IV.14(a) entraîne l'existence d'un terme f(v) tel que $N \models a = f(b)$.

(b) Si $b \in B(a,N)$ réalise t', par (a) $N \models a = f(b)$; d'où $t = f(t')$. Comme t' est minimal, le lemme IV.16(b) entraîne $t \approx t'$.

(c) Soit $t' \approx t$, par exemple $t' = f(t)$. Le lemme IV.16(b) implique que t' est minimal ou trivial ; la seconde alternative est exclue parce que $t = g(t')$ pour un terme g, et t' est non-trivial.

Par IV.16(b), $(g(f(v)) = v) \in t$. En mettant $b = f^N(a)$ on obtient $a = g^N(b)$, d'où $b \in B(a,M)$. Comme a réalise t, b réalise $f(t) = t'$.

Supposons que $c \in B(a,N)$ réalise t' dans N. Comme $b \in B(a,N) = B(c,N)$, par (a) appliqué à c (au lieu de a) il existe un terme h tel que $N \models h(b) = c$. Or, b et $c = h^N(b)$ ont même type t' ; du théorème d'Ehrenfeucht-Gaifman (IV.11) il s'ensuit donc que $(h(v) = v) \in t'$, d'où $N \models h(b) = b$, i.e. $c = b$, car b réalise t'.

(d) Supposons, par contradiction, que M(a) et M(b) sont cofinaux l'un dans l'autre. alors IV.14(b) entraîne que $M(a) = M(b)$; appelons M' ce modèle. Puisque t est uniforme, le théorème IV.10(a) implique

$$M' - M = B(a,M') = B(b,M').$$

Il en résulte que le type minimal est réalisé par les éléments distincts a, b du même bloc, ce qui contredit (c).

<u>Remarque</u>.- Pour finir, remarquons qu'il est possible de démontrer l'existence de $K^{\aleph_0}$ types minimaux deux par deux non-équivalents selon la relation $\approx$, où K est la cardinalité du modèle minimal de $\mathcal{P}$. Ce résultat améliore considérablement le résultat, donné au § III, d'existence de $K^{\aleph_0}$ types minimaux tout court. Pour la démonstration, voir Gaifman [ ], théorème 4.13.

D.- <u>Support d'un élément dans</u> M(I)

Nous montrons ici que dans un modèle de la forme $M\binom{t_i}{c_i}_{i \in I}$, où les types t_i sont définissables, tout élément dépend - dans un sens précisé ci-dessous - seulement d'un ensemble fini de coordonnées $i \in I$; cet ensemble S_x est appelé le <u>support</u> de x. Quand les types t_i sont minimaux, le support détermine le sous-modèle M(x) engendré par x de la manière la plus forte possible : $M(x) = M(c_i)_{i \in S_x}$.

En fait, nos résultats sont plus généraux et dépendent seulement de ce que les types t_i aient la propriété suivante (toujours vérifiée par les types définissables dans $\mathcal{P}$; cf IV.20 ci-dessous) :

IV.18. Définition.- Un type définissable t sur M a la propriété d'intersection si quels que soient les modèles M_o, M_1, M_2 tels que $M \prec M_1 \cap M_2 \prec M_i \prec M_o$ $(i = 1,2)$, on a

$$(M_1 \cap M_2)\binom{t}{c} = M_1\binom{t}{c} \cap M_2\binom{t}{c}.$$

IV.19. Théorème.- Soient I un ensemble ordonné et $N = M\binom{t_i}{c_i}_{i\in I}$, où $M \models \mathcal{P}$.

(a) Pour tout $x \in N - M$ il existe un unique $i_x \in I$ tel que : $x \notin M(c_i)_{i<i_x}$, et pour tout $J \subseteq I$, on a

$$x \in M(c_i)_{i\in J} \Rightarrow i_x \in J \quad \text{et} \quad x \in M(c_i)_{\substack{i\in J\\ i\leq i_x}}$$

(b) Si chaque type t_i a la propriété d'intersection, alors pour chaque $x \in N$, il y a un unique $S_x \subseteq I$ fini tel que pour tout $J \subseteq I$:

$$x \in M(c_i)_{i\in J} \Leftrightarrow S_x \subseteq J.$$

Démonstration.- (a) Soit $x \in N - M$. Nous commençons par démontrer que pour chaque $J \subseteq I$ tel que $x \in M(c_i)_{i\in J}$, il existe $i_J \in J$ tel que $x \in M(c_i)_{\substack{i\in J\\ i\leq i_J}} - M(c_i)_{i<i_J}$.

Puis nous montrons que $i_J = i_{J'}$, pour toute paire de tels ensembles J, J'.

i_J est construit de la façon suivante. Comme $x \in M(c_i)_{i\in J}$, il existe $J' \subseteq J$, J' fini tel que $x \in M(c_i)_{i\in J'}$. Mieux, il existe un tel J' minimal, c'est-à-dire tel que aucun sous-ensemble propre n'a la même propriété ; comme $x \notin M$, $J' \neq \emptyset$. Soient $i_J = \max J'$, et $J'' = \{i \in J' \mid i < i_J\}$. Puisque J' est minimal et $J'' \subset J'$, on a

$$x \in M(c_i)_{i\in J'} - M(c_i)_{i\in J''} = (M(c_i)_{i\in J''})\binom{t_{i_J}}{c_{i_J}} - M(c_i)_{i\in J''}.$$

Aussi la proposition IV.4(a) entraîne que $M(c_i)_{i\in J''} \prec M(c_i)_{i<i_J}$. En utilisant le fait IV.1(c) avec $M_1 = M(c_i)_{i\in J''}$, $M_2 = M(c_i)_{i<i_J}$ et $t = t_{i_J}$ on conclut que

$$x \in M(c_i)_{\substack{i\in J\\ i\leq i_J}} - M(c_i)_{i<i_J}.$$

Pour démontrer la seconde affirmation, si $i_J < i_{J'}$, on a $x \in M(c_i)_{\substack{i\in J\\ i\leq i_J}}$ et $x \notin M(c_i)_{i<i_{J'}}$, ce qui est évidemment contradictoire puisque

$M(c_i)_{\substack{i\in J\\ i\leq i_J}} \subseteq M(c_i)_{i<i_{J'}}$. Un argument symétrique prouve que $i_{J'} < i_J$ est aussi impossible. Donc $i_J = i_{J'}$.

Le i_x est défini en mettant $i_x = i_J$ pour n'importe quel $J \subseteq I$ tel que $x \in M(c_i)_{i\in J}$.

(b) Soit $x \in N$. Mettons $S_x = \bigcap \{J \subseteq I \mid x \in M(c_i)_{i\in J}\}$. L'implication $x \in M(c_i)_{i\in J} \Rightarrow S_x \subseteq J$ est évidente. Pour la réciproque il suffit de montrer que $x \in M(c_i)_{i\in S_x}$. Comme $x \in M(c_i)_{i\in J}$ pour un $J \subseteq I$ fini, S_x est fini et il existe $J_1,\ldots,J_n$ finis tels que $S_x = \bigcap_{k=1}^{n} J_k$ et $x \in M(c_i)_{i\in J_k}$ $(k = 1,\ldots,n)$; donc il suffit de prouver

$$\bigcap_{k=1}^{n} M(c_i)_{i\in J_k} = M(c_i)_{i\in \bigcap_{k=1}^{n} J_k} \quad ;$$

ceci se réduit au cas $n = 2$ de manière évidente. L'inclusion $\supseteq$ est aussi évidente. Nous démontrons l'autre inclusion par induction sur $\overline{\overline{J_1}} + \overline{\overline{J_2}}$ ($\overline{\overline{J_i}}$ = cardinalité de J_i, finie). Soit $x \in M(c_i)_{i\in J_1} \cap M(c_i)_{i\in J_2}$. Si $x \in M$, alors évidemment $x \in M(c_i)_{i\in J_1\cap J_2}$. Donc, supposons $x \notin M$. Par la partie (a), $i_x \in J_1 \cap J_2$ et $x \in M(c_i)_{i\in J_k}$. Soit $J'_k = \{i \in J_k \mid i < i_k\}$ $(k = 1,2)$. On a

$x \in M(c_i)_{i\in J'_1}\begin{pmatrix} t_{i_x} \\ c_{i_x}\end{pmatrix} \cap M(c_i)_{i\in J'_2}\begin{pmatrix} t_{i_x} \\ c_{i_x}\end{pmatrix}$. Comme $\overline{\overline{J'_1}} + \overline{\overline{J'_2}} < \overline{\overline{J_1}} + \overline{\overline{J_2}}$, par hypothèse d'induction $M(c_i)_{i\in J'_1} \cap M(c_i)_{i\in J'_2} = M(c_i)_{i\in J'_1\cap J'_2}$; or, t_{i_x} a la propriété d'intersection, d'où

$$x \in M(c_i)_{i\in J'_1\cap J'_2}\begin{pmatrix} t_{i_x} \\ c_{i_x}\end{pmatrix} = M(c_i)_{\substack{i\in J_1\cap J_2\\ i\leq i_x}} \subseteq M(c_i)_{i\in J_1\cap J_2} \; ;$$

On démontre maintenant :

IV.20.- <u>Proposition</u>.- Tout type définissable sur un modèle de l'arithmétique de Péano généralisée $\mathcal{P}$ a la propriété d'intersection. De plus, ceci est vrai pour toute théorie ayant la propriété suivante : si la formule $\varphi(\overline{u},\overline{v})$ définit une relation d'équivalence entre n-uples, alors il y a des termes $\sigma_1(\overline{u}),\ldots,\sigma_n(\overline{u})$ tels que :

$$\forall \bar{u}\ \forall \bar{v}\ [\varphi(\bar{u},\bar{v}) \rightarrow \varphi(\bar{u},\sigma_1(\bar{u}),\ldots,\sigma_n(\bar{u})) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \sigma_i(\bar{u}) = \sigma_i(\bar{v})] ,$$

(c'est-à-dire, en ayant assez de termes pour choisir des représentants des classes de toute relation d'équivalence définissable).

Démonstration.- Il est évident que $(M_1 \cap M_2)\binom{t}{c} \subseteq M_1\binom{t}{c} \cap M_2\binom{t}{c}$. Il faut démontrer l'inclusion réciproque. Soit $N = M_0\binom{t}{c}$. Chaque $x \in M_1(c) \cap M_2(c)$ a les formes $x = \tau_1(\bar{a}_1,c) = \tau_2(\bar{a}_2,c)$, où τ_1, τ_2 sont des termes et $\bar{a}_i \in M_i$; d'où $N \models \tau_1(\bar{a}_1,c) = \tau_2(\bar{a}_2,c)$.

On trouvera un $\bar{a}_0 \in M_1 \cap M_2$ tel que $x = \tau_1(\bar{a}_0,c)$. Puisque t est définissable, il existe une formule $\psi(\bar{u}_1,\bar{u}_2)$ telle que pour tous $\bar{z}_1,\bar{z}_2 \in M_0$,

$$N \models \tau_1(\bar{z}_1,c) = \tau_2(\bar{z}_2,c) \Longleftrightarrow M_0 \models \psi(\bar{z}_1,\bar{z}_2).$$

Donc $M_0 \models \exists \bar{u}_1\ \psi(\bar{u}_1,\bar{a}_2)$, et puisque $M_2 \prec M_0$, il existe $\bar{a}'_1 \in M_2$ tel que $N \models \tau_1(\bar{a}_1,c) = \tau_1(\bar{a}'_1,c)\ (= \tau_2(\bar{a}_2,c))$.

En appliquant une seconde fois la définissabilité de t, il y a une formule $\varphi(\bar{u},\bar{u}')$ (où $\ell(\bar{u}) = \ell(\bar{u}') = \ell(\bar{a}_1)$) telle que pour tous $\bar{z}$, $\bar{z}' \in M_0$ on a :

$$N \models \tau_1(\bar{z},c) = \tau_1(\bar{z}',c) \Longleftrightarrow M_0 \models \varphi(\bar{z},\bar{z}').$$

Il est évident que φ définit une relation d'équivalence entre n-uples ($n = \ell(\bar{a}_1)$) et qu'on a $M_0 \models \varphi(\bar{a}_1,\bar{a}'_1)$. Vu l'hypothèse, on a $M_0 \models \sigma_i(\bar{a}_1) = \sigma_i(\bar{a}'_1)$ $(i = 1,\ldots,n)$, où la suite des termes σ_i choisit des représentants des classes d'équivalence modulo φ. Puisque $\sigma_i(\bar{a}_1) \in M_1$ et $\sigma_i(\bar{a}'_1) \in M_2$ $(i = 1,\ldots,n)$, en mettant $\bar{a}_0 = \langle\sigma_1(\bar{a}_1),\ldots,\ \sigma_n(\bar{a}_n)\rangle$ on a la conclusion voulue.

Manifestement, $\mathcal{P}$ satisfait la condition de l'énoncé ; le principe du minimum permet de choisir la plus petite n-uple dans l'ordre lexicographique construit à partir de l'ordre de base < , de chaque classes d'équivalence modulo φ. Formellement, les termes σ_i sont définis par induction :

$$\sigma_1(\bar{u}) = \mu v_0\ [\ \exists \bar{v}((\bar{v})_0 = v_0 \wedge \varphi(\bar{u},\bar{v}))]\ ,$$

$$\sigma_2(\bar{u}) = \mu v_0\ [\ \exists \bar{v}((\bar{v})_1 = v_1 \wedge (v)_0 = \sigma_1(\bar{u}) \wedge \varphi(\bar{u},\bar{v}))]\ ,$$

et pour $2 \leq i \leq n$:

$$\sigma_i(\bar{u}) = \mu v_{i-1} [\exists \bar{v}(\bigwedge_{j=0}^{i-2} (\bar{v})_j = \sigma_{j+1}(\bar{u}) \wedge \varphi(\bar{u},\bar{v}))] .$$

Le théorème suivant est le résultat central sur l'itération des types minimaux :

IV.21. Théorème.- Soient I un ensemble ordonné, $M \models \mathcal{P}$ et $N = M\binom{t_i}{c_i}_{i\in I}$. Si chaque t_i est un type minimal, alors pour tout $x \in N$, on a $M(x) = M(c_i)_{i\in S_x}$, où S_x est le support de x.

Démonstration.- Induction sur $\overline{\overline{S_x}}$. Si $S_x = \emptyset$, alors $x \in M$ et il n'y a rien à prouver. Soit donc $S_x = \{i_o,\ldots,i_m\}_<$, où $<$ est l'ordre de I. Pour simplifier la notation écrivons j au lieu de i_j, M' au lieu de $M(c_i)_{i\leq m} = M(c_i)_{i\in J_x}$ et M" au lieu de $M(c_i)_{i<m}$. On a $M' = M''\binom{t_m}{c_m}$; comme t_m est uniforme (puisque minimal), IV.10(a) entraîne $M' - M'' = B(c_m,M')$. Puisque $\{0,\ldots,m-1\} \subset S_x$, on a $x \notin M''$, d'où $x \in M' - M''$, et donc $x \in B(c_m,M')$. En appliquant IV.17(a); on obtient un terme pur $f(v)$ tel que $M' \models c_m = f(x)$. Or, $x \in M' = M''\binom{t_m}{c_m}$, d'où il existe un terme $g(u,v)$ et un $a \in M''$ tels que $M' \models x = g(a,c_m)$. Soient $h(v) = \mu u(v = g(u,f(v)))$ et $a' = h^N(x)$. Donc $a' \in M(x)$. Puisque $M' \models x = g(a,f(x))$; il s'ensuit que $a' \leq a$; M" étant un segment initial de M', on obtient $a' \in M'' = M(c_i)_{i<m}$, d'où $S_{a'} \subseteq \{0,\ldots,m-1\}$. Il est clair aussi que $N \models x = g(a',f(x)) = g(a',c_m)$; donc on a $x \in M(c_i)_{i\in S_{a'}\cup\{m\}}$. Vu la propriété qui définit S_x, on en conclut que $S_x \subseteq S_{a'}\cup\{m\}$, ce qui implique $S_{a'} = \{0,\ldots,m-1\}$. Par l'hypothèse d'induction, on $M(a') = M(c_i)_{i<m} = M''$. Puisque $a',c_m \in M(x)$, on obtient finalement $M(x) = M''(c_m) = M'$, ce qui achève la démonstration.

IV.22. Corollaire.- Soient I un ensemble ordonné et $M \models \mathcal{P}$. Si pour chaque $i \in I$, t_i est un type minimal, alors tout modèle intermédiaire $M \prec M' \prec M(c_i)_{i\in I}$ est de la forme $M' = M(c_i)_{i\in J}$ pour un unique $J \subseteq I$.

Démonstration.- Etant donné M', soit $J = \{i \in I \mid c_i \in M'\}$. Evidemment on a $M(c_i)_{i\in J} \subseteq M'$. L'inclusion inverse est conséquence du théorème précédent ; en effet, si $x \in M'$, IV.21 implique $S_x \subseteq \mathcal{J}$, d'où $x \in M(c_i)_{i\in J}$ par définition du support (cf. IV.19(b)). L'unicité de J est évidente.

IV.23. Corollaire.- Le treillis des structures intermédiaires, $< \{M' \mid M \prec M' \prec M(c_i)_{i\in I}\}, \subseteq >$, où M, I et les types t_i sont comme dans le corollaire IV.22, est isomorphe à l'algèbre de Boole $< \mathbf{P}(I), \subseteq >$ des sous-ensembles de I.

Démonstration.- Conséquence triviale de IV.22.

IV.24. Exemple d'une extension minimale qui n'est pas finale.-

Soit $N = M\binom{t_i}{c_i}_{i\in I}$, où $M \models \mathcal{P}$, I est un ensemble ordonné et chaque type t_i est minimal. On peut conclure du corollaire IV.22 que N est une extension $\prec$-minimale de $M' = M\binom{t_i}{c_i}_{i\in I-\{i_o\}}$, où $i_o \in I$. E, effet, si $M' \prec M'' \prec N$, alors $M'' = M\binom{t_i}{c_i}_{i\in J}$ pour un unique $J \subseteq I$; on a $I - \{i_o\} \subseteq J \subseteq I$, d'où $M'' = M'$ ou $M'' = N$.

En prenant $\overline{\overline{I}} \geq 2$ et i_o distincts du dernier élément de I, $M' \not\prec_f N$ puisque $c_i \in M'$ et $N \models c_i > c_{i_o}$, si $i > i_o$.

BIBLIOGRAPHIE

[A.H] F. Abramson, L. Harrington, Models without indiscernibles, Journal Symb. Logic, vol. 43 (1978), pp. 572-600.

[E.R] P. Erdös, R. Rado, A partition calculus in set theory, Bull. Amer. Math. Soc., vol 62 (1956), pp. 427-489.

[G] H. Gaifman, Models and types of Peano's arithmetic, Ann. Math. Logic, vol.9 (1976), pp. 223-306.

[K] J. Knight, Omitting types in set theory and arithmetic, Journal Symb. Logic, vol. 41 (1976), pp. 25-32.

[N.R] J. Nesétřil, V. Rödl, Partitions of finite relation and set systems, Journal Combinatorial Theory, Series A, vol. 22 (1976), pp. 289-312.

[S] S. Shelah, End extensions and numbers of countable models, Journal Symb. Logic, vol. 43 (1978), pp. 550-562.

[Si] S.G. Simpson, Forcing and models of arithmetic, Proc. Amer. Math. Soc., vol 43 (1974), pp.193-194.

JEAN-PIERRE RESSAYRE

Types remarquables et extensions de modèles dans l'arithmétique de Peano, II

Astérisque, tome 73 (1980), p. 119-154
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__73__119_0>

EXPOSÉ 6

TYPES REMARQUABLES ET EXTENSIONS DE MODÈLES DANS L'ARITHMÉTIQUE DE PEANO, II

Jean-Pierre Ressayre

Cet exposé est inséparable du précédent, en particulier il en partage l'introduction; en conséquence nous rappelons seulement que notre but principal ici sera l'étude des modèles de l'arithmétique construits par Abramson Harrington, [A-H]

§I - LE THÉORÈME DE RAMSEY ET L'ÉTUDE DES TYPES

Les quatre paragraphes de l'exposé précédent introduisaient chacun un aspect de notre sujet, le présent §I en introduit un cinquième : le lien entre d'une part le Théorème de Ramsey (et quelques autres résultats combinatoires semblables, introduits plus loin), et d'autre part les types construits et étudiés dans l'exposé précédent.

Moyennant quoi, ce paragraphe complète l'exposé précédent, et en donnera une manière de conclusion. Mais il est de plus la charnière entre les deux exposés, et à ce titre comporte un deuxième volet : il introduit la généralisation du théorème de Ramsey fini sur laquelle sont basées les constructions d'Abramson et Harrington (théorème I.12).

Le fil directeur de ce paragraphe est le suivant : à chaque résultat combinatoire que nous examinons, nous associons un énoncé de théorie des modèles qui lui est équivalent (par exemple au Théorème de Ramsey fini est associé le Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski); à cette occasion, nous examinerons les liens entre Combinatoire et Théorie des modèles, en nous préoccupant surtout d'appliquer la Théorie des modèles à la Combinatoire, à l'inverse de ce qui se fait habituellement.

Nous rappelons d'abord le Théorème de Ramsey : μ et ν désignant chacun soit un entier, soit le symbole ∞, on écrit $\mu \to (\nu)^n_k$ si pour tout ensemble X de cardinal μ, et toute partition $f : [X]^n \to k$ en k classes de l'ensemble $[X]^n$, il existe un sous-ensemble Y de X, de cardinal ν, qui est homogène pour f, c'est-à-dire $[Y]^n$ est contenu dans une seule classe de la partition. Plus généralement, soit M un modèle de $\mathcal{P}$; si $n \in \mathbb{N}$, $k \in M$ et μ, ν désignent soit "∞" soit des "entiers de M", nous dirons que $M \models \mu \to (\nu)^n_k$ si la propriété précédente est vérifiée au sens de M, quand on se restreint à des partitions et ensembles définissables dans M.

Le Théorème fini de Ramsey dit que ($n,k \in \mathbb{N}$ étant fixés) pour tout entier P il existe un entier Q tel que $Q \to (P)^n_k$; et le théorème infini dit que $\infty \to (\infty)^n_k$.

(A) Ramsey et Ehrenfeucht-Mostowski. On peut dire que le Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski est le compactifié - au sens imprécis indiqué dans l'exposé précédent, §I - du Théorème fini de Ramsey; en particulier les deux théorèmes se déduisent l'un de l'autre de manière élémentaire

I.1. <u>REMARQUES</u> - Soient $n, P, k \in \mathbb{N}$; (a) <u>Du Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski on déduit</u> : $\infty \to (P)^n_k$. En effet soit $f : [\mathbb{N}]^n \to k$ une partition; en vertu du théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski, il existe une extension élémentaire N du modèle $(\mathbb{N},f)$, contenant un ensemble $<$-indiscernable infini. Cet ensemble est évidemment homogène pour l'extension de f à N, donc $N \models$ "il existe un ensemble à P éléments qui est homogène pour f". Comme $(\mathbb{N},f) \prec N$, la même propriété est vérifiée dans $\mathbb{N}$.

(b) <u>De $\infty \to (P)^n_k$, on déduit</u> $\exists Q \; Q \to (P)^n_k$, <u>c'est-à-dire le Théorème de Ramsey fini.</u>

En effet soit N une extension élémentaire de $\mathbb{N}$ et soit $\alpha \in N$, non standard; alors $N \models \alpha \to (P)^n_k$. En effet, soit $f : [0,\alpha]^n \to k$ une partition définissable dans N; puisque $[0,\alpha]$ est infini (au sens standard) et $\infty \to (P)^n_k$ est vrai (au sens standard également), $[0,\alpha]$ contient un sous-ensemble à P éléments qui est homogène pour f. Donc $N \models \exists Q \; Q \to (P)^n_k$; et puisque $\mathbb{N} \prec N$, $\mathbb{N} \models \exists Q \; Q \to (P)^n_k$.

(c) <u>Du Théorème de Ramsey fini on déduit le Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski</u> c'est la démonstration originale bien connue de ce théorème.

La moralité de I.1, (a)et(b) est que toute démonstration du théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski qui n'utilise pas le Théorème de Ramsey - en particulier celle faite dans l'exposé précédent, §IV, à l'aide d'un type <u>définissable</u> - nous donne le théorème fini de Ramsey. Nous verrons à l'alinéa (C) que l'existence de types <u>uniformes</u> nous donne en prime le Théorème infini de Ramsey. Auparavant, nous étudions une généralisation de la propriété $\infty \to (\infty)^n_k$:

(B) <u>Types de Ramsey</u>

La définition de la propriété $\infty \to (\infty)^n_k$ demande que le domaine de la partition donnée, et celui de l'ensemble homogène pour cette partition, soient tous deux infinis. En demandant que ces deux ensembles soient "gros" pour diverses notions de grosseur des ensembles, on obtient diverses généralisations de $\infty \to (\infty)^n_k$, de la forme "gros $\to$ (gros)^n_k". Plusieurs généralisations de cette sorte seront étudiées par la suite. Soit M un modèle de $\mathcal{P}$; dans le présent alinéa, nous étudions le cas où la notion de grosseur des sous-ensembles de M est définie à l'aide d'un filtre ou d'un type sur M :

I.2. <u>NOTATION</u> - Soit t un type non borné sur M; pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in M$, on écrit $t \to (t)^n_k$ si pour toute partition $f : [M]^n \to k$ définissable dans M, il existe $X \in t$, homogène pour f.

I.3. PROPOSITION - Soit t un type non borné sur M; alors (a) les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $t \to (t)^n_2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

(ii) le type $\bigwedge_{i\le n} t(v_i) \wedge v_1 < \dots < v_n$ est complet sur M, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(iii) pour tout modèle $M' \succ M$, $t_{M'}$ est $<$ - indiscernable sur M

(iv) $t \to (t)^n_k$, pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout k dans M

(b) De plus, ces conditions entraînent que $M(^t_c)$ est extension $\prec$- minimale de M.

Démonstration Supposons vérifiée la condition (i), et soit $\phi(v_1 \dots v_n)$ une formule de M : nous allons montrer que $\bigwedge_{i\le n} t(v_i) \wedge v_1 < \dots < v_n$ décide $\phi(v_1 \dots v_n)$, ce qui est la condition (ii). Sur $[M]^n$ nous considérons la relation $\bar{a} \sim \bar{b} \Longleftrightarrow M \models \phi(\bar{a}) \longleftrightarrow \phi(\bar{b})$; cette relation comporte deux classes, donc puisque $t \longrightarrow (t)^n_2$, il existe $X \in t$ tel que $\forall \bar{a}, \bar{b} \in [X]^n$ $M \models \phi(\bar{a}) \longleftrightarrow \phi(\bar{b})$ - autrement dit, dans M la formule $\bigwedge_{i\le n} v_i \in X \wedge v_1 < \dots < v_n$ décide $\phi(v_1 \dots v_n)$. Alors comme $t(v_i) \vdash v_i \in X$, on a : $\bigwedge_i t(v_i) \wedge v_1 < \dots < v_n$ décide $\phi(v_1 \dots v_n)$; nous avons ainsi montré que (i) $\Rightarrow$ (ii). Réciproquement, supposons (ii) vérifiée, et soient $X \in t$, $f : [X]^n \to 2$ un terme de M; par (ii), $\bigwedge_{i\le n} t(v_i) \wedge v_1 < \dots < v_n$ décide les formules $f(v_1 \dots v_n) = 0$ et $f(v_1 \dots v_n) = 1$. Par compacité il existe $Y \in t$, qu'on peut supposer inclus dans X, tel que $\bigwedge_{i\le n} v_i \in Y \wedge v_1 < \dots < v_n$ fait de même - autrement dit, $[Y]^n$ est contenu dans une seule classe modulo f, ce qui démontre la condition (i).

Les conditions (ii) et (iii) sont trivialement équivalentes - donc les trois premières le sont. Montrons qu'elles entraînent que $M(^t_c)$ est une extension $\prec$ - minimale de M (c'est-à-dire (b)) : soit $f(v)$ un terme; la formule $(f(v_1) = f(v_2))$ détermine sur $[M]^2$ une partition en deux classes, et puisque $t \longrightarrow (t)^2_2$, on en déduit $X \in t$ tel que $[X]^2$ est dans une de ces classes. Autrement dit, $f \restriction X$ est soit constante, soit injective, ce qui par I de l'exposé précédent entraîne que $M(^t_c)$ est $\prec$ - minimimal au-dessus de M.

Reste à voir que $t \to (t)^n_2$ entraîne $t \to (t)^n_k$. Soient donc $X \in t$, $k \in M$, et $f : [X]^n \to k$ un terme de M. Puisque le type $\bigwedge_{i\le n} t(v_i) \wedge v_1 < \dots < v_n$ est complet sur M, il décide toutes les formules $f(v_1 \dots v_n) = j$ $(j < k)$. Comme $M(^t_c)$ est une extension $\prec$- minimale de M, en particulier $M \prec_f M(^t_c)$ (cf. exposé précédent, §I); cela entraîne qu'il existe $j < k$ tel que $\bigwedge_{i\le n} t(v_i) \wedge v_1 < \dots < v_n \vdash f(v_1 \dots v_n) = j$. Par compacité, il existe $Y \in t$, qu'on peut supposer inclus dans X, tel que $\bigwedge_{i\le n} v_i \in Y \wedge v_1 < \dots < v_n \vdash f(v_1 \dots v_n) = j$, autrement dit $[Y]^n$ est contenu dans une seule classe modulo f, ce qui montre $t \to (t)^n_k$.

N.B. (a) On dira que t est un type de Ramsey sur M si t vérifie les conditions équivalentes de la Proposition ci-dessus. Au §IV de l'exposé précédent nous avions construit un ensemble $<$ - indiscernable à l'aide d'un type définissable; si l'on dispose d'un type de Ramsey t on obtient des $<$ - indiscernables encore plus directement puisque $t_{M'}$ est $<$ - indiscernable quel que soit $M' \succ M$. Noter à ce sujet que ceci est réellement plus direct, car un type définissable $t^1(v)$ n'est pas toujours de Ramsey : en effet, si $t^1(v)$ n'est pas uniforme il arrive que t^1 ait deux extensions $t^2 \neq t^3$, non bornées et complètes sur $M\binom{t^1}{c_1}$; alors dans $M' = M\begin{pmatrix} t^1 & t^2 & t^3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, $t^1_{M'}$ n'est pas $<$- indiscernable sur M, car $c_1 < c_2 < c_3$ sont dans $t^1_{M'}$ et cependant $(c_1,c_2) \not\equiv_M (c_1,c_3)$. Alors bien que définissable, t^1 n'est pas de Ramsey.

(b) On va voir que l'existence de types de Ramsey équivaut au Théorème de Ramsey lui-même - on peut dire que c'est la compactification, au sens vague de l'exposé précédent §I, du théorème infini de Ramsey; et son équivalence avec ce théorème est l'analogue pour le cas infini de la Remarque I.1.; ci-dessous on suppose M et L dénombrables :

I.4. REMARQUE (a) De $M \models \infty \to (\infty)^n_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit l'existence d'un type de Ramsey; en effet, $\phi^n(v_1 \ldots v_n)$ étant une énumération des formules, on construit par récurrence sur n une famille décroissante $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles non bornés de M, tels que X_n est homogène pour la partition de $[M]^n$ déterminée par ϕ^n (X_n résulte de l'application de $\infty \to (\infty)^n_2$ à la partition de $[X_{n-1}]^n$ déterminée par ϕ^n). Alors si $t(v) = \{ v \in X_n ;\ n \in \mathbb{N} \}$ on a $t \to (t)^n_2$ par le choix de la famille $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) De l'existence d'un type de Ramsey sur M on déduit que $M \models \infty \to (\infty)^n_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in M$. En effet soit $f : [M]^n \to k$ une partition définissable; puisqu'on a un type de Ramsey t, tel que $t \to (t)^n_k$, il existe $X \in t$ homogène pour f; de plus $X \in t$ entraîne X définissable et non borné.

(C) Types de Ramsey, types uniformes et minimaux.

Nous examinons les relations entre la notion de type de Ramsey et les notions introduites aux §I et II de l'exposé précédent. La Remarque (a) ci-dessus indiquait qu'un type définissable n'est pas nécessairement de Ramsey, bien qu'il conduise également par itération à des indiscernables. Les relations avec les types minimaux et uniformes, c'est essentiellement l'extension globale et uniforme (au sens de l'exposé précédent) de la Proposition I.3. qui va nous les donner :

I-5 PROPOSITION - Soit $t(v)$ un type non borné sur M; sont équivalentes :
(a) quelque soit $N \succ M$, $t(v) \cup v > N$ est un type de Ramsey
(b) t est minimal (c) t est uniforme et rare.

Démonstration - L'implication (a) $\Rightarrow$ (b) est une conséquence immédiate de la Proposition I.3.b, appliquée à tout $N \succ M$. L'équivalence (b) $\Leftrightarrow$ (c) a été montrée au §II de l'exposé précédent; reste à vérifier que (c) $\Rightarrow$ (a). Soit $t(v)$ un type uniforme, et considérons la théorie (où $N \succ M$ et $c_1 \ldots c_n$ sont des symboles de constante nouveaux) :

$t(c_1) \cup \ldots \cup t(c_n) \cup N < c_1 \cup N(c_1) < c_2 \cup \ldots \cup N(c_1 \ldots c_{n-1}) < c_n$ - en convenant que $N(c_1 \ldots c_p) < c_{p+1}$ représente l'ensemble de formules $\{ h(ac_1 \ldots c_p) < c_{p+1} : h(uv_1 \ldots v_p)$ terme pur, $a \in N\}$. Cette théorie caractérise les modèles de la forme $N(c_1 \ldots c_n)$ (cf. exposé précédent, §IV), et comme ces modèles sont tous isomorphes sur $N \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$, il en résulte que cette théorie est complète. D'autre part si t est rare, il est clair qu'elle équivaut à

$t(c_1) \cup \ldots \cup t(c_n) \cup N < c_1 < \ldots < c_n$

Donc, cette dernière théorie est complète, et par I.3.a t est un type de Ramsey sur N.

Ainsi l'existence de types minimaux (cf. §III de l'exposé précédent) entraîne celle de types de Ramsey sur M, laquelle par la Remarque I.4. entraîne $M \models \infty \to (\infty)^n_k$. Comme ceci vaut pour tout modèle M de $\mathcal{P}$, cette démonstration du théorème de Ramsey infini nous donne également le fait que celui-ci est une conséquence de $\mathcal{P}$.

(D) La généralisation colorée des théorèmes de Ramsey et d'Ehreufencht-Mostowski.

Nous allons étudier une généralisation du théorème de Ramsey; dans cette généralisation, le domaine des partitions sera un "ensemble coloré", et les conditions de cardinalité sur les ensembles seront remplacées par des conditions portant sur leur "coloration"; voici la définition de ces notions.

On appelle ensemble coloré tout triplet $(X, <_X, C_X)$, où X est un ensemble, $<_X$ un ordre total sur X, et C_X une application de domaine $[X]^s$ (s fixé $\in \mathbb{N}$); l'image de C_X est appelé ensemble des couleurs, et pour $\bar{x} \in [X]^s$ $C_X(\bar{x})$ est la couleur de $\bar{x}$.

Les conditions sur la coloration des ensembles, qui vont remplacer les conditions de cardinalité, seront exprimées à l'aide de la notion "motif"(*), que voici.

(*) motif est la traduction du terme anglais "pattern".

Un ensemble de couleurs $\mathcal{C}$ étant fixé, le langage de nos ensembles colorés comporte les symboles =, <, C (à s arguments), les éléments de $\mathcal{C}$ comme constantes, enfin les variables v_i ($i \in \mathbb{N}$); L étant un entier on appelle motif $P(v_1 \ldots v_L)$ tout ensemble de formules atomiques de ce langage, ayant $v_1 \ldots v_L$ pour variables, et qui détermine complètement un ordre total et une coloration sur les éléments représentés par $v_1 \ldots v_L$.

Exemple - Nous supposons $s = 2$ pour fixer les idées; alors les motifs $P(v_1, v_2)$ sont tous les ensembles du type $\{v_1 = v_2\}$, $\{v_1 < v_2, \; C(v_1\, v_2) = a\}$, $\{v_2 < v_1, \; C(v_1, v_2) = a\}$ où a parcourt Φ ; pour $L > 2$, les motifs $P(v_1 \ldots v_L)$ sont tous les ensembles de la forme $\{ P^{ij}(v_i, v_j), \; 1 < i \leq j \leq L \}$, où P^{ij} est un motif sur v_i, v_j et $\{P^{ij}\}$ détermine un ordre total sur les éléments représentés par $v_1 \ldots v_L$.

Etant donnés un ensemble X coloré dans $\mathcal{C}$, et $\bar{x} \in \bigcup_n X^n$, on appelle motif de $\bar{x}$ et on note $p(\bar{x})$ l'unique motif $P(\bar{v})$ tel que $(X, \bar{x}) \models P(\bar{v})$; on dira aussi que la suite $\bar{x}$ ou que l'ensemble $\{x_1 \ldots x_n\}$ réalise le motif $P(\bar{v})$.

N.B. Nous avons convenu que si une suite comporte moins de s éléments distincts, son motif ne porte que sur l'ordre. Cette convention ne change rien sur le fond vis à vis de celle qui consiste à fixer une coloration non seulement de $[X]^s$ mais aussi de $\bigcup_{s' < s} [X]^{s'}$.

Nous étudions des généralisations du Théorème de Ramsey de la forme "gros $\to$ [gros$]^n_k$" : notre première généralisation, dans (C), était $t \to (t)^n_k$, où la notion de grosseur était définie par l'appartenance à un filtre t. Dans le présent cas, la notion de grosseur va être la présence de toutes les combinaisons finies possibles de colorations, c'est à dire la notion suivante : un ensemble coloré X est dit général si tout motif $P(v_1 \ldots v_L)$ est réalisé dans X; un sous-ensemble Y est général si la restriction de C_X à Y est générale.

Exemple - $X = \mathbb{N}$ $<_X$ = ordre usuel, $s = 1$, $\mathcal{C} = \{0, 1\}$; il y a donc deux couleurs qui constituent une partition de $\mathbb{N}$, que nous notons C^0, C^1. On voit facilement que cet ensemble coloré est général si et seulement si C^0 et C^1 sont infinis, les sous-ensembles généraux étant de même les Y tels que $Y \cap C^0$ et $Y \cap C^1$ sont infinis. Noter qu'un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ qui est homogène pour la partition C^0, C^1 doit être inclus soit dans C^0 soit dans C^1, donc n'est pas général; ainsi notre généralisation du Théorème de Ramsey de la forme "général $\to$ (général$)^n_k$" est déjà fausse pour $s = 1$, $n = 1$. Toutefois c'est pour une raison triviale, qui suggère une modification de la notion de "homogène"; en voici la définition, dans le cas général :

Soit X un ensemble coloré, $f : [X]^n \to k$ une partition; un sous-ensemble Y de X est dit <u>homogène pour</u> f si pour $\bar{x} \in [Y]^n$ le motif de $\bar{x}$ détermine sa classe (c'est à dire $\forall \bar{x},\bar{y} \in [Y]^n \quad p(\bar{x}) = p(\bar{y}) \Rightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{y})$).

Par la suite, le principal ensemble coloré considéré sera un modèle M de $\mathcal{P}$, muni de l'ordre arithmétique $<_M$ et d'une coloration $C : [M]^s \to M$ définissable dans $M^{(*)}$. Alors les notions qui précèdent (motif, suite qui réalise un motif, ensemble général) peuvent être <u>définies dans</u> M; si M est non standard les motifs $P(v_1 \dots v_L)$ portent alors sur un nombre de variables $L \in M$ qui peut être non standard - ce sera d'ailleurs essentiel. On peut facilement définir C dans M de manière que M soit général :

I.6. <u>DÉFINITION D'UNE COLORATION GÉNÉRALE DANS</u> M. Soit $(P_a)_{a \in M}$ une énumération dans M de tous les motifs, et soit $(S_a)_{a \in M}$ une famille définissable d'ensembles disjoints S_a ayant même cardinal (dans M) que le motif P_a a de variables. On définit alors $C \restriction S_a$ de manière que P_a soit réalisé par des points de S_a; et l'on prolonge de manière arbitraire C ainsi défini à $[M]^s$ tout entier.

Si $M' \succ M$, la coloration C de M s'étend en coloration de M' (à couleurs dans M'); si $\phi(v_1 \dots v_n)$ est une formule de M, et $X \subset M'$, on dit que X <u>décide</u> ϕ si sur $[X]^n$ le motif de $\bar{x}$ détermine la valeur de $\phi(\bar{x})$ (c'est à dire $p(\bar{x}) = p(\bar{y}) \Rightarrow M \models \phi(\bar{x}) \longleftrightarrow \phi(\bar{y})$). On dit qu'un sous-ensemble X de M'est <u>C-indiscernable sur</u> M si pour $\bar{x} \in \bigcup_n X^n$ le type de $\bar{x}$ sur M ne dépend que du motif de $\bar{x}$. (N.B. Ainsi "X décide ϕ" est une propriété d'homogénéité pour certaines partitions; et "X est C-indiscernable sur M" $\Leftrightarrow$ X décide toutes les formules de M).

Pour clore cette longue suite de définitions, en voici une qui ne sera pas utilisée ensuite, mais qui englobe comme cas particuliers toutes les notions d'homogénéité et d'indiscernabilité qui nous intéressent, et résume ainsi ce qui précède : soient A une réalisation quelconque, Ψ et Φ deux ensembles de formules de son langage. Un sous-ensemble X de A est <u>(Ψ,Φ)-indiscernable</u> si pour toutes suites finies $\bar{x},\bar{y}$ dans X, $\bar{x} \equiv_\Psi \bar{y} \Rightarrow \bar{x} \equiv_\Phi \bar{y}$; où pour tout ensemble de formules Γ, $\bar{x} \equiv_\Gamma \bar{y}$ signifie que $\bar{x},\bar{y}$ (ont même longueur et) satisfont les mêmes formules de Γ dans A.

<u>Exemples</u> - Si $M \prec N$ et $X \subset N$, X est $<$-indiscernable sur $M \Leftrightarrow X$ est (Ψ,Φ)-indiscernable, quand Ψ est l'ensemble des formules de la forme $v = v'$, $v < v'$, et Φ est celui de toutes les formules; pour définir "X est C-indiscernable" il suffit d'ajouter les formules $C(v_1 \dots v_s) = u$ à Ψ. Si $X \subset M$ et $f : [M]^n \to k$ est une partition, X est homogène pour f si X est (Ψ,Φ)-indiscernable,

(*) ainsi on confond le symbole C avec son interprétation C_M.

quand $\Phi = \{f(v_1 \ldots v_n) = i, \quad i < k\}$ et Ψ est comme ci-dessus.

(E) Le cas particulier $s = 1$. Nous considérons un modèle M muni d'une coloration générale $C : M \to M$; les alinéas (A), (B), (C) admettent une "généralisation colorée" dans ce cas. Nous exposons l'essentiel de cette généralisation.

(a) Types de Ramsey avec couleurs. Pour tout a dans M, on notera C^a l'ensemble des points $x \in M$ de couleur $C(x) = a$. On suppose L dénombrable; alors par le §III de l'exposé précédent, il existe un type $t(v)$ sur M, tel que $t(v) \wedge v \in C^a$ est un type minimal, pour tout $a \in M$. Tout comme dans la démonstration de la Proposition I.5, on en déduit : pour toute suite de couleurs $a_1 \ldots a_n \in M$, la théorie $t(c_1) \cup \ldots \cup t(c_n) \cup c_1 < \ldots < c_n \wedge c_1 \in C^{a_1} \wedge \ldots \wedge c_n \in C^{a_n}$ est consistante et complète.

Nous pouvons reformuler cette propriété en disant que

(1) pour tout motif $P(v_1 \ldots v_n)$, la théorie $\bigcup_{i \leq n} t(c_i) \cup P(c_1 \ldots c_n)$ est consistante et complète.

(1) est l'analogue coloré de la caractérisation (ii) des types de Ramsey, dans la Proposition I.3.a; et comme dans cette Proposition, on voit que (1) équivaut à :

(2) quelque soit $M' \succ M$, $t_{M'}$ est C-indiscernable sur M; de plus il existe un modèle $M' \succ M$ tel que $t_{M'}$ contienne un ensemble général.

Par compacité il en résulte facilement

I-8 COROLLAIRE (Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski coloré) - Pour tout ordre total $(X, <_X)$ muni d'une coloration C_X à un seul argument (et à valeurs quelconques), il existe $M' \succ M$ contenant un ensemble X' qui est C-indiscernable sur M, et tel que $(X', <_{M'} \restriction X', C_{M'} \restriction X')$ est isomorphe à $(X, <_X, C_X)$.

I-9 COROLLAIRE (Théorème de Ramsey pour les couleurs à un argument) - Pour des colorations finies à un seul argument, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, "général $\to$ (général)$^n_2$": c'est-à-dire si X a une coloration générale, alors quelque soit $f : [X]^n \to 2$, il existe $Y \subset X$, général et homogène pour f.

Démonstration On suppose M muni d'une coloration générale finie $C : M \to r$ $(r \in \mathbb{N})$ et soit $\phi(v_1 \ldots v_n)$ une formule de M. Par (1), pour tout motif $P(v_1 \ldots v_n)$, la théorie $\bigcup_{i \leq n} t(c_i) \cup \{P(c_1 \ldots c_n)\}$ décide la formule $\phi(c_1 \ldots c_n)$; par compacité, on en déduit $\psi_p \in t$, telle que la théorie $\psi_p(c_1) \wedge \ldots \wedge \psi_p(c_n) \wedge P(c_1 \ldots c_n)$ décide la formule $\phi(c_1 \ldots c_n)$. Le nombre de motifs à n variables étant fini (c'est ici qu'est utilisée l'hypothèse d'un nombre fini de couleurs), la conjonction des formules ψ_p est une formule ψ ; et par construction de ψ, l'ensemble ψ_M décide la formule $\phi(v_1 \ldots v_n)$; de plus $\psi \in t$, ce qui par (1) entraine que $\psi(c_1) \wedge \ldots \wedge \psi(c_k) \wedge P(c_1 \ldots c_k)$ est consistant pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout motif $P(v_1 \ldots v_k)$. Donc ψ_M est général, et on a ainsi démontré que M satisfait "général $\rightarrow$ (général)$^n_2$ "; en appliquant k fois cette propriété, on en déduit $M \models$ "général $\rightarrow$ (général)$^n_{2^k}$"; comme M est quelconque on a montré que ce résultat est conséquence de $\mathcal{P}$; donc est vrai en particulier au sens standard.

En résumé de (E) : en uniformisant par rapport à un paramètre la construction d'un type minimal (*) , on construit une famille définissable de types minimaux. Vis à vis des Théorèmes de Ramsey et d'Ehrenfeucht-Mostowski colorés, cette famille joue le même rôle que les types uniformes vis à vis des mêmes théorèmes dans le cas non coloré.

(F) Colorations à plusieurs arguments. Nous supposons donnée une coloration générale définissable $C : [M]^s \rightarrow M$ $(s \in N)$. L'énoncé qui généralise aux ensembles colorés le Théorème de Ramsey $\infty \rightarrow (\infty)^n_k$, c'est l'énoncé "général $\rightarrow$ (général)^n_k" que nous avons démontré (Corollaire I.9) quand $s = 1$; mais dès que $s > 1$, on a au contraire un résultat négatif :

I-10 PROPOSITION Pour $s \geq 2$, "général $\rightarrow$ (général)$^2_2$" est faux : pour toute coloration générale à deux couleurs et deux arguments $C : [\mathbb{N}]^2 \rightarrow \{0,1\}$; il existe une partition en deux classes définissables de $[\mathbb{N}]^2$, qui ne possède aucun sous-ensemble général homogène.

Démonstration Pour un exemple concret d'une telle partition voir [A.H]; ici nous résumons une autre démonstration, par "model theoretic non sense". Procédant par l'absurde, nous supposons "général $\rightarrow$(général)$^2_2$"; par les méthodes du §III de l'exposé précédent, on en déduit facilement un modèle M (dont la restriction à + et . est le modèle standard $\mathbb{N}$), et sur M un type $t(v)$ qui vérifie :

tout ensemble $X \in t$ est général; pour toute formule $\phi(v_1,v_2)$, il existe $X \in t$ qui décide ϕ ;

t est uniforme.

La première propriété de t entraîne la consistance de la théorie $t(v_1) \cup t(v_2) \cup v_1 < v_2 \wedge C(v_1,v_2) = i$, pour $i = 0$ et pour $i = 1$; ainsi $t(v)$ n'est pas un type de Ramsey car cela contredit la proposition I.3.a, condition (ii). D'un autre côté, vu la 3ème propriété si nous pouvions montrer que t est rare, par la proposition I.5 cela entrainerait que t est de Ramsey, une contradiction. Il nous suffit donc de montrer que $M(^t_c)$ est $\prec$-minimal sur M, car cela entraine la rareté de t (voir le §II de l'exposé précédent). La remarque ci-dessous le montre en vertu de la Proposition I.2 de l'exposé précédent, ce qui achève la démonstration :

I-11 REMARQUE Si X est général et décide la formule $f(v_1) = f(v_2)$, alors $f \restriction X$ est soit injective, soit constante.

(*) laquelle est déjà pour sa part une uniformisation de la construction d'un type complet.

Démonstration Cette remarque est l'analogue coloré de la proposition I.3.b; supposons $f \restriction X$ non injective : il existe $x \neq y$ dans X, tels que $f(x) = f(y)$. Alors soit $z \in X$; X étant général, il existe $x', y', z' \in X$, réalisant un motif tel que (i) $p(x,z) = p(x',z')$, et (ii) $p(x,y) = p(x',y') = p(z',y')$ (*) . Puisque X décide $f(v_1) = f(v_2)$ et $f(x) = f(y)$, de (ii) on déduit $f(x') = f(y')$ et $f(z') = f(y')$, donc $f(x') = f(z')$; de cela et de (i) on déduit alors $f(x) = f(z)$. f est donc constante sur X, ce qui montre la Remarque.

Nous passons maintenant à la généralisation colorée du Théorème de Ramsey fini $\forall p\ \exists q\ \ q \to (p)^n_k$; cette généralisation sera vraie, au contraire de la précédente. Si l'on compare la définition d'ensemble infini X ("pour tout entier p, X a au moins p éléments") et celle d'ensemble général X (pour tout motif P, P est réalisé dans X), on voit que la généralisation naturelle de $\forall p\ \exists q\ \ q \to (p)^n_k$ est l'énoncé suivant : pour tout motif P, il existe un motif Q tel que $Q \to (P)^n_k$; où $Q \to (P)^n_k$ désigne l'énoncé "pour tout ensemble fini X réalisant le motif Q, et toute partition de $[X]^n$ en k classes, il existe un sous-ensemble de X qui réalise P et est homogène pour la partition".

I-12 THÉORÈME [Abramson Harrington]-[Nesetril Rödl] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'énoncé suivant est conséquence de $\mathcal{P}$: $\forall k\ \ \forall P\ \ \exists Q\ \ \ Q \to (P)^n_k$.

Nous examinons maintenant le lien entre le "Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski coloré" - qui est le Corollaire I-8, étendu aux colorations à nombre s quelconque d'arguments - et le "Théorème de Ramsey coloré" qu'est le Théorème I-12.
Ces liens sont l'extension immédiate des liens entre "Ramsey" et "Ehrenfeucht-Mostowski" exposés dans la Remarque I-1 :

I-13 REMARQUE Soient P un motif standard et n,k des entiers standards
(a) Le théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski coloré entraine : général $\to (P)^n_k$, c'est-à-dire que pour tout ensemble coloré général X, et toute partition $f : [X]^n \to k$ il existe un sous-ensemble de X homogène pour f et qui réalise P.

(b) De général $\to (P)^n_k$ se déduit $\exists Q\ \ Q \to (P)^n_k$, autrement dit le "Théorème de Ramsey coloré" I-12.
(c) Du Théorème de Ramsey coloré se déduit le Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski coloré.
Les démonstrations copient servilement celles de la Remarque I-1; nous donnons celle du (c) : soit $(X, <_X, C_X)$ un ensemble à couleurs dans M; l'existence de $N \succ M$ contenant X et vérifiant la conclusion du Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski coloré équivaut à la consistance avec la théorie de M de la théorie suivante (où $P(X)$ désigne le diagramme de l'ensemble coloré $(X, <_X, C_X)$) :

(*) La démonstration du Lemme du support II-4 montrera ceci plus en détail.

$P(X) \cup \{ \phi(\bar{x}) \to \phi(\bar{y});\ \phi$ formule, $\bar{x},\bar{y} \in [X]^n$, $n \in N$, et $p(\bar{x}) = p(\bar{y})\}$
Il nous suffit donc de montrer que tout sous-ensemble fini F de cette théorie est satisfaisable dans M. Pour F fixé il existe un motif $P(v_1 \ldots v_L)$, des formules $\phi_1 \ldots \phi_k$ et un sous-ensemble $\{x_1 \ldots x_L\}$ de X tel que $F = F(x_1 \ldots x_L) \subset P(x_1 \ldots x_L) \cup H(x_1 \ldots x_L)$, où $H(x_1 \ldots x_L)$ est l'ensemble de formules qui exprime l'homogénéité de $\{x_1, \ldots, x_L\}$ par rapport à $\phi_1 \ldots \phi_k$. Soit alors Q un motif tel que $Q \to (P)^n_{2^k}$, et soit Y un sous-ensemble de M réalisant Q (Y existe puisque la coloration sur M est générale). La restriction à Y de $(\phi_1)_M \ldots (\phi_k)_M$ définit une partition à 2^k éléments de $[Y]^n$, pour laquelle Y contient, par choix de Q, un sous-ensemble $\{y_1 \ldots y_L\}$ homogène et qui réalise P; alors $M \models F(y_1 \ldots y_L)$, C.Q.F.D.

En conclusion de ce paragraphe, nous faisons le bilan des liens entre Combinatoire et Théorie des modèles que nous y avons relevé tout au long.

(a) A chaque énoncé combinatoire considéré nous avons donné pour compagnon un énoncé de Théorie des modèles équivalent; et sauf dans un cas, nous en avons tiré une démonstration de l'énoncé combinatoire par la Théorie des modèles : nous avons ainsi obtenu le Théorème fini de Ramsey à l'aide d'un type définissable; le Théorème infini et son extension général $\to$ (général)^n_k (colorations à un argument), à l'aide de types minimaux; et la fausseté du même résultat dans le cas de colorations à plusieurs arguments, à l'aide de l'absurdité de types à la fois "Ramsey coloré" et minimaux. Mais nous n'avons rien de cette sorte concernant le Théorème I-12, qui est la base des résultats d'Abramson-Harrington exposés plus loin; ceci pose un problème qui nous semble digne d'intérêt, au moins du point de vue de la Théorie des Modèles : trouver une démonstration via la Théorie des Modèles du Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski coloré, et par là même du Théorème combinatoire I-12.

(b) Les démonstrations "via la Théorie des Modèles" exposées dans ce paragraphe comportent une certaine surcharge, une redondance vis à vis des résultats combinatoires qu'elles donnent; c'est que ceux-ci sont un sous-produit et non le but direct de la machinerie développée ici et dans l'exposé précédent. Par exemple, en vue de démontrer le Théorème de Ramsey à l'aide d'un type définissable, nous n'avons pas besoin du §III de l'exposé précédent : car le procédé trivial qui consiste à enrichir un modèle donné en lui ajoutant des relations, suffit pour obtenir des types définissables. En particulier l'emploi maximal de ce procédé consiste à considérer un modèle M muni de toutes les relations qui existent sur son domaine; dans ce cas, les types sur M sont tous définissables et coïncident avec les ultrafiltres sur M; et la démonstration du Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski dans l'exposé précédent devient la démonstration par ultrapuissance itérée, bien connue.

Et il est facile d'éliminer les autres surcharges de nos démonstrations via la Théorie des Modèles; et l'on parvient ainsi à des démonstrations simples et directes des résultats combinatoires visés. Toutefois ce qu'on obtient ce sont pour l'essentiel des démonstrations combinatoires naturelles et peu originales; ainsi la Théorie des Modèles n'a pas réellement innové sur le plan des démonstrations. En revanche l'innovation est réelle sur le plan des motivations : pour parvenir à ces démonstrations combinatoires, on a uniquement besoin de faire jouer les idées très générales de compactification et d'uniformisation, qui ne sont pas spécialement combinatoires. Pour conclure : d'un côté on est certes fort loin d'une "Combinatoire non standard" - à l'image de l'Analyse non standard, mais avec un rôle plus grand donné aux considérations d'uniformité. Mais d'un autre côté, le genre de fil directeur, de motivation et de perspective qu'on obtient en cherchant systématiquement à inverser les applications de la Combinatoire à la Théorie des Modèles, a sa place dans l'étude des types (dans $\mathcal{P}$, dans les théories stables ou sur $\beta\mathbb{N}$), à côté de la motivation d'en savoir toujours plus sur les types... C'est la raison qui nous a fait insister dessus, bien qu'évidemment les démonstrations considérées ici sont trop simples et connues pour avoir besoin de cette exégèse. Mais trêve de spéculations : la suite de l'exposé nous donnera une nourriture plus substantielle.

§II. LES MODÈLES D'ABRAMSON-HARRINGTON

Ces modèles sont des analogues colorés des modèles d'Ehrenfeucht-Mostowski : ils sont engendrés par les fonctions de Skolem à partir d'un ensemble C-indiscernable X. Mais ici, X aura de surcroit des propriétés d'indépendance très fortes (Théorèmes II.4. et II.5. bis).

(A) Une redémonstration du théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski coloré. Nous pouvons réénoncer ce résultat ainsi : il existe $N \succ M$, contenant un ensemble X tel que

(i) X est général sur M, c'est-à-dire $C_N \upharpoonright X$ réalise tout motif à couleurs dans M.

(ii) X décide chaque formule de M.

La remarque I.13 donnait une démonstration de ce résultat, calquée sur celle d'Ehrenfeucht-Mostowski; en voici une deuxième, qui aura par la suite plus de retombées que la première. L'idée est en gros la suivante : d'abord on montre l'existence dans M d'ensembles finis réalisant des portions finies arbitrairement grandes de (i) et (ii); alors il existera $N \succ M$, contenant un ensemble X qui réalise une portion de (i) et (ii) qui est "finie" au sens de N, mais qui contient en fait la partie standard de (i) et (ii).

Tout d'abord nous définissons ce que nous entendons par "portion finie" de (i) et (ii); soient X une sous-ensemble définissable dans M, et a un entier de M; on dira que le degré de la coloration C dans X est $\geq$ a (*), X réalise tous les motifs possèdant au plus a variables et dont les couleurs sont parmi 0,...,a-1. Cette propriété est l'approximation de (i) qui va nous servir; noter en effet que X est général si et seulement si le degré de C dans X majore tout $a \in M$ - on dira aussi dans ce cas que le degré de C dans X est infini. D'autre part, si $\phi(u\, v_1 \ldots v_n)$ est une formule, on appellera degré de ϕ dans (*) le plus grand entier $a \in M$ tel que X décide $\phi(b\, v_1 \ldots v_n)$ pour tout $b < a$; et on dira que le degré de ϕ dans X est infini s'il majore tout a dans M.

Pour $a \in M$, la condition "c et ϕ sont de degré $\geq$ a dans X" est une portion finie de (i) et (ii) qui est réalisable dans M :
Le lemme qui suit nous permet de réaliser dans M des portions croissantes de (i) et (ii).

II.1. Lemme - Soit $a \to S_a$ $(a \in M)$ une famille définissable dans M d'ensembles tels que le degré de C dans S_a tend vers l'infini avec a; pour toute formule pure $\phi(u\, v_1 \ldots v_k)$ il existe une famille définissable $a \to S'_a$ telle que $\forall a\ S'_a \subset S_a$,

(*) nous avons choisi d'appeler degrés ces deux notions parce qu'elles mesurent le "degré" de généralité et d'indiscernabilité de l'ensemble X.

et les degrés de C, ϕ dans S'_a tendent vers l'infini avec a.

Démonstration - Par récurrence dans M, on choisit une famille $a \to S'_a$ $(a \in M)$ telle que pour tout a dans M, $S'_a \subset S_a$ et le degré de C,ϕ dans S'_a est aussi grand que possible. Reste à voir que dans ces conditions, ce degré dans S'_a tend vers l'infini. Soit donc a un entier de M; on choisit un motif P ayant la propriété suivante : pour tout ensemble X qui réalise P, le degré de C dans X est $\geq a$; l'existence de P résulte facilement du fait que dans M, pour tout ensemble fini de variables et de couleurs, il n'y a qu'un nombre fini de motifs prenant leurs variables et leurs couleurs dans cet ensemble. Une fois P choisi, on considère un motif Q tel que $Q \to (P)^n_{2^a}$ (Q existe par le Théorème I.12). Il existe un entier N tel que $\forall b > N$, S_b contient un ensemble X qui réalise Q (sinon le degré de C dans S_a ne tendrait pas vers l'infini comme il est supposé). Puisque $Q \to (P)^n_{2^a}$, X contient un ensemble Y qui réalise P et décide $\phi(b\ v_1 \ldots v_k)$ pour tout $b < a$. Les degrés de C,ϕ dans Y, a fortiori dans S'_b, sont $\geq a$; donc tendent vers l'infini comme requis.

Nous supposons désormais L dénombrable; il existe donc une énumération $k \to \phi^k(u\ v_1 \ldots v_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ des formules pures avec variables libres comme indiqué.

II.2. Proposition (a) - On peut construire pour tout $k \in \mathbb{N}$ une famille disjointe d'ensembles finis $a \to S^k_a$ $(a \in M)$, définissable dans M, de manière que $\forall a$ $S^{k+1}_a \subset S^k$, et les degrés de C, ϕ^k dans S^k_a tendent vers l'infini avec a.

(b) - Si $N \succ M$ et N contient $\alpha > M$, alors dans N S^k_α est général sur M et décide $\phi^i(a\ v_1 \ldots v_i)$ pour tout $a \in M$ et tout $i \leq k$.

Démonstration - Soit $a \to S_a (a \in M)$ une famille disjointe définissable telle que le degré de C dans S_a tende vers l'infini avec a (S_a s'obtient comme dans II.1, mais en choisissant pour tout a le motif P_a de manière que le degré de C dans les ensembles qui réalisent P_a est au moins a).
En appliquant le lemme II.1. quand la formule ϕ est ϕ^o, on obtient une famille $a \to S'_a$ qui a les propriétés requises pour être $a \to S^o_a$. Et on continue par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$: en appliquant le lemme II.2. quand $S_a = S^k_a (a \in M)$ et $\phi = \phi^k$, on obtient la famille $a \to S^{k+1}_a$, ce qui prouve (a). Le restant de la proposition est immédiat, puisque les degrés de C et ϕ^i dans S^i sont infinis et $S^k_a \subset S^i$ pour tout $i \leq k$.

Il résulte de la proposition ci-dessus que dans tout modèle $N \succ M$ contenant $\alpha > M$, l'ensemble $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} S^k_\alpha$ est C-indiscernable sur M, et il en résulte de plus, par compacité, l'existence d'un tel modèle N dans lequel $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} S^k_\alpha$ est général sur M.

Nous avons ainsi redémontré le Théorème d'Ehrenfeucht-Mostowski coloré; mais celui-ci n'exprime pas tout ce qu'on peut tirer de notre démonstration : d'une part (voir (B) ci-dessous et le théorème II.3.), les familles S^k, $k \in \mathbb{N}$, permettent de construire un type $\sigma(v_1 v_2)$ tel qu'en itèrant la réalisation de σ, on engendre des ensembles C-indiscernables - autrement dit, $\sigma(v_1 v_2)$ sera une <u>généralisation colorée et à deux variables des types de Ramsey</u> (du §I.B); d'autre part les ensembles C-indiscernables ainsi construits ont des "propriétés d'indépendance" remarquables - cf. (C) et les théorèmes II.4, II.5 et II.6.

<u>(B) Types de Ramsey à deux variables</u> - Voici la construction de notre type $\sigma(v_1 v_2)$:

- soit $t(u)$ n'importe quel type non borné complet sur M; on va choisir σ de manière à vérifier la propriété suivante : $(*)$ $\forall N \succ M$ $\forall X \subset N$,

$X^2 \subset \sigma_N \Leftrightarrow \exists \alpha$ t.q. $N \models t(\alpha)$ et dans N, $X \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S^k_\alpha$.

- pour cela nous considérons la fonction de M :

$h(v) = \mu a \mid v \in S^o_a$; comme la famille $a \to S^o_a$ a été choisie disjointe, $h(v)$ est ainsi l'<u>unique</u> a tel que $v \in S^o_a$ - ou est 0 si $v \notin \bigcup_a S^o_a$. Et comme pour tout $k \in \mathbb{N}$ $S^k_a \subset S^o_a$, $h(v)$ est de même l'unique a tel que $v \in S^k_a$, si $v \in \bigcup_a S^k_a$.

Nous posons $\sigma(v_1 v_2) = t(h(v_1)) \cup \{v_1 \in S^k_{h(v_1)} ; k \in \mathbb{N}\} \cup \{h(v_1) = h(v_2)\}$. Il est clair que quelque soient $N \succ M$ et $b_1, b_2 \in N$, $N \models \sigma(b_1 b_2) \Leftrightarrow$ il existe α tel que dans N on a $t(\alpha)$ et $b_1, b_2 \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S^k_\alpha$; et (en remarquant $X^2 \subset \sigma_N \Leftrightarrow \forall b_1, b_2 \in X$ $N \models \sigma(b_1 b_2)$) que σ vérifie la propriété $(*)$ demandée ci-dessus. On notera $\sigma(v_1 \ldots v_L)$ le type $\bigwedge_{i,j \leq L} \sigma(v_i v_j)$.

<u>Théorème II.3</u>. - Pour tout motif $P(v_1 \ldots v_L)$, $\sigma(v_1 \ldots v_L) \wedge P$ est un type complet sur M.

<u>Démonstration - Consistance de</u> $\sigma(v_1 \ldots v_L) \wedge P$: la proposition II.2. entraîne que si $N \succ M$ et $\alpha \in N$ majore M, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ $N \models (\exists v_1 \ldots v_L \in S^k_\alpha) P(v_1 \ldots v_L)$ d'où par compacité l'existence de $N \succ M$, contenant α et $b_1 \ldots b_L$ tels que $N = t(\alpha) \wedge b_1 \ldots b_L \in \bigcap_{k \in N} S^k_\alpha \wedge P(b_1 \ldots b_L)$. Alors par $(*)$ $N \models \sigma(b_1 \ldots b_L) \wedge P(b_1 \ldots b_L)$

<u>Complétude de</u> $\sigma(v_1 \ldots v_L) \wedge P$: Soit $\phi(v_1 \ldots v_L)$ une formule; il existe $k \in \mathbb{N}$ et $a \in M$ tels que $\phi = \phi^k(a\, v_1 \ldots v_k)$, donc S^k_α décide ϕ . En particulier, si $N \succ M$, $N \models t(\alpha)$, il existe $\varepsilon\phi \in \{\phi, \neg\phi\}$ tel que

$$N \models \forall v_1 \ldots v_L [v_1 \ldots v_L \in S^k_\alpha \wedge P(v_1 \ldots v_L) \to \varepsilon\phi(v_1 \ldots v_L)] .$$

La formule $\phi(\alpha)$ qui exprime ceci est conséquence de $t(\alpha)$ puisque $t(\alpha)$ est complet sur M; donc

$$t(\alpha) \cup \{v_1 \ldots v_L \in S^k_\alpha\} \vdash P(v_1 \ldots v_L) \to \varepsilon\phi\ (v_1 \ldots v_L)$$

et comme par $(*)$ $\sigma(v_1 \ldots v_L) \vdash \exists \alpha [t(\alpha) \wedge v_1 \ldots v_L \in S^k_\alpha]$,

$\sigma(v_1 \ldots v_L) \vdash P(v_1 \ldots v_L) \rightarrow \varepsilon\phi(v_1 \ldots v_L)$;

on a ainsi montré que chaque formule ϕ est décidée par $\sigma(v_1 \ldots v_L) \wedge P$, c.q.f.d.

Noter que le théorème ci-dessus est l'extension aux types à deux variables de la caractérisation (ii) des types de Ramsey, dans la proposition I.3.a.

(C) Les modèles $M(X)$ - Pour tout ensemble $(X, <_X, C_X)$ à couleurs dans M, on définit comme suit un modèle $M(X)$: X étant supposé disjoint de M, on considère un modèle $N \succ M$ contenant X et tel que (i) $<_N \upharpoonright X = <_X$, $C_N \upharpoonright X = C_X$

(ii) $X^2 \subset \sigma_N$ ce qui par (*) équivaut à

(ii)' $\exists\alpha$ t.q. $N \models t(\alpha)$ et $X \subset \bigcap_{k\in \mathbb{N}} S^k_\alpha$

L'existence de N résulte par compacité de la proposition II.2 (si l'on considère (ii)), ou du théorème II.3. (si l'on considère (ii')).

On pose alors $M(X)$ = cloture de Skolem de $M \cup X$ dans N; on a $M \prec M(X) \prec N$, donc les conditions (i), (ii), (ii)' sont vraies quand on remplace N par $M(X)$. De (ii) et le théorème II.3., ou de (ii)' et la proposition II.2., se déduit que X est C-indiscernable sur M dans $M(X)$. De plus de façon semblable on montre :

si f est un isomorphisme de $(X, <_X, C_X)$ dans $(Y, <_Y, C_Y)$ alors f est un morphisme élémentaire vis à vis des modèles $M(X)$ et $M(Y)$ - qui s'étend de manière unique aux clotures de Skolem, c'est-à-dire en isomorphisme de $M(X)$ dans $M(Y)$. Autrement dit $M(X)$ est unique à isomorphisme près, et $(X, <_X, C_X) \rightarrow M(X)$ est un foncteur.

Noter que vu la condition (ii)', le modèle $M(X)$ dépend de notre choix du type $t(v)$ réalisé par α (*), qui jusqu'ici peut être n'importe quel type non borné complet sur M. Nous allons étudier la structure de $M(X)$ - pour le moment sans faire d'hypothèse sur t, mais nous ajouterons plus tard quelques conditions supplémentaires.

Tout d'abord $\alpha \in M(X)$, car $\alpha = h(b)$ $\forall b \in S^0_\alpha$, en particulier $\alpha = h(x)$ $\forall x \in X$. De plus comme X est C-indiscernable au-dessus de M et α est définissable à partir de paramètres de M et n'importe quel point de X, il s'en suit que X est C-indiscernable sur $M(\alpha)$. La partie $M(\alpha)$ du modèle $M(X)$ étant complètement déterminée par le type t de α sur M, nous passons à l'étude de $M(X) \setminus M(\alpha)$; nous en étudions la structure non pas tant par rapport à M que par rapport à $M(\alpha)$, en utilisant α comme un paramètre faisant partie du langage.

$M(X)$ est un modèle engendré par itération du type σ de la même manière qu'étant

(*) $t(v)$ est aussi réalisé par $h(v_1)$, dans le type $\sigma(v_1, v_2)$

donné un type minimal ou uniforme t, $M(^t_X)$ résulte de l'itération de t; les propriétés de $M(X)$ que nous allons établir ci-dessous sont la généralisation de celles qu'a $M(^t_X)$ quand t est un type minimal (cf. §IV de l'exposé précédent) :

(a) Supports. Pour tout ensemble ou suite de points S dans $M(X)$ on note $M(S)$ la cloture de Skolem de $M \cup S$ dans $M(X)$; pour tout point $d \in M(X)$ on dit que S est un support de d si $S \subset X$ et $d \in M(S \cup \{\alpha\})$ (noter que $d \in M(\alpha) \Leftrightarrow \phi$ est un support de d).

II.4. Théorème du support. Tout élément d de $M(X)$ possède un support minimum.

(b) Propriétés d'indépendance de X dans $M(X)$. Appelons motif d'un point $d \in M(X)$ toute paire (P,f) où P est le motif du support minimum $\bar{x}$ de d, et $f(u,\bar{v})$ une fonction telle que $f(\alpha\bar{x}) = d$. De la C-indiscernabilité de X sur $M(\alpha)$ se déduit que dans $M(X)$ le motif de tout point d détermine le type de d sur M (et ceci s'étend aux suites de points). La "propriété d'indépendance" de X en question, c'est la réciproque de ceci :

II.5. Théorème. (a) Quelque soit $d \in M(X)$, le support minimum de d est définissable à partir de α et d.

(b) Quelque soit $d \in M(X)$, le type de d sur $M(\alpha)$ détermine les motifs de d.

(c) Les deux théorèmes précédents sont des propriétés de $M(X)$, mais puisque les modèles $M(X)$ sont déterminés pour σ et la coloration de X, on peut les exprimer sous forme de propriétés de σ dans M, obtenant des résultats analogues à la caractérisation dans M des types d'extension minimale (cf. proposition I.1. de l'exposé précédent):

II.6. Proposition. Pour tout motif $P(\bar{v})$ on note P^k_α l'ensemble $\{\bar{a} \in S^k_\alpha : p(\bar{a}) = P\}$; soient $\bar{z} \in X$, P le motif de $\bar{z}$, $f(\bar{v})$ un terme.

(a) Si $f(\bar{z}) \in M(\alpha)$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(\bar{v})$ est constante, égal à $f(\bar{z})$, sur P^k_α .

(b) Si $f(\bar{z}) \in M(X) \setminus M(\alpha)$ et $\bar{z}$ est le support minimum de $f(\bar{z})$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(\bar{v})$ est injective sur P^k_α .

(c) Dans tous les cas il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que sur P^k_α, $f(\bar{v})$ est soit constante, soit injective, soit "superflue", c'est-à-dire il existe $\bar{w} \subsetneq \bar{v}$ et un terme $f'(\bar{w})$ tel que $f(\bar{z}) = f'(\bar{z})$, et plus généralement $f(\bar{a}) = f'(\bar{a})$, $\forall \bar{a} \in P^k_\alpha$.

Nous passons à la démonstration de ces résultats.

Le lemme ci-dessous a essentiellement pour contenu le théorème du support; car dans le cas particulier du lemme où $\bar{x}$, y, z sont dans X et pas seulement dans S^k_α , on en déduit que si un point $d \in M(X)$ a deux supports distincts $\bar{a}$ et $\bar{b}$, alors d

possède un support strictement contenu dans $\bar{a}$ et $\bar{b}$, d'où le théorème résulte immédiatement. Mais le lemme étend cela à $\bar{a}$, $\bar{b}$ pris dans S^k_α et pas seulement X.

Noter qu'il est l'extension à deux termes f,g de la Remarque I.11.

II.7. Lemme du support. Soient $f(\bar{u}v)g(\bar{u}v)$ deux termes et k un entier tel que S^k_α décide les formules $f(\bar{u}v) = f(\bar{u}v_1)$ et $f(\bar{u}v) = g(\bar{v}w)$ (k existe par la Proposition II.2.b.); soient $x,y,z \in S^k_\alpha$ tels que $f(\bar{x}y) = g(\bar{x}z)$. Alors $f(\bar{x}y) = f(\bar{x}y_1)$, quelque soit $y_1 \in S^k_\alpha$ tel que $p(\bar{x}y_1) = p(\bar{x}y)$; donc il existe un terme $f'(\alpha\, \bar{u})$ telle que $f(\bar{x}y) = g(\bar{x}z) = f'(\alpha\, \bar{x})$.

Démonstration. Soit $y_1 \in S^k_\alpha$ tel que $p(\bar{x}y) = p(\bar{x}y_1)$; il nous faut montrer $f(\bar{x}y) = f(\bar{x}y_1)$. Posons :

$$P(\bar{u}v) = p(\bar{x}y),\quad P'(\bar{u}vw) = p(\bar{x}yz),\quad P''(\bar{u}vv_1) = p(\bar{x}yy_1).$$

Fait : $P'(\bar{u}vw) \cup P'(\bar{u}v_1w) \cup P''(\bar{u}vv_1)$ est consistant.

Sinon il existerait une formule atomique θ, telle que θ et $\neg\theta$ appartiennent à la réunion de ces trois motifs; nous allons voir que c'est impossible.

Cas 1. θ et $\neg\theta$ dans le même motif : impossible car tout motif est consistant.

Cas 2. $\theta \in P'(\bar{u}vw)$, $\neg\theta \in P'(uv_1w)$; alors comme θ et $\neg\theta$ ont les mêmes variables, celles-ci sont communes aux deux motifs, c'est-à-dire font partie de $\bar{u}w$. Mais la restriction de ces deux motifs à $\bar{u}w$ est le motif $p(\bar{x}z)$, qui contiendrait alors θ et $\neg\theta$, impossible.

Cas 3 $\theta \in P'(\bar{u}v_1w)$, $\neg\theta \in P''(\bar{u}vv_1)$; alors les variables de θ, $\neg\theta$ sont parmi $\bar{u},v_1$. Or la restriction des deux motifs à $\bar{u},v_1$ est le motif $P(\bar{u}v_1)$, qui contiendrait alors θ et $\neg\theta$, impossible.

Les autres cas sont alors impossibles par raison de symétrie (permuter v et v_1, ou θ et $\neg\theta$). D'où le fait.

Comme S^k_α est général sur M (Proposition II.2) il suit du fait ci-dessus l'existence de $\bar{a},b,b_1,c \in S^k_\alpha$ satisfaisant $P'(\bar{a}bc) \cup P'(\bar{a}b_1c) \cup P''(\bar{a}bb_1)$. Alors

- comme S^k_α décide la formule $f(\bar{u}v) = g(\bar{u}w)$, comme $\bar{x},y,y_1,z,\bar{a},b,b_1,c \in S^k_\alpha$ et $p(\bar{x}yz) = P'(\bar{u}vw) = p(\bar{a}bc) = p(\bar{a}b_1c)$, de $f(\bar{x}y) = g(\bar{x}z)$ se déduit à la fois $f(\bar{a}b) = g(\bar{a}c)$ et $f(\bar{a}b_1) = g(\bar{a}c)$, d'où $f(\bar{a}b) = f(\bar{a}b_1)$.

- de même, comme S^k_α décide la formule $f(\bar{u}v) = f(\bar{u}v_1)$ et comme $p(\bar{x}yy_1) = P''(\bar{u}vv_1) = p(\bar{a}bb_1)$, de $f(\bar{a}b) = f(\bar{a}b_1)$ se déduit $f(\bar{x}y) = f(\bar{x}y_1)$ ce qui montre une conclusion du lemme.

Enfin posons $f'(\alpha\,\bar{u}) = \mu v \mid \exists v_1 \in S_\alpha^k\ (P(\bar{u}v_1) \wedge f(\bar{u}v_1) = v)$; il est clair que $f(\bar{x}y) = g(\bar{x}z) = f'(\alpha,\bar{x})$, c.q.f.d.

<u>Démonstration du théorème du support II.4</u>. Soit $d \in M(X)$; d a donc un support <u>fini</u> $S \subset C$; soit S_o un support de d de cardinal minimal $(\leq |S|)$, et soit S_1 n'importe quel support de d. Si $S_o \not\subseteq S_1$, il existe $y \in S_o \setminus S_1$, et puisque $|S_o| \leq |S_1|$, il existe $z \in S_1 \setminus S_o$. Soient $\bar{a}$, énumèrant $S_o \setminus \{y\}$, $\bar{b}$ énumérant $S_1 \setminus \{z\}$, $\bar{x} = \bar{a}\bar{b}$. Il existe f,g fonctions telles que $f(\bar{a}y) = g(\bar{b}z) = d$, et moyennant des variables fictives on les note $f(\bar{x}y) = g(\bar{x}z)$, et le lemme du support en déduit $f'(\bar{x})$ égale en fait à $f'(\bar{a})$, telle que $f'(\bar{a}) = d$; comme $\bar{a} \not\subseteq S_o$ cela contredit la minimalité de S_o. Donc S_o est toujours $\subseteq S_1$, c'est-à-dire est support minimum de d.

<u>Démonstration de la proposition II.6. (a)</u>. Soit $d \in M(\alpha)$: il existe une fonction g tel que $d = g(\alpha)$; supposons $f(\bar{z}) = d$. Ceci s'exprime par la formule $\phi(\bar{z}) = [f(\bar{z}) = g(h(z_o))]$. Soit $k \in \mathbb{N}$, tel que S_α^k décide ϕ : c'est-à-dire pour tout motif Q, $\phi(\bar{v})$ prend une valeur constante sur Q_α^k ; en particulier comme $\phi(\bar{z})$ est vrai et $\bar{z} \in P_\alpha^k$, $\phi(\bar{a})$ est vrai pour toute suite $\bar{a} \in P_\alpha^k$, d'où (a).

Noter que réciproquement, si f est constante sur P_α^k , alors $f(\bar{z}) = \mu v \mid \exists \bar{u} \in P_\alpha^k\ f(\bar{u}) = v$, d'où $f(\bar{z}) \in M(\alpha)$.

(c) Soit $k_o \in \mathbb{N}$ tel que $S_\alpha^{k_o}$ décide $[f(\bar{u}) = f(\bar{v})]$.

<u>Cas 1</u> : il existe $\bar{a} \in P_\alpha^{k_o}$ tel que $\bar{a} \neq \bar{z}$ mais $f(\bar{a}) = f(\bar{z})$. Alors par le lemme du support II.7., il existe $f'(\bar{w})$, avec $\bar{w} \not\subseteq \bar{v}$, tel que $f(\bar{z}) = f'(\bar{z})$. k étant tel que S_α^k décide la formule $f(\bar{v}) = f(\bar{w})$, et celle-ci étant vraie en $\bar{z} \in P_\alpha^k$, on a $f(\bar{a}) = f'(\bar{a})$ pour toute suite $\bar{a} \in P_\alpha^k$, autrement dit f est superflue sur P_α^k .

<u>Cas 2</u> : $\forall \bar{a} \in P_\alpha^{k_o}$, $\bar{a} \neq \bar{z} \Rightarrow f(\bar{a}) \neq f(\bar{z})$. Ceci s'exprime par une formule $\phi(\bar{z})$; k étant tel que S_α^k décide $\phi(\bar{v})$, puisque $\bar{z} \in P_\alpha^k$ et $\phi(\bar{z})$ est vrai, on en déduit $\phi(\bar{b})$ $\forall \bar{b} \in P_\alpha^k$, c'est-à-dire f injective sur P_α^k .

Ceci démontre (c).

(b) Si $\bar{z}$ est le support minimum de $f(\bar{z})$, f ne peut pas être superflue sur P_α^k, donc par le cas 2 du (c), f est injective sur P_α^k.

<u>Démonstration du théorème II.5.a</u>. Nous supposons $d \notin M(\alpha)$ puisque sinon $\emptyset$ est un support de d; alors soit $\bar{z}$ le support minimum de d, et soit $f(\bar{v})$ telle que $f(\bar{z}) = d$. Par la proposition II.6.b il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que f soit injective sur k; alors $\bar{z}$ se définit comme étant $\mu\,\bar{v} \mid \bar{v} \in P_\alpha^k \wedge f(\bar{v}) = d$.

Soient x un point de X et y un point quelconque de $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} S_\alpha^k$; x et y réalisent le même type sur α , à savoir $\{v \in S_\alpha^k ;\ k \in \mathbb{N}\}$. D'autre part x est son propre support minimum, et un motif de x est (id,P_o), où id est la fonction identité et P_o le motif (unique) à une seule variable. Dans ce cas, le théorème II.5.b. que nous voulons démontrer nous dit que (id,P_o) est aussi un motif de y - donc y est support de y, donc $y \in X$. Autrement dit la proposition ci-dessous est un cas particulier du théorème II.5.b, que nous démontrons à part :

II.8. <u>Proposition</u>. <u>Dans</u> $M(X)$, $X = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} S_\alpha^k$.

<u>Démonstration</u>. Si $y \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} S_\alpha^k$ et $y \notin X$, y a un support minimum $\bar{x}z \neq y$; alors par le lemme du support VII.7., on en déduit que y a $\bar{x}$ comme support, contradiction. Donc $y \in X$. c.q.f.d.

<u>Démonstration du théorème II.5.B</u>. Soient d et d' réalisant le même type sur $M(\alpha)$; si $d \in M(\alpha)$, alors il existe un terme $g(v)$ tel que dans $M(X)$, $d = g(\alpha)$, donc $d' = g(\alpha) = d$. Reste le cas $d \notin M(\alpha)$ - donc $d' \notin M(\alpha)$, vu le cas précédent. Soit (f,P) un motif de d et $\bar{x}$ son support minimum; donc $P = p(\bar{x})$ et $f(\bar{x}) = d$. Par (a), il existe une suite de fonctions $\bar{g}(\alpha,v)$ telle que $\bar{x} = \bar{g}(\alpha d)$. Alors $\bar{g}(\alpha d) \in S^k$ et $d \equiv_{M(\alpha)} d'$ entraîne pour tout $k \in \mathbb{N}$ que $\bar{g}(\alpha d') \in S_\alpha^k$; de même $f(\bar{g}(\alpha d)) = f(\bar{x}) = d$ entraine $f(\bar{g}(\alpha d')) = d'$. Bref si $\bar{z} = \bar{g}(\alpha d')$, $\bar{z} \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} S_\alpha^k$ et $f(\bar{z}) = d'$; donc par la proposition II.8., $\bar{z} \in X$, ainsi $\bar{z}$ est support de d'.
De façon semblable, de ce que $\bar{x}$ est le support minimum de d, et P est le motif de $\bar{x}$, on déduit que $\bar{z}$ est le support minimum de d' et P le motif de $\bar{z}$; donc (f,P) est un motif de d'. c.q.f.d.

Pour finir ce paragraphe, on va éliminer le rôle de paramètre joué par α dans le théorème que nous venons de démontrer; mais pour cela un choix approprié du type t, réalisé par α sur M, est nécessaire.

<u>Proposition II.9</u>. On peut choisir t de manière que d'une part il soit minimal sur M et d'autre part, dans les modèles $M(X)$ résultant de ce choix de t, α est définissable à partir de chaque point $d \in M(X) \setminus M$.

<u>Démonstration</u>. Soit $d \in M(X) \setminus M(\alpha)$; soient $\bar{x}$ le support minimum de d, (f,P) un patron de d : $\bar{x}$ réalise P et $f(\bar{x}) = d$. Noter que pour la proposition II.6.b., il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que f soit injective sur P_α^k . Pour tout $a \in M$ et tout $k \in \mathbb{N}$ on note F_a^k l'image de P_a^k par f.

Supposons que t contienne une formule Θ telle que, pour $p \in \mathbb{N}$ fixé,

$\theta(v') \wedge \theta(v) \wedge v' < v \vdash F^p_{v'} \cap F^p_v = \emptyset$. Comme α vérifie θ , et $d \in \bigcap_{k\in \mathbb{N}} F^k_\alpha$, cela entraîne : $\alpha = \mu v \mid (\theta(v) \wedge d \in F^p_v)$, donc α est définissable à partir de d. Reste à choisir t minimal et contenant une telle formule θ ; le lemme qui suit permet d'employer pour cela les arguments de densité de l'exposé précédent, §III C

Lemme II.10. Pour tout motif $P(\bar{v})$ et tout terme $f(\bar{v})$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que la condition $\mathcal{P}(\theta)$ est dense parmi les formules non bornées dans M :

$$\mathcal{P}(\theta) = [\, f \text{ injective sur } P^p_v, \text{ et } (\theta(v') \wedge \theta(v) \wedge v' < v) \vdash F^p_v \cap \bigcup_{b \leq v'} F^p_b = \emptyset \; .$$

Démonstration. Observons d'abord que la condition suivante est dense (parmi les formules non bornées dans M) :

$$\mathcal{P}'(\theta) = [\, \theta(v') \wedge \theta(v) \wedge v' < v \vdash |P^k_v| > \sum_{b \leq v'} |P^o_b|]$$

En effet, considérons le terme h' défini par

$$h'(a') = \mu a \mid |P^k_a| > \sum_{b \geq a'} |P^o_b| \;;$$

noter qu'un tel élément $h'(a')$ existe, car $|P^k_a|$ tend vers l'infini avec a, puisque le degré de C dans S^k_a tend vers l'infini avec a. Alors $\mathcal{P}'(\theta)$ équivaut à la condition : $\theta(v_1) \wedge \theta(v_2) \wedge v_1 < v_2 \vdash h(v_1) < v_2$; nous dirons que θ est h-rare si elle vérifie cette condition, en effet, cf. §II de l'exposé précédent, on appelle rares les types qui pour tout terme h contiennent une formule θ vérifiant cette condition. La densité de cette condition, qui entraîne la densité de $P'(\theta)$, se vérifie facilement, directement ou à l'aide des méthodes ad hoc du §III, exposé précédent.

Observons ensuite que la condition suivante est dense :

$$\mathcal{P}''(\theta) = \theta(v') \wedge \theta(v) \wedge v' < v \vdash S^k_v \text{ décide } \phi^k(bv_1 \ldots v_k) \text{ pour tout } b \leq h(v') \; .$$

En effet considérons le terme h'' défini par

$$h''(v') = \mu a \; |S^k_a \text{ décide } \phi^k(bv_1 \ldots v_k) \text{ pour tout } b \leq h(v') \, ;$$

noter qu'un tel élément $h''(a')$ existe, puisque le degré de ϕ^k dans S^k_a tend vers l'infini avec a. Alors $\mathcal{P}''(\theta)$ équivaut à la condition dense que θ est h''-rare.

Soient $f^1(u\bar{v})$ un terme sans paramètre, et $a_o \in M$ tels que $f(\bar{v}) = f^1(a_o,\bar{v})$; la formule "$f(\bar{v}) \in F^o_{b_o}$" fait intervenir deux paramètres a_o, b_o, et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\phi^p(<a_o,b_o> v_1 \ldots v_k) = f(v) \in F^o_{b_o}$, où $<a,b>$ est l'élément $2^a . 3^b$ qui code le couple (a,b). Dans les conditions $\mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ ci-dessus, nous fixons désormais k égal à p et la fonction $h(v)$ égale à $2^v . 3^v = <v,v>$; nous sommes sommes en mesure de démontrer non seulement le lemme, mais une version uniforme p.r. au paramètre a_o qui figure dans $f(\bar{v})$ de ce lemme :

II.10. Bis. La condition suivante est dense : $\mathcal{P}^*(\theta)$ = "pour tout a_o, $\mathcal{P}(\theta(v) \wedge v > a_o)$ est vérifié vis à vis du terme $f(\bar{v}) = f_1(a_o\bar{v})$".

En effet $\mathbb{P}^*(\theta)$ est conséquence des deux conditions denses $\mathbb{P}'(\theta)$ et $\mathbb{P}''(\theta)$. Car supposons $\theta(a') \wedge \theta(a) \wedge a_o < a' < a$, et $f(\bar{v}) = f_1(a_o\bar{v})$ injective sur P_a^p : autrement dit a' et a vérifient l'hypothèse de la condition $\mathbb{P}(\theta(v) \wedge v > a_o)$; nous allons voir que $\mathbb{P}'(\theta)$ et $\mathbb{P}''(\theta)$ entraînent alors que a' et a vérifient la conclusion de $\mathbb{P}(\theta(v) \wedge v > a_o)$. Tout d'abord, vu l'injectivité de f, $|F_a^p| = |P_a^p|$; lequel nombre est $> \sum_{b \leq a'} |P_b^o|$, si $\mathbb{P}'(\theta)$ est vérifié. Cela implique $F_a^p \not\subseteq \bigcup_{b \leq a'} F_b^o$, c'est-à-dire il existe $\bar{x} \in P_a^p$ tel que $f(\bar{x}) \in F_b^o$ est faux pour tout $b \leq a'$. Or si $\mathbb{P}^a(\theta)$ est vérifié, S_a^p décide la formule $f(\bar{v}) \in F_b^o$ $= \phi^p(< a_o, b > v_1 \ldots v_k)$ pour tout $b \leq a'$ (vu qu'alors $< a_o, b > < h(a') = < a', a >$) ; donc "$f(\bar{x}) \in \bigcup_{b \leq a'} F_b^o$", étant faux pour un $\bar{x} \in P_a^p$, l'est pour tous c'est-à-dire $F_a^p \cap \bigcup_{b \leq a'} F_b^o = \emptyset$. A fortiori $F_a^p \cap \bigcup_{b \leq a'} F_b^p = \emptyset$, autrement dit a et a' vérifient la conclusion de $\mathbb{P}(\theta(v) \wedge v > a_o)$. Le lemme et son uniformisation sont ainsi démontrés.

Nous revenons alors à la démonstration de la proposition II.9., autrement dit à la construction du type t : pour que t ait les propriétés requises, il suffit que t rencontre les ensembles denses définis par les conditions suivantes :

- celles qui expriment la minimalité de t;
- les conditions $\mathbb{P}^*$ ci-dessus, lorsque $f_1(u\bar{v})$ parcourt les termes purs.

Le langage L étant supposé dénombrable, ces conditions sont en nombre dénombrable, d'où l'existence de t.

Dorénavant on suppose t comme dans la proposition II.9. que nous venons de démontrer.

II.11. Corollaire. Si $d, d' \in M(X)$ ont le même type sur M, ils ont le même type sur $M(\alpha)$.

Démonstration. $M(\alpha)$ est cofinal dans $M(X)$ puisque $M(X)$ est engendré par X et X est borné par $\max(S_\alpha^o)$ qui est un point de $M(\alpha)$; de plus $t(v)$ est un type minimal réalisé par α. Il en résulte par le théorème d'Ehrenfeucht-Gaifman (cf. §IV. de l'exposé précédent) que α est le seul élément de $M(X)$ réalisant t. Alors considérons d et d' réalisant le même type sur M;

1er cas. $d \in M(\alpha)$; alors il existe un terme $f(v)$ tel que $f(\alpha) = d$ et par le lemme ci-dessus, il existe un terme $g(v)$ tel que $g(a) = \alpha$; donc si l'on pose $\alpha' = g(d')$ on a $f(\alpha') = d'$, et α' réalise le même type que α sur M, soit t. Donc $\alpha = \alpha'$, et $f(\alpha') = f(\alpha) = d' = d$; d' et d ont alors le même type sur n'importe quoi !

2ème cas. $d \in M(X) \setminus M(\alpha)$. Par (a) il existe $g(v)$ telle que $\alpha = g(d)$. Soit $\alpha' = g(d')$; comme d et d' ont même type sur M, α' réalise le même type que α, soit t; alors $\alpha' = \alpha = g(d) = g(d')$. Le type de d sur M détermine le type de d sur $M(g(d)) = M(\alpha)$, et de même pour d' et $g'(d') = \alpha$, d'où le résultat.

Corollaire (Théorème II.5.bis). Soit $d \in M(X)$; (a) Le support de d est définissable à partir de d.

(b) Le type de d sur M détermine les motifs de d.

Démonstration. Conséquence immédiate du théorème II.5 et du Corollaire précédent.

§III - LE FINALE

Soit $\mathcal{T}$ un ensemble de types sur M, tel que

(*) quels que soit $\tau \in \mathcal{T}$, $\tau = \tau(v_1 \ldots v_s) \vdash v_1 < \ldots < v_s$, et si $\tau \neq \tau'$, $\tau' \in \mathcal{T}$, alors $\tau \cup \tau'$ est inconsistant. Si $N > M$ et $X \subset N$ on dira que X est coloré dans $\mathcal{T}$ si $\forall \bar{x} \in [X]^s$ il existe un type $\tau \in \mathcal{T}$ tel que $N \models \tau(\bar{x})$; ce type τ sera appelé la couleur de $\bar{x}$ et noté $\mathcal{C}_N(\bar{x})$ ou $\mathcal{C}(\bar{x})$ si N est fixé par le contexte. Et si $P(v_1 \ldots v_L)$ est un $\mathcal{T}$-motif, c'est-à-dire un motif standard à couleurs dans $\mathcal{T}$ (comme défini dans le §I.D), on dit qu'une suite $(y_1, \ldots, y_L)$ de N réalise P si $N \models P^*(y_1 \ldots y_L)$, où $P^*(v_1 \ldots v_L)$ est le type obtenu en remplaçant chaque formule de P de la forme $C(v_{i_1} \ldots v_{i_s}) = \tau$ par le type $\tau(v_{i_1} \ldots v_{i_s})$. Par la suite on confondra $P(v_1 \ldots v_L)$ et $P^*(v_1 \ldots v_L)$; par exemple on écrira $N \models P(x_1 \ldots x_L)$ au lieu de $N \models P^*(x_1 \ldots x_L)$, et on considérera $P(v_1 \ldots v_L)$ comme un type sur M, alors que c'est P^* qui est un type sur M.

L'objet de ce paragraphe est de généraliser le §II, en remplaçant la coloration $C : [M]^s \to M$ par une coloration $\mathcal{C}$ de l'espèce ci-dessus, obtenant :

III.1. Théorème principal - Pour tout modèle M de $\mathcal{P}$ il existe un ensemble $\mathcal{T}$ de types sur M et un type $\sigma(v_1 v_2)$ sur M, tels que

- $\mathcal{T}$ est de cardinal $|M|^{\aleph_0}$ et vérifie la condition (*) ci-dessus
- $\mathcal{T}$ et σ vérifient les propriétés 1 à 3 qui suivent.

1. Pour tout $\mathcal{T}$-motif $P(v_1 \ldots v_L)$, la théorie $\bigwedge_{i,j \leq L} \sigma(v_i v_j) \wedge P(v_1 \ldots v_L)$ est un type complet sur M.

2. Pour tout ensemble $(X, <_X, \mathcal{C}_X)$ à coloration dans $\mathcal{T}$, (avec pour simplifier X disjoint de M) il existe $N \succ M$, contenant X et tel que
   - $<_X$ et $\mathcal{C}_X$ coïncident avec la restriction à X de $<_N$ et $\mathcal{C}_N$ ($\mathcal{C}_N$ étant défini comme ci-dessus)
   - $X^2 \subset \sigma_N$, ce qui entraîne que X est $\mathcal{C}$-indiscernable sur M sur N (c'est-à-dire le $\mathcal{C}$-motif de $\bar{x} \in X$ détermine son type sur M).

Soit alors M(X) la cloture de Skolem de $M \cup X$ dans N; le modèle M(X) déterminé par les conditions ci-dessus est unique, à isomorphisme sur M et $(X, <_X, \mathcal{C}_X)$ près; plus généralement, $X \to M(X)$ est un foncteur de la catégorie des ensembles à couleurs dans $\mathcal{T}$, dans la catégorie des extensions élémentaires de M.

3. - Tout modèle M(X) contient un point α tel qu'on a les propriétés suivantes : α réalise un type minimal sur M; et α est définissable à partir de chaque point $d \in M(X) \setminus M$; pour tout $d \in M(X)$, l'ensemble $X \cap M(d)$ est fini; il est vide si et seulement si $d \in M(\alpha)$. Si $d \in M(X) - M(\alpha)$, l'ensemble $X \cap M(d)$ est appelé le support de d : il est le plus petit sous-ensemble Y de X tel que $d \in M(Y)$.

Soit $d \in M(\alpha)$; alors pour tout $d' \in M(X)$, d' réalise le même type sur M que d si et seulement si $d' = d$.

Soit $d \in M(X) \setminus M(\alpha)$, et soit $\bar{x}$ le support de d (rangé en suite croissante); il existe donc un terme $f(\bar{v})$ tel que $f(\bar{x}) = d$, et une suite de termes $\bar{g}(v)$ telle que $\bar{g}(d) = \bar{x}$. Si d' réalise le même type que d sur M et $\bar{y}$ est le support de d', alors $\bar{x}$ et $\bar{y}$ ont même $\mathcal{C}$-motif, et pour tout terme $f(\bar{v})$ et suite de termes $\bar{g}(v)$, $f(\bar{x}) = d \Rightarrow f(\bar{y}) = d'$ et $\bar{g}(d) = \bar{x} \Rightarrow \bar{g}(d') = \bar{y}$. Réciproquement, si $\bar{x}, \bar{y} \in X$ ont même $\mathcal{C}$-motif, et $f(\bar{v})$ est un terme tel que $f(\bar{x}) = d$, $f(\bar{y}) = d'$, alors d et d' réalisent le même type sur M.

Avant de passer à la démonstration (essentiellement contenue dans §II), nous indiquons trois corollaires

III.2. <u>Corollaire</u> - Soit M' un sous-modèle élémentaire de $M(X)$, contenant M; alors $M' = M$, ou $M' = M(\alpha)$, ou $\exists X' \subset X : M' = M(X')$.

<u>Démonstration</u> - Soit M' tel que $M \precneqq M' \prec M(X)$, et soit $X' = X \cap M'$. Par le théorème principal (3), si $X' = \phi$ alors $M' \subseteq M(\alpha)$, et comme $M(\alpha)$ est extension $\prec$-minimale de M et $M \precneqq M'$ on a $M' = M(\alpha)$. Et si $X' \neq \phi$, on a $M(\alpha) \subset M(X')$ puisque α est définissable à partir de tout point de $M(X') \setminus M$; alors soit $d \in M'$: si $d \in M(\alpha)$, $d \in M(X')$, et si $d \notin M(\alpha)$, d est définissable à partir de son support $X \cap M(d) \subset X'$, donc $d \in M(X')$. Dans tous les cas on a montré $d \in M'$ $\Rightarrow d \in M(X')$; et réciproquement $M \cup X' \subset M'$ donc $M(X') \subseteq M'$. D'où $M(X') = M'$,

c.q.f.d.

N.B. Ainsi le lattice des sous-modèles élémentaires de $M(X)$ contenant M est <u>presque</u> isomorphe, pour l'application : $X' \in \mathcal{P}(X) \to M(X')$, au lattice $\mathcal{P}(X)$: il ne diffère de ce dernier qu'en raison du modèle $M(\alpha)$ le seul qui n'est pas de la forme $M(X')$, $X' \subset X$. On a vu (démonstration du Corollaire II.11) que $M(\alpha)$ est cofinal dans $M(X)$, ce qui entraine que $M(x)$ est cofinal dans $M(X)$, $\forall x \in X$; d'autre part on sait (exposé précédent, §IV) qu'il ne peut exister deux extensions $\prec$-minimales $M(x_1)$ et $M(x_2)$ de M telles que $M(x_1)$ et $M(x_2)$ sont cofinaux l'un dans l'autre. L'"excroissance" constituée par $M(\alpha)$ ne peut donc pas être éliminée.

III.3. <u>Corollaire</u> - Pour tout sous-ensemble Y de $M(X)$ qui est $<$-indiscernable sur M, il existe $Z \subset X$ et un terme $g(v)$, tels que Z est $<$-indiscernable sur M et g envoie bijectivement Y sur Z.

<u>Démonstration</u> - Nous supposons $Y = \{d^1, \ldots d^n\}$ avec $n \geq 2$: la démonstration s'étend trivialement au cas général. Puisque $d^1 \ldots d^n$ ont même type sur M et sont distincts, par le théorème principal (3), il s'en déduit que $d^1, \ldots, d^n \notin M(\alpha)$, que les supports $\bar{x}^1, \ldots \bar{x}^n$ de $d^1, \ldots, d^n$ ont même $\mathcal{C}$-motif (en particulier même lon-

gueur) et qu'il existe des termes $f(\bar v)$ et $\bar g(v)$ tels que $f(\bar x^i) = d^i$ et $\bar g(d^i) = \bar x^i$, pour tout $i \leq n$. Soit j tel que $x_j^1 \neq x_j^2$ (j existe, sinon $\bar x^1 = \bar x^2$ donc $f(\bar x^1) = d^1 = f(\bar x^2) = d^2$, qui est faux). Puisque $x_j^1 = g_j(d^1)$ et $x_j^2 = g_j(d^2)$, on a $g_j(d^1) \neq g_j(d^2)$; par indiscernabilité de $\{d^1,\ldots,d^n\}$ cela entraine que

$\{g_j(d^1),\ldots,g_j(d^n)\} = \{x_j^1,\ldots,x_j^n\}$ est un ensemble $<$-indiscernable sur M et de cardinal n, d'où le résultat cherché, en prenant $Z = \{x_j^1,\ldots,x_j^n\}$ et $g = g_j$.

Rappelons qu'un cardinal infini λ est strictement inférieur au <u>nombre de Hanf</u> d'une théorie T si et seulement si il existe un type $p(\bar v)$ qui est omis dans un modèle de T de cardinal λ mais est réalisé dans tout modèle de cardinal $< \lambda$. On sait (voir [A.H.]) que si T est une "théorie fausse" de l'Arithmétique, c'est-à-dire T contient les axiomes de Péano $\mathcal{P}$, mais n'est pas vraie dans le modèle standard $\mathbb{N}$, alors le nombre de Hanf de T est $\beth_{\omega_1}$. En revanche, J.F. Knight, [K] , a démontré que le nombre de Hanf de la théorie complète de $\mathbb{N}$ est $\beth_\omega$.

III.4. <u>Corollaire</u> - Le nombre de Hanf de la théorie complète de $\mathbb{N}$ est $\beth_\omega$.

<u>Démonstration</u> - Il nous reste à montrer que ce nombre est plus grand que $\beth_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration utilise deux résultats combinatoires qui figurent en appendice de cet exposé.

III.5. <u>Théorème</u> - (a) $\beth_n \not\to [n+1]^n_{\beth_1}$, autrement dit il existe un ensemble coloré $(X, <_X, C_X)$ tel que $<_X$ est de type $\beth_n$, C_X est une coloration des n-uplets avec $\beth_1$ couleurs, et X contient pas de suite $<$-indiscernable (pour C_X) de cardinal $n+1$.

(b) $\beth_{n+1} \to [n+1]^n_{\beth_1}$.

Lorsque notre modèle fixé M est le modèle standard $\mathbb{N}$ $(=(\mathbb{N},+,\times))$, l'ensemble de types $\mathcal{T}$ du théorème principal est de cardinal $\aleph_0^{\aleph_0} = \beth_1 \geq \aleph_1$; en conséquence on peut supposer que l'ensemble X du théorème III.5.a est à couleurs dans $\mathcal{T}$. Considérons alors le modèle $\mathbb{N}(X)$, tel que $\mathbb{N} < \mathbb{N}(X)$, $X \subset \mathbb{N}(X)$ et sur X, $<_{\mathbb{N}(X)}$ coïncide avec $<_X$ et $\mathcal{C}_{\mathbb{N}(X)}$ avec C_X. Par le corollaire précédent III.3, pour tout ensemble Y qui est $<$-indiscernable dans $\mathbb{N}(X)$, il existe $Z \subset X$ qui est $<$-indiscernable et de même cardinal; et puisqu' l'ensemble coloré $(X, <_{\mathbb{N}(X)}, \mathcal{C}_{\mathbb{N}(X)})$ ne contient pas $n+1$ points indiscernables, Z donc Y comportent au plus n points. Ainsi le modèle $\mathbb{N}(X)$ ne comporte aucune suite indiscernable de $n+1$ points; autrement dit $\mathbb{N}(X)$ omet le type

$p(v_0\ldots v_n) = \{(v_0 <\ldots < v_n\} \cup \{\phi(\bar u) \leftrightarrow \phi(\bar w);\ \phi(x_1\ldots x_n)$ formule arithmétique, $\bar u$ et $\bar w$ deux suites de variables $\in \{v_0,\ldots,v_n\}$ avec des indices croissants $\}$; lequel type exprime que $v_0\ldots v_n$ sont $n+1$ points indiscernables. Comme card $\mathbb{N}(X)$ = card $X = \beth_n$, $p(v_0\ldots v_n)$ est omis dans un modèle de la théorie complète de N de cardinal $\beth_n$. En revanche, il résulte du théorème III.5.b que p

est réalisé dans tout modèle N de cardinal $\geq \beth_{n+1}$. En effet soit sur N un bon ordre $<$ de type $\geq \beth_{n+1}$, et soit sur $[N]^n$ la relation d'équivalence $\sim$ définie par $\bar{x} \sim \bar{y} \iff \bar{x}$ et $\bar{y}$ réalisent le même type dans N. Le langage de N étant dénombrable, $\sim$ possède au plus $\beth_1$ classes, alors par $\beth_{n+1} \to [n+1]^n_{\beth_1}$, il existe $Y \subset N$ de cardinal $n+1$ tel que $[Y]^n$ est contenu dans une seule classe de $\sim$, autrement dit Y est un ensemble $<$-indiscernable à $n+1$ points, qui réalise $p(v_o \ldots v_n)$ dans N. Pour tout entier n, nous avons ainsi un type qui est omis dans un modèle $\mathbb{N}(X) > \mathbb{N}$ de cardinal $\beth_n$, mais qui est réalisé dans tout modèle de cardinal $\geq \beth_{n+1}$; cela montre que le nombre de Hanf de la théorie complète de $\mathbb{N}$ est $\geq \beth_\omega$, c.q.f.d.

Il nous reste à démontrer le théorème principal, et pour commencer, à construire l'ensemble $\mathcal{T}$ et le type $\sigma(v_1 v_2)$. Pour cela nous utiliserons, outre une suite de familles S^k très semblables à celle du §II, une suite de colorations $C^k : [M]^s \to M$ qui vont remplacer la coloration unique C du §II.

Tout d'abord, on fixe une coloration générale définissable $C^o : [M]^s \to M$, on fixe une énumération $k \to \phi^k(u\ v_1 \ldots v_k)$ $(k \in N)$ des formules sans paramètres avec variables libres comme indiqué, et on choisit $a \to S^o_a$ $(a \in M)$ comme au §II.A, dans le cas où $C = C^o$: donc les degrés de C^o et de ϕ^o dans S^o_a tendent vers l'infini avec a. Cela fait, avant de définir une deuxième famille $(S^1_a)_{a \in M}$ comme au §II.A, on fixe une deuxième coloration définissable $C^1 : [M]^s \to M$, vérifiant les conditions suivantes :

- $\forall a\ \exists b\ \ C^1_a \subset C^o_b$ (où $C_a = \{\bar{x} \in [M]^s : C(\bar{x}) = a\}$)
- $\forall a\ \ \{b \in M : C^1_b \subset C^o_a\}$ est infini
- le degré de cette nouvelle coloration C^1 dans S^o_a tend vers l'infini avec a.

On dira que C^1 <u>raffine</u> C^o si elle vérifie les deux premières conditions, et que C^1 est S^o-générale si elle vérifie la troisième. L'existence d'une telle coloration C^1 se montre aisément :

III.6. <u>Lemme</u> - Pour toute famille (S_a) et toute coloration C qui est S-générale, il existe une coloration C' qui raffine C et est encore S-générale.

<u>Démonstration</u> - Soit $a \to D_a$ $(a \in M)$ une partition définissable de M en ensembles tous infinis - C' va être défini de manière que $D_a = \{b : C'_b \subset C_a\}$.
Pour tout motif P, on note P^o le motif obtenu en remplaçant dans P toute formule de la forme $C(x_1 \ldots x_s) = b$, $b \in D_a$, par $C(x_1 \ldots x_1) = a$. On fixe une énumération définissable $a \to P_a$, telle que $\forall a \in M$, P_a est un motif a-général. Pour tout $b \in M$ on considère le plus grand entier a tel que S_b contienne un ensemble X qui réalise P^o_a; on définit $C' \restriction X$ de manière à réaliser le motif P_a. Et sur le

restant de $[M]^s$, on définit C' en posant $C'(\bar{x}) = b$, où $b \in D_a$, a tel que $C(\bar{x}) = a$.

C^o, S^o C^1 étant maintenant choisis, on construit une famille $a \to S^1_a (a \in M)$ telle que $\forall a$ $S^1_a \subset S^o_a$ et les degrés de C^1 et ϕ^1 (et non pas C^o et ϕ^1) tendent vers l'infini avec a : l'existence de S^1 résulte du lemme II.1. appliqué lorsque $C = C^1$, $S = S^o$.

En répètant cette construction par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on obtient un analogue de la proposition II.2. qui introduisait les familles S^k $(k \in \mathbb{N})$ du §II :

II.2. bis - <u>Proposition</u> - (a) On peut construire pour tout $k \in \mathbb{N}$ une famille $a \to S^k_a$ $(a \in M)$ et une coloration C^k définissables dans M, telles que $\forall k$ C^{k+1} raffine C^k, $\forall a \in M$ $S^{k+1}_a \subset S^k_a$, enfin le degré de C^k et ϕ^k dans S^k_a tend vers l'infini avec a.

(b) Alors dans tout modèle $N \succ M$ contenant $\alpha > M$, et vis-à-vis de la coloration C^k, l'ensemble S^k_α est général sur M et décide toutes les formules $\phi^i(a\ v_1 \dots v_i)$ $(a \in M,\ i \le k)$.

<u>Démonstration</u> - (a) C^k, S^k sont déjà construits pour $k \le 1$; pour obtenir C^{k+1} on applique le lemme III.6 avec $C = C^k$ et $S = S^k$. Pour obtenir alors S^{k+1} , on applique le lemme II.1. avec $C = C^{k+1}$, $S = S^k$ et $\phi = \phi^{k+1}$.

(b) Puisque dans M le degré de C^k dans S^k_a tend vers l'infini avec a, on déduit de $\alpha > M$ que le degré de C^k dans S^k_α est infini, par conséquent S^k_α est un ensemble général sur M vis à vis de la coloration C^k. Un argument semblable montre que pour tout $i \le k$ S^i_α décide les formules $\phi^i(a\ v_1 \dots v_i)$ $(a \in M)$ vis à vis de la coloration C^i; comme $S^k_\alpha \subset S^i_\alpha$, S^k_α en fait autant, toujours vis à vis de C^i. Et de ce que C^k raffine C^i résulte aisèment qu'on peut substituer C^k à C^i.

Nous avons ainsi une situation analogue à celle du §II, la différence résidant dans le fait qu'à chaque suite croissante $(x_1 \dots x_s)$ est associée une infinité de couleurs $C^k(\bar{x})$, $k \in \mathbb{N}$. Par moment il sera commode de penser à cette suite infinie comme étant une seule couleur, et nous le ferons de la manière suivante. Pour tout modèle $N \succ M$ et tout $\bar{x} \in [N]^s$, soit $\tau(\bar{v})$ le type sur N : $\tau = \{C^k(v_1 \dots v_s) = a;\ k \in \mathbb{N},\ N \models C^k(\bar{x}) = a\}$; si τ est un type sur M (c'est à dire $C^k(\bar{x}) \in M$ $\forall k \in \mathbb{N}$), τ sera appelé la couleur de $\bar{x}$ et noté $\mathcal{C}_N(\bar{x})$. Si τ est seulement un type sur N, et non sur M, on convient que $\mathcal{C}_N$ n'est pas défini. Ceci nous amène à l'ensemble de types $\mathcal{C}$ du théorème principal :

III.7. <u>Notations</u> - On pose

$$\mathcal{S} = \{\sigma \in M^{\mathbb{N}} :\ \forall k \in \mathbb{N}\ \ C^o_{\sigma(o)} \cap \dots \cap C^k_{\sigma(n)} \text{ est non vide}\}$$

et pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$,

$\tau_\sigma = \{C^k(v_1 \dots v_s) = \sigma(k) : k \in \mathbb{N}\}$

enfin $\mathcal{C} = \{\tau_\sigma : \sigma \in \mathcal{S}\}$

- Remarques - De II.2. bis on déduit facilement :

$\tau \in \mathcal{C} \Leftrightarrow$ il existe un modèle $N > M$ contenant $\bar{x} \in [N]^s$ tel que $\mathcal{C}_N(\bar{x}) = \tau$

$|\mathcal{S}| = |\mathcal{C}| = |M|^{\aleph_0}$, et $\tau \neq \tau' \in \mathcal{C} \Rightarrow \tau \cup \tau'$ inconsistant.

Voici maintenant la définition du type $\sigma(v_1,v_2)$ intervenant dans le théorème principal :

III.8. Notations - Comme au §II.B, on choisit un type $t(u)$ non borné sur M et l'on pose

$$h(v) = \mu u : v \in S_u^o$$

$$\sigma(v_1,v_2) = t(h(v_1)) \cup \{v_1,v_2 \in S^k_{h(v_1)} : k \in N\} .$$

Nous démontrons maintenant le point (1) du théorème principal : pour tout $\mathcal{C}$-motif $P(v_1 \dots v_L)$, l'ensemble $\bigwedge_{i,j\leq L} \sigma(v_i v_j) \wedge P(v_1 \dots v_L)$ est un type complet sur M. On écrit $\sigma(v_1 \dots v_L)$ au lieu de $\bigwedge_{i,j\leq L} \sigma(v_i v_j)$, et on appelle C^k-motifs les motifs qui résultant des motifs au sens du §I.D., en remplaçant toute formule de la forme $C(x_1 \dots x_s) = a$ par $C^k(x_1 \dots x_s) = a$. Un $\mathcal{C}$-motif $P(v_1 \dots v_L)$ contient pour tout $k \in \mathbb{N}$ un C^k-motif $P_k(v_1 \dots v_L)$, et $P = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$. Alors la consistance et complètude de $\sigma(v_1 \dots v_L) \wedge P$ résulte par compacité de l'extension suivante du théorème II.3. :

II.3.bis. - Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sigma(v_1 \dots v_L) \wedge P_k$ est une théorie consistante et décide chaque formule de la forme $\phi^i(a\, v_{e_1} \dots v_{e_i})$, $i \leq k$, $a \in M$, $e_1 < \dots < e_i \leq L$.

Démonstration II.3.bis résulte de II.2.bis exactement comme II.3. de II.2., moyennant le remplacement de C par C^k.

Toute la partie du §II qui suit le théorème II.3. s'étend à la présente situation, de la même manière que dans le cas de II.2.bis et II.3.bis : chaque fois qu'au §II. on considérait un ensemble S^k_α, on considère la présente version de S^k_α, et en même temps, la coloration C^k qui permet à S^k_α de décider les mêmes formules qu'au §II. Et il est immédiat que les résultats du §II ainsi étendus entraînent le théorème principal; dans ces conditions, nous laissons au lecteur les détails restant de sa démonstration.

La construction de C^k, S^k et t étant passablement compliquée, il est plus élégant de les obtenir en laissant faire le travail par les arguments de densité, ce qui est la **méthode** de [A,H] . Nous indiquerons cette alternative à la construction précédente.

Nous construisons plus précisément une suite de triplets $< \psi^{(k)}(u), S_u^k, C^k(v) >$, $k \in \mathbb{N}$, telle que $t(u) = \{\psi^k(u) : k \in \mathbb{N}\} \cup M < u$ jouera le rôle du type de α . Soit F = l'ensemble de tous les triplets $< \psi(u), S_u, C(v) >$ tels que $\psi(u)$ est une formule sans paramètre non bornée dans M, $a \to S_a (a \in M)$ une famille d'ensembles finis et C une coloration sur $[M]^s$, telle que le degré de C dans S_a tend vers l'infini avec a, C et S_u étant définis par des formules pures. Sur F soit $\prec$ la relation :

$$< \psi(u), S'_u, C'(v) > \prec < \psi(u), S_u, C(v) > \iff \vdash \psi'(u) \to \psi(u),$$

$\forall a \in M$ $S'_a \subset S_a$, et la partition $(C'_a)_{a \in M}$ est plus fine que la partition

$(C'_a)_{a \in M}$. On dira qu'une suite $< \psi^k, S^k, C^k >$ $k \in \mathbb{N}$ est <u>générique</u> si elle est décroissante pour $\prec$ et si pour toute condition $\mathcal{P}(\psi, S, C)$ dense pour $\prec$ et définie de manière arithmétique (sans paramètres) il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(\psi^k, S^k, C^k)$ est vrai. Il résulte du théorème d'existence d'objets génériques (cf. §III de l'exposé précédent) qu'une telle suite générique existe; et par des arguments de densité, on peut montrer que $t(a)$, S^k, C^k ont les propriétés exigées pour le théorème principal.

BIBLIOGRAPHIE

[A.H] F. Abramson, L. Harrington, Models without indiscernibles, Journal Symb. Logic, vol. 43 (1978), pp. 572-600.

[E.R] P. Erdös, R. Rado, A partition calculus in set theory, Bull. Amer. Math. Soc., vol 62 (1956), pp. 427-489.

[G] H. Gaifman, Models and types of Peano's arithmetic, Ann. Math. Logic, vol.9 (1976), pp. 223-306.

[K] J. Knight, Omitting types in set theory and arithmetic, Journal Symb. Logic, vol. 41 (1976), pp. 25-32.

[N.R] J. Nešetřil, V. Rödl, Partitions of finite relation and set systems, Journal Combinatorial Theory, Series A, vo. 22 (1976), pp.289-312.

APPENDICE. RÉSULTATS COMBINATOIRES (M.A. Dickmann)

Dans cet appendice K, λ, μ désignent, sauf mention explicite, des cardinaux arbitraires, finis ou infinis. n, m, j,... sont des cardinaux finis. α, β, γ, ξ,... désignent des cardinaux.

Pour un cardinal infini donné K, la fonction "beth" $\alpha \to \beth_\alpha(K)$ est définie par induction transfinie :

$$\beth_0(K) = K$$

$$\beth_{\alpha+1}(K) = 2^{\beth_\alpha(K)}$$

$$\beth_\delta(K) = \bigcup \{\beth_\gamma(K) \mid \gamma < \delta\} \quad \text{pour } \delta \text{ limite} > 0.$$

On pose $\beth_\alpha = \beth_\alpha(\aleph_0)$ pour tout ordinal α.

Etant donné un ensemble X et $n \geq 1$, $[X]^n$ désigne la famille des sous-ensembles de X ayant exactement n éléments. Si X est totalement ordonné par $<$ et $\{x_1,\dots,x_n\} \in [X^n]$, alors $\{x_1,\dots,x_n\}_<$ désigne l'écriture de l'ensemble $\{x_1,\dots,x_n\}$ quand $x_1 < \dots < x_n$.

La relation $K \to (\lambda)^n_\mu$, $n \geq 1$, a été déjà définie au Chapitre V. Nous utiliserons le fait, facilement démontré, que cette relation est croissante en K et décroissante en λ et μ :

A0. Fait : $K \to (\lambda)^n_{\mu+1} \wedge K' \geq K \wedge \lambda' \leq \lambda \wedge \mu' \leq \mu \Rightarrow K' \to (\lambda')^n_{\mu'}$.

(A) La relation $\beth_{n+1} \to (n+1)^n_{\beth_1}$.

Celle-ci est une conséquence facile du très bien connu théorème d'Erdös-Rado:

Théorème. Pour K infini et $n \geq 1$ on a :

$$\beth_{n-1}(K)^+ \to (K^+)^n_K .$$

Pour la démonstration, voir [E.R] , Théorème 39 et corolaires.

En mettant $K = \beth_1$ et compte-tenu du fait que $\beth_n(\beth_1) = \beth_{n+1}$ on obtient $\beth_n^+ \to (\beth_1^+)^n_{\beth_1}$. Or, du fait A0 on obtient immédiatement (A).

(B) La relation $\beth_n \not\to (n+1)^n_{\beth_1}$.

Le cas $n = 1$ est trivial en considérant la partition de $\beth_1$ constituée par les singletons.

Pour le cas $n = 2$ on démontre, plus généralement

A1. Lemme. $2^K \not\to (3)^2_K$.

Démonstration. Soit S l'ensemble des suites de 0 et 1 de longueur K ordonné par premières différences : pour $x,y \in S$, $x < y \Leftrightarrow x_\xi < y_\xi$, où $\xi = i(x,y)$ = le premier α tel que $x_\alpha \neq y_\alpha$. Soit $f : [S]^2 \to K$ l'application

$$f(\{x,y\}_<) = i(x,y)$$

Si $x < y < z$, éléments de S, sont tels que

$f(\{x,y\}_<) = f(\{x,z\}_<) = f(\{y,z\}_<) = \alpha$,
alors on a $x_\alpha \neq y_\alpha$, $y_\alpha \neq z_\alpha$, $x_\alpha \neq z_\alpha$, ce qui contredit le fait que $\{x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha\} \subseteq \{0,1\}$. Donc, il n'y a pas d'ensemble homogène pour f de cardinalité 3.

Si $n > 2$, la relation (B) résulte, par induction sur n, du théorème suivant, qui vaut pour K, λ, μ finis ou infinis :

<u>A.2. Théorème</u>. $K \not\to (\lambda)^n_\mu \Longrightarrow 2^K \not\to (\lambda+1)^{n+1}_{m+2\mu}$,

où $n \geq 2$, $\lambda \geq n+1$ et $m = n! - 2$.

On commence par démontrer quelques propriétés de l'ensemble S introduit dans le lemme précédent :

<u>A.3. Lemme</u>. Soient $n \geq 1$ et S l'ensemble des suites de 0 et 1 de longueur K ordonné par **premières** différences. Alors

a) $\{x_1,\dots,x_{n+1}\}_< \in [S]^{n+1} \Longrightarrow$ l'ensemble $\{i(x_1,x_2),\dots,i(x_n,x_{n+1})\}$ a cardinalité n.

b) Soit $Y \subseteq S$. Si Y a la propriété :
pour tous $x,y,z \in Y$, $x < y < z \Longrightarrow i(x,y) < i(y,z)$, alors
i) $x,y,z \in Y$, $x < y$ et $x < z \Rightarrow i(x,y) = i(x,z)$,
ii) $x,x',y,y' \in Y$, $x < x'$, $y < y'$ et $i(x,x') = i(y,y') \Rightarrow x = y$.

c) Si Y a la propriété
pour tous $x,y,z \in Y$, $x < y < z \Rightarrow i(x,y) > i(y,z)$, alors
i) $x,y,z \in Y$, $x < z$ et $y < z \Rightarrow i(x,z) = i(y,z)$,
ii) $x,x',y,y' \in Y$, $x < x'$, $y < y'$ et $i(x,x') = i(y,y') \Rightarrow x' = y'$.

<u>Remarque</u> (b,i) prouve que $x \mapsto i(x,y)$, avec $x,y \in Y$, $x < y$, définit bien une application de domaine Y', où $Y' = Y$ si Y n'a pas de dernier élément, $Y' = Y - \{$dernier élément de $Y\}$ autrement. (b,ii) prouve que cette application est injective. (c,i) et (c,ii) prouvent des résultats analogues pour l'application $z \mapsto i(x,z)$, avec $x,z \in Y$, $x < z$.

<u>Démonstration</u>. (a) Induction sur n. Pour $n = 1$ évident. Supposons vrai pour $n-1$. Donc, chacun des ensembles

$\{i(x_1,x_2),\dots,i(x_{n-1},x_n)\}$, $\{i(x_2,x_3),\dots,i(x_n,x_{n+1})\}$ et

$\{i(x_1,x_2), i(x_2,x_3),\dots,i(x_{n-2},x_n), i(x_n,x_{n+1})\}$

a cardinalité $n-1$. Ceci veut dire que :

$$i(x_k,x_{k+1}) \neq i(x_j,x_{j+1}) \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \neq j \leq n-1$$

$$i(x_n,x_{n+1}) \neq i(x_j,x_{j+1}) \quad \text{pour} \quad 2 \leq j \leq n-1$$

$$i(x_n,x_{n+1}) \neq i(x_1,x_2).$$

On conclut que l'ensemble $\{i(x_1,x_2), i(x_2,x_3),\dots,i(x_{n-2},x_{n-1}), i(x_{n-1},x_n), i(x_n,x_{n+1})\}$ a cardinalité n, ce qui prouve l'énoncé pour n.

(b) et (c) étant symétriques nous faisons la preuve dans le cas (c).

(c,i). Mettons $i(x,z) = \beta$, $i(y,z) = \gamma$. Supposons, par exemple, $x < y$ et soit $\alpha = i(x,y)$; alors on a :

1) $x_\alpha = 0$, $y_\alpha = 1$ et $x_\delta = y_\delta$ pour tout $\delta < \alpha$;

2) $x_\beta = 0$, $z_\beta = 1$ et $x_\delta = z_\delta$ pour tout $\delta < \beta$;

3) $y_\gamma = 0$, $z_\gamma = 1$ et $y_\delta = z_\delta$ pour tout $\delta < \gamma$,

et l'hypothèse sur Y entraine que

4) $\alpha > \gamma$

Par (4) et (2), $x_\gamma = y_\gamma = 0$. Puisque $z_\gamma = 1$, on a $x_\gamma \neq z_\gamma$, ce qui par (2) entraîne $\gamma \nless \beta$, i.e. $\beta \leq \gamma$. Si $\beta < \gamma$, alors (3) implique $y_\beta = z_\beta$; puisque $\alpha > \gamma \geq \beta$, (1) donne $x_\beta = y_\beta$; donc $x_\beta = z_\beta$, ce qui contredit (2). Donc $\beta = \gamma$.

(c,ii). Supposons $x' \neq y'$, par exemple $x' < y'$. Alors $x < x' < y'$ entraine $i(x,x') > i(x',y')$. Par (c,i), $y < y'$ et $x' < y'$ impliquent $i(x',y') = i(y,y')$. Donc $i(x,x') > i(y,y')$ ce qui contredit l'hypothèse.

<u>Démonstration du théorème A.2</u>. Soit S_n l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$. Soient π_o la permutation identique et $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots n \\ n & n-1 \dots 1 \end{pmatrix}$ la permutation "inversion". L'ensemble $S_n - \{\pi_o, \pi_1\}$ a cardinalité m (puisque $\overline{\overline{S_n}} = n!$); soit $\pi'_o, \dots, \pi'_{m-1}$ une énumération de cet ensemble. Pour $\pi \in S_n$ et $\{x_1,\dots,x_{n+1}\}_< \in [S]^{n+1}$ donnés, posons : $P_\pi(x_1,\dots,x_{n+1})$ ssi pour tous i,j,

$$1 \leq i,j \leq n \quad \text{et} \quad \pi(i) < \pi(j) \Longrightarrow i(x_i,x_{i+1}) < i(x_j,x_{j+1}).$$

Par exemple,

$$P_{\pi_o}(x_1,\dots,x_{n+1}) \Longleftrightarrow i(x_1,x_2) < i(x_2,x_3) < \dots < i(x_n,x_{n+1})$$

$$P_{\pi_1}(x_1,\dots,x_{n+1}) \Longleftrightarrow i(x_1,x_2) > i(x_2,x_3) > \dots > i(x_n,x_{n+1})$$

et si $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \dots & n-1, & n \\ 3 & 1 & n & 4 \dots & n-1, & 2 \end{pmatrix}$,

$$P_\pi(x_1,\dots,x_{n+1}) \Longleftrightarrow i(x_2x_3) < i(x_n,x_{n+1}) < i(x_1,x_2) < i(x_4,x_5) < \dots$$
$$\dots\dots < i(x_{j-1}x_j) < i(x_jx_{j+1}) < \dots < i(x_{n-1}x_n) < i(x_3x_4).$$

Notons que pour tout $\{x_1,\dots,x_{n+1}\}_< \in [S]^n$ il existe un unique $\pi \in S_n$ tel que $P_\pi(x_1,\dots,x_{n+1})$.

En utilisant l'hypothèse $K \nrightarrow (\lambda)^n_\mu$, soit $f : [K]^n \to \mu$ une application sans ensemble homogène de cardinalité λ .

Soit $g : [S]^{n+1} \to \mu\cdot 2+m$(*) définie par

$$g(\{x_1,\dots,x_{n+1}\}_<) = \begin{cases} f(\{i(x_1,x_2),\dots,i(x_n,x_{n+1})\}) & \text{si } P_{\pi_o}(x_1,\dots,x_{n+1}) \\ \mu+f(\{ i(x_1,x_2),\dots,i(x_n,x_{n+1})\}) & \text{si } P_{\pi_1}(x_1,\dots,x_{n+1}) \\ \mu\cdot 2+j & \text{si } P_{\pi'_j}(x_1,\dots,x_{n+1}), 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

(*) opérations ordinales

Remarquez que $\{i(x_1,x_2),\ldots,i(x_n,x_{n+1})\}\in[K]^n$ en vertu du lemme A.3 (a); donc g est bien définie.

Soit $Y \subseteq S$ un ensemble homogène pour g. Nous démontrons que $\bar{\bar{Y}} < \lambda+1$, ce qui entraîne la conclusion du Théorème A.2. Soit α_o la valeur de g sur l'ensemble $[Y]^{n+1}$.

1) Si $\alpha_o = \mu.2+j$, $0 \le j \le m-1$, alors $\bar{\bar{Y}} \le n+1 \le \lambda$.
Supposons $\bar{\bar{Y}} \ge n+2$, et soit $\{y_1,\ldots,y_{n+2}\}$ un sous-ensemble de Y de cardinalité $n+2$. Mettons $\pi = \pi_j^!$. Car $\pi \ne \pi_o$ et $\pi \ne \pi_1$ il existe ℓ, $2 \le \ell \le n-1$ tel que $\pi(\ell-1)$ et $\pi(\ell+1) < \pi(\ell)$, ou $\pi(\ell-1)$ et $\pi(\ell+1) > \pi(\ell)$.

Par l'homogénéité de Y, la propriété P_π est valable pour toute suite obtenue en enlevant un élément à $\{y_1,\ldots,y_{n+2}\}$. En enlevant y_{n+2} on a $P_\pi(y_1,\ldots,y_{n+1})$, ce qui donne $i(y_\ell,y_{\ell+1}) > i(y_{\ell+1},y_{\ell+2})$ et $> i(y_{\ell-1},y\ )$ dans le premier cas, et $<$ dans le second. En enlevant $y_{\ell-1}$ on a $P_\pi(y_1,\ldots,y_{\ell-2},y_\ell,y_{\ell+1},y_{\ell+2},\ldots,y_n,y_{n+1},y_{n+2})$; donc y_ℓ, $y_{\ell+1},\ldots$ deviennent les $\ell-1,\ell,\ldots$-ièmes termes, ce qui donne : $i(y_{\ell+1}y_{\ell+2}) > i(y_{\ell+2},y_{\ell+3})$ et $> i(y_\ell,y_{\ell+1})$ dans le premier cas, et $<$ dans le second. Ceci aboutit à une contradiction.

2) Soit $\alpha_o < \mu$.
Dans ce cas g est de la première forme et on a
(*) $P_{\pi_o}(y_1,\ldots,y_{n+1})$, i.e. $i(y_1,y_2) < \ldots < i(y_n,y_{n+1})$, pour tout $\{y_1,\ldots,y_{n+1}\}_<\in[Y]^{n+1}$.
Car $n \ge 2$, l'ensemble Y a la propriété requise dans l'hypothèse du Lemme A.3 (b). Donc $y \mapsto i(y,y')$ avec $y,y' \in Y$, $y < y'$ définit une application injective de domaine Y à valeurs ordinaux, où $Y' = Y$ si Y n'a pas de dernier élément et $Y' = Y - \{\text{dernier élément de } Y\}$ s'il y a.

Soit $Z = \{i(y,y') \mid y,y' \in Y \wedge y < y'\}$ l'image de Y' par cette application; donc $\bar{\bar{Z}} = \bar{\bar{Y}}' \ge \bar{\bar{Y}}-1$. Nous démontrons :
(**) Z est homogène pour f.

Un élément de $[Z]^n$ a la forme $\{i(y_1,y_1'),\ldots,i(y_n,y_n')\}$ avec $y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n' \in Y$ et $y_j < y_j'$ $(j = 1,\ldots,n)$. A un changement de notation près nous pouvons supposer que $y_1 < \ldots < y_n$. Par (b,i) du Lemme A.3 on a $i(y_j,y_{j+1}) = i(y_j,y_j')$, $j = 1,\ldots,n-1$, d'où, vu la forme de g :

$$\begin{aligned} f(\{i(y_1,y_1'),\ldots,i(y_n,y_n')\}) &= f(\{i(y_1,y_2),\ldots,i(y_{n-1},y_n),i(y_n,y_n')\}) = \\ &= g(\{y_1,\ldots,y_n,y_n'\}_<). \end{aligned}$$

Puisque g est constante sur Y, il suit que Z est homogène pour f. Donc, par hypothèse, $\bar{\bar{Z}} < \lambda$, d'où $\bar{\bar{Y}}-1 < \lambda$, i.e. $\bar{\bar{Y}} < \lambda+1$.

3) Soit $\mu \le \alpha_o < \mu.2$.
Dans ce cas y est de la seconde forme, et la preuve se fait comme dans le cas (2), en utilisant le Lemme A.3 (c).

AST

Abstract

Astérisque, tome 73 (1980), p. 155

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__73__155_0>

ABSTRACT

This volume consists of the write-ups of six sets of talks or "exposés" given in the seminar "Models of Peano Arithmetic" at Paris VII.

The first two exposés give a detailed account of the new incompleteness theorem of Kirby-Paris and of the Paris - Harrington formula. The latter is a generalization of the finite form of Ramsey's Theorem which is not provable in (first-order) Peano Arithmetic.

The second pair of exposés deal with the relation between the "new" incompleteness theorem and the "old" one and with extensions of the Paris-Harrington result to transfinite progressions of theories.

The third pair of exposés develop the Gaifman technology of types over models of Peano Arithmetic. An analysis is made of extensions of models and applied to obtain the Abramson-Harrington theorem on uncountable models with short sequences of order indiscernables.