

Astérisque

AST

Pages préliminaires

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__1_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Ce livre contient l'exposé de résultats de William Thurston en théorie des surfaces (feuilletages mesurés, compactification naturelle de l'espace de Teichmüller et classification des difféomorphismes). Notre démarche suit pour l'essentiel celle qui est indiquée dans le "research announcement" de Thurston, ainsi que dans les notes de ses cours de Princeton, écrites par M. Handel et W. Floyd.

Une partie de ce texte, notamment la classification des courbes et des feuilletages mesurés est une élaboration des exposés faits dans le Séminaire d'Orsay en 1976-1977. Mais nous n'avons pu fabriquer les textes démonstratifs pour le reste de la théorie que bien plus tard. Au printemps 1978, à Plans-sur-Bex, Thurston nous a expliqué comment regarder le projectifié de l'espace des feuilletages mesurés comme bord de l'espace de Teichmüller.

L'exposé 1 énonce les principaux résultats et renvoie pour la démonstration aux exposés ultérieurs 2 à 13. Les deux derniers exposés présentent des travaux légèrement marginaux par rapport au thème de la classification des difféomorphismes des surfaces. L'exposé 14 (exposés oraux de D. Fried et D. Sullivan) parle des 1-formes fermées non singulières sur les variétés de dimension 3, d'après Thurston, en particulier sur les fibrés sur S^1 dont le difféomorphisme de momodromie est pseudo-Anosov. L'exposé 15 (exposés oraux de A. Marin) parle de la présentation finie du "Mapping class group", d'après Hatcher et Thurston.

Le séminaire a été constitué aussi par des exposés de nature analytique (différentielles quadratiques holomorphes, applications quasi-conformes), faits par W. Abikoff, L. Bers et J. Hubbard. Finalement, les deux points de vue se sont révélés être plus indépendants l'un de l'autre qu'on ne le pensait au départ. Le point de vue analytique fait l'objet d'un texte séparé écrit par W. Abikoff.

Nous remercions tous les participants actifs de ce séminaire ; ils nous ont tous apporté une aide à des titres divers : A. Douady, qui, après le séminaire oral, nous a aidés à boucher les trous ; M. Shub, qui nous a parlé du point de vue ergodique ; D. Sullivan qui, en plus de maints conseils et encouragements, a tenté de nous faire comprendre qu'en itérant un difféomorphisme pseudo-Anosov l'image d'une courbe "finissait" par feuilleter la surface (il nous a fallu de longs mois pour comprendre ce "mixing").

Nous remercions enfin Madame B. Barbichon (dactylographie) et S. Berberi (dessins) pour le soin qu'ils ont apporté à la fabrication.

A. Fathi - F. Laudenbach - V. Poénaru

Pour la seconde édition :

Le "Research announcement" "*On the geometry and dynamics of difféomorphisms of surfaces*" de W. Thurston est enfin paru au Bulletin of Amer. Math. Soc. 19 (1988), 417-431. On peut y trouver une liste de références à des travaux postérieurs à la première édition de ce livre. Signalons aussi le livre de S. Bleiler and A. Casson "*Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*", Cambridge University Press, 1988.

Nous nous sommes bornés à quelques corrections que l'on trouvera rassemblées dans un errata en fin de volume.

Orsay, le 28 mai 1991

F L P

Table des matières

| | Page |
|---|------|
| Exposé 1 - Présentation de l'ensemble des théorèmes de Thurston sur les surfaces (V. Poénaru) | 5 |
| Exposé 2 - Quelques rappels sur les difféomorphismes des surfaces (V. Poénaru) | 21 |
| Exposé 3 - Rappels de géométrie hyperbolique en dimension 2 et généralités sur $i: \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{R}_+$ (V. Poénaru) | 33 |
| Exposé 4 - L'espace des courbes simples fermées sur une surface (V. Poénaru) | 57 |
| Appendice - Double décomposition d'une surface en pantalons (A. Fathi) | 68 |
| Exposé 5 - Les feuilletages mesurés (A. Fathi et F. Laudenbach) | 71 |
| Appendice - Spines des variétés de dimension 2 (V. Poénaru) | 90 |
| Exposé 6 - Les feuilletages mesurés, suite (A. Fathi) | 93 |
| Appendice - Formules explicites sur les feuilletages mesurés (A. Fathi) | 120 |
| Exposé 7 - L'espace de Teichmüller (A. Douady) | 127 |
| Exposé 8 - Comment Thurston compactifie l'espace de Teichmüller (A. Fathi et F. Laudenbach) | 139 |
| Appendice - Estimations de distances hyperboliques (A. Fathi) | 151 |
| Exposé 9 - Classification des difféomorphismes des surfaces (V. Poénaru) | 159 |
| Exposé 10 - Some dynamics of pseudo-Anosov diffeomorphisms (A. Fathi et M. Shub) | 181 |
| Exposé 11 - La théorie de Thurston sur les surfaces à bord (F. Laudenbach) ... | 209 |
| Exposé 12 - Théorèmes d'unicité des difféomorphismes pseudo-Anosov (A. Fathi et V. Poénaru) | 225 |
| Exposé 13 - Construction de difféomorphismes pseudo-Anosov (F. Laudenbach) | 243 |
| Exposé 14 - Fibrations over S^1 with pseudo-Anosov monodromy (D. Fried) | 251 |
| Exposé 15 - Présentation du groupe de difféotopies d'une surface compacte orientable (F. Laudenbach) | 267 |
| Abstract | 283 |
| Errata | 285 |

Astérisque

V. POÉNARU

**Présentation d'ensemble des théorèmes de
Thurston sur les surfaces**

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 5-20

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__5_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EXPOSÉ 1

PRÉSENTATION D'ENSEMBLE

DES THÉORÈMES DE THURSTON SUR LES SURFACES

par V. POÉNARU

- § I. - Introduction
- § II. - L'espace des courbes
- § III. - Feuilletages mesurés.
- § IV. - Espace de Teichmüller
- § V. - Difféomorphismes pseudo-Anosov
- § VI. - Le cas du tore T^2

§ I. - INTRODUCTION

La théorie de Thurston ([1], voir aussi [2], [3]) s'occupe des trois questions suivantes :

- I. Décrire "toutes" les courbes fermées sans point double (non nécessairement connexes) sur une surface, à isotopie près.
- II. Décrire "tous" les difféomorphismes d'une surface, à isotopie près.
- III. Mettre un bord naturel (pour l'action des difféomorphismes) à l'espace de Teichmüller.

Pour une surface fermée, il existe toujours une métrique riemannienne à courbure constante [4]. Le tableau ci-dessous résume la situation en mettant en parallèle des propriétés géométriques et des propriétés topologiques.

| Surface | K (courbure) | χ (caractéristique d'Euler) | Remarques |
|----------------------|------------------------------------|----------------------------------|---|
| $S^2, \mathbb{R}P^2$ | $K = +1$ géométrie elliptique | $\chi > 0$ | π_1 fini $\pi_2 \neq 0$ |
| T^2, K^2 (Klein) | $K = 0$ géométrie euclidienne | $\chi = 0$ | ce sont des $K(\pi, 1)$ et le revêtement universel est \mathbb{R}^2 |
| genre > 1 | $K = -1$ géométrie hyperbolique | $\chi < 0$ | |

Bien que les théorèmes de Thurston s'énoncent pour toutes les surfaces compactes, nous nous limiterons dans la suite aux surfaces orientables (fermées ou à bord non vide).

§ II. - L'ESPACE \mathcal{J}

Soit M une surface orientable compacte connexe. On note $\mathcal{J}(M) = \mathcal{J}$ l'ensemble des classes d'isotopie de courbes simples, fermées, connexes de M qui ne sont ni homotopes à zéro, ni homotopes à une composante du bord.

Remarques. 1) Les éléments de \mathcal{J} ne sont pas orientés.

2) Comme deux courbes simples fermées homotopes sont aussi isotopes [5], on peut remplacer, dans cette définition, "classe d'isotopie" par "classe d'homotopie".

On considère l'application symétrique :

$$i : \mathcal{J} \times \mathcal{J} \longrightarrow \mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$$

définie de la façon suivante : $i(\alpha, \beta)$ est le nombre minimum de points d'intersection d'un représentant de α avec un représentant de β . Il s'agit d'intersection géométrique et non algébrique.

Exemple. Sur le tore T^2 , on choisit deux "générateurs" orientés x et y ; ainsi

tout élément de \mathcal{J} peut être représenté par $\gamma(a,b) = ax + by$, où $a, b \in \mathbf{Z}$ et $(a,b) = 1$; dans \mathcal{J} , on a $\gamma(a,b) = \gamma(-a,-b)$. La formule suivante est facile à vérifier :

$$i(\gamma(a,b), \gamma(c,d)) = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| .$$

Lemme. 1° Si $\alpha \in \mathcal{J}$, il existe $\beta \in \mathcal{J}$ tel que $i(\alpha, \beta) \neq 0$.

2° Si $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathcal{J}$, il existe $\beta \in \mathcal{J}$ tel que $i(\alpha_1, \beta) = 0 \neq i(\alpha_2, \beta)$.

La preuve est donnée dans l'exposé 3.

L'espace fonctionnel. On va considérer l'ensemble $\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}}$ des applications quelconques de \mathcal{J} dans les réels positifs ou nuls. On le munit de la topologie faible. La multiplication naturelle par les réels positifs définit des rayons dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}}$; l'espace projectif, ensemble des rayons, noté $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}})$, est muni de la topologie quotient. On a des applications naturelles :

$$\mathcal{J} \xrightarrow{i_*} \mathbb{R}_+^{\mathcal{J}} - 0 \xrightarrow{\pi} P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}}) ,$$

où i_* est défini par $i_*(\alpha)(\beta) = i(\alpha, \beta)$. Le 1° du lemme dit que $i_*(\mathcal{J})$ ne contient pas 0 et le 2° assure l'injectivité de πi_* .

On considère le complété de \mathcal{J} , noté $\overline{\mathcal{J}}$, qui est l'adhérence de $\pi i_*(\mathcal{J})$ dans $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}})$. Les éléments de $\overline{\mathcal{J}}$ sont représentés par des suites $\{(t_n, \alpha_n)\}$, $t_n > 0$, $\alpha_n \in \mathcal{J}$, telles que, pour tout $\beta \in \mathcal{J}$, la suite numérique $t_n i(\alpha_n, \beta)$ converge.

Ainsi, en tant que partie de $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}})$, l'ensemble $\overline{\mathcal{J}}$ est muni d'une topologie non-triviale. En termes heuristiques, on donne un sens à la notion "deux courbes γ et γ' sont proches l'une de l'autre". Cette "proximité" n'a rien à voir avec les classes d'homotopie respective, mais avec le fait qu'à un multiple près, dans chaque région de la surface, γ et γ' sont formées à peu près du même nombre d'arcs, allant à peu près dans les mêmes directions. Tout ceci sera précisé dans l'exposé 4.

Pour les besoins de la cause, on introduit aussi l'espace \mathcal{J}' formé des classes d'isotopie de courbes simples fermées de M , non nécessairement connexes, dont chaque composante "appartient" à \mathcal{J} ; mais, deux composantes distinctes de la même courbe ont le droit d'être isotopes entre elles, ce qui permet de considérer une multiplication scalaire : pour n entier > 0 et $\gamma \in \mathcal{J}'$, $n\gamma$ est représenté par n courbes parallèles. Comme avant, on définit $i : \mathcal{J}' \times \mathcal{J}' \rightarrow \mathbf{Z}_+$ et on a un diagramme :

$$\mathcal{L}^1 \xrightarrow{i_*} \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} - 0 \quad \pi \quad P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}) .$$

Evidemment i_* respecte la multiplication par les scalaires ; donc πi_* n'injecte pas \mathcal{L}^1 . Mais on prouve facilement que $\pi i_*(\mathcal{L}^1)$ admet $\overline{\mathcal{L}}$ comme adhérence (voir exp. 4). Dans la suite, on notera aussi $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{L}$ le cône sur $i_*(\mathcal{L})$ dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$.

Théorème 1. Si M est une surface fermée orientable de genre $g > 1$, alors $\overline{\mathcal{L}}$ est homéomorphe à S^{6g-7} (ceci sera prouvé dans l'exposé 4).

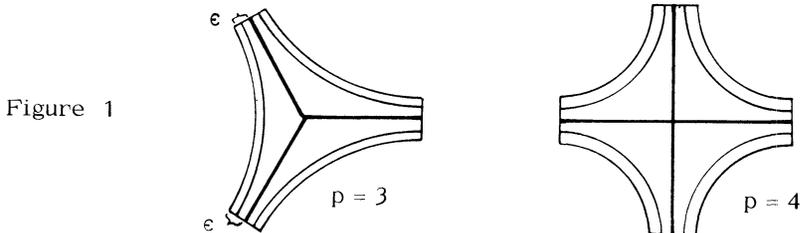
Notons $M_{g,b}^2 = \#_g(S^1 \times S^1) - (\cup_b D^2)$; si $\chi(M_{g,b}^2) < 0$, alors $\overline{\mathcal{L}(M_{g,b}^2)}$ est homéomorphe à $S^{6g+2b-7}$ (voir l'exposé 11). Enfin, $\overline{\mathcal{L}(T^2)} \cong S^1$, $\overline{\mathcal{L}(D^2)} = \overline{\mathcal{L}(S^2)} = \overline{\mathcal{L}(S^1 \times [0, 1])} = \emptyset$.

§ III. - FEUILLETAGES MESURÉS

Pour simplifier M sera fermée. Un feuilletage mesuré sur M est un feuilletage \mathfrak{F} avec des singularités (du type qu'a une différentielle quadratique holomorphe $z^{p-2} dz^2$, $p = 3, \dots$), muni d'une mesure transverse invariante par l'holonomie. Au voisinage d'un point non singulier, on a une carte locale $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_{x,y}^2$ telle que $\varphi^{-1}(y = \text{const.})$ soient les feuilles de $\mathfrak{F}|U$. Si $U_i \cap U_j$ est non vide, on a des fonctions de transition φ_{ij} de la forme $\varphi_{ij}(x,y) = (h_{ij}(x,y), c_{ij} \pm y)$, où c_{ij} est constant. Dans les cartes, la mesure transverse est $|dy|$.

Remarque. Les feuilletages qui admettent des fonctions de transition de la forme $(f(x,y), c+y)$ sont ceux qui sont définis par une 1-forme fermée ω ; en dehors des singularités, y est une primitive locale de ω .

Les singularités de \mathfrak{F} sont des p -selles, $p \geq 3$, comme dans la figure 1.

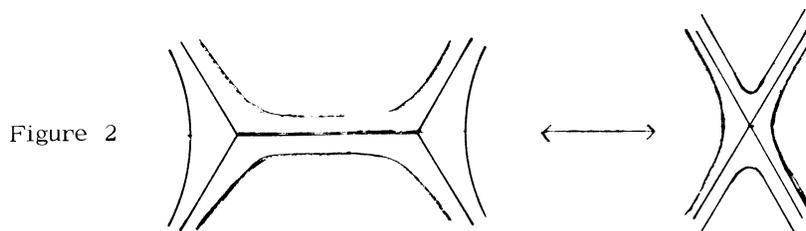


Si γ est une courbe simple fermée de M , on note $\int_{\gamma} \mathfrak{F}$ la variation totale

de la coordonnée y de $p \in \gamma$ quand p parcourt γ . Pour $\alpha \in \mathcal{J}$, on définit

$$I(\mathfrak{F}, \alpha) = \inf_{\gamma \in \alpha} \int_{\gamma} \mathfrak{F} .$$

On dira que \mathfrak{F}_1 et \mathfrak{F}_2 sont équivalents au sens de Whitehead si l'on peut passer de l'un à l'autre par des isotopies et des déformations élémentaires du type suggéré par la figure 2 .



[Observer que ces déformations permettent le transport de la mesure transverse].
On note $\mathfrak{m}\mathfrak{F}$ l'ensemble des classes d'équivalence. On définit

$$I_{*} : \mathfrak{m}\mathfrak{F} \longrightarrow \mathbb{R}_{+}^{\mathcal{J}}$$

par $I_{*}(\mathfrak{F})(\alpha) = I(\mathfrak{F}, \alpha)$.

On dit que \mathfrak{F}_1 et \mathfrak{F}_2 sont m-équivalents (ou équivalents au sens de Schwartz) si $I_{*}(\mathfrak{F}_1) = I_{*}(\mathfrak{F}_2)$. L'équivalence à la Schwartz est une conséquence immédiate de l'équivalence à la Whitehead.

Théorème 2. L'application I_{*} injecte $\mathfrak{m}\mathfrak{F}$ dans $\mathbb{R}_{+}^{\mathcal{J}}$; $I_{*}(\mathfrak{m}\mathfrak{F}) \cup 0 = \overline{\mathbb{R}_{+} \times \mathcal{J}}$ et , si $g > 1$, cet ensemble est homéomorphe à \mathbb{R}^{6g-6} .

En particulier, l'équivalence à la Schwartz est la même chose que l'équivalence à la Whitehead.

La démonstration du théorème occupe les exposés 5 et 6 . D'autre part, puisque $I_{*}(\mathfrak{m}\mathfrak{F})$ évite 0 , le théorème dit que, dans $P(\mathbb{R}_{+}^{\mathcal{J}})$, on a $\overline{\mathcal{J}} = \pi I_{*}(\mathfrak{m}\mathfrak{F})$. Ceci donne une représentation géométrique agréable des fonctionnelles qui sont dans $\overline{\mathbb{R}_{+} \times \mathcal{J}}$.

§ IV. - ESPACE DE TEICHMÜLLER

On va considérer une surface M , avec $\chi(M) < 0$. Considérons l'espace \mathfrak{M} des métriques sur M de courbure constante $K = -1$, telles que chaque composante

du bord soit une géodésique. Soit $\text{Diff}^0(M)$ le groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité, muni de la topologie C^∞ ; comme on le verra plus tard, il agit librement continûment sur \mathcal{H} . L'espace des orbites de cette action, équipé de la topologie quotient sera pour nous l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(M) = \mathcal{T}$. Si M est orientée, il y a d'autres définitions utilisant les structures complexes de M , l'équivalence des définitions repose sur le théorème d'uniformisation [6] .

Remarques. Considérons un exemplaire fixe de M ainsi qu'un autre exemplaire $X = X_\rho$ muni d'une métrique hyperbolique ρ . Si $\varphi : M \rightarrow X$ est un difféomorphisme, le couple (X, φ) est appelé une "surface de Teichmüller".

Deux surfaces de Teichmüller (X, φ) , (X', φ') sont dites équivalentes s'il existe une isométrie $X \xrightarrow{f} X'$ telle que φ et $f \circ \varphi'$ soient isotopes.

Il est facile d'identifier les points de \mathcal{T} avec les classes d'équivalence des surfaces de Teichmüller.

On remarquera aussi que deux difféomorphismes de M sont homotopes si et seulement si ils sont isotopes [5] .

Si M est fermée, de genre $g > 1$, un théorème classique de la théorie de Teichmüller affirme :

$$\mathcal{T} M \cong \mathbb{R}^{6g-6} .$$

Ce résultat, dû à Fricke et Klein, sera redémontré dans l'exposé 7.

On a aussi :

$$\mathcal{T}(M_{g,b}^2) \cong \mathbb{R}^{6g-6+2b} .$$

Pour tout $\theta \in \mathcal{T}$ et $\alpha \in \mathcal{L}$, on définit :

$$\ell(\theta, \alpha) = \inf_{\gamma \in \alpha} (\theta(\gamma)) ,$$

où $\theta(\gamma)$ désigne la longueur de γ calculée avec la métrique prescrite à isotopie près sur M . La métrique étant fixée, le \inf est d'ailleurs atteint par une unique géodésique. De la formule précédente, on déduit une application :

$$\ell_* : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} ;$$

on voit facilement que son image évite $I_* (\mathbb{N} \mathcal{T}) \cup 0$. Le groupe $\pi_0(\text{Diff } M)$ agit sur l'espace de Teichmüller ainsi que sur \mathcal{L} , donc sur $\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$; l'application ℓ_* est clairement équivariante.

Dans l'exposé 7, on prouvera le théorème suivant.

Théorème 3. L'application ℓ_* est un homéomorphisme sur son image.

On peut ainsi mettre une topologie naturelle sur $\mathfrak{F} \cup \overline{\mathfrak{F}}$; grâce à ce qui précède, on considère l'espace topologique $\ell_*(\mathfrak{F}) \cup I_*(\mathfrak{m}\mathfrak{F})$, on identifie à un point chaque rayon de $I_*(\mathfrak{m}\mathfrak{F})$ et on prend la topologie quotient.

Dans l'exposé 8 (pour le cas sans bord), on prouvera le théorème suivant.

Théorème 4. 1) L'espace topologique $\mathfrak{F} \cup \overline{\mathfrak{F}}$ est homéomorphe à D^{6g-6} , si M est fermée de genre > 1 ; il est homéomorphe à $D^{6g-6+2b}$ si M , de caractéristique d'Euler < 0 , possède b composantes de bord.

2) L'application canonique $\mathfrak{F} \cup \overline{\mathfrak{F}}$ dans $P(\mathbb{R}_+^d)$ est un plongement.

L'espace $\mathfrak{F} \cup \overline{\mathfrak{F}}$ qu'on notera $\overline{\mathfrak{F}}$ est la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller. Il résulte tout de suite de la définition que pour chaque difféomorphisme φ de M , l'action naturelle de φ sur $\overline{\mathfrak{F}}$ est continue.

Si φ est un difféomorphisme de M , $[\varphi]$ désignera l'homéomorphisme induit sur $\overline{\mathfrak{F}}$; d'après Brouwer, $[\varphi]$ a un point fixe.

(i) Si $[\varphi]$ a un point fixe dans \mathfrak{F} , φ est isotope à une isométrie φ' d'une métrique hyperbolique; en particulier, φ' est périodique.

(ii) Si $[\varphi]$ laisse fixe un point de $\overline{\mathfrak{F}}$, il existe un feuilletage \mathfrak{F} tel que $\varphi(\mathfrak{F})$ soit Whitehead-équivalent à $\lambda\mathfrak{F}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, où $\lambda\mathfrak{F}$ possède le même feuilletage sous-jacent que \mathfrak{F} , avec pour métrique transverse le produit de celle de \mathfrak{F} par λ .

Cette petite analyse peut être précisée comme suit.

§ V. - DIFFÉOMORPHISMES PSEUDO-ANOSOV

Je commence par un exemple très élémentaire. Soit $\varphi \in \text{Diff}_+(T^2)$. A isotopie près, φ est dans $SL_2(\mathbb{Z})$. Il y a trois choses possibles en ce qui concerne les valeurs propres λ_1 et λ_2 de φ .

a) ou bien, λ_1 et λ_2 sont complexes ($\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$). Dans ce cas, φ est d'ordre fini.

b) ou bien $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (resp. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$). A un changement de coordonnées près, $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est "un twist de Dehn" [resp. $\varphi = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$]; dans les deux cas, φ laisse une courbe simple invariante.

c) ou bien λ_1 et λ_2 sont irrationnelles distinctes. Alors φ est un difféomorphisme d'Anosov [7], [8].

Cette analyse est généralisée par Thurston au cas des surfaces compactes quelconques.

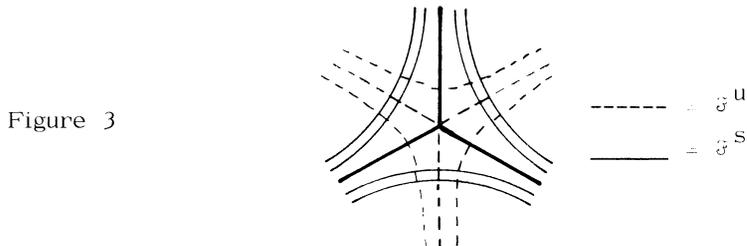
Théorème 5. Tout difféomorphisme φ de M est isotope à φ' qui satisfait à l'une des trois conditions suivantes :

- (i) φ' fixe un élément de \mathcal{F} et est d'ordre fini ;
- (ii) φ' est "réductible" dans le sens qu'il préserve une courbe simple (représentant un élément de \mathcal{H}') ; dans ce cas, on poursuit l'analyse de φ' en coupant M le long de cette courbe ;
- (iii) Il existe $\lambda > 1$ et deux feuilletages mesurés transverses \mathfrak{F}^S et \mathfrak{F}^U tels que :

$$\varphi'(\mathfrak{F}^S) = \frac{1}{\lambda} \mathfrak{F}^S, \quad \varphi'(\mathfrak{F}^U) = \lambda \mathfrak{F}^U ;$$

ces égalités indiquent l'égalité des feuilletages sous-jacents.

A part des choses évidentes, dire que \mathfrak{F}^S et \mathfrak{F}^U sont transverses, c'est dire que leurs singularités sont les mêmes et qu'au voisinage des singularités la configuration est analogue à celle de la figure 3. Un difféomorphisme satisfaisant à (iii) est appelé pseudo-Anosov.



Le théorème 5 est prouvé dans l'exposé 9. Pour que ce théorème nous permette une induction efficace, on aura besoin d'étendre la théorie au cas à bord. Ceci est réalisé dans l'exposé 11.

Dans l'exposé 12, on montrera que, pour un pseudo-Anosov φ , \mathfrak{T}^u et \mathfrak{T}^s représentent les seuls points fixes de $[\varphi]$ dans \mathfrak{T} et que deux pseudo-Anosov homotopes sont conjugués par un difféomorphisme isotope à l'identité.

La clé de ces théorèmes est la propriété suivante de "mixing" que possède un pseudo-Anosov φ : pour tout $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i(\varphi^n \alpha, \beta)}{\lambda^n} = I(\mathfrak{T}^s, \alpha) I(\mathfrak{T}^u, \beta) .$$

Propriété spectrale des difféomorphismes pseudo-Anosov.

Pour $\theta \in \mathfrak{T}$ et $\alpha \in \mathfrak{A}$, on a défini au § IV, le nombre positif $\ell(\theta, \alpha)$. Les difféomorphismes ont des valeurs propres dans le sens suivant.

Théorème 6. Soit $\varphi \in \text{Diff } M^2$. Il existe une famille finie d'entiers algébriques $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 1$, tels que, pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$, il existe λ_j vérifiant : pour tout $\theta \in \mathfrak{T}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell(\theta, \varphi^n \alpha)^{1/n} = \lambda_j$. De plus, φ est pseudo-Anosov si et seulement si $k = 1$ et $\lambda_1 > 1$; dans ce cas $\lambda_1 = \lambda$. (Voir exposés 9 et 11).

Entropie. Pour un espace métrique compact X et une transformation continue $f : X \rightarrow X$, on peut définir l'entropie topologique $h(f)$ (voir exposé 10). Si φ est un difféomorphisme pseudo-Anosov, on prouve que $h(\varphi) = \log \lambda$. De plus, φ possède une mesure invariante évidente et $h(\varphi)$ est son entropie métrique [9].

Théorème 7. Un difféomorphisme pseudo-Anosov minimise l'entropie topologique dans sa classe d'isotopie.

La liste des résultats de Thurston est beaucoup plus longue, mais on arrête ici cette présentation d'ensemble pour entrer dans le vif du sujet.

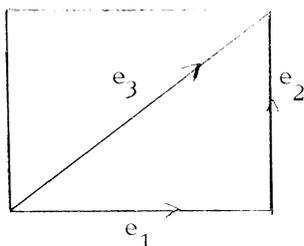
§ VI. - LE CAS DU TORE T^2

Ce cas est particulièrement simple et se traite à part.

Dans le tore T^2 , je considère les trois éléments $e_1, e_2, e_3 \in \mathfrak{A}(T^2)$ de la figure 4, provisoirement orientés.

Disons que x_1 et x_2 sont les générateurs canoniques e_1 et e_2 munis des orientations ci-dessous.

Figure 4
Le tore T^2



Si γ est une courbe simple orientée, $\gamma = mx_1 + nx_2$, on trouve :

$$i(e_1, \gamma) = |n|, \quad i(e_2, \gamma) = |m|, \quad i(e_3, \gamma) = |n - m|.$$

Ces trois nombres déterminent γ dans \mathcal{J} , mais les deux premiers ne suffisent pas. Ils forment un "triangle dégénéré" dans le sens que l'un d'entre eux est égal à la somme des deux autres.

Je vais considérer maintenant le simplexe standard muni de coordonnées barycentriques X_1, X_2, X_3 ($X_i \geq 0, \sum X_i = 1$). Il se décompose dans les quatre régions indiquées sur la figure 5.

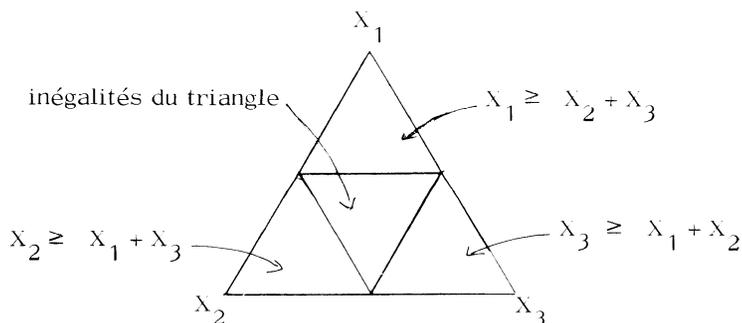


Figure 5

On va noter $(\leq \nabla)$ le domaine où les inégalités (larges) du triangle sont vérifiées ; le bord $\partial(\leq \nabla)$ correspond aux triangles dégénérés. Le simplexe standard étant regardé dans \mathbb{R}_+^3 , par $\text{cône}(\partial(\leq \nabla))$, on entendra le cône en demi-droites de centre 0 s'appuyant sur $\partial(\leq \nabla)$.

A chaque $\gamma \in \mathcal{J}$, on associe les nombres $X_j = \frac{i(e_j, \gamma)}{\sum_j i(e_j, \gamma)}$, $j = 1, 2, 3$; un

calcul simple montre que l'on peut identifier par là \mathcal{J} à l'ensemble des points rationnels de $\partial(\leq \nabla)$.

Lemme A. Soit $\beta \in \mathcal{J}$. Il existe une fonction

$$\Phi_\beta : \text{cône}(\partial(\leq \nabla)) \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

continue, homogène de degré 1 (pour la multiplication par les scalaires positifs) telle que, pour tout $\alpha \in \mathcal{J}$, on ait :

$$i(\alpha, \beta) = \Phi_\beta (i(\alpha, e_1), i(\alpha, e_2), i(\alpha, e_3)) .$$

Preuve. On peut donner une construction explicite comme suit. Disons que β est représenté par $mx_1 + nx_2$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $(m, n) = 1$. (Cette représentation comporte la seule ambiguïté que $-mx_1 - nx_2$ correspond aussi à β .) Sur la surface du cône $X_3 = X_1 + X_2$, on posera :

$$\Phi_\beta (X_1, X_2, X_3) = \left| \det \begin{pmatrix} X_2 & -X_1 \\ m & n \end{pmatrix} \right| .$$

Sur les deux autres faces, on posera :

$$\Phi_\beta (X_1, X_2, X_3) = \left| \det \begin{pmatrix} X_2 & X_1 \\ m & n \end{pmatrix} \right| .$$

A l'intersection des faces, ces formules se recollent et Φ_β a les propriétés voulues. \square

Remarque. Φ_β est linéaire par morceaux, propriété qu'on retrouvera pour les autres "formules explicites" de la théorie.

Considérons maintenant une suite (λ_n, α_n) avec $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_n \in \mathcal{J}$ telle que, pour tout $\beta \in \mathcal{J}$, la suite $\lambda_n i(\alpha_n, \beta)$ converge. Notons $\lim (\lambda_n, \alpha_n)$ la fonctionnelle

$$\lim (\lambda_n, \alpha_n) (\beta) = \lim \lambda_n i(\alpha_n, \beta) .$$

Puisque Φ_β est homogène, on a :

$$\lim (\lambda_n, \alpha_n) (\beta) = \Phi_\beta (\lim (\lambda_n, \alpha_n) (e_1), \lim (\lambda_n, \alpha_n) (e_2), \lim (\lambda_n, \alpha_n) (e_3)) .$$

Ceci implique que la bijection de $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{J}$, regardée dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}}$, sur les rayons rationnels de cône $\partial(\leq \nabla)$ se prolonge en un homéomorphisme homogène :

$$\overline{\mathbb{R}_+ \times \mathcal{J}} \cong \text{cône } \partial(\leq \nabla) \cong \mathbb{R}^2 .$$

Ainsi, dans $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}})$, on obtient $\overline{\mathcal{J}} \cong S^1$.

Considérons maintenant un feuilletage mesuré \mathfrak{F} de T^2 . On peut prouver que \mathfrak{F} n'a pas de singularités et qu'il est transversalement orientable (ceci résultera d'une formule simple du type Euler-Poincaré) ; comme feuilletage mesuré, il s'identifie alors à une 1-forme fermée non singulière. Celle-ci est isotope à une unique forme linéaire (= 1-forme à coefficients constants dans les coordonnées canoniques

de T^2) [10]. Si ω est linéaire, chaque courbe $\gamma = mx_1 + nx_2$ est ou bien transversale à ω , ou bien contenue dans une feuille : donc, $\int_\gamma \omega = I(\omega, \gamma)$: ω est déterminé au signe près par $I(\omega, e_1), I(\omega, e_2), I(\omega, e_3)$. Le lemme B est alors clair.

Lemme B. Soit \mathfrak{F} un feuilletage mesuré de T^2 . Alors :

1° $I(\mathfrak{F}, e_1), I(\mathfrak{F}, e_2), I(\mathfrak{F}, e_3)$ forment un triangle dégénéré.

2° Si $\beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$I(\mathfrak{F}, \beta) = \Phi_\beta (I(\mathfrak{F}, e_1), I(\mathfrak{F}, e_2), I(\mathfrak{F}, e_3))$$

où Φ_β est la fonction du lemme A.

Le premier point se lit sur les figures suivantes :

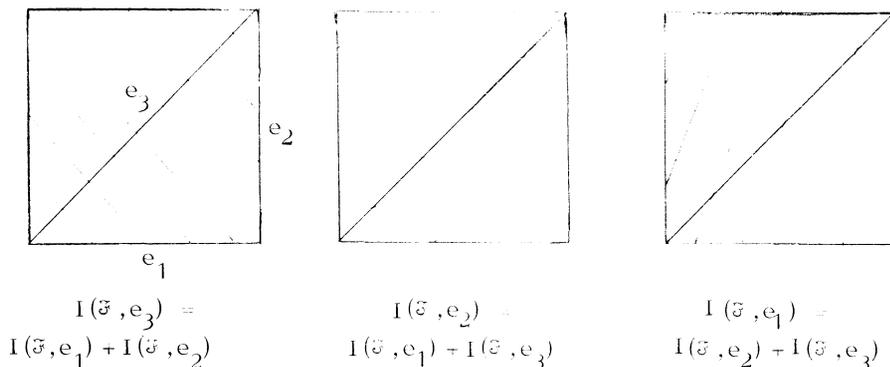


Figure 6

Par conséquent dans $P(\mathbb{R}_+^3)$, on a : $\pi I_\times(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}) = \bar{\mathfrak{F}}$.

Au paragraphe IV, on a défini l'espace de Teichmüller dans le contexte $\chi < 0$. Pour T^2 , on peut donner une définition analogue en considérant les plates ($K = 0$) telles que $\text{Aire } T^2 = 1$. [Cette condition de normalisation est inutile dans le cas hyperbolique, où la forme d'un objet détermine déjà son volume.]

Remarque 1. Au lieu de cette normalisation, on pourrait travailler avec des métriques plates à un scalaire > 0 près.

D'autre part, si T^2 est muni d'une structure complexe, son revêtement universel \tilde{T}^2 est isomorphe à \mathbb{C} et le groupe des automorphismes de \mathbb{C} , $z \mapsto \alpha z + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, coïncide avec le groupe des transformations directes de \mathbb{R}^2 préservant la

métrique euclidienne à un scalaire près. A partir de là, on déduit facilement l'équivalence de notre définition de \mathfrak{T} avec la définition traditionnelle : "l'ensemble des structures complexes marquées sur T^2 , à isotopie près".

Remarque 2. Une structure plate sur T^2 possède une structure affine sous-jacente. Si l'on fixe deux générateurs de $\pi_1(T^2)$, e_1, e_2 , la structure affine sous-jacente à la métrique ρ est déterminée de la manière suivante : la donnée de toutes les géodésiques de la classe e_1 , qui sont des courbes fermées parallèles, ainsi que des nombres $\text{dist}(\Delta, \Delta') / \text{dist}(\Delta', \Delta'') \in \mathbb{R}_+$ correspondant à trois géodésiques du système e_1 . Il est facile de voir que toutes ces structures affines de T^2 sont isotopes entre elles. Ainsi, on pourra toujours représenter un élément de \mathfrak{T} par une métrique plate ρ dont la structure affine sous-jacente est la structure canonique (ce choix sera toujours fait dans la suite) ; autrement dit, les droites usuelles sont les géodésiques de ρ .

A $\rho \in \mathfrak{T}$, on peut associer (X_1, X_2, X_3) , $X_j = \frac{\rho(e_j)}{\sum_k \rho(e_k)}$, où $\rho(e_j)$ est la longueur de la géodésique e_j dans la métrique ρ .

Lemme C. L'application ci-dessus est un homéomorphisme $\mathfrak{T} \rightarrow \text{int}(\leq \nabla)$.

Preuve. Il est clair que (X_1, X_2, X_3) vérifient les inégalités du triangle. Soit Δ un triangle dans \mathbb{R}^2 ; chaque fois qu'on assigne à ses côtés trois longueurs vérifiant les inégalités du triangle, on détermine sur \mathbb{R}^2 une unique métrique plate compatible avec la structure affine ; elle est invariante par le groupe des translations, donc induit une métrique sur T^2 . Ceci prouve la surjectivité ; pour l'injectivité, on remarque que deux métriques plates, de structures affines standard, ayant les mêmes longueurs des côtés de Δ sont identiques. La topologie est laissée au soin du lecteur. \square

Autrement dit, la composée :

$$\mathfrak{T} \xrightarrow{\ell_*} \mathbb{R}_+^{\mathcal{J}} \xrightarrow{\text{proj.}} \mathbb{R}_+^{(e_1, e_2, e_3)}$$

est un homéomorphisme de \mathfrak{T} sur son image. Pour voir que ℓ_* est un homéomorphisme sur son image, il faut remarquer que la longueur d'un segment linéaire donné dépend continûment des longueurs assignées à e_1, e_2, e_3 (trigonométrie classique !).

On a :

$$\ell_*(\mathfrak{T}) \cap I_*(\mathfrak{M}) = \emptyset.$$

En effet, si ω est une forme différentielle, il existe une suite γ_n de courbes simples fermées telles que $\int_{\gamma_n} \omega \rightarrow 0$; si α_n désigne la classe de γ_n dans \mathcal{J} , on a

$I_*(\omega)(\alpha_n) \rightarrow 0$, alors que pour une métrique donnée les longueurs des géodésiques fermées n'approchent pas de 0.

Pour démontrer l'analogie du théorème 4 pour le tore T^2 , il ne reste qu'à prouver le lemme suivant.

Lemme D. Soient ρ_n une suite de métriques plates normalisées (de la structure affine canonique), λ_n une suite de réels positifs et ω une forme linéaire. On suppose que, pour $j = 1, 2, 3$,

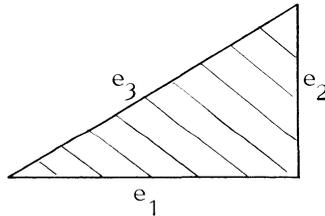
$$\lambda_n \rho_n(e_j) \rightarrow \left| \int_{e_j} \omega \right|.$$

Alors, pour toute géodésique fermée α ,

$$\lambda_n \rho_n(\alpha) \rightarrow \left| \int_{\alpha} \omega \right|.$$

Preuve. On note ρ'_n la métrique $\lambda_n \rho_n$. Traitons le cas où ω est sur la face $X_3 = X_1 + X_2$ du cône $\partial(\leq \nabla)$ (figure 7) et $\int_{e_i} \omega \neq 0$ pour $i = 1, 2$.

Figure 7



Orientons e_j , $j = 1, 2, 3$, de sorte que $\int_{e_j} \omega \geq 0$. Soit alors θ_n la mesure de l'angle (e_1, e_2) dans la métrique ρ'_n .

On a :

$$[\rho'_n(e_3)]^2 = [\rho'_n(e_1)]^2 + [\rho'_n(e_2)]^2 + 2 \rho'_n(e_1) \rho'_n(e_2) \cos \theta_n.$$

L'hypothèse implique donc que $\cos \theta_n$ tend vers 1. Si α est un segment linéaire, $\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$$[\rho'_n(\alpha)]^2 = a_1^2 [\rho'_n(e_1)]^2 + a_2^2 [\rho'_n(e_2)]^2 + 2 a_1 a_2 \rho'_n(e_1) \rho'_n(e_2) \cos \theta_n.$$

Donc :

$$[\rho'_n(\alpha)]^2 \rightarrow \left[a_1 \int_{e_1} \omega + a_2 \int_{e_2} \omega \right]^2 = \left[\int_{\alpha} \omega \right]^2. \quad \square$$

Pour T^2 , l'analyse du théorème 5 est triviale. Quant au théorème 6 dans le cas du tore, il se réduit à la propriété spectrale bien connue des applications linéaires.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. THURSTON, On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces I, (à paraître).
- [2] W. THURSTON, The geometry and topology of 3-manifolds, Princeton lecture notes.
- [3] V. POÉNARU, Travaux de Thurston sur les difféomorphismes des surfaces et l'espace de Teichmüller, Séminaire Bourbaki, exposé 529, nov. 1978.
- [4] K.F. GAUSS, Disquisitiones generales circa superficies curvas (1827) [voir Astérisque 62 (1979)] .
- [5] D. EPSTEIN, Curves on 2-manifolds and isotopies, Acta Math. 115 (1966), p. 83-107.
- [6] H. WEYL, Die Idee der Riemannscher Fläche (4e édition), Teubner, Leipzig, 1955.

une référence plus moderne est
G. SPRINGER, Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1966.
- [7] D.V. ANOSOV, Geodesic flows on compact riemannian manifolds of negative curvature, Proc. Steklov Math. Inst. 90 (1967), AMS, 1969.
- [8] S. SMALE, Differentiable dynamical systems, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), p. 747-817.
- [9] Y.G. SINAI, Introduction to ergodic theory, Math. notes, Princeton University Press, 1976.
- [10] S. STERNBERG, Celestial mechanics, part II, Benjamin, 1969.

Les textes suivants sont aussi reliés au sujet traité.

EXPOSÉ 1

- R. FRICKE - F. KLEIN, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, T. 2, Johnson reprint, 1965.
- W.J. HARVEY (edited by) , Discrete groups and automorphic functions, Acad. Press, 1977.
- J. NIELSEN, Abbildungsklassen endlicher Ordnung, Acta Math. 75 (1943), p. 23-115.
- W. FENCHEL - J. NIELSEN, livre à paraître.
- L. BERS, An extremal problem for quasi-conformal mappings and a theorem by Thurston, Acta Math. 141 (1978), p. 73-98.
- W. ABIKOFF, Topics in the real analytic theory of Teichmüller space (à paraître).
- D. SULLIVAN, Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds, Inv. Math. 26 (1976), p. 225-255.
- D. RUELLE - D. SULLIVAN, Currents, flows and diffeomorphisms, Topology 14 (1975), p. 319-327.

Astérisque

V. POÉNARU

Quelques rappels sur les difféomorphismes des surfaces

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 21-31

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__21_0>

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EXPOSÉ 2

QUELQUES RAPPELS

SUR LES DIFFÉOMORPHISMES DES SURFACES

par V. POÉNARU

- § I. - Espaces fonctionnels
- § II. - Les groupes de tresses et leur calcul
- § III. - Les difféomorphismes des disques à 2 trous

§ I. - ESPACES FONCTIONNELS

Soit M^2 une variété de dimension 2, compacte, connexe. Je vais considérer le groupe des difféomorphismes de M^2 , noté $\text{Diff } M^2$. Si $A \subset M^2$, je vais noter par $G(M, A)$ l'espace des équivalences d'homotopie $M \xrightarrow{f} M$, telles que $f|_A = \text{id}$, muni de la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 1 (Smale). $\text{Diff}(D^2, \text{rel } \partial D^2)$ est contractile (on écrira $\text{Diff}(D^2, \text{rel } \partial D^2) \simeq *$).

Pour la démonstration, voir [2], [3].

Théorème 2 (voir [2]). Les inclusions naturelles suivantes sont des équivalences d'homotopie :

$$\begin{aligned} O(3) &\hookrightarrow \text{Diff } S^2 \hookrightarrow G(S^2) \\ SO(3) &\hookrightarrow \text{Diff } P^2 \hookrightarrow G(P^2) . \end{aligned}$$

Ces cas-là étant réglés, M est un $K(\pi_1, 1)$; je considère $*$ $\in M$ et la fibration :

$$\begin{array}{ccc} G(M, *) & \hookrightarrow & G(M) \\ & & \downarrow \text{ev} (*) \\ & & M \end{array}$$

Par des méthodes standard de théorie des obstructions, on prouve le théorème suivant :

Théorème 3. $\pi_0 G(M, *) = \text{Aut } \pi_1(M, *)$

$$\pi_i G(M, *) = 0, \quad \text{si } i > 0 .$$

Ainsi, la suite exacte d'homotopie de notre fibration se trouve réduite à :

$$1 \rightarrow \pi_1 G(M) \rightarrow \pi_1 M \xrightarrow{\partial} \text{Aut } \pi_1 M \rightarrow \pi_0 G(M) \rightarrow 1$$

On vérifie sans peine les faits suivants :

- 1) Si $x \in \pi_1 M$, alors $\partial(x)$ est l'automorphisme intérieur qui correspond à x ;
- 2) $\pi_1 G(M)$ est le centre de $\pi_1 M$. Ce groupe est nul sauf pour les cas exceptionnels suivants : le tore, $\pi_1 G(T^2) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$
la bouteille de Klein, $\pi_1 G(K^2) = \mathbb{Z}$;
- 3) $\pi_0 G(M) = \text{Aut } \pi_1 M / \text{les automorphismes intérieurs}$.

§ II. - LES GROUPES DE TRESSSES ET LEUR CALCUL

(voir [1] pour plus de détails)

Soient X un espace topologique, n un entier positif et $P_n(X) = X^n - \Delta$, où Δ est la "grande diagonale" de X^n , c'est-à-dire l'ensemble des n -uples de points de X , (x_1, \dots, x_n) tels qu'il existe $i \neq j$ avec $x_i = x_j$. Le groupe des permutations $\text{Perm}(n)$ agit librement sur $P_n(X)$ et par définition $B_n(X) = P_n(X) / \text{Perm}(n)$. On a ainsi un revêtement galoisien

$$\begin{array}{ccc} \text{Perm}(n) & \longrightarrow & P_n(X) \\ & & \downarrow \\ & & B_n(X) . \end{array}$$

Par définition, $\pi_1 P_n(X) =$ "le groupe des n -tresses colorées de X " et $\pi_1 B_n(X) =$ "le groupe des n -tresses de X ".

Dorénavant $X = \mathbb{R}^2$, et on note :

$$\pi_1 P_n(\mathbb{R}^2) = P_n \quad (\text{le groupe des } n\text{-tresses colorées})$$

$$\pi_1 B_n(\mathbb{R}^2) = B_n \quad (\text{le groupe des } n\text{-tresses}).$$

On a une suite exacte évidente :

$$1 \rightarrow P_n \rightarrow B_n \rightarrow \text{Perm}(n) \rightarrow 1.$$

Un élément de B_n peut être représenté de la manière suivante : on fixe une fois

pour toutes un ensemble de n points distincts de $\text{int } D^2$: x_1, \dots, x_n . Ensuite, l'élément de B_n est un système d'arcs de $D^2 \times I$, allant de $(x_1, \dots, x_n) \times 0$ vers $(x_1, \dots, x_n) \times 1$, transverses à chaque tranche horizontale $D^2 \times t$. Les arcs ne touchent pas à $\partial D^2 \times I$ et le tout est défini à une isotopie près (isotopie qui laisse invariante le bord du cylindre et qui respecte la projection $D^2 \times I \rightarrow I$).

Avec cette représentation, la loi de composition de B_n est la même que pour les cobordismes et les tresses colorées sont celles où un arc partant de $x_i \times 0$ aboutit à $x_i \times 1$. La figure 1 ci-dessous représente une tresse de B_n .

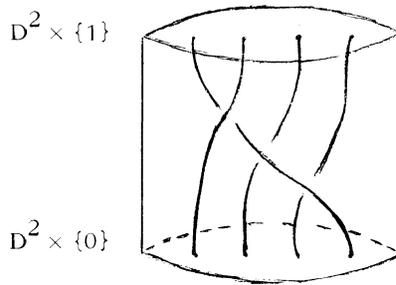


Figure 1

Théorème 4 (Fadell-Neuwirth). L'application $P_n(\mathbb{R}^2) \rightarrow P_{n-1}(\mathbb{R}^2)$ qui consiste à oublier x_n est une fibration de fibre $\mathbb{R}^2 - ((n-1) \text{ points})$.

Corollaire. $P_n(\mathbb{R}^2) \simeq K(P_n, 1)$
 $B_n(\mathbb{R}^2) \simeq K(B_n, 1)$.

Remarque. Le théorème de Fadell-Neuwirth nous fournit une suite exacte

$$1 \rightarrow F_{n-1} \rightarrow P_n \xrightarrow{\leftarrow} P_{n-1} \rightarrow 1$$

qui est scindée et P_n est déterminé à partir de P_{n-1} et de l'action de P_{n-1} sur le groupe libre F_{n-1} .

On va donner maintenant une présentation du groupe B_n . Dans \mathbb{R}^2 , je considère les coordonnées (x, y) et, pour $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in B_n(\mathbb{R}^2)$, j'arrange les indices de telle façon que :

$$x(p_1) < x(p_2) \leq \dots \leq x(p_n) .$$

Par définition, $M_i \subset B_n(\mathbb{R}^2)$ est l'ensemble des p tels que $x(p_i) = x(p_{i+1})$, comme dans la figure 2 ci-après.

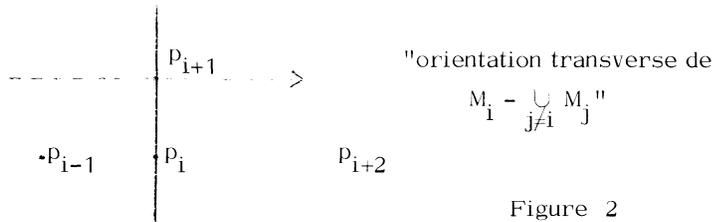


Figure 2

On remarque les choses suivantes :

- 1) $M_i - \cup_{j \neq i} M_j$ est une sous-variété de codimension 1 de $B_n(\mathbb{R}^2)$ munie d'une orientation transverse canonique, définie comme dans la figure 2 ci-dessus. Si la numération est telle que $y(p_{i+1}) > y(p_i)$, un déplacement de p_{i+1} , le long de la normale positive, pousse p_{i+1} jusqu'à ce que $x(p_{i+1}) > x(p_i)$.
- 2) $M_i - \cup_{j \neq i} M_j$ est connexe.
- 3) $B_n(\mathbb{R}^2) - \cup_i M_i$ est contractile.

Ces remarques impliquent que les lacets simples a_i , basés quelque part dans $B_n(\mathbb{R}^2) - \cup_i M_i$ et tels que a_i traverse exactement une fois M_i (et pas les autres strates), dans le sens positif, engendrent B_n . On peut trouver les relations entre les a_i en regardant ce qui se passe au voisinage des strates de codimension 2, où M_i et M_j se rencontrent.

Cas 1. $|i - j| \geq 2$. Au niveau de \mathbb{R}^2 , un point de $M_i \cap M_j$ est comme dans la figure 3. On peut bouger indépendamment le long des traits horizontaux pointillés, ce qui nous donne un petit carré, transverse à $M_i \cap M_j$ dans $B_n(\mathbb{R}^2)$, représenté dans la figure 4. On a mis les bonnes orientations transverses des strates M_i, M_j .

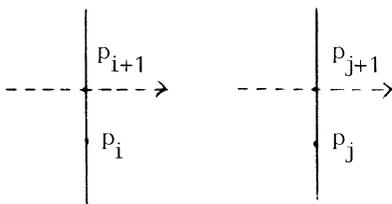


Figure 3

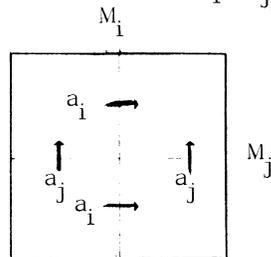


Figure 4

Ceci nous donne la relation $a_i a_j = a_j a_i$.

Cas 2. $|i - j| = 1$. Au niveau de \mathbb{R}^2 , on a la figure 5, et au niveau de $B_n(\mathbb{R}^2)$, la figure 6, sur laquelle on peut lire la relation :

$$a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1} .$$

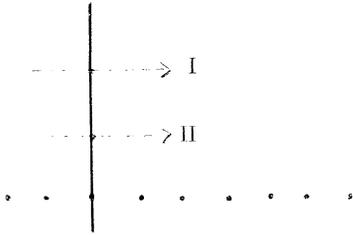


Figure 5

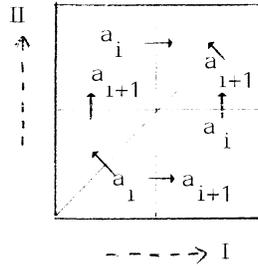


Figure 6

On a trouvé ainsi le théorème suivant :

Théorème 5 (E. Artin). B_n admet les générateurs a_1, a_2, \dots, a_{n-1} et les relations :

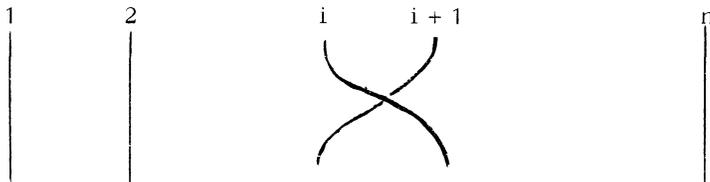
$$[a_i, a_j] = 1 \quad (|i - j| > 1)$$

$$a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1}$$

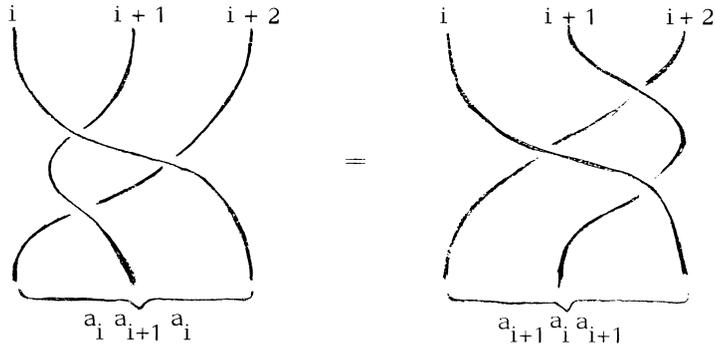
Corollaire. $B_3 = \pi_1(S^3 - \text{le noeud du trèfle})$.

[L'explication de cette "coïncidence" est la suivante : $B_n(\mathbb{R}^2)$ s'identifie à l'ensemble des polynômes complexes de degré n , moniques, à racines distinctes. Donc $B_n = \pi_1(\mathbb{C}^n - \text{le lieu discriminant}) \dots]$.

Le générateur a_i est la tresse suivante :



et la relation $a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1}$ peut être visualisée comme suit :



En particulier, $B_2 \approx \mathbb{Z}$ et le générateur a_1 est



De même, $P_2 \approx \mathbb{Z}$ est engendré par



et l'inclusion naturelle $P_2 \rightarrow B_2$ est la multiplication par 2 : $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}$.

§ III. - LES DIFFÉOMORPHISMES DU DISQUE À DEUX TROUS

(les espaces $A(P^2)$, $A'(P^2)$)

Soit $K \subset \text{int } D^2$ un ensemble fini de cardinalité k . On va introduire les notations suivantes :

$\text{Diff}(D^2, \text{rel}(K, \partial)) = \{ \text{l'ensemble des difféomorphismes } D^2 \xrightarrow{\varphi} D^2, \text{ tels que } \varphi|_{K \cup \partial D^2} = \text{id} \}$,

$\text{Diff}(D^2, K, \text{rel } \partial) = \{ \text{l'ensemble des difféomorphismes } D^2 \xrightarrow{\psi} D^2, \text{ tels que } \psi(K) = K, \psi|_{\partial D^2} = \text{id} \}$.

RAPPELS SUR $\pi_0(\text{Diff } M^2)$

On a une action naturelle de $\text{Diff}(D^2, \text{rel } \partial)$ sur $B_k(\text{int } D^2)$, et sur $P_k(\text{int } D^2)$, ce qui nous fournit deux fibrations :

$$\text{Diff}(D^2, K, \text{rel } \partial) \subset \cdot \text{Diff}(D^2, \text{rel } \partial) \longrightarrow B_k(\text{int } D^2)$$

et

$$\text{Diff}(D^2, \text{rel}(K, \partial)) \subset \cdot \text{Diff}(D^2, \text{rel } \partial) \longrightarrow P_k(\text{int } D^2) .$$

En utilisant le théorème de Smale :

$$\text{Diff}(D^2, \text{rel } \partial) = * ,$$

on a le corollaire suivant :

Corollaire.

1) Chaque composante connexe de $\text{Diff}(D^2, \text{rel}(K, \partial))$, $\text{Diff}(D^2, K, \text{rel } \partial)$ est contractile.

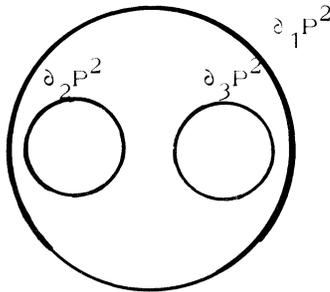
2) On a des isomorphismes canoniques :

$$P_k = \pi_0(\text{Diff}(D^2, \text{rel}(K, \partial)))$$

$$B_k = \pi_0(\text{Diff}(D^2, K, \text{rel } \partial)) .$$

On va considérer maintenant la variété à bord P^2 qui est le disque à deux trous ou "le pantalon".

"Le pantalon"
 P^2



Remarque. Soit $\text{Diff}(P^2, \partial_2, \partial_3, \text{rel } \partial_1) = \{ \text{les difféomorphismes } P^2 \xrightarrow{\varphi} P^2 \text{ tels que } \varphi|_{\partial_1 P^2} = \text{id}, \varphi(\partial_2 P^2) = \partial_2 P^2, \varphi(\partial_3 P^2) = \partial_3 P^2 \}$. Manifestement, $\text{Diff}(P^2, \partial_2, \partial_3, \text{rel } \partial_1)$ a le même type d'homotopie que $\text{Diff}(P^2, \text{rel}(K, \partial))$.

Proposition. $\pi_0 \text{Diff}(P^2, \text{rel } \partial) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$.

Démonstration. En considérant les 1-jets des difféomorphismes, aux deux points de K ,

on a une fibration : $\text{Diff}(P^2, \text{rel } \partial P^2) \hookrightarrow \text{Diff}(D^2, \text{rel}(K, \partial))$

$$S^1 \times S^1$$

d'où la suite exacte :

$$0 \rightarrow \pi_1(S^1 \times S^1) \rightarrow \pi_0(\text{Diff}(P^2, \text{rel } \partial P^2)) \rightarrow P_2 \rightarrow 0 .$$

On vérifie que cette suite splitte, que l'extension est centrale, et que l'action de P_2 sur $\pi_1(S^1 \times S^1)$ est triviale, d'où le résultat. \square

On considère maintenant

$$\text{Diff}_+(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \{\text{les difféomorphismes } \varphi : P^2 \rightarrow P^2, \text{ préservant l'orientation, tels que } \varphi(\partial_i P^2) = \partial_i P^2\} .$$

Proposition. $\text{Diff}_+(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ est contractile.

Démonstration. Par restriction d'un $\varphi \in \text{Diff}_+(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ à $\partial_1 P^2 = \partial D^2$, on a une fibration :

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\text{Diff}(P^2, \partial_2, \partial_3, \text{rel } \partial_1)}_{P_2 = K(\mathbf{Z}, 0)} & \hookrightarrow & \text{Diff}_+(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3) \\ & & \downarrow \text{restriction} \\ & & \text{Diff}_+ S^1 = K(\mathbf{Z}, 1) . \end{array}$$

On vérifie aussi que la flèche :

$$\pi_1 \text{Diff}_+ S^1 \xrightarrow{\partial} \pi_0 \text{Diff}(P^2, \partial_2, \partial_3, \text{rel } \partial_1) = P_2$$

est un isomorphisme, d'où le résultat. \square

Soit maintenant N^2 une surface compacte, à bord $\neq \emptyset$, quelconque. On définit $A(N^2) = \{\text{l'ensemble des classes d'isotopie d'arcs } I \subset N^2, \text{ avec } \partial I \subset \partial N^2, \text{ chaque bout pouvant bouger sur la composante connexe respective de } \partial N^2, \text{ et représentant des éléments non triviaux de } \pi_1(N^2, \partial N^2)\}$,

$$A'(N^2) = \{\text{la même chose que ci-dessus avec plusieurs arcs, 2 à 2 disjoints}\} .$$

Corollaire. $A(P^2)$ possède exactement 6 éléments, classifiés par les composantes connexes de ∂P^2 où tombent les bouts des arcs respectifs.

Démonstration. Soient τ et τ' deux représentants d'éléments de $A(P^2)$ avec leurs extrémités sur les mêmes composantes connexes de ∂P^2 . On vérifie sans peine qu'il existe un difféomorphisme, respectant les orientations,

$$(P^2, \tau) \xrightarrow{\psi} (P^2, \tau') .$$

Puisque $\pi_0 \text{Diff}_+(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = 0$, ce difféomorphisme est isotope à l'identité, d'où

le résultat. Les six modèles sont donnés par la figure 7. \square

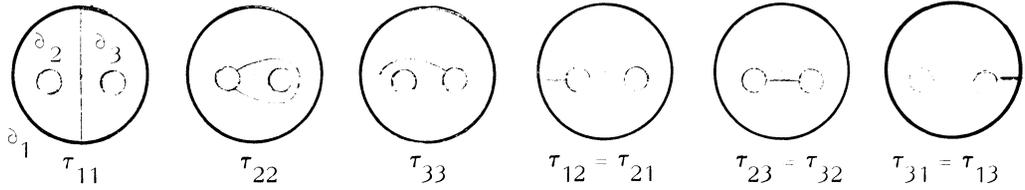


Figure 7 : les six modèles de $A(P^2)$

Soit maintenant $A' = \{\text{l'ensemble des triplets ordonnés } (a_1, a_2, a_3), \text{ où } a_i \geq 0, a_i \in \mathbf{Z}_+, \sum_1^3 a_i \equiv 0 \pmod{2}\}$. Si $\tau \in A'(P^2)$, on lui associe :

$$i(\tau) = (i(\tau, \partial_1), i(\tau, \partial_2), i(\tau, \partial_3)) \in A'$$

où $i(\tau, \gamma)$ est le nombre de points communs de τ et γ . Pour la commodité, on ajoute $\emptyset \in A'(P^2)$, avec $i(\emptyset) = (0, 0, 0)$.

Théorème 6. L'application $A'(P^2) \xrightarrow{i} A'$ est une bijection.

Démonstration. On va commencer par construire une application $A' \xrightarrow{\tau} A'(P^2)$ telle que $i(\tau(a_1, a_2, a_3)) = (a_1, a_2, a_3)$. Si $(a_1, a_2, a_3) \neq 0$, le point de coordonnées barycentriques $(\frac{a_1}{\sum a_i}, \frac{a_2}{\sum a_i}, \frac{a_3}{\sum a_i})$ tombe dans l'une des quatre régions de la figure 8.

Si (a_1, a_2, a_3) satisfait aux inégalités du triangle, on considère les entiers ≥ 0 :

$$x_{12} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3), \quad x_{23} = \frac{1}{2}(a_2 + a_3 - a_1), \quad x_{31} = \frac{1}{2}(a_3 + a_1 - a_2)$$

et l'on définit $\tau(a_1, a_2, a_3)$ comme étant l'élément de $A'(P^2)$ qui consiste en $x_{ij} = x_{ji}$ segments de type τ_{ij} , pour $i \neq j$.

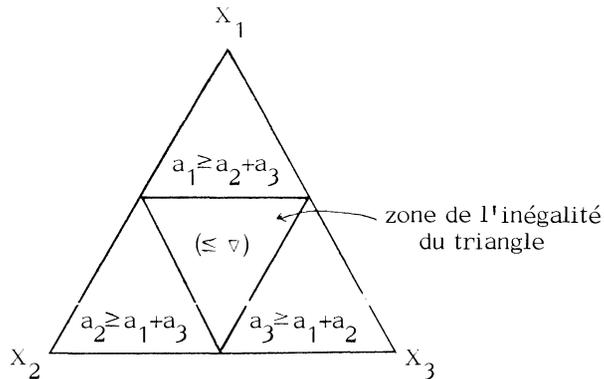


Figure 8

EXPOSÉ 2

Si $a_1 \geq a_2 + a_3$, on pose :

$$x_{11} = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 - a_3), \quad x_{12} = a_2, \quad x_{13} = a_3,$$

et l'on définit $\tau(a_1, a_2, a_3)$ comme dans la figure 9.

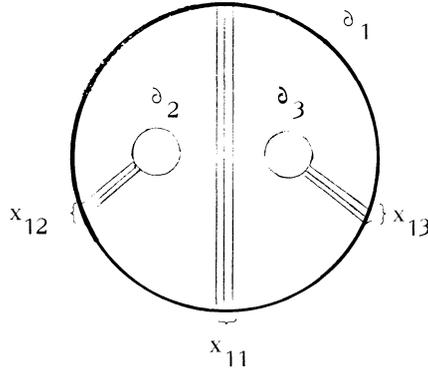


Figure 9

Les autres cas se traitent d'une manière similaire. On peut vérifier que sur $\partial(\leq \nabla)$ les différentes définitions se recollent bien et que $i \circ \tau = \text{identité}$. Ainsi i est surjective.

On remarque maintenant que les paires compatibles d'éléments de $A(P^2)$ sont exactement celles qui sont jointes par un segment dans la figure 10.

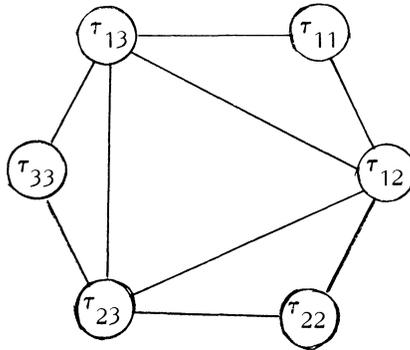


Figure 10

Les quatre triangles de la figure 10 correspondent canoniquement aux quatre triangles de la figure 8. D'une manière plus précise, soit $x_{\alpha\beta}$ le nombre de segments du type $\tau_{\alpha\beta}$ qui apparaît dans $\tau \in A'(P^2)$. On a les quatre situations mutuellement exclusives suivantes :

RAPPELS SUR $\pi_0(\text{Diff } M^2)$

1) $x_{\alpha\alpha} = 0$ pour $\alpha = 1, 2, 3$, ce qui implique que $i(\tau) \in (\leq 7) ..$

2) $x_{11} \neq 0$, ce qui implique $a_1 > a_2 + a_3$.

.....

Supposons maintenant que $\tau_1, \tau_2 \in A'(P^2)$ et que $i(\tau_1) = i(\tau_2) \in A'$. On en déduit d'abord que τ_1 et τ_2 sont dans la même des 4 situations décrites ; par un calcul d'algèbre linéaire à partir des a_1, a_2, a_3 qui sont (par définition) les mêmes pour τ_1 et τ_2 , on en déduit que les $x_{\alpha\beta}$ sont aussi les mêmes. Il nous reste à prouver que si $\tau_1, \tau_2 \in A'(P^2)$ sont tels que tous leurs $x_{\alpha\beta}$ sont égaux, alors $\tau_1 = \tau_2$. Ceci est déjà prouvé si $\sum_{\alpha \leq \beta} x_{\alpha\beta} = 1$. La preuve du cas général se fait par induction sur $\sum_{\alpha \leq \beta} x_{\alpha\beta}$. On laisse les détails au lecteur. On a ainsi prouvé que i est injective. \square

Remarque. Soit $\tau \in A'(P^2)$. Il n'existe aucun élément non trivial de $\pi_0 \text{Diff}_+(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3, \tau)$. En particulier, pour un τ donné, on ne peut pas mélanger les différentes composantes connexes de τ entre elles.

RÉFÉRENCES

- [1] J. BIRMAN, Braids, links and mapping class group, Annals of Math-Studies Princeton University Press, Princeton 1974.
- [2] J. CERF, Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois ($\Gamma_4 = 0$), Lecture Notes in Math. 53, Springer, 1968.
- [3] S. SMALE, Diffeomorphisms of the 2-sphere, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), p. 621-626.

Astérisque

V. POÉNARU

Rappels de géométrie hyperbolique en dimension

2 et généralités sur $i : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_+$

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 33-55

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__33_0>

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EXPOSÉ 3

RAPPELS DE GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE EN DIMENSION 2

ET

GÉNÉRALITÉS SUR $i : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$

par V. POÉNARU

- § I. - Un peu de géométrie hyperbolique
- § II. - L'espace de Teichmüller du disque à deux trous
- § III. - Généralités sur l'intersection géométrique des courbes simples et sur $i : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$
- § IV. - Systèmes de courbes simples et isométries en géométrie hyperbolique

§ I. - UN PEU DE GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

On considère une surface compacte M , munie d'une métrique riemannienne de courbure -1 , pour laquelle le bord est géodésique, s'il est non vide. Le revêtement universel \tilde{M} est isométrique à un domaine du plan hyperbolique \mathbb{H}^2 , bordé éventuellement par des géodésiques de \mathbb{H}^2 .

Lemme 1. Soient α et β deux arcs géodésiques distincts de M , ayant les mêmes extrémités. Alors la courbe fermée $\alpha \cup \beta$ n'est pas homotope à zéro.

Démonstration. Si $\alpha \cup \beta$ était homotope à zéro, elle se relèverait en une courbe fermée de \tilde{M} . Mais deux géodésiques de \mathbb{H}^2 ne peuvent se couper en deux points.

Cette propriété de \mathbb{H}^2 résulte par exemple de la formule de Gauss-Bonnet : pour un disque D muni d'une métrique riemannienne pour laquelle le bord est un polygone géodésique, on a toujours :

$$\iint_D K = 2\pi - \Sigma(\text{angles extérieurs}) ,$$

où K désigne la courbure. \square

Lemme 2. Soit V une variété riemannienne compacte à bord totalement géodésique. Dans chaque classe d'homotopie (libre) d'applications $S^1 \rightarrow V$, il existe une immersion géodésique, dont la longueur minore la longueur des lacets de la classe.

Démonstration. On se donne une classe d'homotopie $\alpha \in [S^1, V]$, un nombre $\epsilon > 0$ et un entier N ; on pose $L = N\epsilon$. On choisit ϵ plus petit que le rayon d'injectivité de l'exponentielle et N assez grand pour que α contienne au moins une courbe de longueur $\leq L$.

Soit $I(\alpha, \epsilon, N)$ l'espace des applications continues $S^1 \rightarrow M$ dans la classe α , formées d'au plus N arcs géodésiques de longueur $\leq \epsilon$. Cet espace, muni de la topologie compacte - ouverte, est compact. La fonction longueur l est continue. Soit φ une courbe réalisant le minimum de la longueur dans $I(\alpha, \epsilon, N)$. Il est facile de vérifier que φ est en fait lisse (si $\partial V \neq \emptyset$, l'hypothèse que ∂V est totalement géodésique intervient ici).

Pour voir que la longueur de φ est un minorant pour toute la classe α , il suffit de remarquer que, si C est une courbe rectifiable dans α , de longueur $\leq L$, il existe une courbe appartenant à $I(\alpha, \epsilon, N)$, de longueur inférieure ou égale à celle de C . \square

Remarque. Sans compacité, avec la seule hypothèse que la métrique est complète, on voit que chaque élément de $\pi_1(V, x_0)$ est réalisable par une géodésique fermée, qui, en général, n'est pas lisse en x_0 .

Lemme 3. Pour chaque transformation de revêtement T de \tilde{M} au-dessus de M , il existe une unique géodésique invariante par T . Elle relève la géodésique fermée lisse de M qui est dans la classe d'homotopie libre désignée par l'élément α de $\pi_1(M, x_0)$ correspondant à T .

Démonstration.

1) Existence. Voici d'abord une démonstration qui n'utilise pas d'hypothèse

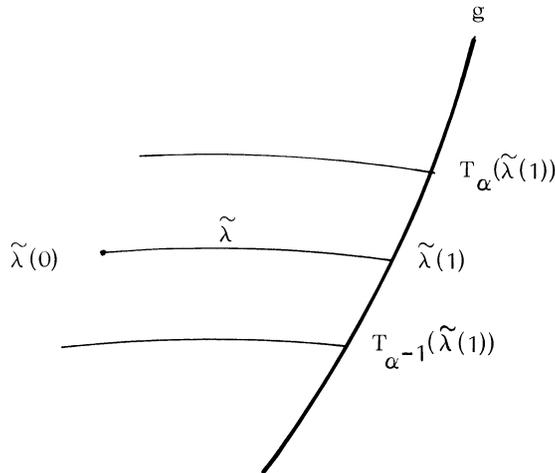
de courbure. On prend comme modèle de \tilde{M} l'ensemble des chemins continus $\{\varphi : [0, 1] \rightarrow M \mid \varphi(0) = x_0\}$ quotienté par la relation : homotopie à extrémités fixées. La projection $p : \tilde{M} \rightarrow M$ est donnée par $\varphi \mapsto \varphi(1)$. Le chemin constant définit le point-base de \tilde{M} . Soient $\psi \in \tilde{M}$, $p(\psi) = y$ et χ un chemin de M tel que $\chi(0) = y$; le relevé de χ dans \tilde{M} à partir de ψ est la famille à un paramètre de chemins de M , obtenue en tronquant le chemin $\psi * \chi$; cette famille commence avec ψ et finit avec $\psi * \chi$ lui-même. L'action à gauche de $\pi_1(M, x_0)$ sur \tilde{M} se définit comme suit : pour $\alpha \in \pi_1(M, x_0)$, que l'on représente par un lacet φ , et pour $\psi \in \tilde{M}$, on pose $T_\alpha(\psi) = \varphi * \psi$.

Ceci étant, considérons l'élément α pour lequel $T = T_\alpha$. D'après le lemme 2, sa classe d'homotopie libre contient une géodésique fermée lisse g_1 . Soient x_1 un point de l'image de g_1 et λ un chemin joignant x_0 à x_1 ; celui-ci est choisi en sorte que $\lambda * g_1 * \lambda^{-1}$ appartienne à α . Si $\tilde{\lambda} * \tilde{g}_1$ est le relevé de $\lambda * g_1$ à partir du point-base de \tilde{M} , on a :

$$\tilde{\lambda} * \tilde{g}_1(1) = \overbrace{\lambda * g_1 * \lambda^{-1} * \lambda}(1) = T_\alpha(\tilde{\lambda}(1)) .$$

Donc, si on prend dans \tilde{M} l'image de $\tilde{\lambda} * \tilde{g}_1$ et de tous ses translatées par T_α^n , $n \in \mathbf{Z}$, on fabrique une composante connexe de $p^{-1}(\lambda * g)$, consistant en une géodésique g de \tilde{M} et en segments relevant λ , comme dans la figure 1. Par construction, g est invariante par T_α .

Figure 1



Une seconde démonstration de l'existence qui utilise le fait que M est une surface compacte munie d'une structure hyperbolique est la suivante :

La transformation T_α est une isométrie de \mathbb{H}^2 . Comme T_α^n n'a pas de point

fixe, elle ne peut être elliptique. D'autre part, si φ est une isométrie parabolique de \mathbb{H}^2 (unique point fixe, qui est sur le cercle à l'infini), alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x \in \mathbb{H}^2$ tel que $d(x, \varphi(x)) < \epsilon$. Si T_α est parabolique, ceci implique l'existence de géodésiques fermées de longueur arbitrairement petite sur M , ce qui est interdit par la compacité. Donc T_α est hyperbolique (deux points fixes sur le cercle à l'infini); la géodésique g de \mathbb{H}^2 , qui les joint, est donc invariante par T_α . Alors g/T_α est une géodésique fermée lisse dans la même classe d'homotopie libre que α .

2) Unicité. Soient g_1 et g_2 deux géodésiques distinctes de \tilde{M} , invariantes par T . Si $g_1 \cap g_2$ est non vide, l'intersection consiste en un point unique, qui doit être invariant par T ; ceci est impossible.

Donc $g_1 \cap g_2 = \emptyset$. Soit $x \in g_1$; par x , on mène la perpendiculaire à g_2 ; on note δ ce segment géodésique. On remarque que $T\delta \cap \delta = \emptyset$, sinon on aurait un triangle géodésique dont la somme des angles (intérieurs) serait $> \pi$.

Maintenant $g_1, g_2, \delta, T(\delta)$ forment un quadrilatère dont la somme des angles est 2π (voir figure 2), ce qui est impossible d'après la formule de Gauss-Bonnet (ou d'après un raisonnement élémentaire).

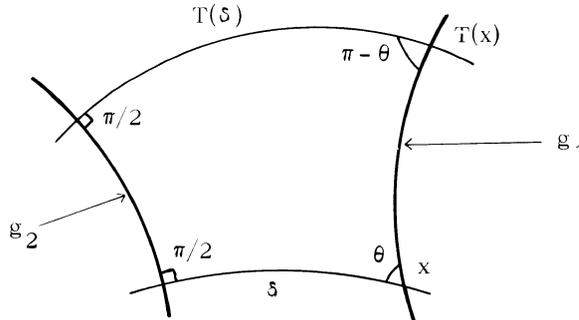


Figure 2

□

Lemme 4. Soit α un élément non trivial de $\pi_1(M, x_0)$. Alors, il existe une unique géodésique fermée lisse dans la classe d'homotopie libre de α .

Démonstration. L'existence est déjà assurée par le lemme 2. Supposons que g_1 et g_1' soient deux telles géodésiques. La partie "existence" de la démonstration précédente nous fournirait alors deux géodésiques distinctes de \tilde{M} , invariantes par T_α .

Mais la partie "unicité" du lemme précédent nous dit justement que cela est impossible (utiliser que $\pi_1(M, x_0)$ n'a pas de torsion).

§ II. - L'ESPACE DE TEICHMÜLLER DU DISQUE À DEUX TROUS

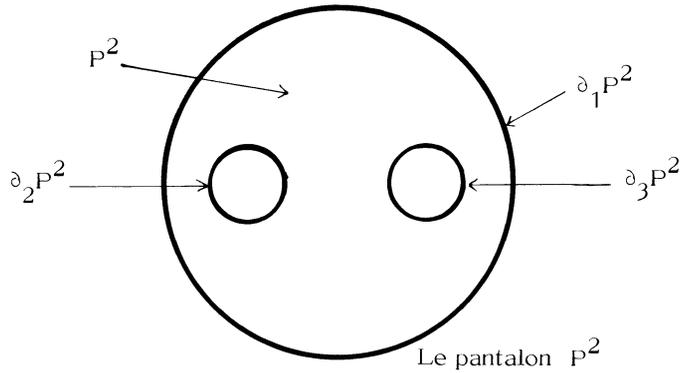


Figure 3

Le pantalon P^2 (disque à deux trous) est le "building-block" fondamental de la théorie des surfaces. Je rappelle (exposé 2) que $\text{Diff}_+(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ est contractile ; en particulier un difféomorphisme, qui conserve l'orientation et envoie en elle-même chaque composante du bord, est isotope à l'identité.

Si ρ est une métrique de courbure -1 sur P^2 , pour laquelle chaque composante du bord est géodésique, on dit que (P^2, ρ) est une P^2 -surface de Teichmüller. Par définition, deux surfaces (P^2, ρ) et (P^2, ρ') sont équivalentes s'il existe un difféomorphisme φ de P^2 , isotope à l'identité, tel que $\varphi^* \rho = \rho'$. Vu que $\text{Diff}_+(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ est connexe, l'ensemble des classes d'équivalence, qui par définition est l'espace de Teichmüller $\mathfrak{T}(P^2)$ de P^2 , s'identifie au quotient $\mathfrak{H}(P^2)/\text{Diff}_+$, où $\mathfrak{H}(P^2)$ est l'espace des métriques riemanniennes de courbure -1 pour lesquelles le bord est géodésique :

$$\mathfrak{T}(P^2) = \mathfrak{H}(P^2)/\text{Diff}_+ .$$

On munira $\mathfrak{H}(P^2)$ de la topologie C^∞ et $\mathfrak{T}(P^2)$ de la topologie quotient. On a une application naturelle continue

$$L : \mathfrak{H}(P^2) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3 = \{\text{triplets de nombres } > 0\}$$

définie par :

$$L(\rho) = (\ell_\rho(\partial_1 P^2), \ell_\rho(\partial_2 P^2), \ell_\rho(\partial_3 P^2)) ,$$

où ℓ_ρ désigne la longueur dans la métrique ρ . Ceci induit une application qu'on désigne par la même lettre

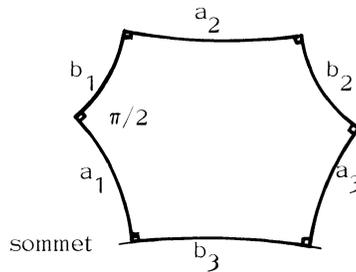
$$L : \mathfrak{T}(P^2) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3 .$$

Théorème 5. L'application $L : \mathfrak{T}(P^2) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3$ est un homéomorphisme. De plus, $L : \mathfrak{H}(P^2) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3$ admet des sections locales continues.

La classification des P^2 -surfaces de Teichmüller se déduit de la classification des hexagones droits hyperboliques car un pantalon hyperbolique est de façon naturelle obtenu en recollant deux hexagones isométriques comme l'indique le lemme 7. D'autre part, un hexagone hyperbolique "abstrait" X , où chaque angle est droit et où chaque côté est géodésique est isomorphe à un hexagone du plan \mathbb{H}^2 ; pour le voir, on utilise X comme domaine fondamental et on fait des symétries autour des côtés de X pour construire une variété hyperbolique simplement connexe et complète Y ; d'après un théorème classique (Hadamard-Cartan, [2]), Y est isométrique à \mathbb{H}^2 . On s'intéresse donc en premier lieu à l'ensemble Hex des classes d'isométrie directe d'hexagones de \mathbb{H}^2 , dont les angles sont droits, dont les côtés sont géodésiques et qui sont équipés d'un sommet privilégié. On notera $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ les côtés, nommés à partir du point base en tournant dans le sens rétrograde (figure 4).

Lemme 6. Les longueurs $\ell(a_1), \ell(a_2), \ell(a_3)$ établissent une bijection de Hex sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$.

Figure 4



Démonstration. 1) Existence. Soient $\ell_1, \ell_2, \ell_3 > 0$. On veut construire un hexagone X dans \mathbb{H}^2 , tel que $\ell(a_i) = \ell_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

On commence par fixer trois géodésiques G, G', G'' comme dans la figure 5; G et G'' sont distantes de ℓ_1 . Soient $x \in G$ et L_x la perpendiculaire à G issue de x ; si x est suffisamment loin de x_0 , L_x ne rencontre pas G'' (On suggère au lecteur de faire ce dessin dans le modèle de Poincaré). Soit $x(\ell_1)$ le point de G le plus proche de x_0 qui vérifie :

$$L_{x(\ell_1)} \cap G'' = \emptyset .$$

On pose $f(\ell_1) = d(x_0, x(\ell_1))$.

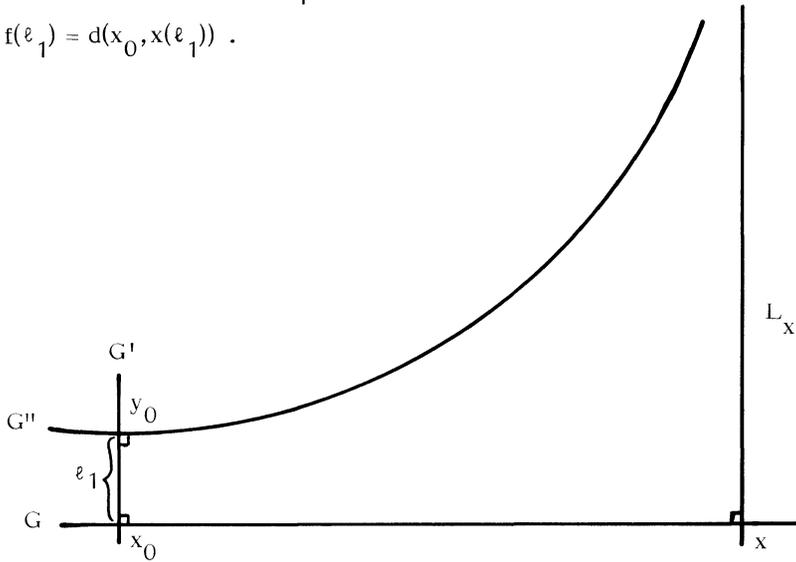


Figure 5

On fait la construction de la figure 6 ; elle est déterminée à isométrie près par les nombres ℓ_1 , ℓ_3 et λ .

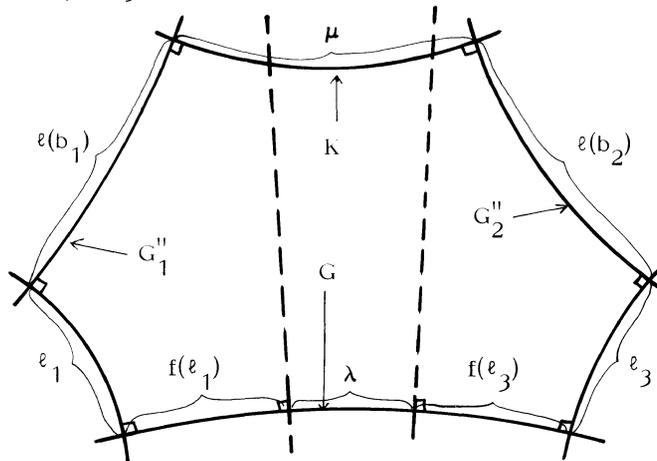


Figure 6

Soit $\mu(\lambda)$ la distance de G_1'' à G_2'' ; c' est une fonction continue de la

longueur λ , telle que $\mu(0) = 0$ et $\mu(+\infty) = +\infty$ (pour faire varier λ , on utilise le fait qu'il existe un groupe à un paramètre d'isométries de \mathbb{H}^2 , laissant G invariante) ; elle prend donc toute valeur positive. D'où l'existence de X .

2) Unicité. Comme on vient de le voir, la donnée de trois côtés consécutifs d'un hexagone le détermine complètement.

Donc, si les hexagones droits X et X' de la figure 7 vérifient $\ell_1 = \ell(a_1) = \ell(a'_1)$ et ne sont pas isométriques, alors les longueurs $\ell(b_3)$ et $\ell(b'_3)$ ne sont pas égales ; disons que $\ell(b'_3) > \ell(b_3)$.

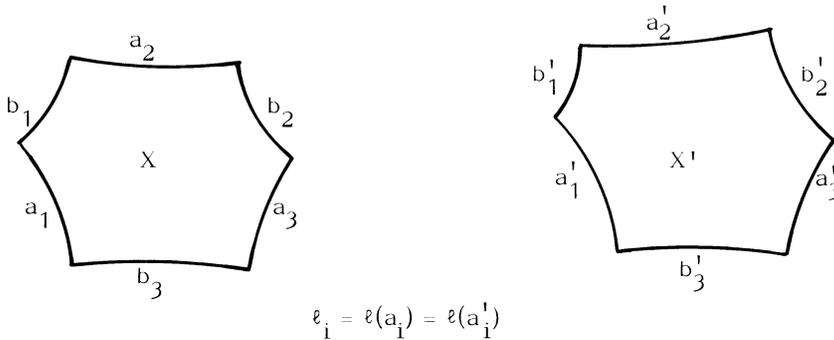


Figure 7

C'est un petit exercice de géométrie hyperbolique de voir qu'il existe une perpendiculaire (unique) de b_3 à a_2 dans X . Elle décompose les longueurs de b_3 et a_2 comme sur la figure 8 : $\ell(b_3) = \alpha + \beta$, $\ell(a_2) = \gamma + \delta$.

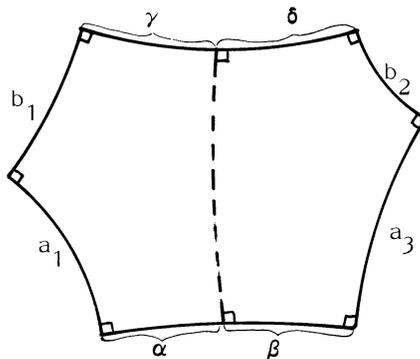


Figure 8

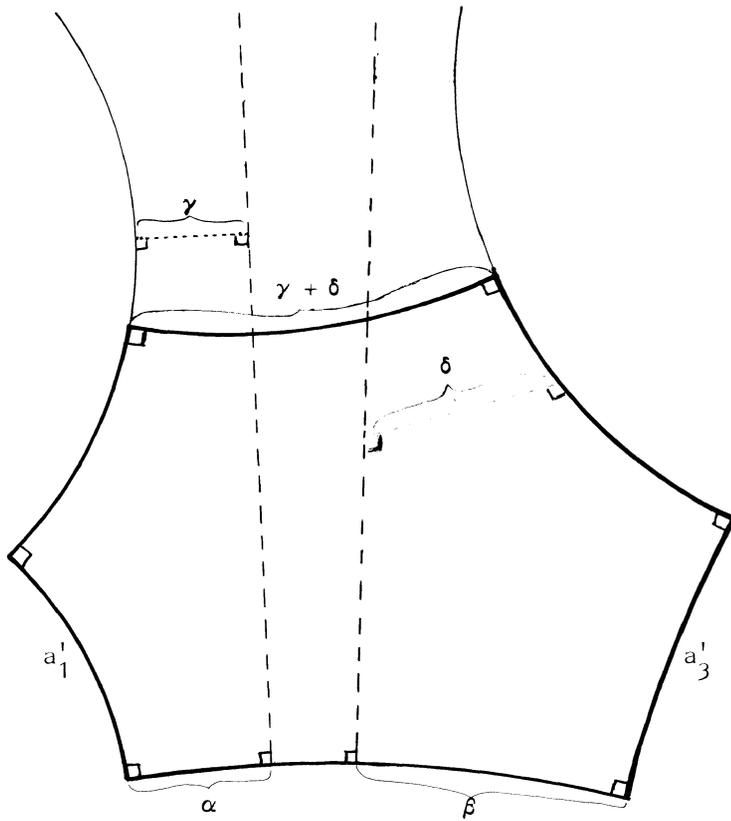


Figure 9

Dans X' , on élève des perpendiculaires à b'_3 à des distances α et β des deux extrémités, comme dans la figure 9. Dans cette figure, tous les angles marqués d'un trait sont égaux à $\pi/2$; les autres ne le sont pas nécessairement.

La figure 9 porte une contradiction puisqu'on y voit $\gamma + \delta > \gamma + \delta$. \square

Remarques. 1) L'unicité que nous venons de prouver peut s'interpréter de la façon suivante : $\ell(a_1)$ et $\ell(a_3)$ étant fixées, la fonction $\ell(b_3) \rightarrow \ell(a_2)$ est monotone ; ou encore, la fonction $\lambda \rightarrow \mu(\lambda)$ (figure 6) est un homéomorphisme de \mathbb{R}_+ .

2) En se référant aux notations de la figure 4, on peut paramétrer l'ensemble Hex par $(\ell(a_1), \ell(a_2), \ell(a_3))$ ou par $(\ell(b_1), \ell(b_2), \ell(b_3))$. Le passage de l'un de ces systèmes de coordonnées à l'autre se fait par un homéomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^3$. [En effet, on vient de voir que le passage de $(\ell(a_1), \ell(a_2), \ell(a_3))$ à $(\ell(a_1), \ell(b_3), \ell(a_3))$ se fait par un homéomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^3$. Ensuite, on vérifie facilement que la même chose est vraie pour le passage de $(\ell(a_1), \ell(b_3), \ell(a_3))$ à $(\ell(b_3), \ell(a_2), \ell(b_2))$, etc...]

3) Dans la figure 6, on voit que, $\ell_1 = \ell(a_1)$ et $\ell_3 = \ell(a_3)$ étant fixés, si $\mu = \ell(a_2)$ tend vers 0, alors $\ell(b_1)$ et $\ell(b_2)$ tendent vers $+\infty$.

La classification des hexagones droits conduit à la classification des pantalons, car toute P^2 -surface de Teichmüller est le double d'un hexagone, comme l'indique précisément l'énoncé du lemme 7.

Lemme 7. Soit une P^2 -surface de Teichmüller.

1° Il existe une unique géodésique simple g_{ij} de P^2 qui joint $\partial_1 P^2$ à $\partial_j P^2$ et qui est perpendiculaire aux deux. Les arcs g_{12} , g_{13} et g_{23} sont mutuellement disjoints (figure 10).

2° Sur $\partial_1 P^2$, les extrémités de g_{12} et g_{13} découpent des segments d'égales longueurs. Idem sur $\partial_2 P^2$ et $\partial_3 P^2$.

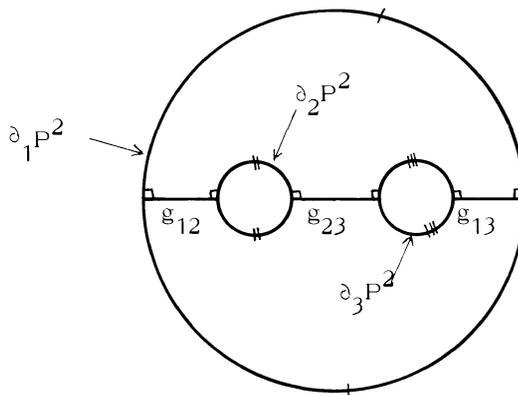


Figure 10

Démonstration. 1) Un chemin de plus petite longueur joignant $\partial_i P^2$ à $\partial_j P^2$ rencontre le bord orthogonalement en ses extrémités (formule de la variation première [2]). On en déduit tout de suite que c'est un arc simple. Pour l'unicité, on remarque que la classe d'homotopie est fixée par la condition d'être simple ; par un argument de courbure négative analogue au lemme 3, on obtient le 1°.

2) Les arcs g_{12} , g_{13} et g_{23} découpent P^2 en deux hexagones droits. Ils sont isométriques car ils ont trois côtés égaux. \square

Démonstration du théorème 5.

1) Existence. Etant donnés $\ell_1, \ell_2, \ell_3 > 0$, on peut construire un unique hexagone droit X avec $\ell(a_i) = \ell_i/2$ pour $i = 1, 2, 3$ (lemme 6). Pour former le pantalon, on prend deux exemplaires de X que l'on recolle le long de b_1, b_2 et b_3 . Ainsi, on a : $\ell(\partial_i P^2) = 2 \ell(a_i) = \ell_i$. Ceci donne la surjectivité de L .

2) Unicité. Soient $\rho', \rho'' \in \mathbb{H}(P^2)$, telles que $\ell_i = \ell_{\rho'}(\partial_i P^2) = \ell_{\rho''}(\partial_i(P^2))$, pour $i = 1, 2, 3$. On va prouver qu'il existe $f \in \text{Diff}_+(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$, qui transporte ρ' en ρ'' .

D'après le lemme 7, $(P^2, \rho') = X'_1 \cup X'_2$ et $(P^2, \rho'') = X''_1 \cup X''_2$, où X'_1, X'_2, X''_1, X''_2 sont des hexagones droits, paramétrés par $(\frac{\ell_1}{2}, \frac{\ell_2}{2}, \frac{\ell_3}{2})$. Donc, il existe une isométrie positive de X'_1 sur X''_1 et de X'_2 sur X''_2 ; le f cherché est la "réunion" de ces deux isométries.

3) Continuité. On vient de voir que l'application continue

$$L : \mathfrak{F}(P^2) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3$$

est bijective. Pour prouver que L^{-1} est continue, il suffit de prouver que $L : \mathbb{H}(P^2) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3$ admet des sections locales continues. Ce sera plus commode de changer de coordonnées dans $(\mathbb{R}_+^*)^3$, en passant des longueurs des courbes du bord aux longueurs $\ell_{12}, \ell_{23}, \ell_{13}$ des géodésiques g_{12}, g_{23}, g_{13} (figure 10). Ceci donne une nouvelle application continue :

$$\Lambda : \mathbb{H}(P^2) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3,$$

et il suffira de prouver que Λ possède des sections locales continues.

On commence par quelques préliminaires. Soit E la partie de \mathbb{R}^2 qui est réunion de :

$$E_0 = \{-1 \leq y \leq +1, x=0\} \text{ et de } E_1 = \{-1 \leq y \leq 0, 0 \leq x \leq 1\}.$$

On va définir $C^\infty(E)$ comme l'ensemble des fonctions $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$f|_{E_0} \in C^\infty(E_0)$ et $f|_{E_1} \in C^\infty(E_1)$. On a une topologie naturelle sur $C^\infty(E)$ provenant des topologies C^∞ de $C^\infty(E_0)$ et $C^\infty(E_1)$.

Lemme 8. Il existe une application continue $\mathcal{E} : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que

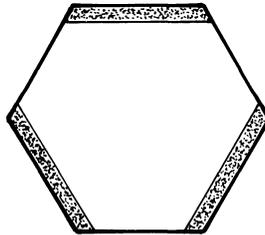
$$\mathcal{E}(f)|_E = f .$$

Démonstration. Soit $f \in C^\infty(E)$. En utilisant un résultat de Seeley [3], on peut étendre les dérivées normales de $f|_{E_0 \cap E_1}$ à E_0 tout entier. Ceci nous donne une première extension de $C^\infty(E)$ dans les jets infinis de Whitney sur E (on utilisera ici le fait que E_0 et E_1 sont régulièrement situés). Ensuite, on applique le théorème d'extension de Whitney [4]. \square

Par définition, un hexagone tronqué est un ensemble formé du bord d'un hexagone C^∞ de \mathbb{R}^2 et des voisinages colliers de trois côtés alternés (figure 11).

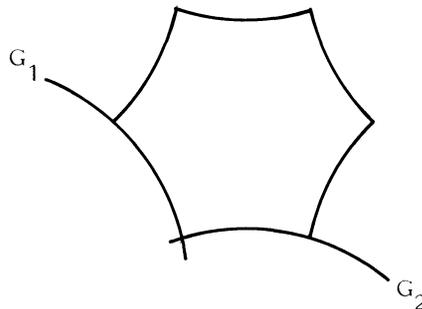
La structure C^∞ de l'hexagone tronqué Z est localement (là où il pourrait y avoir des problèmes) comme celle de E . A partir du lemme 8 et de raisonnements classiques, on établit le lemme suivant.

Figure 11



Z = hexagone tronqué

Figure 12



Lemme 9. Soit $\text{Plgt}(Z, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des plongements C^∞ de Z dans \mathbb{R}^2 , muni de la topologie C^∞ . Si $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \text{Plgt}(Z, \mathbb{R}^2)$ est un germe d'application C^∞ , on peut relever φ en un germe $\Phi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ tel que $\Phi(0) = \text{Id}$ et $\varphi(t) = \Phi(t)\varphi(0)$.

Soit maintenant $\ell^0 = (\ell_{12}^0, \ell_{23}^0, \ell_{13}^0) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ et $X(\ell^0)$ un hexagone hyperbolique droit de \mathbb{H}^2 paramétré par ℓ^0 . Soient G_1 et G_2 deux géodésiques portant deux côtés consécutifs de $X(\ell^0)$. Pour ℓ voisin de ℓ^0 dans $(\mathbb{R}_+^*)^3$, on considère l'hexagone $X(\ell)$ reposant sur $G_1 \cup G_2$ comme $X(\ell^0)$ (figure 12). Pour chaque ℓ , le double de $X(\ell)$ le long des côtés "marqués" (ceux dont les longueurs sont les paramètres ℓ_{ij}) est une variété hyperbolique, notée $2X(\ell)$; elle est difféomorphe à P^2 .

Il s'agit de trouver un difféomorphisme $\bar{\varphi}(\ell) : 2X(\ell) \rightarrow 2X(\ell^0)$, de sorte que la métrique $\rho(\ell)$, image de la métrique naturelle de $2X(\ell)$ par $\bar{\varphi}(\ell)$, dépende continuellement de ℓ comme élément de $\mathcal{H}(2X(\ell^0))$.

Pour $\varepsilon > 0$ petit fixé (indépendamment de ℓ), on considère dans $X(\ell)$ les colliers géodésiques de rayon ε le long des côtés marqués; on associe ainsi à $X(\ell)$ un hexagone tronqué $Z(\ell)$. Chaque rectangle de $Z(\ell)$ est feuilleté d'une part par les géodésiques orthogonales au côté de l'hexagone, et d'autre part par les trajectoires orthogonales à ces géodésiques. Il est facile de construire un germe d'application continue

$$\varphi : ((\mathbb{R}_+^*)^3, \ell^0) \longrightarrow \text{Plgt}(Z(\ell^0), \mathbb{R}^2)$$

tel que : 1) $\varphi(\ell^0)$ soit le plongement standard ;

2) $\varphi(\ell) [Z(\ell^0)] = Z(\ell)$;

3) $\varphi(\ell)$ respecte le nom des côtés marqués et les feuilletages des rectangles.

Par le lemme 9, il existe un germe

$$\psi : ((\mathbb{R}_+^*)^3, \ell^0) \longrightarrow \text{Plgt}(X(\ell^0), \mathbb{R}^2)$$

tel que $\psi(\ell)|Z(\ell^0) = \varphi(\ell)$. La condition 3) assure alors que $2\psi(\ell)$ est un difféomorphisme des doubles $2X(\ell^0) \rightarrow 2X(\ell)$. D'autre part, la construction assure que la métrique sur $X(\ell^0)$, déduite de la métrique naturelle de $X(\ell)$ via $\psi(\ell)$, dépend continuellement de ℓ . Ainsi $\bar{\varphi}(\ell) = [2\psi(\ell)]^{-1}$ a toutes les propriétés requises. \square

§ III. - GÉNÉRALITÉS SUR L'INTERSECTION GÉOMÉTRIQUE
DES COURBES SIMPLES ET SUR $i : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}_+$

Dans ce qui suit M est une surface orientable de genre $g > 1$. Pratiquement, on n'explicitera que le cas où M est fermée ; les adaptations au cas à bord non vide sont laissées au lecteur. Je considère l'ensemble \mathcal{L} des classes d'isotopie de courbes simples de M non homotopes à zéro. Pour $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$, on définit $i(\alpha, \beta)$ comme le nombre minimal de points d'intersection d'un représentant de α avec un représentant de β . On en déduit une application

$$i_* : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} .$$

Dans tout cet exposé, on utilisera plusieurs fois le théorème suivant dû à

D. Epstein [1] : soit $f_0 : S^1 \rightarrow M$ un plongement à deux côtés (fibré normal trivial) qui n'est pas le bord d'un disque ; si f_1 est un plongement homotope à f_0 , alors f_0 et f_1 sont isotopes. [Avec un point base, la même chose est vraie si f_0 n'est pas non plus le bord d'un ruban de Möbius.]

Dans le même article, on trouve la version relative : si N est une surface à bord et si A, B sont deux arcs plongés avec $\partial A = \partial B = A \cap \partial N = B \cap \partial N$, homotopes à extrémités fixes, alors A et B sont isotopes rel ∂ .

On utilisera aussi les deux faits suivants que l'on peut lire dans [1] :

Toute courbe simple homotope à zéro sur une surface est le bord d'un disque (conséquence du théorème de Jordan-Schönflies).

Sur une surface, un plongement du cercle à deux côtés n'est pas homotope à une application qui revêt k fois, $k > 1$, une courbe simple à deux côtés.

Proposition 10. Soient α'_0 et α'_1 deux courbes simples de M , non homotopes à zéro et se coupant transversalement. On suppose leurs classes d'isotopie α_0 et α_1 distinctes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

- 1° $\text{card}(\alpha'_0 \cap \alpha'_1) = i(\alpha_0, \alpha_1)$;
- 2° Toute courbe simple formée d'un arc de α'_0 et d'un arc de α'_1 est non-homotope à zéro dans M .
- 3° Soient $\tilde{\alpha}_0$ et $\tilde{\alpha}_1$ des composantes connexes respectivement de $p^{-1}(\alpha'_0)$ et $p^{-1}(\alpha'_1)$ dans le revêtement universel $p : \tilde{M} \rightarrow M$; on a $\text{card}(\tilde{\alpha}_0 \cap \tilde{\alpha}_1) \leq 1$.
- 4° Il existe sur M une métrique riemannienne ρ de courbure -1 , telle que α'_0 et α'_1 soient des géodésiques.

Démonstration. Le lecteur remarquera que les implications suivantes sont immédiates.

$1^{\circ} \implies 2^{\circ}$; en effet, une courbe simple γ de $\alpha'_0 \cup \alpha'_1$, qui est homotope à zéro dans M , est le bord d'un disque D ; de plus, γ est l'union d'un arc de α'_0 et d'un arc de α'_1 ; à travers le disque D , on peut faire une isotopie de α'_1 qui diminue son nombre de points d'intersection avec α'_0 .

$3^{\circ} \implies 2^{\circ}$ par la théorie des revêtements.

$4^{\circ} \implies 2^{\circ}$ et 3° par le lemme 1.

Lemme 11. Si $\text{card}(\alpha'_0 \cap \alpha'_1) > i(\alpha_0, \alpha_1)$, il existe deux points distincts q_1 et q_2 de $\alpha'_0 \cap \alpha'_1$ et deux chemins (non nécessairement simples) Γ_0, Γ_1 joignant q_1 à q_2 respectivement sur α'_0 et α'_1 , tels que le lacet singulier $\Gamma_0 * \Gamma_1^{-1}$ soit homotope à zéro dans M . Donc $3^{\circ} \implies 1^{\circ}$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe une isotopie $h_t : S^1 \rightarrow M, t \in [0, 1]$, telle que h_0 paramètre α'_0 et que $h_1(S^1)$ vérifie :

$$\text{card}(h_1(S^1) \cap \alpha'_1) < \text{card}(\alpha'_0 \cap \alpha'_1).$$

On pourra supposer l'isotopie h_t en position générale par rapport à α'_1 , c'est-à-dire que $h : S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$ soit transversale à α'_1 . Ainsi $h^{-1}(\alpha'_1)$ est une sous-variété de dimension 1 transverse au bord qui possède quatre type de composantes connexes, représentés sur la figure 13.

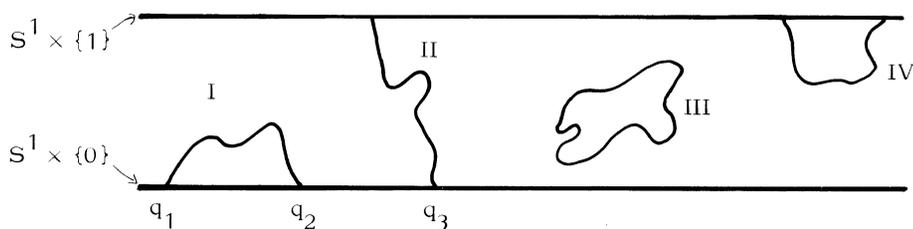


Figure 13

Les points $q_1, q_2, q_3 \dots$ de cette figure sont exactement les préimages, par le plongement h_0 , des points d'intersection $\alpha'_0 \cap \alpha'_1$. L'hypothèse signifie qu'il existe au moins une composante Γ_1 du type I ; on obtient Γ_0 en choisissant l'arc $\widehat{q_1 q_2}$ de $S^1 \times \{0\}$ qui est homotope à Γ_1 , à extrémités fixes, dans $S^1 \times [0, 1]$. □

Lemme. $2^{\circ} \implies 3^{\circ}$.

Démonstration. Si des composantes $\tilde{\alpha}_0$ et $\tilde{\alpha}_1$ se coupent en plus d'un point dans \tilde{M} ,

il est facile de trouver un disque Δ plongé dans \tilde{M} dont le bord est l'union d'un arc de $\tilde{\alpha}_0$ et d'un arc de $\tilde{\alpha}_1$. Sur Δ , on voit $p^{-1}(\alpha_0 \cup \alpha_1)$ comme sur la figure 14, où $p^{-1}(\alpha_0)$ est en pointillés et $p^{-1}(\alpha_1)$ est en traits pleins.

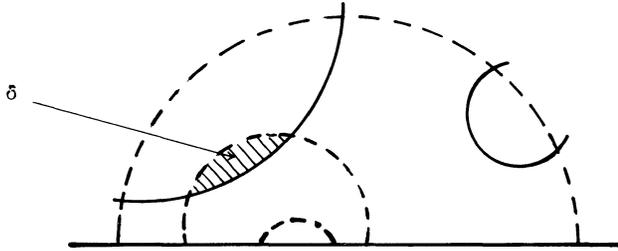


Figure 14

On peut trouver un disque δ (minimal) dont le bord est aussi réunion d'un arc plein et d'un arc pointillé et dont l'intérieur ne rencontre pas $p^{-1}(\alpha_0 \cup \alpha_1)$. L'immersion p plonge le bord de δ à cause de la minimalité. Maintenant, on peut affirmer que p plonge δ , car une immersion en codimension 0 qui plonge le bord et dont l'intérieur ne recoupe pas le bord est un plongement (le nombre de points de la fibre est localement constant). \square

Ainsi, on a prouvé l'équivalence des points 1°, 2° et 3° de la propriété 10.

Il reste à prouver 1° \implies 4°. Ceci se déduit immédiatement de la proposition 12 et du théorème 15.

Proposition 12. Soient α_0' , α_0'' et α_1' trois courbes simples de M , non homotopes à zéro. On suppose :

- 1° α_0' et α_0'' appartiennent à la même classe d'isotopie α_0 , qui est distincte de la classe α_1 de α_1' ;
- 2° $\text{card}(\alpha_0' \cap \alpha_1') = \text{card}(\alpha_0'' \cap \alpha_1') = i(\alpha_0, \alpha_1)$.

Alors, il existe une isotopie ambiante de la paire (M, α_1') qui pousse α_0' sur α_0'' .

Complément. Selon la même démonstration que ci-dessous, la proposition est encore valable si α_1' est un arc simple représentant un élément non trivial de $\pi_1(M, \partial M)$.

Démonstration. Soit $h : S^1 \times [0,1] \rightarrow M$ une application transversale sur α_1^i , dont la restriction $h|_{S^1 \times \{0\}}$ (resp. $h|_{S^1 \times \{1\}}$) paramètre α_0^i (resp. α_0'').

Lemme 13. Les composantes fermées de $h^{-1}(\alpha_1^i)$ sont homotopes à zéro dans $S^1 \times [0,1]$.

Démonstration. Soit γ une composante de $h^{-1}(\alpha_1^i)$, non homotope à zéro dans $S^1 \times [0,1]$; alors γ est isotope au bord. Soit d le degré de $h : \gamma \rightarrow \alpha_1^i$. On ne peut avoir $d = 0$, sinon α_0^i serait homotope à zéro.

On ne peut avoir $|d| > 1$; sinon, un multiple non trivial de α_1^i serait librement homotope à une courbe plongée, à savoir α_0^i . Ceci est connu comme impossible (voir la référence à Epstein citée au début du paragraphe). Si $|d| = 1$, c'est que α_0^i est homotope à α_1^i , ce qu'on a exclu. \square

Fin de la démonstration de la proposition 12.

A partir de là, les composantes de $h^{-1}(\alpha_1^i)$ sont des types I, II, III, IV de la figure 13. En fait, par la seconde hypothèse, I et IV n'existent pas. Ceci étant, comme $\pi_2(M, \alpha_1^i) = 0$, il est facile de tuer les composantes du types III. Si, après cela, $h^{-1}(\alpha_1^i)$ est vide, on conclut que α_0^i et α_0'' sont homotopes (donc isotopes) dans $M - \alpha_1^i$ et on a la conclusion par extension d'isotopie à support dans $M - \alpha_1^i$. Sinon, il reste des composantes du type II, que l'on peut rendre verticales. Mais, en général, l'application h ainsi construite est singulière et ne donne pas une isotopie.

Soient s_1, \dots, s_n les points de $h^{-1}(\alpha_1^i) \cap S^1 \times \{0\}$; ils découpent le cercle en intervalles I_1, \dots, I_n et, puisque $h^{-1}(\alpha_1^i) = \{s_1\} \times [0,1] \cup \dots \cup \{s_n\} \times [0,1]$, on peut penser que $h|_{I_k \times [0,1]}$ est une homotopie propre (r.e. : le bord bouge dans le bord) entre deux arcs plongés de la surface N obtenue en coupant M le long de α_1^i . Remarquons que, par l'hypothèse 2°, pour tout k , $h|_{I_k \times \{0\}}$ représente un élément non trivial de $\pi_1(N, \partial N)$. La proposition 12 s'obtient donc en appliquant à chacun de ces arcs le lemme 14 ci-dessous, qui généralise la version relative du résultat d'Epstein déjà cité. \square

Lemme 14. Soient une surface N , à bord, et γ_0, γ_1 deux arcs proprement plongés dans N . Soit $h : [0,1] \times [0,1] \rightarrow N$ une homotopie propre entre ces deux arcs : $h(t,0)$ (resp. $h(t,1)$) paramètre γ_0 (resp. γ_1) et $h(0,u), h(1,u)$ appartiennent à ∂N pour tout u .

Alors h est déformable, rel. $[0,1] \times \{0,1\}$, en une isotopie de γ_0 à γ_1 . De plus, si $h(0,u) = h(0,0)$ pour tout u (resp. et $h(1,u) = h(1,0)$), alors la défor-

mation peut se faire à travers des applications ayant les mêmes propriétés.

Démonstration. Comme toujours en pareille affaire, le lemme est clair si γ_0 et γ_1 ne se touchent qu'en leurs extrémités ; en effet, γ_0 et γ_1 délimitent un disque dans N , à travers lequel se fait l'isotopie cherchée ; l'isotopie est une déformation de l'homotopie initiale, car N est un espace d'Eilenberg-MacLane.

Pour la disjonction, on regarde le revêtement universel $p : \tilde{N} \rightarrow N$; on y considère une composante $\tilde{\gamma}_0$ de $p^{-1}(\gamma_0)$ et l'union $\tilde{\Gamma}_1$ de toutes les composantes de $p^{-1}(\gamma_1)$. Si on a pris soin de commencer par une première isotopie laissant fixes les extrémités de γ_0 pour rendre $\text{card}(\gamma_0 \cap \gamma_1)$ aussi petit que possible, alors, d'après l'équivalence $1^\circ \iff 3^\circ$ de la proposition 10, $\tilde{\gamma}_0$ rencontre chaque composante de $\tilde{\Gamma}_1$ en au plus un point.

Soit $\tilde{\gamma}_1$ une composante quelconque de $\tilde{\Gamma}_1$; on note $\tilde{\gamma}_1(0)$ et $\tilde{\gamma}_1(1)$ les extrémités de $\tilde{\gamma}_1$. Si $\tilde{\gamma}_0$ et $\tilde{\gamma}_1$ se rencontrent (ailleurs qu'en leurs extrémités), on a les configurations de la figure 15. Sur cette figure, les extrémités des arcs appartiennent à des composantes distinctes de $\partial\tilde{N}$, sauf mention explicite du contraire.

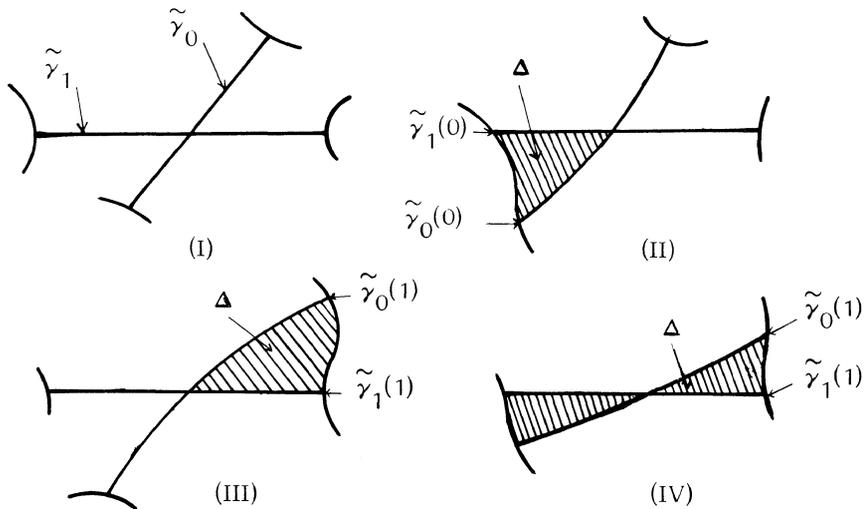


Figure 15

Le (I) est exclu ; en effet, cette configuration interdit l'existence d'une homotopie propre de disjonction. De même, le (II) est exclu dans une théorie où $h(0,u)$ est fixe. Par le même argument, les configurations (III) et (IV) sont exclues si, en plus, $h(1,u)$ est fixe.

Ainsi, dans la théorie où les extrémités sont fixes, le lemme est totalement démontré.

Analysons le cas où l'origine $\tilde{\gamma}_0(0)$ est fixe ; alors on n'a que les configurations (III) et (IV) . On voit dans \tilde{N} un triangle Δ . Quitte à changer de composante $\tilde{\gamma}_1$, on peut supposer que $\text{int } \Delta \cap \tilde{\Gamma}_1 = \emptyset$. Alors, $p|_{\Delta}$ est un plongement ; il y a une isotopie de γ_0 à support dans un voisinage de $p(\Delta)$, qui tue au moins un point d'intersection avec γ_1 . On continue ainsi de suite jusqu'à ce que $\text{int } \tilde{\gamma}_0 \cap \tilde{\Gamma}_1 = \emptyset$. On traite de la même façon le cas où les deux extrémités sont mobiles. \square

Théorème 15. La surface M étant munie d'une métrique de courbure -1 , toute courbe simple non homotope à zéro est isotope à une géodésique simple. De plus, deux géodésiques simples se coupent suivant le nombre minimal de points d'intersection dans leurs classes d'isotopie.

Démonstration. La seconde partie de l'énoncé découle de $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$ dans la proposition 10.

Soit $f : S^1 \rightarrow M$ un plongement non homotope à zéro ; d'après le lemme 4 , f est homotope à une immersion géodésique g . Soit $p : \tilde{M} \rightarrow M$ le revêtement universel. Soient $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}$ deux plongements propres d'images distinctes au-dessus de f ; soient \tilde{g}_0 et \tilde{g}_1 les applications géodésiques qui leur sont homotopes. D'après le lemme 1, \tilde{g}_0 et \tilde{g}_1 sont des plongements qui ont au plus un point commun. Montrons que \tilde{g}_0 et \tilde{g}_1 ne se rencontrent pas.

Si \tilde{M} est regardé comme l'intérieur du disque de Poincaré \mathbb{D}^2 , pour $i = 0, 1$, \tilde{g}_i a deux points-limites. Puisque l'homotopie de \tilde{g}_0 à \tilde{f}_0 est obtenue par relèvement d'une homotopie dans M , la distance hyperbolique de $\tilde{g}_0(x)$ à $\tilde{f}_0(x)$ est uniformément bornée pour $x \in \mathbb{R}$. On sait qu'au voisinage de l'infini, le ds^2 euclidien est infiniment petit devant le ds^2 hyperbolique ; donc, pour $x \rightarrow \pm\infty$, la distance euclidienne de $\tilde{g}_0(x)$ à $\tilde{f}_0(x)$ tend vers 0 . Donc \tilde{f}_0 a les mêmes points limites sur $\partial\mathbb{D}^2$ que \tilde{g}_0 . Alors, si \tilde{g}_0 et \tilde{g}_1 avait un point commun, par un argument d'intersection homologique (ou par l'application du théorème de Jordan) , \tilde{f}_0 et \tilde{f}_1 devraient se rencontrer. Ceci est impossible puisque f est un plongement.

Ainsi on a prouvé que l'image de g est une courbe simple que g revêt un certain nombre de fois. Pour voir que g est un plongement, on applique le résultat d'Epstein cité au début du paragraphe. \square

On peut donner de ce théorème une application qui éclaire la condition 3° de la proposition 10 .

Corollaire. Soient α_0^1 et α_1^1 deux courbes simples se coupant transversalement.

On suppose qu'elles ont des composantes $\tilde{\alpha}_i$ ($i = 0, 1$) de $p^{-1}(\alpha_i')$ dans le revêtement universel vérifiant $\text{card}(\tilde{\alpha}_0 \cap \tilde{\alpha}_1) = \infty$. Alors leurs classes α_0 et α_1 dans sont égales.

Démonstration. Vu l'hypothèse de transversalité, on a $\text{card}(\alpha_0' \cap \alpha_1') < \infty$. Ainsi il existe des points $* \in \alpha_0' \cap \alpha_1'$ et $x, y \in \tilde{\alpha}_0 \cap \tilde{\alpha}_1$, tels que $x \neq y$, $p(x) = p(y) = *$. On oriente chaque arc $\tilde{\alpha}_i$ de x vers y et α_i' comme $\tilde{\alpha}_i$. Pensons à α_0, α_1 comme des éléments de $\pi_1(M, *)$. Le segment de x à y sur $\tilde{\alpha}_0$ (resp. $\tilde{\alpha}_1$) couvre α_0 k fois (resp. α_1 ℓ fois). On a donc dans $\pi_1(M, *)$ l'égalité :

$$\alpha_0^k = \alpha_1^\ell .$$

Maintenant, on munit M d'une métrique de courbure -1 . Si g_i désigne la géodésique (unique) de \tilde{M} , invariante par T_{α_i} , on voit que $T_{\alpha_0^k} = T_{\alpha_1^\ell}$ laisse invariante g_0 et g_1 . Donc $g_0 = g_1$, $p(g_0) = p(g_1)$ et α_0', α_1' sont homotopes (librement) à la même géodésique de M . \square

De l'équivalence $1^\circ \iff 2^\circ$ de la proposition 10, on déduit l'affirmation suivante. Soient α', β', γ' trois courbes simples $\neq 0$ de M , avec $\alpha' \cap \gamma' = \beta' \cap \gamma' = \emptyset$; si $\text{card} \alpha' \cap \beta'$ est minimal dans $M - \gamma'$, alors $\text{card} \alpha' \cap \beta'$ est aussi minimal dans M . Ce critère va être utilisé ci-dessous.

On rappelle de l'exposé 1 que $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}})$ est l'espace "projectif" associé à $\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}}$ et que

$$\pi : \mathbb{R}_+^{\mathcal{J}} - \{0\} \longrightarrow P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}})$$

désigne la projection naturelle.

Proposition 16.

1° L'image de i_x est contenue dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}} - \{0\}$.

2° L'application πi_x (en particulier i_x) est injective.

Démonstration. Il suffit de prouver que, si $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathcal{J}$, il existe $\beta \in \mathcal{J}$ tel que

$$i(\alpha_1, \beta) = 0 \neq i(\alpha_2, \beta) .$$

Si $i(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$, il suffit de prendre $\beta = \alpha_1$. Si $i(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, il existe des courbes simples $\alpha_1' \in \alpha_1$ et $\alpha_2' \in \alpha_2$, telles que $\alpha_1' \cap \alpha_2' = \emptyset$. En coupant M le long de α_1' , on obtient une surface N contenant α_2' en son intérieur.

Comme α_2' n'est pas isotope à α_1' , il existe dans N une courbe β' non disjointe de α_2' dans N . Si α_2' ne sépare pas N , on prend β' avec

$\text{card}(\beta' \cap \alpha_2') = 1$. Si α_2' sépare N en N_1 et N_2 , on prend $\beta' = I_1 \cup I_2$ où I_j est un arc représentant un élément non trivial de $\pi_1(N_j, \alpha_2')$; cela est possible, car ni N_1 ni N_2 ne sont un anneau ou un disque.

Si β est la classe d'isotopie de β' dans M , on a, d'après la proposition 10 : $i(\alpha_2, \beta) \neq 0$. \square

§ IV. - SYSTÈMES DE COURBES SIMPLES SUR M ET ISOMÉTRIES EN GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

Je considère un système d'éléments distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathcal{A}$, avec la propriété que $i(\alpha_\ell, \alpha_q) \leq 1$. On définit le complexe $\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ayant comme sommets les $\alpha_1, \dots, \alpha_k$; les sommets α_ℓ, α_q sont joints par une arête si $i(\alpha_\ell, \alpha_q) = 1$. Je vais supposer dorénavant que $\Gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ est un arbre.

Lemme 17. Dans les conditions ci-dessus, soient $\alpha_j', \alpha_j'' \in \alpha_j$ tels que $\text{card}(\alpha_\ell', \alpha_q') = \text{card}(\alpha_\ell'', \alpha_q'') = i(\alpha_\ell, \alpha_q)$. Alors, il existe un difféomorphisme de M , isotope à l'identité, qui transforme $\cup \alpha_j'$ en $\cup \alpha_j''$.

Démonstration. Pour $k = 2$, c'est la proposition 12. Pour une démonstration par récurrence, on suppose que $\alpha_j' = \alpha_j''$ pour $j \leq \ell$, $\ell \geq 2$, la numérotation étant compatible avec la structure d'arbre. Soient p, q tels que $p \leq \ell < q$ et $i(\alpha_p, \alpha_q) = 1$. Soit N la variété obtenue en coupant M le long des α_j' , $j \leq \ell$ et $j \neq p$. Alors α_p' est coupé en un ou plusieurs arcs de N ; soit I celui qui rencontre α_q' (α_q' est une courbe fermée de N parce que Γ est un arbre); comme $\text{card}(\alpha_q' \cap I) = 1$, l'arc I représente un élément non trivial de $\pi_1(N, \partial N)$.

On prouve que α_q'' coupe en un point le même arc I (et non une éventuelle autre composante de $\alpha_p' \cap N$). Sinon, pour l'un des $j \neq p$ tels que $j \leq \ell$ et $i(\alpha_j, \alpha_p) = 1$, on aurait $\alpha_j = \alpha_q'$ [regarder, à la source de l'homotopie de α_q' à α_q'' dans M , la préimage des α_j' ; une de ses composantes est nécessairement parallèle au bord de l'anneau]. Maintenant, le complément de la proposition 12 est exploitable : on a, dans N , une isotopie qui pousse α_q'' sur α_q' et qui envoie $\alpha_p' \cap N$ en lui-même. \square

Application. Soit ρ une métrique de courbure -1 sur la surface M . On considère des courbes simples $\alpha_1', \dots, \alpha_k'$ comme sur la figure 16 (ici, on raisonne avec M fermée); $M - \cup \alpha_j'$ est une cellule. Soit α_j'' la géodésique, pour la métrique ρ , de

la classe d'isotopie de α_j^1 ; on vérifie que $\text{card}(\alpha_\ell^1 \cap \alpha_q^1) = \text{card}(\alpha_\ell^2 \cap \alpha_q^2)$. D'après le lemme 17, $M - \cup \alpha_j^1$ est une cellule. En particulier, la figure 16 est réalisable par des géodésiques.

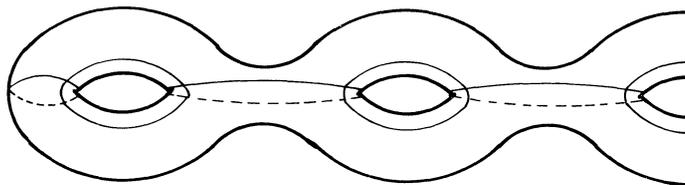


Figure 16

Théorème 18. Soit ρ une métrique de courbure -1 sur la surface compacte M . Le groupe $I(M, \rho)$ des isométries de ρ est fini et toute isométrie isotope à l'identité est l'identité.

Démonstration. Je commence par considérer l'ensemble M^M des applications quelconques $M \rightarrow M$, muni de la topologie de la convergence ponctuelle. Par le théorème de Tychonov, M^M est compact.

On remarque, d'autre part, que sur $I(M, \rho)$ la topologie de la convergence ponctuelle et la topologie de la convergence uniforme coïncident. [En effet, si je considère un ensemble fini X de M , suffisamment dense, une isométrie est complètement caractérisée par ce qu'elle fait sur X ] On remarque que $I(M, \rho)$ est fermé dans M^M .

D'autre part, je dis qu'une isométrie isotope à l'identité est égale à l'identité. En effet, soit φ une telle isométrie ; l'action de φ sur \mathcal{J} est triviale ; par l'unicité des géodésiques dans une classe d'isotopie donnée, en géométrie hyperbolique, la géodésique g_α de la classe $\alpha \in \mathcal{J}$ est invariante : $\varphi(g_\alpha) = g_\alpha$. On en déduit sans peine que φ est l'identité sur le système de géodésiques de la figure 16. Alors, φ est aussi l'identité sur la cellule complémentaire.

Donc $I(M, \rho)$ est discret. Mais un fermé discret dans un compact est fini. \square

Corollaire 19. Soit $f \in \text{Diff}(M)$ et $\mathfrak{T}(f)$ l'action naturelle de f sur l'espace de Teichmüller de M (voir exposé 7). Si $\mathfrak{T}(f)$ possède un point fixe, il existe un difféomorphisme périodique de M isotope à f .

RÉFÉRENCES

- [1] D.B.A. EPSTEIN, Curves on 2-manifolds and isotopies, Acta math. 115 (1966), p. 83-107.
- [2] J. CHEEGER & D.G. EBIN, Comparison theorems in Riemannian geometry, North-Holland, 1975.
- [3] R. SEELEY, Extension of C^∞ functions defined in a half space, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), p. 625-626.
- [4] B. MALGRANGE, Ideals of differentiable functions, Oxford University Press, 1966.

Astérisque

V. POÉNARU

L'espace des courbes simples fermées sur une surface

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 57-67

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__57_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EXPOSÉ 4

L'ESPACE DES COURBES SIMPLS FERMEES SUR UNE SURFACE

par V. POÉNARU

§ I . - La topologie faible

§ II . - L'espace \mathcal{L}^1 des courbes multiples

§ III . - Paramétrisation explicite de l'espace des courbes multiples

Appendice (A. Fathi). - Double décomposition d'une surface en pantalons

§ I . - LA TOPOLOGIE FAIBLE

Soit M une surface fermée orientable de genre $g \geq 2$. On note \mathcal{L} l'espace des classes d'isotopie (= d'homotopie) de courbes simples fermées non orientées, non homotopes à zéro dans M . On a déjà vu (exposé 3, § 3) que l'application composée :

$$\mathcal{L} \xrightarrow{i_*} \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} - \{0\} \xrightarrow{\pi} P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}})$$

est injective. L'application i_* s'étend en une application qu'on va désigner par la même lettre

$$i_* : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}},$$

par la formule

$$i_*(\lambda, \alpha)(\beta) = \lambda i(\alpha, \beta), \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \alpha, \beta \in \mathcal{L}.$$

Remarque. Si $\overline{i_*(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{L})}$ désigne la fermeture de $i_*(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{L})$ dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$, on a :

$$\pi(\overline{i_*(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{L})} - \{0\}) = \overline{\pi i_*(\mathcal{L})}.$$

Ceci est un fait général sur les cônes.

Proposition 1. Dans $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}})$, l'ensemble $\pi_{i_*}(\mathcal{J})$ est relativement compact.

Pour la démonstration, on commence par choisir sur M une métrique ρ de courbure -1 et on note $\ell(\alpha)$ la ρ -longueur de l'unique géodésique appartenant à la classe de $\alpha \in \mathcal{J}$.

Lemme 2. Il existe une constante $C = C(M, \rho)$, telle que, pour tout $\alpha, \beta \in \mathcal{J}$, on ait :

$$i(\alpha, \beta) \leq C \ell(\alpha) \ell(\beta).$$

Démonstration. Si $\alpha = \beta$, on a $i(\alpha, \beta) = 0$ et l'inégalité est claire. Supposons donc $\alpha \neq \beta$. Soit ϵ un nombre positif plus petit que le rayon d'injectivité de l'exponentielle. La géodésique g_α de la classe d'isotopie α peut être recouverte par moins de $(\frac{\ell(\alpha)}{\epsilon} + 1)$ petits arcs contenus chacun dans un disque géodésique. Idem pour g_β . Un petit arc de g_α coupe en au plus un point un petit arc de g_β , par définition du rayon d'injectivité ; donc, dans un petit arc de g_α , il y a, au plus, $(\frac{\ell(\beta)}{\epsilon} + 1)$ points d'intersection avec g_β . On trouve alors :

$$i(\alpha, \beta) = \text{card}(g_\alpha \cap g_\beta) \leq (\frac{\ell(\alpha)}{\epsilon} + 1) (\frac{\ell(\beta)}{\epsilon} + 1).$$

Comme $\ell(\alpha) > \epsilon$, l'inégalité cherchée est claire. \square

Sur M , je considère maintenant le système d'éléments $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2g+1} \in \mathcal{J}$ représenté sur la figure 1. Dans l'exposé 3, § 4, on a vu qu'un tel système peut se réaliser par des géodésiques.

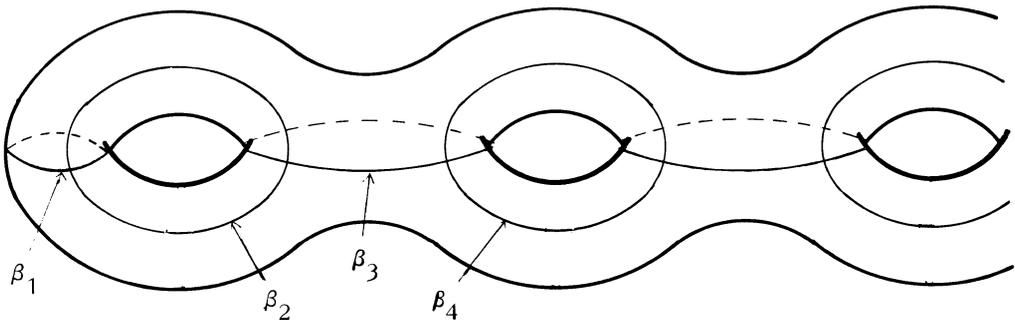


Figure 1

Lemme 3. Il existe une constante c telle que pour tout $\alpha \in \mathcal{S}$, on ait :

$$\sum_j i(\alpha, \beta_j) \geq c \ell(\alpha) .$$

Démonstration. Le système $\{g_{\beta_j}\}$ décompose M en un nombre de régions simplement connexes. Dans chacune d'elles, la longueur d'un arc géodésique est bornée, disons par L ; donc, on a le résultat cherché en prenant $c = 1/L$. \square

Démonstration de la Proposition 1. Pour une constante C fixée, je considère la partie $S(C) \subset \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$ définie par :

$$S(C) = \{f \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} \mid \forall \beta \in \mathcal{S}, f(\beta) \leq C \ell(\beta)\} .$$

Par le théorème de Tychonov, $S(C)$ est compact. Maintenant C étant la constante du lemme 2, je considère $S_0 \subset S(C)$, qui est l'adhérence dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$ de l'ensemble des fonctionnelles du type $i_{\ast}(\alpha)/\ell(\alpha)$. D'après le lemme 3, on a $S_0 \subset \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} - \{0\}$. D'autre part, S_0 est compact; donc $\pi(S_0)$ est compact. D'après le lemme 2, on a l'inclusion $\pi i_{\ast}(\mathcal{S}) \subset \pi(S_0)$; il en résulte la compacité de $\overline{\pi i_{\ast}(\mathcal{S})}$. \square

§ II . - L'ESPACE DES COURBES MULTIPLES

Comme \mathcal{S} est difficile à étudier, on introduit un espace plus grand et plus facile à étudier. Soit $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(M)$ l'espace des classes d'isotopie de sous-variétés fermées de dimension 1 (non orientées et non nécessairement connexes) dont aucune composante n'est homotope à zéro. Comme dans le cas des courbes simples, on définit $i(\alpha, \beta)$ pour $\alpha \in \mathcal{S}'$ et $\beta \in \mathcal{S}$, ainsi que $i_{\ast} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$ et $\pi i_{\ast} : \mathcal{S}' \rightarrow P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}})$. L'intersection minimale d'une courbe multiple et d'une courbe simple est la somme des intersections minimales des différentes composantes.

Remarque. Selon le même raisonnement qu'au § 3 de l'exposé 3, on prouve que i_{\ast} est injectif et que deux éléments α_1 et α_2 de \mathcal{S}' ont même image par πi_{\ast} si et seulement si ils sont multiples entiers d'un même $\alpha_0 \in \mathcal{S}'$ [il y a en effet une opération naturelle $\mathbb{N} \times \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$].

Théorème 4. Dans $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}})$, on a :

$$\overline{\pi i_{\ast}(\mathcal{S})} = \overline{\pi i_{\ast}(\mathcal{S}')} .$$

En appliquant le Théorème 1, on obtient :

Corollaire 4 bis. Dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}}$, on a :

$$i_{\times} \mathcal{J}^1 \subset \overline{i_{\times} (\mathbb{R}_+ \times \cdot)} .$$

Démonstration du théorème 4. Il s'agit de montrer que $\pi i_{\times}(\mathcal{J})$ est dense dans $\pi i_{\times}(\mathcal{J}^1)$. Soit $\alpha \in \mathcal{J}^1$ représenté par la réunion de courbes simples deux à deux disjointes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. On peut choisir une courbe γ , simple et connexe, telle que $\text{card}(\gamma \cap \alpha_j)$ soit égal à $i(\gamma, \alpha_j)$ et non nul pour tout j . Soient n_1, n_2, \dots, n_k des entiers positifs. Je vais construire un élément $\Gamma(n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{J}$. Chaque arc de γ , qui traverse un petit voisinage tubulaire de α_j , est remplacé par un arc de mêmes extrémités faisant n_j tours positifs (voir Figure 2, pour $n_j = 2$).

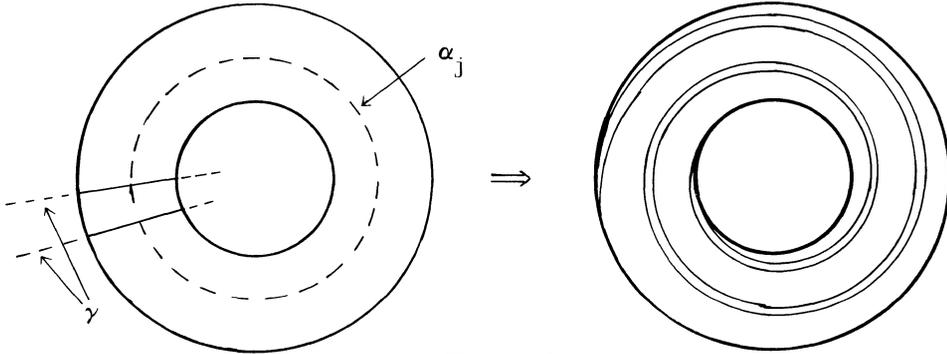


Figure 2

On obtient par cette construction une courbe $\Gamma(n_1, \dots, n_k)$ bien définie à isotopie près. On prouve dans l'appendice que, pour $\beta \in \mathcal{J}$, on a l'inégalité :

$$|i(\Gamma(n_1, \dots, n_k), \beta) - \sum_j n_j i(\gamma, \alpha_j) i(\alpha_j, \beta)| \leq i(\gamma, \beta) .$$

Prenons $n_j = n \prod_{\ell \neq j} i(\gamma, \alpha_\ell)$. On obtient une courbe notée brièvement $\Gamma(n)$; il vient :

$$|i(\Gamma(n), \beta) - n \prod_j i(\gamma, \alpha_j) [\sum_j i(\alpha_j, \beta)]| \leq i(\gamma, \beta) .$$

Autrement dit, lorsque l'on passe au projectif et que n tend vers l'infini, les contributions de γ aux intersections deviennent négligeables. Donc la suite $\pi i_{\times}(\Gamma(n))$ tend vers $\pi i_{\times}(\alpha)$. \square

§ III . - PARAMÉTRISATION EXPLICITE DE L'ESPACE DES COURBES MULTIPLES

Rappelons que P^2 désigne le pantalon standard ; les courbes du bord sont numérotées $\partial_1 P^2, \partial_2 P^2, \partial_3 P^2$. Dans l'exposé 2, § III, on a classifié les arcs multiples de P^2 . Un élément τ de $A^1(P^2)$, espace des arcs multiples, est complètement caractérisé par les trois nombres entiers $m_j = i(\tau, \partial_j P^2)$, $j = 1, 2, 3$; un triplet d'entiers non tous nuls décrit un arc multiple dès que $m_1 + m_2 + m_3$ est pair.

Dans chaque classe de $A^1(P^2)$, on choisit une fois pour toutes un représentant, dit canonique, celui dessiné sur la figure 3. Pour chaque $\tau \in A^1(P^2)$ et chaque $\partial_j P^2$, je choisis un arc x_j composante connexe de $\partial_j P^2 - \tau$, comme dans la figure 3. Cette définition est univoque, vu que (P^2, τ) n'admet pas d'automorphisme non trivial conservant l'orientation.

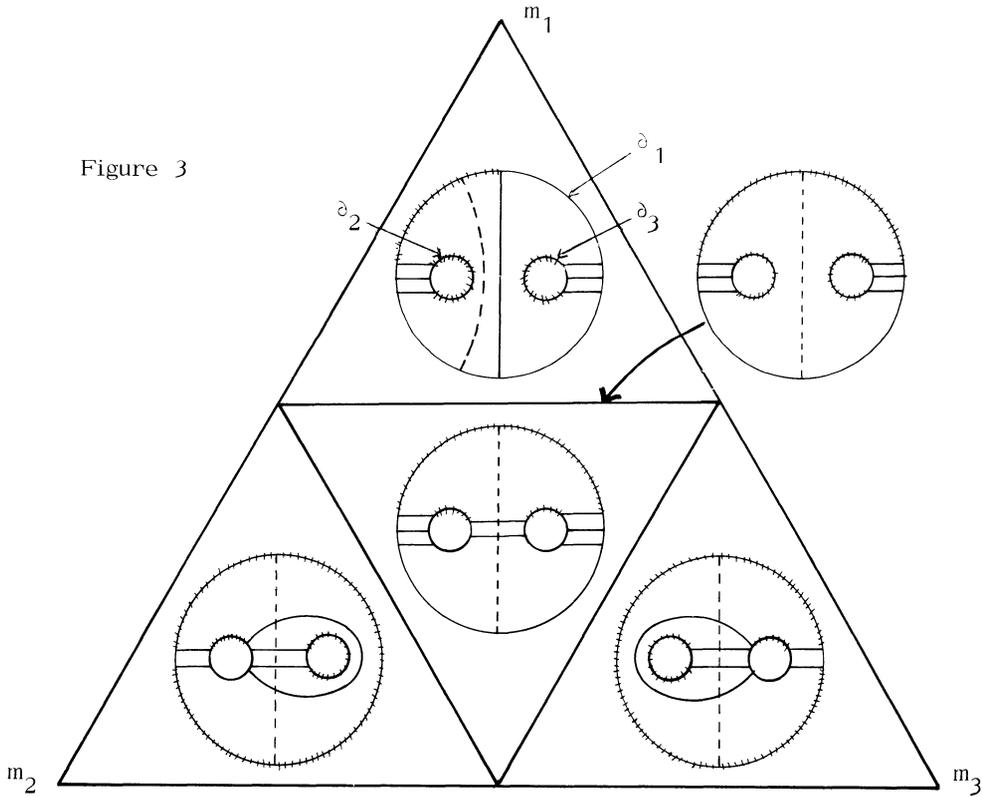


Figure 3

(en pointillés, les arcs "jaunes" ;
les arcs x_j sont bâtonnés)

Pour chaque modèle τ , on choisit un arc jaune $J_1 = J_1(\tau)$ qui a les propriétés suivantes :

- 1° J_1 est un arc simple joignant $\partial_1 P^2$ à lui-même et qui coupe P^2 en deux régions dont l'une contient $\partial_2 P^2$ et l'autre $\partial_3 P^2$;
- 2° J_1 a une extrémité dans l'arc $x_1(\tau)$;
- 3° J_1 a une intersection minimale avec τ .

On construit de même les arcs J_2 et J_3 .

Remarque. Dans l'exposé 6, on classifiera les feuilletages mesurés sur P^2 . Les modèles de la figure 3 sont des "modèles discrets" pour ces feuilletages, où on ne voit que quelques unes des feuilles non singulières. D'ailleurs, pour les classifications des courbes multiples, on suit une démarche analogue à celle qui sera suivie pour la classification des feuilletages mesurés : par exemple la technique de l'arc jaune qui sert à repérer la façon de recoller les pantalons pour reconstituer la surface.

Pour paramétrer \mathcal{J}' , on fait un certain nombre de choix.

I) On choisit $3g - 3$ courbes simples $K_1, K_2, \dots, K_{3g-3}$, mutuellement disjointes, coupant M en $2g - 2$ régions diffeomorphes au pantalon. On prend les K_i à complémentaire connexe dans M ; ainsi, les pantalons R_j sont plongés dans M , ou encore chaque K_i adhère à deux pantalons distincts.

II) Pour chaque K_j , on choisit deux courbes simples K'_j et K''_j comme sur la figure 4 (cela est possible à cause de la condition précédente) ; K'_j et K''_j diffèrent par un twist de Dehn positif le long de K_j (cela ne dépend que de l'orientation de la surface et non de celle de K_j) .

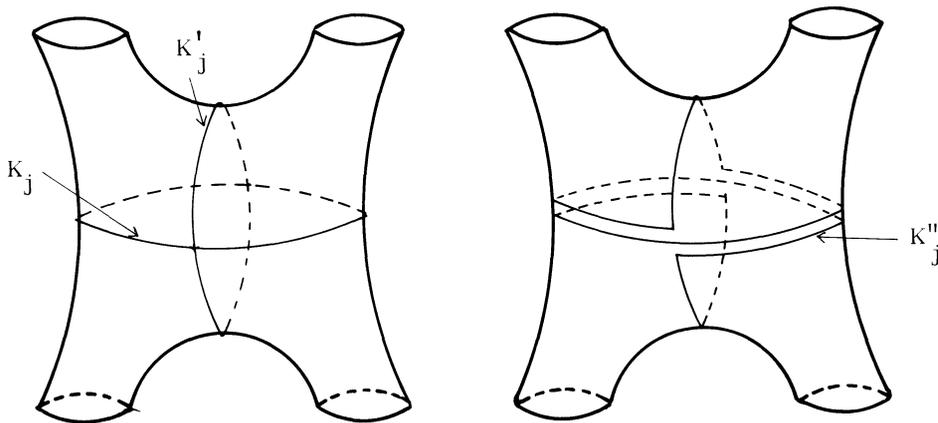


Figure 4

III) Pour chaque K_j , on se donne un voisinage tubulaire $K_j \times [-1, +1]$; ils sont pris deux à deux disjoints; le complémentaire de leur réunion est un nombre de pantalons deux à deux disjoints, R'_1, \dots, R'_{2g-2} .

IV) Chaque R'_j est paramétré par P^2 , via un difféomorphisme φ_j , bien fixé, (pas seulement à isotopie près).

On considère dans \mathbb{R}_+^{9g-9} le cône :

$$B = \{ (m_i, s_i, t_i) \mid i = 1, \dots, 3g-3, m_i, s_i, t_i \geq 0, (m_i, s_i, t_i) \in \partial(\leq \nabla) \} .$$

Il est homéomorphe à \mathbb{R}^{6g-6} (le cône sur $\partial(\leq \nabla)$ est homéomorphe à \mathbb{R}^2). On va construire une application de classification $\Phi : \mathcal{A}^1 \rightarrow B$.

Soit $\beta \in \mathcal{A}^1$; on commence par définir $m_j(\beta) = i(\beta, K_j)$. La connaissance de ces entiers déterminent des modèles dans les pantalons R'_k : le modèle respectif de P^2 est transporté par le difféomorphisme φ_k . Si le représentant β_0 de β est choisi d'intersection minimale avec le bord de tous les pantalons R'_k , alors $\beta_0|_{R'_k}$ est isotope au modèle. On choisit donc β_0 égal au modèle dans tous les pantalons R'_k ; on dira que ce représentant est en forme normale. Noter que si β_0 a une composante isotope à K_j , celle-ci est contenue dans l'anneau $K_j \times [-1, +1]$.

Lemme 5. La forme normale de β est "unique". Précisément, si β_0 et β_1 sont deux représentants de β en forme normale, alors, pour tout $j = 1, \dots, 2g-2$, $\beta_0 \cap K_j \times [-1, +1]$ et $\beta_1 \cap K_j \times [-1, +1]$ sont isotopes rel le bord.

Démonstration. Nous avons besoin d'une extension de la prop. 12 (exposé 3) au cas où l'une des courbes est multiple; la démonstration est analogue. Il s'agit de ceci: si γ_0 est une composante de β_0 et si γ_1 est la composante correspondante de β_1 , alors il existe une isotopie de M qui pousse γ_0 en γ_1 et qui laisse invariante toutes les courbes $K_j \times \{-1\}$ et $K_j \times \{+1\}$, $j = 1, 2, \dots, 3g-3$. En réalité, il ne manque à la démonstration de la proposition citée que le complément suivant: si $\gamma_0 \cap K_j \times \{\pm 1\} = \gamma_1 \cap K_j \times \{\pm 1\} = \emptyset$, alors γ_0 est isotope à γ_1 dans $M - K_j \times \{\pm 1\}$. Cette affirmation est vraie par les arguments "classiques" (lemme 13 de l'exposé 3), sauf éventuellement si γ_0 est isotope à K_j ; mais alors, à cause de la "forme normale", il n'y a rien à démontrer.

Ceci étant, dans la discussion ci-dessus, on peut remplacer γ_0 (resp. γ_1) par le paquet $\overline{\gamma_0}$ (resp. $\overline{\gamma_1}$) de toutes les composantes de β_0 (resp. β_1) parallèle à γ_0 (resp. γ_1). On peut donc fabriquer une forme normale β_0^1 avec les propriétés suivantes:

1° β_0^1 et β_0 sont isotopes par une isotopie respectant les courbes $K_j \times \{\pm 1\}$;

2° Le paquet $\overline{\gamma_0^1}$, correspondant à $\overline{\gamma_0}$, coïncide avec $\overline{\gamma_1}$.

Soit maintenant δ_0 une courbe de $\beta_0^1 - \overline{\gamma_1}$ et soit δ_1 la courbe correspondante de $\beta_1 - \overline{\gamma_1}$. Puisque δ_0 n'est pas parallèle à $\overline{\gamma_1}$, δ_0 et δ_1 sont isotopes dans $M - \overline{\gamma_1}$. Toujours par les mêmes arguments, on trouve alors qu'il existe une isotopie de M , constante sur $\overline{\gamma_1}$ et respectant les courbes $K_j \times \{\pm 1\}$ qui pousse δ_0 en δ_1 . On continue ainsi de suite. Finalement, β_0 et β_1 sont isotopes, par une isotopie qui respecte toutes les courbes $K_j \times \{\pm 1\}$.

Maintenant, je dis que l'isotopie ci-dessus peut être choisie constante dans tous les petits pantalons R_j^1 , ce qui démontre le lemme. C'est évident si $\beta_0 \cap R_j^1$ est vide. Sinon, c'est dû au fait que les lacets de $\text{Diff}(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ sont tous homotopes à zéro (voir exposé 2). \square

Ce lemme est essentiel pour la poursuite de la classification. Les modèles $\beta_0 \cap R_j^1$ sont équipés de leurs "arcs jaunes". Considérons la courbe K_j et les deux pantalons adjacents R_1 et R_2 . Dans les petits pantalons R_1^1 et R_2^1 , on a les deux arcs jaunes J_1 et J_2 émanant des bords respectifs parallèles à K_j . Il existe dans $K_j \times [-1, +1]$ des arcs simples S_j, S_j^1, T_j et T_j^1 tels que $J_1 \cup S_j \cup J_2 \cup S_j^1$ soit isotope à K_j^1 et que $J_1 \cup T_j \cup J_2 \cup T_j^1$ soit isotope à K_j^1 . Si on impose $\partial S_j = \partial T_j$ et $\partial S_j^1 = \partial T_j^1$, $S_j \cap S_j^1 = \emptyset$, $T_j \cap T_j^1 = \emptyset$, alors $S_j \cup S_j^1$ (resp. $T_j \cup T_j^1$) est unique à isotopie près rel. le bord. D'autre part, $T_j \cup T_j^1$ se déduit de $S_j \cup S_j^1$ par un twist de Dehn positif sur l'anneau.

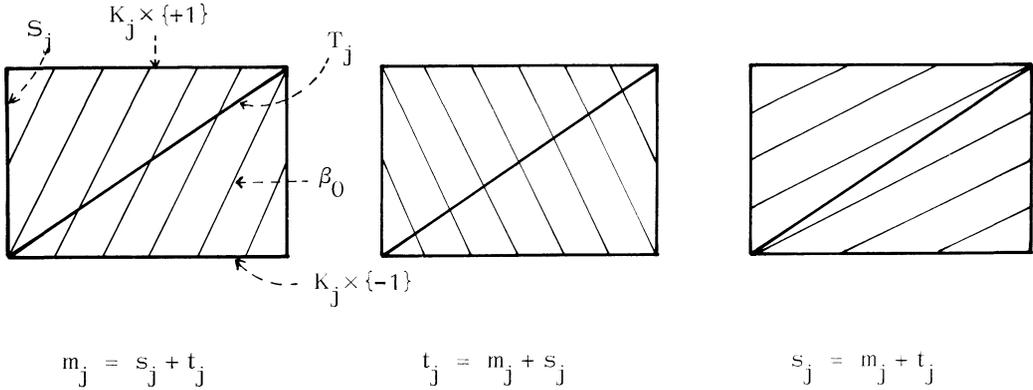
Puisque les extrémités de ces arcs ne sont pas sur β_0 , cela a un sens de les mettre en position d'intersection minimale avec β_0 . Ceci étant fait, on pose :

$$s_j(\beta) = \text{card}(\beta_0 \cap S_j)$$

$$t_j(\beta) = \text{card}(\beta_0 \cap T_j) .$$

Lemme 6. Pour tout j , le triplet $(m_j(\beta), s_j(\beta), t_j(\beta))$ appartient au bord $\partial(\leq \nu)$ de l'inégalité du triangle. [Comparer au théorème de classification de $\mathcal{L}^1(T^2)$ dans l'exposé 1.]

Démonstration. Elle tient dans la figure 5. \square



(l'anneau $K_j \times [-1, +1]$ est coupé le long de S_j)

Figure 5

Soit $B_0 \subset B$ l'ensemble des points $\neq 0$, de coordonnées entières, vérifiant en plus la conditions suivante : si $K_{j_1}, K_{j_2}, K_{j_3}$ sont au bord d'un même pantalon, $m_{j_1} + m_{j_2} + m_{j_3}$ est pair.

Théorème 7. L'application $\Phi : \mathcal{S}^1 \rightarrow B$ est une bijection de \mathcal{S}^1 sur B_0 .

Remarque. Par une procédure analogue, on aura une classification des feuilletages mesurés et des structures de Teichmüller. En réalité, comme on l'expliquera, le théorème 7 ci-dessus est strictement contenu dans le théorème de classification des feuilletages mesurés. Mais la simplicité des moyens mis en oeuvre ici vaut d'exposer ce cas particulier [en particulier, pour les feuilletages, on n'obtient l'unicité de la forme normale qu'après de longs détours].

Démonstration. L'image est évidemment contenue dans B_0 . D'autre part, on a une recette pour fabriquer une courbe multiple β à partir d'un élément $\{m_j, s_j, t_j \mid j = 1, \dots, 3g-3\}$ de B_0 . D'après l'exposé 2, les coefficients m_j déterminent des arcs dans les petits pantalons R_k^1 . Avec eux, viennent des arcs jaunes et donc, pour tout j , on a des arcs S_j et T_j dans l'anneau $K_j \times [-1, +1]$.

Si $m_j = 0$, $s_j = t_j$ indique le nombre de courbes de β parallèles à K_j . Si $m_j \neq 0$, on a déjà m_j points sur $K_j \times \{-1\}$ et sur $K_j \times \{+1\}$; les coefficients s_j

et t_j déterminent complètement la façon de les joindre. Il reste à vérifier que la courbe multiple ainsi construite a la propriété d'avoir une intersection minimale avec chaque K_j , c'est-à-dire que $i(\beta, K_j) = m_j$; on utilise pour cela le critère de la proposition 10 de l'exposé 3.

Une fois que S_j et T_j sont fixés, $\beta_0 \cap K_j \times [-1, +1]$ est déterminé, à isotopie rel. le bord près, par s_j et t_j . L'injectivité de Φ en découle. \square

Remarque. Les membres du séminaire ne savent pas détecter quels sont les coefficients d'une courbe simple.

De toute évidence, Φ est homogène (de degré 1) par rapport à la multiplication par un scalaire entier. On peut donc étendre Φ par homogénéité à $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{J} \rightarrow B$.

Corollaire 8. L'application $\Phi : \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{J} \rightarrow B$ est injective.

Démonstration. Sinon, il existe α_0 et $\alpha_1 \in \mathcal{J}$ et un scalaire $\lambda > 0$, tels que $\Phi(\alpha_1) = \lambda \Phi(\alpha_0)$. Il est très facile de voir que λ est rationnel. Donc, on a des entiers n_0 et n_1 tels que $\Phi(n_0 \alpha_0) = \Phi(n_1 \alpha_1)$. D'après le théorème 7, on a $n_0 \alpha_0 = n_1 \alpha_1$. D'où on déduit immédiatement $\alpha_0 = \alpha_1$. \square

Problème. Montrer directement que $\Phi(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{J})$ est dense dans B . Cela est plausible puisque le cône (positif) sur B_0 est dense dans B . Bien entendu, cela résulte du théorème suivant qui est la version "discrète" du théorème sur les feuilletages et qui ne sera démontré que dans l'exposé 6.

Théorème 9. Il existe un cône fermé \mathcal{C} dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}}$ et une application $\theta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow B$, continue, positivement homogène de degré 1 et rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}_+ \times \mathcal{J} \text{ (resp. } \mathcal{J}^1) & \xrightarrow{i_*} & \mathcal{C} \subset \mathbb{R}_+^{\mathcal{J}} \\
 & \searrow \Phi & \swarrow \theta_{\mathcal{C}} \\
 & & B
 \end{array}$$

De plus, $\theta_{\mathcal{C}}$ induit un homéomorphisme de $\overline{i_*(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{J}^1)}$ sur B .

Conséquences. 1° $\Phi(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{J})$ est dense dans B . (Utiliser le théorème 4 et le fait

que $\Phi(\mathcal{R}^1)$ est un "réseau" ainsi que la continuité et l'homogénéité de θ_c .

2° L'espace $\overline{\pi i_{\ast}(\mathcal{R})}$ est homéomorphe à S^{6g-7} .

Remarque. L'existence de θ_c signifie que les coefficients $s_j(\beta)$ et $t_j(\beta)$ sont donnés par des formules continues homogènes de degré 1 en fonction des $i(\beta, \alpha)$, $\alpha \in \mathcal{R}$. On donnera ces formules explicites dans le cadre des feuilletages mesurés ; elles permettront d'interpoler des valeurs continues des variables .

D'autre part, comme Φ est injective pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$, il existe une application $\psi_\alpha : B_0 \rightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout $\beta \in \mathcal{R}^1$, on ait :

$$i(\beta, \alpha) = \psi_\alpha(\Phi(\beta)) .$$

Il paraît très difficile d'explicitier ces dernières formules .

Astérisque

ALBERT FATHI

Appendice : Double décomposition d'une surface en pantalons

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 68-70

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__68_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

APPENDICE

DOUBLE DÉCOMPOSITION D'UNE SURFACE EN PANTALONS

par Albert FATHI

Dans une première partie, on va donner une démonstration de l'inégalité utilisée pour prouver le théorème 4. Dans la seconde partie, on appliquera cette inégalité pour modifier par un twist une décomposition en pantalons de la surface M .

Première partie

On a un système $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ de courbes simples mutuellement disjointes sur M . D'autre part, γ est une courbe simple dont l'intersection avec chaque α_j est minimale (parmi les courbes isotopes à γ). On se donne des entiers positifs n_j . On construit Γ en faisant opérer sur γ un twist positif de n_j tours le long de α_j , $j = 0, \dots, k$ (la notion de twist positif ne dépend que d'une orientation de M).

Proposition 1. Pour toute courbe simple β , on a la formule :

$$\left| i([\Gamma], [\beta]) - \sum_j n_j i([\gamma], [\alpha_j]) i([\alpha_j], [\beta]) \right| \leq i([\gamma], [\beta])$$

où $[\]$ désigne "classe d'isotopie" .

Démonstration. Tel que Γ a été décrit, Γ coïncide avec γ hors des voisinages tubulaires des α_j . La position de Γ et γ aux extrémités d'un arc commun est donnée sur la figure 1. Donc Γ est approchable par une courbe notée Γ' qui

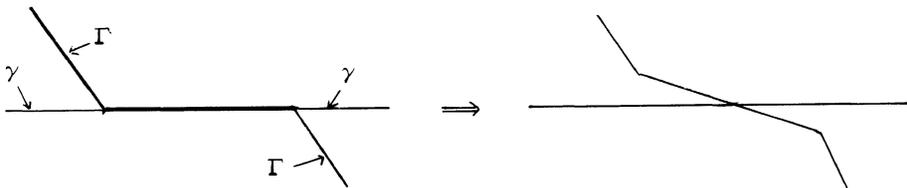


Figure 1

traverse une fois chaque intervalle de $\Gamma \cap \gamma$. Cela est dû au fait que tous les twists sont positifs. En utilisant le critère de la proposition 10 (exposé 3), on vérifie que $\text{card}(\gamma \cap \Gamma') = i([\gamma], [\Gamma'])$.

On observe que $\gamma \cup \Gamma'$ est l'image d'une application continue, définie sur $\sum_j n_j i([\gamma], [\alpha_j])$ exemplaires de S^1 , $n_j i([\gamma], [\alpha_j])$ exemplaires de S^1 allant dans la classe d'homotopie libre de $[\alpha_j]$. Donc, on a l'inégalité :

$$\text{card}(\beta \cap (\gamma \cup \Gamma')) \geq \sum_j n_j i([\gamma], [\alpha_j]) i([\alpha_j], [\beta]) .$$

Si β ne passe pas par les points d'intersection de γ avec Γ' , on a :

$$\text{card}(\beta \cap (\gamma \cup \Gamma')) = \text{card}(\beta \cap \gamma) + \text{card}(\beta \cap \Gamma') .$$

Si on prend pour β une géodésique d'une métrique de courbure -1 pour laquelle γ et Γ' sont géodésiques (elle existe d'après la proposition 10 de l'exposé 3), on a :

$$\text{card}(\beta \cap (\gamma \cup \Gamma')) = i([\Gamma'], [\beta]) + i([\gamma], [\beta]) ,$$

ce qui donne une des inégalités cherchées.

Il reste à prouver :

$$i([\Gamma'], [\beta]) \leq \sum_j n_j i([\gamma], [\alpha_j]) i([\alpha_j], [\beta]) + i([\gamma], [\beta]) .$$

Cette fois-ci, on utilise le représentant Γ au lieu de Γ' . On choisit β en position minimale par rapport aux α_j et ne passant pas par les points d'intersection de γ avec α_j . Chaque fois que β coupe α_j , β traverse le tube correspondant. Il vient donc $n_j i([\gamma], [\alpha_j])$ points d'intersection avec Γ . On a donc :

$$\text{card}(\Gamma \cap \beta) = \text{card}(\beta \cap \gamma) + \sum_j n_j i([\gamma], [\alpha_j]) i([\alpha_j], [\beta]) .$$

Si, en plus, β a une intersection minimale avec γ , on a $\text{card}(\beta \cap \gamma) = i([\gamma], [\beta])$; le membre de gauche est toujours supérieur ou égal à $i([\Gamma], [\beta])$. \square

Deuxième partie

Soit M une surface fermée de genre $g > 1$. Soit $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_{3g-3}\}$ un système de courbes simples mutuellement disjointes sur M avec les propriétés suivantes :

- 1° K_j est à complémentaire connexe dans M ;
- 2° Si on coupe M le long de ces courbes, on obtient $(2g - 2)$ pantalons (disques à deux trous).

On construit très facilement une courbe simple α coupant chaque K_j de façon essentielle : $i([\alpha], [K_j]) \neq 0$. Soit φ un difféomorphisme de M , égal à l'identité hors d'un voisinage tubulaire de α , et coïncidant avec un twist de Dehn d'un tour dans le tube. On pose :

$$K'_j = \varphi(K_j) .$$

Evidemment, le système $\mathcal{K}' = \{K'_1, \dots, K'_{3g-3}\}$ possède les propriétés 1° et 2° .

Proposition 2. Pour tout j, k , on a :

$$i([K_j], [K'_k]) \neq 0 .$$

Démonstration. D'après l'inégalité de la proposition 1, il vient :

$$\left| i([K'_k], [K_j]) - i([K_k], [\alpha]) i([\alpha], [K_j]) \right| \leq i([K_k], [K_j]) = 0 . \quad \square$$

Remarque. On peut prendre α avec $i([\alpha], [K_j]) = 2$ pour tout j . On obtient alors $i([K'_k], [K_j]) = 4$ pour tout j, k .

Astérisque

A. FATHI

F. LAUDENBACH

Les feuilletages mesurés

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 71-89

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__71_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EXPOSÉ 5

LES FEUILLETAGES MESURÉS

par A. FATHI et F. LAUDENBACH

§ I. - Définition. Le théorème de récurrence de Poincaré
La formule d'Euler-Poincaré

§ II. - Feuilletages mesurés et courbes simples

§ III. - Les courbes comme feuilletages mesurés

Appendice (V. Poénaru). - Spines des variétés de dimension 2

§ I. - DÉFINITION. LE THÉORÈME DE RÉCURRENCE DE POINCARÉ LA FORMULE D'EULER-POINCARÉ

I. 1. Définition. Soient M une surface $(+)$ et \mathfrak{F} un feuilletage de M avec singularités isolées. On appelle mesure transverse invariante une mesure μ définie sur chaque arc transversal au feuilletage et vérifiant la propriété d'invariance suivante :

Soient $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow M$ deux arcs transversaux à \mathfrak{F} , isotopes à travers des arcs transversaux dont les extrémités restent dans la même feuille ;
alors, $\mu(\alpha) = \mu(\beta)$.

Si l'arc passe par une singularité, la transversalité s'entend en tout point de l'arc appartenant à une feuille régulière.

N.B. Dans la suite, on se limite au cas où la mesure est régulière par rapport à la mesure de Lebesgue : chaque point régulier admet une carte lisse (x, y) où le feuilletage est défini par dy et la mesure sur chaque arc transverse est induite par dy .

($+$) La théorie peut se faire pour des surfaces non orientables. Pour simplifier, on supposera M orientable.

I. 2. Singularités permises à l'intérieur.

Pour chaque entier $k \geq 1$, on considère la singularité de la forme quadratique holomorphe $z^k dz^2$. On considère

$$\operatorname{Im} \sqrt{z^k} dz^2 = r^{k/2} (r \cos(\frac{2+k}{2} \theta) d\theta + \sin(\frac{2+k}{2} \theta) dr)$$

qui est une forme de degré 1 bien définie au signe près. Elle définit donc un feuilletage mesuré dont l'origine est une singularité isolée admettant pour séparatrices les demi-droites $r \geq 0$, $\frac{2+k}{2} \theta = 0 \pmod{\pi}$.

On choisit pour modèle de la singularité un domaine compact contenant l'origine, limité par des arcs transversaux au feuilletage (faces) et des arcs contenus dans les feuilles (côtés).

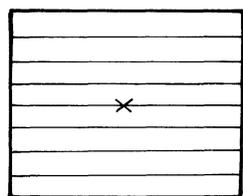
Remarque. Soit ω une forme différentielle fermée de degré 1 sur M , ($\partial M = \emptyset$), dont les singularités sont de Morse (propriété générique). Supposons qu'en plus ω n'a pas de centre (point critique d'indice 0 ou 2), alors ω définit un feuilletage mesuré. Il est facile de voir qu'un feuilletage mesuré est défini par une forme fermée si et seulement s'il est transversalement orientable dans le complémentaire des singularités.

I. 3. Singularités permises au bord.

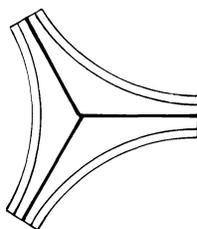
Les points réguliers du bord sont ceux où le bord est transversal au feuilletage ou bien ceux au voisinage duquel le bord coïncide avec une feuille.

Les points singuliers admettent pour carte la trace des modèles ci-dessus sur le demi-plan supérieur si k est pair, ou sur le demi-plan de partie réelle négative si k est impair.

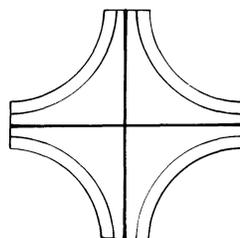
Finalement, dans tout ce travail, étant donné un feuilletage mesuré (\mathfrak{F}, μ) sur la variété M , chaque point de M admet pour voisinage un domaine de carte feuilletée isomorphe à l'un des modèles de la figure 1.



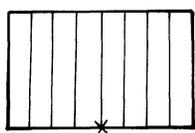
Point régulier
intérieur



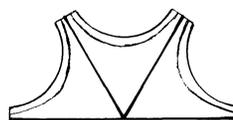
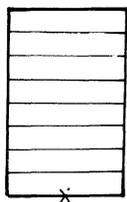
Point singulier
intérieur (k = 1)



Point singulier
intérieur (k = 2)



Points réguliers sur le bord



Points singuliers sur le bord

Figure 1

N.B. Dans la carte d'un point singulier, on conviendra que les séparatrices appartiennent à des plaques différentes. Ainsi, dans M , toutes les feuilles sont-elles difféomorphes à des intervalles de \mathbb{R} ou à S^1 .

I.4. Bon atlas.

Si M est compacte, il existe une constante ϵ_0 et deux recouvrements finis $\{U_j\}_{j \in J}$, $\{V_j\}_{j \in J}$ par des domaines de cartes vérifiant :

1° $M = \bigcup_{j \in J} (\text{int } U_j)$;

2° Pour tout $j \in J$, $U_j \subset V_j$ et les faces de U_j sont contenues dans les faces de V_j (figure 2) .

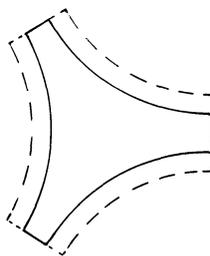
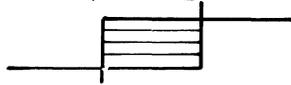


Figure 2

3° Tout point des côtés de U_j est à une distance supérieure à ϵ_0 des côtés de V_j (toutes les distances sont comptées le long des transversales au sens de la mesure invariante) ;

4° Chaque point singulier n'appartient qu'à une carte U_j ;

5° L'intersection de deux cartes U_{j_1} et U_{j_2} (resp. V_{j_1} et V_{j_2}) est un rectangle :



Pour satisfaire cette condition, on choisit un champ de droites transversales au feuilletage sur le complémentaire des singularités et on impose aux cartes d'être assez petites et à leurs faces d'être tangentes à ce champ.

1.5. Théorème (récurrence de Poincaré). Soit M une surface compacte équipée d'un feuilletage mesuré (\mathfrak{F}, μ) . Soit α un arc ($\cong [0, 1]$) de ∂M , transversal à \mathfrak{F} en tout point de $\text{int } \alpha$, et x une de ses extrémités. Alors la feuille L_x issue de x va, soit à un point singulier, soit au bord.

Démonstration. On va utiliser l'atlas 1.4. Supposons que L_x n'aboutisse pas à une singularité et tronquons α pour que l'on ait $\mu(\alpha) = \epsilon < \epsilon_0$, et que, pour tout $y \in \alpha$, la feuille L_y ne s'arrête pas à une singularité. J'affirme que, si L_x ne recoupe pas le bord, on a une immersion injective $\Phi : \alpha \times \mathbb{R}_+ \rightarrow M$, où $\Phi(\{y\} \times \mathbb{R}_+) = L_y$ pour tout $y \in \alpha$.

En effet, si P est une plaque de L_x dans U_i , elle est dans le bord d'une bande de V_i , d'épaisseur ϵ ne contenant aucune singularité d'après l'hypothèse faite sur α ; si deux plaques de L_x se recouvrent, les bandes en question se recolent par les propriétés de l'atlas. D'où une immersion Φ . L'injectivité tient à ce que $\Phi^{-1}(\alpha) = \alpha \times \{0\}$ et que par tout point de l'image de Φ ne passe qu'une feuille.

Soit z un point de récurrence de la feuille L_x ; si $z \in U_i$, il existe une infinité de bandes de largeur ϵ , composantes de $\text{Im } \Phi \cap V_i$. Or deux bandes distinctes sont disjointes. Impossible. \square

Corollaire. Si une feuille L n'est pas fermée dans $M - \text{sing } \mathfrak{F}$, et si α est un arc transversal à \mathfrak{F} coupant L , alors $\alpha \cap L$ est infini.

Démonstration. Il suffit de montrer qu'il est impossible que $\alpha \cap L$ soit une extrémité de α . Pour cela, on coupe M le long de $\text{int } \alpha$ et on obtient M' équipé du

feuilletage induit \mathfrak{F}' . Si C est la courbe de $\partial M'$ provenant de α , le long de C \mathfrak{F}' présente la configuration de la figure 3 avec deux singularités s_1 et s_2 correspondant aux extrémités de α ; à L correspondent deux feuilles L_g et L_d de \mathfrak{F}' issues de s_1 .

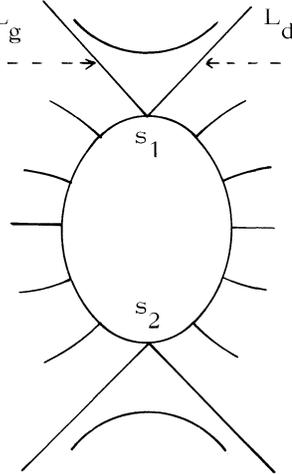


Figure 3

D'après le théorème, L_g (resp. L_d) aboutit à une singularité de \mathfrak{F}' ou au bord de M' . Si ce bord est C , de l'hypothèse faite sur α , on déduit que $L_d = L_g$, donc que L est fermée (contradiction). Sinon, considérant M' contenu dans M , L_g et L_d aboutissent à des singularités de \mathfrak{F} ou au bord de M ; donc L est fermée (contradiction). \square

1. 6. La formule d'Euler-Poincaré.

Soit M une surface compacte équipée d'un feuilletage \mathfrak{F} ayant les singularités admises en 1.2 et 1.3. On rappelle que chaque composante du bord est

- (A) ou bien transversale à \mathfrak{F} ,
- (B) ou bien un cycle de feuilles (réunion finie de feuilles et de points singuliers).

A chaque singularité s , on associe un entier P_s :

P_s = nombre de séparatrices, si $s \in \text{int } M$ ou si $s \in \partial M$ (cas (B)),

P_s = nombre de séparatrices + 1, si $s \in \partial M$ (cas (A)).

Formule : $2\chi(M) = \sum_{\text{sing } \mathfrak{F}} (2 - P_s)$.

Démonstration. On commence par se ramener au cas où ∂M ne contient pas de singularité selon la procédure de la figure 4. En poussant ainsi chaque singularité du bord

vers l'intérieur, on conserve l'entier P_s selon les conventions fixées plus haut. Désignons par Σ' l'ensemble des points singuliers à nombre impair de séparatrices,

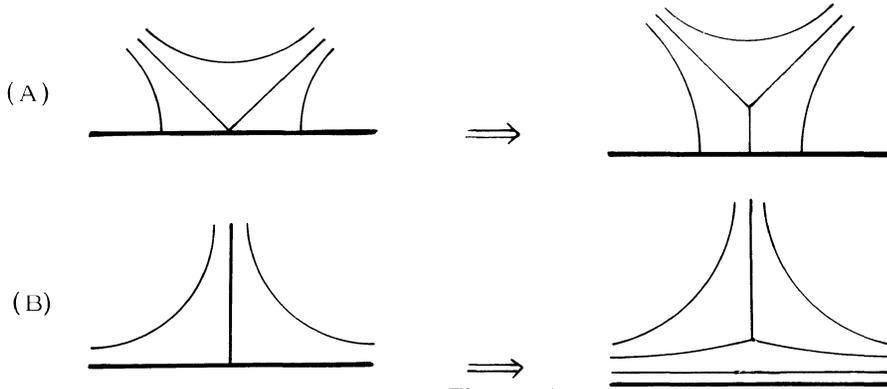


Figure 4

Σ'' l'ensemble de ceux dont le nombre de séparatrices est pair et $\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma''$. On a un homomorphisme d'orientation du fibré tangent à \mathfrak{F}

$$\pi_1(M - \Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}/2.$$

Il définit un revêtement à 2 feuillets qui se prolonge au-dessus de Σ'' et se ramifie au-dessus de Σ' . On a donc un revêtement ramifié $p: \tilde{M} \rightarrow M$, où \tilde{M} est équipé d'un feuilletage singulier orientable $\tilde{\mathfrak{F}}$, que l'on peut penser comme engendré par un champ de vecteurs \tilde{X} ; si s est une singularité de $\tilde{\mathfrak{F}}$, alors P_s est un entier pair et l'indice de \tilde{X} en s est $-\frac{P_s}{2} + 1$. Puisqu'il n'y a pas de singularité au bord, on a :

$$\chi(\tilde{M}) = \sum_{\text{sing } \tilde{X}} \text{indice} = \sum_{\text{sing } \tilde{\mathfrak{F}}} \left(-\frac{P_s}{2} + 1\right)$$

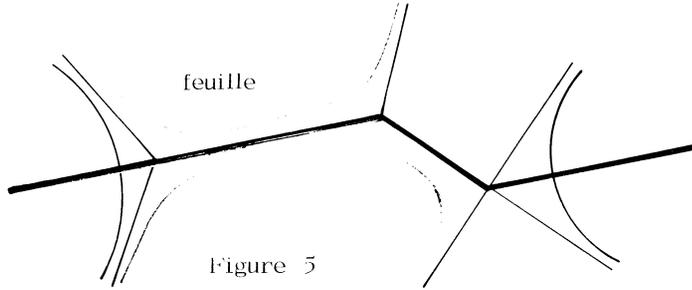
or $\chi(\tilde{M}) = 2\chi(M) - \text{card } \Sigma'$ et $\sum_{\text{sing } \tilde{\mathfrak{F}}} 1 = 2 \text{card } \Sigma'' + \text{card } \Sigma'$.

Enfin, si $p(s) \in \Sigma''$, $P_s = P_{p(s)}$, mais s possède un "jumeau"; si $p(s) \in \Sigma'$, $P_s = 2 P_{p(s)}$. En regroupant ces égalités, on a la formule cherchée. \square

N.B. Dans les applications numériques, ne pas oublier que $P_s \geq 3$.

I. 7. Courbe quasi-transversale.

On dira qu'une courbe γ est quasi-transversale à \mathfrak{F} si chaque composante connexe de $\gamma - \text{sing } \mathfrak{F}$ est ou bien une feuille ou bien transversale à \mathfrak{F} . De plus, au voisinage d'une singularité, un arc transversal n'est pas dans un secteur adjacent à un arc contenu dans une feuille (figure 5) et deux arcs transversaux sont dans deux secteurs distincts.



Proposition. Il n'existe pas de disque D à bord anguleux, avec $\partial D = \alpha \cup \beta$, où α est un arc contenu dans une feuille et β un arc quasi-transversal.

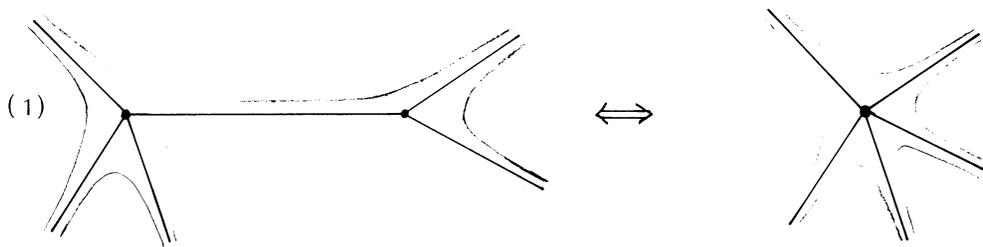
Démonstration. Supposons qu'un tel disque existe. Soit $N \cong D^2$, le double de D le long de β ; N est muni d'un feuilletage avec singularités permises. Mais $\chi(N) > 0$, ce qui contredit la formule d'Euler-Poincaré. \square

Remarque. De la même façon, on voit qu'une courbe fermée immergée quasi-transversale à \mathfrak{F} n'est pas homotope à zéro.

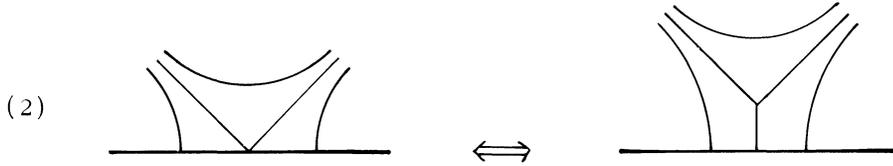
§ II. - FEUILLETAGES MESURÉS ET COURBES SIMPLES

II. 1. Notations. $m\mathfrak{F}(M)$ ou $m\mathfrak{F}$, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, désigne l'ensemble des feuilletages mesurés avec singularités permises, définis sur une surface compacte donnée M , quotienté par les deux relations d'équivalence suivante :

- isotopie,
- opérations de Whitehead :



(Il faut préciser que si les deux singularités sont sur le bord, on ne contracte que si la feuille connectante est sur le bord.)



Rappelons que \mathcal{L} désigne l'ensemble des classes d'homotopie (= d'isotopie) de courbes fermées simples, C^∞ -par morceaux, non homotopes à zéro et non isotopes à une courbe du bord.

II. 2. $I_{\times} : \mathfrak{M}\mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$.

Soit (\mathfrak{F}, μ) un feuilletage mesuré et γ une courbe fermée. On pose $\mu(\gamma) = \text{Sup} (\sum \mu(\alpha_i))$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des arcs de γ , mutuellement disjoints et transversaux à \mathfrak{F} et où le sup est pris sur toutes les sommes de ce type. Autrement dit, $\mu(\gamma)$ est la variation totale de la coordonnée y le long de γ dans un atlas qui définit le feuilletage mesuré. Cette quantité est aussi notée par Thurston $\int_{\gamma} \mathfrak{F}$. Soit σ un élément de \mathcal{L} ; on pose :

$$I(\mathfrak{F}, \mu; \sigma) = \inf_{\gamma \in \sigma} \mu(\gamma).$$

C'est évidemment un invariant d'isotopie; d'autre part, si (\mathfrak{F}, μ) et (\mathfrak{F}', μ') se déduisent l'un de l'autre par une opération de Whitehead, alors, pour chaque courbe $\gamma \in \sigma$ et chaque $\epsilon > 0$, il existe $\gamma' \in \sigma$ telle que $|\mu(\gamma) - \mu'(\gamma')| < \epsilon$ (figure 6).

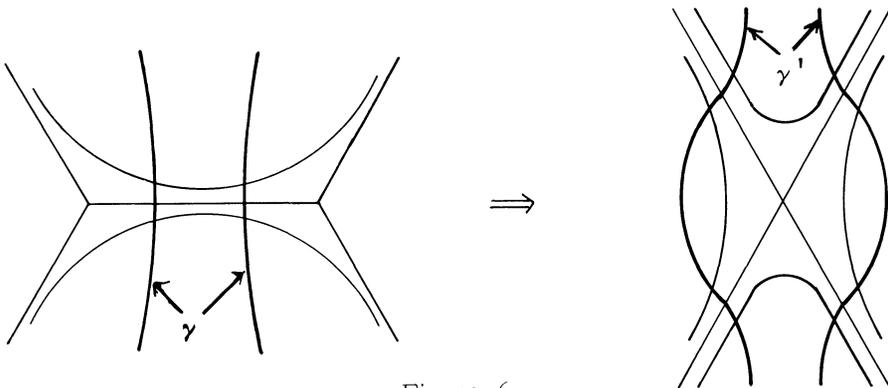


Figure 6

Cela suffit pour assurer que la formule ci-dessus définit une application :

$$I_{\star} : \mathbb{R}\mathfrak{F} \longrightarrow \mathbb{R}_{+}^{\mathfrak{F}}$$

$$\langle I_{\star}(\mathfrak{F}, \mu), \sigma \rangle = I(\mathfrak{F}, \mu; \sigma) \quad .$$

II. 3. Proposition. Si γ est quasi-transversale à \mathfrak{F} , alors

$$\mu(\gamma) = I(\mathfrak{F}, \mu; \sigma)$$

où σ est la classe d'homotopie de γ .

Démonstration. Soit $\gamma' \in \sigma$; si γ et γ' sont disjoints, γ et γ' limitent un anneau A . D'après le théorème de récurrence de Poincaré, presque toute feuille rentrant dans A en un point de γ recoupe le bord; pour des raisons d'indice (proposition I.7), elle ne peut recouper γ ; donc $\mu(\gamma) \leq \mu(\gamma')$.

Si γ et γ' ont des points communs, on procède comme suit : on commence par mettre γ' en position générale par rapport à γ au sens où $\gamma' - \gamma$ ne contient qu'un nombre fini d'intervalles ouverts; ceci se fait par une approximation qui perturbe la mesure arbitrairement peu. Puisque γ et γ' sont homotopes, il existe un arc α' dans γ' et un arc α dans γ , tels que $\text{int } \alpha \cap \text{int } \alpha' = \emptyset$, et qui bordent un disque D (proposition 10 de l'exposé 3). Presque toute feuille rentrant dans D en un point de α recoupe le bord. Donc $\mu(\alpha) \leq \mu(\alpha')$. Si $\gamma' = \alpha' \cup \beta'$, on peut former $\gamma'' = \alpha'' \cup \beta''$ avec $\alpha'' = \alpha$ et $\beta'' = \beta'$. On a $\mu(\gamma'') \leq \mu(\gamma')$ et $\pi_0(\gamma'' - \gamma) < \pi_0(\gamma' - \gamma)$. Donc, par récurrence sur $\pi_0(\gamma' - \gamma)$, on prouve que $\mu(\gamma') \geq \mu(\gamma)$. \square

Pour trouver les classes de \mathfrak{F} qui contiennent des courbes quasi-transversales, on a besoin du lemme suivant concernant l'application d'holonomie.

II. 4. Soient γ un arc (arc = arc compact) dans une feuille et α, β deux arcs disjoints transversaux partant chacun d'une extrémité de γ , tous deux du même côté. Notons L_t la feuille passant par $\alpha(t)$; $\alpha(0)$ et $\beta(0)$ sont les extrémités de γ dans L_0 . On choisit les paramétrages de sorte que :

$$\mu([\alpha(0), \alpha(t)]) = \mu([\beta(0), \beta(t)]) = t \quad .$$

Il existe un germe d'application d'holonomie

$$h_{\gamma} : (\alpha, \alpha(0)) \longrightarrow (\beta, \beta(0))$$

caractérisé par la propriété suivante : h_{γ} est continue et si $h_{\gamma}(\alpha(t))$ est défini, on

a $h_\gamma(\alpha(t)) \in L_t$; l'invariance de la mesure μ signifie que h_γ est une isométrie, c'est-à-dire que $h_\gamma(\alpha(t)) = \beta(t)$; on note $\{\gamma_t\}$ la famille continue d'arcs, telle que $\gamma_0 = \gamma$, $\gamma_t \subset L_t$ et γ_t joint $\alpha(t)$ à $\beta(t)$.

Lemme de stabilité. Si h_γ est définie sur l'intervalle ouvert $[\alpha(0), \alpha(t_0)[$, alors les points $\alpha(t_0)$ et $\beta(t_0)$ sont joignables par un arc γ_{t_0} qui est contenu dans la réunion d'un nombre fini de feuilles et de points singuliers et qui est la limite des arcs γ_t , $t \in [0, t_0[$.

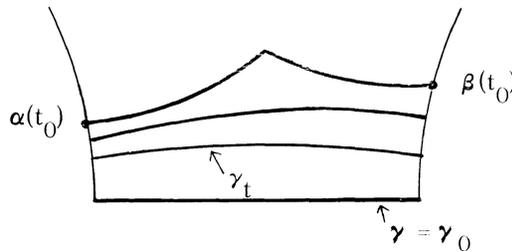


Figure 7

De plus, il existe une immersion $H : [0, 1] \times [0, t_0] \rightarrow M$ qui est C^∞ à l'intérieur et telle que l'on ait $H([0, 1] \times \{t\}) = \gamma_t$ pour tout $t \in [0, t_0]$.

L'obstruction à prolonger h_γ au-delà de $\alpha(t_0)$ est due aux situations suivantes :

- $\alpha(t_0)$ (resp. $\beta(t_0)$) est une extrémité de α (resp. β) ;
- $\gamma(t_0)$ contient une singularité.

Preuve. On utilise le bon atlas de I.4 et les notations U_j, V_j, ϵ_0 . On peut évidemment se ramener au cas où $t_0 < \epsilon_0$, où l'arc $[\alpha(0), \alpha(t_0)]$ est contenu dans une carte V_{j_0} et où l'arc $[\beta(0), \beta(t_0)]$ est contenu dans une carte V_{j_1} . Recouvrons alors γ_0 par des cartes $U_0 = U_{j_0}, U_1, \dots, U_n = U_{j_1}$; la numérotation est choisie en sorte qu'il y ait pour chaque i une plaque P_i^0 de U_i , contenue dans $U_i \cap \gamma_0$, vérifiant $P_i^0 \cap P_j^0 = \emptyset$ sauf si $|j - i| = 1$; bien sûr, la numérotation peut repasser plusieurs fois par la même carte.

Considérons la réunion $X_0 = \cup \{P_0^t \mid t \in [0, t_0]\}$ des plaques de V_0 qui coupent $[\alpha(0), \alpha(t_0)]$; la singularité éventuelle de V_0 ne peut se trouver que sur la plaque $P_0^{t_0}$ sinon l'application d'holonomie ne serait pas définie sur $[\alpha(0), \alpha(t_0)[$. Si on passe dans la carte V_1 , on trouve une intersection $X_0 \cap V_1$ qui est un rectangle d'épaisseur t_0 , d'après les propriétés du bon atlas. On fabrique la réunion X_1 des plaques de V_1 qui rencontrent $X_0 \cap V_1$ et on continue ainsi de suite. \square

Remarques. 1) Ce lemme nécessite la mesure invariante ; voici un contre-exemple dans le cas où il y a une holonomie non triviale.

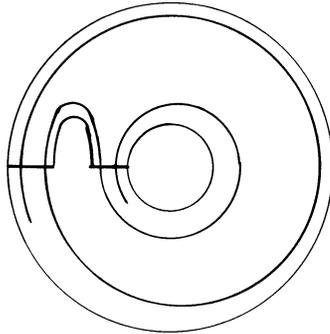


Figure 8

2) Le même lemme est vrai si γ_0 passe par des singularités dont les séparatrices sont du côté opposé à α et β .

II. 5. Corollaire. On suppose que M n'est pas le tore T^2 . Soit γ un cycle de feuilles ; ou bien γ passe par des singularités et il existe des séparatrices de part et d'autre de γ ; ou bien γ appartient à un "anneau maximal" A dont les feuilles intérieures sont des cycles ; une composante de ∂A qui n'est pas dans ∂M est un cycle singulier.

II. 6. Proposition. Soient γ une courbe fermée simple (connexe) sur la surface M et (\mathfrak{F}, μ) un feuilletage mesuré. Si γ sépare M en deux composantes, $M = M_1 \cup_{\gamma} M_2$, on notera Σ_i ($i = 1, 2$) un "spine" de M_i (i.e. : 1-complexe sur lequel M_i "collapse").

1° Si $I(\mathfrak{F}, \mu ; [\gamma]) \neq 0$, il existe (\mathfrak{F}', μ') équivalent à (\mathfrak{F}, μ) , tel que γ soit transversale à \mathfrak{F}' en évitant les singularités.

2° Si $I(\mathfrak{F}, \mu ; [\gamma]) = 0$, il existe (\mathfrak{F}', μ') équivalent à (\mathfrak{F}, μ) vérifiant l'une ou l'autre des deux conditions suivantes (non exclusives) :

(i) γ est un cycle de feuilles de \mathfrak{F}' ;

(ii) γ sépare et, pour $i = 1$ ou 2 , Σ_i est un ensemble invariant de \mathfrak{F}' .

Cette situation ne peut arriver que si l'ensemble des liaisons entre les feuilles possède des cycles.

Remarques. 1) Si on s'interdit de modifier \mathfrak{F} , on obtient seulement le résultat

beaucoup plus faible que γ est homotope à une immersion quasi-transversale à \mathfrak{F} ; d'ailleurs, cette immersion est une limite de plongements.

2) La figure 9 illustre la situation du 2° (ii) de la proposition. Le feuilletage de la surface de genre 2 est obtenu par "élargissement" de la courbe C (voir § III).

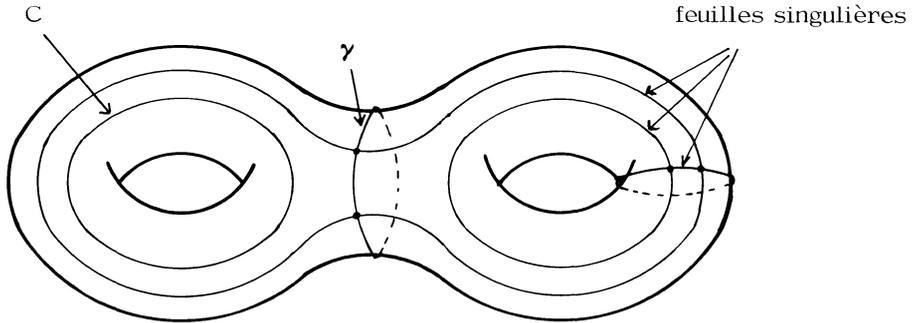


Figure 9

Nous démontrerons simultanément le critère suivant, utile pour plus tard :

Critère de minimalité : Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1° $\mu(\gamma) > I(\mathfrak{F}, \mu ; [\gamma])$;

2° Il existe deux points x_0 et x_1 de γ appartenant à la même feuille L de sorte que :

- $x_0 \cup x_1 = \partial c$, où c est un arc de L ,
 $\quad \quad \quad = \partial c'$, où c' est un arc de γ ,
- $c \cup c' = \partial D$, où D est un 2-disque.

Démonstration. On peut supposer $\gamma = \alpha_1 * \beta_1 * \dots * \alpha_k * \beta_k * \dots * \alpha_n * \beta_n$ où les arcs α_i sont transversaux à \mathfrak{F} et où les arcs β_j , éventuellement réduits à un point, sont dans une réunion finie de feuilles et de points singuliers ; la numérotation est cyclique. Si l'on n'a pas au départ une telle décomposition, ou bien on l'obtient dans chaque carte par isotopie isométrique, ou bien il existe une carte dans laquelle la conclusion 2° du critère est visible et une rectification abaissant la longueur conduit à une décomposition finie.

Ceci étant, on a, pour β_k les configurations de la figure 10. Par définition, (1) est la configuration où le lemme II.4 est applicable ; dans (2) et (3), β_k contient au moins une singularité et II.4 n'est pas applicable ; dans (4), β_k ne contient pas

de singularité.

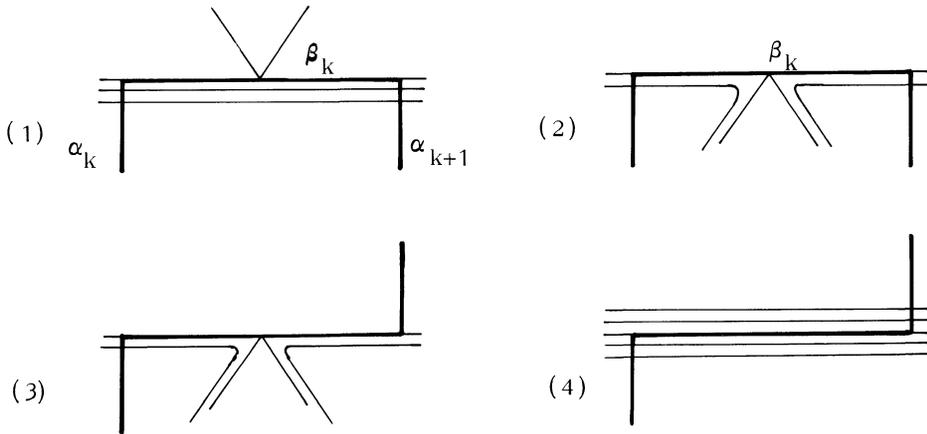


Figure 10

Dans (1), la conclusion 2° du critère est visible. D'autre part, j'affirme que, si pour tout k , β_k n'est pas dans la configuration (1), alors γ est isotope à une courbe quasi-transversale de même longueur ; c'est-à-dire que $\mu(\gamma)$ est minimal d'après II.3 et l'affirmation achève de prouver le critère de minimalité. Pour prouver l'affirmation, on remplace chaque configuration (4) par une transversale ; les configurations (2) et (3) se modifient comme sur la figure 11 . \square

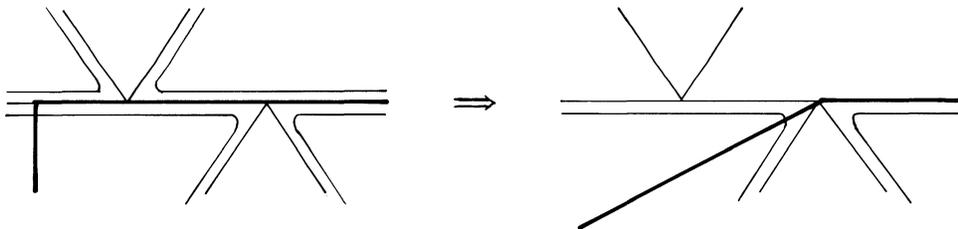


Figure 11

Poursuivons maintenant la démonstration de la proposition. Comme dans la preuve ci-dessus, les β_k du type (4) sont remplacés par des transversales et ceux des types (2) et (3) peuvent être supposés avoir pour extrémités des singularités.

A ce point, ou bien γ est un cycle de feuilles (conclusion 2° (i) de la proposition), ou bien on peut concentrer en un point chaque feuille contenue dans γ . En éclatant alors les singularités obtenues (figure 12), on se ramène à la situation où tous les arcs β_k sont du type (1). A partir de là, la récurrence se fait sur le

nombre d'arcs de γ contenus dans une feuille. S'il n'y en a pas, γ est transversal au feuilletage (conclusion 1°).

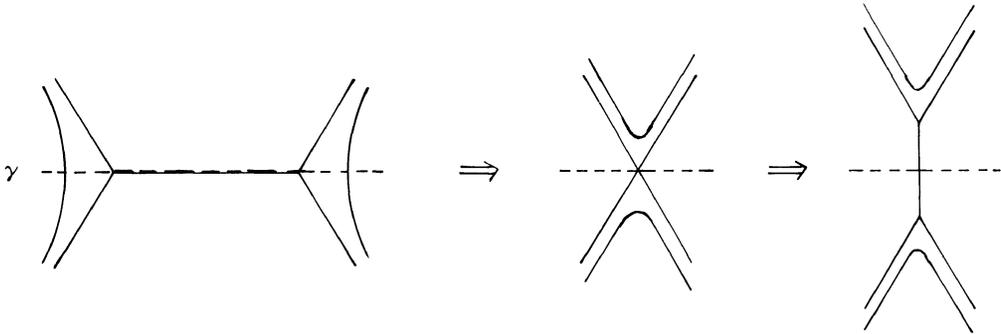


Figure 12

Sinon, considérons β_1 . Le lemme II.4 fournit une immersion h d'un rectangle R . Le feuilletage induit $\hat{\mathfrak{F}} = h^{-1}(\mathfrak{F})$ a toutes ses singularités sur un même arc λ du bord. Notons $\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_m$ les arcs de $\hat{\gamma} = h^{-1}(\gamma)$, qui sont dans les feuilles de $\hat{\mathfrak{F}}$ (arcs horizontaux). Disons que $\hat{\beta}_1$ est l'arc le plus proche des singularités (au sens de la mesure transversale) ; alors la composante de $\hat{\gamma}$, qui contient $\hat{\beta}_1$, limite un sous-rectangle R' qui est minimal ; on voit que $h|_{\text{int } R'}$ est un plongement disjoint de γ .

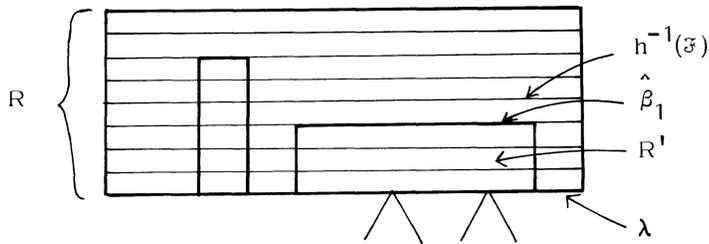


Figure 13

Si R' ne contient pas de singularité de $\hat{\mathfrak{F}}$, un voisinage de $h(R')$ est le support d'une isotopie de γ qui chasse $\hat{\beta}_1$; même si $h(\hat{\beta}_1) = \beta_1$, l'exécution de cette isotopie conduit à une situation où, dans le nouveau rectangle R associé à β_1 , le nouvel arc $\hat{\gamma}$ possède moins d'arcs horizontaux.

Si R' contient une singularité, alors, pour des raisons de mesure

transversale, il est facile de voir que $h(\hat{\beta}_1)$ est un arc β_k distinct de β_1 (sinon l'épaisseur de R' serait la même que celle de R).

Après le raisonnement ci-dessus, quitte à changer circulairement la numérotation des arcs β , on peut supposer que :

- 1° $h|R - \lambda$ est un plongement,
- 2° $h(\text{int } R) \cap \gamma$ est vide,
- 3° $h(\lambda) \cap \beta_k$ est vide, pour tout k .

Ecartons d'abord les cas simples suivants (A) et (B), où il y a visiblement des opérations, isotopies et opérations de Whitehead, qui diminuent le nombre d'arcs de γ contenus dans une feuille.

(A) λ ne contient pas de singularité (figure 14).

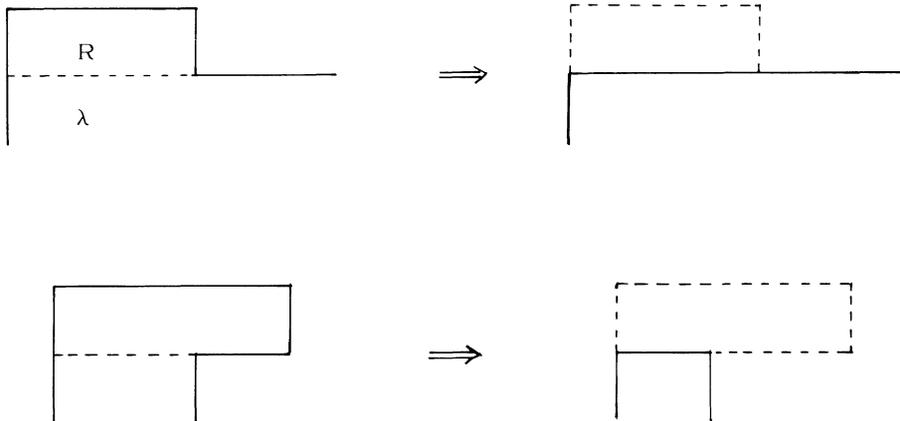


Figure 14

(B) λ contient des singularités et R est plongé. L'isotopie à travers R remplace β_1 par un arc du type (2). On lui applique la procédure du début.

Ces cas mis à part, $h(\lambda)$ possède des points doubles. Vu comme chemin singulier, λ s'écrit comme composé :

$$\lambda = \mu_0 * \lambda_1 * \dots * \lambda_q * \mu_1$$

où μ_0 (resp. μ_1) est un arc de feuille joignant un point de α_1 (resp. α_2) à une singularité et où λ_i ($1 \leq i \leq q$) est un arc d'une feuille joignant deux singularités ;

certains de ces arcs peuvent être réduits à un point et plusieurs peuvent appartenir à la même feuille. Mais, λ a dans R une approximation qui est un arc plongé ne rencontrant α_1 et α_2 qu'à ses extrémités ; de ce fait, chaque feuille porte au plus deux arcs de λ . Plus précisément, ni μ_0 , ni μ_1 ne peut appartenir à la même feuille qu'un λ_j ; si $\mu_0 \cap \mu_1$ n'est pas réduit à une de leurs extrémités, c'est que $\alpha_1 = \alpha_2$ (i.e. $\gamma = \alpha_1 * \beta_1$) et que l'on a la configuration de la figure 15 .

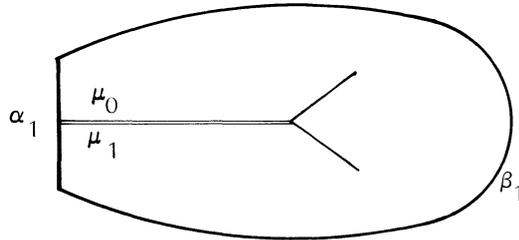
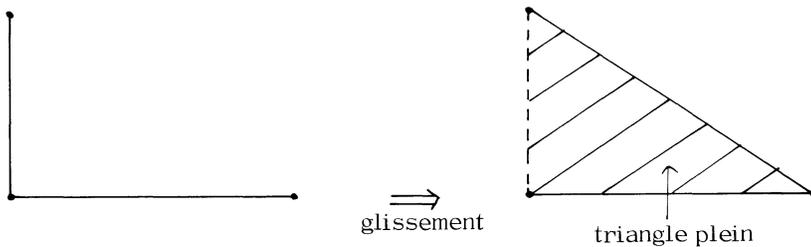


Figure 15

Nous dirons que λ_j est simple si, pour tout $j' \neq j$, λ_j ne couvre pas la même feuille que $\lambda_{j'}$. Nous dirons que μ_0 et μ_1 sont simples si l'on n'a pas la configuration de la figure 15 (ils le sont obligatoirement tous les deux).

Notons Λ le complexe de dimension 1, $\Lambda = \bigcup_{i=1}^q \lambda_i$; c'est un ensemble invariant du feuilletage \mathcal{F} . Si M est fermée, tout glissement de Whitehead de Λ se relève en modifications de Whitehead de \mathcal{F} (la terminologie pour les feuilletages a été choisie à cause de cette remarque).



Lemme (M est supposée fermée). Si l'un des arcs λ_j , μ_0 ou μ_1 est simple, il existe un feuilletage \mathcal{F}' équivalent à \mathcal{F} , égal à \mathcal{F} dans le complémentaire d'un voisinage de Λ , et pour lequel l'arc limite λ' du domaine de déformation R' de β_1 possède moins de simplexes doubles (arêtes ou sommets).

Preuve. On fait glisser l'arc simple sur son prédécesseur ou sur son successeur. La figure 16 représente l'opération lorsque μ_0 est simple.

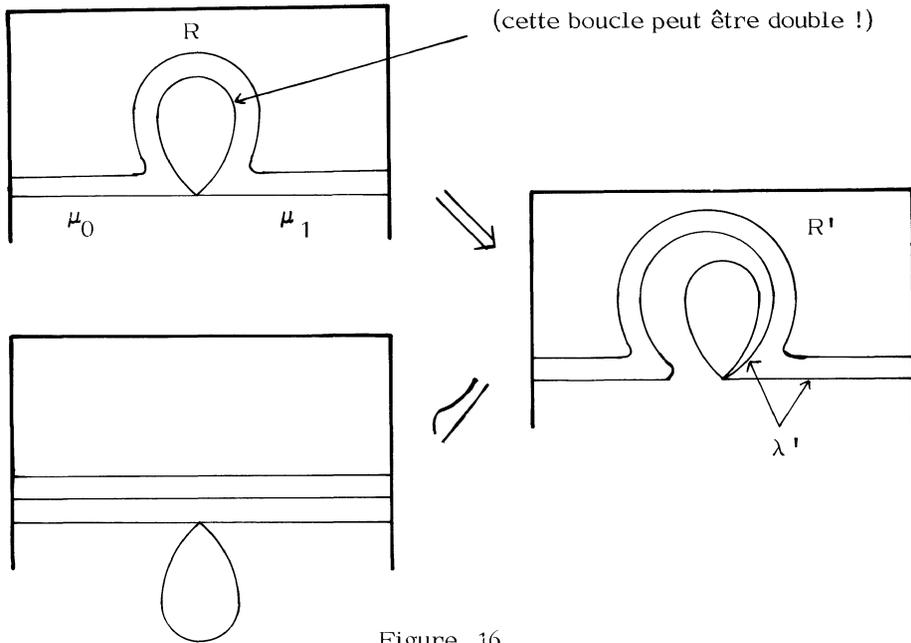


Figure 16

Si le lemme est applicable, on se ramène par itération au cas (B) ; sinon, on se trouve dans la situation suivante.

(C) Tous les arcs λ_i , μ_0 et μ_1 sont doubles.

Alors, l'adhérence de R , sur la surface, est un voisinage régulier du complexe Λ et γ est son bord ; on a alors la conclusion 2° (ii) de la proposition.

La démonstration de la proposition se trouve achevée par récurrence sur le nombre de segments de la décomposition de γ , tout au moins lorsque M est fermée. Le cas à bord se rédige de façon analogue en faisant attention aux glissements de Whitehead permis. \square

Remarque. La proposition précédente n'admet pas de généralisation raisonnable au cas d'un système de k courbes plongées $\gamma_1, \dots, \gamma_k$; sauf si $I(\mathfrak{F}, \mu ; [\gamma_1]) \neq 0, \dots, I(\mathfrak{F}, \mu ; [\gamma_{k-1}]) \neq 0, I(\mathfrak{F}, \mu ; [\gamma_k])$ pouvant être nul.

§ III. - LES COURBES COMME FEUILLETAGES MESURES

III. 1. Opération d'élargissement.

Soit M_0 une sous-variété de dimension 2 de M , telle que $M - M_0$ n'ait aucune composante contractile. Soit Σ un "spine" de $\overline{M - M_0}$; par hypothèse, aucune de ses composantes n'est contractile; donc, quitte à effondrer les 1-simplexes qui ont un sommet libre, de chaque singularité de Σ partent trois branches.

On peut construire une application surjective $j : M_0 \rightarrow M$ telle que :

- j soit une immersion (différentiable par morceaux),
- $j|_{\text{int } M_0}$ soit un difféomorphisme sur $M - \Sigma$,
- $j(\partial M_0 - \partial M) = \Sigma$,
- j soit l'identité hors d'un petit voisinage en collier de $\partial M_0 - \partial M$.

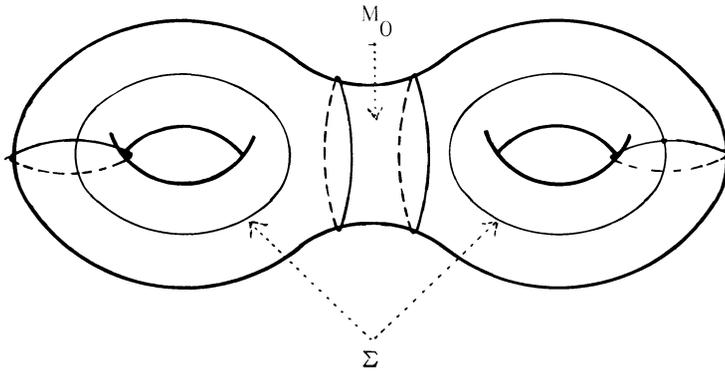


Figure 17

Soit \mathfrak{F}_0 un feuilletage mesuré sur M_0 tel que chaque composante de $\partial M_0 - \partial M$ soit un ensemble invariant. On peut alors définir $\mathfrak{F} = j_* \mathfrak{F}_0$ qui est un feuilletage mesuré sur M vérifiant :

- Σ est un ensemble invariant de \mathfrak{F} ,
- $j|_{\text{int } M_0}$ conjugue comme feuilletages mesurés $\mathfrak{F}_0|_{\text{int } M_0}$ et $\mathfrak{F}|_{M - \Sigma}$.

On dit que \mathfrak{F} est obtenu à partir de \mathfrak{F}_0 par élargissement de M_0 .

Remarquons que si Σ' est un autre spine pour $\overline{M - M_0}$, alors Σ' se déduit de Σ par opérations de Whitehead et isotopies (voir appendice). On en conclut que la classe de \mathfrak{F} ne dépend que de celle de \mathfrak{F}_0 . On a donc défini une application

$$\mathfrak{M}\mathfrak{F}(M_0, \partial M_0 - \partial M) \longrightarrow \mathfrak{M}\mathfrak{F}(M)$$

dont la source est le sous-ensemble de $\mathfrak{F}(M_0)$ formé des feuilletages admettant chaque composante de $\partial M_0 - \partial M$ comme ensemble invariant.

III. 2. Lemme. Soient μ_0 et μ les mesures transverses de \mathfrak{F}_0 et \mathfrak{F} . Soit γ une courbe simple de M . Alors $I(\mathfrak{F}, \mu; [\gamma]) = \inf \mu_0(\gamma' \cap M_0)$, où γ' est isotope à γ .

Démonstration. Elle se déduit de la remarque suivante : pour toute courbe C , il existe une courbe C' , isotope à C , telle que $C' \cap M_0 = j^{-1}(C)$. \square

III. 3. L'inclusion $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{J} \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

On la définit ainsi. Soit $C \in \mathcal{J}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Considérons un voisinage tubulaire M_0 de C que l'on feuillette par cercles parallèles à C ; on l'équipe d'une mesure transverse μ_0 telle que l'épaisseur de l'anneau M_0 soit λ ; ce feuilletage mesuré de M_0 est unique à isotopie près. On note $\mathfrak{F}_{\lambda, C}$ un feuilletage obtenu à partir de ce dernier par élargissement et μ sa mesure transverse.

Proposition. Soit γ une courbe simple de M . Alors on a :

$$I(\mathfrak{F}_{\lambda, C}, \mu; [\gamma]) = \lambda i(C, \gamma) .$$

Démonstration. Soit α une composante de $\gamma \cap M_0$. Si α va d'un bord à l'autre de M_0 , alors $\mu_0(\alpha) \geq \lambda$. Par isotopie, on déforme α jusqu'à être transversal au feuilletage; alors $\alpha \cap C = 1$ point et $\mu_0(\alpha) = \lambda$. Si α ne touche qu'une composante du bord, alors γ est isotope à γ' dont l'intersection avec M_0 a une composante de moins. En appliquant le lemme précédent, on trouve l'inégalité :

$$I(\mathfrak{F}_{\lambda, C}, \mu; [\gamma]) \geq \lambda i(C, \gamma) .$$

L'égalité s'obtient en considérant le cas où γ a une intersection minimale avec C , car alors, on a :

$$\mu_0(\gamma) = \lambda i(C, \gamma) . \quad \square$$

La proposition précédente indique la commutativité du diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathfrak{F} \\ & \nearrow & \downarrow I_* \\ \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{J} & & \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{J} \\ & \searrow i_* & \\ & & \mathbb{R}_+ \end{array}$$

Comme i_* est injective (proposition 16, exposé 3), $\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{J} \rightarrow \mathfrak{F}$ est aussi une injection.

Astérisque

V. POÉNARU

Appendice : Spines des variétés de dimension 2

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 90-92

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__90_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

APPENDICE : SPINES DES VARIÉTÉS DE DIMENSION 2

par V. POÉNARU

Soit N une variété de dimension 2 compacte, connexe, à bord non vide. Si N est triangulée et si $L_1 \subset L_2 \subset N$ sont deux sous-complexes, on dit qu'on passe de L_1 à L_2 par une dilatation de dimension n s'il existe un n -simplexe τ de N et une face τ' de τ tels que

$$L_2 - L_1 = \text{int } \tau \cup \text{int } \tau'$$

(int. désigne la cellule ouverte). Le passage inverse est un collapsing. Si l'on passe de L' à L'' par une suite de dilatations, alors on peut le faire de façon ordonnée, en sorte que la suite des dimensions respectives soit non décroissante.

Un glissement est une suite composée de collapsings et de dilatations :

$$(*) \quad L'' = C_n D_n C_{n-1} D_{n-1} \dots C_1 D_1(L')$$

où $\dim L'' = \dim L' = 1$, $\dim C_i = \dim D_i = 2$, et $\text{support } C_i = \text{support } D_i$. Plus généralement, si L' et $L'' \subset N$ sont deux complexes de dimension 1, on va parler d'un glissement $L' \implies L''$ s'il existe une triangulation de N dans laquelle $(*)$ est réalisée.

Un sous-polyèdre $L \subset N$ est un spine si, pour une certaine triangulation, N collapse sur L .

Théorème. Soient Σ_1, Σ_2 deux 1-complexes de N n'ayant pas de bouts libres. Si Σ_1 et Σ_2 sont deux spines de N , on peut passer de Σ_1 à Σ_2 par une suite de glissements et d'isotopies.

Démonstration. Elle se décompose dans les lemmes suivants.

Lemme 1. Des isotopies et des glissements transforment un spine en un spine.

Lemme 2. Soient Σ un spine de N et L un arc simple de N ne rencontrant Σ qu'en ses extrémités. Il existe une application continue $\varphi : D^2 \rightarrow N$ et une décomposition de ∂D^2 en deux segments : $\partial D^2 = A \cup B$, $\partial A = \partial B$, $\text{int } A \cap \text{int } B = \emptyset$,

telles que :

- 1) $\varphi|_A$ soit un homéomorphisme sur L ;
- 2) $\varphi|_{D^2 - B}$ soit un plongement lisse dans $N - \Sigma$;
- 3) $\varphi(B) \subset \Sigma$.

Les démonstrations de ces deux lemmes sont laissées en exercice.

Lemme 3. Pour une triangulation de N , on considère deux suites de sous-complexes

$$\begin{aligned} X^0 &\subset X^1 \subset \dots \subset X^n \\ Y^0 &\subset Y^1 \subset \dots \subset Y^n \end{aligned}$$

ayant les propriétés suivantes :

- 1) X^0 et Y^0 sont des spines de N ;
- 2) les passages $X^{i-1} \subset X^i$, $Y^{i-1} \subset Y^i$ sont des dilatations de dimension 2 ;
- 3) X^n est le même sous-complexe de N que Y^n .

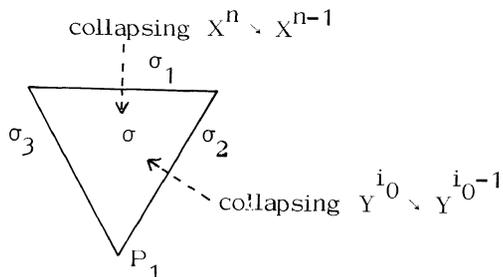
Alors il existe une suite de sous-complexes $Z^0 \subset Z^1 \subset \dots \subset Z^{n-1}$ telle que :

- 4) Z^0 s'obtient à partir de Y^0 par glissement (en particulier Z^0 est un spine) ;
- 5) $Z^{n-1} = X^{n-1}$;
- 6) les passages $Z^{i-1} \subset Z^i$ soient des dilatations de dimension 2 .

Démonstration. Soient σ le 2-simplexe de N qui correspond à la dilatation $X^{n-1} \subset X^n$ et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ses trois faces. Disons que P_i est le sommet opposé à σ_i . Disons aussi que σ_1 est la face libre du collapsing $X^n \searrow X^{n-1}$ et que σ_j est la face libre du collapsing $Y^{i_0} \searrow Y^{i_0-1}$:

$$Y^{i_0} - Y^{i_0-1} = \text{int } \sigma \cup \text{int } \sigma_j .$$

Si $j = 1$, le lemme est immédiat ; on suppose donc $j = 2$.



Puisque σ_1 est une face libre dans $Y^n = X^n$, cette arête n'est dans le bord d'aucun 2-simplexe de Y^{i0-1} . Donc $\sigma_1 \subset Y^0$. De même d'après 2), le 0-squelette de $X^n = Y^n$ est contenu dans X^0 et dans Y^0 . Il en résulte que

$$\partial\sigma \cap Y^0 = \begin{cases} \sigma_1 \cup \sigma_3 \\ \text{ou} \\ \sigma_1 \cup P_1 \end{cases}$$

Soit $Z^0 = (Y^0 - \text{int } \sigma_1) \cup \sigma_2$. Si $\partial\sigma \cap Y^0 = \sigma_1 \cup \sigma_3$, c'est évident qu'on peut passer de Y^0 à Z^0 par glissement. Si $\partial\sigma \cap Y^0 = \sigma_1 \cup P_1$, on peut appliquer le lemme 2 avec $\Sigma = Y^0$ et $L = \sigma_3$. Ceci nous permet encore de conclure, dans ce cas, que le passage $Y^0 \implies Z^0$ est un glissement. Ainsi le point 4) est vérifié. La construction de $Z^1 \subset \dots \subset Z^{n-1}$ pour assurer 5) et 6) est laissée au lecteur. \square

Lemme 4. Soient L_1, L_2 deux complexes de dimension 1 de N , sans bouts libres. Soient L_1', L_2' qui s'obtiennent respectivement par dilatation de dimension 1 à partir de L_1 et L_2 . Si l'on peut passer de L_1' à L_2' par glissements et isotopies, la même chose est vraie pour L_1 et L_2 .

Ceci est un exercice facile. A partir de ces quatre lemmes, on déduit sans peine le théorème.

Astérisque

ALBERT FATHI

Les feuilletages mesurés (suite)

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 93-119

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__93_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LES FEUILLETAGES MESURÉS
(suite)

par Albert FATHI

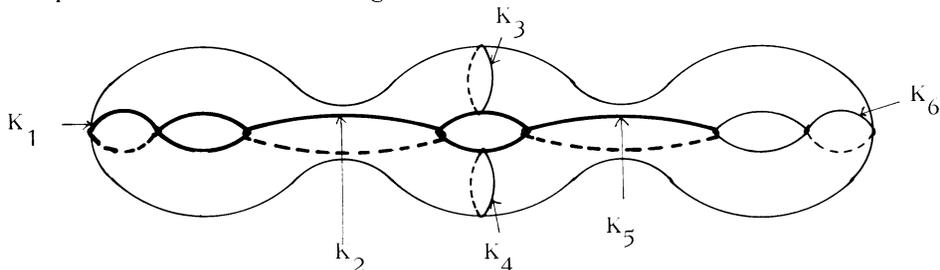
- § I . - Classification des feuilletages de l'anneau
- § II . - Classification des feuilletages du pantalon
- § III . - Les arcs jaunes
- § IV . - Forme normale d'un feuilletage
- § V . - Classification des feuilletages mesurés
- § VI . - Retour sur les courbes comme fonctionnelles
- § VII . - Minimalité de l'action de $\pi_0(\text{Diff } M)$ sur $P(\mathfrak{m}\mathfrak{F})$
- § VIII . - Existence de feuilletages mesurés supplémentaires
- Appendice . - Formules explicites sur les feuilletages mesurés

Le but de cet exposé est de classier les feuilletages mesurés sur une surface compacte (ici, elle sera fermée et orientable). Comme pour les courbes, on va se ramener au cas des feuilletages dans les pantalons. Pour cela, on se donne des courbes K_1, \dots, K_{3g-3} , qui décomposent la surface en pantalons.

Si (\mathfrak{F}, μ) est un feuilletage tel que, pour tout j , $I(\mathfrak{F}, \mu; [K_j]) \neq 0$, on peut par des isotopies et des modifications de Whitehead se ramener au cas où les K_j sont transverses à \mathfrak{F} . Un tel feuilletage est classifié par les mesures des courbes K_j et par des twists autour de ces courbes qui eux aussi s'expriment en fonctions des mesures

de certaines courbes (voir l'appendice).

Dans le cas où les longueurs de certains des K_1 sont nulles, on peut espérer modifier \mathfrak{F} pour que ces courbes soient toutes des cycles de feuilles et ensuite classifier les feuilletages comme plus haut. Ceci n'est malheureusement pas vrai. En voici un exemple sur une surface M de genre 3.



Le feuilletage que l'on considère admet pour feuilles les courbes dessinées en gras et toutes les autres feuilles sont des courbes isotopes à K_6 . Il est impossible de modifier ce feuilletage (par des opérations de Whitehead et des isotopies) pour que les courbes K_3 et K_4 apparaissent comme des cycles de feuilles. Ce feuilletage est obtenu en fait à partir d'un feuilletage sur un anneau A autour de K_6 en collapsant $\overline{M - A}$ sur un spine. Dans cette opération, les deux pantalons qui touchent K_1 sont écrasés sur la réunion de trois courbes fermées.

On est alors obligé de tenir compte de ce genre de phénomène. C'est pourquoi on a introduit dans l'exposé précédent l'opération d'élargissement : un feuilletage \mathfrak{F} d'une surface M est obtenu par élargissement à partir d'un feuilletage \mathfrak{F}_0 d'une sous-surface M_0 (à bord), si \mathfrak{F} est l'image de \mathfrak{F}_0 par l'application $M \rightarrow M$ obtenue en étendant un collapse de $\overline{M - M_0}$ sur un spine. Un tel feuilletage est "porté" essentiellement par M_0 puisque les longueurs transverses des courbes contenues dans $M - M_0$ sont nulles.

Utilisant cette opération, on peut trouver des formes canoniques ("normales") des feuilletages et procéder à la classification.

§ I. - CLASSIFICATION DES FEUILLETAGES DE L'ANNEAU

I. 1. D'après la formule d'Euler-Poincaré, un feuilletage mesuré sur $S^1 \times [0,1]$ n'a pas de singularité. Si $S^1 \times \{0\}$ est une feuille, alors, par stabilité, toutes les feuilles sont des courbes fermées. Si $S^1 \times \{0\}$ est transversal au feuilletage, toute feuille va d'un bord à l'autre. Donc, si (θ, x) désignent des coordonnées de $S^1 \times [0,1]$, tout feuilletage mesuré de l'anneau est isotope à celui associé à $\lambda d\theta$ ou à λdx , $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

I.2. On veut donner une classification des feuilletages mesurés de l'anneau A modulo l'action du groupe $\text{Diff}^0(A \text{ rel } \partial A)$ des difféomorphismes qui sont isotopes à Id rel le bord. On choisit une fois pour toutes un arc γ joignant les deux bords et un arc $\bar{\gamma}$ se déduisant de γ par un twist d'un tour dans le sens positif (figure 1).

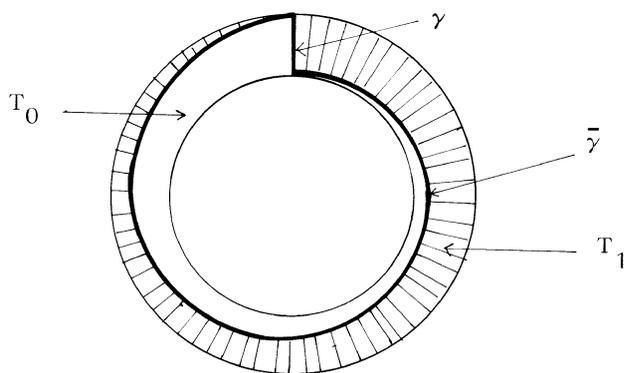


Figure 1

Si (\mathfrak{F}, μ) est un feuilletage mesuré sur A , on pose :

$$m = \mu(S^1 \times \{0\}) = \mu(S^1 \times \{1\}) = I(\mathfrak{F}, \mu ; [S^1 \times \{0\}]) ;$$

$$s = \inf \{ \mu(\gamma') \mid \gamma' \text{ isotope à } \gamma \text{ à extrémités fixées} \} ;$$

$$t = \inf \{ \mu(\gamma') \mid \gamma' \text{ isotope à } \bar{\gamma} \text{ à extrémités fixées} \} .$$

I. 3. Lemme. Un triplet (m, s, t) de trois nombres positifs est associé à un feuilletage mesuré de A si et seulement si (m, s, t) appartient à $\partial(\leq \nabla)$ (bord des inégalités

du triangle).

Démonstration. Considérons le triangle T_1 hachuré sur la figure 1. Ayant fait une isotopie pour que γ et $\bar{\gamma}$ soient transversales au feuilletage, toute feuille entrant par une arête du triangle sort par l'un des deux autres. Dans cette situation, il est clair que les trois mesures des arêtes forment un triplet appartenant à $\partial(\leq \nabla)$. Il est clair aussi que cette condition est la seule à vérifier pour qu'un triplet soit associé à un feuilletage mesuré. \square

Si $m = 0$, alors chaque courbe du bord est une feuille et, avec les coordonnées (θ, x) , le feuilletage est isotope (rel ∂A) à $t dx = s dx$. Ce cas étant exclu, le feuilletage est transverse au bord.

I. 4. Proposition. Soient \mathfrak{F} et \mathfrak{F}' deux feuilletages mesurés transverses au bord de l'anneau et coïncidant sur le bord (égalité des mesures induites ; en particulier, $m(\mathfrak{F}) = m(\mathfrak{F}')$). Alors \mathfrak{F} et \mathfrak{F}' sont isotopes par une isotopie constante sur le bord si et seulement si $(s, t)(\mathfrak{F}) = (s, t)(\mathfrak{F}')$.

Démonstration (suffisance). On déforme \mathfrak{F} et \mathfrak{F}' jusqu'à ce que

$$\begin{aligned} s &= \mu(\gamma) = \mu'(\gamma) \\ t &= \mu(\bar{\gamma}) = \mu'(\bar{\gamma}) . \end{aligned}$$

Alors γ et $\bar{\gamma}$ sont transverses aux deux feuilletages, à moins que l'un de ces arcs soit une feuille. Dans le cas de transversalité, une deuxième isotopie fait coïncider les mesures induites sur γ (resp. $\bar{\gamma}$). Alors, les feuilletages coïncident sur le bord de chacun des triangles T_0 et T_1 . On sait qu'une telle donnée au bord d'un disque a un unique prolongement (par exemple d'après $\Gamma_3 = 0$, exposé 2 théorème 1). \square

§ II. - CLASSIFICATION DES FEUILLETAGES DU PANTALON

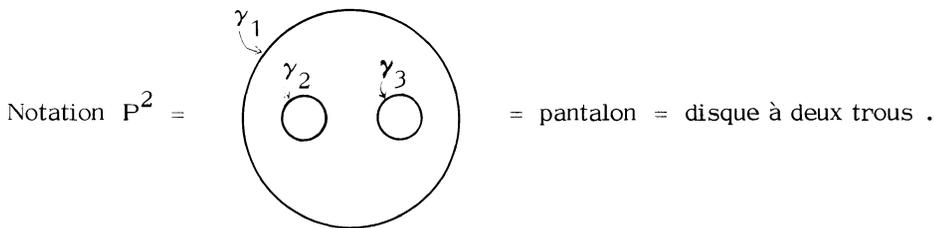


Figure 2

II. 1. Lemme. Pour un feuilletage de P^2 avec singularités permises (exposé 5) ou bien il n'y a qu'une singularité (4 séparatrices) ou bien il y a deux singularités, chacune à 3 séparatrices.

(Preuve par la formule d'Euler-Poincaré).

II. 2. Définition. On dit que \mathfrak{F} est un bon feuilletage de P^2 si aucune composante de ∂P^2 n'est une feuille lisse de \mathfrak{F} .

Lemme. Soit \mathfrak{F} un feuilletage mesuré de P^2 . Alors :

1° Toute feuille est fermée dans le complémentaire des singularités.

2° Si, en plus, \mathfrak{F} est un bon feuilletage, il n'existe pas de cycle de feuilles intérieur à P^2 .

Démonstration. 1° Supposons que L soit une feuille non fermée de \mathfrak{F} dans $P^2 - \text{sing}(\mathfrak{F})$; elle présente de la récurrence et on peut trouver sur L un arc β dont les extrémités sont joignables par une transversale α de sorte que $\alpha \cup \beta$ constitue une courbe simple. On a deux configurations possibles (figure 3).

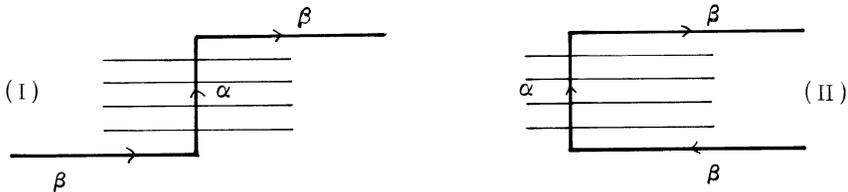


Figure 3

D'après le corollaire du théorème de récurrence de Poincaré (exposé 5, I.5), L coupe α une infinité de fois; puisque $\alpha \cup \beta$ disconnecte P^2 , la configuration II se ramène à la configuration I. On peut alors approcher $\alpha \cup \beta$ par une courbe γ fermée transverse à \mathfrak{F} et coupant L une infinité de fois; d'après I.7 (exposé 5) γ ne borde pas un disque; donc γ borde avec une composante γ_1 de ∂P^2 un anneau. Toute feuille qui coupe γ coupe aussi γ_1 . Ceci interdit que L coupe γ une infinité de fois.

2° Si γ est un cycle intérieur, $\gamma \cup \gamma_1$ borde un anneau A ; au voisinage de γ dans A les feuilles sont fermées lisses et, par stabilité, γ_1 est une feuille fermée lisse, ce qui est interdit. \square

Corollaire. Toute feuille d'un bon feuilletage va : - soit du bord au bord,
 - soit du bord à une singularité,
 - soit d'une singularité à une singularité.

II. 3. Bon feuilletage réduit : c'est un bon feuilletage de P^2 vérifiant les conditions suivantes :

- (i) si une composante du bord est transversale, elle évite les singularités,
- (ii) les singularités du bord sont simples (3 séparatrices) ,
- (iii) il n'y a pas de liaisons entre deux singularités dont l'une au moins est intérieure.

Soit $\mathfrak{M}_0(P^2)$ l'ensemble des classes d'équivalence de bons feuilletages mesurés de P^2 .

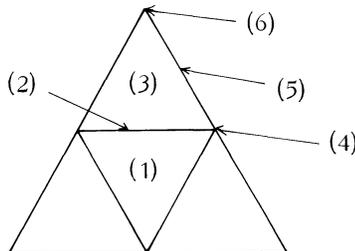
Lemme. Dans chaque classe de $\mathfrak{M}_0(P^2)$, il existe un bon feuilletage réduit unique à isotopie près.

Preuve. On assure (i) immédiatement. Alors, d'après II.2, si un feuilletage admet deux singularités simples liées par deux arcs distincts α_1, α_2 , on a : $\alpha_1 \cup \alpha_2$ est une composante du bord. C'est dire que pour un feuilletage non réduit, il n'existe, à isotopie près, qu'une façon de le réduire. \square

II. 4. Classification.

Théorème. L'application $\mathfrak{M}_0(P^2) \rightarrow \mathbb{R}_+^3$, qui à un bon feuilletage mesuré (\mathfrak{F}, μ) associe le triplet $(m_1, m_2, m_3) = (\mu(\gamma_1), \mu(\gamma_2), \mu(\gamma_3))$, induit une bijection de $\mathfrak{M}_0(P^2)$ sur $\mathbb{R}_+^3 - \{0\}$.

Démonstration. On commence par décrire un inverse à droite ; la construction dépend de la position du triplet par rapport à l'inégalité triangulaire ; à chaque simplexe, on n'associe qu'une configuration topologique. Elles sont données ci-dessous pour les 6 simplexes typiques.



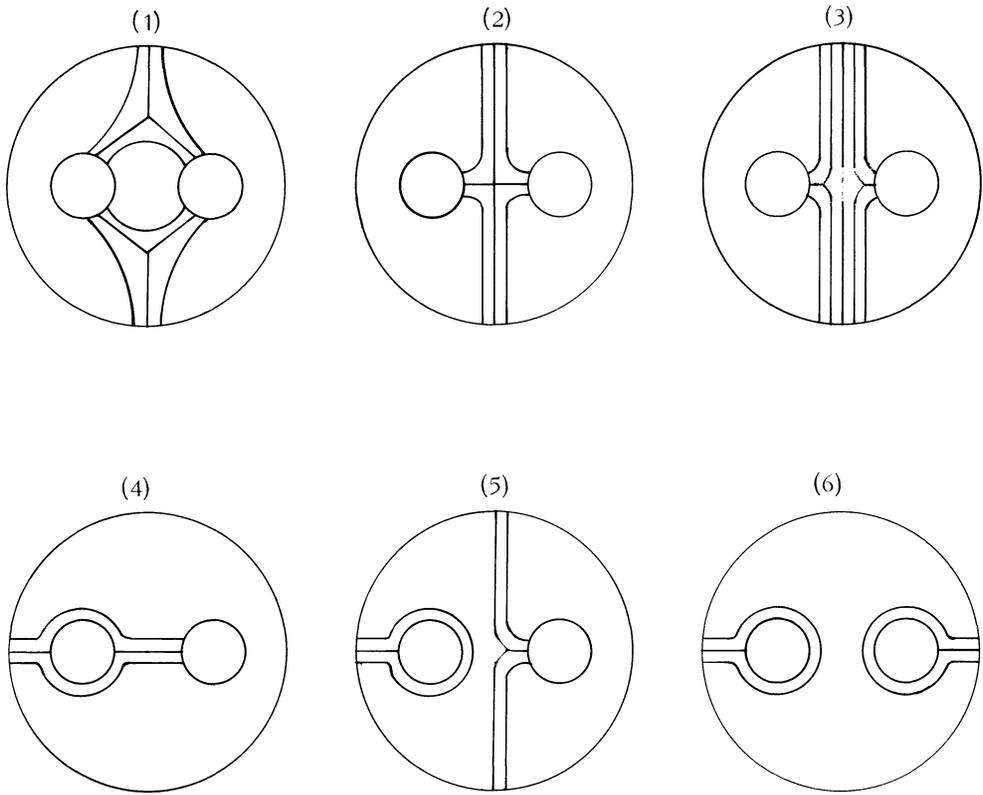


Figure 4

Remarquons que si l'on découpe ces figures le long des séparatrices, on obtient quelques rectangles feuilletés dont les épaisseurs (= plus grande mesure d'une transversale) sont déterminés par le triplet. Par exemple dans la configuration (1), les épaisseurs des 3 rectangles sont :

$$a_{12} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 - m_3)$$

$$a_{13} = \frac{1}{2}(m_1 + m_3 - m_2)$$

$$a_{23} = \frac{1}{2} (m_2 + m_3 - m_1) .$$

Dans la configuration (3) , on a les formules :

$$a_{11} = \frac{1}{2} [m_1 - (m_2 + m_3)]$$

$$a_{12} = m_2$$

$$a_{13} = m_3 .$$

Il est facile de voir qu'à renumérotation près, ces figures représentent toutes les possibilités à isotopie près pour les séparatrices d'un feuilletage réduit ; toutes les autres configurations sont interdites par la formule d'Euler-Poincaré. On en déduit tout de suite que deux feuilletages donnant le même triplet sont isotopes. \square

II. 5. On envisage maintenant le cas où certaines courbes du bord sont des feuilles lisses. On a la proposition générale suivante :

Proposition. Soit \mathfrak{F} un feuilletage mesuré de P^2 . Alors \mathfrak{F} s'obtient par élargissement d'un feuilletage \mathfrak{F}_0 d'une sous-variété P_0 ayant les propriétés suivantes :

Chaque composante connexe C de P_0 est :

1° Soit un pantalon et le feuilletage $\mathfrak{F}_0|_C$ est un bon feuilletage ;

2° Soit un voisinage collier d'une courbe de ∂P^2 et dans ce cas $\mathfrak{F}_0|_C$ est un feuilletage par cercles.

Démonstration. Si aucune composante du bord n'est lisse, on prend $P_0 = P^2$. Sinon, on considère une feuille lisse γ_1 dans ∂P^2 . On considère l'"anneau" maximal A associé à γ_1 par stabilité (lemme II.4 de l'exposé 5). Si $A = P^2$, on prend pour P_0 un voisinage collier de γ_1 feuilleté par cercles, dont la \mathfrak{F}_0 -épaisseur est la \mathfrak{F} -épaisseur de A .

Si $A \neq P^2$, il existe une feuille L de \mathfrak{F} dans l'intérieur de P^2 qui appartient à la frontière topologique de A ; la feuille L va d'une singularité s_0 à une singularité s_1 .

Si $s_0 = s_1$, \bar{L} est un cycle de feuilles formant une courbe de Jordan qui limite un vrai anneau A' feuilleté par cercles. Le domaine $\overline{P^2 - A'}$, qui est un pantalon, éventuellement pincé si s_0 appartient à ∂P^2 , est feuilleté avec moins de feuilles lisses dans son bord. On exécute de la même façon les autres composantes lisses.

Si $s_0 \neq s_1$, les singularités sont simples (figure 5) et de s_0 part une autre feuille L' dans la frontière de A . Si L' revient en s_0 , $\overline{L'}$ est un cycle plongé. Sinon L' va à s_1 et $\overline{L \cup L'}$ est un cycle de Jordan. Dans les deux cas, on poursuit comme plus haut. \square

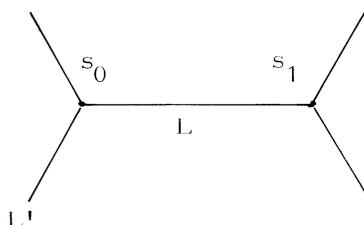


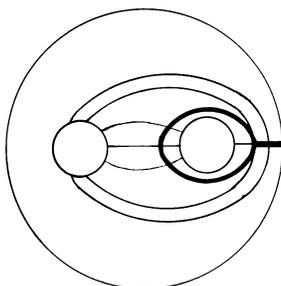
Figure 5

III. - LES ARCS JAUNES

III. 1. Il s'agit d'un ingrédient technique qui sert au repérage d'un feuilletage mesuré par sa trace sur chaque morceau d'une décomposition en pantalons de la surface donnée.

Pour chaque composante C du bord du pantalon P^2 et pour chaque type de bon feuilletage sur P^2 , on choisit un arc quasi-transverse, à extrémités dans C , et essentiel (c'est-à-dire non homotope à un arc du bord). On l'appelle l'arc jaune. Pour $C = \gamma_1$ et pour chaque type de bon feuilletage, on choisit l'arc indiqué en gras sur les figures ci-dessous.

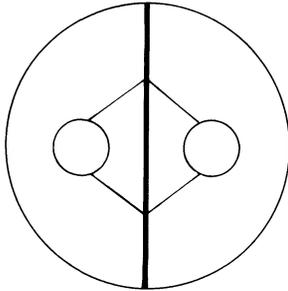
Cas génériques :



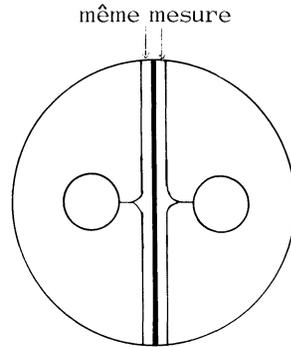
$$m_2 > m_1 + m_3$$

$$(\text{ou } m_3 > m_1 + m_2)$$

EXPOSÉ 6

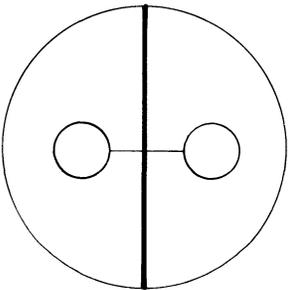


$$(m_1, m_2, m_3) \in (\leq \nabla)$$

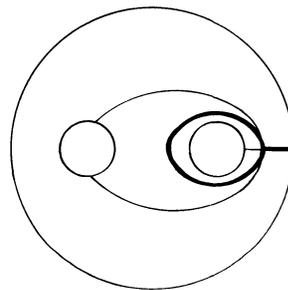


$$m_1 > m_2 + m_3$$

Cas où $(m_1, m_2, m_3) \in \partial (< \nabla)$, avec $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$, $m_3 \neq 0$:



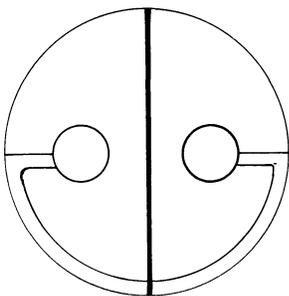
$$m_1 = m_2 + m_3$$



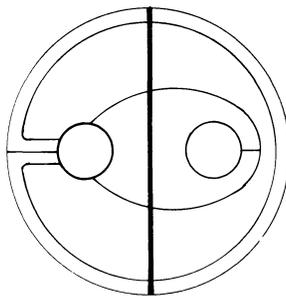
$$m_2 = m_1 + m_3$$

(ou $m_3 = m_1 + m_2$)

Cas où $m_1 = 0$:

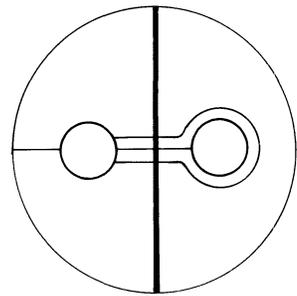


$$m_2 = m_3$$



$$m_2 > m_3 > 0$$

(ou $m_3 > m_2$)



$$m_3 = 0$$

(ou $m_2 = 0$)

Cas où $m_2 = 0$ (ou $m_3 = 0$) :

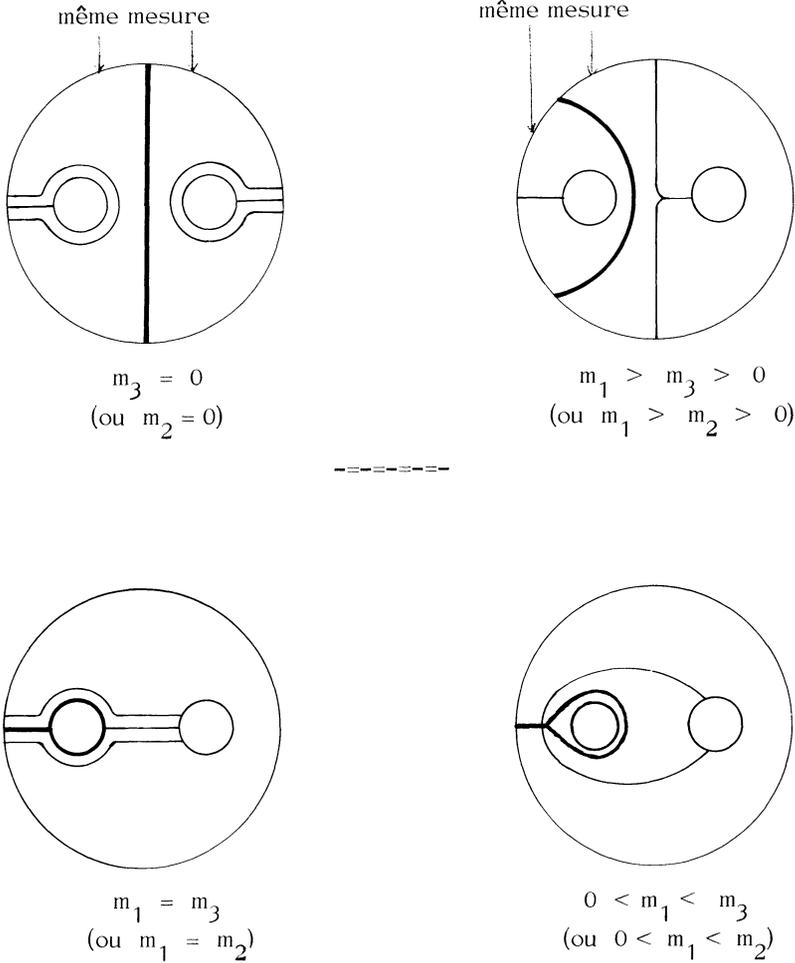


Figure 6

III. 2. Longueur de l'arc jaune.

Remarquons que l'arc jaune réalise le minimum de la longueur des arcs essentiels allant de γ_1 à γ_1 (quasi-transversalité). Sa longueur (au sens de la mesure transverse) est donnée par la formule :

$$l_1 = \sup \left(\frac{m_2 + m_3 - m_1}{2}, 0 \right) + \sup \left(\frac{m_2 - m_1 - m_3}{2}, 0 \right) + \sup \left(\frac{m_3 - m_1 - m_2}{2}, 0 \right)$$

la vérification se fait en examinant tous les cas de figure.

III. 3. Définition de l'arc A .

L'arc jaune délimite sur γ_1 deux arcs, l'un d'eux étant éventuellement réduit à un point. On appelle A celui qui est du même côté que γ_2 par rapport à l'arc jaune (il faudrait noter A par A_{12} , mais il n'y aura pas d'ambiguïté plus tard). Sa longueur a est donnée par la formule :

$$a = \sup \left(\frac{m_2 + m_1 - m_3}{2}, 0 \right) - \sup \left(\frac{m_2 - m_1 - m_3}{2}, 0 \right) .$$

§ IV. - FORME NORMALE D'UN FEUILLETAGE

IV. 1. Soit M une surface fermée de genre $g \geq 2$; soit K_1, \dots, K_{3g-3} une famille de courbes qui sépare M en pantalons. On désigne par $\{R_j\}$ les $2g-2$ pantalons ; chaque R_j est l'adhérence d'une des composantes de $M - \cup K_i$.

On aura besoin plus tard de la condition technique suivante : chaque R_j doit être l'image d'un pantalon plongé ; autrement dit, chaque K_i n'adhère pas au même pantalon par ses deux côtés.

Avec cette condition, on dit qu'on a une décomposition permise de M .

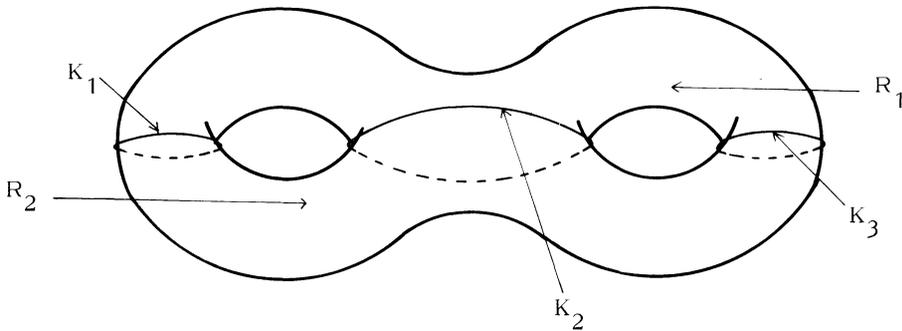


Figure 7

Pour chaque $i = 1, \dots, 3g-3$, on choisit un voisinage tubulaire $K_i \times [-1, +1] \subset M$ de K_i ; si $i \neq j$, les voisinages de K_i et K_j sont disjoints. On désigne par $\{R_j^i\}_{1 \leq j \leq 2g-2}$ les composantes connexes de $M - \cup (K_i \times]-1, +1[)$.

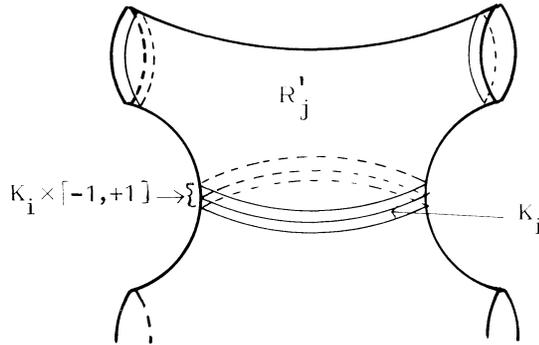


Figure 8

IV. 2. Définition. Soient M_0 une sous-variété compacte de dimension 2 de M et \mathfrak{F}_0 un feuilletage mesuré de M_0 . On dit que (M_0, \mathfrak{F}_0) est en forme normale (par rapport aux données du paragraphe précédent) si les conditions ci-dessous sont satisfaites.

- 1) Toute composante de ∂M_0 est un cycle de feuilles ;
- 2) $M_0 \cap R'_j$ est vide ou égal à R'_j ; dans ce dernier cas $\mathfrak{F}_0|_{R'_j}$ est un bon feuilletage ;
- 3) $M_0 \cap K_i \times]-1, +1[$ est :
 - soit vide ;
 - soit $K_i \times]-1, +1[$; dans ce cas, \mathfrak{F}_0 est transversal aux cercles $K_i \times \{t\}$, $t \in]-1, +1[$; remarquons qu'ici M_0 contient les pantalons adjacents à l'anneau ;
 - soit $K_i \times [-1/2, +1/2]$; dans ce cas, le feuilletage a pour feuilles les $K_i \times \{t\}$, $t \in [-1/2, +1/2]$.

Soit \mathfrak{F} un feuilletage mesuré de M . On dit que (M_0, \mathfrak{F}_0) est une forme normale de \mathfrak{F} , si (M_0, \mathfrak{F}_0) est en forme normale et si \mathfrak{F} est obtenu par élargissement de (M_0, \mathfrak{F}_0) .

IV. 3. Proposition. Tout feuilletage mesuré sur M a une forme normale.

Démonstration. Soit (\mathfrak{F}, μ) un feuilletage mesuré sur M . Quitte à changer la numérotation, on peut supposer que :

$$I(\mathfrak{F}, \mu ; [K_1]) \neq 0, \dots, I(\mathfrak{F}, \mu ; [K_\ell]) \neq 0,$$

et que

$$0 = I(\mathfrak{F}, \mu ; [K_{\ell+1}]) = \dots = I(\mathfrak{F}, \mu ; [K_{3g-3}]) .$$

Alors, d'après II.6 (exposé 5), en changeant \mathfrak{F} dans sa classe, on obtient que \mathfrak{F} soit transversal à $K_i \times \{t\}$ pour tout $t \in [-1, +1]$ et $i = 1, \dots, \ell$.

Soit M' le complémentaire des anneaux $K_i \times]-1, +1[$, $i = 1, \dots, \ell$. On a un feuilletage mesuré induit (\mathfrak{F}', μ) , transverse au bord; les courbes K_i , $i \geq \ell + 1$, sont incluses dans $\text{int } M'$.

Pour $i \geq \ell + 1$, on a $I(\mathfrak{F}', \mu; [K_i]) = 0$. En effet, en cas contraire, il existe \mathfrak{F}'' , feuilletage mesuré de M' équivalent à \mathfrak{F}' , coïncidant avec \mathfrak{F}' près du bord, et transversal à K_i . Mais alors, on a :

$$I(\mathfrak{F}, \mu; [K_i]) = I(\mathfrak{F}'', \mu; [K_i]) \neq 0,$$

ce qui est interdit par la numérotation.

Appliquant la proposition II.6 de l'exp. 5 à \mathfrak{F}' , M' et $K_{\ell+1}$, quitte à changer \mathfrak{F}' dans sa classe, on peut dire qu'il existe une homotopie $f_t: K_{\ell+1} \rightarrow M'$ telle que $f_0 = (K_{\ell+1} \hookrightarrow M')$ et que $f_1(K_{\ell+1})$ soit un ensemble invariant Σ_1 de \mathfrak{F}' . Lorsqu'on applique la proposition à $K_{\ell+2}$, on fait des opérations de Whitehead sur \mathfrak{F}' qui induisent des glissements de Σ_1 , en sorte que $K_{\ell+1}$ continue d'être homotopé sur un ensemble invariant etc... Ainsi on peut construire \mathfrak{F}' et une homotopie $f_t: K_{\ell+1} \cup \dots \cup K_{3g-3} \rightarrow M'$ telle que f_0 soit l'inclusion et que l'image de f_1 soit un ensemble invariant Σ de \mathfrak{F}' .

Soit $N \subset M'$ un voisinage régulier de Σ ; alors \mathfrak{F}' est obtenu par élargissement d'un feuilletage \mathfrak{F}'_1 sur $M'_1 = \overline{M'} - N$. Par construction, aucune composante de N n'est un disque. Comme M'_1 a un feuilletage mesuré, aucune composante de M'_1 n'est un disque. Au total, aucune composante de $\partial M'_1$ n'est homotope à zéro.

On peut supposer (par engouffrement) que $\text{int } N$ contient tous les K_i , $i \geq \ell + 1$. En effet, l'application singulière f_1 est proche d'une immersion f'_1 ; il existe un "disque de Whitney" Δ à travers lequel on peut faire une homotopie dont l'effet est de diminuer le nombre des points doubles de f'_1 . Mais, d'après ce qu'on vient de voir de ∂N , dès que $\partial \Delta$ est contenu dans N , Δ est contenu dans N . Par récurrence sur le nombre de points doubles, on voit que l'on peut déformer, par homotopie, f'_1 en un plongement, dont l'image est contenue dans N et qui, d'après Epstein (voir références de l'exposé 3), sera isotope à f_0 .

On voit que $R_j \cap M'_1$ est constitué d'au plus un pantalon ("concentrique à R_j ") et d'un certain nombre d'anneaux parallèles aux composantes du bord de R_j . Le bord d'une composante de $R_j \cap M'_1$ peut être de l'un ou l'autre type :

- $K_i \times \{\pm 1\}$ pour $i \leq \ell$; courbe transversale à \mathfrak{F}'_1 ;
- cycle de feuilles de \mathfrak{F}'_1 , parallèle à l'un des K_i , $i \geq \ell + 1$.

Alors une composante de $M_1^1 \cap R_j$, qui est un anneau, ne peut être feuilletée que par cercles. Mais une composante de $M_1^1 \cap R_j$ qui est un pantalon ne peut être pas un bon feuilletage ; on lui applique II.5, ce qui permet de remplacer $(M_1^1, \mathfrak{F}_1^1)$ par $(M_0^1, \mathfrak{F}_0^1)$ vérifiant :

- $\mathfrak{F}_0^1 = \mathfrak{F}_1^1$ au voisinage de ∂M^1 ;
- $(M_1^1, \mathfrak{F}_1^1)$ s'obtient par élargissement de $(M_0^1, \mathfrak{F}_0^1)$;
- si V est une composante de $R_j \cap M_0^1$ qui est un pantalon, $\mathfrak{F}_0^1|_V$ est un bon feuilletage.

Par une isotopie évidente de $(M_0^1, \mathfrak{F}_0^1)$, faisant par exemple coïncider le V ci-dessus avec R_j^1 , on obtient la forme normale cherchée. \square

IV. 4. Définition de $h\mathfrak{F}$.

Deux couples (M_0, \mathfrak{F}_0) et $(M_0^1, \mathfrak{F}_0^1)$ sont équivalents si $M_0 = M_0^1$ et si \mathfrak{F}_0^1 peut être obtenu à partir de \mathfrak{F}_0 par une suite finie d'opérations élémentaires des types suivants :

- opération de Whitehead à support dans un des R_j^1 ;
- isotopie à support dans $K_i \times [-1, +1] \cap M_0$;
- isotopie à support dans R_j .

L'ensemble des classes d'équivalence est noté $h\mathfrak{F}$ (ou $h\mathfrak{F}(M)$). L'élargissement induit une application $h\mathfrak{F} \rightarrow m\mathfrak{F}$, qui est surjective d'après la proposition précédente ; on verra plus loin qu'elle est en fait bijective.

IV. 5. Classification des feuilletages en forme normale.

On se réfère ici à la décomposition permise de M donnée en IV. 1. :

$$M = \left(\bigcup_{j=1}^{2g-2} R_j^1 \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{3g-3} K_i \times [-1, +1] \right).$$

Pour chaque R_j^1 , on se donne une fois pour toutes un difféomorphisme avec le pantalon standard, respectant l'orientation. De plus, pour chaque $i = 1, \dots, 3g-3$, on choisit des courbes K_i^1 et K_i'' ; si R_{j_1} et R_{j_2} sont les deux pantalons (distincts, car la décomposition est permise) qui touchent K_i , K_i^1 est une courbe fermée simple (\dagger), essentielle, qui n'est parallèle à aucune des courbes de $\partial R_{j_1} \cup \partial R_{j_2}$. La courbe K_i'' est obtenue à partir de K_i^1 par twist d'un tour dans le sens positif autour de K_i (figure 9).

(\dagger) Si les deux côtés de K_i adhéraient au même pantalon, K_i^1 ne serait pas plongeable.

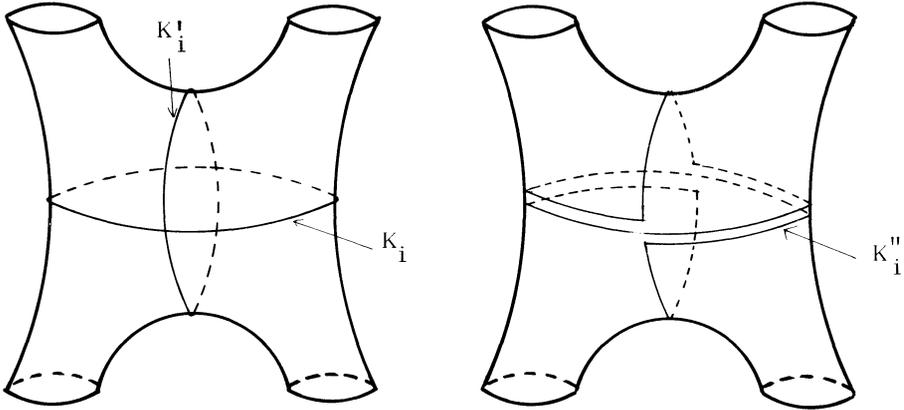


Figure 9

On pose $B = \{(m_i, s_i, t_i) \mid i = 1, \dots, 3g-3, m_i, s_i, t_i \geq 0, (m_i, s_i, t_i) \in \partial(\leq \nabla)\}$
 C est un cône de \mathbb{R}_+^{9g-9} qui est homéomorphe à \mathbb{R}^{6g-6} . On va construire une application :

$$n \mathfrak{F} \longrightarrow B - 0 .$$

Soit (M_0, \mathfrak{F}_0) le représentant d'un élément de $n \mathfrak{F}$; sans changer sa classe, on peut supposer que $\mathfrak{F}_0 \mid R_j^i$ est une forme canonique pour tout j tel que $M_0 \cap R_j^i \neq \emptyset$. L'invariant m_i est la mesure de K_i , nulle si $K_i \cap M_0 = \emptyset$. Les invariants s_i et t_i dépendent de la forme du feuilletage induit sur l'anneau $K_i \times [-1, +1]$; il y a trois cas.

1er cas. $K_i \times [-1, +1] \cap M_0 \subset K_i \times \{-1\} \cup K_i \times \{+1\}$. On pose alors $s_i = t_i = 0$.

2e cas. $K_i \times [-1/2, +1/2] = K_i \times]-1, +1[\cap M_0$. Dans ce cas, l'anneau est feuilleté par cercles ; alors $s_i = t_i$ est l'épaisseur de l'anneau, c'est-à-dire la mesure d'une transversale. Noter que, dans ces deux premiers cas, $m_i = 0$; donc il est clair que (m_i, s_i, t_i) appartient à $\partial(\leq \nabla)$.

3e cas. $M_0 \cap K_i \times [-1, +1] = K_i \times [-1, +1]$. Dans ce cas, le feuilletage est transverse aux cercles $K_i \times \{x\}$ pour tout $x \in [-1, +1]$, et M_0 contient les deux pantalons R_k^i et R_ℓ^i adjacents à $K_i \times [-1, +1]$. On a un arc jaune J_k et un arc jaune J_ℓ . Il existe alors deux arcs S_i^i et S_i^i dans $K_i \times [-1, +1]$ tels que $J_k \cup S_i^i \cup J_\ell \cup S_i^i$ soit une courbe fermée homotope à K_i^i ; leurs classes d'homotopie à extrémités fixes dans $K_i \times [-1, +1]$ sont complètement déterminées. On convient de choisir pour S_i

et S_i^1 des arcs de longueurs minimales. Avec une convention d'orientation, on distingue S_i et S_i^1 . On pose :

$$s_i = \mu_0(S_i), \quad s_i^1 = \mu_0(S_i^1)$$

où μ_0 est la mesure accompagnant le feuilletage \mathfrak{F}_0 .

De la même façon, on construit des arcs T_i et T_i^1 tels que $J_k \cup T_i \cup J_2 \cup T_i^1$ soit homotope à K_i'' . On pose :

$$t_i = \mu_0(T_i), \quad t_i^1 = \mu_0(T_i^1).$$

En résumé, les invariants (m_i, s_i, t_i) sont dans ce cas les invariants classifiant le feuilletage induit sur l'anneau $K_i \times [-1, +1]$, au sens de la classification du § I. En particulier, on a : $(m_i, s_i, t_i) \in \partial(\leq \nabla)$.

Il est très facile de voir que les invariants m_i, s_i, t_i ne dépendent que de la classe de (M_0, \mathfrak{F}_0) dans $n\mathfrak{F}$.

Lemme. L'image de $n\mathfrak{F}$ dans B ne contient pas 0.

Preuve. Soit (M_0, \mathfrak{F}_0) donné. Comme M_0 n'est pas vide, on a l'une des situations suivantes :

- 1) Pour un certain i , $M_0 \cap K_i \times]-1, +1[= K_i \times [-1/2, +1/2]$; alors $(s_i, t_i) \neq 0$.
- 2) Pour un certain j , R_j^1 est contenu dans M_0 ; comme le feuilletage induit est un bon feuilletage, l'une des courbes du bord a une mesure non nulle. \square

Etant donné ce qui a été dit de la classification des feuilletages mesurés sur l'anneau et le pantalon, on peut laisser en exercice les détails de la proposition suivante.

Proposition. L'application construite ci-dessus

$$n\mathfrak{F} \rightarrow B - 0$$

est une bijection.

§ V. - CLASSIFICATION DES FEUILLETAGES MESURÉS

On considère toujours une surface M fermée orientable de genre $g > 1$. Pour les autres cas, on renvoie à l'exposé 11.

V. 1. Proposition. Il existe une application continue $\theta : I_{\times}(n\mathfrak{F}) \rightarrow B$, positivement

homogène de degré 1 (i.e. $\theta(\lambda x) = \lambda \theta(x)$, pour $\lambda > 0$), qui rend commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc}
 n\mathfrak{F} & \longrightarrow & \mathfrak{m}\mathfrak{F} & \xrightarrow{I_*} & I_*(\mathfrak{m}\mathfrak{F}) \subset \mathbb{R}_+^{\mathfrak{d}} \\
 & \searrow & & & \downarrow \theta \\
 & & & & B
 \end{array}$$

Démonstration. Puisque $n\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{m}\mathfrak{F}$ est une surjection, il s'agit de montrer que, pour un feuilletage en forme normale (M_0, \mathfrak{F}_0) , les invariants m_1, s_1, t_1 ne dépendent que des mesures de courbes simples. Il est tout de suite clair que $m_1 = I(\mathfrak{F}_0, \mu_0; [K_1])$.

On montrera en appendice que s_1 et t_1 sont déterminés par $I(\mathfrak{F}_0, \mu_0; [K_1^I])$ et $I(\mathfrak{F}_0, \mu_0; [K_1^{II}])$, via des formules continues homogènes. \square

Puisque $n\mathfrak{F} \rightarrow B$ est une injection, on tire tout de suite les corollaires suivants.

V. 2. Théorème. Deux feuilletages mesurés (\mathfrak{F}, μ) et (\mathfrak{F}', μ') sur une surface M sont équivalents au sens de Whitehead si et seulement si, pour toute courbe simple γ de M , on a :

$$I(\mathfrak{F}, \mu; [\gamma]) = I(\mathfrak{F}', \mu'; [\gamma]) .$$

V. 3. Proposition. L'application d'élargissement $n\mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{m}\mathfrak{F}$ est une bijection.

V. 4. Maintenant, on peut identifier $\mathfrak{m}\mathfrak{F}$ à son image par I_* , munir $\mathfrak{m}\mathfrak{F}$ de la topologie induite par $\mathbb{R}_+^{\mathfrak{d}}$ et le compléter en $\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{F}} = \mathfrak{m}\mathfrak{F} \cup 0$.

Théorème. L'application θ est un homéomorphisme de $\overline{\mathfrak{m}\mathfrak{F}}$ sur $B \approx \mathbb{R}^{6g-6}$, positivement homogène de degré 1. Par conséquent, $P\mathfrak{m}\mathfrak{F}$ est homéomorphe à S^{6g-7} .

Démonstration. On sait déjà que l'application classifiante θ est une bijection continue. Si l'on montre que $\mathfrak{m}\mathfrak{F}$ est une variété topologique, le théorème de l'invariance du domaine assure que θ est aussi ouverte ; le théorème est alors démontré.

Pour prouver que $\mathfrak{m}\mathfrak{F}$, avec la topologie de $\mathbb{R}_+^{\mathfrak{d}}$, est une variété topologique, on utilise les lemmes suivants.

Lemme 1 (changement de décomposition).

Soit κ une décomposition permise de M en pantalons et $(M_0, \mathfrak{F}_0, \mu_0)$ un

feuilletage mesuré en forme normale par rapport à \mathcal{K} . Il existe une autre décomposition permise $\hat{\mathcal{K}}$, par un système de courbes $\hat{\mathcal{K}}_i$, $i = 1, \dots, 3g-3$, telles que $\hat{m}_i = I(\tilde{\alpha}_0, \mu_0; [\hat{K}_i])$ soit non nul quel que soit i .

N.B. Il n'est pas dit que $(\tilde{\alpha}_0, \mu_0)$ est en forme normale par rapport à cette décomposition.

Démonstration. Supposons d'abord que, pour tout i , on ait :

$$I(\tilde{\alpha}_0, \mu_0; [K_i]) = 0.$$

En particulier, le support de M_0 est concentré dans des anneaux $K_i \times [-1/2, +1/2]$. On regarde un tel i et les deux pantalons R_k^i et R_ℓ^i qui touchent $K_i \times [-1, +1]$ (figure 10).

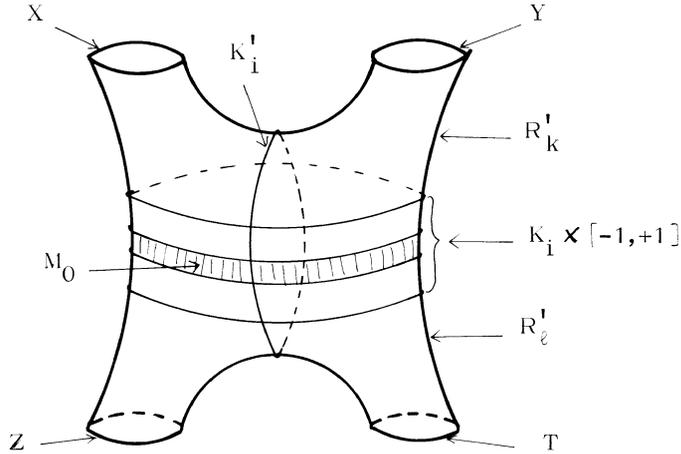


Figure 10

Si la situation est celle suggérée par la figure, où ni la paire (X, Z) ni la paire (Y, T) ne borde un anneau, on remplace K_i par K_i^i ; cela donne une décomposition permise où $I(\tilde{\alpha}_0, \mu_0; [K_i^i]) \neq 0$. Au contraire, si (X, Z) borde un anneau, on construit la courbe simple K_i^{iii} , qui est obtenue à partir de K_i^i par un demi-twist de Dehn le long de K_i et on remplace K_i par K_i^{iii} (figure 11). La décomposition obtenue est permise car la paire (Y, Z) ne borde pas un anneau (sinon (Y, X) en borderait un et \mathcal{K} ne serait pas permise).

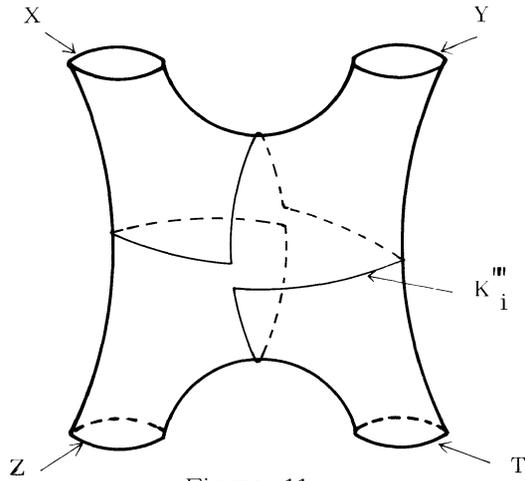
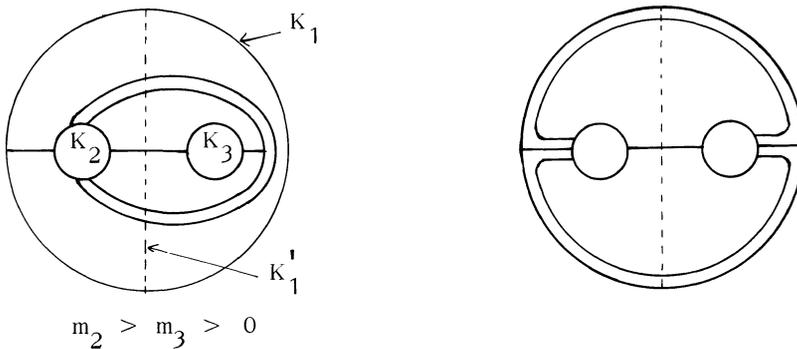


Figure 11

On est ramené à la situation suivante :

- si $m_i = 0$, K_i évite M_0 ou est un cycle de feuilles de \mathfrak{F}_0 ;
- si $m_i \neq 0$, $K_i \cap M_0$ est transversal à \mathfrak{F}_0 ;
- au moins un des m_i est non nul.

Disons alors qu'on a un pantalon R , bordé par $K_1 \cup K_2 \cup K_3$, avec $m_1 = 0$ et $m_2 \neq 0$. Pour l'élargissement du feuilletage induit sur R , on a les trois possibilités de la figure 12.



$$m_2 > m_3 > 0$$

(En échangeant les lettres K_2 et K_3 ,
on obtient le cas : $m_3 > m_2 > 0$)

Figure 12

Comme avant, on construit K_1^I (ou K_1^{III}) qui est transversale à \mathfrak{F}_0 et qui donne une nouvelle décomposition permise où l'on gagne $m_1 \neq 0$. \square

Lemme 2. Soit (\mathfrak{F}_0, μ_0) un feuilletage mesuré en position normale par rapport à une décomposition permise \mathcal{K} . On suppose que, pour tout $i = 1, \dots, 3g-3$, on a :

$$m_i^0 = m_i(\mathfrak{F}_0, \mu_0) \neq 0 .$$

Alors l'application $\theta^{-1} : B - 0 \rightarrow I_{\times}(\mathfrak{m}\mathfrak{F}) \subset \mathbb{R}_+^{\mathcal{J}}$ est continue au point de coordonnées $(m_i^0, s_i^0, t_i^0)_{i=1, \dots, 3g-3}$.

Remarques. 1) Ceci prouve que $I_{\times}(\mathfrak{m}\mathfrak{F})$ est une variété topologique au voisinage de (\mathfrak{F}_0, μ_0) ; donc, si on applique le lemme 1, $I_{\times}(\mathfrak{m}\mathfrak{F})$ est une variété topologique globalement.

2) Le lemme 2 serait trivial si l'on disposait de formules explicites qui, pour tout $\gamma \in \mathcal{J}$, expriment $I(\mathfrak{F}, \mu ; \gamma)$ en fonction de $(m, s, t)(\mathfrak{F}, \mu)$ et de $(m, s, t)(\gamma)$.

Démonstration. Notons ici E l'ensemble des feuilletages mesurés transverses à toutes les courbes K_i de la décomposition \mathcal{K} , sans relation d'équivalence. Si $B^0 = \{(m_i, s_i, t_i)_i \in B \mid m_i \neq 0, \text{ pour tout } i = 1, \dots, 3g-3\}$, il existe une section de θ , $\sigma : B^0 \rightarrow E$, avec les propriétés suivantes :

1) Un feuilletage de l'image de σ est en forme normale par rapport à \mathcal{K} et, pour tout i , $\mathfrak{F}|_{K_i} \times [-1, +1]$ varie continûment au sens de la topologie des 1-formes.

2) Si α est un arc de R_j^1 , allant du bord au bord, transversalement à $(\mathfrak{F}_0, \mu_0) = \sigma((m_i^0, s_i^0, t_i^0)_i)$, alors α est transversal à $(\mathfrak{F}, \mu) = \sigma((m_i, s_i, t_i)_i)$, pour (m_i, s_i, t_i) assez voisin de (m_i^0, s_i^0, t_i^0) ; de plus, $\mu(\alpha)$ varie continûment.

3) Soit $\alpha_0 * \beta_0$ un arc de R_j^1 , allant du bord au bord, où α_0 est transversal à \mathfrak{F}_0 , où β_0 est dans une feuille et où $\alpha_0 * \beta_0$ est quasi-transverse à \mathfrak{F}_0 . Alors, pour (m_i, s_i, t_i) assez voisin de (m_i^0, s_i^0, t_i^0) , il existe un arc $\alpha * \beta \subset R_j^1$, allant du bord au bord, tel que :

- a) $\alpha * \beta$ soit C^0 -voisin de $\alpha_0 * \beta_0$;
- b) $\alpha \pitchfork \mathfrak{F}$, où $(\mathfrak{F}, \mu) = \sigma((m_i, s_i, t_i)_i)$;
- c) le recollement de α et β soit quasi-transverse à \mathfrak{F} ;
- d) $\mu(\beta)$ et $|\mu(\alpha * \beta) - \mu_0(\alpha_0)|$ soient petits.

4) Même condition pour des arcs de la forme $\beta_0 * \alpha_0 * \beta_0'$.

[Dans un certain sens, ces conditions signifient que σ est continue. Mais y a-t'il une bonne topologie sur E ?] .

On va se contenter d'une brève esquisse pour l'existence de σ . Puisqu'on ne définit σ que sur B_0 , on n'utilise dans chaque pantalon que les modèles (1), (2) et (3) de II. 4. Tant que l'on reste à l'intérieur du triangle fondamental, on peut faire varier "continûment" les réalisations effectives de ces modèles ainsi que les "arcs jaunes" correspondants. Ceci donne la possibilité de recoller les morceaux de façon à avoir une section σ , continue dans la topologie des champs de droites (en dehors des singularités). La figure 13 illustre le point 3) .

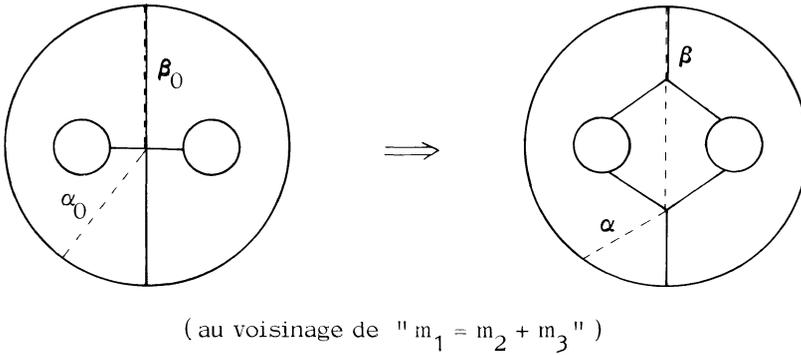


Figure 13

Connaissant σ , on finit facilement la démonstration du lemme 2 . Soit $\gamma \in \mathcal{A}$ et σ_γ la composante correspondante de σ :

$$\sigma_\gamma : B_0 \longrightarrow \mathbb{R}_+ .$$

On veut montrer que cette fonction est continue en $(m_i^0, s_i^0, t_i^0)_i$. Comme on l'a remarqué en II. 6 (exposé 5) , on trouve une immersion γ_0^1 , quasi-transverse à \mathfrak{F}_0 , qui est limite de plongements et dont la classe d'homotopie est γ . Disons que :

$$\gamma_0^1 = \alpha_1^0 * \beta_1^0 * \alpha_2^0 * \dots ,$$

où α_i^0 est transversal à \mathfrak{F}_0 et où β_i^0 est dans les feuilles (et points singuliers). On remarque tout de suite que la μ -longueur de γ_0^1 varie continûment ; il s'en suit que σ_γ est semi-continue supérieurement.

D'après les propriétés 3) et 4) de σ , on construit pour (m_1, s_1, t_1) voisin de (m_1^0, s_1^0, t_1^0) une autre courbe immergée :

$$\gamma^1 = \alpha_1 * \beta_1 * \alpha_2 * \dots$$

homotope à γ_0^1 , avec les propriétés suivantes :

- 1) α_i et β_i se recollent quasi-transversalement à \mathfrak{F} , où $(\mathfrak{F}, \mu) = \sigma((m_1, s_1, t_1)_i)$;
- 2) α_i est transverse à \mathfrak{F} et $\mu(\alpha_i)$ est proche de $\mu_0(\alpha_i^0)$;
- 3) $\mu(\beta_i)$ est petit.

A extrémités fixes, β_i est isotope à $\bar{\beta}_i$ qui est quasi-transverse à \mathfrak{F} ; on a $\mu(\bar{\beta}_i) \leq \mu(\beta_i)$. En utilisant les propriétés 3) de σ , on voit facilement que $\bar{\gamma}^1 = \alpha_1 * \bar{\beta}_1 * \alpha_2 * \dots$, qui est quasi-transverse par morceaux à \mathfrak{F} , est en réalité globalement quasi-transverse à \mathfrak{F} . On a donc :

$$I(\mathfrak{F}, \mu ; [\gamma]) = \mu(\alpha_1) + \mu(\bar{\beta}_1) + \dots ,$$

somme qui, terme à terme, est proche de :

$$I(\mathfrak{F}_0, \mu_0 ; [\gamma]) = \mu_0(\alpha_1^0) + \mu_0(\beta_1^0) + \dots = \sum_i \mu_0(\alpha_i^0) . \quad \square$$

§ VI. - RETOUR SUR LES COURBES COMME FONCTIONNELLES

VI. 1. On a le diagramme commutatif ci-dessous (III. 3, exposé 5) :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{S} & & \\
 \text{élargissement} \longrightarrow \downarrow & \searrow & i_* \\
 n\mathfrak{F} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \mathcal{S} \\
 & \searrow & I_* \\
 & & \mathbb{R}_+^* \mathcal{S}
 \end{array}$$

La flèche $\mathcal{S} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \mathcal{S}$ se factorise naturellement par $n\mathfrak{F}$. En effet, si on représente un élément de \mathcal{S} par une courbe γ ayant une intersection minimale avec chaque K_j , alors un élargissement partiel de γ fournit un feuilletage en forme normale, comme on le voit en regardant chaque pantalon.

En utilisant l'application $\theta : I_* (n\mathfrak{F}) \rightarrow B$ de la proposition V.1, on obtient donc :

$$\bar{\Phi} : \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{S} \text{ (resp. } \mathcal{S}^1) \rightarrow B$$

qui à $\beta \in \mathcal{S}^1$ associe $\{\bar{m}_j(\beta), \bar{s}_j(\beta), \bar{t}_j(\beta) \mid j = 1, \dots, 3g-3\}$. On rappelle que, dans l'exposé 4, pour $\beta \in \mathcal{S}^1$, on a défini $\Phi(\beta) = \{m_j(\beta), s_j(\beta), t_j(\beta)\}$. Malheureusement $\bar{\Phi}(\beta)$ ne coïncide pas avec $\Phi(\beta)$; il est vrai que $m_j(\beta) = \bar{m}_j(\beta) = i(\beta, K_j)$, mais les autres coordonnées diffèrent parce que l'arc jaune n'est pas choisi de la même façon dans la théorie des courbes et dans celle des feuilletages. D'ailleurs $\bar{\Phi}(\beta)$ n'est pas toujours à coordonnées entières.

Pour discuter cette différence d'arcs jaunes dans les deux théories, il faut observer de nouveau les modèles sur le pantalon standard P^2 . On observe que l'arc jaune d'un arc multiple, associé à $\partial_1 P^2$, coïncide toujours avec celui du feuilletage obtenu par élargissement, sauf si

$$(*) \quad m_1 > m_2 + m_3 \quad .$$

En revanche, l'arc jaune de la théorie des courbes convient pour les feuilletages. Evidemment, la longueur de l'arc A , qui lui est associé, ne reste donnée par la formule III. 3 que si $(*)$ n'est pas satisfaite. Sinon on prend :

$$\text{long } A = m_2 \quad .$$

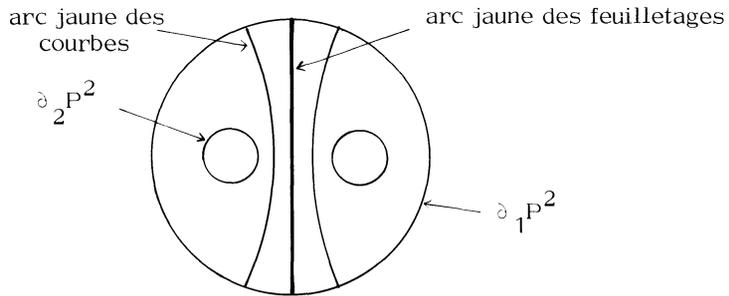
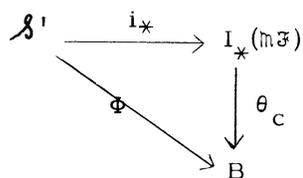


Figure 14

En répercutant ce changement au travers des formules de l'appendice, on obtient une nouvelle classification des feuilletages, par un homéomorphisme

$$\theta_C : \overline{I_* (\overline{m\mathcal{F}})} \longrightarrow B \quad ,$$

qui, cette fois-ci, rend commutatif le diagramme :



Donc $i_*(\mathcal{J}')$ est un "réseau" dans $I_*(\mathfrak{M}\mathcal{F})$; comme on sait que $i_*(\mathcal{J}')$ est contenu dans $\overline{i_*(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{J})}$, on voit que $i_*(\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{J})$ est dense dans $I_*(\mathfrak{M}\mathcal{F})$. On a donc démontré à la fois le théorème 9 de l'exposé 4 et la proposition VI. 2.

VI. 2. Proposition. Dans $P(\mathbb{R}_+^* \mathcal{J})$, l'ensemble $\pi i_*(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$ est dense dans $\pi I_*(\mathfrak{M}\mathcal{F})$. Donc $I_*(\mathfrak{M}\mathcal{F}) \cup \{0\} = \overline{i_*(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{J})}$.

§ VII. - MINIMALITÉ DE L'ACTION DE $\pi_0(\text{Diff}M)$ SUR $P\mathfrak{M}\mathcal{F}$

VII.1. Soit M une surface compacte connexe orientable sans bord, de genre ≥ 1 . Nous notons toujours par π la projection $\mathbb{R}_+^* - \{0\} \rightarrow P(\mathbb{R}_+^* \mathcal{J})$, et par $P\mathfrak{M}\mathcal{F}$ l'image de $\mathfrak{M}\mathcal{F}$ par π . L'action naturelle de $\pi_0(\text{Diff}M)$ sur $\mathfrak{M}\mathcal{F}$ donne par passage au quotient une action naturelle de $\pi_0(\text{Diff}M)$ sur $P\mathfrak{M}\mathcal{F}$.

VII.2. Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant :

Théorème. L'action de $\pi_0(\text{Diff}M)$ sur $P\mathfrak{M}\mathcal{F}$ est minimale.

Rappelons que l'action d'un groupe sur un espace topologique est dite minimale si l'orbite de chaque point est dense.

VII.3. Si α est une courbe simple dans M , on note par $t_\alpha : M \rightarrow M$ un twist d'un tour autour de α .

Proposition. Soient α une courbe simple et \mathcal{F} un feuilletage mesuré. Pour toute courbe β et pour tout entier $n \geq 0$, on a l'inégalité :

$$|I(t_\alpha^n \mathcal{F}, [\beta]) - nI(\mathcal{F}, [\alpha])i([\beta], [\alpha])| \leq I(\mathcal{F}, [\beta])$$

Démonstration. Si \mathcal{F} est un feuilletage défini par une courbe, la proposition est un cas particulier de la proposition 1 de l'appendice de l'exposé 4. Vu que l'inégalité est homogène en \mathcal{F} , la proposition est encore vraie pour \mathcal{F} dans $i_*(\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{J})$.

Comme $i_{*}(\mathbb{R}^{*}_{+} \times \mathcal{K})$ est dense dans $\mathfrak{M}\mathcal{F}$, l'inégalité est vraie pour tout feuilletage \mathcal{F} . \square

Corollaire. Soit \mathcal{F} un feuilletage mesuré et α une courbe, tels que $I(\mathcal{F}, [\alpha]) \neq 0$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(t_{\alpha}^n \mathcal{F}) = \pi([\alpha]) .$$

Démonstration. On a, comme conséquence de la proposition précédente :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{ni(\alpha, \mathcal{F})} t_{\alpha}^n \mathcal{F} = [\alpha] \text{ dans } \mathfrak{M}\mathcal{F} . \quad \square$$

VII.4. On démontre le cas particulier suivant du théorème VII.2 :

Lemme. Si γ est une courbe qui ne sépare pas M , l'orbite de $\pi([\gamma])$ par $\pi_0(\text{Diff}M)$ est dense dans $P\mathfrak{M}\mathcal{F}$.

Démonstration. Commençons par remarquer que l'orbite de γ par $\pi_0(\text{Diff}M)$ consiste en les (classes d'isotopie de) courbes qui ne séparent pas M . Puisque \mathcal{K} est dense dans $P\mathfrak{M}\mathcal{F}$, il suffit de montrer que l'adhérence de l'orbite de γ contient aussi les courbes qui séparent M . Soit $\bar{\gamma}$ une telle courbe ; on peut trouver une courbe γ' qui ne sépare pas M et telle que $i(\gamma', \bar{\gamma}) \neq 0$. Par le corollaire VII.3, on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{\gamma'}^n \gamma' = \bar{\gamma}$ dans $P\mathfrak{M}\mathcal{F}$. Donc $\bar{\gamma}$ est dans l'adhérence de l'orbite de γ' et aussi dans celle de γ , puisque ces deux orbites sont les mêmes. \square

VII.5. Démonstration du théorème VII.2. Soit \mathcal{F} un feuilletage mesuré. On peut trouver une courbe γ qui ne sépare pas M et telle que $I(\mathcal{F}, \gamma) \neq 0$. Par le corollaire VII.3, l'adhérence de l'orbite de \mathcal{F} dans $P\mathfrak{M}\mathcal{F}$ contient γ , et donc aussi l'orbite de γ . Il résulte du lemme VII.4 que l'orbite de \mathcal{F} est dense dans $P\mathfrak{M}\mathcal{F}$. \square

§ VIII. - EXISTENCE DES FEUILLETAGES MESURÉS SUPPLÉMENTAIRES

Par définition un "supplémentaire" d'un feuilletage mesuré (\mathcal{F}, μ) est un feuilletage mesuré (\mathcal{F}', μ') transverse à (\mathcal{F}, μ) (voir exposé 1 § V).

Proposition VIII.1. Si (\mathcal{F}, μ) est un feuilletage mesuré, il existe $(\mathcal{F}'', \mu'') \sim_m (\mathcal{F}, \mu)$ tel que (\mathcal{F}'', μ'') admet un supplémentaire.

Démonstration. D'après le § V ci-dessus, il vient (\mathfrak{F}'', μ'') , équivalent à (\mathfrak{F}, μ) , et une décomposition en pantalons tels que :

$$\forall j, \quad i(\mathfrak{F}'', K_j) \neq 0 .$$

En élargissant la courbe multiple fournie par les K_j , on obtient le \mathfrak{F}' cherché. \square

Remarque. Ce résultat est équivalent au théorème de Hubbard-Masur [1] et Kerckhoff [2], qui affirme que $\mathfrak{M}\mathfrak{F}(M^2)$ est réalisable par les différentielles quadratiques holomorphes sur M^2 . On renvoie à [3], [1] pour des détails sur la relation entre différentielles quadratiques et feuilletages mesurés.

RÉFÉRENCES

- [1] J. HUBBARD and H. MASUR, Quadratic differentials and foliations, à paraître dans Acta Mathematica.
- [2] S. KERCKHOFF, The asymptotic geometry of Teichmüller space, thèse, Princeton, 1977.
- [3] Séminaire de l'E.N.S. (Douady-Verdier), Sur les formes de Strebel, 1975-76, à paraître.

Astérisque

ALBERT FATHI

Appendice : Formules explicites sur les feuilletages mesurés

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 120-126

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__120_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

APPENDICE

FORMULES EXPLICITES SUR LES FEUILLETAGES MESURÉS

par Albert FATHI

Sur le double pantalon, on considère les courbes K, K', K'' (figure 15) .

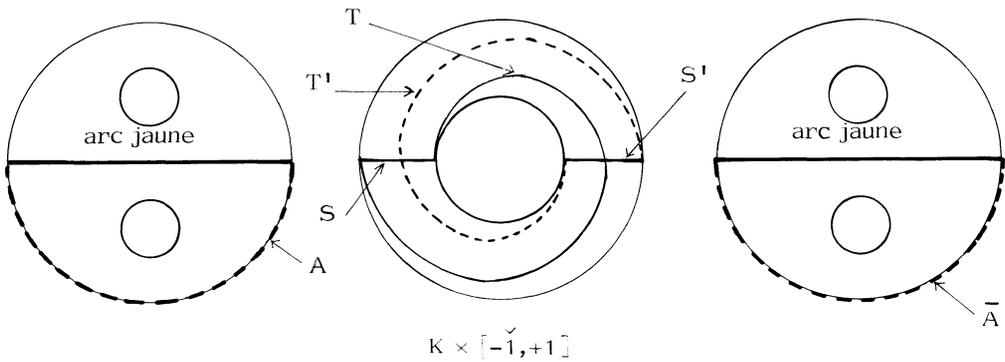


Figure 15

$$K' \simeq \text{arc jaune} \cup S \cup \text{arc jaune} \cup S'$$

$$K'' \simeq \text{arc jaune} \cup T \cup \text{arc jaune} \cup T'$$

A et \bar{A} sont du même côté par rapport à K'

Pour un feuilletage en forme normale par rapport à cette décomposition, on a défini trois nombres (m, s, t) , en plus des quatre mesures des courbes du bord (voir IV. 5).

Proposition. Il existe des formules continues, positivement homogènes de degré 1, calculant s et t en fonction des mesures minimales des classes d'isotopie $[K]$, $[K']$, $[K'']$ et des courbes du bord du double pantalon.

Démonstration. On utilise les notations suivantes : m est la longueur de K , s, t, s', t', a et \bar{a} sont les longueurs des arcs S, T, S', T', A et \bar{A} , définis en III. 3 et en IV. 5 et rappelés sur la figure 15 .

Affirmation 1. Si $m \neq 0$, on peut calculer s et t en fonction de $\alpha = s + s'$, $\beta = t + t'$, m, a et \bar{a} .

On trivialise l'anneau $K \times [-1,+1]$ de sorte que la projection sur K feuillette comme le feuilletage donné. Dans le revêtement $\mathbb{R} \times [-1,+1]$ de l'anneau, le groupe agissant comme la translation par m , on a une figure telle que 16, où on a porté la longueur des segments (de droite) réalisant la plus petite longueur des arcs

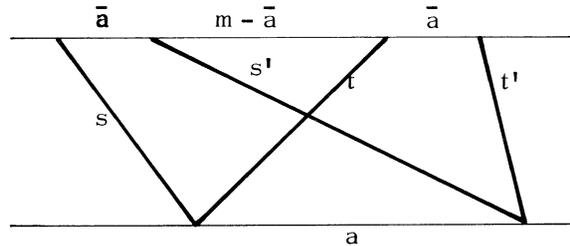


Figure 16

relevant S, T, \dots . Des raisons géométriques évidentes impliquent que les extrémités supérieures de ces arcs apparaissent toujours dans l'ordre indiqué. On rappelle aussi ce qui est visible sur la figure :

$$(m, s, t) \in \partial(\leq \nabla), \quad (m, s', t') \in \partial(\leq \nabla) .$$

D'où il suit que $(2m, \alpha, \beta) \in (\leq \nabla)$. Donc on a :

$$\alpha \leq \beta + 2m$$

$$\beta \leq \alpha + 2m$$

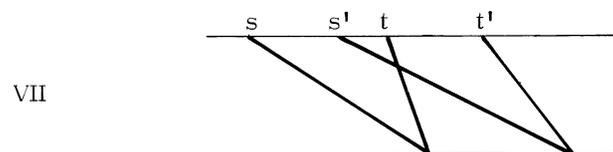
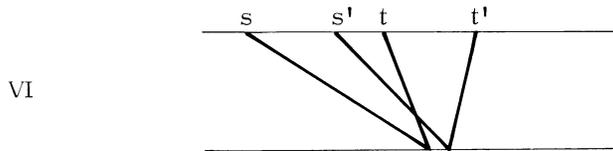
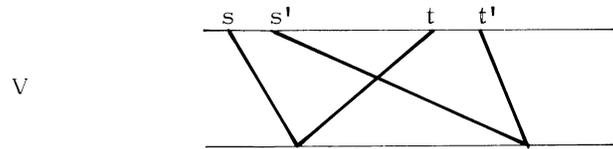
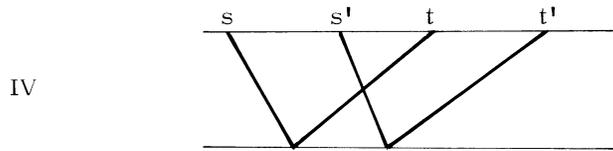
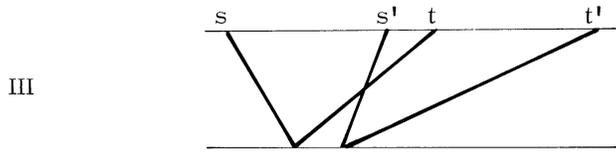
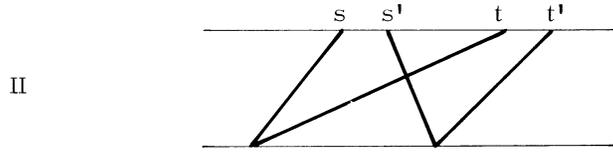
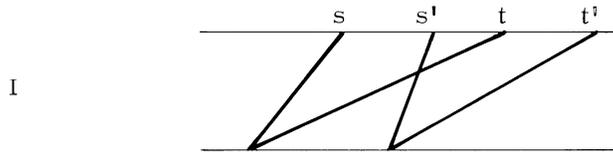
$$2m \leq \alpha + \beta$$

et, bien sûr, $m \geq a$; $m \geq \bar{a}$. De plus, (s, s', \bar{a}, a) et (t, t', \bar{a}, a) sont les longueurs des côtés de quadrilatères dégénérés ; donc, on a :

$$\alpha, \beta \geq |a - \bar{a}| .$$

On décrit les configurations possibles en termes de l'angle que fait chaque brin avec l'horizontale dans le revêtement universel. On exclut quelques configurations en remarquant que si S fait un angle $\leq \pi/2$, alors T' ne peut faire un angle $> \pi/2$ sinon on aurait $a > m$.

APPENDICE DE L'EXPOSÉ 6



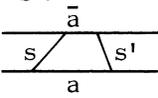
La configuration I est caractérisée par : $\beta = \alpha + 2m$; de plus on a :

$$\begin{cases} \beta \geq \alpha \\ s + s' = \alpha \\ s - s' = a - \bar{a} \\ t = s + m \\ t' = s' + m . \end{cases}$$

En effet, compte tenu de $(m, s, t) \in \partial(\leq \nabla)$, $(m, s', t') \in \partial(\leq \nabla)$, on voit que $\beta = \alpha + 2m$ impose $t = s + m$ et $t' = s' + m$, ce qui détermine la configuration I.

La configuration II est caractérisée par : $\alpha = a - \bar{a}$; de plus on a :

$$\begin{cases} \beta \geq \alpha \\ s + s' = \alpha \\ s - s' = \beta - 2m \\ t = s + m \\ t' = m - s' . \end{cases}$$

En effet, $s + s' + \bar{a} = a$ détermine  ; comme $a < m$, l'angle de T' est sûrement inférieur à $\pi/2$.

Des raisonnements analogues permettent d'établir les caractérisations des autres cas.

La configuration III est caractérisée par : $\alpha = \bar{a} - a$; de plus on a :

$$\begin{cases} \beta \geq \alpha \\ s + s' = \alpha \\ s - s' = 2m - \beta \\ t = m - s \\ t' = s' + m . \end{cases}$$

La configuration IV est caractérisée par : $\alpha + \beta = 2m$; de plus, on a :

$$\begin{cases} s + s' = \alpha \\ s - s' = \bar{a} - a \\ t = m - s \\ t' = m - s' . \end{cases}$$

La configuration V est caractérisée par : $\beta = a - \bar{a}$; de plus on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \geq \beta \\ s + s' = \alpha \\ s - s' = \bar{a} - a \\ t = m - s \\ t' = m - s' . \end{array} \right.$$

La configuration VI est caractérisée par : $\beta = \bar{a} - a$; de plus on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \geq \beta \\ s + s' = \alpha \\ s - s' = \bar{a} - a \\ t = s - m \\ t' = m - s' . \end{array} \right.$$

La configuration VII est caractérisée par : $\alpha = \beta + 2m$; de plus on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \geq \beta \\ s + s' = \alpha \\ s - s' = \bar{a} - a \\ t = s - m \\ t' = s' - m . \end{array} \right. \quad \square$$

En calculant un peu, on voit que dans les cas I, II, III, IV on a :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} s = \left| m + \frac{\bar{a} - a - \beta}{2} \right| \\ t = \frac{a - \bar{a} + \beta}{2} , \end{array} \right.$$

et que dans les cas IV, V, VI, VII on a :

$$(**) \left\{ \begin{array}{l} s = \frac{\alpha + \bar{a} - a}{2} \\ t = \left| m + \frac{a - \bar{a} - \alpha}{2} \right| . \end{array} \right.$$

On introduit alors un cône positif fermé de \mathbb{R}_+^5

$$\mathcal{C} = \{ (\alpha, \beta, m, a, \bar{a}) \in \mathbb{R}_+^5 \mid (\alpha, \beta, 2m) \in (\leq \nabla), m \geq a, m \geq \bar{a}, \alpha \geq |a - \bar{a}|, \beta \geq |\bar{a} - a| ; \text{l'une des égalités suivantes est vérifiée : } \alpha = |a - \bar{a}|, \beta = |\bar{a} - a|, \alpha = \beta + 2m, \alpha + \beta = 2m, \beta = \alpha + 2m \} .$$

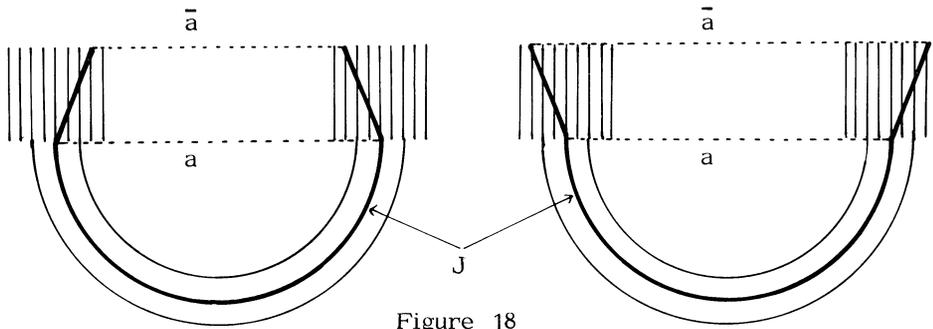


Figure 18

On y voit $\alpha = |a - \bar{a}|$. En analysant de manière analogue ce qui se passe avec \bar{J} , on obtient la preuve de l'affirmation. \square

Si $m = 0$, les formules précédentes deviennent $k' = \alpha + j + \bar{j}$ et $k'' = \beta + j + \bar{j}$. Si on regarde les modèles, on voit qu'elles agrèent à la géométrie ; dans cette observation, ne pas oublier le cas où un des pantalons échappe au support du feuilletage ; dans ce cas, les trois mesures de son bord sont nulles ainsi que la longueur des arcs jaunes.

Remarque fondamentale. L'appendice est universel ! Précisément, on peut changer l'arc jaune pour chaque type de feuilletage du pantalon standard en n'importe quel autre arc qui a les propriétés suivantes :

- 1) Il reste dans la même classe d'isotopie ;
- 2) Il réalise le minimum de longueur transverse dans cette classe.

Un nouveau choix d'arcs jaunes sur les modèles conduit Γ à un nouvel homéomorphisme de classification $\theta : I_{\ast}(\mathbb{N}\mathcal{F}) \rightarrow B - \{0\}$. Celui-ci sera construit à partir des formules de l'appendice qui restent identiques à elles-mêmes. Le seul changement réside dans l'expression de la longueur de l'arc A associé à chaque arc jaune.

On définit $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ par les formules $(*)$ si $\beta \geq \alpha$ et par les formules $(**)$ si $\beta \leq \alpha$. Il est facile de voir que les deux formules coïncident si $\alpha = \beta$. D'autre part, si (s, t) sont les coordonnées de φ , on voit que (s, t) appartient à \mathbb{R}_+^2 et que (m, s, t) appartient à $\partial(\leq \nabla)$.

L'intérêt d'introduire \mathbb{C} est de montrer que l'application θ se prolonge à un sous-cône fermé de \mathbb{R}_+^3 .

Remarquons que si $m = 0$ (et par conséquent, $a = 0, \bar{a} = 0$), on obtient pour les formules ci-dessus :

$$s = t = \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2},$$

ce qui coïncide avec ce que dit la géométrie. \square

Posons $k' = I(\mathfrak{X}, \mu; [K'])$, $k'' = I(\mathfrak{X}, \mu; [K''])$, j et \bar{j} les longueurs des arcs jaunes J et \bar{J} des pantalons contenant respectivement A et \bar{A} .

Affirmation 2. Si $m \neq 0$, on a $\alpha = \text{Sup}(|a - \bar{a}|, k' - j - \bar{j})$ et $\beta = \text{Sup}(|a - \bar{a}|, k'' - j - \bar{j})$.

D'abord, par définition de k' , on a $\alpha + j + \bar{j} \geq k'$ et on avait déjà vu $\alpha \geq |a - \bar{a}|$. Si J et \bar{J} sont de longueurs non nulles (ce qui signifie pour les arcs choisis qu'ils passent par des singularités), on remplace facilement $J \cup S \cup \bar{J} \cup S'$ par une courbe quasi-transverse de même longueur ; dans ce cas, $k' = \alpha + j + \bar{j}$. Si J est de longueur nulle (morceaux de feuille lisse) et si S et S' , partent de part et d'autre de J , on remplace $S \cup J \cup S'$ par une transversale de même mesure (figure 17).

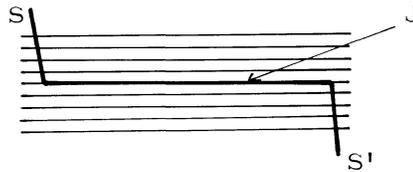


Figure 17

Si S et S' partent du même côté de J , on a l'un des deux configurations de la figure 18.

Astérisque

A. DOUADY

L'espace de Teichmüller

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 127-137

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__127_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

L'ESPACE DE TEICHMÜLLER

par A. DOUADY

(Rédaction de F. LAUDENBACH)

Etant donnée une surface compacte M dont la caractéristique d'Euler $\chi(M)$ est négative, on considère l'espace \mathfrak{H} des métriques de courbure -1 sur M , qui rendent le bord géodésique ; il est non vide et est muni de la topologie C^∞ de tous les champs de tenseurs contravariants. Le groupe $\text{Diff}^0(M)$ des difféomorphismes de M , isotopes à l'identité, équipé de la topologie C^∞ , agit à gauche sur \mathfrak{H} par la formule générale déduite de la naturalité des champs de tenseurs contravariants $m \in \mathfrak{H}$, $\varphi \in \text{Diff}^0(M) \rightarrow \varphi^* m \in \mathfrak{H}$. L'espace quotient $\mathfrak{T} = \mathfrak{H}/\text{Diff}^0(M)$ est l'espace de Teichmüller de M ; lorsque M est orientable, cette définition coïncide avec la définition classique comme espace des structures complexes à isotopie près, via le théorème d'uniformisation [6]. Il est connu que cet espace est homéomorphe à une "cellule" [4] ; Earle et Eells ont montré que \mathfrak{H} est l'espace total d'un fibré principal au-dessus de l'espace de Teichmüller [3].

Le programme ici est d'établir un paramétrage de l'espace de Teichmüller qui ne dépende que des longueurs des géodésiques fermées simples.

On rappelle que \mathcal{J} désigne l'ensemble des classes d'isotopie de courbes simples non homotopes à zéro sur M . Si m est une métrique hyperbolique, pour $\alpha \in \mathcal{J}$, $\ell(m, \alpha)$ est la longueur de l'unique géodésique qui se trouve dans la classe d'isotopie de α ; on en déduit une application :

$$\ell_* : \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{J}}$$

par la formule $\langle \ell_*(m), \alpha \rangle = \ell(m, \alpha)$.

Proposition 1. Pour $\alpha \in \mathcal{A}$ fixé, l'application qui, à $m \in \mathbb{H}$, associe la m -géodésique de α , est continue pour la topologie C^∞ .

Corollaire. L'application ℓ_{\star} est continue (évident).

Démonstration. Une façon de la faire est d'utiliser les propriétés de convexité de la fonction "déplacement" (théorème de Bishop-O'Neill [1] ; voir l'exposé de Bourguignon dans [2]). Voici une autre démonstration.

On note Γ l'ensemble des couples (m, γ) où m est une métrique hyperbolique et où $\gamma : S^1 \rightarrow M$ paramètre à vitesse constante la m -géodésique de α . On munit Γ de la topologie induite par la topologie C^∞ de l'espace produit

$$\mathbb{H} \times C^\infty(S^1, M) .$$

On considère la projection $p : \Gamma \rightarrow \mathbb{H}$ sur le premier facteur. On veut montrer que p est propre.

Si on note TM la variété des vecteurs tangents à M , on regarde dans $\mathbb{H} \times TM$ l'ensemble

$$C = \{ (m, v) \mid \forall t, \exp_m(t+1)v = \exp_m tv \text{ et la courbe fermée } t \in [0, 1] \rightarrow \exp_m tv \text{ est dans la classe } \alpha \} .$$

Pour la topologie produit de $\mathbb{H} \times TM$, C est un fermé. Si S^1 est obtenu en identifiant les extrémités de $[0, 1]$, on a une application évidente $C \rightarrow \Gamma$, qui est surjective ; d'après les théorèmes sur les équations différentielles, elle est continue. La propriété de p résulte donc de la propriété de la projection $q : C \rightarrow \mathbb{H}$, que nous allons prouver.

On sait que $m \in \mathbb{H} \mapsto \ell(m, \alpha)$ est une fonction semi-continue supérieurement. Donc, si m appartient à un compact K , l'ensemble $\{ \ell(m, \alpha) \mid m \in K \}$ est borné. Soit $(m, v) \in q^{-1}(K)$; la quantité $\sqrt{m(v, v)} = \ell(m, \alpha)$ est donc bornée. Soit $m_0 \in K$; il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $w \in TM$ et tout $m \in K$, on ait :

$$m_0(w, w) \leq \lambda m(w, w) .$$

Donc, si $(m, v) \in q^{-1}(K)$, $m_0(v, v)$ est borné. Finalement $q^{-1}(K)$ est compact parce qu'il est fermé dans un produit de compacts.

Le groupe $O(2)$ des rotations agit naturellement sur Γ : pour $r \in O(2)$, $(m, \gamma) \star r = (m, \gamma \circ r)$. Le quotient est l'espace des m -géodésiques de α , $m \in \mathbb{H}$. En courbure négative, p induit une bijection $\Gamma/O(2) \rightarrow \mathbb{H}$, qui est continue et propre d'après ce qui précède. Comme les espaces considérés sont métrisables, la bijection

réciproque est continue. \square

A partir de maintenant, on suppose, pour simplifier l'exposé, que M est sans bord ; on note g son genre. On se fixe une décomposition \mathcal{K} de M en pantalons R_i , $i = 1, \dots, 2g-2$, limités par des courbes K_j , $j = 1, \dots, 3g-3$. Chaque pantalon est donné avec un paramétrage sur un modèle et chaque courbe K_j est donnée avec une orientation. On a une application continue :

$$L : \mathcal{T} \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3}$$

définie par $L(m) = (\ell(m, K_i) ; i = 1, \dots, 3g-3)$, où m est une métrique hyperbolique rendant les K_i géodésiques (métrique adaptée à la décomposition).

Remarque. A partir de maintenant, \mathcal{H} désigne l'espace des métriques adaptées à \mathcal{K} . On voit facilement que \mathcal{T} est en bijection avec le quotient de \mathcal{H} par $\text{Diff}(M, \mathcal{K}) \cap \text{Diff}^0(M)$. Pour voir que la topologie est la même, on utilise la proposition 1 et le fait que l'action de $\text{Diff} M$ sur l'espace des courbes simples admet des sections locales [5].

Le "twist" le long des courbes K_i définit une action continue θ de \mathbb{R}^{3g-3} sur \mathcal{T} . Plus précisément, soit $K_i \times [0, 1]$ un collier de $K_i = K_i \times \{0\}$, donné une fois pour toutes ; tous les colliers sont supposés deux à deux disjoints. Etant donné une métrique hyperbolique adaptée m et un nombre α , il existe un difféomorphisme $\varphi_i(m, \alpha)$ du collier $K_i \times [0, 1]$ avec les propriétés suivantes :

- 1) $\varphi_i(m, \alpha)$ est l'identité au voisinage de $K_i \times \{1\}$;
- 2) $\varphi_i(m, \alpha)$ est une isométrie de m au voisinage de $K_i \times \{0\}$;
- 3) le relèvement de $\varphi_i(m, \alpha)$ au revêtement universel $\mathbb{R} \times [0, 1]$, qui est l'identité sur $\mathbb{R} \times \{1\}$, est une translation de longueur $\alpha \ell(m, K_i)$ sur $\mathbb{R} \times \{0\}$, dans le sens indiqué par le signe de α (le revêtement universel étant muni de la métrique relevée).

La métrique tordue $\theta_i(m, \alpha)$ est définie par $\theta_i(m, \alpha) = \varphi_i^*(m, \alpha) m$ en tout point du collier $K_i \times [0, 1]$ et par $\theta_i(m, \alpha) = m$ ailleurs.

Pour $(\alpha_1, \dots, \alpha_{3g-3}) \in \mathbb{R}^{3g-3}$, on note $\theta(m, \alpha_1, \dots, \alpha_{3g-3})$ la métrique définie par $\theta_1(m, \alpha_1)$ dans $K_1 \times [0, 1]$, ..., par $\theta_{3g-3}(m, \alpha_{3g-3})$ dans $K_{3g-3} \times [0, 1]$ et par m ailleurs. Comme métrique adaptée, sa classe d'isotopie est bien déterminée.

Remarques. 1) D'après la classification des métriques sur le pantalon (exposé 3),

les orbites de l'action θ coïncident exactement avec les fibres de L . Le corollaire de la proposition 2 impliquera que cette action est libre.

2) Le twist de Dehn ρ le long de K_i , qui est un difféomorphisme global de la surface, à support dans un collier de K_i , est une isométrie (à isotopie près) de la métrique $\theta_i(m, 1)$ sur m . On a donc, pour toute courbe K' :

$$\ell(\theta_i(m, 1), [K']) = \ell(m, \rho([K'])).$$

Soient R et R' les deux pantalons adjacents à K_i ; disons que R contient le collier $K_i \times [0, 1]$. Soit K'_i une courbe simple de $R \cup R'$, coupant K_i en deux points essentiels (K'_i n'est pas isotope à une courbe disjointe de K_i) - comparer avec IV.5 (exposé 6). On note K''_i la courbe de $R \cup R'$ obtenue à partir de K'_i par un twist le long de K_i : $\rho(K'_i) = K''_i$.

Proposition 2. La longueur $\ell(\theta_i(m, \alpha), [K'_i])$ est une fonction strictement convexe de α , ayant un minimum.

Corollaire. 1° La métrique m_0 étant donnée, il existe une classe d'isotopie γ_i dans $R \cup R'$, telle que la fonction

$$\alpha \mapsto \ell(\theta_i(m_0, \alpha), \gamma_i)$$

soit strictement croissante pour $\alpha > 0$.

2° La longueur $\ell(\theta_i(m, \alpha), [K'_i])$ tend uniformément vers $+\infty$ lorsque α tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ et que m reste dans un compact.

Preuve du corollaire. 1° Disons que $\ell(\theta_i(m, \alpha), [K'_i])$ est croissante à partir de $\alpha = k$, où k est un entier. On prend alors $\gamma_i = \rho^k([K'_i])$ et on applique le 2) de la remarque ci-dessus.

2° C'est une propriété générale des familles de fonctions strictement convexes à minimum d'une variable réelle, dépendant continûment d'un paramètre (topologie compacte ouverte). Soit $f_\lambda(x)$ une telle famille et soit $x = m(\lambda)$ le point où se réalise le minimum. Alors $m(\lambda)$ est une fonction continue. En effet, ϵ étant donné, si λ est assez voisin de λ_0 , on a :

$$f_\lambda(m(\lambda_0)) < \inf [f_\lambda(m_{\lambda_0} - \epsilon), f_\lambda(m_{\lambda_0} + \epsilon)];$$

donc $m(\lambda)$ appartient à $]m(\lambda_0) - \epsilon, m(\lambda_0) + \epsilon[$.

Ceci étant, soit $x_0 > m(\lambda_0)$ et soit K compris entre $f_{\lambda_0}(m(\lambda_0))$ et $f_{\lambda_0}(x_0)$. Alors si λ est assez voisin de λ_0 , on a $f_\lambda(x_0) > K$ et f_λ est strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$; donc $f_\lambda([x_0, +\infty[) \subset]K, +\infty[$. \square

Démonstration de la proposition 2.

Lemme 1. Soient γ une droite du demi-plan de Poincaré et τ une isométrie laissant γ invariante. Soient x un point de γ et y un point hors de γ ; alors

$$d(x, \tau x) < d(y, \tau y)$$

où d désigne la distance hyperbolique.

Preuve.

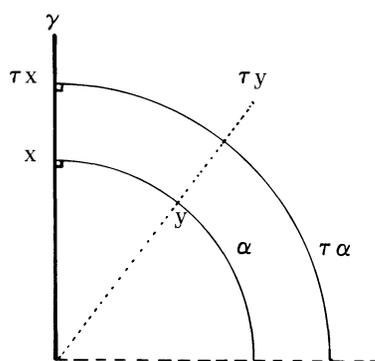


Figure 1

On peut prendre pour x le pied de la perpendiculaire α issue de y sur γ . Donc γ est l'unique perpendiculaire commune à α et $\tau\alpha$. D'où l'inégalité. \square

Lemme 2. Soient γ_1 et γ_2 deux droites ne se coupant pas dans l'espace hyperbolique. Alors la fonction $d(x, y)$, $x \in \gamma_1$, $y \in \gamma_2$, est strictement convexe.

Preuve. Soient x, x' (resp. y, y') deux points de γ_1 (resp. γ_2); on ne perd pas de généralité en supposant $x \neq x'$. Soient i le milieu de $\widehat{xx'}$, j celui de $\widehat{yy'}$, δ la géodésique \widehat{ij} . On note σ_i (resp. σ_j) la symétrie par rapport à i (resp. j); $\sigma_j \sigma_i$ est une isométrie que laisse δ invariante. Soient $z = \sigma_j \sigma_i(x)$, $z' = \sigma_j \sigma_i(x')$, $k = \sigma_j \sigma_i(i)$. Donc σ_j envoie x en z' et y en y' . D'où

$$d(x, y) = d(y', z') .$$

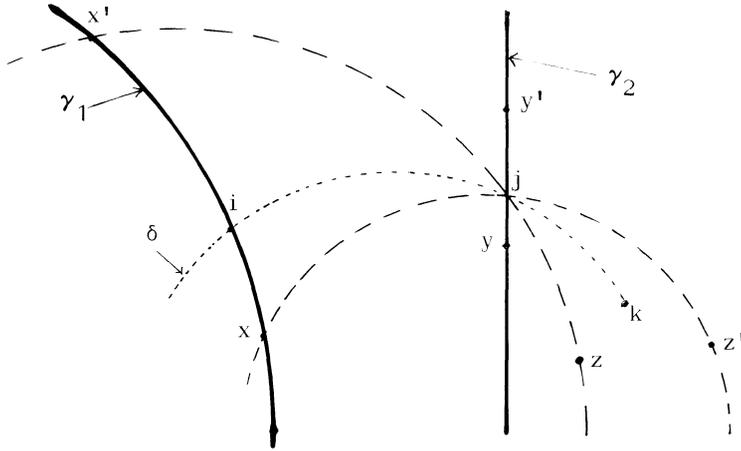


Figure 2

D'autre part, par l'inégalité du triangle, on a :

$$d(x', z') \leq d(x', y') + d(y', z') .$$

Par le lemme 1, on a :

$$2d(i, j) = d(i, k) < d(x', z') .$$

(Noter que γ_1 ne coupant pas γ_2 , le point x' n'est pas sur δ .)

Finalement, on obtient l'inégalité de convexité :

$$2d(i, j) < d(x, y) + d(x', y') . \quad \square$$

Fin de la démonstration. La surface étant munie de la métrique m et son revêtement universel métrique étant identifié à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^2 , il existe un élément τ de $\pi_1(M, *)$ qui agit comme isométrie de \mathbb{H}^2 laissant invariante une droite δ , qui relève la géodésique K_i^1 . Soit x un point de δ , se projetant sur un point de $K_i^1 \cap K_i$; on note \tilde{K}^1 le relèvement de K_i par x et \tilde{K}^3 celui par τx . Le segment $(x, \tau x)$ coupe exactement un autre relèvement \tilde{K}^2 de K_i en un point y . On a porté sur la figure 3 les orientations dont sont munis ces trois relèvements.

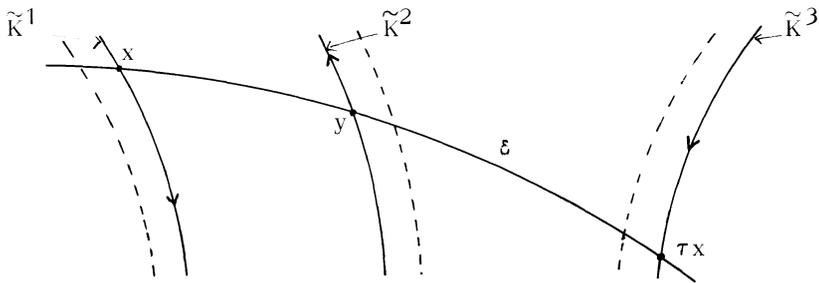


Figure 3

Si on tord la métrique d'un "angle α " dans les colliers indiqués sur la figure, le relèvement de la $\theta_i(m, \alpha)$ -géodésique de $[K_i^1]$ coupe \tilde{K}^1 en un point x' et \tilde{K}^2 en y' ; c'est une droite de x' à y' , avec la métrique du plan hyperbolique; mais de y' à $\tau x'$, sa longueur est la distance hyperbolique $d(y' + \alpha, \tau x' + \alpha)$; dans cette formule τ désigne la translation sur les géodésiques \tilde{K}^2 et \tilde{K}^3 . Finalement, on a :

$$\varrho(\theta_i(m, \alpha), [K_i^1]) = \inf_{x \in \tilde{K}^1, y \in \tilde{K}^2} (d(x, y) + d(y + \alpha, \tau x + \alpha)) .$$

On va montrer que $f(x, y, \alpha) = d(x, y) + d(y + \alpha, \tau x + \alpha)$ est une fonction propre et strictement convexe. Pour cela, on utilise le fait $d(x, y)$ est propre, parce que les droites sur lesquelles se déplacent les points ont une perpendiculaire commune (à distance finie), et qu'elle est strictement convexe d'après le lemme 2.

Montrons la propriété de f . Soit $(x_n, y_n, \alpha_n) \rightarrow \infty$; si $(x_n, y_n) \rightarrow \infty$, alors $d(x_n, y_n) \rightarrow +\infty$, donc $f(x_n, y_n, \alpha_n) \rightarrow +\infty$. Si (x_n, y_n) reste dans un compact, alors $\alpha_n \rightarrow \infty$ et $(y_n + \alpha_n, \tau x_n + \alpha_n)$ tend vers ∞ , donc $d(y_n + \alpha_n, \tau x_n + \alpha_n)$ tend vers $+\infty$.

On vérifie tout de suite que f est strictement convexe.

Pour α fixé, la fonction $f(x, y, \alpha)$ a un minimum $g(\alpha)$ à cause de la propriété de f . La convexité de f entraîne celle de g ; comme $g(\alpha)$ est une valeur atteinte par $f(x, y, \alpha)$, on vérifie que g est strictement convexe.

La fonction f a un minimum absolu (f est propre et minorée); c'est le minimum de g . \square

Proposition 3. L'application $L : \mathcal{T} \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3}$ est une fibration principale de groupe \mathbb{R}^{3g-3} agissant via θ .

Corollaire. L'espace de Teichmüller d'une surface fermée de genre g est homéomorphe à \mathbb{R}^{6g-6} .

Démonstration. Le point important est de montrer qu'il existe des sections locales pour L . On sait d'après le théorème 5 de l'exposé 3 que, pour le pantalon-modèle P^2 , l'application

$$\mathbb{H}(P^2) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3 ,$$

qui, à une métrique adaptée au bord, associe les trois longueurs du bord, admet des sections locales au niveau des métriques.

On sait que pour recoller deux métriques hyperboliques le long d'une géodésique

il n'y a qu'à spécifier une isométrie de la géodésique de recollement. Or, si on a une métrique sur P^2 et si on considère une courbe C du bord, on a un unique arc géodésique sans point double qui rencontre C en ses deux extrémités (arc jaune ; (+)). D'après la proposition 1, son origine, que l'on distingue de l'autre extrémité par une orientation convenue une fois pour toutes, varie continûment avec la métrique.

La section locale cherchée s'obtient maintenant comme suit. Au-dessus de $3g - 3$ longueurs, on choisit une métrique qui a la propriété suivante : si K_j est adjacent à R_{i_1} et à R_{i_2} , les deux origines sur K_j des arcs jaunes de ces deux pantalons coïncident. En imposant cette condition, on obtient une section locale continue.

Soit D une boule de $(\mathbb{R}_+^*)^{3g-3}$ au-dessus de laquelle L admet une section σ . Soit l'application $T : D \times \mathbb{R}^{3g-3} \rightarrow \mathfrak{T}$ définie par :

$$T(x, \alpha_1, \dots, \alpha_{3g-3}) = \theta(\sigma(x), \alpha_1, \dots, \alpha_{3g-3}) .$$

Il s'agit de montrer que T est un homéomorphisme sur son image. Comme \mathfrak{T} est à base dénombrable de voisinages, on doit juste montrer que T est injectif et propre.

Si deux métriques se déduisent l'une de l'autre par un twist, elles sont distinguées par une longueur de géodésique (corollaire de la proposition 2) ; ceci prouve l'injectivité.

Pour simplifier, on note $(\alpha_1, \dots, \alpha_{3g-3}) = \alpha$. Soit (x^n, α^n) une suite tendant vers l'infini dans $D \times \mathbb{R}^{3g-3}$. Le 2° du même corollaire interdit que l'image par T de cette suite soit un compact de l'espace de Teichmüller. Donc T est propre. \square

Théorème 4. L'application $\ell_* : \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$ est une application propre qui est un homéomorphisme sur son image.

En réalité, on va prouver une proposition plus forte relative au système des courbes $K_i, K_i^!, K_i''$ décrit avant la proposition 2.

Proposition 5. L'application $\Lambda : \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}_+^{9g-9}$, qui à $m \in \mathfrak{T}$ associe le triplet $(\ell(m, [K_i]), \ell(m, [K_i^!]), \ell(m, [K_i'']))$ est injective et propre (donc un homéomorphisme sur son image).

Démonstration

On choisit une section s de la fibration L ; autrement dit, on écrit tout $m \in \mathfrak{T}$ sous la forme :

$$m = \theta(s(x), \alpha)$$

(+) Comparer à la terminologie des feuilletages mesurés (exposé 6).

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{3g-3}) \in \mathbb{R}^{3g-3}$ est un "multiangle de twist" et où $x \in (\mathbb{R}_+^*)^{3g-3}$ est le système des longueurs des courbes K_i .

La variable x étant fixée, la fonction $\ell(m, [K_i^1])$ est une fonction strictement convexe et propre $g_i(\alpha_i)$ de la i -ème composante de α ; d'autre part, $\ell(m, [K_i'']) = g_i(\alpha_i + 1)$.

Lemme. Si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction strictement convexe, propre, alors $t \rightarrow (g(t), g(t+1))$ définit un plongement propre de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 .

Donc le $(6g-6)$ -système $(\ell(m, [K_i^1]), \ell(m, [K_i'']))$ est une fonction injective propre du multi-angle α . De là, il suit que Λ est injective.

Pour montrer que Λ est propre, on considère une suite (x_n, α_n) tendant vers l'infini. Si x_n tend vers ∞ , il est clair que $\Lambda(x_n, \alpha_n)$ tend vers ∞ ; sinon les x_n restent dans un compact et, d'après le corollaire de la proposition 2, la longueur d'une des courbes K_i^1 tend vers l'infini. \square

On complète le théorème par la proposition suivante, selon une démonstration indiquée par S.Kerckhoff. On rappelle que π désigne la projection $\mathbb{R}^{\mathcal{J}} - \{0\} \rightarrow P(\mathbb{R}^{\mathcal{J}})$.

Proposition 6. L'application composée $\pi \circ \ell_* : \mathcal{J} \rightarrow P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}})$ est une injection.

Démonstration. On prend pour \mathbb{H}^2 le modèle du demi-plan de Poincaré $= \{x + iy \mid y > 0\}$ avec la métrique $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Le groupe des isométries est $SL(2, \mathbb{R}) / \{\pm Id\}$, où l'action de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est donnée par $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$.

Si A est un élément hyperbolique (i.e. laisse une géodésique invariante), on définit le déplacement

$$\ell(A) = \inf_{z \in \mathbb{H}^2} d(z, A \cdot z).$$

Le minimum est atteint sur la géodésique invariante.

Lemme 1. Si $A \in SL(2, \mathbb{R})$ est hyperbolique, on a :

$$\text{Tr}(A) = 2 \text{ch} \left(\frac{\ell(A)}{2} \right).$$

Démonstration. Par conjugaison dans $SL(2, \mathbb{R})$, on se ramène au cas où la géodésique invariante est le demi-axe des y . Alors, on a :

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho > 0.$$

Par conséquent $A \cdot i = \rho^2 i$. Donc, on a :

$$\ell(A) = d(i, \rho^2 i) = \int_1^{\rho^2} \frac{dt}{t} = 2 \operatorname{Log} \rho,$$

et
$$\operatorname{Tr}(A) = \rho + \rho^{-1} = 2 \operatorname{ch} \left(\frac{\ell(A)}{2} \right). \quad \square$$

Lemme 2. Soient $A, B \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$. On a :

$$\operatorname{Tr} A \cdot \operatorname{Tr} B = \operatorname{Tr}(AB) + \operatorname{Tr}(A^{-1}B).$$

(Evident par le calcul).

Considérons sur la surface M deux courbes simples orientées γ_1 et γ_2 se coupant transversalement en un point-base.

On peut donc parler des classes d'homotopie des lacets pointés $\gamma_1 * \gamma_2$ et $\gamma_1^{-1} * \gamma_2$; elles sont toutes les deux représentables par des courbes simples γ_3 et γ_4 . Si M est munie d'une métrique m de courbure -1 , ces éléments du groupe fondamental correspondent à des isométries hyperboliques de \mathbb{H}^2 dont le déplacement est $\ell_i = \ell(m, [\gamma_i])$. Les lemmes précédents donnent donc les formules :

$$2 \operatorname{ch} \left(\frac{\ell_1}{2} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{\ell_2}{2} \right) = \operatorname{ch} \left(\frac{\ell_3}{2} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\ell_4}{2} \right)$$

ou encore

$$(*) \quad \operatorname{ch} \left(\frac{\ell_1 + \ell_2}{2} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\ell_1 - \ell_2}{2} \right) = \operatorname{ch} \left(\frac{\ell_3}{2} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\ell_4}{2} \right).$$

(H) Supposons qu'il existe une autre métrique de courbure -1 pour laquelle les longueurs de toutes géodésiques fermées soient multipliées par $k \neq 1$. Pour cette métrique, l'égalité (*) devient :

$$(**) \quad \operatorname{ch} \left(k \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} \right) + \operatorname{ch} \left(k \frac{\ell_1 - \ell_2}{2} \right) = \operatorname{ch} \left(k \frac{\ell_3}{2} \right) + \operatorname{ch} \left(k \frac{\ell_4}{2} \right).$$

Lemme 3. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre nombres ≥ 0 et $k > 0, k \neq 1$. Les relations

$$\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{ch} \beta = \operatorname{ch} \gamma + \operatorname{ch} \delta$$

$$\operatorname{ch} k\alpha + \operatorname{ch} k\beta = \operatorname{ch} k\gamma + \operatorname{ch} k\delta$$

impliquent $\{\alpha, \beta\} = \{\gamma, \delta\}$.

Démonstration. On peut se limiter à $k > 1$. Le lecteur vérifiera que la fonction $\text{ch}(k \text{Arg ch } x)$ est une fonction strictement convexe de x . Maintenant, si c est la valeur commune de la première égalité et si on pose $x = \text{ch } \alpha$, $y = \text{ch } \gamma$, la seconde relation est :

$$\text{ch}(k \text{Arg ch } x) + \text{ch}(k \text{Arg ch}(c-x)) = \text{ch}(k \text{Arg ch } y) + \text{ch}(k \text{Arg ch}(c-y)).$$

On peut supposer $y \leq x \leq c-x \leq c-y$. Si on avait $y < x$, d'après la convexité stricte, le membre de gauche serait strictement plus petit que celui de droite. \square

Par conséquent, (*) et (**) donnent :

$$\{\ell_1 + \ell_2, \ell_1 - \ell_2\} = \{\ell_3, \ell_4\}.$$

Quitte à changer la numérotation, on peut dire que :

$$\ell_3 = \ell_1 + \ell_2.$$

Comme l'angle entre γ_1 et γ_2 n'est pas nul, il n'y a aucune chance que $\ell_1 + \ell_2$ soit une plus courte distance ; donc, l'égalité ci-dessus ne peut être vraie et l'hypothèse (H) est absurde. \square

RÉFÉRENCES

- [1] L. BISHOP - B.O'NEILL, Manifolds of negative curvature, Trans. AMS 145 (1969), p. 1-48.
- [2] J.P. BOURGUIGNON, Sur la structure du π_1 , Séminaire de géométrie riemannienne 1970-71, variétés à courbure négative, Publications de l'Université Paris VII.
- [3] C.J. EARLE - J. EELLS, A fiber bundle description of Teichmüller theory, J. Diff. Geom. 3 (1969), p. 19-43.
- [4] R. FRICKE - F. KLEIN, "Automorphen Functionen" vol. II, Teubner, Leipzig, 1912.
- [5] R. PALAIS, Local triviality of the restriction map for embeddings, Comm. Math. Helv. 34 (1960), p. 305-312.
- [6] G. SPRINGER, Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley Pub. Comp., 1957.

Astérisque

A. FATHI

F. LAUDENBACH

Comment Thurston compactifie l'espace de Teichmüller

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 139-150

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__139_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COMMENT THURSTON COMPACTIFIE
L'ESPACE DE TEICHMÜLLER

par A. FATHI et F. LAUDENBACH

§ I. - Préliminaires

§ II. - Le lemme fondamental

§ III. - La variété \mathfrak{T}

Appendice (A. Fathi). - Estimations de distances hyperboliques

Dans l'espace des fonctionnelles $\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$, on a plongé l'espace de Teichmüller \mathfrak{T} et l'espace des classes de Whitehead de feuilletages mesurés $\mathfrak{m}\mathfrak{T}$ (exposés 6 et 7). Dans cet exposé, on identifie ces espaces à leurs images dans l'espace fonctionnel ; pour toute fonctionnelle $f \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$, on note $i(f, \alpha)$ la valeur de la fonctionnelle sur $\alpha \in \mathcal{L}$.

On rappelle que $\pi : \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} - \{0\} \rightarrow P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}})$ désigne la projection sur l'espace des rayons et que $P\mathfrak{m}\mathfrak{T}$ est l'image de $\mathfrak{m}\mathfrak{T}$. D'ailleurs, $\mathfrak{m}\mathfrak{T} = \pi^{-1}(P\mathfrak{m}\mathfrak{T})$. On construit une topologie sur la réunion de \mathfrak{T} et de $P\mathfrak{m}\mathfrak{T}$. On prouve que c'est une topologie de variété à bord ; puisque l'intérieur est homéomorphe à une boule ouverte et que le bord est homéomorphe à une sphère, la variété à bord est homéomorphe à une boule fermée.

La clé est dans les inégalités du lemme fondamental dont la démonstration repose sur des estimations de longueur en géométrie hyperbolique qui ont été rassemblées en appendice de cet exposé.

§ 1. - PRÉLIMINAIRES

I.1. Proposition. Dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$, les espaces \mathfrak{F} et $\mathfrak{m}\mathfrak{F}$ sont disjoints.

Démonstration. Si f appartient à \mathfrak{F} , comme on est sur une variété compacte, l'ensemble des nombres $i(f, \alpha)$, $\alpha \in \mathcal{L}$, est minoré par une constante strictement positive. On va prouver que, pour $f \in \mathfrak{m}\mathfrak{F}$, l'adhérence des nombres $i(f, \alpha)$ contient 0.

Soit (\mathfrak{F}, μ) un feuilletage mesuré représentant f ; soit γ un petit arc transversal à \mathfrak{F} , avec $\mu(\gamma) \leq \epsilon$, où $\epsilon > 0$ est donné. D'après le théorème de récurrence de Poincaré (exposé 5, théorème 1.5), presque toute feuille partant d'un point de γ recoupe γ ; on obtient donc une courbe fermée simple γ' , formée d'un arc de γ et d'un arc porté par une feuille de \mathfrak{F} ; si α est la classe d'isotopie de γ' , on a :

$$i(f, \alpha) \leq \mu(\gamma') \leq \mu(\gamma) \leq \epsilon . \quad \square$$

I.2. Construction d'une projection $q: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{m}\mathfrak{F}$.

Cette projection servira à donner les cartes de la variété à bord. Elle dépend du choix d'une famille $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_k\}$ de courbes simples mutuellement disjointes découpant la surface en pantalons (plongés) $R_1, \dots, R_{k'}$; si la surface est de genre g et sans bord, $k = 3g - 3$ et $k' = 2g - 2$.

Soit $m \in \mathfrak{F}$; on représente m par une métrique \bar{m} , de courbure -1 , pour laquelle les courbes K_j sont géodésiques. Le feuilletage, qui représentera $q(m)$, sera transversal à chaque K_j ; on impose pour tout j :

$$i(q(m), K_j) = i(m, K_j) .$$

Soit R un des pantalons; disons que $\partial R = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ et posons $2m_j = i(m, K_j)$. Soit g_{jj} , la \bar{m} -géodésique simple de R orthogonale à K_j et à $K_{j'}$.

1er cas. $(m_1, m_2, m_3) \in (\leq \nabla)$, inégalité triangulaire.

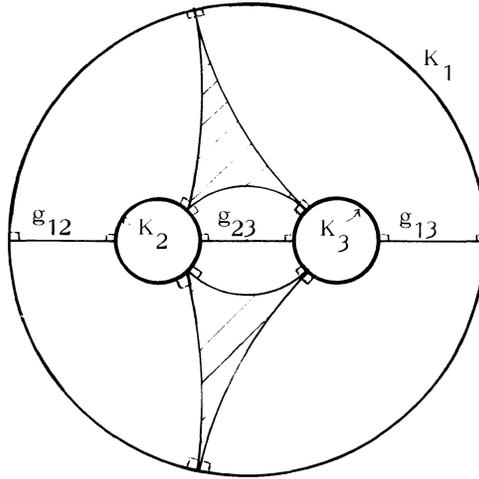
Soit T_{12} le tube géodésique (fermé) des points de R à une distance de g_{12} plus petite que $\frac{m_1 + m_2 - m_3}{2}$; il est feuilleté par les lignes d'égales distances;

la distance entre deux feuilles donne la mesure transverse. On considère de la même façon les tubes feuilletés T_{23} et T_{13} . Les tubes n'ont, deux à deux, que deux points communs qui sont sur le bord; par exemple :

$$T_{12} \cap T_{13} = T_{12} \cap T_{13} \cap K_1 .$$

Cela tient au fait que K_1 est l'unique perpendiculaire commune à g_{12} et g_{13} ; d'autre part, en additionnant les deux épaisseurs, on voit que K_1 est totalement

Figure 1



recouvert ; de même pour K_2 et K_3 . On obtient ainsi un feuilletage mesuré "partiel" de R (figure 1) . On peut lui associer un vrai feuilletage mesuré en effondrant chaque triangle non feuilleté sur un tripode. En réalité, pour la suite, on a intérêt à garder le feuilletage partiel, dans lequel la mesure est directement donnée par la métrique.

2e cas. $m_1 > m_2 + m_3$.

Quitte à changer la numérotation, il n'y a pas d'autres cas. Ici T_{12} est le tube de rayon m_2 et T_{13} est celui de rayon m_3 . L'ensemble des points de K_1 , qui ne sont à l'intérieur ni de T_{12} ni de T_{13} , forme deux arcs A et A' , symétriques l'un de l'autre par l'involution isométrique de R qui admet $g_{12} \cup g_{13} \cup g_{23}$ pour lieu de points fixes (exposé 3, lemme 7) . Soit T_{11} la réunion des lignes d'égalité de distances à la géodésique g_{11} , issues de A (Attention ! g_{11} peut ne pas être dans T_{11}) . On voit que $T_{11} \cap K_1 = A \cup A'$. Ces trois tubes donnent un feuilletage "partiel" ayant l'allure de la figure 2 .

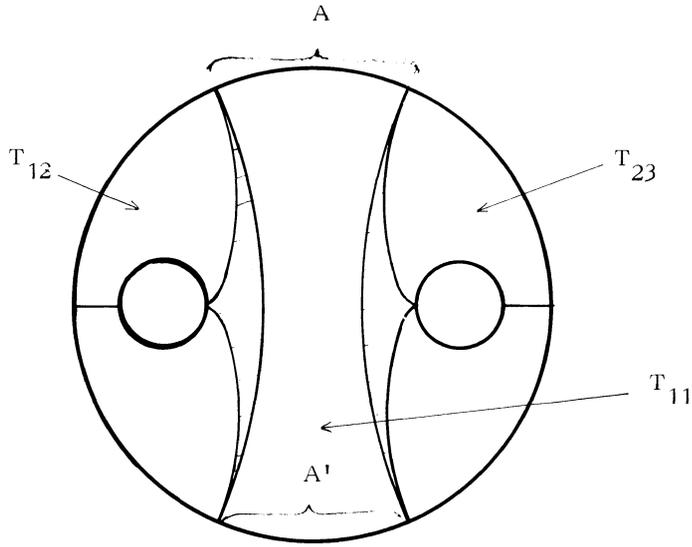


Figure 2

On remarque que, dans les deux cas, les feuilles sont perpendiculaires aux courbes du bord. Lorsqu'on recolle les pantalons, on obtient un feuilletage mesuré "partiel" $\mathfrak{F}_{\bar{m}}$, qui représente $q(m)$; les feuilles ne sont que C^1 à la jonction de deux pantalons, mais cela n'a pas d'importance.

I.3. Proposition. L'application q est un homéomorphisme de \mathfrak{F} sur l'ouvert $U(\mathcal{K})$ de $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$, formé des fonctionnelles prenant des valeurs non nulles sur chaque composante de \mathcal{K} .

Démonstration. 1° On construit l'inverse q^{-1} de la façon suivante. Un élément de $U(\mathcal{K})$ se représente par un feuilletage mesuré (\mathfrak{F}, μ) , transverse aux courbes de \mathcal{K} .

Dans le pantalon R (notation de I.2), on construit une métrique \bar{m} de courbure -1 avec les propriétés ci-dessous :

- (i) $\bar{m} \upharpoonright K_j = \mu \upharpoonright K_j$, pour $j = 1, 2, 3$;
- (ii) notant $2m_j = \mu(K_j)$, si $(m_1, m_2, m_3) \in (\leq \nabla)$, la feuille lisse, qui va de K_1 à K_2 (resp. à K_3) et dont la μ -distance aux singularités est $\frac{m_1 + m_2 - m_3}{2}$ (resp. $\frac{m_1 + m_3 - m_2}{2}$) est une géodésique de \bar{m} orthogonale au bord ;

(iii) si $m_1 > m_2 + m_3$, la feuille lisse, qui va de K_1 à K_2 (resp. à K_3) et dont la μ -distance à une singularité est m_2 (resp. m_3), est une géodésique de \bar{m} orthogonale au bord.

D'après la classification des métriques hyperboliques du pantalon (exposé 3), si deux métriques vérifient les conditions ci-dessus, alors elles sont conjuguées par un difféomorphisme isotope à l'identité, par une isotopie constante sur le bord. Donc lorsqu'on recolle tous les pantalons, on obtient une métrique hyperbolique, bien définie à isotopie près. D'après la classification des feuilletages mesurés dans le pantalon (exposé 6), on voit que l'application ainsi construite est l'inverse de q .

2° Pour la continuité, nous proposons le plan suivant.

On utilise le paramétrage $\{m_j, s_j, t_j\}$ de $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ (voir exposé 6). La projection $\{m_j, s_j, t_j\} \rightarrow \{m_j\}$, restreinte à $U(\kappa)$ est une fibration principale, dont le groupe structural est le groupe des twists le long de κ . En effet, on a une section évidente $\sigma(\{m_j\}) = \{m_j, 0, m_j\}$; d'autre part, si on fait opérer un twist α_j le long de K_j sur cette section, le couple (s_j, t_j) paramétrant le feuilletage twisté, est donné par des formules semi-linéaires (exercice) établissant, pour chaque m_j , un homéomorphisme de \mathbb{R} sur l'ensemble des (s_j, t_j) tels que (m_j, s_j, t_j) appartienne à $\partial(\leq \varpi)$; puisque $U(\kappa)$ est une variété, ces arguments suffisent à prouver la structure du fibré principal.

On rappelle aussi que \mathfrak{F} est fibré au-dessus de l'espace des longueurs des composantes de κ (exposé 7, proposition 3). Or, par construction, l'application q est équivariante vis-à-vis de ces deux structures de fibrations principales et elle recouvre l'identité de leur base commune.

La continuité de q équivaut à celle de q^{-1} , puisque la source et le but sont des variétés. Pour celle de q^{-1} , d'après ce qui précède, il suffit de la vérifier sur la section σ . Or, au-dessus du fermé $(\leq \varpi) \cup \{m_1 \geq m_2 + m_3\}$, la section σ se relève en une section $\tilde{\sigma}$ à valeurs dans l'espace des feuilletages du pantalon R , dont les feuilles médianes (désignées en (ii) et (iii)) sont fixes. A partir de là, on peut construire \bar{m} continûment dans R , en appliquant le théorème 5 de l'exposé 3. On fait de même dans tous les pantalons. \square

§ II. - LE LEMME FONDAMENTAL

II.1. Lemme. Soient $\epsilon > 0$ et $V(\kappa, \epsilon)$ l'ouvert de \mathfrak{F} défini par les métriques pour lesquelles chaque composante de κ est une géodésique de longueur $> \epsilon$. Pour

tout $\alpha \in \mathcal{L}$, il existe une constante C telle que, pour tout $m \in V(\kappa, \varepsilon)$, on ait :

$$i(q(m), \alpha) \leq i(m, \alpha) \leq i(q(m), \alpha) + C .$$

Démonstration. Prouvons : $i(q(m), \alpha) \leq i(m, \alpha)$.

Si \bar{m} est une métrique représentant m , la mesure transverse du feuilletage $\mathfrak{F}_{\bar{m}}$, construit comme représentant de $q(m)$, est donnée par la métrique \bar{m} sur les géodésiques orthogonales aux feuilles. Donc, la \bar{m} -longueur d'un arc est plus grande que sa $\mathfrak{F}_{\bar{m}}$ -mesure. D'autre part, par définition de la fonctionnelle, la $\mathfrak{F}_{\bar{m}}$ -mesure d'une courbe fermée de la classe α majore $i(q(m), \alpha)$, ce qui prouve la première inégalité.

$$\text{Prouvons : } i(m, \alpha) \leq i(q(m), \alpha) + C .$$

On se contente de la prouver sur l'ensemble dense de $V(\kappa, \varepsilon)$, formé des m pour lesquelles le feuilletage $\mathfrak{F}_{\bar{m}}$ est à singularités simples (tripode) sans liaison entre les singularités ; de telles classes de métriques seront dites génériques.

D'après la proposition II.6 de l'exposé 5, si m est générique, α est représentable par une courbe simple α' transversale au feuilletage $\mathfrak{F}_{\bar{m}}$; sa mesure $\mathfrak{F}_{\bar{m}}(\alpha')$ vaut $i(q(m), \alpha)$. On peut, en plus, choisir α' pour que, pour tout j :

$$\text{card}(K_j \cap \alpha') = i([K_j], \alpha) .$$

En effet, si ce n'est pas déjà le cas, on a un disque (à bord anguleux) dont le bord est formé d'un arc de α' et d'un arc de K_j . Chacun d'eux étant transversal au feuilletage, le disque est feuilleté comme sur la figure 3 et l'affirmation est claire.

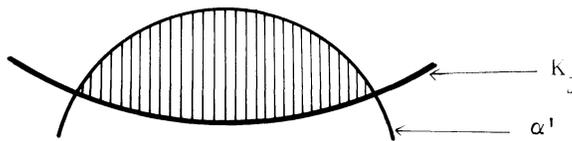


Figure 3

Ceci étant, deux courbes isotopes et en position d'intersection minimale avec κ sont isotopes par une isotopie laissant κ invariant (proposition 12 de l'exposé 3). Donc α' est découpé par κ en n arcs, où n ne dépend que de α :

$$\alpha' = \alpha'_1 \cup \alpha'_2 \cup \dots \cup \alpha'_n ,$$

chaque α'_j étant un arc essentiel d'un des pantalons de la décomposition, transversal au feuilletage. L'inégalité résulte donc de celle prouvée ci-dessous. \square

II. 2. Lemme. Soit $\epsilon > 0$. Il existe une constante C' ayant la propriété suivante. Pour toute métrique hyperbolique \bar{m} sur le pantalon P^2 , telle que chaque composante du bord soit une géodésique de longueur $\geq \epsilon$, et pour tout arc simple β de P^2 , allant du bord au bord transversalement au feuilletage $\mathcal{F}_{\bar{m}}$, il existe un arc γ , homotope à β à extrémités fixes, tel que la \bar{m} -longueur de γ soit inférieure ou égale à $\mathcal{F}_{\bar{m}}(\beta) + C'$.

Démonstration. On regarde séparément chaque type de feuilletage (figures 1 et 2) et on prend la plus grande des constantes. Faisons d'abord le raisonnement pour le feuilletage de l'inégalité triangulaire.

On remplace β par l'arc immergé β' , ayant les mêmes extrémités, en appliquant les deux processus figurés sur la figure 4.

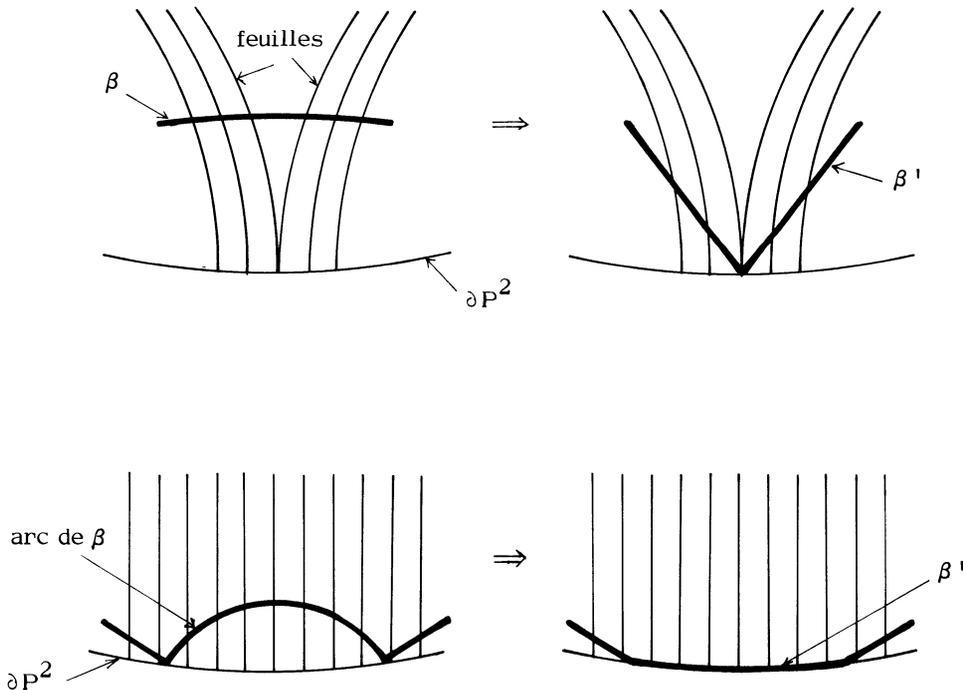


Figure 4

On remarque que β' est transversal à \mathfrak{F}_m^- , avec :

$$\mathfrak{F}_m^-(\beta') = \mathfrak{F}_m^-(\beta) ,$$

et que β' est proche d'un arc simple. Par construction, β' est formé d'arc longeant le bord et de "diagonales" dans les rectangles feuilletés (étendre la définition usuelle de diagonale d'un rectangle pour inclure les arcs contenant l'origine ou l'extrémité de β' , qui ne se trouve pas, en général, au sommet d'un rectangle). On déduit de la topologie que β' contient au plus trois diagonales (chacune parcourue une fois). Par exemple, si δ_1 est la première diagonale rencontrée en suivant β' , alors δ_2 est nécessairement la seconde et δ_3 la troisième. Au sortir de δ_3 , on parcourt le bord d'une façon qui interdit de parcourir de nouveau une quelconque diagonale (figure 5).

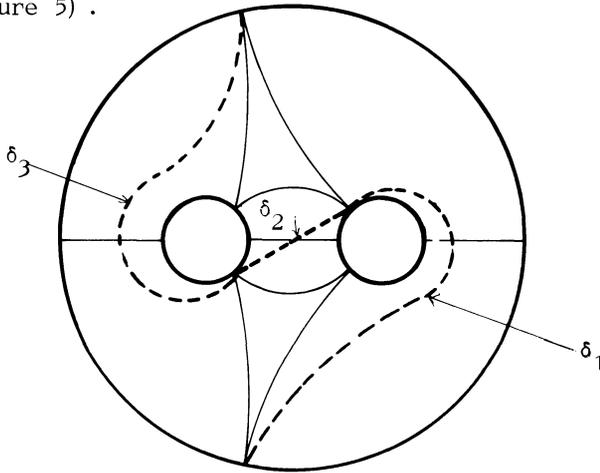


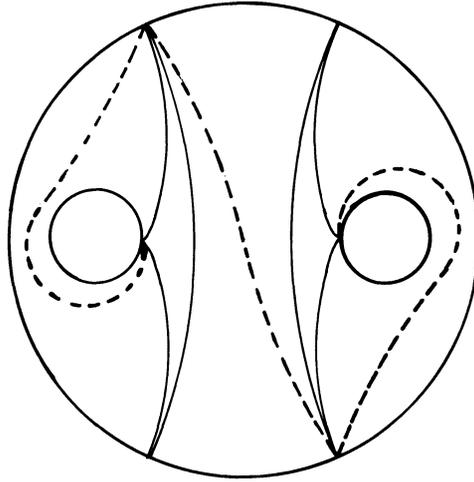
Figure 5

On remplace chaque diagonale par un arc d'une feuille et un arc du bord ; on construit ainsi β'' avec la même \mathfrak{F}_m^- -mesure et contenant au plus trois feuilles. On forme enfin γ en remplaçant les feuilles par les géodésiques de mêmes extrémités. La longueur de γ est la somme des longueurs de ces géodésiques et des longueurs des arcs parcourus sur le bord ; le second terme vaut $\mathfrak{F}_m^-(\beta'') = \mathfrak{F}_m^-(\beta)$; la contribution du premier terme est bornée d'après la proposition du § 7 de l'appendice.

Si \mathfrak{F}_m^- est le feuilletage de la figure 2, alors β' contiendra au plus trois diagonales (figure 6) ; pour majorer la longueur d'une géodésique joignant les extrémités d'une feuille du tube T_{11} , il faut utiliser le corollaire du § 7 de l'appendice.

□

Figure 6



II.3. Corollaire. Soit x_n une suite de $V(\mathcal{K}, \epsilon)$ tendant vers l'infini dans \mathfrak{J} . Alors $\pi(x_n)$ converge si et seulement si $\pi \circ q(x_n)$ converge, et dans ce cas les deux suites ont la même limite.

Démonstration. Dire que $\pi(x_n)$ converge, c'est dire qu'il existe une suite de scalaires $\lambda_n > 0$, telle que la suite $\lambda_n x_n$ converge. Puisque la topologie de \mathfrak{J} est définie par un nombre fini de courbes $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, on a : $\sum_j i(x_n, \gamma_j) \rightarrow +\infty$ et

$\sum_j \lambda_n i(x_n, \gamma_j)$ converge. Donc $\lambda_n \rightarrow 0$.

D'après II.1, pour tout $\alpha \in \mathcal{J}$,

$$|i(\lambda_n x_n, \alpha) - i(\lambda_n q(x_n), \alpha)| \rightarrow 0.$$

donc $\pi \circ q(x_n)$ converge vers la même limite que $\pi(x_n)$. La réciproque est analogue.

□

§ III. - LA VARIÉTÉ \mathfrak{J}

III.1. Topologie. Sur la réunion disjointe $\mathfrak{J} \cup \text{Pm}\mathfrak{J}$, on prend comme base d'ouverts, les ouverts de \mathfrak{J} (ouverts du type 1), et les ensembles de la forme $(\mathfrak{J} \cap \pi^{-1}(U)) \cup U$ ($\text{Pm}\mathfrak{J} \cap U$), où U est un ouvert du projectif (ouverts du type 2). Comme $\pi^{-1}(U) \cap \mathfrak{J}$ est un ouvert de \mathfrak{J} , l'intersection d'un ouvert du type 1 et d'un ouvert du type 2

est un ouvert du type 1. On vérifie donc facilement les axiomes d'une topologie. Cet espace topologique est noté $\bar{\mathfrak{F}}$.

Il est muni d'une application continue dans le projectif qui est une injection ; en effet, π injecte \mathfrak{F} (proposition 6 de l'exposé 7) et $\pi(\mathfrak{F})$ évite $P\infty\mathfrak{F}$ d'après I.1. En particulier, $\bar{\mathfrak{F}}$ est un espace séparé. La topologie de $\bar{\mathfrak{F}}$ est à base dénombrable.

III.2. Carte au voisinage d'un feuilletage.

Soit $f \in P\infty\mathfrak{F}$. D'après le lemme 1 de V.4 de l'exposé 6, il existe une décomposition de la surface en pantalons le long d'un système κ de courbes K_1, \dots, K_k telles que $i(\bar{f}, [K_j]) \neq 0$ pour tout j , où \bar{f} désigne un quelconque relèvement de f dans \mathbb{R}_+^{δ} (la non nullité est une propriété projective). Soit $\{K_j^I, K_j^{II}\}$ un système de courbes servant à paramétrer \mathfrak{F} avec les $\{K_j\}$ (proposition 5 de l'exposé 7).

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. On considère l'ouvert $V(\kappa, \varepsilon)$ de \mathfrak{F} (voir II.1) et l'ouvert W de $P\infty\mathfrak{F}$ des fonctionnelles "projectives" non nulles sur les composantes de κ ; on a $\pi^{-1}(W) = U(\kappa)$ (voir I.3) et $\pi \circ q(V(\kappa, \varepsilon)) = W$. On définit :

$$\varphi : W \cup V(\kappa, \varepsilon) \rightarrow W \times [0, +1]$$

par : $\varphi(x) = (x, 0)$, si $x \in W$,

$$\varphi(x) = (\pi \circ q(x), e^{-\sum \{i(q(x), K_j^I) + i(q(x), K_j^{II})\}}) \quad \text{si } x \in V(\kappa, \varepsilon).$$

Lemme. 1° $W \cup V(\kappa, \varepsilon)$ est un ouvert de $\bar{\mathfrak{F}}$.

2° φ est un homéomorphisme sur un ouvert de $W \times [0, +1)$.

Démonstration.

1° Soit $x \in W$. Supposons que l'ensemble désigné ne soit pas un voisinage de x dans $\bar{\mathfrak{F}}$. Alors il existe une suite x_n de \mathfrak{F} , $x_n \notin V(\kappa, \varepsilon)$, telle que $\pi(x_n)$ tende vers x . Quitte à changer la numérotation et à extraire une sous-suite, on peut dire que $i(x_n, K_1) \leq \varepsilon$.

La suite x_n n'a pas de sous-suite convergente vers un point de \mathfrak{F} à cause de I.1. Donc x_n tend vers l'infini. Mais, par ailleurs, il existe une suite de scalaires $\lambda_n > 0$, telle que $\lambda_n x_n$ converge vers un feuilletage mesuré f au-dessus de x . On en déduit que $\lambda_n \rightarrow 0$. Mais alors $i(f, K_1) = 0$, ce qui contredit $x \in W$.

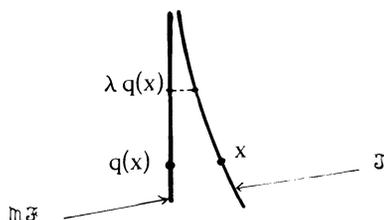
2° L'application φ est continue en $x \in W$. On vient de voir que si $x_n \in \mathfrak{F}$ converge vers x dans $\bar{\mathfrak{F}}$, alors x_n tend vers l'infini de \mathfrak{F} . Comme x_n appartient à $V(\kappa, \varepsilon)$, d'après le corollaire II.3, la première composante est aussi continue.

Pour la même raison, $\sum_j \{i(q(x_n), K_j) + i(q(x_n), K_j^1) + i(q(x_n), K_j^2)\}$ tend vers $+\infty$.

Donc la seconde composante de $\varphi(x_n)$ tend vers 0.

L'application φ est injective. A priori, le seul défaut d'injectivité ne peut venir que de deux éléments x et y de \mathfrak{F} . Si $q(x) = \lambda q(y)$, l'égalité des secondes composantes impose $\lambda = 1$. Mais q est injectif.

Remarquons que si $\varphi(x) = (z, t)$, alors $\varphi(q^{-1}(\lambda q(x))) = (z, t^\lambda)$.



Il existe une section continue $\sigma : W \rightarrow \mathbb{M}\mathfrak{F}$ de π . Quitte à la multiplier par un scalaire, on peut la prendre à valeurs dans $q(V(\kappa, \epsilon))$. La variété $\varphi \circ q^{-1} \circ \sigma(W)$ est le graphe, dans $W \times [0, +1]$, d'une fonction strictement positive définie sur W . Le voisinage de $W \times \{0\}$ limité par ce graphe est sûrement dans l'image de φ d'après la remarque précédente.

L'inverse de φ est continue sur ce voisinage. Vérifions seulement que si $(z_n, t_n) \rightarrow (z, 0)$, alors $\pi \circ \varphi^{-1}(z_n, t_n)$ converge vers z dans le projectif. Comme t_n tend vers 0, $q \circ \varphi^{-1}(z_n, t_n)$ tend vers l'infini. D'après II.1, $\varphi^{-1}(z_n, t_n)$ tend vers l'infini dans \mathfrak{F} . On sait que $z_n = \pi \circ q \circ \varphi^{-1}(z_n, t_n)$ converge vers z ; donc $\pi \circ \varphi^{-1}(z_n, t_n)$ a la même limite d'après II.3. \square

III.3. On savait déjà que \mathfrak{F} est une variété; on vient de voir que $\bar{\mathfrak{F}}$ est une variété à bord, bordée par $P\mathbb{M}\mathfrak{F}$. En particulier $\bar{\mathfrak{F}}$ est localement compacte et, comme la topologie est à base dénombrable, elle est paracompacte. Alors, le bord admet un voisinage collier (théorème de M. Brown, voir [1], chapitre 1, théorème 17.4, page 40). Comme $P\mathbb{M}\mathfrak{F}$ est homéomorphe à une sphère, le bord intérieur du voisinage collier est une sphère plongée dans l'intérieur de \mathfrak{F} , donc dans un espace euclidien; alors, d'après le théorème de Schönflies, généralisé par Mazur et Brown ([1], ch. 1, théorème 18.2, page 48) cette sphère borde une boule. Finalement, $\bar{\mathfrak{F}}$ est homéomorphe à une boule. En particulier, c'est un compact; d'après la proposition 6 de l'exposé 7 et la proposition I.1 de l'exposé 8, la projection $\pi : \mathbb{R}_+^{\mathfrak{F}} - \{0\} \rightarrow P(\mathbb{R}_+^{\mathfrak{F}})$ induit une injection continue de $\bar{\mathfrak{F}}$ dans $P(\mathbb{R}_+^{\mathfrak{F}})$, qui est donc un homéomorphisme

sur son image. On a finalement prouvé le théorème suivant.

Théorème. L'espace $\bar{\mathcal{F}} = P\mathbb{R}^n \bar{\mathcal{F}} \cup \bar{\mathcal{F}}$, muni de la topologie induite par $P(\mathbb{R}^n_+)$ est une variété compacte à bord, homéomorphe à une boule et bordée par $P\mathbb{R}^n \bar{\mathcal{F}}$.

Si la surface est fermée et de genre $g > 1$, $\bar{\mathcal{F}}$ est homéomorphe à D^{6g-6} .

Le groupe des classes d'isotopie de difféomorphismes de la surface agit continûment sur $\bar{\mathcal{F}}$, par l'action transposée de l'action image directe sur \mathcal{A} .

Remarque. L'action décrite ainsi est l'opposée de celle utilisée habituellement sur les feuilletages mesurés, qui consiste à prendre l'image directe des mesures.

RÉFÉRENCE

- [1] T.B. RUSHING, Topological embeddings, Academic Press, New York & London, 1973.

Astérisque

A. FATHI

Appendice : Estimations de distances hyperboliques

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 151-158

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__151_0>

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

APPENDICE

ESTIMATIONS DE DISTANCES HYPERBOLIQUES

par A. FATHI

Nous considérons le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy, y > 0\}$, muni de la métrique $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. La distance entre deux points z et z' est notée $d(z, z')$.

1. Distance hyperbolique de i à z_0 .

$$\operatorname{ch}(d(i, z_0)) = \frac{|z_0 + i|^2 + |z_0 - i|^2}{|z_0 + i|^2 - |z_0 - i|^2}.$$

Démonstration. Soit $f: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ l'isomorphisme $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$. Soit g_{z_0} l'automorphisme de \mathbb{D}^2 qui est la multiplication par $\frac{\overline{f(z_0)}}{|f(z_0)|}$; on vérifie que l'automorphisme de \mathbb{H}^2 , $f^{-1} \circ g_{z_0} \circ f$, admet i pour point fixe et envoie z_0 au point imaginaire pur $i \frac{|z_0+i| + |z_0-i|}{|z_0+i| - |z_0-i|}$. Comme on a la formule $d(i, iy) = |\operatorname{Log} y|$, il vient :

$$e^{d(i, z_0)} = \frac{|z_0+i| + |z_0-i|}{|z_0+i| - |z_0-i|}. \quad \square$$

2. Corollaire. Si $z_0 = \frac{ai+b}{ci+d}$ avec $ad - bc = 1$, on a :

$$\operatorname{ch}(d(i, z_0)) = \frac{1}{2} [a^2 + b^2 + c^2 + d^2].$$

3. Translation hyperbolique le long de l'axe imaginaire.

La transformation $\begin{pmatrix} e^{k/2} & 0 \\ 0 & e^{-k/2} \end{pmatrix}$ envoie en elle-même la droite Oy et

les points de cette droite sont déplacés de la distance k .

4. Translation le long de la droite hyperbolique des complexes de module 1.

Si z est de module 1 et si z' vérifie $\frac{z'+1}{z'-1} = e^{k \frac{z+1}{z-1}}$, alors z' est de module 1. La transformation $z \rightarrow z'$ qui est donnée par la matrice de $SL(2, \mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} \left(\frac{k}{2} \right) & \operatorname{sh} \left(\frac{k}{2} \right) \\ \operatorname{sh} \left(\frac{k}{2} \right) & \operatorname{ch} \left(\frac{k}{2} \right) \end{pmatrix}$$

déplace les points de cette "droite" d'une distance k , vers la droite (partie réelle positive) si $k > 0$ et vers la gauche si $k < 0$.

5. Relations entre les côtés d'un hexagone hyperbolique droit.

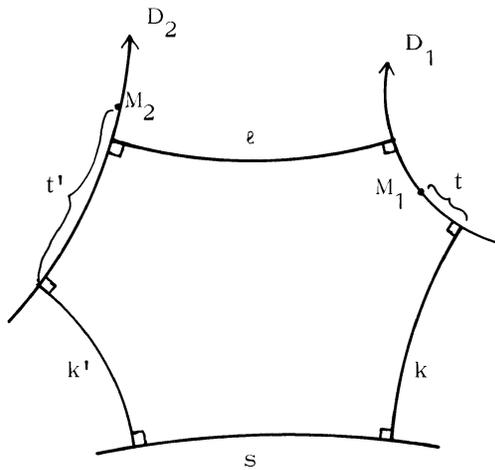


Figure 1

Dans cette figure, s, k, k' sont donnés. On veut calculer ℓ , qui est la plus courte distance entre les droites D_1 et D_2 . On va établir la formule :

$$\text{ch } \ell = \text{ch}(s) \text{sh}(k) \text{sh}(k') - \text{ch}(k) \text{ch}(k') .$$

Démonstration. On calcule la distance d'un point courant M_1 , d'abscisse t sur D_1 orienté, et d'un point courant M_2 , d'abscisse t' sur D_2 orienté (comme sur la figure 1) .

On place M_2 en i et on essaie d'obtenir $M_1 = f(i)$, où f est composé de translations hyperboliques le long de l'axe Oy et le long du cercle unité.

On voit facilement que l'on peut prendre $f \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ comme produit :

$$f = \begin{pmatrix} e^{-t'/2} & 0 \\ 0 & e^{t'/2} \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} e^{-t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{où } F = \begin{pmatrix} \text{ch}(\frac{k'}{2}) & \text{sh}(\frac{k'}{2}) \\ \text{sh}(\frac{k'}{2}) & \text{ch}(\frac{k'}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{s/2} & 0 \\ 0 & e^{-s/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch}(\frac{k}{2}) & -\text{sh}(\frac{k}{2}) \\ -\text{sh}(\frac{k}{2}) & \text{ch}(\frac{k}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

En effectuant les calculs, il vient :

$$a = \alpha e^{-\frac{t+t'}{2}}, \quad b = \beta e^{\frac{t-t'}{2}}, \quad c = \gamma e^{\frac{t'-t}{2}}, \quad d = \delta e^{\frac{t+t'}{2}},$$

$$\alpha = e^{s/2} \text{ch}(\frac{k'}{2}) \text{ch}(\frac{k}{2}) - e^{-s/2} \text{sh}(\frac{k'}{2}) \text{sh}(\frac{k}{2}),$$

$$\beta = e^{-s/2} \text{sh}(\frac{k'}{2}) \text{ch}(\frac{k}{2}) - e^{s/2} \text{ch}(\frac{k'}{2}) \text{sh}(\frac{k}{2}),$$

$$\gamma = e^{s/2} \text{sh}(\frac{k'}{2}) \text{ch}(\frac{k}{2}) - e^{-s/2} \text{ch}(\frac{k'}{2}) \text{sh}(\frac{k}{2}),$$

$$\delta = e^{-s/2} \text{ch}(\frac{k'}{2}) \text{ch}(\frac{k}{2}) - e^{s/2} \text{sh}(\frac{k'}{2}) \text{sh}(\frac{k}{2}).$$

$$\text{On a : } 2 \text{ch}(d(M_1, M_2)) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$= \alpha^2 e^{-(t+t')} + \beta^2 e^{t-t'} + \gamma^2 e^{t'-t} + \delta^2 e^{t+t'} .$$

En cherchant le point critique de cette fonction des variables t et t' (unique parce que la fonction est convexe), il vient :

$$e^{t+t'} = \left| \frac{\alpha}{\delta} \right|, \quad e^{t-t'} = \left| \frac{\gamma}{\beta} \right|.$$

La valeur critique est donc : $\text{ch } \ell = |\alpha \delta| + |\beta \gamma|$.

$$\alpha \delta = \frac{1}{2} [1 + \text{ch}(k) \text{ch}(k') - \text{ch}(s) \text{sh}(k) \text{sh}(k')]$$

$$\beta \gamma = \frac{1}{2} [\text{ch}(k) \text{ch}(k') - 1 - \text{ch}(s) \text{sh}(k) \text{sh}(k')].$$

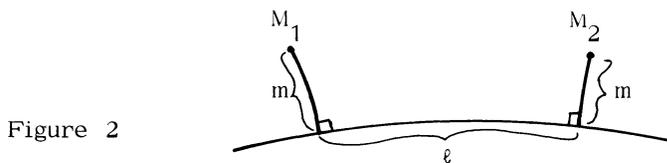
On vérifie d'ailleurs que $\alpha \delta - \beta \gamma = 1$. On trouve alors :

$$\text{ch } \ell = \sup (1, |\text{ch}(k) \text{ch}(k') - \text{ch}(s) \text{sh}(k) \text{sh}(k')|).$$

Or, on voit géométriquement que, si à partir d'un hexagone, on augmente s , on obtient un nouvel hexagone pour lequel ℓ n'est sûrement pas nul ($\text{ch } \ell > 1$) ; d'ailleurs, ℓ est une fonction croissante de s (voir exposé 3, § II). Donc :

$$\text{ch } \ell = \text{ch}(s) \text{sh}(k) \text{sh}(k') - \text{ch}(k) \text{ch}(k'). \quad \square$$

6. Distance de deux points à égale distance d'une droite.



Dans la situation de la figure 2, on a la formule :

$$\text{ch}(d(M_1, M_2)) = \frac{1}{2} [\text{ch}(\ell) + 1 + (\text{ch}(\ell) - 1) \text{ch}(2m)].$$

Démonstration. On place M_1 en i et on écrit $M_2 = f(i)$, où f est dans $SL(2, \mathbb{R})$

le produit suivant :

$$f = \begin{pmatrix} e^{-m/2} & 0 \\ 0 & e^{m/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\frac{\ell}{2}) & \operatorname{sh}(\frac{\ell}{2}) \\ \operatorname{sh}(\frac{\ell}{2}) & \operatorname{ch}(\frac{\ell}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{m/2} & 0 \\ 0 & e^{-m/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\frac{\ell}{2}) & e^{-m} \operatorname{sh}(\frac{\ell}{2}) \\ e^m \operatorname{sh}(\frac{\ell}{2}) & \operatorname{ch}(\frac{\ell}{2}) \end{pmatrix}$$

On applique alors la formule 2 .

□

7. Majoration de distances dans le pantalon.

On considère sur le pantalon P^2 une métrique hyperbolique pour laquelle les composantes du bord sont des géodésiques de longueurs respectives $2m_1, 2m_2, 2m_3$ (attention ! ce n'est pas la notation usuelle). Soit g_{ij} la géodésique simple orthogonale à $\partial_i P^2$ et à $\partial_j P^2$; si $i = j$, elle coupe P^2 en deux anneaux. Posons $\ell_3 = \operatorname{long} g_{12}$, $\ell_2 = \operatorname{long} g_{13}$, $\ell_1 = \operatorname{long} g_{23}$.

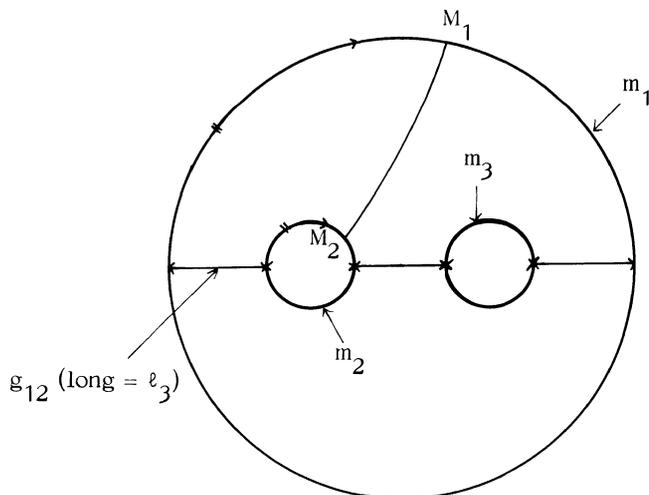


Figure 3

On a : $\text{ch}(m_3) = \text{ch}(\ell_3) \text{sh}(m_1) \text{sh}(m_2) - \text{ch}(m_1) \text{ch}(m_2)$.

Donc :
$$\text{ch}(\ell_3) = \frac{\text{ch}(m_3) + \text{ch}(m_1) \text{ch}(m_2)}{\text{sh}(m_1) \text{sh}(m_2)} .$$

Proposition. Soit M_1 (resp. M_2) un point d'abscisse $m \leq \inf(m_1, m_2)$ sur $\partial_1 P^2$ (resp. $\partial_2 P$) , où l'origine est le point d'intersection avec g_{12} et l'orientation celle de la figure 3. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante, ne dépendant que de ε , qui majore $d(M_1, M_2)$ pourvu que m, m_1, m_2, m_3 vérifient les inégalités (i), (ii) ou (i), (iii) :

(i) $m_1, m_2, m_3 > \varepsilon$;

(ii) $(m_1, m_2, m_3) \in (\leq \nabla)$ (inégalité du triangle) et $|m| \leq \frac{m_1 + m_2 - m_3}{2}$;

(iii) $m_1 \geq m_2 + m_3$ et $|m| \leq m_2$.

Démonstration. D'après la formule 6 , il s'agit de borner la quantité $(\text{ch}(\ell_3) + 1) + (\text{ch}(\ell_3) - 1) \text{ch}(2m)$. Pour cela, il suffit de borner $Q = [\text{ch}(\ell_3) - 1] \text{ch}(2m)$ car on a : $\text{ch}(\ell_3) + 1 \leq Q + 2$.

1° (i) et (ii) sont vrais. On a :

$$Q = \left[\frac{\text{ch}(m_3) + \text{ch}(m_1 - m_2)}{\text{sh}(m_1) \text{sh}(m_2)} \right] \text{ch}(2m) \leq \left[\frac{\text{ch}(m_3) + \text{ch}(m_1 - m_2)}{\text{sh}(m_1) \text{sh}(m_2)} \right] \text{ch}(m_1 + m_2 - m_3) .$$

Puisque $\partial_1 P^2$ et $\partial_2 P^2$ jouent ici des rôles symétriques, on peut supposer

$m_1 - m_2 \geq 0$. Alors, on a :

$$\text{ch}(m_1 - m_2) \text{ch}(m_1 + m_2 - m_3) \leq \text{ch}(2m_1 - m_3)$$

$$\text{ch}(m_3) \text{ch}(m_1 + m_2 - m_3) \leq \text{ch}(m_1 + m_2) .$$

D'autre part $|m_1 - m_3| \leq m_2$; donc $0 \leq |2m_1 - m_3| \leq m_1 + m_2$; d'où :

$$\text{ch}(2m_1 - m_3) \leq \text{ch}(m_1 + m_2) .$$

$$\text{Finalement, on a : } Q \leq \frac{2 \text{ch}(m_1 + m_2)}{\text{sh} m_1 \text{sh} m_2} = 2 + 2 \coth(m_1) \coth(m_2) .$$

Le membre de droite est borné d'après (i) .

2° (i) et (iii) sont vrais.

$$Q = \left[\frac{\text{ch}(m_3) + \text{ch}(m_1 - m_2)}{\text{sh}(m_1) \text{sh}(m_2)} \right] \text{ch}(2m_2) .$$

On a :

$$\text{ch}(m_3) \text{ch}(2m_2) \leq \text{ch}(m_3 + 2m_2) \leq \text{ch}(m_1 + m_2) ,$$

$$\text{ch}(m_1 - m_2) \text{ch}(2m_2) \leq \text{ch}(m_1 + m_2) .$$

On conclut comme dans le 1er cas. \square

Corollaire. Soient M, M' deux points distincts de $\partial_1 P^2$, équidistants de la géodésique g_{11} et du même côté de celle-ci. Alors $d(M, M')$ est borné par une constante ne dépendant que de ϵ pourvu que l'on ait :

- (i) $m_1, m_2, m_3 > \epsilon$,
- (ii) $m_1 \geq m_2 + m_3$
- (iii) $M \in AA'$ (voir figure 4) .

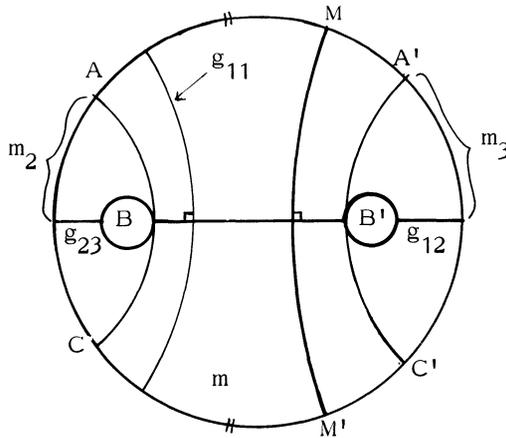


Figure 4

(toutes les lignes de cette figure sont des géodésiques)

Démonstration. D'après la proposition précédente, les quantités $d(A,B) = d(C,B)$ et $d(A',B') = d(C',B')$ sont bornées. D'après la formule du n° 6 ,

$$d(M,M') \leq \sup (d(A,C), d(A',C')) .$$

Par l'inégalité triangulaire, $d(A,C) \leq 2d(A,B)$ et $d(A',C') \leq 2d(A',B')$. \square

Astérisque

V. POÉNARU

Classification des difféomorphismes des surfaces

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 159-180

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__159_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EXPOSÉ 9

CLASSIFICATION DES DIFFÉOMORPHISMES DES SURFACES

par V. POÉNARU

§ I. - Préliminaires

§ II. - Le cas "réductible" : $\beta U(\mathcal{F}) \neq \emptyset$

§ III. - Feuilletages mesurés arationnels

§ IV. - Le cas II : (\mathcal{F}, μ) est arationnel et $\lambda = 1$

§ V. - Le cas III : (\mathcal{F}, μ) est arationnel et $\lambda \neq 1$

§ VI. - Quelques propriétés des difféomorphismes pseudo-Anosov

§ I. - PRÉLIMINAIRES

Soit M une surface fermée, orientable de genre $g > 1$. Son espace de Teichmüller compactifié $\overline{\mathcal{T}M}$ est homéomorphe à D^{6g-6} . Les actions naturelles de $\pi_0(\text{Diff}(M))$ sur $\mathcal{T}M$ et sur $\text{PIn}\mathcal{F}(M)$ se recollent en une action continue sur

$$\overline{\mathcal{T}M} = \mathcal{T}M \cup \text{PIn}\mathcal{F}(M) .$$

Soient $\varphi \in \text{Diff}(M)$ et $[\varphi]$ sa classe d'isotopie. Par le théorème du point fixe de Brouwer, il existe $x \in \overline{\mathcal{T}M}$, tel que $[\varphi] \cdot x = x$.

Si x appartient à $\mathcal{T}M$, alors x provient d'une métrique hyperbolique sur M , bien déterminée à isotopie près, et φ est isotope à une isométrie de cette métrique.

D'après le théorème 18, exposé 3, φ est isotope à un difféomorphisme d'ordre fini.

Si x appartient au bord de $\overline{\mathfrak{F}M}$, $x \in P\mathfrak{F}(M)$; l'égalité $[\varphi] \cdot x = x$ veut dire qu'il existe un feuilletage mesuré (\mathfrak{F}, μ) , dont la classe de mesure dans l'espace projectif $P(\mathbb{R}_+^{\mathfrak{F}})$ est préservée par φ (notation: \mathfrak{F} désigne le feuilletage et μ une mesure transverse invariante de \mathfrak{F}). En d'autres termes, il existe un feuilletage mesuré (\mathfrak{F}, μ) et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}_+$, tels que

$$(*) \quad \varphi(\mathfrak{F}, \mu) \sim_m (\mathfrak{F}, \lambda \mu) = \lambda(\mathfrak{F}, \mu).$$

Notations. 1) Ici \sim_m est la relation d'équivalence "de mesure" entre feuilletages mesurés. Je rappelle que :

$$(\mathfrak{F}_1, \mu_1) \sim_m (\mathfrak{F}_2, \mu_2)$$

veut dire que les deux feuilletages mesurés définissent la même fonctionnelle dans $\mathbb{R}_+^{\mathfrak{F}}$ (équivalence au sens de Schwartz). D'après l'exposé 6, cette relation est la même que l'équivalence au sens de Whitehead définie en II. 1 de l'exposé 5.

2) $\varphi(\mathfrak{F}, \mu)$ désigne le feuilletage image par φ de \mathfrak{F} , équipé de la mesure image directe: la mesure d'un arc transversal α est la μ -mesure de $\varphi^{-1}(\alpha)$.

Pour aller plus loin, je définis un feuilletage mesuré partiel de M comme la donnée d'une sous-variété compacte de dimension 2, $N \subset M$, et d'un feuilletage mesuré (\mathfrak{F}', μ') de support N , vérifiant ce qui suit :

- (i) chaque composante connexe de ∂N est un cycle de feuilles ;
- (ii) si Γ est une composante de ∂N qui borde un disque dans $M - \text{int } N$, alors le nombre de séparatrices qui partent de $\text{sing } \mathfrak{F}' \cap \Gamma$, rentrant dans N , est au moins 2.

Si l'on part d'un feuilletage mesuré (\mathfrak{F}, μ) de M , on peut "décoller" \mathfrak{F} le long de toutes les feuilles qui relient les singularités et faire éclater toutes les singularités qui ne sont pas touchées par ces liaisons. On obtient ainsi un feuilletage mesuré partiel $U(\mathfrak{F}, \mu)$ (appelé le "unglue" de (\mathfrak{F}, μ)), dont toutes les singularités sont sur le bord. On peut vérifier sans peine les faits suivants :

- a) $i_*(\mathfrak{F}, \mu) = i_*(U(\mathfrak{F}, \mu)) \in \mathbb{R}_+^{\mathfrak{F}}$;
- b) si $i_*(\mathfrak{F}_1, \mu_1) = i_*(\mathfrak{F}_2, \mu_2)$, c'est-à-dire si $(\mathfrak{F}_1, \mu_1) \sim_m (\mathfrak{F}_2, \mu_2)$, alors $U(\mathfrak{F}_1, \mu_1)$ et $U(\mathfrak{F}_2, \mu_2)$ sont isotopes ;
- c) on note $\beta U(\mathfrak{F}, \mu)$ la réunion des composantes du bord du support de $U(\mathfrak{F}, \mu)$ qui ne bordent pas de disque dans M ; comme élément de $\mathcal{D}^1(M)$, $\beta U(\mathfrak{F}, \mu)$ ne dépend

que de la classe de mesure de (\mathfrak{F}, μ) .

En revenant à la relation (*) donnée par le point fixe considéré, on a trois possibilités.

- I) $\beta U(\mathfrak{F}, \mu) \neq \emptyset$,
- II) $\beta U(\mathfrak{F}, \mu) = \emptyset$ et $\lambda = 1$,
- III) $\beta U(\mathfrak{F}, \mu) = \emptyset$ et $\lambda \neq 1$.

Dans la suite de cet exposé, on va analyser ces trois cas. On montrera que I) est le cas "réductible", que II) est de nouveau un cas "d'ordre fini", tandis que III) est le cas "pseudo-Anosov" (voir l'exposé 1). Le théorème de classification est énoncé à la fin du paragraphe V. Dans cet exposé, les surfaces sont toujours orientables, mais les difféomorphismes ne préservent pas nécessairement l'orientation, ce qui complique certains arguments, en particulier le lemme 9.

§ II. - LE CAS "RÉDUCTIBLE" : $\beta U(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$

La relation (*) implique que $U(\varphi(\mathfrak{F}, \mu))$ et $U(\mathfrak{F}, \lambda \mu)$ sont isotopes. Donc, dans \mathcal{S}' , on a l'égalité :

$$\beta U(\varphi(\mathfrak{F}, \mu)) = \beta U(\mathfrak{F}, \lambda \mu) .$$

D'autre part,

$$\beta U(\varphi(\mathfrak{F}, \mu)) = \varphi(\beta U(\mathfrak{F}, \mu))$$

$$\beta U(\mathfrak{F}, \lambda \mu) = \beta U(\mathfrak{F}, \mu) .$$

Finalement, l'élément $\beta U(\mathfrak{F}, \mu)$ de \mathcal{S}' est invariant par $[\varphi]$, les diverses composantes pouvant être permutées.

Dans ces conditions, φ est isotope à un difféomorphisme φ' qui laisse invariante la sous-variété $\beta U(\mathfrak{F}, \mu)$. En coupant M le long de cette famille de courbes, on obtient une variété à bord W , peut-être non connexe sur laquelle φ' induit un difféomorphisme ψ . On recommence une étude analogue pour ψ en appliquant la théorie de Thurston pour les surfaces à bord, qui est esquissée dans l'exposé 11. Noter que W est plus simple que M au sens où chaque composante de W a soit un genre plus petit que celui de M , soit le même genre et une caractéristique d'Euler plus petite en valeur absolue. Donc, en un nombre fini d'étapes, on peut donner la structure de φ à isotopie près.

§ III. - FEUILLETAGES MESURÉS ARATIONNELS

Par définition, un feuilletage mesuré (\mathfrak{F}, μ) est arationnel si $\beta U(\mathfrak{F}, \mu)$ est vide.

Lemme 1. 1° Si (\mathfrak{F}, μ) est un feuilletage mesuré arationnel, l'ensemble compact invariant X , formé de toutes les singularités et des feuilles joignant deux singularités, ne possède que des composantes connexes contractiles.

2° \mathfrak{F} ne possède pas de feuille fermée lisse.

Démonstration. La variété $\overline{M - \text{Supp } U(\mathfrak{F}, \mu)}$ collapse sur X , d'où 1). Supposons que Γ soit une feuille lisse de (\mathfrak{F}, μ) ; en se fixant l'un des côtés de Γ dans M et en appliquant le lemme de stabilité de l'exposé 5, on peut trouver un cylindre maximal $\Phi : \Gamma \times [0, 1] \rightarrow M$ tel que :

- 1) $\Phi(\Gamma \times \{0\}) = \Gamma$;
- 2) $\Phi(\Gamma \times [0, 1[)$ soit un plongement partant du côté choisi de Γ .

Le genre étant > 1 , si ce cylindre est maximal, alors $\Phi(\Gamma \times \{1\}) \subset X$. Vu le point 1), l'ensemble invariant $\Phi(\Gamma \times \{1\})$ est collapsible et on peut montrer sans difficulté que $\Phi(\Gamma \times [0, 1])$ est un disque D^2 de spine $\Phi(\Gamma \times \{1\})$. Comme il n'existe pas de feuilletage mesuré sur D^2 , tel que ∂D^2 soit une feuille, l'existence de Γ est absurde.

Ainsi, chaque demi-feuille de \mathfrak{F} , qui ne va pas à une singularité, est infinie. \square

Remarque. Sur le tore T^2 , d'après la définition, tout feuilletage est arationnel, tandis qu'un feuilletage qui satisfait aux conclusions du lemme 1 est conjugué à un feuilletage linéaire de pente irrationnelle.

Corollaire 2. Dans les conditions du lemme précédent, il existe (\mathfrak{F}', μ') équivalent à (\mathfrak{F}, μ) , ne possédant aucune liaison entre singularités. Ce feuilletage est unique à isotopie près dans sa classe de mesure.

Démonstration. On obtient (\mathfrak{F}', μ') en collapsant chaque composante de l'ensemble \mathfrak{F} -invariant X décrit ci-dessus. Le résultat du collapsing reste inchangé à isotopie près si on fait un glissement de Whitehead sur X ; l'unicité en découle. \square

Convention. Dans la suite, on représentera systématiquement une classe de feuilletages arationnels par le modèle canonique obtenu ci-dessus.

Lemme 3. Si (\mathfrak{F}, μ) est le modèle canonique d'une classe de feuilletages arationnels et si φ est un difféomorphisme tel que $\varphi(\mathfrak{F}, \mu) \underset{m}{\sim} \lambda(\mathfrak{F}, \mu)$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors φ est isotope à φ' tel que :

$$\varphi'(\mathfrak{F}, \mu) = (\mathfrak{F}, \lambda \mu) ,$$

c'est-à-dire : φ' envoie feuilles dans feuilles et, pour tout arc α transverse à \mathfrak{F} , on a :

$$\mu(\varphi'^{-1}(\alpha)) = \lambda \mu(\alpha) .$$

Attention : Si $\lambda > 1$, ceci veut dire que φ contracte les distances transversales (avec un facteur $\frac{1}{\lambda}$) tandis que si $\lambda < 1$, ceci veut dire que φ dilate les distances transversales (avec un facteur $\frac{1}{\lambda}$) .

Démonstration. Les feuilletages $\varphi(\mathfrak{F}, \mu)$ et $(\mathfrak{F}, \lambda \mu)$ sont deux modèles canoniques de la même chose ; ils sont donc isotopes. En modifiant φ par cette isotopie, on obtient le φ' désiré. \square

Définition. Soit (\mathfrak{F}, μ) un feuilletage mesuré quelconque. Un (\mathfrak{F}, μ) -rectangle (ou, plus brièvement, un \mathfrak{F} -rectangle) est l'image d'une immersion $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ avec les propriétés suivantes :

- a) $\varphi |]0, 1[\times]0, 1[$ est un plongement C^∞ ;
- b) $\varphi(\{t\} \times [0, 1])$ est contenue dans une réunion finie de feuilles et de singularités ; si $t \in]0, 1[$, cette image est contenue dans une seule feuille ;
- c) $\varphi([0, 1] \times \{0\})$ et $\varphi([0, 1] \times \{1\})$ sont transverses aux feuilles.

Pour un \mathfrak{F} -rectangle R , je considère la décomposition $\partial R = \partial_{\mathfrak{F}} R \cup \partial_{\mathcal{T}} R$, où, par définition,

$$\partial_{\mathfrak{F}} R = \varphi(\{0, 1\} \times [0, 1]) \text{ et } \partial_{\mathcal{T}} R = \varphi([0, 1] \times \{0, 1\}) .$$

Je vais noter par $\partial_{\mathfrak{F}}^0 R$ et $\partial_{\mathfrak{F}}^1 R$ les images respectivement de $\{0\} \times [0, 1]$ et de $\{1\} \times [0, 1]$; une notation analogue sera utilisée pour $\partial_{\mathcal{T}} R$. D'autre part, je conviens de noter $\text{int } R = \varphi(]0, 1[\times]0, 1[)$, qui en général n'est pas l'intérieur de l'image ; il est facile de voir que $\text{int } R$ et ∂R sont disjoints.

Définition. Un bon système de transversales pour \mathfrak{F} est un système fini $\tau = \{\tau_i ; i \in I\}$ d'arcs simples ayant les propriétés suivantes :

- a) Chaque arc est transverse à \mathfrak{F} et ne peut rencontrer une singularité qu'en l'une de ses extrémités ;
- b) Deux arcs ne peuvent se rencontrer qu'en une seule extrémité ; si celle-ci est une singularité, les deux arcs partent dans deux secteurs distincts.

La notation $\partial \tau$ désigne la collection des extrémités de chaque arc.

Remarque. On ne demande pas que chaque arc touche à une singularité.

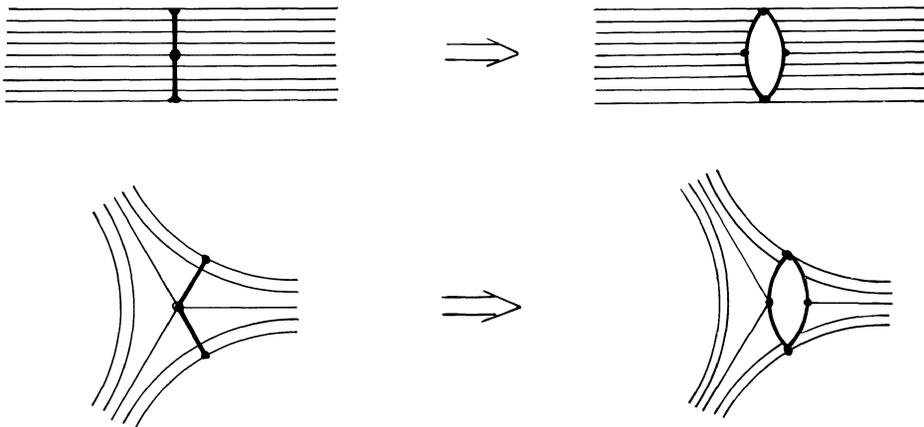
Lemme 4. Etant donné un feuilletage mesuré \mathfrak{F} et un bon système de transversales τ , il existe un système de rectangles R_1, \dots, R_N avec les propriétés ci-dessous.

- 1) $\text{int } R_i \cap \text{int } R_j = \emptyset$, pour $i \neq j$.
- 2) $\partial_{\tau}^e R_i$ est contenu dans un seul arc de τ .
- 3) Chaque $\partial_{\mathfrak{F}}^e R_i$ contient un point de $\text{Sing } \mathfrak{F} \cup \partial \tau$; en d'autres termes, chaque rectangle R_i est maximal par rapport à la condition 2).
- 4) Les deux côtés de chaque arc de τ sont recouverts par des rectangles.

Le système (R_1, \dots, R_N) est unique.

Remarque. Il est très instructif de prendre une petite transversale à un feuilletage irrationnel de T^2 et de construire les rectangles correspondants.

Démonstration. Coupons la variété comme l'indique la figure 1.



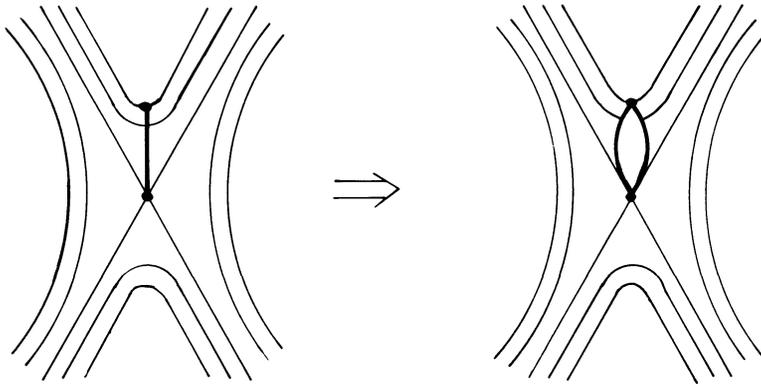


Figure 1

On obtient une variété à bord \hat{M} avec un feuilletage \mathfrak{F}' ; le bord τ' de \hat{M} est le "dédoublé" de τ . Considérons l'ensemble fini Z de τ' , défini par l'une des conditions suivantes :

- 1) $x \in \text{Sing } \mathfrak{F}'$;
- 2) x est un des points provenant d'une extrémité de τ ;
- 3) la feuille partant de x aboutit à une singularité de \mathfrak{F}' ou à un point qui provient d'une extrémité de τ .

Par le théorème de récurrence de Poincaré (exposé 5), toute feuille partant d'un point de $\tau' - Z$ retourne dans $\tau' - Z$.

Pour chaque composante α_i de $\tau' - Z$, par le lemme du rectangle maximal (exposé 5), on peut trouver un rectangle R_i tel que $\partial_{\tau'}^0 R_i = \overline{\alpha_i}$; $\partial_{\tau'}^1 R_i$ est l'adhérence d'une autre composante de $\tau' - Z$. Quand on les regarde dans M , ces rectangles sont les rectangles cherchés. L'unicité est laissée en exercice. \square

Lemme 5. Si, dans les données du lemme 4, \mathfrak{F} est un feuilletage arationnel, alors $R_1 \cup \dots \cup R_N = M$.

Démonstration. De toutes façons, la réunion des R_i est un fermé \mathfrak{F} -invariant. Si sa frontière n'est pas vide, c'est un fermé \mathfrak{F} -invariant formé de cycles de feuilles. Si \mathfrak{F} est arationnel, de tels cycles n'existent pas ; donc la frontière est vide et $M = \cup R_i$. \square

Lemme 6. Si \mathfrak{F} est un feuilletage arationnel, chaque demi-feuille L de \mathfrak{F} qui ne va pas à une singularité est dense.

Démonstration. On sait que L est "infinie" (lemme 1). Soient τ un petit arc transverse à \mathfrak{F} et R_1, \dots, R_N le système de rectangles du lemme 4. D'après le lemme précédent, $\cup R_i = M$ et, comme L est infinie, elle contient des plaques dans $\cup \text{int } R_i$, donc L touche τ . Comme τ est arbitraire, L est dense. \square

§ IV. - LE CAS II : (\mathfrak{F}, μ) EST ARATIONNEL ET $\lambda = 1$

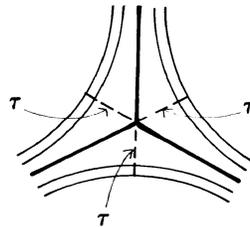
Lemme 7. Si φ est un difféomorphisme et (\mathfrak{F}, μ) un feuilletage arationnel tels que :

$$\varphi(\mathfrak{F}, \mu) = (\mathfrak{F}, \mu) ,$$

alors φ est isotope à un difféomorphisme d'ordre fini parmi les difféomorphismes qui préservent (\mathfrak{F}, μ) .

Démonstration. Au voisinage de chaque singularité, je choisis des arcs transverses, un dans chaque secteur, tous de même longueur par rapport à la mesure μ , comme les arcs en pointillés de la figure 2.

Figure 2



Vu que $\lambda = 1$, on peut choisir ce système d'arcs τ de telle façon qu'après une éventuelle isotopie de φ , à travers des difféomorphismes qui préservent \mathfrak{F} , on ait $\varphi(\tau) = \tau$.

Soit R_1, \dots, R_N le système de rectangles associé à τ (lemme 4). Comme $\varphi(\tau) = \tau$ et $\varphi(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$, on voit que chaque $\varphi(R_i)$ est encore un \mathfrak{F} -rectangle satisfaisant à la condition 2) du lemme 4. Il est facile de voir qu'il existe une permutation π de $(1, \dots, N)$ telle que $\varphi(R_i) = R_{\pi(i)}$. En particulier, φ transforme le graphe $\Gamma = \cup_i \partial R_i$ en lui-même. Donc φ permute entre elles les arêtes de Γ . En travaillant sur les cycles de cette permutation, on peut isotoper φ en φ' , par des difféomorphismes qui préservent \mathfrak{F} , tel que $\varphi' | \Gamma$ soit périodique et que $\varphi'(R_i) = R_{\pi(i)}$.

En travaillant sur les cycles de π , on peut faire une seconde isotopie jusqu'à obtenir un difféomorphisme périodique, à travers des difféomorphismes qui préservent \mathfrak{F} . \square

Remarque. Un tel difféomorphisme a toujours un point fixe dans $\mathfrak{F}M$.

En effet, si φ est d'ordre fini, φ est une isométrie d'une certaine métrique m (dont la courbure est incontrôlée) ; φ est donc un automorphisme de la structure conforme sous-jacente. Mais, d'après le théorème d'uniformisation cité dans l'exposé 7, au-dessus de cette structure, il y a une unique métrique hyperbolique qui, par conséquent, est invariante par φ .

§ V. - LE CAS III : (\mathfrak{F}, μ) EST ARATIONNEL ET $\lambda \neq 1$

Je vais supposer maintenant qu'on est dans la situation où $\varphi(\mathfrak{F}, \mu) = (\mathfrak{F}, \lambda \mu)$ avec $\lambda \neq 1$, où \mathfrak{F} est le modèle canonique d'une classe de feuilletages arationnels. En changeant éventuellement φ en φ^{-1} , on peut supposer $\lambda > 1$.

Lemme 8. Le facteur λ (resp. $\frac{1}{\lambda}$) est un entier algébrique de degré borné par une quantité qui n'est fonction que du genre de la surface.

Démonstration. Au-dessus de M , il y a un revêtement ramifié \tilde{M} dans lequel (\mathfrak{F}, μ) se relève en une 1-forme fermée ω . Si γ est un lacet de $M - \text{Sing } \mathfrak{F}$, le long duquel \mathfrak{F} est orientable, alors $\varphi(\gamma)$ a la même propriété ; il s'en suit que φ se relève en un difféomorphisme ψ du revêtement ouvert $\tilde{M} | M - \text{Sing } \mathfrak{F}$. Il se prolonge en un difféomorphisme $\tilde{\varphi}$ de \tilde{M} .

On a $(\tilde{\varphi}^{-1})^*(\omega) = \lambda \omega$. Donc λ est une valeur propre d'un automorphisme de $H^1(\tilde{M}; \mathbb{Z})$. Or, le rang de ce groupe de cohomologie est majoré par une quantité qui ne dépend que du genre de M . \square

Lemme 9. Dans les conditions ci-dessus, quitte à changer φ par une isotopie qui laisse \mathfrak{F} invariant, on peut trouver un bon système de transversales τ ayant les propriétés suivantes.

- 1) Dans chaque secteur de singularité, il y a un arc de τ (figure 2).
- 2) $\varphi(\tau) \subset \tau$, ce qui signifie que φ envoie chaque arc de τ dans un arc de τ .
- 3) Si $x \in \partial\tau - \text{Sing } \mathfrak{F}$, x appartient alors à la séparatrice d'une singularité ; on note F_x l'arc de feuille joignant x à $\text{Sing } \mathfrak{F}$.
- 4) Chaque séparatrice contient un F_x .
- 5) $(\cup F_x) \subset \varphi(\cup F_x)$.

Démonstration. Puisque $\lambda > 1$, φ contracte les transversales (voir la définition d'image directe d'une mesure). Quitte à modifier φ par une isotopie qui conserve \mathfrak{F} , il est facile de trouver un bon système de transversales τ'' qui vérifie 1) et 2) et qui soit formé d'un arc dans chaque secteur. Soit α'' un arc de τ'' et L une séparatrice issue d'une singularité s ; vu la densité des demi-feuilles, il y a, à partir de s , un premier point d'intersection de L avec α'' . En considérant toutes les séparatrices, on obtient sur α'' un nombre fini de tels points; on subdivise ainsi α'' et on le tronque au point le plus éloigné. Soit τ' le bon système de transversales obtenu par cette opération sur chacun des arcs de τ'' . Il vérifie 1), 3), 4).

Le système τ' vérifie aussi 2). Soit $\alpha' \in \tau'$, d'extrémités x et y . On a $\alpha' \subset \alpha''$, $\alpha'' \in \tau''$ et $\varphi(\alpha') \subset \beta''$ pour un certain $\beta'' \in \tau''$. Supposons, pour le moment, que $\varphi(\alpha')$ est déjà contenu dans $\cup \{\beta' \mid \beta' \in \tau'\}$. Si $\varphi(\alpha')$ n'est pas contenu dans un arc de τ' , il existe une séparatrice L dont le premier point d'intersection avec β'' est un point z entre $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$. Mais $\varphi^{-1}(L)$, avant de couper α'' en $\varphi^{-1}(z)$, coupe α'' en $t \neq \varphi^{-1}(z)$. Donc L coupe β'' en $\varphi(t)$, qui est avant z sur L ; contradiction. Maintenant un raisonnement analogue prouve que $\varphi(\alpha') \subset \cup \{\beta' \mid \beta' \in \tau'\}$, pour tout $\alpha' \in \tau'$, ce qui complète la preuve que τ' vérifie 2).

Soit n le premier entier ≥ 0 , pour lequel φ^{n+1} laisse invariante chaque séparatrice. Soit τ la subdivision de τ' , définie par $\tau' \vee \varphi(\tau') \vee \dots \vee \varphi^n(\tau')$; un arc α de τ est contenu dans un arc de τ' et est limité par deux points consécutifs de la forme $\varphi^j(x)$, $\varphi^{j'}(x')$, avec $x, x' \in \tau'$ et $0 \leq j, j' \leq n$. Les propriétés 1), 3), 4) sont évidentes.

Pour 2), supposons que $\varphi(\alpha)$, qui, vu que τ' vérifie 2), est contenu dans un certain β' de τ' , soit subdivisé; c'est-à-dire qu'entre $\varphi^{j+1}(x)$ et $\varphi^{j'+1}(x')$, il y ait un $\varphi^{j''}(x'')$, avec $x'' \in \partial\tau'$, $j'' \leq n$. J'affirme que $j'' \geq 1$; ceci est vrai car $\varphi(\alpha)$, qui est contenu dans β' , n'est pas subdivisé par un point de $\partial\tau'$. Donc α contient $\varphi^{j''-1}(x'')$; contradiction.

Prouvons 5). Soit $x \in \partial\tau$; si $\varphi^{-1}(x) \in \partial\tau$, la propriété 5) est évidente. Si $\varphi^{-1}(x) \notin \partial\tau$, alors $x \in \partial\tau'$. La feuille L de F_x contient aussi $\varphi^{n+1}(F_x)$; par construction même de τ' , x est le premier point d'intersection de L avec l'arc de τ'' qui passe par x . Donc $\varphi^{n+1}(F_x)$ contient F_x et $\varphi^{-1}(F_x) \subset F_{\varphi^n(x)}$. \square

Remarque. Soient $x \in \partial\tau - \text{Sing } \mathfrak{F}$ et L la feuille contenant F_x . A partir de la singularité s de L , on considère le premier point y qui appartient à τ et pas à F_x . On note F_x^1 le segment de s à y sur L .

Soit F (resp. F') la réunion des F_x (resp. F'_x). Vu que $\varphi(\tau) \subset \tau$ et $\varphi(F) \supset F$, on vérifie sans difficulté que $\varphi(F') \supset F'$.

Définition. Soient (\mathfrak{F}, μ) un feuilletage mesuré arationnel et φ un difféomorphisme tel que $\varphi(\mathfrak{F}, \mu) = \lambda(\mathfrak{F}, \mu)$ avec $\lambda > 1$. Une pré-partition de Markov pour (\mathfrak{F}, φ) est par définition une collection de \mathfrak{F} -rectangles R_1, \dots, R_m telle que :

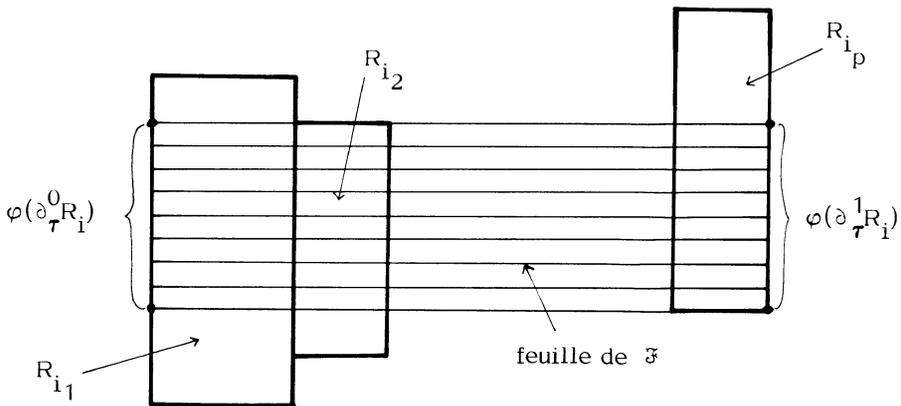
- 1) $\text{int } R_i \cap \text{int } R_j = \emptyset$,
- 2) $\bigcup_i R_i = M$,
- 3) $\varphi(\bigcup_i \partial_{\tau} R_i) \subset \bigcup_i \partial_{\tau} R_i$;
- 4) $\varphi^{-1}(\bigcup_i \partial_{\mathfrak{F}} R_i) \subset \bigcup_i \partial_{\mathfrak{F}} R_i$.

Lemme 10. Une pré-partition de Markov vérifie aussi :

- 5) pour chaque $i = 1, \dots, m$ et $\epsilon = 0, 1$, $\varphi(\partial_{\tau}^{\epsilon} R_i)$ est recouvert du côté de $\varphi(R_i)$ par un seul rectangle : $\varphi(\partial_{\tau}^{\epsilon} R_i) \subset \partial_{\tau}^{\eta(\epsilon, i)} R_{j(\epsilon, i)}$;
- 6) de même, $\varphi^{-1}(\partial_{\mathfrak{F}}^{\epsilon} R_i)$ est recouvert du côté de $\varphi^{-1}(R_i)$ par un seul rectangle.

Démonstration. Si 5) n'est pas vrai, il existe $x \in \text{int } R_i$ tel que $\varphi(x) \in \partial_{\mathfrak{F}} R_j$, ce qui contredit 4). De même 6) résulte de 3). \square

Ceci veut dire que l'image par φ du rectangle R_i est quelque chose comme dans la figure 3.



(N.B. : i_1, i_2, \dots, i_p ne sont pas nécessairement distincts)

Figure 3

Lemme 11. Soient (\mathfrak{F}, μ) le modèle canonique d'une classe de feuilletages arationnels et φ un difféomorphisme tel que $\varphi(\mathfrak{F}, \mu) = (\mathfrak{F}, \lambda \mu)$ avec $\lambda > 1$. Quitte à faire une isotopie de φ préservant \mathfrak{F} , il existe une pré-partition de Markov pour (\mathfrak{F}, φ) .

Démonstration. Soient τ comme dans le lemme 9 et R'_1, \dots, R'_ℓ le système de rectangles attaché à τ . On construit le système R_1, \dots, R_m en prenant les fermetures des composantes de $\bigcup_i \text{int } R'_i - F'$, où F' est décrit dans la remarque suivant le lemme 9.

Les conditions 1) et 2) d'une pré-partition de Markov sont clairement vérifiées. Pour la condition 3), on voit que $\tau = \bigcup_i \partial_\tau R'_i = \bigcup_i \partial_\tau R_i$ et on sait que $\varphi(\tau) \subset \tau$. D'autre part, par construction, chaque $\partial_{\mathfrak{F}}^\varepsilon R'_i$ est un arc α d'une feuille joignant un point $x \in \partial\tau$ à un point $y \in \tau$, et ne recoupant pas τ . Si $x \notin \text{Sing } \mathfrak{F}$, α est donc contenu dans F'_x ; si x est une singularité, α est contenu dans F_y ; donc $\partial_{\mathfrak{F}}^\varepsilon R'_i \subset F'$. La subdivision garantit que F' est recouvert par la réunion des $\partial_{\mathfrak{F}} R_i$. On a remarqué que $\varphi^{-1}(F') \subset F'$; donc la condition 4) est vérifiée. \square

Dans le reste de l'exposé, on travaillera avec une pré-partition de Markov R_1, \dots, R_m adaptée au feuilletage mesuré (\mathfrak{F}, μ) et au difféomorphisme φ . Notons x_i la μ -largeur du rectangle R_i et par a_{ij} le nombre de fois que $\varphi(\text{int } R_i)$ traverse $\text{int } R_j$ (i.e. nombre de composantes de l'intersection). Vu que φ^{-1} dilate les distances transverses avec un facteur λ et que a_{ij} est, aussi, égal au nombre de fois que $\varphi^{-1}(\text{int } R_j)$ traverse $\text{int } R_i$, on trouve :

$$\lambda x_j = \sum_i x_i a_{ij} .$$

Autrement dit, le vecteur colonne x_i est vecteur propre, de valeur propre λ , pour la matrice transposée de $A = (a_{ij})$.

Lemme 12. Il existe des nombres $\xi > 0$ et $y_1, \dots, y_m > 0$ tels que

$$y_i = \xi \sum_j a_{ij} y_j .$$

Autrement dit, A admet une valeur propre $\xi^{-1} > 0$, avec un vecteur propre dont toutes les coordonnées sont strictement positives.

Démonstration. Vu que $a_{ij} \geq 0$ et que, pour tout j , il existe un i tel que $a_{ij} > 0$, A opère projectivement sur le simplexe fondamental. Le théorème du point fixe de Brouwer implique alors que A a une valeur propre > 0 avec un vecteur propre $y_1 \geq 0, \dots, y_m \geq 0$, avec $\sum y_i > 0$. Il s'agit de montrer que, pour tout i , y_i est

non nul.

Disons, pour fixer les idées, que $y_1 = y_2 = \dots = y_\ell = 0$ et que $y_{\ell+1} > 0, \dots, y_n > 0$. Il en résulte que, pour $i \leq \ell$, on a :

$$a_{ij} > 0 \implies j \leq \ell.$$

Autrement dit, l'ensemble $J = \bigcup_{i=1}^{\ell} R_i$ est invariant par φ et n'est pas dense. Pour montrer que ceci est contradictoire, on peut faire les remarques suivantes :

1° D'abord, si $N > 0$ est un entier, alors R_1, \dots, R_m est une pré-partition de Markov pour φ^N . Ainsi, sans perte de généralité, on peut se réduire au cas où φ laisse fixe l'ensemble des secteurs des points singuliers (en particulier laisse fixe chaque singularité).

2° Comme $\varphi(J) \subset J$ et comme chaque segment de τ est contracté par φ vers son point singulier, il existe parmi les boîtes R_1, \dots, R_ℓ , une boîte, disons R_1 , qui soit dans la configuration de la figure 4.

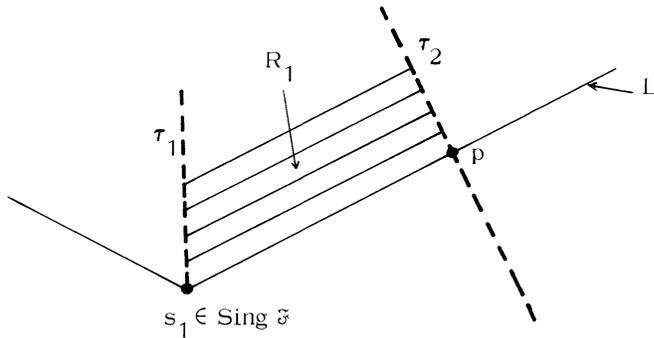


Figure 4

3° Puisque τ_2 est contracté par φ vers sa singularité, les points $\varphi^n(p)$ forment un ensemble infini. D'autre part, ils appartiennent tous à la même feuille L qui est φ -invariante. Donc la suite converge vers l'infini dans la topologie de la feuille. Si F désigne le segment de s_1 à p sur L , on a :

$$L = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi^n(F).$$

4° La feuille L étant dense dans M , l'égalité précédente implique que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi^n(R_1)$ est dense dans M , tandis que, par ailleurs, cette réunion est contenue dans J qui

n n'est pas dense ; contradiction. \square

Construction d'un feuilletage mesuré \mathfrak{F}' .

Je vais construire un feuilletage mesuré \mathfrak{F}' ayant les mêmes singularités que \mathfrak{F} et transversal à \mathfrak{F} en dehors de ces points, avec les propriétés suivantes :

A) Chaque segment de τ est contenu dans une feuille de \mathfrak{F}' et chaque rectangle R_i est feuilleté par \mathfrak{F}' , comme dans la figure 5 .

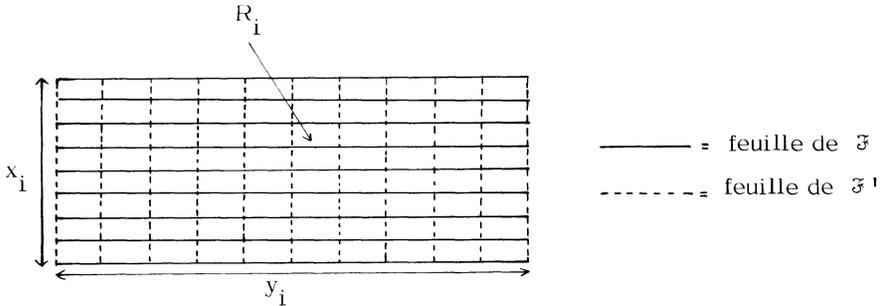


Figure 5

B) La \mathfrak{F}' -largeur de R_i est le y_i du lemme 12 .

C) Soit A_0, A_1, \dots, A_k la suite des points de τ se trouvant sur $\partial_{\mathfrak{F}}^0 R_i$. Les segments $[A_1, A_2], \dots, [A_{k-2}, A_{k-1}]$ sont tous du type $\partial_{\mathfrak{F}}^{\varepsilon} R_j$; donc leur \mathfrak{F}' -largeur est prescrite par la condition B) . Soit u la \mathfrak{F}' -largeur de $[A_0, A_1]$; on détermine u de la façon suivante : si q est un entier assez grand, $\varphi^q(A_0)$ et $\varphi^q(A_1)$ n'appartiennent pas à $\partial\tau - \text{Sing } \mathfrak{F}$; alors $\varphi^q([A_0, A_1])$ est une somme de segments (plaques), contenus dans une réunion finie de feuilles et singularités, chacun traversant un R_j de part en part. On pose alors :

$$u = \xi^q \times (\text{somme des } \mathfrak{F}'\text{-largeurs de ces segments}) .$$

On opère de même pour $[A_{k-1}, A_k]$, ainsi que pour les intervalles de $\partial_{\mathfrak{F}}^1 R_i$. Le lemme ci-dessous indique que tous ces choix sont consistants.

Lemme 13. La \mathfrak{F}' -largeur de $[A_0, A_k]$ est la somme des \mathfrak{F}' -largeurs des $[A_j, A_{j+1}]$, $j = 0, \dots, k-1$.

Démonstration . Pour fixer les idées, disons que $\partial_{\mathfrak{F}}^0 R_i$ s'écrit :

$[A_0, A_1] \cup [A_1, A_2] \cup [A_2, A_3]$ où $[A_1, A_2]$ est une plaque de R_1 et où $[A_2, A_3]$ est une plaque de R_2 ; disons aussi que $\varphi([A_0, A_1])$ est la somme d'une plaque de

R_3 et d'une plaque de R_4 . Il s'agit de prouver :

$$y_i = \xi y_3 + \xi y_4 + y_1 + y_2 .$$

Posons $a_{ij}^{(q)} = \text{card } \pi_0(\varphi^q(\text{int } R_i) \cap \text{int } R_j)$

$$a_{ij}^q = \text{card } \pi_0(\varphi^q(\partial_{\mathfrak{F}}^0 R_i) \cap R_j) .$$

On remarque que $a_{ij}^{(q)}$ est le coefficient (i, j) de la matrice A^q ; d'autre part, l'entier $\delta_{ij}^q = a_{ij}^q - a_{ij}^{(q)}$ est compris entre 0 et 4. En effet, $\varphi^q(\partial_{\mathfrak{F}}^0 R_i) \cap R_j$ peut contenir deux arcs de $\partial_{\mathfrak{F}} R_j$, ainsi que les deux images des extrémités de $\partial_{\mathfrak{F}}^0 R_j$, en plus des intersections des intérieurs.

Enfin, si q est assez grand pour que $\varphi^q(\partial \tau) \cap \partial \tau = \emptyset$, on a l'égalité donnée par la géométrie :

$$a_{ij}^q = a_{3j}^{q-1} + a_{4j}^{q-1} + a_{1j}^q + a_{2j}^q .$$

Donc : $\sum_j [a_{ij}^{(q)} - a_{3j}^{(q-1)} - a_{4j}^{(q-1)} - a_{1j}^{(q)} - a_{2j}^{(q)}] y_j =$

$$= \sum_j [\delta_{3j}^{q-1} + \delta_{4j}^{q-1} + \delta_{1j}^q + \delta_{2j}^q - \delta_{ij}^q] y_j .$$

Le premier membre est égal à $[y_i - \xi y_3 - \xi y_4 - y_1 - y_2] / \xi^q$; quant au second membre, il ne prend qu'un nombre fini de valeurs lorsque q varie. Cela impose au numérateur ci-dessus d'être nul. \square

On munit chaque rectangle R_i d'un système de coordonnées X^i, Y^i tel que :

$$R_i = \{ 0 \leq X^i \leq x_i, 0 \leq Y^i \leq y_i \} ,$$

et que, pour chaque segment $[A_j, A_{j+1}]$ de $\partial_{\mathfrak{F}} R_i$, la différence $Y^i(A_{j+1}) - Y^i(A_j)$ soit la largeur prescrite dans la condition C). On peut alors interpréter les rectangles comme étant un atlas qui définit le feuilletage (\mathfrak{F}', μ') , dont les plaques sont $Y = \text{constante}$ et dont la mesure transverse est $\mu' = |dY|$.

Construction d'un "difféomorphisme" .

Je vais construire un "difféomorphisme" φ' , isotope à φ , tel que $\varphi'(\mathfrak{F}, \mu) = (\mathfrak{F}, \lambda \mu)$ et $\varphi'(\mathfrak{F}', \mu') = (\mathfrak{F}', \xi \mu')$. En fait, φ' sera un difféomorphisme sur le complémentaire des singularités, mais ne pourra pas être C^1 aux singularités (voir plus loin la définition d'un "difféomorphisme pseudo-Anosov").

On définit φ' par les conditions suivantes :

$$\alpha) \varphi'(R_i) = \varphi(R_i) ;$$

$$\beta) \varphi'(X^i=c) = \varphi(X^i=c) ;$$

$\gamma)$ Soit V une composante de $R_i \cap \varphi^{-1}(R_j)$; alors $\varphi'(V \cap (Y^i=\text{const.})) \subset (Y^j=\text{const.})$;

$\delta)$ Pour $p, q \in V$, on a :

$$\xi | Y^j(\varphi'(p)) - Y^j(\varphi'(q)) | = | Y^i(p) - Y^i(q) | .$$

Lemme 14. On a $\xi = \frac{1}{\lambda}$.

Démonstration. Une fois (\mathfrak{F}, μ) et (\mathfrak{F}', μ') donnés, transverses l'un à l'autre, on a une mesure \mathfrak{m} sur M donné localement par le produit de μ et μ' . Manifestement

$$\varphi_* \mathfrak{m} = \lambda \xi \mathfrak{m} ,$$

et, comme M est compact, \mathfrak{m} est de masse totale finie et l'égalité ci-dessus n'est possible que si $\lambda \xi = 1$. \square

Remarques.

1) La mesure \mathfrak{m} est donc φ' -invariante. On peut montrer que (\mathfrak{m}, φ') est un processus de Bernoulli. En particulier, (\mathfrak{m}, φ') est ergodique (voir § VI de l'exposé 10).

2) On remarquera le contraste entre le fait qu'il n'existe pas d'espace compact X , muni d'une mesure \mathfrak{m} et d'un homéomorphisme ψ tel que $\psi_* \mathfrak{m} = \lambda \mathfrak{m}$, $\lambda \neq 1$, et le fait qu'il existe une variété compacte, munie d'un feuilletage mesuré (\mathfrak{F}, μ) et d'un difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow M$ tel que $\varphi(\mathfrak{F}, \mu) = (\mathfrak{F}, \lambda \mu)$, $\lambda \neq 1$.

Au niveau de "l'espace non-commutatif" qu'est l'ensemble des feuilles de \mathfrak{F} , muni de μ , ceci est justement un "homéomorphisme" comme ci-dessus. Une telle situation "paradoxale" n'arrive que pour un spectre "discret" de valeurs λ satisfaisant à certaines conditions "arithmétiques" .

"Difféomorphisme" pseudo-Anosov.

Par définition, un "difféomorphisme" $\varphi : M \rightarrow M$ est pseudo-Anosov, s'il existe deux feuilletages mesurés invariants, mutuellement transverses, (\mathfrak{F}^S, μ^S) et (\mathfrak{F}^U, μ^U) et un $\lambda > 1$, tels que :

$$\varphi(\mathfrak{F}^S, \mu^S) = (\mathfrak{F}^S, \frac{1}{\lambda} \mu^S)$$

$$\varphi(\mathfrak{F}^U, \mu^U) = (\mathfrak{F}^U, \lambda \mu^U) .$$

On appelle \mathfrak{F}^S (resp. \mathfrak{F}^U) le feuilletage stable (resp. instable) ; le difféomorphisme est contractant sur les feuilles du feuilletage stable, où les longueurs sont mesurés par μ^U .

Du point de vue de la "lissité", un "difféomorphisme" pseudo-Anosov est un vrai difféomorphisme sur $M - \text{Sing } \mathfrak{F}$; mais il n'est jamais C^1 aux singularités. Bien entendu, aux singularités, il y a, topologiquement parlant, des modèles locaux canoniques du pseudo-Anosov, provenant des différentielles quadratiques.

On vient de prouver le lemme ci-dessous.

Lemme 15. Si le difféomorphisme φ vérifie les conditions du cas III, § I, c'est-à-dire s'il existe un feuilletage mesuré arationnel (\mathfrak{F}, μ) et $\lambda \neq 1$ tel que $\varphi(\mathfrak{F}, \mu) \sim_m(\mathfrak{F}, \lambda \mu)$, alors φ est isotope à un "difféomorphisme" pseudo-Anosov.

Remarque. L'hypothèse que \mathfrak{F} est arationnel est essentielle. Il résulte de l'existence de difféomorphisme pseudo-Anosov sur une variété à bord, que sur la variété fermée M (de genre > 1) il existe un feuilletage mesuré (\mathfrak{F}, μ) ayant un cycle de feuilles et un difféomorphisme φ vérifiant $\varphi(\mathfrak{F}, \mu) \sim_m(\mathfrak{F}, \lambda \mu)$ avec $\lambda \neq 1$. Comme on le verra, ce φ n'est pas isotope à un difféomorphisme pseudo-Anosov de M .

Théorème. Soit φ un difféomorphisme d'une surface fermée de genre > 1 . A isotope près, φ est dans l'une des situations suivantes :

- 1) Isométrie pour une structure hyperbolique,
- 2) "Réductible" (c'est-à-dire que φ conserve un système de courbes simples mutuellement disjointes et non homotopes à zéro),
- 3) Pseudo-Anosov.

Les situations 1) et 3) (resp. 2) et 3)) sont mutuellement exclusives.

Une fois qu'on aura esquissé la théorie à bord non vide (exposé 11), on pourra écrire que φ est isotope à φ' , pour lequel il existe une décomposition $M = M_1 \cup \dots \cup M_n$ en surfaces à bord d'intérieurs disjoints, telle que $\varphi'(M_i) = M_i$ et que $\varphi'|_{M_i}$ soit isotope (comme difféomorphisme de M_i , le bord étant libre) à une isométrie hyperbolique ou à un difféomorphisme pseudo-Anosov. Bien entendu, cette décomposition ne peut rendre compte du "twist" de Dehn que fait φ' dans un voisinage collier des courbes le long desquelles sont recollées les M_i .

Démonstration. Le théorème de classification est complètement démontré ; il ne reste à prouver que les exclusions.

L'égalité $\varphi(\mathfrak{F}, \mu) = (\mathfrak{F}, \lambda \mu)$ avec $\lambda \neq 1$ interdit à la classe d'isotopie de φ d'être périodique ; d'où l'incompatibilité 1) - 3) .

Supposons que φ conserve un élément de Λ^1 ; quitte à remplacer φ par une de ces puissances, on peut supposer que φ , pseudo-Anosov, conserve la classe d'isotopie d'une courbe γ . On a donc :

$$I(\mathfrak{F}^S, \mu^S ; [\gamma]) = \lambda I(\mathfrak{F}^S, \mu^S ; [\varphi(\gamma)]) = \lambda I(\mathfrak{F}^S, \mu^S ; [\gamma]) .$$

On en déduit que $I(\mathfrak{F}^S, \mu^S ; [\gamma]) = 0$. D'après l'exposé 5 , il y a un feuilletage équivalent à \mathfrak{F}^S , possédant un cycle (non trivial) de feuilles . Vu que \mathfrak{F}^S est arationnel, ceci est une contradiction. \square

Remarque. Les relations d'incompatibilité sont en fait conséquence de la dynamique d'un pseudo-Anosov sur l'espace de Teichmüller complété : il n'y a que deux points fixes représentés par les feuilletages stable et instable, qui sont respectivement attracteur et répulseur (voir exposé 12) .

§ VI. - QUELQUES PROPRIÉTÉS DES DIFFÉOMORPHISMES PSEUDO-ANOSOV

Lemme 16. Les feuilletages stable et instable d'un pseudo-Anosov n'ont pas de liaisons entre les singularités ; ce sont donc des modèles canoniques pour des classes de feuilletages arationnels .

Démonstration. Considérant le cas où le difféomorphisme laisse fixes les singularités, une telle liaison devrait être contractée ou dilatée, ce qui est impossible. \square

Proposition 17. Si U est un ouvert non vide, invariant par un difféomorphisme pseudo-Anosov, alors U est dense.

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où le difféomorphisme φ laisse fixes les singularités des feuilletages stable et instable . Soit F une séparatrice du feuilletage stable, issue d'une singularité s . Puisque F est dense dans M , il existe un segment J de F contenu dans U . Soient a et b les extrémités de J ; les suites $\varphi^n(a)$ et $\varphi^n(b)$ convergent vers s . Soit T une plaque de \mathfrak{F}^U contenue dans U et coupant J

en un point ; $\varphi^n(T)$ va s'allonger du point de vue de la mesure transverse du feuilletage stable et s'approcher des deux séparatrices F' et F'' du feuilletage instable, qui limitent les secteurs adjacents à F (figure 6) . Précisément $F' \cup F''$ est contenu dans l'adhérence de $\bigcup_{n \geq 0} \varphi^n(T)$. Donc \bar{U} contient une séparatrice de \mathfrak{F}^u toute entière . Une séparatrice est dense, donc \bar{U} est dense. \square

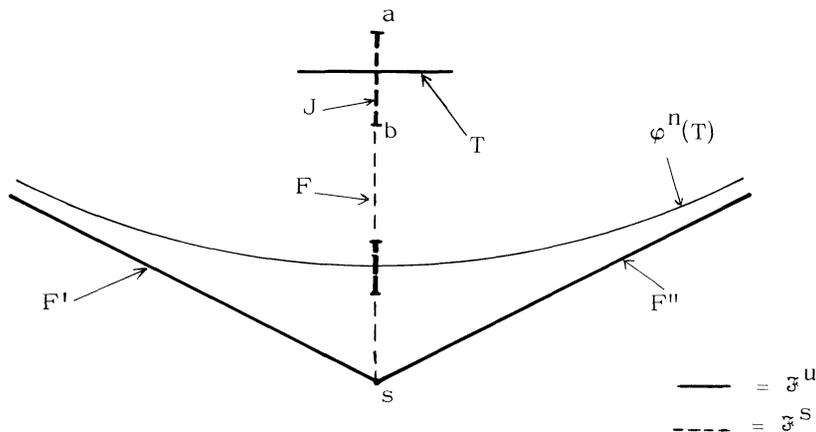


Figure 6

Corollaire. Un difféomorphisme pseudo-Anosov est topologiquement transitif (il existe une orbite dense).

Démonstration. Soit $\{U_i\}$ une base dénombrable d'ouverts. L'intersection $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} (\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^n(U_i))$ est non vide (Baire). Tout point de l'intersection a une orbite dense. \square

Proposition 18. Les points périodiques d'un difféomorphisme pseudo-Anosov sont denses.

Démonstration (c'est la même que celle d'Anosov pour les difféomorphismes du même nom). Les points singuliers sont périodiques. Soient $x_0 \in M$ un point régulier et U un rectangle adapté aux feuilletages \mathfrak{F}^s et \mathfrak{F}^u , voisinage de x_0 . Soit V un autre rectangle voisinage de x_0 , fortement inclus dans U (figure 7). Comme le difféomorphisme φ laisse invariante une mesure qui charge tous les ouverts non vides (donnée localement par le produit de μ^s et μ^u), le principe de récurrence de Poincaré [1 ; p. 7] s'applique : quel que soit n_0 , il existe $n \geq n_0$, tel que $\varphi^n(V) \cap V \neq \emptyset$.

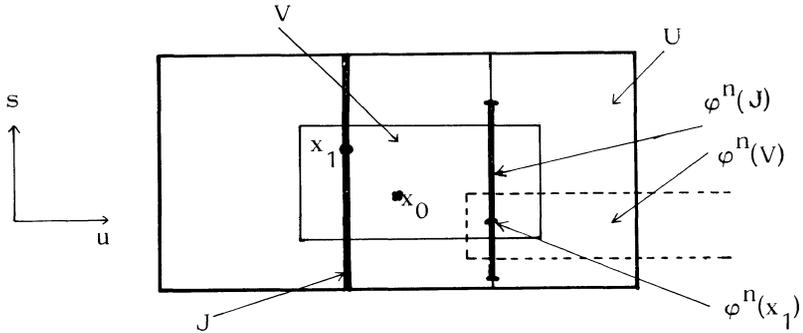


Figure 7

Soit x_1 un point de V tel que $\varphi^n(x_1) \in V$. Soit J la \mathfrak{F}^S -plaque de U passant par x_1 ; on a :

$$\mu^u(\varphi^n(J)) = \lambda^{-n} \mu^u(J)$$

où λ est le facteur de dilatation de φ . On voit que si n_0 est choisi assez grand (U et V étant donnés), on pourra assurer que $\varphi^n(J)$ est contenu dans U .

En identifiant $\varphi^n(J)$ à un intervalle de J , l'identification étant donnée en suivant les \mathfrak{F}^u -plaques, on voit que φ^n a un "point fixe dans J ", ce qui veut dire qu'il existe un point x_2 de J dont la \mathfrak{F}^u -feuille est invariante par φ^n .

Soit L la \mathfrak{F}^u -plaque de x_2 ; si n_0 est choisi assez grand, on est sûr que $\varphi^n(L)$ contient L puisque $\varphi^n(L)$ et L ont déjà $\varphi^n(x_2)$ en commun (cette nouvelle condition sur n_0 ne dépend que des μ^S -largeurs de U et V). Donc, il y a un point fixe pour $\varphi^n|_L$. \square

Proposition 19. Soient g une métrique riemannienne sur M et $\alpha \in \mathcal{A}$; on note $\ell_g(\alpha)$ la longueur d'une géodésique minimisante de la classe α . Soit φ un difféomorphisme pseudo-Anosov de M , de rapport de dilatation λ ($\lambda > 1$); la classe d'isotopie de $\varphi(\alpha)$ est bien définie. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ell_g(\varphi^n(\alpha))} = \lambda.$$

Démonstration. Si (\mathfrak{F}^S, μ^S) et (\mathfrak{F}^u, μ^u) sont les feuilletages stable et instable de φ , on peut définir la "métrique" $\mu = \sqrt{(\mu^S)^2 + (\mu^u)^2}$; celle-ci provient d'une "norme singulière" du fibré tangent, dont les zéros sont les singularités des feuilletages invariants. Notons au passage que la métrique μ est plate dans le complémentaire des singularités et que la courbure est constituée de masses de Dirac aux singularités. Soit

c une courbe dans la classe α . On a :

$$I(\mathcal{F}^S, \mu^S; \alpha) \leq \ell_\mu(\alpha) \leq \int_C d\mu^S + \int_C d\mu^u$$

et
$$I(\mathcal{F}^S, \mu^S; \varphi^n(\alpha)) \leq \ell_\mu(\varphi^n(\alpha)) \leq \int_{\varphi^n(c)} d\mu^S + \int_{\varphi^n(c)} d\mu^u ;$$

par les propriétés de φ , il vient :

$$\lambda^n I(\mathcal{F}^S, \mu^S; \alpha) \leq \ell_\mu(\varphi^n(\alpha)) \leq \lambda^n \int_C d\mu^S + \lambda^{-n} \int_C d\mu^u .$$

Comme on l'a vu dans la preuve du théorème de classification, $I(\mathcal{F}^S, \mu^S; \alpha) \neq 0$.

Donc $\lim \sqrt[n]{\ell_\mu(\varphi^n(\alpha))} = \lambda$. La fin de la démonstration découle du lemme 20. \square

Lemme 20. Il existe des constantes K et $k > 0$ telles que, pour toute classe de lacets α ,

$$k \leq \frac{\ell_g(\alpha)}{\ell_\mu(\alpha)} \leq K .$$

Démonstration (A. Douady). Soient a_1, \dots, a_q les singularités de μ ; soit $D(a, \rho)$ la boule de centre a et de rayon ρ pour la métrique μ . Choisissons ρ assez petit pour que les boules $D(a_1, 2\rho)$ soient disjointes. Dans le complémentaire des boules de rayon $\rho/2$, les deux métriques proviennent de normes dans le fibré tangent; donc il existe des constantes K' et $k' > 0$, telles que, pour tout arc rectifiable β , on ait :

$$(1) \quad k' \leq \frac{L_g(\beta)}{L_\mu(\beta)} \leq K' ,$$

où L_g (resp. L_μ) désigne la longueur géométrique.

D'autre part, il existe des constantes K'' et $k'' > 0$ telles que, pour tout $x, y \in \partial D(a_1, \rho)$, on ait :

$$(2) \quad k'' \leq \frac{d_g(x, y)}{d_\mu(x, y)} \leq K'' .$$

En effet, si x et y sont assez proches, l'inégalité (1) s'applique; en revanche, si on interdit à (x, y) un voisinage de la diagonale, le quotient ci-dessus est défini, continu et > 0 sur un compact. Dans les deux cas, l'inégalité (2) est claire.

On prend $k = \inf(k', k'')$ et $K = \sup(K', K'')$. Ces constantes dépendent du choix du rayon ρ . On prend celui-ci assez petit pour que, pour tout $x, y \in \partial D(a_1, \rho)$, la plus courte g -géodésique joignant x à y soit homotope à zéro dans $\pi_1(M, D(a_1, \rho))$.

EXPOSÉ 9

Soient c_1 une μ -géodésique minimisante de la classe α et c_1' le lacet obtenu en remplaçant chaque passage de c_1 dans les $D(a_1, \rho)$ par la g -géodésique joignant le point d'entrée au point de sortie (un passage est une composante connexe de $c_1^{-1}(D)$). On a alors :

$$K \ell_{\mu}(\alpha) \leq L_g(c_1') \leq K \ell_{\mu}(\alpha) .$$

D'où l'on déduit, $\ell_g(\alpha) \leq K \ell_{\mu}(\alpha)$. Pour obtenir l'autre inégalité, on part d'une g -géodésique minimisante c_2 et on remplace ses passages dans les boules par des arcs μ -géodésiques. \square

RÉFÉRENCE

- [1] Y. SINAI , Introduction to ergodic theory, Math. Notes, Princeton University Press, Princeton, 1976.

Astérisque

A. FATHI

M. SHUB

Some dynamics of pseudo-Anosov diffeomorphisms

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 181-207

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__181_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOME DYNAMICS OF PSEUDO-ANOSOV DIFFEOMORPHISMS

by A. FATHI and M. SHUB

- § I. - Topological entropy
- § II. - The fundamental group
- § III. - Subshifts of finite type
- § IV. - The entropy of pseudo-Anosov diffeomorphisms
- § V. - Construction of Markov partitions for pseudo-Anosov diffeomorphisms
- § VI. - Pseudo-Anosov diffeomorphisms are Bernoulli.

We prove in this "exposé" that a pseudo-Anosov diffeomorphism realizes the minimum of topological entropy in its isotopy class. In section I, we define topological entropy and give its elementary properties. In section II, we define the growth of an endomorphism of a group and show that the topological entropy of a map is greater than the growth of the endomorphism it induces on the fundamental group. In section III, we define subshifts of finite type and give some of their properties. In section IV, we prove that the topological entropy of a pseudo-Anosov diffeomorphism is the growth rate of the automorphism induced on the fundamental group, it is also $\log \lambda$, where $\lambda > 1$ is the stretching factor of f on the unstable foliation. In section V, we prove the existence of a Markov partition for a pseudo-Anosov diffeomorphism, this fact is used in section IV. In section VI, we show that a pseudo-Anosov map is Bernoulli.

§ I. - TOPOLOGICAL ENTROPY

Topological entropy was defined to be a generalization of measure theoretic entropy [1]. In some sense, entropy is a number (possibly infinite) which describes "how much" dynamics a map has. Here the emphasis, of course, must be on asymptotic behaviour. For example, if $f : X \rightarrow X$ is a map and $N_n(f)$ is the cardinality of the fixed point set of f^n , then $\limsup \frac{1}{n} \log N_n(f)$ is one measure of "how much" dynamics f has; but, if we consider $f \times R_\theta : X \times T^1 \rightarrow X \times T^1$ to be $(f \times R_\theta)(x, \alpha) = (f(x), \theta + \alpha)$ where $T^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ and θ is irrational, then $N_n(f \times R_\theta) = 0$, and yet $f \times R_\theta$ should have at least as "much" dynamics as f . Topological entropy is a topological invariant which overcomes this difficulty.

We describe a lot of material frequently without crediting authors.

Definitions. Let $f : X \rightarrow X$ be a continuous map of a compact topological space X . Let $\mathcal{U} = \{A_i\}_{i \in I}$ and $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j \in J}$ be open covers of X , the open cover $\{A_i \cap B_j\}_{i \in I, j \in J}$ will be denoted by $\mathcal{U} \vee \mathcal{B}$. If \mathcal{U} is a cover, $N_n(f, \mathcal{U})$ denotes the minimum cardinality of a subcover of $\mathcal{U} \vee f^{-1}\mathcal{U} \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathcal{U}$, and $h(f, \mathcal{U}) = \limsup \frac{1}{n} \log N_n(f, \mathcal{U})$. The topological entropy of f is $h(f) = \sup_{\mathcal{U}} h(f, \mathcal{U})$ where the supremum is taken over all open covers of X .

Proposition. Let X and Y be compact spaces. Let $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ and $h : X \rightarrow Y$ be continuous. Suppose that h is surjective and $hf = gh$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array} ;$$

then, $h(f) \geq h(g)$.

In particular, if h is a homeomorphism, $h(f) = h(g)$. So topological entropy is a topological invariant.

Proof. Pull back the open covers of Y to open covers of X . □

For metric spaces, compact or not, Bowen has proposed the following definition. Suppose $f : X \rightarrow X$ is a continuous map of a metric space X and suppose

$K \subset X$ is compact. Let ϵ be > 0 . We say that a set $E \subset K$ is (n, ϵ) -separated if, given $x, y \in E$ with $x \neq y$, there is $0 \leq i < n$ such that $d(f^i(x), f^i(y)) \geq \epsilon$. We let $s_K(n, \epsilon)$ be the maximal cardinality of an (n, ϵ) -separated set contained in K . We say that the set E is (n, ϵ) -spanning for K if, given $y \in K$, there is an $x \in E$ such that $d(f^i(x), f^i(y)) < \epsilon$ for each i with $0 \leq i < n$. We let $r_K(n, \epsilon)$ be the minimal cardinality of an (n, ϵ) -spanning set contained in K . It is easy to see that $r_K(n, \epsilon) \leq s_K(n, \epsilon) \leq r_K(n, \frac{\epsilon}{2})$. We let $\bar{s}_K(\epsilon) = \limsup \frac{1}{n} \log s_K(n, \epsilon)$ and $\bar{r}_K(\epsilon) = \limsup \frac{1}{n} \log r_K(n, \epsilon)$. Obviously, $\bar{s}_K(\epsilon)$ and $\bar{r}_K(\epsilon)$ are decreasing functions of ϵ , and $\bar{r}_K(\epsilon) \leq \bar{s}_K(\epsilon) \leq \bar{r}_K(\frac{\epsilon}{2})$. Hence, we may define $h_K(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{s}_K(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{r}_K(\epsilon)$. Finally, we put $h_X(f) = \sup \{h_K(f) \mid K \text{ compact } \subset X\}$.

Proposition [2], [4]. If X is a compact metric space and $f: X \rightarrow X$ is continuous, then $h_X(f) = h(f)$.

The proof is rather straightforward. By the Lebesgue covering lemma, every open cover has a refinement which consists of ϵ -balls.

The number $h_X(f)$ depends on the metric on X and makes best sense for uniformly continuous maps.

Suppose that X and Y are metric spaces, we say that $p: X \rightarrow Y$ is a metric covering map if it is surjective and satisfies the following condition: there exists $\epsilon > 0$ such that, for any $0 < \delta < \epsilon$, any $y \in Y$ and any $x \in p^{-1}(y)$, the map $p: B_\delta(x) \rightarrow B_\delta(y)$ is a bijective isometry (here $B_\delta(\cdot)$ is the δ -ball).

The main example we have in mind is the universal covering $p: \tilde{M} \rightarrow M$ of a compact differentiable manifold M .

Proposition. Suppose $p : X \rightarrow Y$ is a metric covering and $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ are uniformly continuous. If $pf = gp$, then $h_X(f) = h_Y(g)$.

Proof. It should be an easy estimate. The clue is that for $\ell > 0$ and for any sequence a_n , we have $\limsup \frac{1}{n} \log(\ell a_n) = \limsup \frac{1}{n} \log a_n$. If $K \subset X$ and $K' \subset Y$ are compact and $p(K) = K'$, then there is a number $\ell > 0$ such that $[\text{cardinality } p^{-1}(y)] \leq \ell$ for all $y \in K'$. In fact, we may choose ℓ such that, if $\delta > 0$ is small enough, then $p^{-1}(B_\delta(y)) \cap K$ can be covered by at most ℓ δ -balls centered at points in $p^{-1}(B_\delta(y)) \cap K$.

By the uniform continuity of f , we can find a $\delta_0 (< \epsilon)$ such that $x, x' \in X$ and $d(x, x') < \delta_0$ implies $d(f(x), f(x')) < \epsilon$, where $\epsilon > 0$ is the one given in the definition of a metric covering. If $2\delta < \delta_0$, it is easy to see that if $E' \subset K'$ is an (n, δ) -spanning set for g , then there exists an $(n, 2\delta)$ -spanning set $E \subset K$ for f , such that $\text{card } E \leq \ell \text{card } E'$. So, we have $r_K(n, 2\delta) \leq \ell r_{K'}(n, \delta)$, hence $\bar{r}_K(f, 2\delta) \leq \bar{r}_{K'}(g, \delta)$ and $h_K(f) \leq h_{K'}(g)$.

On the other hand, if $E \subset K$ is (n, η) -spanning (with $0 < \eta < \epsilon$) then $p(E) \subset K'$ is (n, η) -spanning. So $r_{K'}(n, \eta) \leq r_K(n, \eta)$, hence $h_{K'}(g) \leq h_K(f)$. Consequently $h_K(f) = h_{K'}(g)$. Since we sup over all compact sets and since p is surjective, we obtain $h_X(f) = h_Y(g)$. \square

We add one additional fact.

Proposition. If X is compact and $f : X \rightarrow X$ is a homeomorphism, then $h(f^n) = |n| h(f)$.

For a proof, see [1] or [2].

§ II. - THE FUNDAMENTAL GROUP

Given a finitely generated group G and a finite set of generators

$\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_r\}$ of G , we define the length of an element g of G by $L_{\mathcal{G}}(g) =$ minimum length of a word in the g_i 's and the g_i^{-1} 's representing the element g .

It is easy to see that if $\mathcal{G}' = \{g'_1, \dots, g'_s\}$ is another set of generators, then :

$$L_{\mathcal{G}}(g) \leq (\max L_{\mathcal{G}}(g'_i)) L_{\mathcal{G}'}(g) .$$

If $A : G \rightarrow G$ is an endomorphism, let :

$$\gamma_A = \sup_{g \in G} \limsup \frac{1}{n} \log L_{\mathcal{G}}(A^n g) = \sup_{g_i \in \mathcal{G}} \limsup \frac{1}{n} \log L_{\mathcal{G}}(A^n g_i) .$$

So γ_A is finite and by the inequality given above, γ_A does not depend on the set of generators.

Proposition 1. If $A : G \rightarrow G$ is an endomorphism and $g \in G$, define $gAg^{-1} : G \rightarrow G$ by $[gAg^{-1}](x) = gA(x)g^{-1}$. We have $\gamma_A = \gamma_{gAg^{-1}}$.

Caution : $(gAg^{-1})^n \neq gA^n g^{-1}$.

First, we need a lemma.

Lemma 1. Let $(a_n)_{n \geq 1}$ and $(b_n)_{n \geq 1}$ be two sequences with a_n and $b_n \geq 0$ and k be > 0 . We have :

- i) $\limsup \frac{1}{n} \log(a_n + b_n) = \max(\limsup \frac{1}{n} \log a_n, \limsup \frac{1}{n} \log b_n)$
- ii) $\limsup \frac{1}{n} \log k a_n = \limsup \frac{1}{n} \log a_n$
- iii) $\limsup \frac{1}{n} \log a_n \leq \limsup \frac{1}{n} \log(a_1 + \dots + a_n) \leq \max(0, \limsup \frac{1}{n} \log a_n)$

Proof. Put $a = \limsup \frac{1}{n} \log a_n$ and $b = \limsup \frac{1}{n} \log b_n$.

- i) The inequality $\max(a, b) \leq \limsup \frac{1}{n} \log(a_n + b_n)$ is clear.

If $c > \max(a, b)$, then we can find $n_0 \geq 1$ such that $n \geq n_0$ implies $a_n \leq e^{nc}$ and $b_n \leq e^{nc}$. We obtain for $n \geq n_0$:

$$\frac{1}{n} \log(a_n + b_n) \leq \frac{1}{n} \log(2e^{nc}).$$

Hence $\limsup \frac{1}{n} \log(a_n + b_n) \leq \limsup \frac{1}{n} \log(2e^{nc}) = c$.

ii) is clear.

iii) The inequality $a \leq \limsup \frac{1}{n} \log(a_1 + \dots + a_n)$ is clear.

Suppose $c > \max(0, a)$. We can find then $n_0 \geq 1$ such that $a_n \leq e^{nc}$ for $n \geq n_0$. We have for $n \geq n_0$:

$$a_1 + \dots + a_n \leq \sum_{i=1}^{n_0-1} a_i + \frac{e^{(n+1-n_0)c} - 1}{e^c - 1} e^{n_0 c}.$$

It follows clearly that $\limsup \frac{1}{n} \log(a_1 + \dots + a_n) \leq c$. \square

Proof of Proposition 1. If $x \in G$, we have:

$$(gAg^{-1})^n(x) = gA(g) \dots A^{n-1}(g)A^n(x)A^{n-1}(g^{-1}) \dots A(g^{-1})g^{-1}.$$

Suppose first that $A^{n_0}(g) = e$ for some n_0 , then it is clear that by lemma 1 i) :

$$\limsup \frac{1}{n} \log L_{\mathbb{C}}[(gAg^{-1})^n(x)] \leq \limsup \frac{1}{n} \log L_{\mathbb{C}}(A^n(x)).$$

If $A^n(g) \neq e$ for each $n \geq 1$, we have $L_{\mathbb{C}}(A^n(g)) \geq 1$, for each $n \geq 1$; hence $\limsup \frac{1}{n} \log L_{\mathbb{C}}(A^n(g)) \geq 0$. By lemma 1 i) & iii), we obtain:

$$\begin{aligned} \limsup \frac{1}{n} \log L_{\mathbb{C}}[(gAg^{-1})^n(x)] \\ \leq \max(\limsup \frac{1}{n} \log L_{\mathbb{C}}(A^n(g)), \limsup \frac{1}{n} \log L_{\mathbb{C}}(A^n(x))). \end{aligned}$$

This gives us $\gamma_{gAg^{-1}} \leq \gamma_A$, and by symmetry, we have $\gamma_{gAg^{-1}} = \gamma_A$. \square

For a compact connected differentiable manifold, we interpret $\pi_1(M)$ as the group of covering transformations of the universal covering space \tilde{M} of M . If $f: M \rightarrow M$ is continuous, then there is a lifting $\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$. If \tilde{f}_1 and \tilde{f}_2 are both liftings of f , then $\tilde{f}_1 = \theta \tilde{f}_2$ for some covering transformation θ . A given lifting \tilde{f}_1 determines an endomorphism $\tilde{f}_{1\#}$ of $\pi_1(M)$ by the formula $\tilde{f}_1 \alpha = \tilde{f}_{1\#}(\alpha) \tilde{f}_1$ for any covering transformation α . If \tilde{f}_1 and \tilde{f}_2 are two liftings of f , then $\tilde{f}_1 = \theta \tilde{f}_2$ for some covering transformation θ and $\tilde{f}_1 \alpha = \theta \tilde{f}_2 \alpha = \theta \tilde{f}_{2\#}(\alpha) \tilde{f}_2 = \theta \tilde{f}_{2\#}(\alpha) \theta^{-1} \tilde{f}_1$, so $\tilde{f}_{1\#} = \theta \tilde{f}_{2\#} \theta^{-1}$ and $\gamma_{\tilde{f}_{1\#}} = \gamma_{\tilde{f}_{2\#}}$. Thus, we may define $\gamma_{f\#} = \gamma_{\tilde{f}\#}$ for any lifting $\tilde{f}: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ of f . If f has a fixed point $m_0 \in M$, then there is also a map $f_{\#}: \pi_1(M, m_0) \rightarrow \pi_1(M, m_0)$. The group $\pi_1(M, m_0)$ is isomorphic to the group of covering transformations of \tilde{M} and f may be lifted to \tilde{f} such that $\tilde{f}_{\#}: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(M)$ is identified with $f_{\#}: \pi_1(M, m_0) \rightarrow \pi_1(M, m_0)$ by this isomorphism. Thus $\gamma_{f\#}$ makes coherent sense in the case that f has a fixed point as well.

We suppose now that M has a Riemannian metric and we put on \tilde{M} a Riemannian metric by lifting the metric on M via the covering map $p: \tilde{M} \rightarrow M$. The map p is then a metric covering and the covering transformations are isometries. We have the following lemma due to Milnor [8].

Lemma 2. Fix $x_0 \in \tilde{M}$. There exist two constants $c_1, c_2 > 0$ such that for each $g \in \pi_1(M)$, we have :

$$c_1 L_{\mathcal{C}}(g) \leq d(x_0, gx_0) \leq c_2 L_{\mathcal{C}}(g) .$$

Proof [8]. Let $\delta = \text{diam } M$, and define $N \subset \tilde{M}$ by $N = \{x \in \tilde{M} \mid d(x, x_0) \leq \delta\}$. We have $p(N) = M$. Remark that $\{gN\}_{g \in \pi_1(M)}$ is a locally finite covering of \tilde{M} by compact sets. Choose as a finite set of generators $\mathcal{C} = \{g \in \pi_1(M) \mid gN \cap N \neq \emptyset\}$ and notice that $g \in \mathcal{C} \iff g^{-1} \in \mathcal{C}$. Suppose $L_{\mathcal{C}}(g) = n$, then we can write $g = g_1 \dots g_n$, with $g_i N \cap N \neq \emptyset$. It is easy to see then that $d(x_0, gx_0) \leq 2 \delta n$. Hence, we obtain :

$$d(x_0, gx_0) \leq 2 \delta L_{\mathbb{C}}(g) .$$

Now, put $\nu = \min \{d(N, gN) \mid N \cap gN = \emptyset\}$, by compactness $\nu > 0$. Let k be the minimal integer such that $d(x_0, gx_0) < k\nu$. Along the minimizing geodesic from x_0 to gx_0 , take $k + 1$ points $y_0 = x_0$, $y_1 \cdots y_{k-1}$, $y_k = gx_0$, such that $d(y_i, y_{i+1}) < \nu$ for $i = 0, \dots, k-1$. Then, for $1 \leq i \leq k-1$, choose $y'_i \in N$ and $g_i \in G$ such that $y_i = g_i y'_i$, and put $g_0 = e$ and $g_k = g$. We have $d(g_i y'_i, g_{i+1} y'_{i+1}) < \nu$, hence $g_i^{-1} g_{i+1} \in \mathbb{C}$. From $g = (g_0^{-1} g_1) \cdots (g_{k-1}^{-1} g_k)$, we obtain $L_{\mathbb{C}}(g) \leq k$.

Since k is minimal, we have :

$$L_{\mathbb{C}}(g) \leq \frac{1}{\nu} d(x_0, gx_0) + 1 \leq \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu} \right) d(x_0, gx_0)$$

where $\mu = \min \{d(x_0, g x_0) \mid g \neq e, g \in \pi_1(M)\}$. \square

Consider now $f : M \rightarrow M$ and let $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ be a lifting of f . Applying the lemma above, we obtain, for each $x_0 \in \tilde{M}$:

$$\gamma_{\tilde{f}\#} = \max_{g \in \pi_1(M)} \limsup \frac{1}{n} \log d(x_0, \tilde{f}\#^n(g)x_0) .$$

We next prove the following lemma :

Lemma 3. Given $x, y \in \tilde{M}$, we have :

$$\limsup \frac{1}{n} \log d(\tilde{f}^n(x), \tilde{f}^n(y)) \leq h(f) .$$

Proof. Choose an arc α from x to y . If $y_1, \dots, y_\ell \in \alpha$ is $(n+1, \epsilon)$ -spanning for α and \tilde{f} , then $\tilde{f}^n(\alpha) \subset \bigcup_{i=1}^{\ell} B(\tilde{f}^n(y_i), \epsilon)$. Since $\tilde{f}^n(\alpha)$ is connected, this implies $\text{diam } \tilde{f}^n(\alpha) \leq 2 \epsilon \ell$. Hence :

$$d(\tilde{f}^n(x), \tilde{f}^n(y)) \leq 2 \epsilon \ell .$$

By taking ℓ to be minimal, we obtain :

$$d(\tilde{f}^n(x), \tilde{f}^n(y)) \leq 2 \epsilon r_{\alpha}(n+1, \epsilon) .$$

From this, we get :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log d(\tilde{f}^n(x), \tilde{f}^n(y)) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log [2 \epsilon r_\alpha(n+1, \epsilon)] = \bar{r}_\alpha(\epsilon) \leq \\ &\leq h_\alpha(\tilde{f}) \leq h(\tilde{f}) = h(f) . \quad \square \end{aligned}$$

We are now ready to prove :

Theorem. If $f : M \rightarrow M$ is a continuous map, then :

$$h(f) \geq \gamma_{f_\#} .$$

Proof. Since $\gamma_{f_\#} = \max_{g \in \pi_1(M)} [\limsup \frac{1}{n} \log d(x_0, \tilde{f}_\#^n(g)x_0)]$, we have to prove that for each $g \in \pi_1(M)$:

$$\limsup \frac{1}{n} \log d(x_0, \tilde{f}_\#^n(g)x_0) \leq h(f) .$$

We have :

$$d(x_0, \tilde{f}_\#^n(g)x_0) \leq d(x_0, \tilde{f}^n(x_0)) + d(\tilde{f}^n(x_0), \tilde{f}_\#^n(g)\tilde{f}^n(x_0)) + d(\tilde{f}_\#^n(g)\tilde{f}^n(x_0), \tilde{f}_\#^n(g)x_0) .$$

Since $\tilde{f}_\#^n(g)\tilde{f}^n = \tilde{f}^n g$, and the covering transformations are isometries, we obtain :

$$d(x_0, \tilde{f}_\#^n(g)x_0) \leq 2d(x_0, \tilde{f}^n(x_0)) + d(\tilde{f}^n(x_0), \tilde{f}^n(gx_0)) .$$

Remark also that :

$$d(x_0, \tilde{f}^n(x_0)) \leq d(x_0, \tilde{f}(x_0)) + d(\tilde{f}(x_0), \tilde{f}^2(x_0)) + \dots + d(\tilde{f}^{n-1}(x_0), \tilde{f}^n(x_0)) .$$

By applying lemma 3 and lemma 1 (together with the fact $h(f) \geq 0$), we obtain :

$$\limsup \frac{1}{n} \log d(x_0, \tilde{f}_\#^n(g)x_0) \leq h(f) . \quad \square$$

The proof of the following lemma is straight forward.

Lemma. If G_1 and G_2 are finitely generated groups, if $A : G_1 \rightarrow G_1$, $B : G_2 \rightarrow G_2$

and $p : G_1 \rightarrow G_2$ are homomorphisms with p surjective and $pA = Bp$:

$$\begin{array}{ccccc}
 G_1 & \xrightarrow{p} & G_2 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow A & & \downarrow B & & \\
 G_1 & \xrightarrow{p} & G_2 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

then , $\gamma_A \geq \gamma_B$.

Applying this lemma to the fundamental group of M mod the commutator subgroup, we have :

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1(M) & \longrightarrow & H_1(M) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{1*} & & \\
 \pi_1(M) & \longrightarrow & H_1(M) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

so we obtain Manning's theorem [5] .

Theorem. If $f : M \rightarrow M$ is continuous, then $h(f) \geq \gamma_{f_{1*}} = \max \log \lambda$, where λ ranges over the eigenvalues of f_{1*} .

Remark 1. For $\alpha \in \pi_1(M, m_0)$, we denote by $[\alpha]$ the class of loops freely homotopic to α . If M has a Riemannian metric, let $\ell([\alpha])$ be the minimum length of a (smooth) loop in this class. If $f : M \rightarrow M$ is continuous, $f[\alpha]$ is clearly well defined as a free homotopy class of loops. Let $G_f([\alpha]) = \limsup_n \frac{1}{n} \log[\ell(f^n[\alpha])]$ and let $G_f = \sup_{\alpha} G_f([\alpha])$.

It is not difficult to see that $G_f \leq \gamma_{f_{\#}}$. In fact, we have $\ell(f^n[\alpha]) \leq d(x_0, \tilde{f}_{\#}^n(\alpha)x_0)$, since the minimizing geodesic from x_0 to $\tilde{f}_{\#}^n(\alpha)x_0$ has an image in M which represents $f^n[\alpha]$.

Remark 2. It occured to various people that Manning's theorem is a theorem about π_1 .

Among these are Bowen, Gromov and Shub. Manning's proof can be adapted. The proof above is more like Gromov [4] or Bowen [2], but we take responsibility for any error. At first, we assumed that f had a periodic point or we worked with G_f . After reading Bowen's proof [3], we eliminated the necessity for a periodic point.

Remark 3. If $x \in M$ and ρ is a path joining x to $f(x)$, we call $\rho_{\#}$ the homomorphism $\pi_1(M, f(x)) \rightarrow \pi_1(M, x)$. Since $f_{\#} : \pi_1(M, x) \rightarrow \pi_1(M, f(x))$, the composition $\rho_{\#} f_{\#} [\gamma] \longmapsto [\rho^{-1} \gamma \rho]$ is a homomorphism of $\pi_1(M, x)$ into itself. This homomorphism can be identified with $\tilde{f}_{\#}$ for a lifting \tilde{f} of f . Thus our result is the same as Bowen's [3].

§ III. - SUBSHIFTS OF FINITE TYPE

Let $A = (a_{ij})$ be a $k \times k$ matrix such that $a_{ij} = 0$ or 1 , for $1 \leq i, j \leq k$, that is A is a 0-1 matrix. Such a matrix A determines a subshift of finite type as follows. Let $S_k = \{1, \dots, k\}$ and let $\Sigma(k) = \prod_{i=-\infty}^{i=\infty} S_k^i$, where $S_k^i = S_k$ for each $i \in \mathbb{Z}$. We put on S_k the discrete topology and on $\Sigma(k)$ the product topology. The subset $\Sigma_A \subset \Sigma(k)$ is the closed subset consisting of those bi-infinite sequences $\underline{b} = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ such that $a_{b_i b_{i+1}} = 1$ for all $i \in \mathbb{Z}$.

Pictorially, we image k boxes : $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ \boxed{k} and a point which at discrete "time n " can be in any one of the boxes. The bi-infinite sequences represent all possible histories of points. If we add the restriction that a point may move from box i to box j , if and only if $a_{ij} = 1$, then the set of all possible histories is precisely Σ_A .

The shift $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ is defined by $\sigma_A [(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}] = (b'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, where $b'_n = b_{n+1}$ for each $n \in \mathbb{Z}$. Clearly, σ_A is continuous. Let $C_i \subset \Sigma(k)$ be defined by $C_i = \{x \in \Sigma(k) \mid x_0 = i\}$. Let $D_i = C_i \cap \Sigma_A$, then $\mathcal{E} = \{D_1, \dots, D_k\}$ is an open

cover of Σ_A by pairwise disjoint elements. For any $k \times k$ matrix $B = (b_{ij})$, we define the norm $\|B\|$ of B by $\|B\| = \sum_{i,j=1}^k |b_{ij}|$. It is easy to see that $N_n(\sigma_A, \mathcal{L}) = \text{card}(\mathcal{L} \vee \dots \vee \sigma_A^{-n+1} \mathcal{L}) \leq \|A^{n-1}\|$ because the integer $a_{ij}^{(n)}$ is equal to the number of sequences (i_0, \dots, i_n) with $i_\ell \in \{1, \dots, k\}$, $i_0 = i$, $i_n = j$ and $a_{i_\ell i_{\ell+1}} = 1$. So $\limsup \frac{1}{n} \log(N_n(\sigma_A, \mathcal{L})) \leq \limsup \frac{1}{n} \log \|A^{n-1}\| = \limsup \log \|A^n\|^{1/n}$. This latter number is recognizable as $\log(\text{spectral radius } A)$ or $\log \lambda$, where λ is the largest modulus of an eigenvalue of A . In fact, we have :

Proposition. For any subshift of finite type $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$, we have $h(\sigma_A) = \log \lambda$, where λ is the spectral radius of A .

Proof. We begin by noticing that each open cover \mathcal{U} of Σ_A is refined by a cover of the form $\bigvee_{i=-\ell}^{\ell} \sigma_A^{-i} \mathcal{L}$. This implies, with the notations of section I :

$$N_{n+1}(\sigma_A, \mathcal{U}) \leq \text{card} \left(\bigvee_{j=-\ell}^{j=n+\ell} \sigma_A^{-j} \mathcal{L} \right) = \text{card} \left(\bigvee_{j=0}^{j=n+2\ell} \sigma_A^{-j} \mathcal{L} \right) = N_{n+2\ell+1}(\sigma_A, \mathcal{L}) .$$

Hence, we obtain : $h(\sigma_A, \mathcal{U}) \leq h(\sigma_A, \mathcal{L})$.

This shows that : $h(\sigma_A) = h(\sigma_A, \mathcal{L})$.

We now compute $h(\sigma_A, \mathcal{L})$. We distinguish two cases.

First case. Each state $i = 1, \dots, k$ occurs. This means that $D_i \neq \emptyset$ for each $D_i \in \mathcal{L}$. It is not difficult to show by induction that we have in fact

$$N_{n+1}(\sigma_A, \mathcal{L}) = \text{card}(\mathcal{L} \vee \dots \vee \sigma_A^{-n} \mathcal{L}) = \|A^n\| .$$

This proves the proposition in this case, as we saw above.

Second case. Some states do not occur. One can see that a state i occurs, if, and only if, for each $n \geq 0$, we have :

$$\sum_{j=1}^k a_{ij}^{(n)} > 0 \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^k a_{ji}^{(n)} > 0 \quad \text{where} \quad A^n = (a_{ij}^{(n)}) .$$

Notice that if $\sum_{j=1}^k a_{ij}^{(n_0)} = 0$, then $\sum_{j=1}^k a_{ij}^{(n)} = 0$ for $n \geq n_0$, this is because each $a_{\ell m}$ is ≥ 0 .

Now, we partition $\{1, \dots, k\}$ into three subsets X, Y, Z , where :

$$X = \{i \mid \forall n \geq 0 \quad \sum_{j=1}^k a_{ij}^{(n)} > 0, \quad \sum_{j=1}^k a_{ji}^{(n)} > 0\}$$

$$Y = \{i \mid \exists n > 0 \quad \sum_{j=1}^k a_{ij}^{(n)} = 0\} = \{i \mid \text{for } n \text{ large } \sum_{j=1}^k a_{ij}^{(n)} = 0\}$$

$$Z = \{1, \dots, k\} - (X \cup Y) .$$

We have :

$$Z \subset \{i \mid \text{for } n \text{ large } \sum_{j=1}^k a_{ji}^{(n)} = 0\} .$$

By performing a permutation of $\{1, \dots, k\}$, we can suppose that we have the following situation :

$$\underbrace{\{1, \dots, t\}}_X, \quad \underbrace{\{t+1, \dots, s\}}_Y, \quad \underbrace{\{s+1, \dots, k\}}_Z$$

If B is a $k \times k$ matrix, we write :

$$B = \begin{pmatrix} B_{XX} & B_{XY} & B_{XZ} \\ B_{YX} & B_{YY} & B_{YZ} \\ B_{ZX} & B_{ZY} & B_{ZZ} \end{pmatrix}$$

where B_{KL} corresponds to the subblock of B have row indices in K and column indices in L .

It is easy to show that :

$$N_{n+1}(\sigma_A, \mathfrak{E}) = \text{card}(\mathfrak{E} \vee \dots \vee \sigma_A^{-n} \mathfrak{E}) = \|(A^n)_{X,X}\| .$$

On the other hand, by the definition of Y and Z , for n large, A^n has the form :

$$A^n = \begin{pmatrix} (A^n)_{X,X} & (A^n)_{X,Y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (A^n)_{Z,X} & (A^n)_{Z,Y} & 0 \end{pmatrix}$$

This implies that for n large, A^n and $(A^n)_{X,X}$ have the same non zero eigenvalues, in particular :

$$\log (\text{spectral radius } A^n_{X,X}) = n \log \lambda .$$

Remark also that we get, for n large and $k \geq 1$:

$$(A^{kn})_{X,X} = [(A^n)_{X,X}]^k .$$

This gives us, for n large :

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kn+1} \log N_{kn+1}(\sigma_A, \mathfrak{F}) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kn+1} \| [(A^n)_{X,X}]^k \| = \log \lambda$$

This implies that :

$$\log \lambda \leq h(\sigma_A, \mathfrak{F}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N_n(\sigma_A, \mathfrak{F}) .$$

As we showed the reverse inequality, we have :

$$\log \lambda = h(\sigma_A, \mathfrak{F}) = h(\sigma_A) . \quad \square$$

§ IV. - THE ENTROPY OF PSEUDO-ANOSOV DIFFEOMORPHISMS

Now we suppose that we have a compact, connected 2-manifold M without boundary with genus ≥ 2 , and a pseudo-Anosov diffeomorphism $f : M \rightarrow M$. Hence there exists a pair (\mathfrak{F}^u, μ^u) and (\mathfrak{F}^s, μ^s) of transverse measured foliations with (the same) singularities such that $f(\mathfrak{F}^s, \mu^s) = (\mathfrak{F}^s, \frac{1}{\lambda} \mu^s)$ and $f(\mathfrak{F}^u, \mu^u) = (\mathfrak{F}^u, \lambda \mu^u)$ where $\lambda > 1$. This means, in particular, that f preserves the two foliations \mathfrak{F}^s and \mathfrak{F}^u ; it contracts the leaves of \mathfrak{F}^s by $\frac{1}{\lambda}$ and it expands the leaves of \mathfrak{F}^u by λ .

Let us recall that for any non trivial simple closed curve α we have

$\log \lambda = G_f(\alpha)$ (see exposé 9, prop. 19), hence we get $\log \lambda \leq G_f$. [For the definition of G_f , look at the end of section II.]

Proposition. If $f : M \rightarrow M$ is pseudo-Anosov, then $h(f) = \gamma_{f\#}$. So in particular, f

has the minimal entropy of anything in its homotopy class. Moreover $h(f) = \log \lambda$, where λ is the expanding factor of f .

Proof. Since $G_f \geq \log \lambda$, it suffices to show that $h(f) \leq \log \lambda$ for a pseudo-Anosov diffeomorphism f . To do this, we find a subshift of finite type $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ and a surjective continuous map $\Sigma_A \rightarrow M$ such that :

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma_A & \xrightarrow{\sigma_A} & \Sigma_A \\
 \theta \downarrow & & \theta \downarrow \\
 M & \xrightarrow{f} & M
 \end{array} \quad \text{commutes,}$$

and $\log(\text{spectral radius } A) = h(\sigma_A) = \log \lambda$ for this same λ . Thus we will have $\log \lambda \leq G_f \leq \gamma_{f\#} \leq h(f) \leq h(\sigma_A)$ or $\log \lambda \leq h(f) \leq \log \lambda$. \square

In the following, we construct A and θ via Markov partitions.

First some definitions.

Definitions (compare exposé 9). A subset R of M is called a $(\mathfrak{F}^S, \mathfrak{F}^U)$ -rectangle or birectangle, if there exists an immersion $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ whose image is R and such that :

- $\varphi |]0, 1[\times]0, 1[$ is an imbedding ;
- $\forall t \in [0, 1]$, $\varphi(\{t\} \times [0, 1])$ is included in a finite union of leaves and singularities of \mathfrak{F}^S , and in fact in one leaf if $t \in]0, 1[$.
- $\forall t \in [0, 1]$, $\varphi([0, 1] \times \{t\})$ is included in a finite union of leaves and singularities of \mathfrak{F}^U , and in fact in one leaf if $t \in]0, 1[$.

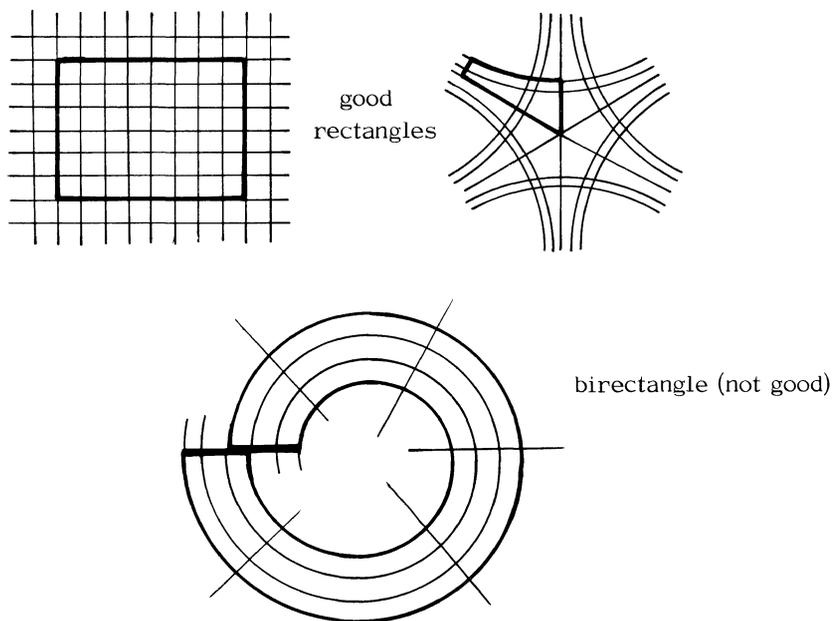
We adopt the following notations :

$$\text{int } R = \varphi(]0, 1[\times]0, 1[), \quad \partial_{\mathfrak{F}^S}^0 R = \varphi(\{0\} \times [0, 1]), \quad \partial_{\mathfrak{F}^S}^1 R = \varphi(\{1\} \times [0, 1]), \\
 \partial_{\mathfrak{F}^S} R = \partial_{\mathfrak{F}^S}^0 R \cup \partial_{\mathfrak{F}^S}^1 R, \quad \text{and in the same way, we define } \partial_{\mathfrak{F}^U}^0 R, \quad \partial_{\mathfrak{F}^U}^1 R, \quad \partial_{\mathfrak{F}^U} R.$$

Remark that $\text{Int } R$ is disjoint from $\partial_{\mathfrak{F}^S} R \cup \partial_{\mathfrak{F}^U} R$, because $\varphi|_{]0,1[\times]0,1[}$ is an embedding.

We call a set of the form $\varphi(\{t\} \times [0,1])$ (resp. $\varphi([0,1] \times \{t\})$) a \mathfrak{F}^S -fiber (resp. a \mathfrak{F}^U -fiber) of R . We will call a birectangle good if φ is an embedding.

If R is good birectangle, a point x of R is contained in only one \mathfrak{F}^S -fiber which we will denote by $\mathfrak{F}^S(x, R)$. In the same way, we define $\mathfrak{F}^U(x, R)$.



Remarks. 1) If R is a \mathfrak{F}^U -rectangle (see exposé 9) and $\partial_{\mathfrak{T}}^0 R$ and $\partial_{\mathfrak{T}}^1 R$ are contained in a union of \mathfrak{F}^S -leaves and singularities, it is easy to see that R is in fact a birectangle.

2) We used the word birectangle instead of rectangle, even though rectangle is the standard word in Markov partition, because this word was already used in exp. 9.

3) If R_1 and R_2 are birectangles and $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$, then it is a finite union of birectangles and possibly of some arcs contained in $(\partial_{\mathfrak{F}^S} R_1 \cup \partial_{\mathfrak{F}^U} R_1) \cap (\partial_{\mathfrak{F}^S} R_2 \cup \partial_{\mathfrak{F}^U} R_2)$.

Moreover the birectangles are the closures of the connected components of $\text{Int } R_1 \cap \text{Int } R_2$.

If R is a birectangle, we define the width of R by :

$$w(R) = \max \{ \mu^u(\mathfrak{F}^S\text{-fiber}), \mu^S(\mathfrak{F}^u\text{-fiber}) \} .$$

Lemma 1. There exists $\epsilon > 0$ such that, if R is a birectangle with $w(R) < \epsilon$, then it is a good rectangle.

Sketch of Proof. If a birectangle is contained in a coordinate chart of the foliations, then it is automatically a good birectangle. The existence of ϵ follows from compactness. \square

Lemma 2. There exists $\epsilon > 0$ such that if α (resp. β) is an arc contained in a finite union of leaves and singularities of \mathfrak{F}^S (resp. \mathfrak{F}^u) with $\mu^u(\alpha) < \epsilon$ (resp. $\mu^S(\beta) < \epsilon$), then the intersection of α and β is at most one point.

Definition of Markov partition. A Markov partition for the pseudo-Anosov diffeomorphism

$f : M \rightarrow M$ is a collection of birectangles $\mathfrak{R} = \{R_1, \dots, R_k\}$ such that :

$$1) \bigcup_{i=1}^k R_i = M ;$$

2) R_i is a good rectangle ;

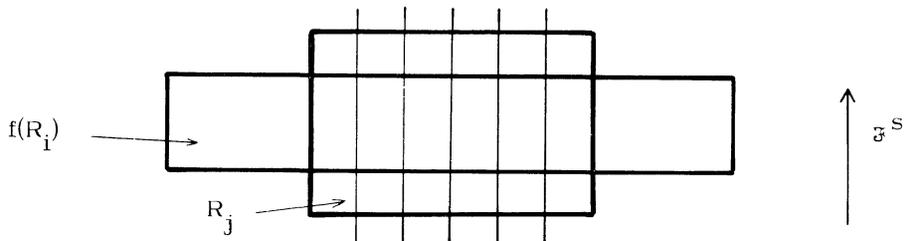
3) $\text{Int } R_i \cap \text{Int } R_j = \emptyset$ for $i \neq j$;

4) If x is in $\text{Int } (R_i)$ and $f(x)$ is in $\text{Int } (R_j)$, then $f(\mathfrak{F}^S(x, R_i)) \subset \mathfrak{F}^S(f(x), R_j)$, and $f^{-1}(\mathfrak{F}^u(f(x), R_j)) \subset \mathfrak{F}^u(x, R_i)$;

5) If x is in $\text{Int } (R_i)$ and $f(x)$ is in $\text{Int } (R_j)$, then

$$f(\mathfrak{F}^u(x, R_i)) \cap R_j = \mathfrak{F}^u(f(x), R_j) \quad \text{and} \quad f^{-1}(\mathfrak{F}^S(f(x), R_j)) \cap R_i = \mathfrak{F}^S(x, R_i) ;$$

This means that $f(R_i)$ goes across R_j just one time.



We will show in next section how to construct a Markov partition for a pseudo-Anosov diffeomorphism.

Given a Markov partition $\mathfrak{R} = \{R_1, \dots, R_k\}$, we construct the subshift of finite type Σ_A and the map $h : \Sigma_A \rightarrow M$ as follows. Let A be the $k \times k$ matrix defined by $a_{ij} = 1$ if $f(\text{Int } R_i) \cap \text{Int } R_j \neq \emptyset$, and $a_{ij} = 0$ otherwise. If $\underline{b} \in \Sigma_A$, then $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^{-i}(R_{b_i})$ is non empty and consists in fact a single point. This will follow from the following lemma.

Lemma 3. i) Suppose $a_{ij} = 1$, then $f(R_i) \cap R_j$ is a non empty (good) birectangle which is a union of \mathfrak{F}^u -fibers of R_j .

ii) Suppose moreover that C is a birectangle contained in R_i which is a union of \mathfrak{F}^u -fibers of R_i , then $f(C) \cap R_j$ is a non empty birectangle which is a union of \mathfrak{F}^u -fibers of R_j .

iii) Given $\underline{b} \in \Sigma_A$, for each $n \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{i=-n}^n f^{-i}(R_{b_i})$ is a non empty birectangle. Moreover, we have $\mathcal{W}(\bigcap_{i=-n}^n f^{-i}(R_{b_i})) \leq \lambda^{-n} \max\{\mathcal{W}(R_1), \dots, \mathcal{W}(R_k)\}$

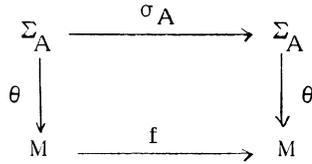
Proof. Since $a_{ij} = 1$, we can find $x \in \text{Int}(R_i) \cap f^{-1}(\text{Int } R_j)$. We have $f(\mathfrak{F}^S(x, R_i)) \subset \mathfrak{F}^S(f(x), R_j) \subset R_j$. Since each \mathfrak{F}^u -fiber of R_i intersects $\mathfrak{F}^S(x, R_i)$, we obtain that the image of each \mathfrak{F}^u -fiber of R_i intersects R_j . Moreover, by condition 5) $f[R_i - \delta_{\mathfrak{F}^u} R_i] \cap R_j$ is an union of \mathfrak{F}^u -fibers of R_j , hence $f(R_i) \cap R_j = \overline{f(R_i - \delta_{\mathfrak{F}^u} R_i) \cap R_j}$ is also a union of \mathfrak{F}^u -fibers of R_j . This proves i). The proof of ii) is the same.

To prove iii), remark first that it follows by induction on n using ii) that

each set of the form $f^n R_{b_i} \cap f^{n-1}(R_{b_{i+1}}) \cap \dots \cap R_{b_{i+n}}$ is a non empty birectangle which is a union of \mathfrak{F}^u -fibers of $R_{b_{i+n}}$. In particular, $\bigcap_{i=-n}^n f^{-i}(R_{b_i})$ is a non empty birectangle in R_{b_0} . The estimate of the width is clear. \square

By the lemma, if $\underline{b} \in \Sigma_A$, the set $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^{-i}(R_{b_i})$ is the intersection of a decreasing sequence of non empty compact sets, namely the sets $\bigcap_{i=-n}^n f^{-i}(R_{b_i})$ for $n \in \mathbb{N}$. Hence $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^{-i}(R_{b_i})$ is non void. It is reduced to one point because $\mathcal{W}(\bigcap_{i=-n}^n f^{-i}(R_{b_i}))$ tends to zero as n goes to infinity.

The map $\theta : \Sigma_A \rightarrow M$ given by $\theta(\underline{b}) = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^{-i}(R_{b_i})$ is well defined, it is easy to see that it is continuous and that the following diagram commutes :



We show now that θ is surjective. First remark that, for each $i = 1, \dots, k$, the closure of $\text{Int}(R_i)$ is R_i . Hence $V = \bigcup_{i=1}^k \text{Int}(R_i)$ is a dense open set. By the Baire category theorem $U = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^{-i}(V)$ is dense in M . If $x \in U$, then for each $n \in \mathbb{Z}$, the point $f^n(x)$ is in a unique $\text{Int}(R_{b_n})$ and $\underline{b} = \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ is an element of Σ_A . It is clear that $\theta(\underline{b}) = x$. Thus $\theta(\Sigma_A) \supset U$. As Σ_A is compact and θ continuous, we have $\theta(\Sigma_A) = M$.

Up to now, we have obtained that :

$$\log \lambda \leq G_f \leq \gamma_{f\#} \leq h(f) \leq h(\sigma_A) = \log(\text{spectral radius of } A) .$$

All that remains is to show that :

$$(\text{spectral radius of } A) = \lambda .$$

To see this, we do the following thing. Put $y_i = \mu^u(\mathfrak{F}^s\text{-fiber of } R_i)$, it is clear that this quantity is independant of the \mathfrak{F}^s -fiber of R_i and also $y_i > 0$.

We have trivially the following equality :

$$y_j = \sum_{i=1}^k \frac{y_i}{\lambda} a_{ij} ,$$

which gives :

$$\lambda y_j = \sum_{i=1}^k y_i a_{ij} \quad [\text{in particular } \lambda \text{ is an eigenvalue of } A] .$$

Hence, we obtain :

$$\lambda y_j \geq \left(\sum_{i=1}^k a_{ij} \right) \min_i y_i .$$

This gives us :

$$\lambda \left(\sum_j y_j \right) \geq \|A\| \min_i y_i$$

where $\| \cdot \|$ is the norm introduced in section III.

In the same way, we obtain for each $n \geq 2$:

$$\lambda^n \left(\sum_j y_j \right) \geq \|A^n\| \min_i y_i .$$

Hence :

$$\lambda \geq \|A^n\|^{1/n} \left(\frac{\min(y_1, \dots, y_k)}{\sum_i y_i} \right)^{1/n} .$$

Since $\min(y_1, \dots, y_k) > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\min(y_1, \dots, y_k)}{\sum_j y_j} \right)^{1/n} = 1$.

We thus obtain :

$$\lambda \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} = \text{spectral radius of } A .$$

Since λ is an eigenvalue of A , we obtain :

$$\lambda = \text{spectral radius of } A .$$

§ V. - CONSTRUCTION OF MARKOV PARTITIONS FOR PSEUDO-ANOSOV DIFFEOMORPHISMS

In this section, we still consider $f : M \rightarrow M$ a pseudo-Anosov diffeomorphism and we keep the notations of the last section. We sketch the proof of the following proposition.

Proposition. A pseudo-Anosov diffeomorphism has a Markov partition.

Using the methods given in exposé 9, § V, it is easy, starting with a family of transversals to \mathfrak{F}^u contained in \mathfrak{F}^s -leaves and singularities, to construct a family \mathfrak{R} of \mathfrak{F}^u -rectangles R_1, \dots, R_ℓ , such that :

- i) $\bigcup_{i=1}^{\ell} R_i = M$;
- ii) $\text{Int}(R_i) \cap \text{Int}(R_j) = \emptyset$ for $i \neq j$;
- iii) $f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\ell} \partial_{\mathfrak{F}^u} R_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\ell} \partial_{\mathfrak{F}^u} R_i$, $f(\bigcup_{i=1}^{\ell} \partial_{\mathfrak{F}^s} R_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\ell} \partial_{\mathfrak{F}^s} R_i$.

By the remark following the definition of birectangles, the R_i 's are birectangles since the system of transversals is contained in \mathfrak{F}^s -leaves and singularities.

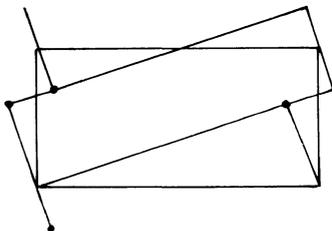
We define for each n a family of birectangles \mathfrak{R}_n in the following way : the birectangles of \mathfrak{R}_n will be the closures of the connected components of the non empty open sets contained in
$$\bigvee_{i=-n}^n f^i \mathfrak{R} = \{ \bigcap_{i=-n}^n f^i (\text{Int } R_{a_i}) \mid R_{a_i} \in \mathfrak{R} \} .$$

It is easy to see that \mathfrak{R}_n still satisfies the properties i) , ii) and iii) given above. Moreover, if $R \in \mathfrak{R}_n$, we have $\mathcal{W}(R) \leq \lambda^{-n} \max \{ \mathcal{W}(R_i) \mid R_i \in \mathfrak{R} \}$. In particular, by lemma 1 of last section, for n sufficiently large, each birectangle R in \mathfrak{R}_n is a good one.

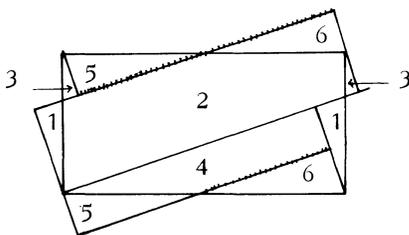
We assert that for n sufficiently large \mathfrak{R}_n is a Markov partition. All that remains is to verify properties 4) and 5) of a Markov partition. It is an easy exercise to show that property 4) is a consequence of property iii) given above (see exposé 9, lemme 10). By lemma 2 of section IV, if n is sufficiently large and $R, R' \in \mathfrak{R}_n$, then if $x \in R$, $f(\mathfrak{F}^u(x, R))$ intersects in at most one point each \mathfrak{F}^s -fiber of R' . Property 5) follows easily from the combination of this fact and of property 4). \square

Example of Markov partition on T^2 . Let $A : T^2 \rightarrow T^2$ be the linear map defined by $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Here $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$; and A acts on \mathbb{R}^2 preserving \mathbb{Z}^2 , thus A defines a map of T^2 . The translates of the eigenspaces of A foliate T^2 . The map A on T^2 is Anosov. The foliation of T^2 corresponding to the eigenvalue $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ is expanded, the foliation corresponding to $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ is contracted.

We draw a fundamental domain with eigenspaces approximately drawn in.



The endpoints of the short stable manifold are on the unstable manifolds after equivalences have been made. Filling in to maximal rectangles gives the following picture.



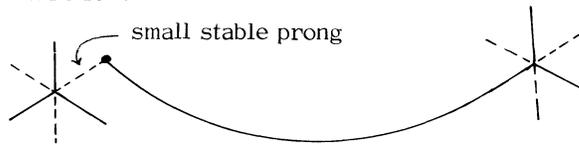
The hatched line is the extension of the unstable manifold. Identified pieces are numbered similarly. One rectangle is given by 1,2,3,6 and the other by 4,5. This

partition in two rectangles gives a Markov partition by taking intersections with direct and inverse images.

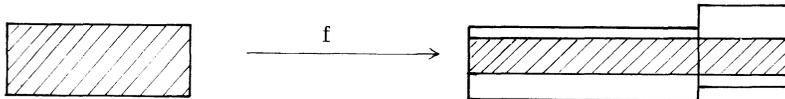
The construction of the Markov partition of a pseudo-Anosov diffeomorphism $f : M \rightarrow M$, which preserves orientation and fixes the prongs of \mathfrak{F}^S and \mathfrak{F}^U , is the same as in the example above. We sketch here the argument, hoping that it will aid the reader to understand the general case.

Since the unstable prongs are dense, we may pick small stable prongs whose endpoints lie on unstable prongs.

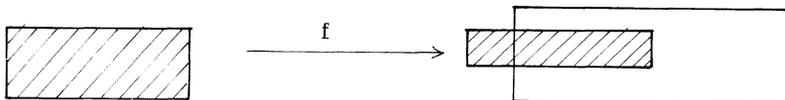
Roughly, the picture is :



We may extend these curves to maximal birectangles leaving the drawn curves as boundaries. By density of the leaves, every leaf crosses a small stable prong, so the rectangles obtained this way cover M^2 . The extension process requires that the unstable prongs be extended perhaps but the extension remains connected. Thus we have a partition by birectangles with boundaries the unions of connected segments lying on stable or unstable prongs. Consequently an unstable leaf entering the interior of a birectangle under f can't end in the interior, because the stable boundary has been taken to the stable boundary, etc...



but not



The only thing left is to make the partition sufficiently small. To do this, it is sufficient to take the birectangles obtained by intersections $f^{-n}(\mathcal{R}) \cap \dots \cap \mathcal{R} \cap \dots \cap f^n(\mathcal{R})$ for n sufficiently large.

§ VI. - PSEUDO-ANOSOV DIFFEOMORPHISMS ARE BERNOULLI.

A pseudo-Anosov diffeomorphism $f : M \rightarrow M$ has a natural invariant probability measure μ which is given locally by the product of μ^S restricted to plaques of \mathcal{F}^u with μ^u restricted to plaques of \mathcal{F}^S . The goal of this section is to sketch the proof of the following theorem.

Theorem. The dynamical system (M, f, μ) is isomorphic (in the measure theoretical sense) to a Bernoulli shift.

Recall that a Bernoulli shift is a shift $(\Sigma(\ell), \sigma)$ together a measure ν which is the infinite product of some probability measure on $\{1, \dots, \ell\}$. Obviously, ν is invariant under σ , see [9], [11].

We will have to use the notion and properties of measure theoretic entropy, see [11]. We will also need the following two theorems on subshifts of finite type.

Let A be a $k \times k$ matrix and (Σ_A, σ_A) be the subshift of finite type obtained from it.

Theorem (Parry) [10]. Suppose that A^n has all its entries > 0 for some n .

Then, there is a probability measure ν_A invariant under σ_A such that the measure

theoretic entropy $h_{\nu_A}(\sigma_A)$ is equal to the topological entropy $h(\sigma_A)$. Moreover, ν_A is the only invariant probability measure having this property, and $(\Sigma_A, \sigma_A, \nu_A)$ is a mixing Markov process.

Theorem (Friedman-Ornstein) [9]. A mixing Markov process is isomorphic to a Bernoulli shift. In particular, the $(\Sigma_A, \sigma_A, \nu_A)$ above is Bernoulli.

Now we begin to prove that (M, f, μ) is Bernoulli. For this, we will use the subshift (Σ_A, σ_A) and the map $\theta : (\Sigma_A, \sigma_A) \rightarrow (M, f)$ obtained from the Markov partition $\mathfrak{R} = \{R_1, \dots, R_k\}$.

Lemma 1. There exists $n \geq 1$ such that A^n has > 0 entries.

Proof. Given R_i , we can find a periodic point $x_i \in \overset{\circ}{R}_i$, call n_i its period. Consider the unstable fiber $\mathfrak{F}^u(x_i, R_i)$; we have, for $\ell \geq 0$, $f^{\ell n_i}(\mathfrak{F}^u(x_i, R_i)) \supset \mathfrak{F}^u(x_i, R_i)$. Moreover the μ^S -length of $f^{\ell n_i}(\mathfrak{F}^u(x_i, R_i))$ goes to infinity, since it is $\lambda^{\ell n_i} \mu^S(\mathfrak{F}^u(x_i, R_i))$. This implies that $f^{\ell n_i}(\mathfrak{F}^u(x_i, R_i)) \cap \overset{\circ}{R}_j \neq \emptyset, \forall j = 1, \dots, k$, for ℓ large enough because the leaves of \mathfrak{F}^u are dense. Now, if $n = \ell \cdot \prod_{i=1}^k n_i$ with ℓ large enough, we get $f^n(\overset{\circ}{R}_i) \cap \overset{\circ}{R}_j \neq \emptyset$ for each pair (i, j) . Hence, we obtain that $a_{ij}^{(n)} > 0$ for each (i, j) , where $A^n = (a_{ij}^{(n)})$. \square

This lemma shows that $(\Sigma_A, \sigma_A, \nu_A)$ is Bernoulli by the results quoted above. All we have to do now is to prove that (M, f, μ) is isomorphic to $(\Sigma_A, \sigma_A, \nu_A)$.

Lemma 2. The measure theoretic entropy $h_{\mu}(f)$ is $\log \lambda$.

Proof. Since topological entropy is the supremum of measure theoretical entropies, see [2, 5], we have $h_{\mu}(f) \leq \log \lambda$. Consider now the partition $\overset{\circ}{\mathfrak{R}} = \{\text{Int } R_i\}$, its

μ -entropy $h_\mu(f, \overset{\circ}{\mathcal{R}})$ with respect to f is given by :

$$h_\mu(f, \overset{\circ}{\mathcal{R}}) = \lim_n -\frac{1}{n} \sum a_{ij}^{(n)} \lambda^{-n} y_i x_j \log(\lambda^{-n} y_i x_j)$$

where $y_i = \mu^u(\overset{\circ}{\mathcal{F}}^S \text{ fiber of } R_i)$ and $x_j = \mu^s(\overset{\circ}{\mathcal{F}}^u \text{ fiber } R_j)$. As we saw and the end of section IV, $\frac{a_{ij}^{(n)}}{\lambda^n} \leq \frac{\|A^{(n)}\|}{\lambda^n}$ is bounded (by $\frac{\sum y_j}{\min y_i}$). This implies :

$$\lim_n -\frac{1}{n} \sum a_{ij}^{(n)} \lambda^{-n} y_i x_j \log y_i x_j = 0 .$$

We have also :

$$\sum a_{ij}^{(n)} \lambda^{-n} y_i x_j = \sum y_j x_j = \sum \mu(\overset{\circ}{R}_j) = \mu(M) = 1 .$$

By putting these facts together, we obtain : $h_\mu(f, \overset{\circ}{\mathcal{R}}) = \log \lambda$. Hence, $h_\mu(f) = \log \lambda$, because $\log \lambda = h_\mu(f, \overset{\circ}{\mathcal{R}}) \leq h_\mu(f) \leq h(f) = \log \lambda$. \square

Proof of the theorem. Put $\partial \mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^k \partial R_i$, we have $\mu(\partial \mathcal{R}) = 0$. This implies that the set $Z = M - \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} f^i(\partial \mathcal{R})$ has μ -measure equal to one. We know by section IV that θ induces a (bicontinuous) bijection of $\theta^{-1}(Z)$ onto Z , we can then define a probability measure ν on Σ_A by $\nu(B) = \mu(\theta[\theta^{-1}(Z) \cap B])$ for each borel set $B \subset \Sigma_A$. It is easy to see that ν is σ_A invariant ; moreover, θ gives rise to a measure theoretic isomorphism between $(\Sigma_A, \sigma_A, \nu)$ and (M, f, μ) . In particular, $h_\nu(\sigma_A) = h_\mu(f) = \log \lambda$. Since $\log \lambda$ is also the topological entropy of σ_A , we obtain from Parry's theorem that $\nu = \nu_A$ and that $(\Sigma_A, \sigma_A, \nu)$ is a mixing Markov process. By the Friedman-Ornstein theorem, $(\Sigma_A, \sigma_A, \nu)$ is Bernoulli, hence (M, f, μ) is also Bernoulli. \square

REFERENCES

- [1] R.L. ADLER, A.G. KONHEIM and M.H. McANDREW, Topological entropy, Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1965), p. 309-319.
- [2] R. BOWEN, Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 153 (1970), p. 401-413.
- [3] R. BOWEN, Entropy and the fundamental group, in the Structure of attractors in Dynamical Systems, Lecture notes in Math., vol 668, Springer-Verlag, New-York, 1978 .
- [4] E.F. DINABURG, On the relations of various entropy characteristics of dynamical systems, Math. of the USSR, Izvestija, 35 (1971) p. 337 (english translation), p. 324 (russian).
- [5] T.N.T. GOODMAN, Relating topological entropy with measure theoretic entropy, Bull. London Math. Soc. 3 (1971), p. 176-180.
- [6] M. GROMOV, Three remarks on geodesic dynamics and fundamental group (preprint).
- [7] A. MANNING, Topological entropy and the first homology group, in Dynamical Systems, Warwick 1974, Lecture notes in Math. Vol. 468, Springer-Verlag, New-York, 1975 .
- [8] J. MILNOR, A note on curvature and the fundamental group, Journal of Diff. Geometry 2 (1968), p. 1-70.
- [9] D. ORNSTEIN, Ergodic theory, randomness and dynamical systems, Yale Mathematical monographs 5, Yale University Press, New Haven, 1974 .
- [10] W. PARRY, Intrinsic Markov chains, Trans. Amer. Math. Soc. 112 (1964) p. 55-66.
- [11] Y.G. SINAI, Introduction to ergodic theory, Mathematical notes 18, Princeton University Press, Princeton, 1976 .

Astérisque

F. LAUDENBACH

La théorie de Thurston sur les surfaces à bord

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 209-224

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__209_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LA THÉORIE DE THURSTON SUR LES SURFACES A BORD

par F. LAUDENBACH

- § I. - L'espace des courbes et des feuilletages mesurés
- § II. - L'espace de Teichmüller et son compactifié
- § III. - Préparatifs pour la classification des difféomorphismes
- § IV. - Le théorème de classification de Thurston et le théorème de Nielsen
- § V. - Le théorème spectral

Soit M une surface compacte connexe, à bord non vide, dont la caractéristique d'Euler est négative ; pour simplifier, nous nous limitons au cas où M est orientable. Soit alors g le genre de M et b le nombre de composantes du bord. La caractéristique d'Euler est donnée par :

$$\chi(M) = 2 - 2g - b ,$$

donc $\chi(M) < 0$ équivaut à $b > 2 - 2g$.

Une telle surface peut être disconnectée par $3g - 3 + b$ courbes en $2g - 2 + b$ pantalons. Les cas exclus sont S^2 , T^2 , D^2 et $S^1 \times [0, 1]$. Le pantalon est la seule surface avec $\chi < 0$ et $b \not\geq 3 - 3g$. Dans la suite, on se restreint au cas $b > 3 - 3g$.

§ I. - L'ESPACE DES COURBES ET DES FEUILLETAGES MESURÉS

Dans cette situation, \mathcal{L} désigne l'ensemble des classe d'isotopie (= d'homotopie) de courbes simples non homotopes à zéro et non homotopes à une courbe du bord. D'autre part, on considère l'ensemble \mathcal{M} des classes de Whitehead de feuilletages

mesurés, qui sont astreints à la condition suivante sur le bord :

Chaque courbe du bord est un cycle de feuille, contenant au moins une singularité.

La relation d'équivalence de Whitehead est engendrée par les relations suivantes :

- isotopie, libre sur le bord ;
- contraction en un point d'une feuille de l'intérieur liant deux singularités, dont au plus une est sur le bord ;
- contraction en un point d'une feuille du bord liant deux singularités ;
- opérations réciproques des deux précédentes.

Comme dans le cas sans bord, l'intersection géométrique définit des applications

$$\begin{aligned} i_{*} &: \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}_{+}^{\mathcal{S}} \\ I_{*} &: \mathbb{P}\mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}_{+}^{\mathcal{S}} . \end{aligned}$$

Soit π la projection sur l'espace projectif :

$$\pi : \mathbb{R}_{+}^{\mathcal{S}} - \{0\} \longrightarrow P(\mathbb{R}_{+}^{\mathcal{S}}) .$$

On note $P\mathbb{P}\mathcal{S}$ l'image de πI_{*} .

Théorème 1. 1° Les applications i_{*} et I_{*} sont injectives.

2° $P\mathbb{P}\mathcal{S}$ est homéomorphe à la sphère $S^{6g-7+2b}$.

3° L'image $\pi i_{*}(\mathcal{S})$ est dense dans $P\mathbb{P}\mathcal{S}$.

Démonstration. La démonstration étant très proche de celle du cas sans bord (voir exposés 4 et 6), donnons seulement une explication pour la dimension.

On considère dans M un système de $3g - 3 + b$ courbes simples K_i , qui partagent M en pantalons de sorte que chaque K_i adhère à deux pantalons distincts ; cela n'existe pas si M est un tore avec un seul trou ($3g - 3 + b = 1$) ; on reviendra sur ce cas à la fin. Une fois mis en "forme normale" par rapport à cette décomposition, un feuilletage (\mathcal{F}, μ) est caractérisé (à équivalence près) par des triplets (m_i, s_i, t_i) , $i = 1, \dots, 3g - 3 + b$, appartenant au bord $\partial (\leq 7)$ de l'inégalité triangulaire. On a :

$$m_i = I(\mathcal{F}, \mu ; [K_i]) .$$

Puisque les courbes du bord sont de mesure nulle, la connaissance des m_i détermine à équivalence près les feuilletages dans chaque pantalon. Puis, par la théorie des "arcs jaunes" la paire (s_i, t_i) décrit comment sont recollés les feuilletages des deux

pantalons adjacents à K_i .

Finalement, l'ensemble des classes d'équivalence de feuilletages mesurés, en forme normale par rapport à la décomposition donnée de M , est en bijection avec un cône positif épointé, de base $S^{6g-7+2b}$.

Pour obtenir le théorème, il reste à prouver que s_i et t_i sont déterminés par $I_{\star}(\mathfrak{F}, \mu)$ et que l'image $I_{\star}(\mathbb{M}\mathfrak{F})$ est une variété topologique. Ces deux points se démontrent comme dans le cas sans bord ; précisément, s_i et t_i se calculent à l'aide des mesures de classes $[K_i^']$, $[K_i^'']$, associées à la décomposition (voir exposé 6) ; il suffit alors de remarquer que ces classes sont bien des éléments de \mathcal{S} .

Dans le cas $3g - 3 + b = 1$ ($M =$ tore avec un seul trou), on prend pour K_1 et $K_1^'$ deux "générateurs" du tore et pour K_1'' la courbe obtenue à partir de $K_1^'$ par un twist positif d'un tour le long de K_1 (figure 1). On laisse au lecteur l'exercice

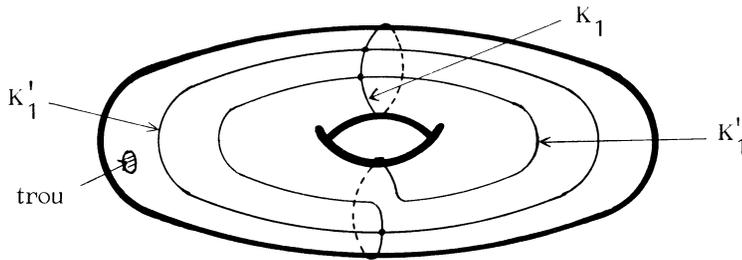


Figure 1

d'établir les formules qui donnent s_1 et t_1 en fonction des mesures de $[K_1]$, $[K_1^']$ et $[K_1'']$.

§ II. - L'ESPACE DE TEICHMÜLLER ET SON COMPACTIFIÉ

On considère l'espace topologique \mathfrak{M} des métriques riemanniennes de courbure -1 , pour lesquelles chaque courbe du bord est une géodésique de longueur 1. Le groupe $\text{Diff}^0(M)$ des difféomorphismes de M isotopes à l'identité agit naturellement sur \mathfrak{M} ; on appellera espace de Teichmüller ^(†) de M , l'espace topologique quotient

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{M} / \text{Diff}^0(M) .$$

(†) Classiquement [4], on ne fixe pas la longueur des courbes du bord.

On paramètre \mathcal{T} en fixant une décomposition en pantalons comme dans § I . Une structure de Teichmüller (i.e. un point de \mathcal{T}) est entièrement déterminée par les longueurs m_i des géodésiques isotopes aux courbes K_i et par les "angles" (nombres réels) de recollement α_i . On démontre que, par ce paramétrage, \mathcal{T} est homéomorphe $(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})^{3g-3+b}$.

D'autre part, pour chaque $\alpha \in \mathcal{A}$, on peut parler de sa longueur relativement à la structure de Teichmüller considérée. On a donc une application :

$$\ell_{\alpha} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}} .$$

Comme dans le cas sans bord, l' "angle" α_i est déterminé par les longueurs des géodésiques de $[K_i^1]$ et de $[K_i^2]$. On obtient donc le théorème suivant.

Théorème 2. L'espace de Teichmüller \mathcal{T} étant défini comme plus haut, l'application ℓ_{α} est une application propre qui est un homéomorphisme sur son image. En particulier, $\ell_{\alpha}(\mathcal{T})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{6g-6+2b}$.

A partir de là, on identifie $m\mathcal{T}$ et \mathcal{T} à leurs images respectives dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$.

Lemme. Dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$, les espaces $m\mathcal{T}$ et \mathcal{T} sont disjoints.

Démonstration. Il suffit, par exemple, de trouver pour chaque feuilletage (\mathcal{F}, μ) une suite $\alpha_n \in \mathcal{A}$ telle que $l(\mathcal{F}, \mu; \alpha_n) \rightarrow 0$. Soit $q: \tilde{M} \rightarrow M$ le revêtement ramifié des orientations transversales de \mathcal{F} . Soit $\tilde{\mathcal{F}} = q^* \mathcal{F}$. Soit $z \in \text{int } \tilde{M} - \text{sing } \tilde{\mathcal{F}}$ un point limite pour une feuille L ; on peut former une courbe simple C_n , avec un arc de L et un arc transversal au feuilletage de mesure $\leq \frac{1}{n}$, contenu dans un "flow-box" voisinage de z . Comme $\tilde{\mathcal{F}}$ est transversalement orientable, C_n est approchable par une vraie transversale à $\tilde{\mathcal{F}}$; on peut supposer en plus que $q(C_n)$ n'a que des points doubles isolés. Par une modification autour de chaque point double, on construit une courbe C_n^1 , qui est une courbe simple de M , transversale à \mathcal{F} et de mesure $\leq \frac{1}{n}$. On pose $\alpha_n = [C_n^1]$.

Il reste à vérifier que C_n^1 n'est pas isotope à une courbe du bord. Sinon, on a un anneau équipé d'un feuilletage mesuré, où une courbe du bord est transverse au feuilletage et où l'autre est un cycle ; ceci est interdit par le théorème de récurrence de Poincaré, § I.5 , exposé 5 . \square

Théorème 3. La projection π injecte \mathcal{T} dans $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{A}})$ par un homéomorphisme sur son image, qui est disjointe de $Pm\mathcal{T}$. Muni de la topologie induite, $\pi(\mathcal{T}) \cup Pm\mathcal{T}$ est

une variété à bord $\bar{\mathfrak{F}}$, homéomorphe à la boule de dimension $6g - 6 + 2b$. Le groupe $\pi_0(\text{Diff}(M))$ agit continûment sur $\bar{\mathfrak{F}}$.

Pour la démonstration, on suit la même démarche que dans le cas sans bord (exposé 8), et non celle que suggère l'ordre des phrases de l'énoncé précédent.

§ III. - PRÉPARATIFS POUR LA CLASSIFICATION DES
DIFFÉOMORPHISMES

3.1. Il est bien entendu qu'il s'agit d'une classification des difféomorphismes à isotopie près, où l'isotopie sur le bord est libre.

Soient $\varphi \in \text{Diff}(M)$ et $[\varphi]$ sa classe d'isotopie. D'après le théorème du point fixe de Brouwer, il existe un point $x \in \bar{\mathfrak{F}}$, tel que :

$$[\varphi] \cdot x = x .$$

Si $x \in \mathfrak{F}$, alors φ est isotope à une isométrie hyperbolique ; dans ce cas, $[\varphi]$ est d'ordre fini (exposé 9).

Si $x \in \text{Pint} \bar{\mathfrak{F}}$, il existe un feuilletage (\mathfrak{F}, μ) et $\lambda > 0$, tels que :

$$\varphi(\mathfrak{F}, \mu) \sim (\mathfrak{F}, \lambda \mu) ,$$

l'équivalence étant au sens de Whitehead ; à partir de là, tout dépend de (\mathfrak{F}, μ) et de λ .

Soit Σ le complexe constitué des singularités et des feuilles joignant deux singularités (éventuellement confondues) ; Σ contient ∂M puisque chaque composante du bord contient une singularité. On note $U(\mathfrak{F})$ le complémentaire d'un voisinage régulier de Σ dans M . On voit que $U(\mathfrak{F})$ ne dépend à isotopie près que de la classe de Whitehead de \mathfrak{F} .

On définit $\beta U(\mathfrak{F})$ comme la réunion des composantes du bord de $U(\mathfrak{F})$ qui représentent des éléments de \mathcal{A} . Pour la suite, on distingue les cas suivants :

- (I) $\beta U(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$ (cas réductible),
- (II) $\beta U(\mathfrak{F}) = \emptyset$ et $\lambda = 1$ (cas périodique),
- (III) $\beta U(\mathfrak{F}) = \emptyset$ et $\lambda \neq 1$ (cas pseudo-Anosov).

3.2. Difféomorphisme réductible.

Définition. On dit que φ est réductible s'il existe des courbes simples $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ mutuellement disjointes, représentant chacune un élément distinct de \mathcal{L} , telles que $\varphi(\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n) = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$.

Lemme. Si $\varphi(\mathfrak{F}, \mu) \sim (\mathfrak{F}, \lambda \mu)$ et si $\beta U(\mathfrak{F})$ est non vide, alors φ est isotope à un difféomorphisme réductible.

Démonstration. Quitte à modifier φ par isotopie, on peut supposer que $\varphi(U(\mathfrak{F})) = U(\mathfrak{F})$. Soit γ_1 une composante de $\beta U(\mathfrak{F})$, $\gamma_2 = \varphi(\gamma_1)$, etc.; on s'arrête à γ_n si c'est le premier itéré tel que $\varphi(\gamma_n)$ soit isotope à γ_1 . Puisque $\varphi(\gamma_n)$ et γ_1 bordent un anneau, il n'est pas difficile de faire une isotopie de φ pour que $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ soit invariant. \square

Si on coupe M le long de $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$, on obtient une surface \hat{M} plus "simple", sur laquelle φ induit un difféomorphisme. Une petite difficulté pour la suite tient au fait que \hat{M} n'est pas en général connexe; nous y reviendrons au § 4. Remarquons que chaque composante de \hat{M} ou bien est un pantalon, ou bien vérifie $b > 3g - 3$; en effet, deux courbes parmi les γ_i ne sont pas isotopes et aucun γ_i n'est isotope à une courbe du bord. Notons que le nombre de réductions successives possibles admet une borne supérieure ne dépendant que de M ; quand tous les morceaux sont des pantalons, il n'y a plus de réduction possible.

3.3. Feuilletage arationnel.

Lorsque $\beta U(\mathfrak{F})$ est vide, on dit que \mathfrak{F} est arationnel. Il y a alors un représentant privilégié dans la classe de \mathfrak{F} : les singularités de l'intérieur sont sans liaison (ni entre elles, ni avec celles du bord) et les singularités du bord sont simples (une seule séparatrice rentrant dans l'intérieur). Ce représentant est unique à isotopie près. Dans la suite, on suppose que \mathfrak{F} est ce représentant canonique. L'équivalence $\varphi(\mathfrak{F}, \mu) \sim (\mathfrak{F}, \lambda \mu)$ devient alors une égalité:

$$\varphi(\mathfrak{F}, \mu) = (\mathfrak{F}, \lambda \mu)$$

à condition de modifier φ par une isotopie convenable.

A tout système τ d'arcs transverses à \mathfrak{F} est associé un système de \mathfrak{F} -rectangles, dont la réunion est un sous-ensemble N de M , qui a pour frontière une réunion de cycles de feuilles. Puisque $\beta U(\mathfrak{F})$ est vide, la frontière de N est dans

∂M , donc $N = M$. De là, on déduit que toute demi-feuille qui ne va pas à une singularité est partout dense.

3.4. Cas $\varphi(\tilde{\alpha}, \mu) = (\tilde{\alpha}, \mu)$.

Comme dans le cas d'une surface fermée, on considère un "bon" système d'arcs transverses τ (voir exposé 9). Quitte à changer φ par une isotopie qui préserve $\tilde{\alpha}$, on se ramène au cas où $\varphi(\tau) = \tau$ et donc où φ préserve le système de rectangles; d'où on déduit que φ est isotope à un difféomorphisme périodique.

3.5. Cas $\varphi(\tilde{\alpha}, \mu) = (\tilde{\alpha}, \lambda \mu)$, $\lambda > 1$.

En vue de la construction d'un deuxième feuilletage invariant, on est amené ici à modifier la construction d'un "bon" système d'arcs transverses, par rapport à celle donnée au lemme 9 de l'exposé 9. Dans chaque secteur d'une singularité intérieure à M , on prend un petit arc transverse à $\tilde{\alpha}$; en revanche on n'en met pas dans les secteurs adjacents au bord. D'autre part, pour chaque feuille lisse du bord, on choisit un point d'où on fait partir une petite transversale rentrante (figure 2).

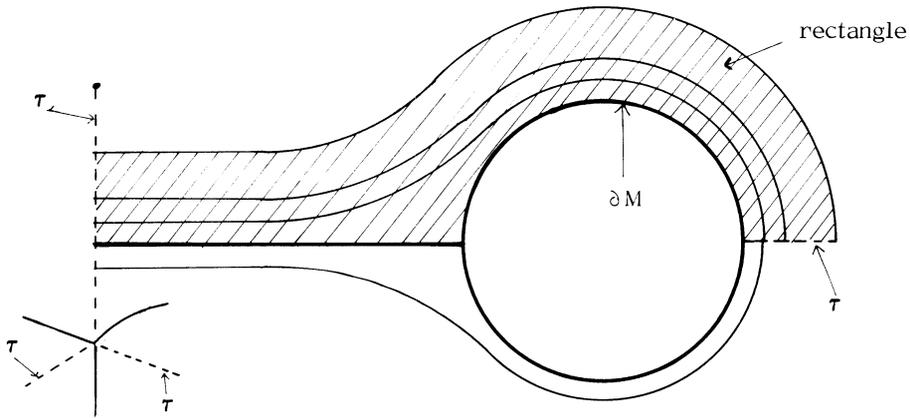


Figure 2

Si τ est un tel système d'arcs, par une isotopie convenable de φ , le long des feuilles de $\tilde{\alpha}$, on obtient $\varphi(\tau) \subset \tau$. A partir de là, la technique des lemmes 9 et 11 de l'exposé 9 s'applique pour construire une pré-partition de Markov $\{R_i\}$.

Soit a_{ij} le nombre de composantes de $\varphi(\text{int } R_i) \cap \text{int } R_j$. Soit x_i la μ -mesure de $\partial_\tau^0 R_i$ (ou de $\partial_\tau^1 R_i$). On a :

$$\lambda x_j = \sum_i x_i a_{ij} .$$

Autrement dit, si A est la matrice (a_{ij}) , le vecteur colonne (x_i) est vecteur propre de la matrice transposée tA , avec λ pour valeur propre. Par la même démonstration que dans le cas sans bord, on prouve que A a aussi un vecteur propre (y_i) , dont toutes les coordonnées sont strictement positives, avec une valeur propre $1/\xi > 0$.

$$y_i = \xi \sum a_{ij} y_j .$$

Noter que la démonstration géométrique reposait sur le fait que, pour tout i , $\cup \varphi^n(\partial_{\mathfrak{F}}^0 R_i)$ est dense. Ceci est encore vrai ici, car $\partial_{\mathfrak{F}}^0 R_i$ ne peut être entièrement contenu dans le bord de M ; il contient nécessairement un arc d'une feuille de l'intérieur.

Construction du feuilletage (\mathfrak{F}^1, μ^1) . Comme dans le cas sans bord, on commence par fixer la μ^1 - mesure d'arcs remarquables dans $\partial_{\mathfrak{F}}^0 R_i$. Si un tel arc est dans ∂M , on lui attribue la mesure 0, car on veut que ∂M soit aussi une réunion de cycles de feuilles pour \mathfrak{F}^1 (figure 3).

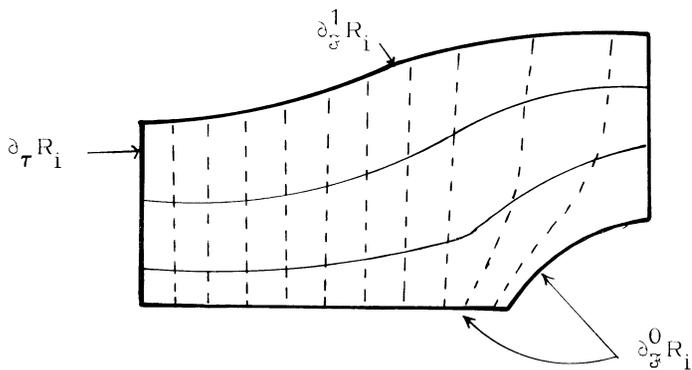


Figure 3

A partir de là, on dessine dans chaque rectangle R_i , un feuilletage mesuré (\mathfrak{F}^1, μ^1) transversal à \mathfrak{F} et qui respecte les mesures assignées; cette condition garantit le recollement des morceaux. On observe que $\text{Sing } \mathfrak{F}^1 \cap \text{int } M = \text{Sing } \mathfrak{F} \cap \text{int } M$, tandis que les singularités de \mathfrak{F} sur ∂M deviennent des points réguliers de \mathfrak{F}^1 ; on a $\text{Sing } \mathfrak{F}^1 \cap \partial M = \tau \cap \partial M$.

Maintenant que l'on a une mesure μ^1 sur les feuilles de \mathfrak{F}^1 , on construit un "difféomorphisme" pseudo-Anosov φ^1 , qui respecte les deux feuilletages, dilatant les feuilles de \mathfrak{F} par $\frac{1}{\xi}$ et contractant celles de \mathfrak{F}^1 par $\frac{1}{\lambda}$. On prouve alors que $\xi = \frac{1}{\lambda}$. Noter que φ^1 est l'identité sur le bord.

3.6. Difféomorphisme pseudo-Anosov.

On dit que φ est un "difféomorphisme" pseudo-Anosov, s'il existe deux feuilletages mesurés invariants, (\mathfrak{F}^S, μ^S) et (\mathfrak{F}^U, μ^U) et un $\lambda > 1$ avec les propriétés suivantes :

- 1) $\varphi(\mathfrak{F}^S, \mu^S) = (\mathfrak{F}^S, \frac{1}{\lambda} \mu^S)$,
- 2) $\varphi(\mathfrak{F}^U, \mu^U) = (\mathfrak{F}^U, \lambda \mu^U)$,
- 3) \mathfrak{F}^S et \mathfrak{F}^U sont transverses en tout point de l'intérieur,
- 4) Chaque composante de ∂M est un cycle de feuilles de \mathfrak{F}^S et de \mathfrak{F}^U et contient des singularités de ces deux feuilletages et φ est l'identité sur le bord.

N.B. φ n'est pas C^1 le long du bord.

Les propriétés des difféomorphismes pseudo-Anosov, indiquées au § 6 de l'exposé 9, sont encore valables. Seule la proposition 19 nécessite une modification : elle ne s'applique qu'aux classes d'isotopies de courbes non homotopes à une composante du bord ; d'ailleurs, la métrique $\sqrt{(d\mu^S)^2 + (d\mu^U)^2}$ est singulière le long de tout le bord.

Exemple sur le disque à 3 trous.

Soit A une matrice d'Anosov agissant sur T^2 . Soit σ l'involution $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$; elle a quatre points fixes ; on peut regarder $T^2 \rightarrow T^2/\sigma$ comme une structure de revêtement ramifié. Comme on le voit en calculant la caractéristique d'Euler, la base est la 2-sphère.

La transformation A laisse invariant deux feuilletages linéaires de pente irrationnelle, qui passent donc au quotient induisant sur S^2 deux feuilletages mesurés (\mathfrak{F}^S, μ^S) et (\mathfrak{F}^U, μ^U) , avec singularités aux quatre points de ramification (sur T^2 , les mesures transverses sont données par les 1-formes fermées à coefficients constants qui définissent les feuilletages respectifs). Puisque l'indice de ramification est 2, les singularités sont du type indiqué sur la figure 4.

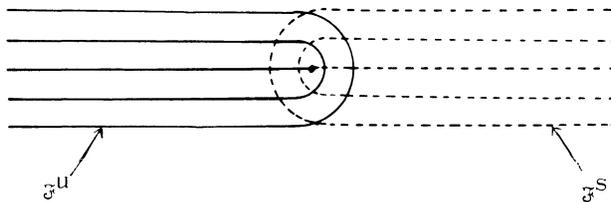


Figure 4

Puisque A commute avec σ , A induit sur S^2 un homéomorphisme φ qui laisse invariants \mathfrak{F}^u et \mathfrak{F}^s et qui transforme les mesures comme le fait A sur T^2 . Pour obtenir le disque à 3 trous, équipé d'un difféomorphisme pseudo-Anosov, on éclate les singularités comme sur la figure 5.

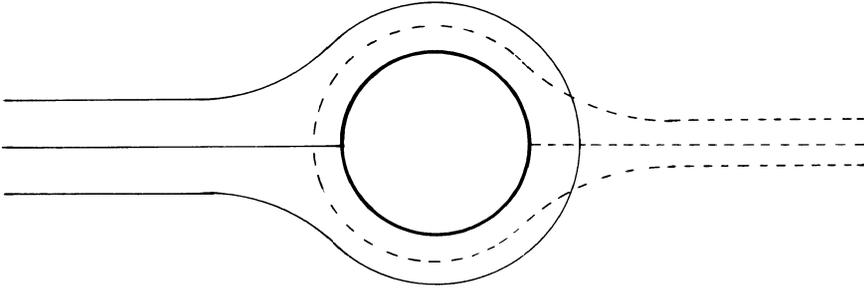


Figure 5

§ 4. - LE THÉORÈME DE CLASSIFICATION DE THURSTON ET LE THÉORÈME DE NIELSEN

4.1. Les arguments du paragraphe précédent achèvent, tout au moins dans le cas orientable, de donner une preuve du théorème suivant.

Théorème. Pour tout difféomorphisme φ d'une surface compacte connexe vérifiant $b > 2 - 2g$, φ est isotope à φ' qui a l'une des trois propriétés :

- 1° φ' est d'ordre fini ; c'est alors une isométrie d'une structure hyperbolique ;
- 2° φ' est pseudo-Anosov ;
- 3° φ' est réductible.

Pour poursuivre l'analyse du cas réductible, il faut dire comment travailler avec une surface non connexe. Il n'y a d'ailleurs à considérer que le cas où φ opère transitivement sur $\pi_0(M)$. Donc $M = M_1 \cup \dots \cup M_n$, où les M_i sont les composantes connexes ; $\varphi(M_i) = M_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n-1$ et $\varphi(M_n) = M_1$.

On dira que φ est pseudo-Anosov, si $\varphi^n|_{M_1}$ est pseudo-Anosov ; alors, par conjugaison, $\varphi^n|_{M_i}$ est pseudo-Anosov pour tout i . Si on sait que $\varphi^n|_{M_1}$ est isotope à un pseudo-Anosov (resp. un difféomorphisme d'ordre fini), alors φ est isotope à un tel difféomorphisme ; il suffit de lire l'isotopie de $\varphi^n|_{M_1}$ comme une isotopie de

$\varphi : M_n \rightarrow M_1$. Ainsi, on obtient le résultat final ci-dessous, dans lequel on peut s'abstenir de restrictions sur le genre ou la caractéristique d'Euler, puisque les cas de $M = S^2$, T^2 , D^2 , Pantalon, ruban de Möbius et bouteille de Klein sont connus.

4.2. Théorème. Soit φ un difféomorphisme d'une surface compacte M . Alors, il existe des surfaces (peut-être non connexes) M_1, \dots, M_k ayant les propriétés suivantes :

1° $M = M_1 \cup \dots \cup M_k$;

2° pour $i \neq j$, $M_i \cap M_j$ est une réunion de courbes fermées de leurs bords respectifs ; on note C_1, \dots, C_r les courbes de "coupure" ;

3° pour $i \neq j$, C_i n'est pas isotope à C_j ;

4° φ isotope à un difféomorphisme φ' tel que pour tout i , $\varphi'(M_i) = M_i$;

5° $\varphi' \mid M_i$ est isotope, dans $\text{Diff}(M_i)$, à un difféomorphisme périodique ou à un "difféomorphisme" pseudo-Anosov.

Il faut remarquer que, paradoxalement, si φ est un difféomorphisme de Dehn (twist le long d'une courbe C), cette classification laisse tomber φ à la trappe. En effet, si on coupe M le long de C et si on se permet une isotopie libre sur le bord, on arrive à l'identité.

4.3. Théorème (Nielsen [5]). Soit φ un difféomorphisme d'une surface compacte représentant un élément d'ordre n de $\pi_0(\text{Diff}(M))$. Alors φ est isotope à un difféomorphisme périodique, d'ordre n .

Démonstration. On se limite au cas non trivial $b > 3 - 3g$ (notations de l'introduction). Soit $M_1 \cup \dots \cup M_k$ une décomposition de la surface comme dans le théorème précédent ; pour chaque courbe de coupure C_i , on considère un petit voisinage tubulaire $N_i = C_i \times]-1, +1[$; on note M'_j la partie de M_j qui reste après avoir enlevé les tubes ouverts. Après une première isotopie, on a $\varphi(M'_j) = M'_j$ pour tout j et $\varphi(C_i \times \{t\})$ est de la forme $C_{i_1} \times \{t\}$; de plus, $\varphi \mid M'_j$ est périodique ou pseudo-Anosov.

Lemme 1. Le difféomorphisme φ^n conserve chaque C_i avec son orientation et son orientation normale.

Preuve. Si $i \neq j$, C_i n'est pas isotope à C_j . D'autre part, C_i ne peut être

isotope à son opposée que sur la bouteille de Klein (exclue). Enfin, un échange de côtés induit un morphisme non trivial sur $H_1(M, \mathbb{Z})$. \square

Lemme 2. L'isotopie de φ^n à l'identité peut être choisie parmi les difféomorphismes qui conservent $C_1 \cup \dots \cup C_r$.

Preuve. Une isotopie de φ^n à l'identité induit un lacet, basé en C_1 , dans l'espace des courbes simples de M . Puisque $M \neq T^2$, bouteille de Klein, un tel lacet est homotope à zéro [3]. Par relèvement de cette homotopie dans $\text{Diff}(M)$, on trouve une isotopie de φ^n à l'identité dans $\text{Diff}(M, C_1)$. On travaille de même avec les autres courbes. \square

Par conséquent, pour tout j , $\varphi^n|_{M'_j}$ est isotope à l'identité dans $\text{Diff}(M'_j)$. Alors $\varphi|_{M'_j}$ ne peut être pseudo-Anosov ; donc $\varphi|_{M'_j}$ est périodique et, comme c'est une isométrie pour une certaine métrique hyperbolique (+) (voir exposé 9), $\varphi^n|_{M'_j}$ est l'identité. Donc $\varphi^n|_{N_i}$ est un certain itéré θ^{q_i} du twist de Dehn θ le long de la courbe C_i .

Lemme 3. L'entier q_i est nul pour tout i .

Preuve. Il existe une classe $\beta \in \mathcal{J}$, telle que $i(\beta, [C_1]) \neq 0$ et $i(\beta, [C_j]) = 0$ pour $j \neq i$; si $q_i \neq 0$, d'après l'appendice de l'exposé 4, on a $i(\varphi^n(\beta), \beta) \neq 0$, ce qui interdit à φ^n d'être isotope à l'identité. \square

Supposons que $\varphi(C_i) = C_i$; ce lemme signifie alors que φ fait tourner les deux bords du tube N_i dans le même sens. Plus précisément, dans des coordonnées convenables, $\varphi(x, \pm 1) = (x + \frac{1}{n}, \pm 1)$, où $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et $\varphi(\{0\} \times [-1, 1])$ est isotope à $\{\frac{1}{n}\} \times [-1, 1]$, rel le bord. A partir de là, il est facile de faire une isotopie de $\varphi|_{N_i}$, triviale le long de ∂N_i , jusqu'à un difféomorphisme périodique, de période n .

Si $\varphi(C_i) \neq C_i$, on travaille de la même façon sur l'orbite de C_i .

Remarque. La démonstration de Nielsen repose sur le fait que φ se relève au revêtement universel en un $\tilde{\varphi}$ qui se prolonge au bord du disque de Poincaré ; $\tilde{\varphi}|_{\partial \mathbb{D}^2}$ ne

(+) La métrique hyperbolique obtenue par ce raisonnement ne donne peut-être pas la longueur 1 aux courbes du bord ; il n'est donc pas dit ici que $\varphi|_{M'_j}$ admet un point fixe dans $\mathcal{T}(M'_j)$. Question : est-ce qu'une telle métrique de Teichmüller invariante pour $\varphi|_{M'_j}$ existe ?

dépend que de la classe d'homotopie de φ . Derrière la démonstration faite ici, il y a une autre idée de compactification : celle de l'espace de Teichmüller. En réalité, comme Fenchel l'a annoncé (voir [2] ou le livre de Fenchel et Nielsen dont la parution est prochaine), on peut déduire du théorème du point fixe de Smith [6] que, si G est un sous-groupe fini résoluble de $\pi_0(\text{Diff } M)$, alors G admet un point fixe dans l'espace de Teichmüller (ouvert) ; d'où l'on déduit que G se relève en un sous-groupe de $\text{Diff } M$.

L'argument est brièvement le suivant. Soit $F \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}_p$ une extension où p est un nombre premier ; on suppose que le résultat est vrai pour F . Soit \mathfrak{F}_F l'ensemble des points fixes de F dans \mathfrak{F} . Soient $M' = M/F$, pour une action choisie de F sur M , et X l'ensemble des points de ramification. Soit $\mathfrak{F}(M', X)$ l'ensemble des structures conformes de M' modulo la composante neutre de $\text{Diff}(M', X)$; on démontre que c'est une cellule [utiliser le théorème de Earle et Eells [1] que l'action de Diff^0 sur les métriques de courbure -1 définit une structure de fibré principal et le fait que $\text{Diff}^0(M') / \text{Diff}^0(M', X)$ est contractile ; par exemple, si $X = 1$ point, ce dernier quotient est homéomorphe au revêtement universel \tilde{M}].

D'autre part, on démontre que \mathfrak{F}_F est homéomorphe à $\mathfrak{F}(M', X)$; donc \mathfrak{F}_F est aussi une cellule. Enfin, comme F est invariant dans G , G agit sur \mathfrak{F}_F via le quotient \mathbb{Z}_p . D'après Smith, il y a un point fixe (*).

§ V. - LE THÉORÈME SPECTRAL

5. 1. Pour une métrique riemannienne g et une courbe simple c , on note sa longueur par $L_g(c)$ et, $[c]$ désignant sa classe d'isotopie, on pose :

$$e_g([c]) = \inf \{ L_g(c') \mid c' \text{ isotope à } c \}.$$

Théorème. Pour tout difféomorphisme φ d'une surface compacte M , il existe une suite finie $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 1$ tels que, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et pour toute métrique riemannienne g , la suite $\sqrt[n]{e_g(\varphi^n(\alpha))}$ converge vers une limite qui est indépendante de g et qui appartient à $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont des unités algébriques dont le degré admet un majorant qui ne dépend que de la caractéristique d'Euler de M .

(*) Je remercie Alexis Marin qui m'a communiqué l'essentiel des éléments constituant cette remarque.

Démonstration Par le théorème 4.2, on peut supposer : $M = M_1 \cup \dots \cup M_k$, $\varphi(M_1) = M_1$; $\varphi|_{M_1}$ est isotope dans $\text{Diff}(M_1)$ à un difféomorphisme φ_1 , qui est pseudo-Anosov de facteur de dilatation λ_1 pour $i = 1, \dots, m$, et qui est périodique pour $i = m+1, \dots, k$. Pour $i > m$, on pose $\lambda_i = 1$. On va prouver que ce "spectre" vérifie l'énoncé précédent.

Puisque toutes les métriques riemanniennes sont équivalentes, on peut se limiter au cas où g est une métrique hyperbolique qui admet les ∂M_1 comme géodésiques. Alors, la géodésique c de la classe α coupe ∂M_1 minimalement. On découpe c en arcs c_1, \dots, c_r correspondant aux différents passages de c dans les M_1 ; $c_s \subset M_{i(s)}$. D'après le § III de l'exposé 3, c_s est un arc essentiel de $M_{i(s)}$ (non trivial dans $\pi_1(M_{i(s)}, \partial M_{i(s)})$) ; donc, $\varphi(c_s)$ est aussi un arc essentiel de $M_{i(s)}$. De plus, la géodésique de la classe $\varphi^n(\alpha)$ s'écrit $c_1^{(n)} \cup \dots \cup c_r^{(n)}$, où $c_s^{(n)}$ est isotope à $\varphi^n(c_s)$ par une isotopie ambiante de $\text{Diff}(M_{i(s)})$.

Disons que $\lambda_{i(1)} \geq \lambda_{i(s)}$ pour $s = 1, \dots, r$. On va prouver que $\sqrt[n]{\ell_g(\varphi^n(\alpha))} \rightarrow \lambda_{i(1)}$. Puisque, pour α fixé, toutes les classes $\varphi^n(\alpha)$ traversent les mêmes M_1 , il suffit de le prouver pour une sous-suite $(\varphi^t)^n$; ceci permet de se réduire au cas où φ est l'identité sur les ∂M_1 et où $\lambda_{i(s)} = 1$ implique $\varphi_{i(s)} = \text{Id}$, ce qu'on supposera dans la suite.

Considérons l'arc géodésique $d_s^{(n)}$ (resp. $h_s^{(n)}$) qui est homotope à $\varphi^n(c_s)$ à extrémités fixes (resp. libres). Soit $\beta_s^{(n)}$ (resp. $\delta_s^{(n)}$) le plus court chemin joignant l'origine (resp. l'extrémité) de $d_s^{(n)}$ à celle de $h_s^{(n)}$, tel que $d_s^{(n)}$ soit homotope, à extrémités fixes, à $\beta_s^{(n)} * h_s^{(n)} * [\gamma_s^{(n)}]^{-1}$. Admettons provisoirement le résultat suivant :

Lemme. La croissance de $L_g(\beta_s^{(n)})$ et de $L_g(\delta_s^{(n)})$ est sous-exponentielle, c'est-à-dire $\limsup \frac{1}{n} \log(\) = 0$.

Si $\lambda_{i(s)} = 1$, il est évident que $L_g(h_s^{(n)})$ est borné. Si $\lambda_{i(s)} > 1$, alors $\sqrt[n]{L_g(h_s^{(n)})} \rightarrow \lambda_{i(s)}$; en effet $\varphi_{i(s)}$ est pseudo-Anosov de coefficient de dilatation $\lambda_{i(s)}$ et, dans ce cas, le résultat est donné par la proposition 19 de l'exposé 9 (à ceci près qu'ici la variété est à bord et qu'il s'agit de classe d'homotopie libre de chemins allant du bord au bord, mais la preuve est la même). Par le lemme, on trouve $\sqrt[n]{L_g(d_s^{(n)})} \rightarrow \lambda_{i(s)}$. D'autre part, on a les inégalités suivantes :

$$\sum_s L_g(h_s^{(n)}) \leq \sum_s L_g(c_s^{(n)}) = \ell_g(\varphi^n(\alpha)) \leq \sum_s L_g(d_s^{(n)})$$

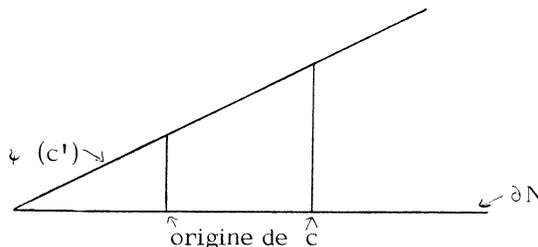
Vu la croissance de chaque terme, on trouve que $\sqrt[n]{\ell_g(\varphi^n(\alpha))}$ tend vers $\lambda_{i(1)}$. \square

Démonstration du lemme. On sait, d'après Lickorish, que $\varphi \mid M_{1(s)}$ est isotope rel le bord à un composé de twists de Dehn le long de courbes simples de $M_{1(s)}$ (voir exposé 15). On considère alors la situation d'une variété à bord N , munie d'une métrique hyperbolique g , d'un twist ψ d'un tour le long d'une géodésique α de N . Soit c la géodésique minimisante d'une classe non triviale de $\pi_1(N, \partial N)$; soit h la géodésique minimisante dans la classe de $\psi(c)$. Dans l'homotopie de $\psi(c)$ à h , chaque extrémité de l'arc se déplace sur le bord : on a sur ∂N des arcs géodésiques de ∂N , β et δ , tels que $\psi(c)$ soit homotope à $\beta * h * \delta^{-1}$, à extrémités fixes. Disons que chaque composante de ∂N a une longueur égale à 1. Alors, le lemme résulte de l'affirmation suivante.

Affirmation. $L_g(\beta), L_g(\delta) \leq 1$.

Noter que si α est isotope à une composante du bord, il n'y a rien à démontrer car $h = c$ et le déplacement de chaque extrémité de $\psi(c)$ au cours de son isotopie à c est exactement d'un tour. Ceci étant, l'intersection de h et de c est minimale dans la classe d'homotopie libre de h . Soit c' un arc parallèle à c ; si $\text{card}(\psi(c') \cap c) = \text{card}(h \cap c)$, alors $\psi(c')$ et h sont isotopes par une isotopie qui laisse c invariant (propositions 12 de l'exposé 3); dans ce cas, le déplacement des extrémités durant cette isotopie est de moins d'un tour.

D'après l'appendice de l'exposé 4, $\text{card}(\psi(c') \cap c)$ ne peut être diminué tant qu'on laisse fixes les extrémités de $\psi(c')$. En revanche, en déplaçant l'origine de $\psi(c')$ par dessus celle de c , on diminue éventuellement $\text{card}(\psi(c') \cap c)$; on dit qu'on fait fuir un point d'intersection par le bord. Pour déplacer l'origine de $\psi(c')$ de plus d'un tour, on doit avoir une immersion d'un triangle dans N , comme l'indique la figure ci-dessous à la source de l'immersion. De là, on déduit que α est isotope à une composante du bord, ce qu'on a exclu au début. Puisque le déplacement de l'origine de c à celle de c' est arbitrairement petit, on voit finalement que celui de l'origine de $\psi(c)$ à h est de moins d'un tour. \square



RÉFÉRENCES

- [1] C.J. EARLE - J. EELLS, A fiber bundle description of Teichmüller theory, *J. Diff. Geom.* 3 (1969), p. 19-43.
- [2] W. FENCHEL, Bemærkninger om endelige grupper af afbildningsklasser, *Mat. Tidsskr. B* (1950), p. 90-95.
- [3] A. GRAMAIN, Sur le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte, *Ann. Scient. E.N.S.* 6 (1973), p. 53-66.
- [4] W.J. HARVEY (edited by), *Discrete groups and automorphic functions*, Academic Press, 1977.
- [5] J. NIELSEN, Abbildungsklassen endlicher ordnung, *Acta Math.* 75 (1943), p. 23-115.
- [6] P. SMITH, A theorem on fixed points for periodic transformations, *Ann. of Math.* 35 (1934), p. 572-578.

Astérisque

A. FATHI

V. POÉNARU

Théorèmes d'unicité des difféomorphismes pseudo-Anosov

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 225-242

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__225_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THEOREMES D'UNICITE
DES DIFFEOMORPHISMES PSEUDO-ANOSOV

par A. FATHI et V. POENARU

- § I. - Énoncé des résultats
- § II. - Rappels
- § III. - Démonstration du théorème I (unique ergodicité)
- § IV. - Démonstration du théorème II et de ses corollaires
- § V. - Démonstration du théorème III (unicité des pseudo-Anosov)

§ I. - ÉNONCÉ DES RÉSULTATS

Dans la suite, M est une surface compacte orientable sans bord de genre $g > 1$. On se donne un difféomorphisme pseudo-Anosov $\varphi : M \rightarrow M$; il existe donc deux feuilletages mesurés transverses $(\tilde{\alpha}^S, \mu^S)$ et $(\tilde{\alpha}^U, \mu^U)$ et un nombre $\lambda > 1$, tels que $\varphi(\tilde{\alpha}^S, \mu^S) = (\tilde{\alpha}^S, \frac{1}{\lambda} \mu^S)$ et $\varphi(\tilde{\alpha}^U, \mu^U) = (\tilde{\alpha}^U, \lambda \mu^U)$ (i.e. φ contracte les distances entre les feuilles de $\tilde{\alpha}^U$ avec un facteur $\frac{1}{\lambda}$).

Théorème I (unique ergodicité). Les feuilletages stables et instables d'un difféomorphisme pseudo-Anosov sont uniquement ergodiques.

Rappelons ce que signifie l'unique ergodicité. D'abord, une "mesure" μ invariante par $\tilde{\alpha}^S$ est la donnée sur chaque transversale T de (la partie régulière de) $\tilde{\alpha}^S$ d'une

mesure borélienne μ_T finie sur chaque compact, telle que ces mesures soient invariantes par les germes d'holonomie de \mathfrak{F}^S . Le feuilletage \mathfrak{F}^S est uniquement ergodique s'il existe une seule mesure invariante par \mathfrak{F}^S à multiplication par un scalaire près, i.e. :

1° Il existe une mesure μ invariante par \mathfrak{F}^S .

2° Si ν est une autre mesure invariante par \mathfrak{F}^S , il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nu_T = \lambda \mu_T$ pour toute transversale T .

Le théorème I est un cas particulier d'un résultat de Bowen et Marcus [1].

Rappelons qu'un difféomorphisme pseudo-Anosov a une mesure positive invariante naturelle, déterminée à une constante > 0 près: elle est donnée localement par le produit de μ^S et μ^U . Quitte à changer μ^S (ou μ^U) en la multipliant par une constante, on peut supposer que $\mu^S \otimes \mu^U$ est une mesure de probabilité i.e. $\mu^S \otimes \mu^U(M) = 1$.

Théorème II. Soit φ un difféomorphisme pseudo-Anosov, supposons que $\mu^S \otimes \mu^U(M) = 1$. Si $\alpha, \beta \in \mathcal{J}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i(\varphi^n \alpha, \beta)}{\lambda^n} = I(\mathfrak{F}^S, \mu^S; \alpha) I(\mathfrak{F}^U, \mu^U; \beta) .$$

Corollaire II.1. Si $\alpha \in \mathcal{J}$ et si $[\alpha]$, $[\mathfrak{F}^S, \mu^S]$ et $[\mathfrak{F}^U, \mu^U]$ sont les images de α , (\mathfrak{F}^S, μ^S) et (\mathfrak{F}^U, μ^U) dans $\text{P}\tilde{\mathfrak{F}}$. on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi^n \alpha] &= [\mathfrak{F}^U, \mu^U] \\ \lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi^{-n} \alpha] &= [\mathfrak{F}^S, \mu^S] . \end{aligned}$$

En fait, le résultat de Thurston est plus fort : si $[\mathfrak{F}, \mu] \in \text{P}\tilde{\mathfrak{F}}$ et si $[\mathfrak{F}, \mu] \neq [\mathfrak{F}^S, \mu^S]$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n [\mathfrak{F}, \mu] = [\mathfrak{F}^U, \mu^U]$. Il est possible que la démonstration du théorème II, que nous donnons, permette aussi de démontrer ce résultat en faisant des estimations uniformes de convergence sur les compacts de $\text{P}\tilde{\mathfrak{F}} - \{[\mathfrak{F}^S, \mu^S]\}$.

Corollaire II.2. Les seuls points fixes de l'action de φ sur le compactifié de l'espace de Teichmüller $\mathfrak{T}M$ sont $[\mathfrak{F}^U, \mu^U]$ et $[\mathfrak{F}^S, \mu^S]$.

Théorème III (unicité des pseudo-Anosov). Deux difféomorphismes pseudo-Anosov homotopes sont conjugués par un difféomorphisme isotope à l'identité.

§ II. - RAPPELS

A) Le théorème de Perron-Frobenius ([2] chap. 13 , ou [3] appendice).

Théorème de Perron-Frobenius. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times n$ à coefficients ≥ 0 . On note $a_{ij}^{(k)}$ les coefficients de A^k la puissance k -ième de A . S'il existe $\ell \geq 1$ tel que tous les coefficients $a_{ij}^{(\ell)}$ de A^ℓ soient strictement positifs, on a les propriétés suivantes :

- 1) La matrice A admet une valeur propre $\lambda > 0$ qui est strictement supérieure à la valeur absolue de toute autre valeur propre.
- 2) Il existe un $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec tous les $x_i > 0$ et qui est un vecteur propre de valeur propre λ pour A :

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

- 3) Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est de dimension 1.

- 4) Si $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de valeur propre λ pour ${}^t A$:

$$\lambda y_j = \sum_{i=1}^n y_i a_{ij}, \quad j = 1, \dots, n,$$

alors, tous les y_j sont > 0 . Si y est normalisé par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = 1,$$

on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k}{\lambda^k} = \langle \cdot, y \rangle x$$

c'est-à-dire :

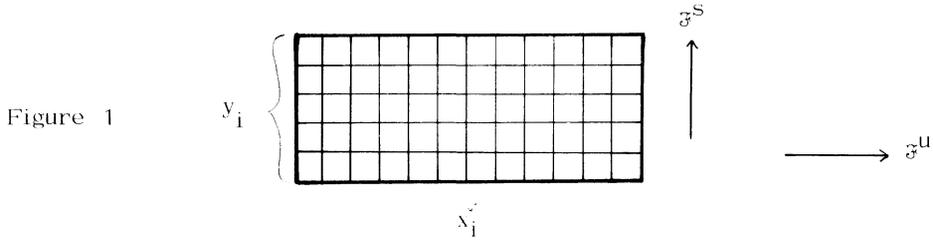
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{ij}^{(k)}}{\lambda^k} = x_i y_j.$$

B) Partition de Markov (voir exposés 9 et 10)

On va considérer $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$ une partition de Markov pour φ . On pose :

$$x_i = \mu^S(\mathfrak{F}^u\text{-fibre de } R_i)$$

$$y_i = \mu^u(\mathfrak{F}^S\text{-fibre de } R_i).$$



On a fait l'hypothèse que $\mu^S \otimes \mu^u(M) = 1$; ceci est équivalent à $\sum_{i=1}^N x_i y_i = 1$.
 Soit $A = (a_{ij})$ la matrice d'incidence de \mathfrak{K} pour φ , donc a_{ij} = (nombre de fois que $\varphi(\text{int } R_i)$ traverse $\text{int } R_j$) . On a :

$$(*) \quad \lambda x_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j ,$$

$$(**) \quad \lambda y_i = \sum_{j=1}^N y_j a_{ji} .$$

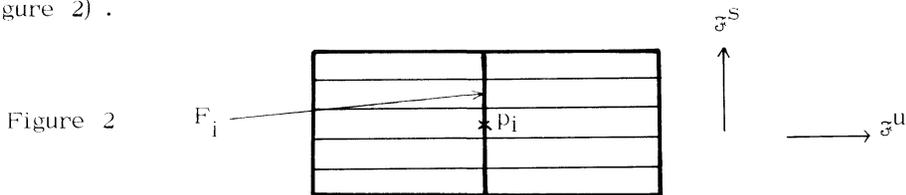
On a vu dans l'exposé 10 (fin du § IV) que λ est en fait la plus grande valeur propre de A . De plus, toujours dans l'exposé 10 (§ VI lemma 1) , on a montré qu'il existe un entier $\ell > 0$ tel que la matrice A^ℓ ait tous ses coefficients > 0 . On peut appliquer alors le théorème de Perron-Frobenius, ce qui nous donne :

Lemme 1. Avec les notations introduites au-dessus :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{ij}^{(k)}}{\lambda^k} = x_i y_j .$$

§ III. - DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I (UNIQUE ERGODICITÉ)

Soit ν une mesure invariante pour \mathfrak{F}^u . Puisque \mathfrak{F}^u n'a pas de feuille fermée dans $M - \text{sing } \mathfrak{F}^u$, la mesure ν n'a pas d'atomes . Pour chaque R_i , choisissons une \mathfrak{F}^S -fibre de R_i qui passe par un point $p_i \in R_i$; notons F_i cette fibre (figure 2) .



Lemme 2. Soit ν une mesure invariante pour \mathfrak{F}^u . Il existe une constante C telle que $\nu(F_i) = C \mu^u(F_i)$, $i = 1, \dots, N$.

Démonstration. On peut supposer $\nu \geq 0$. Donnons-nous $k > 0$ et fixons i . On a :

$$F_i = \left[\bigcup_{j=1}^N [\varphi^k(\text{Int } R_j) \cap F_i] \right] \cup \{\text{un nombre fini de points}\}.$$

Ceci nous donne, puisque ν n'a pas d'atomes et puisque les $\text{Int } R_j$ sont deux à deux disjoints :

$$\nu(F_i) = \sum_{j=1}^N \nu[\varphi^k(\text{Int } R_j) \cap F_i].$$

Par ailleurs, d'après les propriétés des partitions markoviennes, $\varphi^k(\text{Int } R_j) \cap F_i$ est réunion disjointe d'un certain nombre d'intervalles qui se déduisent tous par holonomie de $\varphi^k(F_j)$ privé de ses extrémités ; de plus, le nombre de ces intervalles est égal au nombre de fois que $\varphi^k(\text{Int } R_j)$ traverse $\text{Int } R_i$, c'est-à-dire $a_{ji}^{(k)}$, d'où :

$$(*) \quad \nu(F_i) = \sum_{j=1}^N a_{ji}^{(k)} \nu[\varphi^k(F_j)].$$

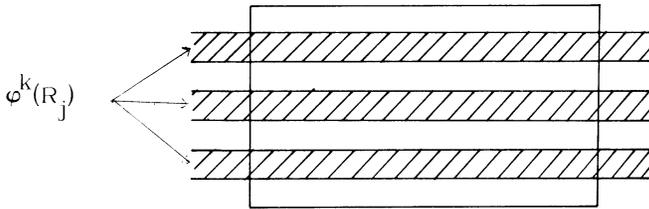


Figure 3

On obtient en particulier que $\nu(F_i) \geq a_{ji}^{(k)} \nu[\varphi^k(F_j)]$. Comme $\frac{a_{ji}^{(k)}}{\lambda^k}$ tend vers

la limite finie non nulle $x_j y_i$ quand k tend vers l'infini, il en résulte que $\lambda^k \nu[\varphi^k(F_j)]$ reste borné quand k tend vers l'infini, et en particulier :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{ji}^{(k)}}{\lambda^k} - x_j y_i \right) \lambda^k \nu[\varphi^k(F_j)] = 0.$$

En combinant ceci avec l'égalité (*), on obtient :

$$\nu(F_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N x_j y_i \lambda^k \nu[\varphi^k(F_j)] = y_i \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^N \lambda^k x_j \nu[\varphi^k(F_j)] \right).$$

Ceci termine la démonstration du lemme puisque $y_i = \mu^u(F_i)$ et que $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \lambda^k x_j \nu[\varphi^k(F_j)]$ est une constante indépendante de i . \square

Démonstration du théorème I.

Pour chaque $m \geq 0$, on considère la partition de Markov $\{\Gamma_{m,i,j}^k\}$ donnée par la fermeture des composantes connexes de $\varphi^m(\overset{\circ}{R}_1) \cap \overset{\circ}{R}_j$. Le lemme 2 montre que pour m fixé, il existe une constante C_m telle que :

$$\forall k,i,j, \quad \nu(F_j \cap \Gamma_{m,i,j}^k) = C_m \mu^u(F_j \cap \Gamma_{m,i,j}^k).$$

Si on fixe j dans les dernières égalités et si on somme sur k et i , on obtient : $\nu(F_j) = C_m \mu^u(F_j)$; donc C_m est indépendant de m . On a ainsi montré l'existence d'une constante C telle que :

$$(**) \quad \forall m,k,i,j, \quad \nu(F_j \cap \Gamma_{m,i,j}^k) = C \mu^u(F_j \cap \Gamma_{m,i,j}^k).$$

Pour m fixé, les $F_j \cap \Gamma_{m,i,j}^k$ donnent un recouvrement de F_j par des intervalles qui ne se touchent qu'en leurs extrémités, de plus chaque $F_j \cap \Gamma_{m+1,i,j}^k$ est inclus dans un $F_j \cap \Gamma_{m,i',j}^{k'}$ et le diamètre des $F_j \cap \Gamma_{m,i,j}^k$ tend vers zéro quand m tend vers l'infini. A partir de ces propriétés et du fait que ν et μ^u sont sans masse atomique, les égalités (***) impliquent :

$$\nu|_{F_j} = C \mu^u|_{F_j}, \quad j = 1, \dots, N.$$

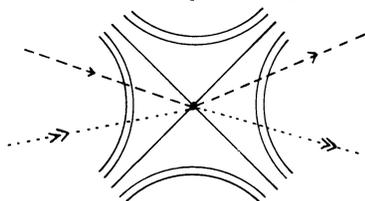
Il en résulte que $\nu = C \mu^u$, puisque toute feuille coupe les F_j . □

§ IV. - DÉMONSTRATION DU THÉORÈME II ET DE SES COROLLAIRES

Nous commençons par quelques généralités. Nous considérons une surface orientable sans bord N (compacte ou non) et \mathfrak{F} un feuilletage mesuré sur N . Nous appellerons courbe (fermée) immergée quasi-transverse à \mathfrak{F} , une immersion $S^1 \xrightarrow{j} N$ qui a les propriétés suivantes :

- i) Elle est limite de plongements ;
- ii) Elle n'a qu'un nombre fini de points doubles et de plus ces points doubles sont inclus dans $\text{sing } \mathfrak{F}$;
- iii) Elle est quasi-transverse à \mathfrak{F} (cf. exposé 5, § I).

Figure 4



Proposition 3. Soit α un chemin quasi-transverse à \mathfrak{F} dont l'origine est égale à l'extrémité et qui n'a pas d'autre point double et supposons qu'il parte et qu'il arrive transversalement à \mathfrak{F} . Alors la courbe fermée définie par α n'est pas homotope à zéro.

Démonstration. Appelons x_0 l'origine (= l'extrémité) de α . Considérons le cas où x_0 est un point régulier de \mathfrak{F} . La situation de α au voisinage est l'une des deux indiquées sur la figure 5.

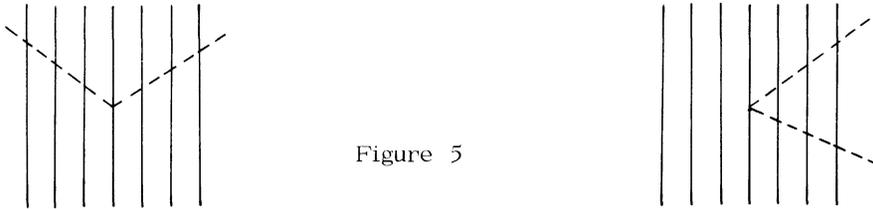


Figure 5

Dans le premier cas, on a une courbe quasi-transverse qui d'après exposé 5, §1.7, ne peut être homotope à zéro. Dans le second cas, on fabrique une courbe homotope à α avec un morceau de α et un petit morceau de feuille ; cette courbe ne peut pas être homotope à zéro toujours d'après exposé 5, § 1.7.

Considérons le cas $x_0 \in \text{sing } \mathfrak{F}$, on a trois configurations possibles (figure 6)

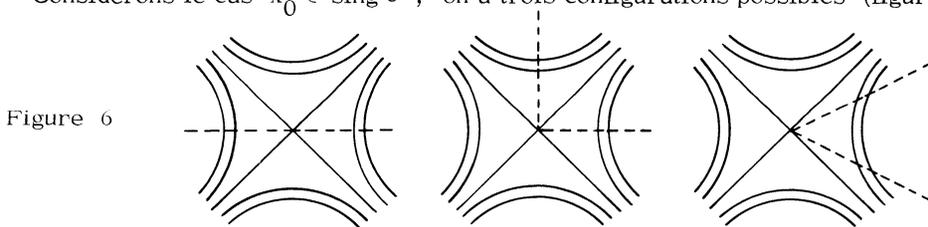


Figure 6

Le premier cas nous fournit une courbe plongée quasi-transverse. Dans le second et le troisième cas, on fait les modifications de la figure 7.

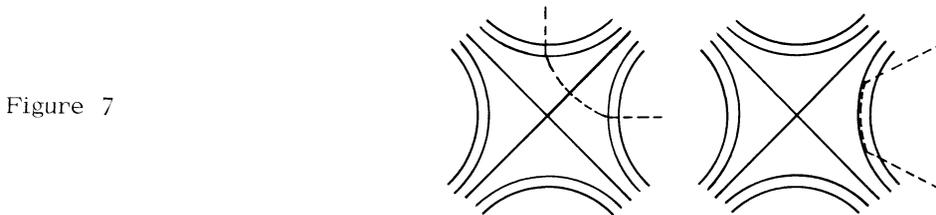


Figure 7

On obtient, toujours d'après exposé 5, § 1.7, que α n'est pas homotope à zéro. \square

Corollaire 4. Supposons de plus que N est simplement connexe. Alors toute immersion $\mathbb{R} \rightarrow N$ quasi-transverse à $\tilde{\mathfrak{F}}$ est sans point double.

Démonstration. Si cette immersion a des points doubles, on peut trouver un chemin quasi-transverse à $\tilde{\mathfrak{F}}$ comme dans les hypothèses du lemme précédent et qui est homotope à zéro puisque N est simplement connexe. \square

Proposition 5. Supposons que $N \cong S^1 \times \mathbb{R}$, et soit α une courbe immergée quasi-transverse à $\tilde{\mathfrak{F}}$ et homotope à l'âme du cylindre $S^1 \times \{0\}$. Alors, α est une courbe simple.

Démonstration. Soit $\mathbb{R}^2 = \tilde{N} \xrightarrow{p} N \cong S^1 \times \mathbb{R}$ le revêtement universel de N . Considérons α comme une application $\mathbb{R} \xrightarrow{\alpha} N$ qui est \mathbb{Z} -périodique. Soit $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{N}$ un relevé de α . Puisque α est homotope à l'âme du cylindre, on peut voir que $p^{-1}(\alpha(0)) = \{\tilde{\alpha}(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, et en déduire que $p^{-1}(\alpha) = \tilde{\alpha}(\mathbb{R})$. Par le corollaire 4, $\tilde{\alpha}(\mathbb{R}) = p^{-1}(\alpha)$ n'a pas de point double, d'où il résulte que α n'a pas de point double, puisque $p^{-1}(\alpha) \xrightarrow{p} \alpha$ est un revêtement. \square

Dans la suite de ce paragraphe, nous considérons un difféomorphisme pseudo-Anosov; nous notons $(\tilde{\mathfrak{F}}^S, \mu^S)$ et $(\tilde{\mathfrak{F}}^U, \mu^U)$ ses feuilletages invariants et $\lambda > 1$ son coefficient de dilatation.

Lemme 6. Soit γ une courbe plongée dans M non homotope à zéro. On peut trouver une courbe immergée γ^1 (resp. γ^u) quasi-transverse à $\tilde{\mathfrak{F}}^S$ (resp. $\tilde{\mathfrak{F}}^U$), homotope à γ .

Démonstration. Rappelons que $\tilde{\mathfrak{F}}^S$ n'a pas de liaison entre les singularités. Par l'exposé 5, § II.6, on peut trouver un feuilletage $\tilde{\mathfrak{F}}_1^S$ équivalent à $\tilde{\mathfrak{F}}^S$ et une courbe plongée γ_1 transverse à $\tilde{\mathfrak{F}}_1^S$ et isotope à γ . Quand on revient à $\tilde{\mathfrak{F}}^S$, en écrasant les liaisons entre les singularités, on transforme la courbe γ_1 en la courbe γ^1 cherchée. \square

On munit M de la métrique plate en dehors des singularités $ds^2 = (d\mu^S)^2 + (d\mu^U)^2$. Les considérations d'angle faites plus bas se rapportent à cette métrique et bien sûr n'ont de sens qu'en dehors de $\text{sing } \tilde{\mathfrak{F}}^S = \text{sing } \tilde{\mathfrak{F}}^U$. Remarquons que pour cette métrique les feuilletages $\tilde{\mathfrak{F}}^S$ et $\tilde{\mathfrak{F}}^U$ sont orthogonaux en tout point (régulier).

Lemme 7. Soit α une courbe immergée quasi-transverse à $\tilde{\mathfrak{F}}^S$ (resp. $\tilde{\mathfrak{F}}^U$). L'angle de $\varphi^n \alpha$ avec $\tilde{\mathfrak{F}}^U$ (resp. de $\varphi^{-n} \alpha$ avec $\tilde{\mathfrak{F}}^S$) tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

La démonstration de ce lemme est laissée au lecteur.

Proposition 8. Considérons dans \tilde{M} le revêtement universel de M , les deux feuilletages $(\tilde{\sigma}^S, \tilde{\mu}^S)$, $(\tilde{\sigma}^U, \tilde{\mu}^U)$ et la métrique plate $ds^2 = (d\tilde{\mu}^S)^2 + (d\tilde{\mu}^U)^2$. Soit γ un arc simple quasi-transverse à $\tilde{\sigma}^U$ dont l'angle avec $\tilde{\sigma}^S$ est $< \frac{\pi}{4}$, et δ un arc simple quasi-transverse à $\tilde{\sigma}^S$ dont l'angle avec $\tilde{\sigma}^U$ est $< \frac{\pi}{4}$. Alors $\gamma \cup \delta$ ne peut être une courbe fermée simple.

Démonstration. Supposons que $\gamma \cup \delta$ soit une courbe fermée simple ; comme $\tilde{M} \cong \mathbb{R}^2$, elle borde un disque Δ . Si δ passe par une singularité s_0 , alors une isotopie locale fait coïncider δ avec des arcs de séparatrices de $\tilde{\sigma}^U$ au voisinage de s_0 ; on peut faire l'opération en conservant les conditions d'angles et en laissant $\gamma \cup \delta$ plongé. Maintenant, grâce à la condition d'angle sur δ , le champ de droites tangent à $\tilde{\sigma}^U$ le long de δ peut être tourné sans ambiguïté jusqu'à devenir tangent à δ ; la condition d'angle sur γ permet de prolonger ce champ en un champ quasi-transverse à γ , et coïncidant avec $\tilde{\sigma}^U$ au voisinage des singularités et hors d'un voisinage de δ . Le nouveau feuilletage obtenu n'a que des singularités du type permis, ce qui nous donne une contradiction avec la formule d'Euler-Poincaré. \square

Corollaire 9. Soient α et β deux courbes immergées quasi-transverses respectivement à $\tilde{\sigma}^S$ et $\tilde{\sigma}^U$ et telles que l'angle de α avec $\tilde{\sigma}^U$ (resp. β avec $\tilde{\sigma}^S$) soit $< \frac{\pi}{4}$. Deux relevés $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ dans \tilde{M} se coupent en au plus un point.

Démonstration. Par le corollaire 4, les immersions $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont des plongements. Si $\text{card}(\tilde{\alpha} \cap \tilde{\beta}) \geq 2$, on peut trouver un disque Δ avec $\partial\Delta = \gamma \cup \delta$ où $\gamma \subset \tilde{\beta}$ et $\delta \subset \tilde{\alpha}$, ce qui est absurde d'après la proposition précédente. \square

Soient α et β deux courbes simples dans M non homotopes à zéro. Notons α' (resp. β') une immersion quasi-transverse à $\tilde{\sigma}^S$ (resp. $\tilde{\sigma}^U$) et homotope à α (resp. β). Nous notons $P(\alpha')$ (resp. $P(\beta')$) le nombre de passages de α' (resp. β') par des singularités. Notons $\text{int}(\alpha', \beta')$ le nombre de points d'intersection de α' et β' comptés avec multiplicités de la manière suivante : soit $\{p_1, \dots, p_k\} = \alpha' \cap \beta'$ (avec $p_i \neq p_j$, $i \neq j$) ; affectons à p_i la multiplicité $m_i = (\text{nombre de passages de } \beta' \text{ par } p_i) \times (\text{nombre de passages de } \alpha' \text{ par } p_i)$; par définition, $\text{int}(\alpha', \beta') = \sum_{i=1}^k m_i$.

Proposition 10. On a, pour tout $n \geq 0$ et tout $k \geq 0$ assez grands :

$$| \text{int}(\varphi^n(\alpha), \varphi^{-k}(\beta)) - \text{int}(\varphi^n(\alpha'), \varphi^{-k}(\beta')) | \leq P(\alpha') P(\beta') .$$

Démonstration. Remarquons que $P(\varphi^n(\alpha')) = P(\alpha')$ et $P(\varphi^{-k}(\beta')) = P(\beta')$. Par le lemme 7, l'angle de $\varphi^n(\alpha')$ avec $\tilde{\alpha}^u$ (resp. $\varphi^{-k}(\beta')$ avec $\tilde{\alpha}^s$) est $< \frac{\pi}{4}$ pour n (resp. k) suffisamment grand. Il suffit alors de montrer que $| \text{int}(\alpha, \beta) - \text{int}(\alpha', \beta') | \leq P(\alpha') P(\beta')$, si l'angle de α' avec $\tilde{\alpha}^u$ (resp. β' avec $\tilde{\alpha}^s$) est $< \frac{\pi}{4}$.

Appelons alors $\bar{M} \xrightarrow{\bar{p}} M$, le revêtement de M tel que $\bar{p}_*(\pi_1(\bar{M}))$ soit le groupe cyclique engendré par α' . Comme M est orientable, on a $\bar{M} \cong S^1 \times \mathbb{R}$. Soit $\bar{\alpha}'$ un relevé fermé de α' dans \bar{M} ; puisque $\bar{\alpha}'$ est quasi-transverse à $\tilde{\alpha}^s = \bar{p}^{-1}(\tilde{\alpha}^s)$ et qu'il est homotope à l'âme du cylindre, $\bar{\alpha}'$ est en fait une courbe simple d'après la proposition 5. Nous considérons β' comme une application \mathbb{Z} -périodique $\mathbb{R} \xrightarrow{\beta'} M$; un relevé de β' dans \bar{M} est par définition un relèvement $\bar{\beta}': \mathbb{R} \rightarrow \bar{M}$ de l'application $\beta': \mathbb{R} \rightarrow M$. Nous allons montrer qu'un relevé $\bar{\beta}'$ de β' coupe $\bar{\alpha}'$ en au plus un point (un point $\in \bar{\alpha}' \cap \bar{\beta}'$ est compté avec multiplicité si $\bar{\beta}'$ passe plusieurs fois par ce point, et un seul point signifie: $\text{card}(\bar{\alpha}' \cap \bar{\beta}') = 1$ et $\bar{\beta}'$ ne passe qu'une seule fois par $\bar{\alpha}' \cap \bar{\beta}'$). Pour voir cela, supposons que $\bar{\beta}'(a) \in \bar{\alpha}'$ et $\bar{\beta}'(b) \in \bar{\alpha}'$ avec $a \neq b$. Comme $\pi_1(\bar{M})$ est engendré par $\bar{\alpha}'$, il est facile de trouver un chemin $\bar{\gamma}: [a, b] \rightarrow \bar{M}$ tel que $\bar{\gamma}([a, b]) \subset \bar{\alpha}'$, $\bar{\gamma}(a) = \bar{\beta}'(a)$, $\bar{\gamma}(b) = \bar{\beta}'(b)$ et tel que $\bar{\beta}'|_{[a, b]}$ soit homotope à $\bar{\gamma}|_{[a, b]}$ à extrémités fixées. Si on remonte au revêtement universel \tilde{M} , on trouve un relevé $\tilde{\alpha}'$ de α' et un relevé $\tilde{\beta}'$ de β' dans \tilde{M} tels que $\text{card}(\tilde{\alpha}' \cap \tilde{\beta}') \geq 2$; or ceci est impossible d'après le corollaire 9. Il est facile de voir alors que $\text{int}(\alpha', \beta')$ est égal au nombre de relevés de β' dans \bar{M} qui coupent $\bar{\alpha}'$. Les relevés $\bar{\beta}'$ qui coupent $\bar{\alpha}'$ se répartissent en deux catégories, la première catégorie consiste en les relevés qui sont situés d'un seul côté de $\bar{\alpha}'$, la seconde catégorie consiste en les relevés qui joignent les 2 infinis du cylindre \bar{M} (figure 8).

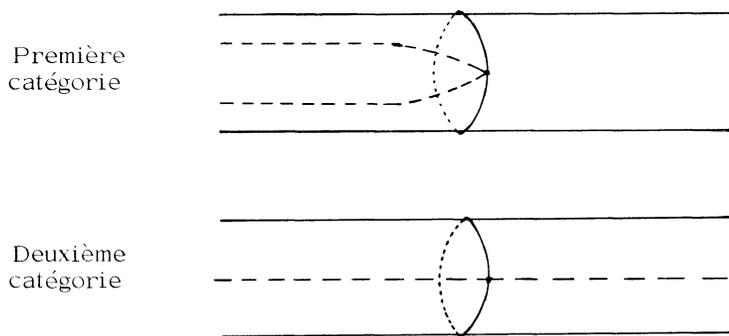


Figure 5

Vu que α' et β' sont transverses en dehors des singularités de \mathfrak{F}^S (ou \mathfrak{F}^U), il est facile de voir que le point de contact pour la première catégorie est une singularité. On en conclut que le nombre de relevés de β' qui coupent $\bar{\alpha}'$ et qui sont dans la première catégorie est $\leq P(\alpha')P(\beta')$. Le lecteur montrera aisément que le nombre de relevés de β' qui coupent $\bar{\alpha}'$ et qui sont dans la seconde catégorie est en fait très exactement $i(\alpha, \beta)$. \square

Considérons maintenant une partition markovienne $\mathfrak{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$ pour φ (voir § II.B). On peut toujours par petite perturbation de α' (resp. β'), supposer que α' est transverse à $\bigcup_{i=1}^N \partial_{\mathfrak{F}^U} R_i$ (resp. $\bigcup_{i=1}^N \partial_{\mathfrak{F}^S} R_i$). Comme $\varphi^{-1}(\bigcup_{i=1}^N \partial_{\mathfrak{F}^U} R_i) \subset \bigcup_{i=1}^N \partial_{\mathfrak{F}^U} R_i$, la courbe $\varphi^\ell(\alpha')$ est aussi transverse à $\bigcup_{i=1}^N \partial_{\mathfrak{F}^U} R_i$ pour $\ell \geq 0$; de même $\varphi^{-\ell}(\beta')$ est transverse à $\bigcup_{i=1}^N \partial_{\mathfrak{F}^S} R_i$.

Pour $\ell \geq 0$, notons $\bar{\alpha}_i^\ell$ le nombre de composantes connexes de la préimage de R_i par un paramétrage de $\varphi^\ell(\alpha')$. Pour chacune de ces composantes, l'image sera appelée un passage de $\varphi^\ell(\alpha')$ dans R_i . On dit qu'un passage est bon s'il ne rencontre pas $\partial_{\mathfrak{F}^U} R_i$; sinon on dit qu'il est mauvais. On note α_i^ℓ le nombre de bons passages de $\varphi^\ell(\alpha')$ dans R_i .

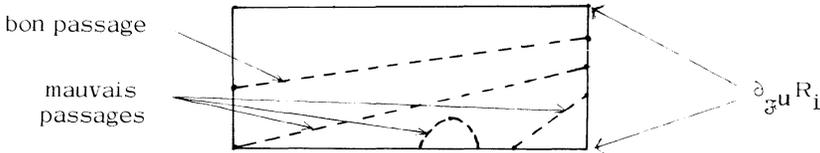


Figure 9

Remarquons que $\bar{\alpha}_i^\ell - \alpha_i^\ell$ est majoré par le nombre de fois (avec multiplicité) où $\varphi^\ell(\alpha')$ coupe $\partial_{\mathfrak{F}^U} R_i$. Comme $\varphi^{-\ell}(\bigcup_{i=1}^N \partial_{\mathfrak{F}^U} R_i) \subset \bigcup_i \partial_{\mathfrak{F}^U} R_i$, si C_1 désigne le nombre de fois où α' coupe $\bigcup_{i=1}^N \partial_{\mathfrak{F}^U} R_i$, on trouve : $\alpha_i^\ell \leq \bar{\alpha}_i^\ell \leq \alpha_i^\ell + C_1$. De la même manière, on définit $\bar{\beta}_i^\ell$ et β_i^ℓ en remplaçant $\varphi^\ell(\alpha')$ par $\varphi^{-\ell}(\beta')$ et \mathfrak{F}^U par \mathfrak{F}^S . On trouve aussi une constante C_2 telle que : $\beta_i^\ell \leq \bar{\beta}_i^\ell \leq \beta_i^\ell + C_2$, $\forall i = 1, \dots, N$, $\forall \ell \geq 0$. On pose pour la suite $C = \max(C_1, C_2)$.

Puisque $\varphi^{-n}(\bigcup_{i=1}^N \partial_{\mathcal{F}^u} R_i) \subset \bigcup_{i=1}^N \partial_{\mathcal{F}^u} R_i$ et $\varphi^n(\bigcup_{i=1}^N \partial_{\mathcal{F}^s} R_i) \subset \bigcup_{i=1}^N \partial_{\mathcal{F}^s} R_i$ pour $n \geq 0$,

il est facile de voir que si P est un bon passage de $\varphi^z(\alpha')$ dans R_i , alors $\varphi^n(P) \cap R_j$ est composé de $a_{ij}^{(n)}$ bons passages de $\varphi^{z+n}(\alpha')$, où $A = (a_{ij})$ est la matrice d'incidence associée à la partition markovienne et $A^n = (a_{ij}^{(n)})$. D'un autre côté, si P' est un passage quelconque de $\varphi^z(\alpha')$ dans R_i , alors $\varphi^n(P') \cap R_j$ est composé d'au plus $a_{ij}^{(n)}$ passages de $\varphi^{z+n}(\alpha')$ dans R_j (ici on utilise que α' est quasi-transverse à \mathcal{F}^s). On a donc les inégalités suivantes :

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^z a_{ij}^{(n)} \leq \alpha_j^{z+n} \leq \bar{\alpha}_j^{z+n} \leq \sum_{i=1}^N \bar{\alpha}_i^z a_{ij}^{(n)} \leq \sum_{i=1}^N (\alpha_i^z + C) a_{ij}^{(n)} .$$

Rappelons que $x_i = \mu^s(\mathcal{F}^u$ -fibre de R_i) et $y_i = \mu^u(\mathcal{F}^s$ -fibre de R_i).

Lemme 11. a) $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{x_i \alpha_i^z}{\lambda^\ell} = I(\mathcal{F}^s, \mu^s; \alpha)$

b) $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \frac{y_j \beta_j^z}{\lambda^\ell} = I(\mathcal{F}^u, \mu^u; \beta)$.

Démonstration. $I(\mathcal{F}^s, \mu^s; \varphi^z(\alpha)) = \lambda^z I(\mathcal{F}^s, \mu^s; \alpha)$ n'est autre que la μ^s -longueur de $\varphi^z(\alpha')$ puisque $\varphi^z(\alpha')$ est quasi-transverse à \mathcal{F}^s et homotope à $\varphi^z(\alpha)$. D'un autre côté :

$$\sum_{i=1}^N x_i \alpha_i^z \leq \mu^s[\varphi^z(\alpha')] \leq \sum_{i=1}^N x_i \bar{\alpha}_i^z \leq (\sum_{i=1}^N x_i \alpha_i^z) + C \sum_{i=1}^N x_i ;$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^N x_i \alpha_i^z \leq \lambda^z I(\mathcal{F}^s, \mu^s; \alpha) \leq (\sum_{i=1}^N x_i \alpha_i^z) + C \sum_{i=1}^N x_i .$$

Le a) résulte aisément de cette inégalité. Le b) s'obtient en échangeant les rôles. \square

Remarquons que l'on a : $\sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+z} \beta_j^z \leq \text{int}(\varphi^{n+z}(\alpha'), \varphi^{-z}(\beta'))$. Par le lemme 7

et le corollaire 9, pour z assez grand et $n \geq 0$, on a :

$$\text{int}(\varphi^{n+z}(\alpha'), \varphi^{-z}(\beta')) \leq \sum_{j=1}^N \bar{\alpha}_j^{n+z} \bar{\beta}_j^z ,$$

d'où par les inégalités écrites ci-dessus :

$$\sum_{i,j} \alpha_i^z a_{ij}^{(n)} \beta_j^z \leq \text{int}(\varphi^{n+z}(\alpha'), \varphi^{-z}(\beta')) \leq \sum_{i,j} (\alpha_i^z + C) a_{ij}^{(n)} (\beta_j^z + C) .$$

Par la proposition 10, on a, pour ℓ assez grand et $n \geq 0$:

$$| \text{int}(\varphi^{n+\ell}(\alpha'), \varphi^{-\ell}(\beta')) - \text{int}(\varphi^{n+\ell}(\alpha), \varphi^{-\ell}(\beta)) | \leq P(\alpha') P(\beta') .$$

On a aussi bien sûr : $|\text{int}(\varphi^{n+\ell}(\alpha), \varphi^{-\ell}(\beta)) - \text{int}(\varphi^{n+2\ell}(\alpha), \beta)|$.

En combinant ce qui précède, on obtient pour ℓ grand :

$$\begin{aligned} (\sum_{i,j} \alpha_i^\ell a_{ij}^{(n)} \beta_j^\ell) - P(\alpha') P(\beta') &\leq \text{int}(\varphi^{n+2\ell}(\alpha), \beta) \\ &\leq \sum_{i,j} (\alpha_i^\ell + C) a_{ij}^{(n)} (\beta_j^\ell + C) + P(\alpha') P(\beta') . \end{aligned}$$

En divisant ces inégalités par $\lambda^{n+2\ell}$ et en appliquant le lemme 1, on obtient quand on fait tendre n vers l'infini et pour ℓ fixé assez grand :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \frac{\alpha_i^\ell x_i y_j \beta_j^\ell}{\lambda^{2\ell}} &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{int}(\varphi^k(\alpha), \beta)}{\lambda^k} \leq \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{int}(\varphi^k(\alpha), \beta)}{\lambda^k} \leq \sum_{i,j} \frac{(\alpha_i^\ell + C) x_i y_j (\beta_j^\ell + C)}{\lambda^{2\ell}} . \end{aligned}$$

Par le lemme 11, si on fait tendre ℓ vers l'infini, on obtient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{int}(\varphi^k(\alpha), \beta)}{\lambda^k} = I(\mathfrak{F}^S, \mu^S; \alpha) I(\mathfrak{F}^U, \mu^U; \beta) .$$

Ceci termine la démonstration du théorème II. □

Le corollaire II. 1 est une conséquence immédiate du théorème II .

Démonstration du corollaire II.2.

Comme on l'a vu dans l'exposé 9 (théorème à la fin du § V), l'action de φ ne peut pas avoir de point fixe dans l'espace de Teichmüller $\mathfrak{T}M$, et de plus aucune puissance non triviale de φ ne peut conserver une classe d'isotopie de courbes simples. Supposons alors que l'on a un point fixe de l'action de φ dans $\overline{\mathfrak{T}M}$, ce point fixe est un élément $[\mathfrak{F}, \mu]$ dans $P\mathfrak{T}M$. Autrement dit, il existe $\rho > 0$ tel que $\varphi(\mathfrak{F}, \mu) \sim_m (\mathfrak{F}, \rho\mu)$. D'après ce qui a été dit plus haut, \mathfrak{F} est arationnel, car dans le cas contraire une puissance non triviale de φ préserverait une classe d'isotopie de courbes. De plus, ρ est différent de 1, car dans le cas contraire φ serait isotope à un difféomorphisme périodique (voir exposé 9, § IV). Supposons $\rho > 1$; le cas $\rho < 1$

se traite de la même manière. On peut alors, d'après l'exposé 9, § V, isotoper φ par un difféomorphisme pseudo-Anosov φ' qui admet $(\tilde{\alpha}, \mu)$ pour feuilletage instable. Le corollaire II.1 appliqué à φ et à φ' donne $\forall \alpha \in \mathcal{L}(M)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi^n \alpha] = [\tilde{\alpha}^u, \mu^u] \text{ dans } P\mathbb{R}\tilde{\mathcal{L}}(M)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi'^n \alpha] = [\tilde{\alpha}, \mu] \text{ dans } P\mathbb{R}\tilde{\mathcal{L}}(M) .$$

Comme φ et φ' sont isotopes, on obtient $[\tilde{\alpha}^u, \mu^u] = [\tilde{\alpha}, \mu]$. Le cas $\rho < 1$ donnerait $[\tilde{\alpha}^s, \mu^s] = [\tilde{\alpha}, \mu]$. \square

§ V. - DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III (UNICITÉ DES PSEUDO-ANOSOV)

Nous commençons par démontrer deux lemmes.

Lemme 12. Soient M une surface orientable fermée de genre $g > 1$ et φ un difféomorphisme de M isotope à l'identité. Si φ est périodique, alors φ est l'identité.

Démonstration. On a vu (remarque à la fin du § IV de l'exposé 9) que le théorème d'uniformisation impliquait que φ est une isométrie pour une métrique hyperbolique. Puisque φ est isotope à l'identité, φ est en fait l'identité (exposé 3, § IV, théorème 18). \square

Lemme 13. Soient $(\tilde{\alpha}^u, \mu^u)$ un feuilletage arationnel de M et φ un difféomorphisme de M , isotope à l'identité, qui préserve $(\tilde{\alpha}^u, \mu^u)$. Alors φ est isotope à l'identité à travers les difféomorphismes qui préservent $(\tilde{\alpha}^u, \mu^u)$.

Démonstration. Le lemme 7 de l'exposé 9 dit que φ est isotope à un difféomorphisme φ' périodique, à travers les difféomorphismes qui préservent $(\tilde{\alpha}^u, \mu^u)$. Le lemme précédent montre que φ' est l'identité. \square

Soient φ_1 et φ_2 deux difféomorphismes pseudo-Anosov isotopes. Notons $(\tilde{\alpha}_1^u, \mu_1^u)$ (resp. $(\tilde{\alpha}_2^u, \mu_2^u)$) le feuilletage instable de φ_1 (resp. φ_2), et $(\tilde{\alpha}_1^s, \mu_1^s)$ (resp. $(\tilde{\alpha}_2^s, \mu_2^s)$) le feuilletage stable de φ_1 (resp. φ_2). D'après le corollaire II.2, on a $[\tilde{\alpha}_1^u, \mu_1^u] = [\tilde{\alpha}_2^u, \mu_2^u]$ dans $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}})$. Quitte à multiplier $(\tilde{\alpha}_1^u, \mu_1^u)$ par une constante

positive non nulle, on peut donc supposer que $(\mathfrak{F}_1^u, \mu_1^u) = (\mathfrak{F}_2^u, \mu_2^u)$ dans $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$. Puisque ces feuilletages n'ont pas de liaison entre les singularités, il existe un difféomorphisme h isotope à l'identité tel que $(\mathfrak{F}_1^u, \mu_1^u) = h(\mathfrak{F}_2^u, \mu_2^u)$ où l'égalité veut dire ici même feuilletage dans M et même mesure transverse. Quitte à remplacer φ_2 par $h\varphi_2h^{-1}$, on est ramené au cas où φ_1 et φ_2 ont le même feuilletage instable (\mathfrak{F}^u, μ^u) . Remarquons aussi que la constante d'expansion $\lambda (> 1)$ est la même pour φ_1 et φ_2 ; ceci résulte par exemple du fait que $\varphi_1(\mathfrak{F}^u, \mu^u) = \varphi_2(\mathfrak{F}^u, \mu^u)$ dans $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$. Il en résulte que $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ préserve (\mathfrak{F}^u, μ^u) . D'après le lemme 13, $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ est isotope à l'identité à travers les difféomorphismes qui préservent (\mathfrak{F}^u, μ^u) ; désignons par h_t une telle isotopie. En particulier, pour tout x dans M , $\varphi_2^{-1}\varphi_1(x)$ et x sont sur la même \mathfrak{F}^u -feuille; nous notons par $[x, \varphi_2^{-1}\varphi_1(x)]$ le segment de la \mathfrak{F}^u -feuille de x qui joint x à $\varphi_2^{-1}\varphi_1(x)$.

Lemme 14. On a : $D = \sup \{ \mu_2^S([x, \varphi_2^{-1}\varphi_1(x)]) \mid x \in M \} < +\infty$.

Démonstration. Soit U_1, \dots, U_k un recouvrement de M par des cartes pour le feuilletage \mathfrak{F}^u . On désigne par A le sous-ensemble de $M \times M$ défini par $(x, y) \in A$ s'il existe une plaque de \mathfrak{F}^u contenue dans un des U_i et qui contient x et y (en particulier puisque la "plaque" d'un point singulier est réduite à ce point, si $(x, y) \in A$ et x (ou y) est un point singulier de \mathfrak{F}^u , $x = y$). Si $(x, y) \in A$, nous désignons par $[x, y]$ le segment de la plaque qui contient x et y et qui va de x à y ; la fonction $(x, y) \rightarrow \mu_2^S([x, y])$ est continue sur A . Considérons alors l'isotopie h_t de $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ à l'identité, à travers des homéomorphismes qui préservent \mathfrak{F}^u . On peut trouver un $\delta > 0$ tel que, si $|t - t'| < \delta$, alors $(h_t(x), h_{t'}(x)) \in A$; par la compacité de M et ce qui est dit plus haut, on a :

$$D_{t, t'} = \sup \{ \mu_2^S([h_t(x), h_{t'}(x)]) \mid x \in M \} < \infty .$$

Considérons alors une suite $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$, telle que $t_{i+1} - t_i < \delta$. on a pour tout $x \in M$:

$$\mu_2^S([x, \varphi_2^{-1}\varphi_1(x)]) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \mu_2^S([h_{t_i}(x), h_{t_{i+1}}(x)]) ;$$

d'où :

$$D \leq \sum_{i=0}^{n-1} D_{t_i, t_{i+1}} < +\infty . \quad \square$$

Lemme 15. La suite d'homéomorphismes $(\varphi_2^{-n}\varphi_1^n)_{n \geq 0}$ converge uniformément.

Démonstration. Soit d la métrique obtenue à partir de l'élément $ds^2 = (d\mu^S)^2 + (d\mu^U)^2$. Remarquons que si x et y sont sur la même \mathfrak{F}^U -feuille, et si $[x, y]$ désigne le segment de cette feuille qui va de x à y , on a $d(x, y) \leq \mu_2^S([x, y])$ (on n'a pas égalité en général, car, les feuilles ayant de la récurrence, deux points peuvent être proches dans M sans que le segment de feuille qui va de l'un à l'autre soit petit). La convergence uniforme de la suite résulte aisément de l'inégalité suivante que nous allons établir :

$$\sup_{x \in M} d(\varphi_2^{-(n+1)} \varphi_1^{(n+1)}(x), \varphi_2^{-n} \varphi_1^n(x)) \leq \lambda^{-n} D .$$

Considérons le segment de \mathfrak{F}^U -feuille $[\varphi_2^{-1} \varphi_1(\varphi_1^n(x)), \varphi_1^n(x)]$; sa mesure est $\leq D$. L'image de ce segment par φ_2^{-n} n'est autre que le segment de \mathfrak{F}^U -feuille $[\varphi_2^{-(n+1)} \varphi_1^{(n+1)}(x), \varphi_2^{-n} \varphi_1^n(x)]$. Vu l'effet de φ_2^{-n} sur μ_2^S , on a :

$$\mu_2^S([\varphi_2^{-(n+1)} \varphi_1^{(n+1)}(x), \varphi_2^{-n} \varphi_1^n(x)]) \leq \lambda^{-n} \mu_2^S([\varphi_2^{-1} \varphi_1(\varphi_1^n(x)), \varphi_1^n(x)]) \leq \lambda^{-n} D ;$$

d'où :

$$d(\varphi_2^{-(n+1)} \varphi_1^{(n+1)}(x), \varphi_2^{-n} \varphi_1^n(x)) \leq \lambda^{-n} D . \quad \square$$

Désignons par h la limite uniforme de $(\varphi_2^{-n} \varphi_1^n)_{n \geq 0}$. Remarquons que h est inversible puisque l'on montre de la même manière que la suite des inverses $(\varphi_1^{-n} \varphi_2^n)_{n \geq 0}$ converge uniformément. Remarquons aussi que h est isotope à l'identité puisque chaque $\varphi_1^{-n} \varphi_2^n$ est isotope à l'identité.

Considérons alors $h\varphi_1$; on a :

$$\begin{aligned} h\varphi_1 &= (\lim_{n \rightarrow \infty} \text{unif } \varphi_2^{-n} \varphi_1^n) \varphi_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{unif } (\varphi_2^{-n} \varphi_1^{(n+1)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{unif } (\varphi_2^{-n} \varphi_2^{-1} \varphi_1^{(n+1)}) = \\ &= \varphi_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \text{unif } (\varphi_2^{-n} \varphi_1^{(n+1)}) = \varphi_2 h , \end{aligned}$$

ou encore $h\varphi_1 = \varphi_2 h$, ce qui montre que h est une conjugaison entre φ_1 et φ_2 .

Il nous reste à voir que h est différentiable. Avant de faire cela, nous devons préciser la définition de pseudo-Anosov. Cette précision consiste à demander que les feuilletages $\mathfrak{F}^S, \mathfrak{F}^U$ soient donnés dans une carte C^∞ au voisinage d'une singularité par les valeurs absolues des parties réelle et imaginaire de $\sqrt{z^{p-2} dz^2}$ ($p \geq 3$).

Lemme 16. Une conjugaison entre deux difféomorphismes pseudo-Anosov est automatiquement C^∞ différentiable.

Démonstration (esquisse). Notons h cette conjugaison, φ_1 et φ_2 les deux difféo-

morphismes pseudo-Anosov ; donc $h\varphi_1 h^{-1} = \varphi_2$. La première chose que l'on remarque c'est que h envoie le feuilletage (in) stable de φ_1 sur le feuilletage (in)-stable de φ_2 (sans parler pour l'instant de mesure transversale). Ceci résulte par exemple du fait que $W_X^S(\varphi_1) = \{y \in M \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\varphi_1^n(x), \varphi_1^n(y)) = 0\}$ est la feuille de \mathfrak{F}_1^S qui passe par x si cette feuille n'aboutit pas à une singularité et, si la feuille de x aboutit à une singularité x_0 de \mathfrak{F}_1^S (ou si $x = x_0$), $W_X^S(\varphi_1)$ est la réunion de x_0 et des feuilles de \mathfrak{F}_1^S qui aboutissent à x_0 . De plus, comme \mathfrak{F}_2^S (resp. \mathfrak{F}_2^U) est uniquement ergodique (théorème I), h envoie aussi μ_1^S (resp. μ_1^U) sur μ_2^S (resp. μ_2^U), quitte à diviser les mesures par des constantes convenables. Considérons alors un point m régulier pour \mathfrak{F}_1^S et \mathfrak{F}_1^U , son image $h(m)$ est un point régulier pour \mathfrak{F}_2^S et \mathfrak{F}_2^U . On peut trouver une carte lisse $]-\varepsilon, \varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\varphi} M$, telle que $\varphi(0) = m$ et que le feuilletage $(\mathfrak{F}_1^S, \mu_1^S)$ (resp. $(\mathfrak{F}_1^U, \mu_1^U)$) soit défini dans cette carte par la 1-forme dx (resp. dy). De même, on trouve une telle carte autour de $h(m)$. Quand on lit h dans ces cartes, il apparaît comme un homéomorphisme de $]-\varepsilon, \varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[$ sur un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R}^2 , qui envoie 0 sur 0, les horizontales dans les horizontales, les verticales dans les verticales, et qui préservent l'écartement entre deux horizontales ou deux verticales. Il est facile de voir que h est la restriction à $]-\varepsilon, \varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[$ d'une des quatre applications linéaires suivantes de \mathbb{R}^2 : Identité, symétrie orthogonale par rapport au premier (resp. second) axe, symétrie par rapport à l'origine. Il en résulte que h est C^∞ en tout point régulier de \mathfrak{F}_1^S et \mathfrak{F}_1^U . On peut faire un raisonnement analogue en un point singulier. Rappelons que l'on a précisé plus haut la définition de pseudo-Anosov. Cette précision implique que dans des cartes convenables, h apparaît comme un germe d'homéomorphisme en $0 \in \mathbb{C}$ qui préserve les valeurs absolues des parties réelle et imaginaire de $\sqrt{z^{p-2}} dz^2$ ($p \geq 3$). Le lecteur vérifiera que de tels germes, qui préservent l'orientation, sont des rotations d'angles $\frac{2k\pi}{p}$, les germes qui renversent l'orientation sont donnés par des symétries par rapport à des droites qui contiennent la réunion de deux séparatrices. \square

Remarque. On peut se demander quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un feuilletage arationnel, uniquement ergodique, soit le feuilletage stable d'un pseudo-Anosov.

RÉFÉRENCES

- [1] R. BOWEN & B. MARCUS, Unique ergodicity for horocycle foliations, Israël J. of Math. 26 (1977), p. 43-67.
- [2] F.R. GANTMACHER, The theory of matrices, Chelsea, 1959 ;
Traduction française, Dunod, 1966 .
- [3] S. KARLIN, A first course in stochastic processes, Academic Press, 1966 ;
Traduction française, Dunod, 1969 .

Astérisque

F. LAUDENBACH

Construction de difféomorphismes pseudo-Anosov

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 243-250

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__243_0>

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTION DE DIFFÉOMORPHISMES PSEUDO-ANOSOV

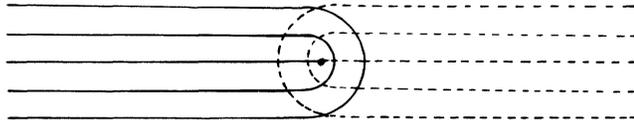
par F. LAUDENBACH

- § I. - Difféomorphisme pseudo-Anosov généralisé.
- § II. - Construction par revêtement ramifié.
- § III. - Construction par twists de Dehn.

§ I. - DIFFÉOMORPHISME PSEUDO-ANOSOV GÉNÉRALISÉ

Un feuilletage mesuré avec épines est un feuilletage mesuré pour lequel on admet, en plus des singularités usuelles (exposé 5), celles de la figure 1 ; la figure représente deux feuilletages mesurés avec épine, mutuellement transverses.

Figure 1

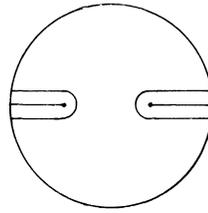


Un difféomorphisme pseudo-Anosov généralisé est un homéomorphisme φ pour lequel il existe deux feuilletages mesurés avec épines $(\tilde{\mathfrak{F}}^S, \mu^S)$, $(\tilde{\mathfrak{F}}^U, \mu^U)$, mutuellement transverses, et un scalaire $\lambda > 1$, tel que $\varphi(\tilde{\mathfrak{F}}^S, \mu^S) = (\tilde{\mathfrak{F}}^S, \lambda^{-1} \mu^S)$ et $\varphi(\tilde{\mathfrak{F}}^U, \mu^U) = (\tilde{\mathfrak{F}}^U, \lambda \mu^U)$.

Le disque admet un feuilletage mesuré avec épines, transversal au bord (figure 2). Il se peut aussi que, pour $\alpha \in \mathcal{J}$, on ait $I(\tilde{\mathfrak{F}}^S, \mu^S; \alpha) = 0$, bien que $\tilde{\mathfrak{F}}^S$ ne contienne aucun cycle de feuilles ^(†) (comme φ contracte les μ^U -longueurs,

^(†) On construit un tel exemple sur T^2 par la construction du § III faite sur (α, β) , où α est un "générateur" du tore et où β , isotope à α , découpe $T^2 - \alpha$ en cellules.

Figure 2



\mathfrak{F}^S n'a pas de liaison entre singularités). Un pseudo-Anosov généralisé peut laisser fixe un élément de \mathcal{A} ; il ne vérifie pas le lemme de croissance des classes d'isotopie de courbes (proposition 19 de l'exposé 9)(voir note en bas de page précédente). D'ailleurs, il peut être isotope à l'identité (voir l'exemple sur S^2 en 3.6, exp. 11).

Néanmoins, son qualificatif n'est pas usurpé à cause de la remarque suivante. Si on troue la surface à la pointe des épines, on obtient un difféomorphisme pseudo-Anosov de la surface à bord. En particulier, le théorème de récurrence de Poincaré reste vrai et on peut construire une partition de Markov. Donc un pseudo-Anosov généralisé est encore un processus de Bernoulli.

§ II. - CONSTRUCTION PAR REVÊTEMENT RAMIFIÉ

II.1. Soit $p : N \rightarrow M$ un revêtement ramifié de surfaces compactes ; soit $\Sigma \subset M$ le lieu de ramification. On suppose que le revêtement est galoisien de groupe G au-dessus de $M - \Sigma$. Soit φ un pseudo-Anosov généralisé de M ; par isotopie de p , on peut placer Σ dans l'ensemble infini des points périodiques de φ . Alors, quitte à remplacer φ par une de ses puissances, on peut supposer que $\varphi|_{\Sigma} = \text{Id}$. Le revêtement régulier de p au-dessus de $M - \Sigma$ est classifié par un élément de $H^1(M - \Sigma ; G)$, groupe fini sur lequel opère φ . Quitte de nouveau à prendre une puissance de φ , on peut supposer que $\varphi^*(p : N \rightarrow M) \approx (p : N \rightarrow M)$; autrement dit, φ se relève en un difféomorphisme ψ . Les propriétés locales de φ sont les mêmes que celles de ψ ; donc ψ est un pseudo-Anosov généralisé, avec le même facteur de dilatation.

II.2. Toute surface orientable fermée N , de genre $g \geq 1$, est l'espace total d'un revêtement ramifié à 2 feuillets sur T^2 avec un lieu de ramification Σ vérifiant :

$$\text{card } \Sigma = 2g - 2 .$$

Pour le voir, on perce T^2 en $n = \text{card } \Sigma$ points ; cette variété ouverte se rétracte sur un bouquet de $n + 1$ cercles $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+1}$; disons que les $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}$

entourent chacun un trou et que ϵ_n et ϵ_{n+1} sont "générateurs" du tore. Le dernier trou, noté ∞ , est entouré homologiquement par $[\epsilon_1] + \dots + [\epsilon_{n-1}]$. On construit le revêtement associé à l'homomorphisme $\pi_1(T^2 - \Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui envoie $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}$ sur 1 qui prend n'importe quelle valeur sur ϵ_n et ϵ_{n+1} . Comme n est pair, le revêtement est non trivial au voisinage de ∞ . Ainsi la compactification donne un revêtement qui est effectivement ramifié en chaque point de Σ .

Soit φ un Anosov (linéaire) de T^2 , qui est l'identité sur Σ et qui se relève en ψ dans N . Le feuilletage stable de ψ est transversalement orientable et ses singularités ont 4 branches. Donc ψ est pseudo-Anosov (non généralisé) et le feuilletage stable est défini comme feuilletage mesuré par une 1-forme fermée ω^S ; on a :

$$\psi^* \omega^S = \lambda \omega^S \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 1) .$$

De même, on a $\psi^* \omega^U = \lambda^{-1} \omega^U$, où ω^U définit le feuilletage instable. Noter que les deux égalités simultanées interdisent à ψ d'être dérivable aux singularités, mais on peut approcher ψ par un difféomorphisme ψ' qui satisfait l'une des égalités.

L'inconvénient de cette construction est d'être assez peu maniable au niveau du calcul, par exemple pour trouver l'effet de ψ sur l'homologie.

§ III. - CONSTRUCTION PAR TWISTS DE DEHN

On suppose que la surface M est orientable et fermée. Dans le cas où il y aurait un bord, on commencerait par boucher les trous et, à la fin de la construction décrite ci-dessous, on éclaterait le nombre correspondant de singularités.

III. 1. Structure plate sur M .

Soient α et β deux courbes simples de M , à intersections transversales, vérifiant la condition suivante :

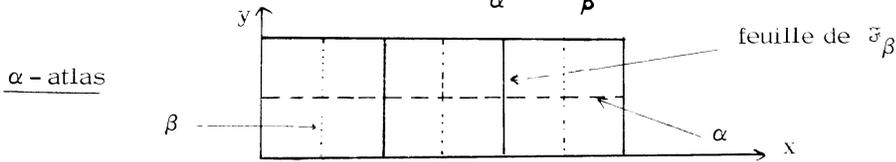
(*) Chaque composante de $M - (\alpha \cup \beta)$ est une cellule (ouverte) .

La décomposition cellulaire induite sur M par $\alpha \cup \beta$ admet une décomposition cellulaire duale : les co-sommets sont les centres des cellules de $M - (\alpha \cup \beta)$; chaque arc de $(\alpha \cup \beta) - (\alpha \cap \beta)$ est traversé par une co-arête ; chaque point x de $\alpha \cap \beta$ est le centre d'une co-cellule, qui est un carré puisque α et β ne passent chacun qu'une fois en x .

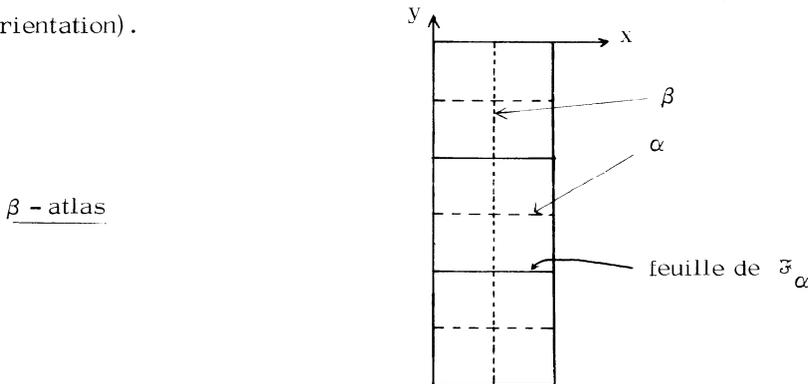
En "élargissant" α , au sens de l'exposé 5, on construit un feuilletage mesuré $\tilde{\omega}_\alpha$, transversal à β et aux co-arêtes qui rencontrent α ; on s'arrange

aussi pour que les co-arêtes qui ne rencontrent pas α soient dans des feuilles de $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$. Similairement, on construit $\tilde{\mathfrak{F}}_\beta$ en élargissant convenablement β ; d'ailleurs, par des isotopies dans l'intérieur des co-cellules, on peut prendre $\tilde{\mathfrak{F}}_\beta$ transversal à $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$. Ces feuilletages ont leurs singularités aux co-sommets; dans le complémentaire, ils définissent une structure plate. On comprend bien ces feuilletages dans les figures "déroulées" ci-dessous.

Si on déroule les co-cellules le long de α , on obtient une bande de $n = \text{card}(\alpha \cap \beta)$ carrés, que l'on place dans \mathbb{R}^2 de sorte que dy et dx induisent respectivement les feuilletages mesurés $\tilde{\mathfrak{F}}_\alpha$ et $\tilde{\mathfrak{F}}_\beta$.



De même, on construit le β -atlas par déroulement le long de β (en respectant l'orientation).



Les changements de cartes sont des isométries de \mathbb{R}^2 avec dérivée ± 1 , selon le signe du point d'intersection où est centrée la co-cellule. [Noter que le changement de cartes conservant l'orientation ne peut avoir pour dérivée la matrice diagonale $\text{diag}(1, -1)$.] Par conséquent, relativement à ces atlas, la notion de feuilletage mesuré linéaire est intrinsèque; d'ailleurs, la pente du feuilletage est invariante par changement de cartes. Une fois que l'on revient sur M , le feuilletage est lisse sauf aux co-sommets (chaque point du complémentaire est intérieur à au moins une carte). Les co-sommets apparaissent comme singularités (inexistantes si la cellule correspondante est un carré). Le nombre de séparatrices du feuilletage au sommet est la moitié du nombre de côtés de la cellule correspondante.

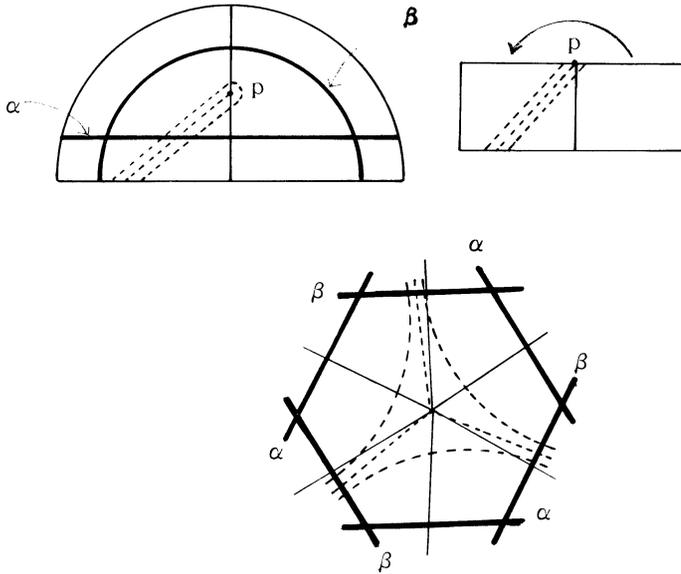


Figure 3

Remarque. Si tous les points d'intersection de α et β sont de même signe, alors les changements de cartes ont $+1$ pour dérivée ; donc, l'orientation des feuilletages est invariante par changement de cartes. Autrement dit dans ce cas, tous les feuilletages linéaires sont orientables. D'ailleurs, les atlas définissent une application $M \rightarrow T^2$ qui est un revêtement à n feuillets ramifié en un point ; mais le revêtement n n'est pas régulier et on ne contrôle pas la fibre singulière.

III. 2. Homéomorphismes affines.

Un homéomorphisme φ sera dit affine s'il laisse invariant l'ensemble des sommets et si l'image d'une droite de la structure plate est une droite. Soit $A(M)$ le groupe des homéomorphismes affines.

La dérivée de φ , modulo $\pm I$, est indépendante de l'atlas utilisé et du point où on la calcule. On a donc un homomorphisme de dérivation

$$D : A(M) \longrightarrow GL(2, \mathbb{R}) / \pm I .$$

Par exemple, le twist de Dehn positif le long de α (resp. β) admet un représentant affine qui, dans le α -atlas (resp. β -atlas), est induit par la transformation linéaire de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ [resp } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}] .$$

Les dérivées de ces twists sont données par les classes de ces matrices dans $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

Remarque. C'est à ce point qu'on utilise qu'il n'y a que deux courbes. En effet, dans ce cas, le α -atlas couvre tout M et l'homéomorphisme est bien défini par sa description dans le α -atlas. D'ailleurs, s'il y a plus de deux courbes, le twist le long de α ne peut pas en général être représenté par un homéomorphisme affine.

Lemme. Un homéomorphisme affine φ de M est un pseudo-Anosov généralisé si et seulement si $D\varphi$ a des valeurs propres réelles $(\lambda, \frac{1}{\lambda})$ avec $\lambda \neq 1$.

Preuve. La condition sur $D\varphi$ signifie que φ respecte deux feuilletages linéaires transverses en contractant les distances sur les feuilles de l'un et en les dilatant sur celles de l'autre, par un facteur constant. \square

III. 3. Théorème. Soit $G(\alpha, \beta)$ le sous-groupe de $A(M)$ engendré par les twists de Dehn affines le long des courbes α et β qui vérifient la condition $(*)$. La dérivation induit un homomorphisme $D : G(\alpha, \beta) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Alors, $\varphi \in G(\alpha, \beta)$ est un pseudo-Anosov généralisé si et seulement si $D\varphi$ a des valeurs propres réelles distinctes de ± 1 . Si en plus, $\text{card}(\alpha \cap \beta) = i(\alpha, \beta)$ (intersection minimale), alors φ est pseudo-Anosov.

Remarques. 1) Dans son annonce, Thurston dit qu'il existe un homomorphisme $G(\alpha, \beta) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{Z})$; étant donné sa valeur sur les deux twists, c'est un relèvement de D .

2) Une matrice de $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, dont la trace a un module > 2 , est d'Anosov. Donc, si φ est obtenu en combinant des twists positifs le long de α et négatifs le long de β , avec au moins un de chaque, alors φ est un pseudo-Anosov généralisé.

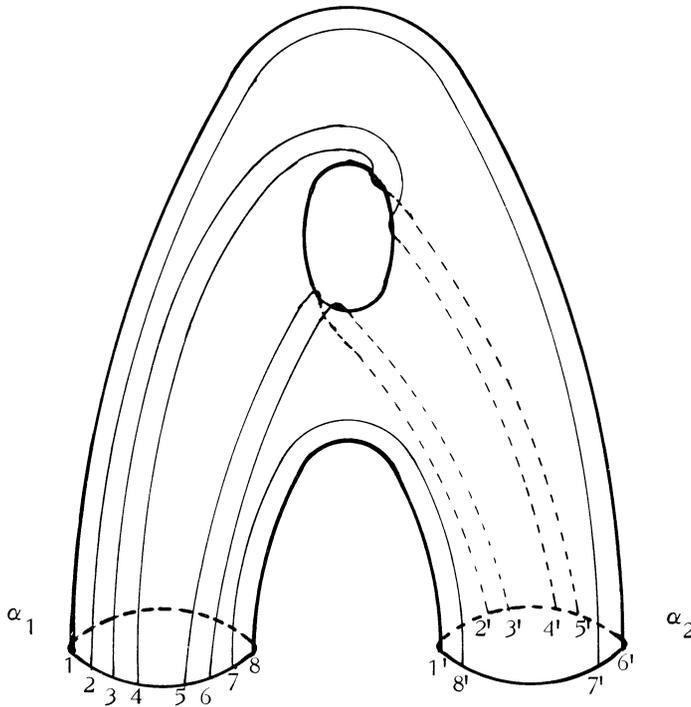
Démonstration du théorème. Après le lemme, il ne reste à prouver que la seconde assertion. Or un feuilletage linéaire a une épine si et seulement si le co-sommet correspondant est le centre d'une cellule à deux côtés; l'hypothèse d'intersection minimale interdit cette configuration. \square

III. 4. Exemples.

Dans le premier exemple, on prend α à complémentaire connexe dans

M = surface fermée de genre 2 . Soient M' la surface obtenue en coupant M le long de α ; α_1 et α_2 sont les deux copies de α qui bordent M' . Il faut 4 arcs joignant α_1 à α_2 pour couper M' en 2 cellules octogonales. Mais il n'y a aucune façon de recoller α_1 à α_2 pour que ces arcs fassent une courbe connexe ; en revanche, cela devient possible si chaque arc est dédoublé (voir figure 4) . Dans cet exemple, tous les points d'intersection sont du même signe, donc les feuilletages linéaires sont orientables ; ils ont donc deux singularités à 4 branches ; ils sont donc définis par des 1-formes fermées avec pour singularité des selles de Morse.

Figure 4



D'autres exemples résultent du lemme suivant.

Lemme. Soit α une courbe simple non homotope à zéro sur la surface fermée M . Alors, il existe une courbe simple β telle que $M - (\alpha \cup \beta)$ soit une union de cellules. De plus, si α est homologue à zéro, β peut être choisie homologue à zéro.

Démonstration. On trouve une décomposition de M en pantalons par des courbes K_j telles que, pour tout j , $i(K_j, \alpha) \neq 0$ (si on pense à α comme à un feuilletage mesuré

on applique le lemme 1 de V.4, exposé 6). Soit β la courbe obtenue en twistant α d'un tour positif le long de chaque K_j . Prouvons d'abord que, pour tout $\gamma \in \pi_1(M)$, $i(\alpha, \gamma) \neq 0$ ou $i(\beta, \gamma) \neq 0$. Supposons $i(\alpha, \gamma) = 0$; alors, pour un j , $i(\gamma, K_j) \neq 0$ sinon γ serait isotope à l'un des K_ℓ et couperait α . Appliquons maintenant l'inégalité de l'appendice, exposé 4 :

$$|i(\beta, \gamma) - \sum_j i(\alpha, K_j) i(\gamma, K_j)| \leq i(\alpha, \gamma) = 0.$$

Donc, $i(\beta, \gamma)$ est strictement positif.

Ceci prouve que toute courbe simple γ dans $M - (\alpha \cup \beta)$ est homotope à zéro et donc borde un disque D dans M . On voit que D est contenu dans $M - (\alpha \cup \beta)$; en effet, dans le cas contraire, $\text{int } D$ contiendrait un morceau de β (ou de α); comme β ne coupe pas le bord de D , β serait entièrement contenu dans D , ce qui est absurde. A partir de là, il est facile de voir que les composantes de $M - (\alpha \cup \beta)$ sont des disques ouverts. \square

Lorsque α et β sont homologues à zéro, les homéomorphismes affines induisent l'identité en homologie. Pourtant certains d'entre eux ne sont, à isotopie près, ni périodiques ni réductibles; ceci contredit une conjecture de Nielsen [1], disant que, si les valeurs propres de l'automorphisme induit en homologie sont sur le cercle-unité, alors le difféomorphisme serait décomposable en morceaux périodiques.

Remarque. Toutes les constructions précédentes conduisent à des pseudo-Anosov dont le facteur de dilatation est un entier quadratique. Les "membres du séminaire" ne savent pas construire d'exemple où il soit de degré plus élevé.

RÉFÉRENCE

- [1] J. NIELSEN, Surface transformation classes of algebraically finite type, Danske Vid. Selsk. Math-Phys. Medd. 21 n° 2, 89 pp (1944)
[voir le rapport de R.H. Fox dans Math. Rev. 7, p. 469].

Astérisque

DAVID FRIED

Fibrations over S^1 with pseudo-Anosov monodromy

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 251-266

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__251_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FIBRATIONS OVER S^1 WITH PSEUDO-ANOSOV MONODROMY

by David FRIED

We will develop Thurston's description of the collection of fibrations of a closed three manifold over S^1 . We will then show that the suspended flows of pseudo-Anosov diffeomorphisms are canonical representatives of their nonsingular homotopy class, thus extending Thurston's theorem for surface homeomorphisms to a class of three dimensional flows. Our proof uses Thurston's work on fibrations and surface homeomorphisms and our criterion for cross-sections to flows with Markov partitions. We thank Dennis Sullivan for introducing Thurston's results to us. We are also grateful to Albert Fathi, François Laudenbach and Michael Shub for their helpful suggestions.

A smooth fibration $f: X \rightarrow S^1$ of a manifold over the circle determines a nonsingular (i.e. never zero) closed 1-form $f^*(d\theta)$ with integral periods. Conversely if ω is a nonsingular closed 1-form and X is closed, then the map $f(x) = \int_{x_0}^x \omega$ from X to $\mathbb{R}/\text{periods}(\omega)$ will be a fibration over S^1 provided the periods of ω have rational ratios. For since $\pi_1 X$ is finitely generated, the periods of ω will be a cyclic subgroup of \mathbb{R} (not trivial since X is compact and f open) and we have $\mathbb{R}/\text{periods}(\omega) \cong S^1$. By constructing a smooth flow ψ on X with $\omega(\frac{d\psi}{dt}) = 1$, we see that f is a fibration. The relation of nonsingular closed 1-form to fibrations over S^1 is very strong indeed, as the following theorem (which gives strong topological constraints on the existence of nonsingular closed 1-forms) indicates.

Theorem 1 [15]. For a compact manifold X , the collection \mathcal{C} of nonsingular classes, that is the cohomology classes of nonsingular closed 1-forms on X , is an open cone in $H^1(X; \mathbb{R}) - \{0\}$. The cone \mathcal{C} is nonempty if and only if X fibers over S^1 .

Proof. The openness of \mathcal{C} follows easily from de Rham's Theorem. If η_1, \dots, η_d are closed 1-forms that span $H^1(X; \mathbb{R})$ and if ω_0 is a closed 1-form, then the forms $\omega_a = \omega_0 + \sum_{i=1}^d a_i \eta_i$, $|a_i| < \epsilon$, represent a neighborhood of $[\omega_0]$ in $H^1(X; \mathbb{R})$. If ω_0 is nonsingular and ϵ sufficiently small, then the ω_a are nonsingular. The forms $\lambda \omega_a$, with $\lambda > 0$ represent all positive multiples of $[\omega_a]$, so \mathcal{C} is an open cone.

Choosing a so that the periods of ω_a are rationally related, we see that X fibers over S^1 . We already noted that $0 \notin \mathcal{C}$. Q.E.D.

In dimension 3, Stallings characterized the elements of $\mathcal{C} \subset H^1(X; \mathbb{Z}) \subset H^1(X; \mathbb{R})$. We note that if X is closed, connected and oriented and does fiber over S^1 with fibers of positive genus, then X will be covered by Euclidean space \mathbb{R}^3 . Thus X will be irreducible, that is every sphere S^2 embedded in X must bound a ball (this follows from Alexander's theorem showing \mathbb{R}^3 is irreducible). We assume henceforward that M is a closed, connected oriented and irreducible 3-dimensional manifold.

Theorem 2 [12]. If $u \in H^1(M; \mathbb{Z}) - \{0\}$, then there is a fibration $f: M \rightarrow S^1$ with $[f^*(d\theta)] = u$, if and only if $\ker(u: \pi_1 M \rightarrow \mathbb{Z})$ is finitely generated.

We observe that the forward implication holds even for finite complexes since the homotopy exact sequence identifies the kernel as the fundamental group of the fiber.

Theorem 2 reduces the geometric problem of fibering M to an algebraic problem, with only two practical complications. First, whenever $\dim H^1(M; \mathbb{R}) > 1$, there are infinitely many u to check. Secondly, it is difficult to decide if $\ker u$ is finitely generated. An infinite presentation may be readily constructed by the Reidemeister-Schreier process; this yields an effective procedure for deciding if the abelianization of $\ker u$ is finitely generated (we work out an example of this at the end of the chapter).

Thurston's theorem (theorem 5 below) helps to minimize the first problem and make Stallings criterion more practical. It will be seen that one need only examine finitely many u , provided one can compute a certain natural seminorm on $H^1(M; \mathbb{R})$.

As $H^1(M; \mathbb{Z}) \subset H^1(M; \mathbb{R})$ is a lattice of maximal rank, the seminorm will be determined by its values on $H^1(M; \mathbb{Z})$. Each $u \in H^1(M; \mathbb{Z})$ is geometrically represented by framed surfaces under the Pontrjagin construction [6]. A framed (that is, normally oriented) surface S represents u whenever there is a smooth map $f: M \rightarrow S^1$

with regular value x so that $S = f^{-1}(x)$ and $u = [f^*(d\theta)]$. By irreducibility of M , any framed sphere in M represents the 0 class so S may be taken sphereless (that is, all components of S have Euler characteristic ≤ 0).

Definition. $\|u\| = \min \{-\chi(S) \mid S \text{ is a sphereless framed surface representing } u\}$.

It is important to observe that a sphereless framed surface S in M , with $\|u\| = -\chi(S)$, must be incompressible (that is, for each component $S_i \subset S$, $\pi_1(S_i) \rightarrow \pi_1 M$ is injective). For (see Kneser's lemma [11]), one could otherwise attach a 2-handle to S_i so as to lower $-\chi(S)$ without introducing spherical components.

The justification for the notation $\|u\|$ is the following result.

Theorem 3 [13]. $\|u\|$ is a seminorm on $H^1(M; \mathbb{Z})$.

This follows from standard 3-manifold techniques. The triangle inequality follows from the incompressibility of minimal representatives and some cut and paste arguments. The homogeneity follows by the covering homotopy theorem for the cover $z^n : S^1 \rightarrow S^1$.

One instance where $\|u\|$ is easily computed is when u is represented by the fiber K of a fibration $f : M \rightarrow S^1$. We have :

Proposition 1 [13]. If $K \rightarrow M \xrightarrow{f} S^1$ is a fibration, then $\|[f^*(d\theta)]\| = -\chi(K)$.

Proof. By homogeneity we may suppose that $u = [f^*(d\theta)]$ is indivisible, that is $u(\pi_1 M) = \pi_1 S^1$. This implies that K is connected and that $K \times \mathbb{R}$ is the infinite cyclic cover of M determined by u . If K is a torus we are done, so assume $-\chi(K) > 0$. Any sphereless framed surface S representing u lifts to $K \times \mathbb{R}$, since for any component $S_0 \subset S$ we have $\pi_1 S_0 \subset \ker u = \pi_1 K$. If $-\chi(S) = \|u\|$, then S is incompressible and $\pi_1 S_0 \rightarrow \pi_1(K \times \mathbb{R}) = \pi_1 K$ is injective. Since subgroups of $\pi_1 K$ of infinite index are free, we see that S_0 is a finite cover of K , hence $\|u\| = -\chi(S) \geq -\chi(S_0) \geq -\chi(K)$, as desired. Q.E.D.

In fact, we see that any sphereless framed surface S representing u with minimal $-\chi(S)$ is homotopic to the fiber K .

The behaviour of $\|\cdot\|$ is decisively determined by the fact that integral classes have integral seminorms. We will show :

Theorem 4 [13]. A seminorm $\|\cdot\| : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ extends uniquely to a seminorm

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$. A seminorm on \mathbb{R}^n takes integer values on $\mathbb{Z}^n \Leftrightarrow \|\cdot\| = \max_{\ell \in F} |\ell(x)|$, where $F \subset \text{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ is finite.

This enables us to state Thurston's description of the cone \mathcal{C} of nonsingular classes, $\mathcal{C} \subset H^1(M; \mathbb{R}) - \{0\}$.

We will consistently use certain natural isomorphisms of the homology and cohomology groups of M . By the Universal Coefficient Theorem, $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(M; \mathbb{Z}); \mathbb{Z})$ and $H_1(M; \mathbb{Z})/\text{torsion} \cong \text{Hom}(H^1(M; \mathbb{Z}); \mathbb{Z})$. With real coefficients, $H^i(M; \mathbb{R})$ and $H_i(M; \mathbb{R})$ are dual vector spaces for any i . By Poincaré Duality, we may identify $H^2(M; \mathbb{Z})$ with $H_1(M; \mathbb{Z})$. Thus we regard the Euler class χ_F of a plane bundle F on M , which is usually taken to be in $H^2(M; \mathbb{Z})$, as an element of $H_1(M; \mathbb{Z})$ and thus as a linear functional on $H^1(M; \mathbb{R})$.

Theorem 5 [13]. \mathcal{C} is the union of (finitely many) convex open cones $\text{int}(T_i)$ where T_i is a maximal region on which $\|\cdot\|$ is linear. The region T_i containing a given nonsingular 1-form ω is $T_i = \{u \in H^1(M; \mathbb{R}) \mid \|u\| = -\chi_F(u)\}$ where χ_F is the Euler class of the plane bundle $F = \ker \omega$.

Note. When $\|\cdot\|$ is a norm, we may say that \mathcal{C} is all vectors $v \neq 0$ such that $\frac{v}{\|v\|}$ belongs to certain "nonsingular faces" of the polyhedral unit ball. Incidentally, we have that $\|\cdot\|$ is a norm \Leftrightarrow all $T^2 \subset M$ separate $M \Leftrightarrow$ all incompressible $T^2 \subset M$ separate M .

We give our own analytic proof of theorem 4.

Proof of theorem 4. Clearly $\|\cdot\|$ extends by homogeneity to a seminorm $\|\cdot\|$ on \mathbb{Q}^n . This function is Lipschitz, hence has a unique continuous extension to a function $\mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$. The triangle inequality and homogeneity follow by continuity.

By convexity, all one-sided directional derivatives of $N(x) = \|\cdot\|$ exist. Suppose $\tau = (0, \frac{1}{q}p)$, $q \in \mathbb{Z}^+$, $p = (p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ is a rational point. For integral m , we compute

$$\begin{aligned} \frac{\partial_+ N}{\partial x_1}(\tau) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{N(\tau + 1/qm e_1) - N(\tau)}{1/qm} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (N(1, mp_2, \dots, mp_n) - N(0, mp_2, \dots, mp_n)) \\ &\in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

since \mathbb{Z} is closed.

By induction on n , we assume that $N(0, \bar{x})$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, is given by the supremum of finitely many functionals $\ell(\bar{x}) = a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$, $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $\bar{x} = (x_2, \dots, x_n)$. By convexity, any supporting line L to graph $(N) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ lies in a supporting hyperplane H (supporting means intersects the graph without passing above it). We choose \bar{x} a rational point for which $N|_{0 \times \mathbb{R}^{n-1}}$ is locally given by ℓ and choose L to pass through $(0, \bar{x}, N(0, \bar{x})) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ in the direction $(1, 0, \frac{\partial N}{\partial x}(0, \bar{x}))$. Then we see that H is uniquely determined as the graph of $(\frac{\partial N}{\partial x_1}(0, \bar{x})) x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$. So for a dense set of \bar{x} , the graph of N has a supporting functional at $(0, \bar{x})$ with integral coefficients.

Reasoning for each integrally defined hyperplane as we have for $\{x_1 = 0\}$, we find integral supporting functionals $\ell(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$, $a_i \in \mathbb{Z}$, to the graph of N exist at a dense set in \mathbb{R}^n . Since N is Lipschitz, there is a bound $|a_i| \leq K$, $i = 1, \dots, n$. Thus the supporting functionals form a finite set F , so $S(x) = \sup_{\ell \in F} |\ell(x)|$ is clearly a seminorm. But $S(x) \leq N(x)$ and equality holds on a dense set, implying that $S(x) = N(x)$ by continuity. Q.E.D.

Before giving the proof of theorem 5, let us observe one elementary consequence of theorem 4. Since $\|\cdot\|$ is natural, any diffeomorphism $h : M \rightarrow M$ induces an isometry h^* of $H^1(M; \mathbb{R})$. If $\|\cdot\|$ is a norm, then the finite set of vertices of the unit ball spans $H^1(M; \mathbb{R})$ and is permuted by h^* .

Corollary. If all incompressible $T^2 \subset M$ separate M , then the image of $\text{Diff}(M)$ in $\text{GL}(H^1(M; \mathbb{R}))$ is finite.

Proof of theorem 5. Suppose ω, ω' are nonsingular closed 1-forms that are C^0 close. Then the oriented plane fields $F = \ker \omega$, $F' = \ker \omega'$ are homotopic and so determine the same Euler class $\chi_{F'} = \chi_F \in H_1(M; \mathbb{R})$.

If $[\omega']$ is rational, let $q[\omega'] = \beta' \in H^1(M; \mathbb{Z})$, where $0 < q \in \mathbb{Q}$ and β' is indivisible. Then if K' is the (connected) fiber of the fibration associated to $q\omega'$, we have $\chi(K') = \chi_{F'}(K') = \chi_F(K')$. Using this and proposition 1, we find $\|[\omega']\| = \frac{1}{q}(-\chi(K')) = -\frac{1}{q}\chi_F(K') = -\chi_F[\omega']$. Thus for all rational classes $[\omega']$ near $[\omega]$, $\|\cdot\|$ is given by the linear functional $-\chi_F$. This shows that $\|\cdot\|$ agrees with $-\chi_F$ on a neighborhood of any nonsingular class $[\omega]$, as desired.

It only remains to show that every $\alpha \in \text{int } T$ is a nonsingular class, where $T = \{\alpha \in H^1(M; \mathbb{R}) \mid \|\alpha\| = -\chi_F(\alpha)\}$ is the largest region containing $[\omega]$ on which $\|\cdot\|$ is linear.

For this, we need a result of Thurston's thesis [14] concerning the isotopy of an incompressible surface $S \subset M$ when M is foliated without "dead end components". In fact, this result is only explicitly stated for tori, and one must see [8] for a published account of this case. Restricting our attention to the foliation \mathfrak{F} defined by ω (\mathfrak{F} is tangent to $\ker \omega \circ F$), we may state this result as follows: any incompressible, oriented and connected surface $S_0 \subset M$ with $-\chi(S_0) \neq 0$ may be isotoped so as to either lie in a leaf of \mathfrak{F} or so as to have only saddle tangencies with \mathfrak{F} . (We call a tangency point s of S_0 with \mathfrak{F} a saddle if for some open ball B around s , the map $\int_S^X \omega : B \cap S_0 \rightarrow \mathbb{R}$ has a nondegenerate critical point at s which is not a local extremum.)

Suppose $\alpha \in T \cap H^1(M; \mathbb{Z})$ is not a multiple of $[\omega]$. Represent α by a framed sphereless surface with $-\chi(S) = \|\alpha\|$. As S is incompressible, each component of S may be isotoped (independently) to a surface S_i which either lies in a leaf of \mathfrak{F} or has only saddle tangencies with \mathfrak{F} . If some S_i lies in a leaf L of \mathfrak{F} , then (as in proposition 1) $\pi_1 S_i$ would be of finite index in $\pi_1 L = \ker [\omega]$. Since $\pi_1 S_i \subset \ker \alpha$, we would find that α is a multiple of $[\omega]$. Thus each S_i has only saddle tangencies with \mathfrak{F} .

Lemma. For each i , the normal orientations of S_i and \mathfrak{F} agree at all tangencies.

Proof of lemma. We compute $\|\alpha\|$ in two ways. First, $\|\alpha\| = -\chi(S) = \sum_i -\chi(S_i)$. Choosing some Riemannian metric on M , we may use the vector field V_i on S_i dual to $\omega|_{S_i}$ to compute $-\chi(S_i)$. V_i will have only nondegenerate zeroes of index -1 , since all tangencies are saddles. The Hopf Index theorem [6] gives $-\chi(S_i) = n_i$, where n_i is the number of tangencies of S_i with \mathfrak{F} . Thus $\|\alpha\| = \sum n_i$.

On the other hand, we know that $\alpha \in T$ implies $\|\alpha\| = -\chi_F(\alpha)$. The natural normal orientations of F and S gives us preferred orientations on F and S_i , for each i . Each oriented plane bundle $F|_{S_i}$ has an Euler class $\chi_F(S_i)[S_i]$ where $[S_i] \in H^2(S_i; \mathbb{Z})$ is the orientation class. We compute $\chi_F(S_i)$ as the self-intersection number of the zero section of $F|_{S_i}$. For this purpose, look at the field W_i of vectors on S_i tangent to \mathfrak{F} , which are the projection onto F of the unit normal vectors of S_i . Regarding W_i as a perturbation of the zero section of $F|_{S_i}$, we compute the self-intersection number using the local orientations of F and S_i . When these orientations agree, one counts the singularity as -1 (just as in the tangent bundle case already considered) but when the orientations disagree one counts $+1$. Thus $-\chi_F(S_i) = n_i^+ - n_i^-$, where n_i^+ is the number of tangencies at which the orientations agree and n_i^- is the number of tangencies at which the orientations disagree. Thus

$$\|\alpha\| = \sum n_i^+ - \sum n_i^- .$$

Since $n_i = n_i^+ + n_i^-$, we have $\sum n_i^+ + \sum n_i^- = \|\alpha\| = \sum n_i^+ - \sum n_i^-$, whence all the nonnegative integers n_i^- must be zero. This proves the lemma.

Because of the lemma, we may define a framing N_i of S_i with $\omega(N_i) > 0$ everywhere. This framing may be extended to a product neighborhood structure on $U_i \supset S_i$, where $h : S_i \times [-1, 1] \rightarrow U_i$ is a diffeomorphism, $h_* (\frac{\partial}{\partial t}) = N_i$ on $S_i = S_i \times 0$ and $\omega(h_* (\frac{\partial}{\partial t})) > 0$. Let $B : [-1, 1] \rightarrow [0, \infty]$ be a smooth function vanishing on $|x| > \frac{1}{2}$ with $\int_{-1}^+ B = +1$. Letting $\eta_i = (\pi_2 h^{-1})^* B dt$ we find that, for all $s > 0$, $(\omega + s\eta_i)(h_* \frac{\partial}{\partial t}) > 0$ on U . But since $\omega + s\eta_i = \omega$ away from U , we see that the closed 1-form $\omega + s\eta_i$ is nonsingular.

The portion of theorem 5 already proven gives $[\omega + s\eta_i] \in \text{int } T$. Thus, $[\eta_i] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{[\omega + s\eta_i]}{s} \in T \cap H^1(M; \mathbb{Z})$, for all i . So replacing $[\omega]$ by $[\omega] + s_1[\eta_1] + \dots + s_{i-1}[\eta_{i-1}]$, we see inductively that $[\omega] + s_1[\eta_1] + \dots + s_i[\eta_i]$ is nonsingular for all $s_1, \dots, s_i \geq 0$. In particular, for all $s \geq 0$, $[\omega] + s\alpha = [\omega] + s \sum [\eta_i]$ is nonsingular.

We just showed that if $\beta = [\omega] \in \text{int } T$ is a nonsingular class, then $\beta + s\alpha$ is nonsingular for all $\alpha \in T \cap H^1(M; \mathbb{Z})$ and $s \geq 0$. Now consider an arbitrary $\gamma \in \text{int } T$, $\gamma \neq \beta$. By convexity we may find $v_1, \dots, v_d \in \text{int } T$, $d = \dim H^1(M; \mathbb{R})$, so that γ is in the interior of the d -simplex spanned by β, v_1, \dots, v_d . We may choose $v_1 \dots v_d$ rational, say $v_j = \frac{1}{N} \alpha_j$, some $N \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha_j \in \text{int } T \cap H^1(M; \mathbb{Z})$. We have $\gamma = t_0\beta + \sum_{j=1}^d t_j \alpha_j$, with all $t_j > 0$. By induction on k , we see that each $\beta + \sum_{j=1}^k (t_j/t_0) \alpha_j$ is nonsingular. Setting $k = d$ and multiplying by $t_0 > 0$, we see that γ is nonsingular as well. Thus if one point $\beta \in \text{int } T$ is nonsingular all $\gamma \in \text{int } T$ are nonsingular. Q.E.D.

We will sharpen Thurston's theorem 5 in the case when M is atoroidal (contains no incompressible imbedded tori) and $H^1(M; \mathbb{Z}) \neq \mathbb{Z}$. We show (theorem 7) that a nonsingular face T (i.e. one containing a nonsingular class) of the unit $\|\cdot\|$ -ball determines a canonical flow $\varphi_t : M \rightarrow M$ such that $\text{int } T$ consists precisely of all $[\omega]$ where ω is a closed one form with $\omega(\frac{d\varphi}{dt}) > 0$. We must begin by relating the atoroidal condition to Thurston's classification of surface homeomorphisms.

We suppose $f : M \rightarrow S^1$ is a fibration. Then flows ψ_t for which $\frac{d}{dt} f(\psi_t m) > 0$ (we will only consider flows having a continuous time derivative) determine an isotopy class of surface homeomorphisms. For any $k \in K = f^{-1}(1)$, we consider the smallest time $T(k) > 0$ for which $\psi_{T(k)}(k) \in K$. This map $T(k) : K \rightarrow (0, \infty)$ is smooth (since the flow lines of ψ are transverse to K) and the return map $R(k) = \psi_{T(k)}(k)$ is a homeomorphism. By varying ψ , we obtain an isotopy class of homeomorphisms of the fiber K as return maps; this isotopy class will be called the monodromy of f and denoted $m(f)$.

We remark that the monodromy of f is determined algebraically by the cohomology class $\beta = f^* [d\epsilon] \in H^1(M; \mathbb{Z})$, or equivalently by the map $f_* : \pi_1 M \rightarrow \pi_1 S^1$. First assume that β is indivisible. From the exact homotopy sequence $1 \rightarrow \pi_1 K \rightarrow \pi_1 M \xrightarrow{f_*} \pi_1 S^1 \rightarrow 1$, we see that $\pi_1 M$ is the semidirect product $\pi_1 K \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$, where α is the outer automorphism of $\pi_1 K$ determined by the monodromy of f . Thus $\pi_1 K (= \ker f_*)$ and α are determined by f_* alone. Clearly the topological type of K is determined by $\pi_1 K$; but Nielsen also showed that isotopy classes in $\text{Diff}(K)$ correspond 1-1 to outer automorphisms of $\pi_1 K$. In general, $\beta = n\beta'$ is a positive integer multiple of an indivisible class β' , and n is determined by $\text{coker } f_* = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. We see that the fiber of f consists of n copies of K (where $\pi_1 K = \ker f_*$) which are permuted cyclically by the monodromy. The n th power of the monodromy preserves K and acts on $\pi_1 K$ by α (the outer automorphism of $\ker f_*$). Thus we may unambiguously speak of the monodromy of a nonsingular class $\beta \in H^1(M; \mathbb{Z})$.

We say that the monodromy $m(f)$ of a fibration $f : M \rightarrow S^1$ is pseudo-Anosov if the isotopy class has a pseudo-Anosov representative R . This representative is then uniquely determined within strict conjugacy, that is for any two pseudo-Anosov representatives $R_0, R_1 \in m(f)$ there will be a homeomorphism g isotopic to the identity for which $R_0 g = g R_1$.

Proposition 2. Suppose that $H^1(M; \mathbb{Z}) \neq \mathbb{Z}$. Given a fibration $f : M \rightarrow S^1$, M is atoroidal precisely when the monodromy $m(f)$ is pseudo-Anosov and the fibers of f are not composed of tori.

Proof. Suppose M contains an incompressible torus S and let \mathfrak{F} be the foliation of M by the fibers of f . Again using the result of Thurston's thesis discussed in the proof of theorem 5 [8, 14], we may isotope S to either lie in a leaf of \mathfrak{F} or to be transverse to \mathfrak{F} (since $\chi(S) = 0$, the presence of saddle tangencies would force there to be tangencies of other types). If S does lie in a leaf, then the fibers of f are composed of tori parallel to S . If the torus S is transverse to \mathfrak{F} , then one may define a

flow ψ on M that preserves S and satisfies $\frac{d}{dt}(f \circ \psi_t) = 1$. Thus the return map $\psi_1 : K \rightarrow K$, $K = f^{-1}(1)$, preserves the family of curves $S \cap K$. Since S is incompressible, each of those curves is homotopically nontrivial in K . If the monodromy of f were pseudo-Anosov, these curves would grow exponentially in length under iteration by ψ_1 . So we see that when $m(f)$ is pseudo-Anosov and the fibers of f are not unions of tori, then M must be atoroidal.

Conversely, when the fibers of f are unions of tori, these tori are essential. So we assume the components of the fibers have higher genus and that the monodromy is not pseudo-Anosov (hence reducible or periodic) and look for an incompressible torus. If $m(f)$ is reducible, we may construct ψ with $\frac{d}{dt}(f \circ \psi_t) = 1$ for which ψ_1 cyclically permutes a family of homotopically nontrivial closed curves $C \subset K$. Then $\{\psi_t C\}$ is an incompressible torus. If $m(f)$ has period n , after Nielsen (see exposé 11), we may choose ψ with $\frac{d}{dt}(f \circ \psi_t) = 1$ for which $\psi_n = \text{identity}$. Thus M is Seifert fibred. One may easily compute that $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g+1}$, where g is the genus of the topological surfaces which is the orbit space of $\psi [7]$. As we assumed $H^1(M; \mathbb{Z}) \neq \mathbb{Z}$, we must have a homologically nontrivial curve in this orbit space which corresponds to an incompressible torus in M . Q.E.D.

We may consider flows transverse to a fibration over S^1 from three viewpoints. The first is to begin with the fibration and produce transverse flows and an isotopy class of return maps. The second is to begin with a homeomorphism $R : K \rightarrow K$ and produce a fibration over S^1 with fiber K and a transverse flow φ with return map R . This is the well-known mapping torus construction, for which one sets $X = K \times [0, 1] / (k, 1) = (R(k), 0)$, $f : X \rightarrow ([0, 1] / 0 = 1) = S^1$ the natural fibration and defines ψ to be the flow along the curves $k \times [0, 1]$ with unit speed. Clearly $\psi_1 |_{K \times 0} = R$ is the return map of ψ , as desired. This flow ψ is called the suspension of R . The third viewpoint is to begin with a flow ψ on X and to seek a fibration f over S^1 to which ψ is transverse - a fiber K is called a cross-section to ψ . Note that K and ψ determine the return map R and an isotopy class of fibrations f .

In general, one has little hope of finding cross-sections, since many manifolds don't fiber over S^1 at all. But there is a classification of the fibrations transverse to ψ which is especially concrete in the case of interest to us now.

Suppose that some cross-section K to a flow φ has a return map $R : K \rightarrow K$ admitting a Markov partition $\mathfrak{m} = \{S_1, \dots, S_m\}$ (see exposé 10 - the case we need is when R is pseudo-Anosov). There is a directed graph with vertices S_1, \dots, S_m and arrows $S_i \rightarrow S_j$ for each i and j for which $R(S_i)$ meets $\text{int}(S_j)$. A loop ℓ

for \mathbb{R} is a cyclic sequence of arrows $S_{i_1} \rightarrow S_{i_2} \rightarrow \dots \rightarrow S_{i_k} \rightarrow S_{i_1}$. Each loop ε determines a periodic orbit for R and thus a periodic orbit $\gamma(\varepsilon)$ for φ . If all of i_1, \dots, i_k are distinct, we call ε minimal. There are only finitely many minimal loops ε .

We now discuss the classification and existence of cross-sections to flows. Given a flow φ on a compact manifold X there is a nonempty compact set of homology directions $D_\varphi \subset H_1(X; \mathbb{R}) / \mathbb{R}^+$, where the quotient space is topologized as the disjoint union of the origin and unit sphere. A homology direction for φ is an accumulation point of the classes determined by long, nearly closed trajectories of φ . We note that when K is a cross-section to φ , K is normally oriented by φ and so determines a dual class $u \in H^1(X; \mathbb{Z})$. Let $C_{\mathbb{Z}}(\varphi) = \{u \in H^1(X; \mathbb{Z}) \mid u \text{ is dual to some cross-section } K \text{ to } \varphi\}$.

Theorem 6 [1,2]. $C_{\mathbb{Z}}(\varphi) = \{u \mid u(D_\varphi) > 0\}$. If φ , as above, has a cross-section K and the return map R admits a Markov partition π , then $C_{\mathbb{Z}}(\varphi) = \{u \mid u(\gamma(\varepsilon)) > 0 \text{ for all minimal loops } \varepsilon \text{ for } \pi\}$.

Thus, $C_{\mathbb{Z}}(\varphi)$ consists of all lattice points in a (possibly empty) open convex cone $C_{\mathbb{R}}(\varphi) = \{u \mid u(D_\varphi) > 0\} \subset H^1(X; \mathbb{R}) - \{0\}$. It follows easily from theorem 6 that $C_{\mathbb{R}}(\varphi) = \{[\omega] \mid \omega \text{ is a closed 1-form with } \omega(\frac{d\varphi}{dt}) > 0\}$.

Returning to our discussion of three-manifolds, we call a flow φ on M pseudo-Anosov if it admits some cross-section for which the return map is pseudo-Anosov. We now describe the cross-sections to pseudo-Anosov flows, and show they are uniquely determined by their homotopy class among nonsingular flows on M .

Theorem 7. Suppose M fibers over S^1 . Then each flow φ on M that admits a cross-section determines a nonsingular face $T(\varphi)$ for the norm $\|\cdot\|$ on $H^1(M; \mathbb{R})$. Here $T(\varphi) = \{\|u\| = -\chi_{\varphi^\perp}(u)\}$ and φ^\perp denotes the normal plane bundle to the vector field $\frac{d\varphi}{dt}$. One has $C_{\mathbb{R}}(\varphi) \subset \text{int } T(\varphi)$.

For any pseudo-Anosov flow φ on M , $C_{\mathbb{R}}(\varphi) = \text{int } T(\varphi)$.

The face $T(\varphi)$ (or the class χ_{φ^\perp}) determines the pseudo-Anosov flow φ up to strict conjugacy. Thus any nonsingular face T on an atoroidal M with $H^1(M; \mathbb{Z}) \neq \mathbb{Z}$ determines a strict conjugacy class of pseudo-Anosov flows.

Proof. For $u \in C_{\mathbb{Z}}(\varphi)$, there is a cross-section K to φ dual to u . We have $\|u\| = -\chi(K)$, by proposition 1. Since the restriction $\varphi^\perp \mid K$ is the tangent bundle of K , we have $-\chi(K) = -\chi_{\varphi^\perp}(u)$. Thus $-\chi_{\varphi^\perp}$ is a linear functional on $H^1(M; \mathbb{R})$ that agrees with $\|\cdot\|$ on $C_{\mathbb{Z}}(\varphi)$ and the first paragraph of theorem 7 is shown.

We now observe

Lemma. Any cross-section K to a pseudo-Anosov flow φ on M will have pseudo-Anosov return map R_K .

Proof. By definition there is some cross-section L to φ with pseudo-Anosov return map R_L , but K and L will generally not be homeomorphic (one calls return maps to distinct cross-sections to the same flow flow-equivalent). In any case, any structure on L invariant under R_L is carried over to structure on K invariant under R_K under the system of local homeomorphisms between K and L determined by φ . This shows that R_K preserves a pair of transverse foliations \mathfrak{F}_K^u and \mathfrak{F}_K^s with the same local singularity structure as a pseudo-Anosov diffeomorphism.

We now show that the closure \bar{P} of any prong P of \mathfrak{F}_K^u or \mathfrak{F}_K^s is the component K_0 of K which contains P . By passing to a cyclic cover $M_n \rightarrow M$ determined by the composite homomorphism $\pi_1 M \rightarrow (\pi_1 M / \pi_1 K_0) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ and restricting to the cross-section $K_0 \subset M_n$ we may assume that K is connected and that R_K leaves P invariant (choose n so that P is invariant under $R_{K_0}^n$). Consider the closed R_L invariant subset $\{\varphi_t \bar{P}\} \cap L = I$. Since I contains the closure of a prong for the pseudo-Anosov diffeomorphism R_L , we know that I is dense in some component $L_0 \subset L$. As L_0 is a cross-section to φ , we find that $\{\varphi_t \bar{P}\} = M$. As \bar{P} is R_K invariant, we find $\bar{P} = K$ as desired.

Similarly we can check that the foliations \mathfrak{F}_K^u and \mathfrak{F}_K^s have no closed leaves.

It follows by the Poincaré-Bendixson theorem that each leaf closure contains a singularity, and thus a prong. So we find that all leaves of \mathfrak{F}_K^s and \mathfrak{F}_K^u are dense in their component of K .

We may see from this density of leaves and the fact that the local stretching and shrinking properties of R_K are the same as those of R_L that the Markov partition construction of exposé 10 works for R_K . (It is easiest to construct birectangles for R_K by "analytic continuation", from immersed birectangles in L . This makes sense because K and L have the same universal cover.) As in the Anosov case [9], the Parry measures for the one-sided subshifts of finite type associated to \mathfrak{F} push forward to give transverse measures on \mathfrak{F}_K^u and \mathfrak{F}_K^s that transform under R_K by factors λ_K^{-1} and λ_K , for some $\lambda_K > 1$. As leaves are dense, these measures have positive values on any transverse interval but vanish on points. Thus R_K is pseudo-Anosov.

Q.E.D.

Now suppose φ^1 and φ^2 are pseudo-Anosov flows on M for which $C_{\mathbb{R}}(\varphi^1)$

intersects $C_{\mathbb{R}}(\varphi^2)$. Then we may choose $u \in C_{\mathbb{R}}(\varphi^1) \cap C_{\mathbb{R}}(\varphi^2) \cap H^1(M; \mathbb{Z})$ and find fibrations $f_i : M \rightarrow S^1$ with $\frac{d}{dt}(f_i \circ \varphi_t^i) > 0$ and $u = [f_i^*(d\theta)]$, $i = 1, 2$.

As discussed earlier, u determines $m(f_i)$. This gives a homeomorphism $h : M \rightarrow M$ such that $f_1 \circ h = f_2$ where h acts on $\pi_1 M$ by the identity. Thus h is isotopic to the identity [16]. Hence, by this preliminary isotopy, we assume $f_1 = f_2 = f$ and denote the fiber by K .

Each φ^i determines a return map $R_i : K \rightarrow K$. By the lemma above, these R_i are pseudo-Anosov. Since the maps R_i are in the same isotopy class $h(f)$, they are strictly conjugate by the uniqueness of pseudo-Anosov diffeomorphisms (exposé 12).

Now suppose that $gR_1 = R_2g$, with g isotopic to the identity. Then the map $C_0 : M \rightarrow M$ defined by $C_0(\varphi_s^1 k) = (\varphi_s^2 gk)$, $k \in K$, $0 \leq s \leq 1$, is a homeomorphism conjugating flows φ^1 and φ^2 and $f \circ C_0 = f$. As $C_0|_K = g$ is isotopic to the identity, C_0 may be isotoped to C_1 where $f \circ C_t = f$, for $t \in [0, 1]$ and C_1 fixes K . Since

$\text{Diff } K$ is simply connected [4], we may isotop C_1 to the identity C_2 (through C_t satisfying $f \circ C_t = f$, $t \in [1, 2]$).

We have shown so far that if φ^i are pseudo-Anosov flows, $i = 1, 2$, then either $C_{\mathbb{Z}}(\varphi^1)$ equals $C_{\mathbb{Z}}(\varphi^2)$ or is disjoint from it, since conjugating a flow by a conjugacy isotopic to the identity doesn't affect $C_{\mathbb{Z}}$. It follows easily that the open cones $C_{\mathbb{R}}(\varphi^1)$ and $C_{\mathbb{R}}(\varphi^2)$ are either disjoint or equal.

Now suppose that φ is pseudo-Anosov but $C_{\mathbb{R}}(\varphi)$ is a proper subcone of $\text{int } T(\varphi)$. By theorem 6, $C_{\mathbb{R}}(\varphi)$ is defined by linear inequalities with integer coefficients, and so there is an integral class $u \in \text{int } T \cap \partial C_{\mathbb{R}}(\varphi)$. Then u is nonsingular (theorem 5), the fibration corresponding to u has pseudo-Anosov monodromy (proposition 2) and one obtains an Anosov flow ψ with $u \in C_{\mathbb{R}}(\psi)$. This shows that $C_{\mathbb{R}}(\psi)$ and $C_{\mathbb{R}}(\varphi)$ are neither disjoint nor equal, contradicting the previous paragraph.

Thus we see that pseudo-Anosov flows satisfy $C(\varphi) = \text{int } T(\varphi)$. Q.E.D.

Theorem 7 shows that pseudo-Anosov maps satisfy an interesting extremal property within their isotopy class. Suppose $h_0 : K \rightarrow K$ has suspension flow $\psi_t^0 : M \rightarrow M$, where we take K connected and dual to the indivisible class $u \in H^1(M; \mathbb{Z})$. Given an isotopy h_t starting at h_0 , we may deform ψ^0 through flows ψ^t with cross-section K and return map h_t . We regard $u^{-1}(1)$ as a subset of $H_1(M; \mathbb{R})/\mathbb{R}^+$ and note that we always have $D_{\psi^t} \subset u^{-1}(1)$. By the Wang exact sequence :

$$H_1(K; \mathbb{R}) \xrightarrow{h_{0*} - \text{Id}} H_1(K; \mathbb{R}) \rightarrow H_1(M; \mathbb{R}) \xrightarrow{u} \mathbb{R} \rightarrow 0,$$

we may identify $u^{-1}(1)$ with $u^{-1}(0) = \text{coker}(h_{0*} - \text{Id})$ by some fixed splitting of u . Whenever $h_s = h_t$, the simple connectivity of $\text{Diff } K$ [4] implies that $D_{\psi^s} = D_{\psi^t}$.

Thus we may unambiguously associate a set of homology directions $D_h \subset \text{coker}(h_{0*} - \text{Id})$ to homeomorphisms h isotopic to h_0 . Now assume that h_0 is pseudo-Anosov. By theorem 7, we have $C_{\mathbb{R}}(\psi^s) \subset \text{int } T(\psi^s) = \text{int } T(\psi^0) = C_{\mathbb{R}}(\psi^0)$. Thus we find, using theorem 6, that the convex hull of D_{h_s} (which may be identified with the asymptotic cycles of ψ^s in this situation [3, 10]) always contains the convex polygon determined at $s = 0$. Thus we may say that pseudo-Anosov diffeomorphisms have the fewest generalized rotation numbers in their isotopy class.

We may analyze the topological entropy of the return-maps R_K of the various cross-sections K to a pseudo-Anosov flow C . We parametrize these cross-sections K by their dual classes $u \in H^1(M; \mathbb{Z})$ and define $h : C_{\mathbb{Z}}(\varphi) \rightarrow (0, \infty)$ by $h([K]) = h(R_K)$, the topological entropy of R_K . We showed in [3] that $1/h$ extends uniquely to a homogeneous, downwards convex function $1/h : C_{\mathbb{R}}(\varphi) \rightarrow [0, \infty]$ that vanishes exactly on $\partial C_{\mathbb{R}}(\varphi)$. Thus $h(u)$ may be defined for all $u \in H^1(M; \mathbb{R})$ in a natural way. The smallest value of h on $\text{int } T \cap \{\|u\| = 1\}$ defines an interesting measure of the complexity of φ (or equivalently, by theorem 7, of the face $T = T(\varphi)$). The integral points at which h is largest give the "simplest" cross-section to the flow φ (see [3]).

If one is given a pseudo-Anosov diffeomorphism $h : K \rightarrow K$ and a Markov partition \mathfrak{m} for h , theorems 6 and 7 give an effective description of the nonsingular face T determined by the suspended flow $\varphi_t : M \rightarrow M$ of h , in terms of the orbits corresponding to minimal loops. As the computation of minimal loops in a large graph is difficult, we observe that there is a more algebraic way of using \mathfrak{m} to obtain a system of inequalities defining T . (We refer the reader to [3] for details, where we used this method to construct a rational zeta function for axiom A and pseudo-Anosov flows.) For sufficiently fine \mathfrak{m} , we may associate to \mathfrak{m} a matrix A with entries in $H_1(M; \mathbb{Z})/\text{torsion} \cong H$. The expression $\det(I - A)$, regarded as an element in the group ring of the free abelian group H , may be uniquely written as $1 + \sum a_i g_i$, $g_i \in H - \{0\}$, $a_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$, g_i distinct. Then T is defined by the inequalities $u(g_i) > 0$.

To illustrate Thurston's theory, it is convenient to work on a bounded M^3 . The norm considered above can be extended to such M by omitting spheres and discs before computing the negative Euler characteristic. One should restrict to the case where ∂M is incompressible, and then theorems 2 and 5 and proposition 1 extend [5, 13].

We let K be the quadruply connected planar region and h the indicated composite of the two elementary braids (figure 1) which fixes the outer boundary

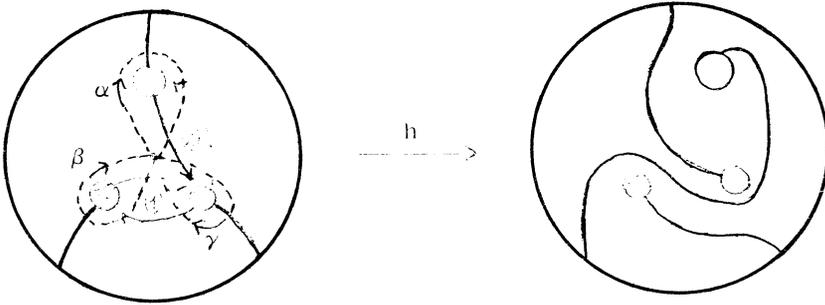


Figure 1

component. We will let M be the mapping torus of h and compute $\|u\|$. Rather than finding a pseudo-Anosov map isotopic to h , which would only help compute one face, we will instead compute $\ker(u : \pi_1 M \rightarrow \mathbb{Z})$ for several indivisible $u \in H^1(M; \mathbb{Z})$. When this kernel is finitely generated, theorem 2 shows u is nonsingular and proposition 1 enables us to compute $\|u\|$. From a small collection of values of $\|u\|$, theorem 5 allows us to deduce all the others, indicating the existence of nonsingular classes that would be hard to detect using only theorem 2.

We first compute $\pi_1 M = \pi_1 K \rtimes \mathbb{Z}$. Writing $\pi_1 K$ as the free group on the loops α , β and γ shown in the diagram, we find :

$$\begin{aligned} \pi_1 M &= \langle \alpha, \beta, \gamma, t \mid t^{-1} \alpha t = \gamma, \quad t^{-1} \beta t = \gamma^{-1} \alpha \gamma, \\ &\quad t^{-1} \gamma t = (\gamma^{-1} \alpha \gamma) \beta (\gamma^{-1} \alpha \gamma)^{-1} \rangle \\ &= \langle \alpha, \beta, \gamma, t \mid t^{-1} \alpha t = \gamma, \quad t^{-1} \beta t = \gamma^{-1} \alpha \gamma, \quad \gamma \beta t = \beta t \beta \rangle \\ &= \langle \gamma, t \mid (t \gamma^{-1} t \gamma t^{-1} \gamma)^2 = \gamma (t \gamma^{-1} t \gamma t^{-1} \gamma) t \rangle . \end{aligned}$$

Abelianizing gives $H_1(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \gamma \oplus \mathbb{Z} t$. Suppose $u \in H^1(M; \mathbb{Z})$ is indivisible, so that $a = u(\gamma)$ and $b = u(t)$ are relatively prime. The Reidemeister-Schreier process gives a presentation for $\ker(u : \pi_1 M \rightarrow \mathbb{Z})$ (essentially by computing the fundamental

group of the infinite cyclic cover corresponding to u) which is very ungainly for large a . When $a = 1$, one finds the relatively simple expression :

$$\ker u = \langle t_1 | t_1 t_{i+b-1} t_{i+b}^{-1} t_{i+b+1} t_{i+2b} t_{i+2b+1}^{-1} = t_{i+1} t_{i+b} t_{i+b+1}^{-1} t_{i+b+2} \rangle .$$

For $b > 1$, this relation expresses t_1 in terms of $t_{i+1}, \dots, t_{i+2b+1}$ and expresses t_{i+2b+1} in terms of t_1, \dots, t_{i+2b} . Thus $\ker u$ is free on t_1, \dots, t_{2b+1} . Similarly if $b < -1$, then $\ker u$ is free on t_1, \dots, t_{1-2b} and if $b = 0$, then $\ker u$ is free on t_1, t_2, t_3 . If $b = \pm 1$, however, one may abelianize and obtain

$(\ker u)^{ab} = \mathbb{Z}[t, t^{-1}] / 2t^3 - 3t^2 + 3t - 2$ which maps onto the collection of all 2^n th roots of unity, and so $\ker u$ is not finitely generated.

By theorem 2 (Stallings), there is a fibration for $u = (1, b)$ when $b \neq \pm 1$, with fiber K_u satisfying $\pi_1(K_u) = \ker u$. By proposition 1, $\|u\| = -\chi(K_u)$, which is clearly $-1 + \text{rank}(H_1 K_u) = \begin{cases} |2b|, & b > 1, \quad b \in \mathbb{Z} \\ 2, & b = 0. \end{cases}$

We will see that these values determine $\| \cdot \|$ completely. Using the dual basis to (γ, t) , we know that :

$$\|(1, b)\| = \begin{cases} |2b|, & b > 1, \quad b \in \mathbb{Z} \\ 2, & b = 0 \end{cases} .$$

But $\|(1, b)\|$ is a convex function f of b by theorem 3 and it takes integer values at integer points. By convexity, $f(1)$ must be 2 or 3. Were $f(1) = 3$, convexity would force $f(x) = \begin{cases} 2+x & \text{for } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$ and then $(1, 2)$ would not lie in an open face of

the unit ball, contradicting theorem 5. Thus one must have $f(1) = 2$, and likewise $f(-1) = 2$. By convexity, we find $f(x) = \max(|2x|, 2)$. Homogenizing shows

$$\|(a, b)\| = \max(|2a|, |2b|), \text{ i.e. } \|u\| = \max(|u(2\gamma)|, |u(2t)|) .$$

By theorem 5, $u \in H^1(M; \mathbb{R})$ is nonsingular $\Leftrightarrow |u(\gamma)| \neq |u(t)|$.

This example embeds in a larger one, constructed with the mapping torus M_0 of the transformation h^3 (M_0 is a triple cyclic cover of M). $H_1(M_0, \mathbb{Z})$ is free abelian on α, β, γ, t , so there is a norm on $H^1(M_0; \mathbb{R})$ whose restriction to $H^1(M; \mathbb{R}) \cong \{u \in H^1(M_0; \mathbb{R}) \mid u(\alpha) = u(\beta) = u(\gamma)\}$ is $3\| \cdot \|$. We leave its computation as an exercise.

REFERENCES

- [1] D. FRIED, Cross-sections to flows, Berkeley Ph.D. thesis, 1976.
- [2] D. FRIED, Geometry of cross-sections to flows, to appear.
- [3] D. FRIED, Flow equivalence, hyperbolic systems and a new zeta function for flows, to appear.
- [4] M.-E. HAMSTROM, Homotopy groups of the space of homeomorphism on a 2-manifold, III. J. Math. 10 (1966), p. 563-573.
- [5] J. HEMPEL, 3-manifolds, Princeton, 1976.
- [6] J. MILNOR, Topology from the differentiable viewpoint, U. Virginia 1966.
- [7] P. ORLIK, Seifert manifolds, Springer-Verlag, 1972.
- [8] R. ROUSSARIE, Plongements dans les variétés feuilletées, Publ. Math. I.H.E.S. 43 (1973), p. 143-168.
- [9] D. RUELLE and D. SULLIVAN, Currents, flows and diffeomorphisms, Topology 14 (1975), p. 319-327.
- [10] S. SCHWARTZMAN, Asymptotic cycles, Ann. Math. 66 (1957), p. 270-284.
- [11] J. STALLINGS, Group theory and three-dimensional manifolds, Yale 1971.
- [12] J. STALLINGS, On fibering certain 3-manifolds, Topology of 3-manifolds and related topics, Prentice Hall 1961.
- [13] W. THURSTON, A norm for the homology of 3-manifolds, to appear.
- [14] W. THURSTON, Foliations of 3-manifolds that are circle bundles, Berkeley, Ph.D. thesis, 1972.
- [15] D. TISCHLER, On fibering certain foliated manifolds over S^1 , Topology 9 (1970), p. 153-154.
- [16] F. WALDHAUSEN, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math. 87 (1968), p. 56-88.

Astérisque

A. MARIN

Présentation du groupe de difféotopies d'une surface compacte orientable

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 267-282

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__267_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PRÉSENTATION DU GROUPE DE DIFFÉOTOPIES
D'UNE SURFACE COMPACTE ORIENTABLE

(Une démonstration d'un théorème de A. Hatcher et W. Thurston)

par F. LAUDENBACH *
(exposé oral de A. MARIN)

- § 1. - Introduction
- § 2. - Méthode pour présenter G
- § 3. - Le complexe cellulaire des fonctions marquées
- § 4. - Le complexe des marquages

§ 1. - INTRODUCTION

Soient M une surface compacte fermée^(**) de genre n et G le groupe de difféotopies de M (les éléments de G sont les classes d'isotopie de difféomorphismes de M conservant l'orientation). Soit C une courbe simple de M à n composantes ; on dira que C est un marquage de M , si $M - C$ est connexe ; puisque n est le genre de M , la variété compacte à bord obtenue en coupant M le long de C est le disque Δ à $(2n - 1)$ trous. Le groupe G agit transitivement à droite sur l'ensemble des classes d'isotopie de marquages par :

$$C \longrightarrow \varphi^{-1}(C) ,$$

où φ est un difféomorphisme de M . Choisissons un marquage de base C_0 et désignons par H le sous-groupe de G stabilisateur de C_0 . Le groupe H est de présentation finie : celle-ci se calcule en termes du groupe des tresses pures à $(2n - 1)$ brins,

* Je remercie A. Marin pour son exposé oral et pour les éclaircissements qu'il m'a apportés sur le travail de Hatcher et Thurston.

** Le cas à bord peut se traiter de façon analogue.

du groupe des permutations des composantes de C_G , des "twists" de Dehn le long de chacune de ces courbes.

A. Hatcher et W. Thurston [2] ont donné une présentation de G modulo H ; précisément, ils ont construit un élément σ de G et des mots μ_1, \dots, μ_q dont les lettres appartiennent à $\{\sigma^k ; k \in \mathbb{Z}\} \cap H$ ayant les propriétés suivantes :

1° H et σ engendrent G ;

2° pour $i = 1, \dots, q$, l'élément m_i de G , représenté par μ_i , appartient à H ;

3° les mots $\mu_i m_i^{-1}$ engendrent les relations de G , c'est-à-dire engendrent comme sous-groupe invariant le noyau du morphisme naturel $H \times \mathbb{Z} \rightarrow G$ associé à σ .

En fait, même si on connaît une présentation de H , ceci dit seulement qu'il existe une présentation de G , mais n'en donne une que si l'on sait calculer les m_i . Il est vrai que les mots μ_i sont donnés par des constructions géométriques simples et qu'un difféomorphisme de Δ est entièrement déterminé à isotopie près si l'on dit ce qu'il fait sur quelques arcs. On pourra donc toujours, avec du courage, rendre explicites les "relations implicites" de Hatcher-Thurston.

Bien que l'exposé oral de A. Marin rapportât fidèlement sur ce travail, il semble inopportun de mimer un article à paraître. On tente ici de rendre un peu plus conceptuels les arguments de Hatcher-Thurston ; on verra par exemple dans la preuve du lemme 1, § 4, un fait géométrique particulier à la dimension 2 qui contribue de façon essentielle à la finitude. Pour simplifier, nous avons choisi de n'expliciter aucune présentation de G , sauf le cas du tore.

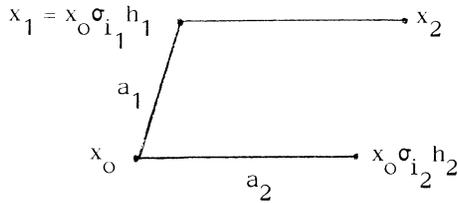
§ 2. - UNE MÉTHODE POUR PRÉSENTER G

2.1. Soit X un complexe polyédral 1-connexe de dimension 2 (pouvant être non localement fini), dans lequel chaque arête ou face est déterminée par ses sommets. Soient x_0 un sommet de base, A (resp. F) l'ensemble des arêtes (resp. faces) passant

par x_0 . On suppose que le groupe G agit cellulièrement à droite sur X , que G agit transitivement sur le 0-squelette $X^{[0]}$ et que H est le stabilisateur de x_0 ; alors H agit à droite sur A et F . On suppose A/H et F/H finis et on note $a_1, \dots, a_p, f_1, \dots, f_q$ des représentants de chaque orbite.

GÉNÉRATEURS

On choisit $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in G$ tels que les extrémités de a_1 soient $(x_0, x_0 \sigma_1)$. Alors les extrémités de toute arête s'écrivent $(x_0 g, x_0 \sigma_1 h g)$, $g \in G, h \in H$. Donc un mot $\sigma_{i_k} h_k \dots \sigma_{i_1} h_1$ décrit un chemin d'arêtes partant de x_0 et passant successivement par $x_1 = x_0 \sigma_{i_1} h_1, x_2 = x_0 \sigma_{i_2} h_2 \sigma_{i_1} h_1, \dots$ (voir Figure 1).



$(x_1 \text{ et } x_2 \text{ sont joints par } a_2 \cdot \sigma_{i_1} h_1)$

Figure 1

Tout chemin d'arêtes a une telle description. De la connexité de X découle alors que $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ et H engendrent G . Noter qu'un mot représente un lacet si et seulement si le produit des lettres appartient à H .

RELATIONS

1) Aller-retour : en exprimant que $(x_0, x_0 \sigma_1, x_0)$ est un lacet, on obtient une relation ; ou encore, il existe un entier $j \in [1, p]$ et $h \in H$ tels que :

$$\sigma_j h \sigma_1 \in H .$$

2) Différentes écritures de la même arête : il faut calculer le stabilisateur T_i de l'arête $(x_0, x_0 \sigma_i)$ et, pour chaque $t \in T_i$, exprimer

$$(x_0, x_0 \sigma_i) t = (x_0, x_0 \sigma_i)$$

c'est-à-dire $\sigma_i t \sigma_i^{-1} \in H$.

3) Le bord de chaque face f_i , $i = 1, \dots, q$, indique une relation.

Pour voir qu'on obtient ainsi une présentation de G modulo H au sens du § 1, il suffit de se rappeler que toute homotopie à zéro d'un lacet d'arêtes de X est formée des opérations élémentaires suivantes : insertion ou suppression du bord d'une face ou d'un aller-retour. On a donc démontré :

PROPOSITION. Si H est de présentation finie et si les stabilisateurs des arêtes sont de type fini, alors G est de présentation finie.

2. 2. L'objectif maintenant est de trouver un X sur lequel agisse le groupe de difféotopies. Le premier auquel on pense est le nerf N de l'espace des fonctions C^∞ numériques (de codimension ≤ 2), muni de sa stratification naturelle [1] ; N est 1-connexe, mais G n'agit pas transitivement sur N^{-0} . On peut penser à ne garder des strates de codimension 1 que celles qui correspondent à des croisements essentiels (voir § 3.1) ; on trouve alors un nerf 1-connexe sur les sommets duquel G agit transitivement, mais le stabilisateur d'un sommet est plus gros que H et semble difficile à étudier. Nous allons néanmoins utiliser ces idées pour faire apparaître l'ensemble des classes d'isotopie de marquages comme 0-squelette d'un complexe qui tirera sa 1-connexité de celle de N . A cet égard, le lemme ci-dessous est utile.

2. 3. Si Y et Z sont deux complexes connexes, on dira que $\pi : Y \rightarrow Z$ est cellulaire dans le cas suivant :

- 1) pour chaque cellule σ de Y , $\pi(\sigma)$ est une cellule de Z ;
- 2) $\pi|_{\text{int } \sigma}$ est une fibration sur son image (int σ désigne la cellule ouverte).

Par exemple, si σ est une 2-cellule, ou bien $\pi(\sigma)$ est un point ; ou bien $\pi(\sigma)$ est une arête et $\partial\sigma$ est réunion de quatre lignes brisées $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$, avec $\pi(\tau_1) = 1$ point, $\pi(\tau_3) = 1$ point, $\pi(\tau_2) = \pi(\sigma) = \pi(\tau_4)$; ou bien $\pi(\sigma)$ est une 2-cellule et $\pi|_{\partial\sigma}$ est de degré 1 sur son image. On obtient alors très facilement :

LEMME. Soit $\pi : Y \rightarrow Z$ une application cellulaire au sens ci-dessus. On suppose que

- 1) pour tout $x \in Z^{[2]} - Z^{[1]}$, $\pi^{-1}(x)$ est non vide ;
- 2) pour tout $x \in Z^{[1]} - Z^{[0]}$, $\pi^{-1}(x)$ est connexe ;
- 3) pour tout $x \in Z^{[0]}$, $\pi^{-1}(x)$ est 1 -connexe.

Alors $\pi_1(Z) = 0$ entraîne $\pi_1(Y) = 0$.

La réciproque est vraie dès que $\pi^{-1}(x)$ est connexe pour tout $x \in Z^{[0]}$ et que π est surjectif sur le 1-squelette.

§ 3. - LE COMPLEXE CELLULAIRE DES FONCTIONS MARQUÉES

3. 1. On considère l'espace \mathfrak{F} des fonctions C^∞ sur M , de codimension ≤ 2 pour l'action $\text{Diff } M \times \text{Diff } \mathbb{R}$, et le nerf N de \mathfrak{F} stratifié par les orbites. G agit à droite par la formule : $f \mapsto f \circ \varphi$, où $f \in \mathfrak{F}$, $\varphi \in \text{Diff } M$.

Deux fonctions sont dites isotopes si elles sont dans la même orbite de la composante neutre de ce groupe.

A toute fonction $f \in \mathfrak{F}$, on peut associer son graphe (des niveaux) $\Gamma(f)$: la projection $M \rightarrow \Gamma(f)$ identifie deux points chaque fois qu'ils appartiennent à la même composante d'un niveau de f ; $\Gamma(f)$ est un complexe de dimension 1. Si f est

générique, le nombre de Betti $\beta_1(\Gamma(f))$ est égal au genre n de M . Si f est de codimension 1 et si $\beta_1(\Gamma(f)) = n - 1$, on dit que f appartient à une strate de croisement essentiel. La figure 2 présente le niveau critique du croisement ainsi que les deux niveaux voisins ; la figure 3 présente les graphes des fonctions d'un chemin de traversée de la strate.

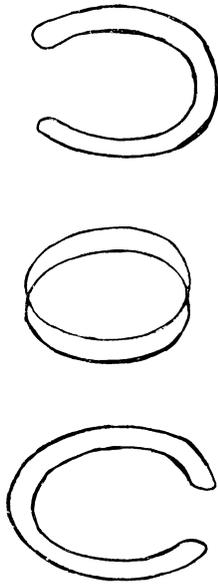


Figure 2

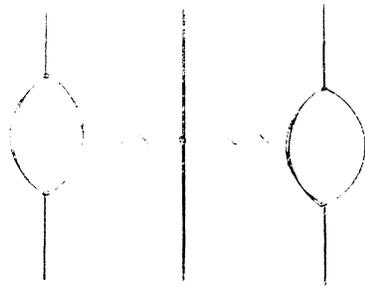


Figure 3

Une arête de N , duale d'une strate de croisement essentiel, est dite de 1ère espèce. Les autres arêtes sont de 2e espèce. Une face de N est dite principale si elle est duale d'une strate d'égalité de 3 valeurs critiques adhérente à 3 strates de croisement essentiel ; une telle face est un hexagone avec en alternance 3 arêtes de 1ère espèce et 3 arêtes de 2e espèce. Les figure 4, 5 et 6 présentent respectivement les niveaux (immergés) d'une fonction de codimension 2 "principale", la stratification du déploiement et le graphe de l'une quelconque des fonctions génériques voisines.

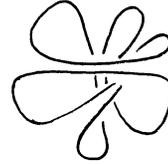
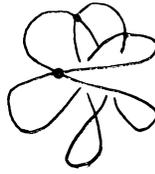
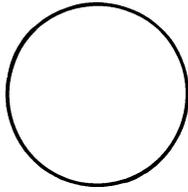
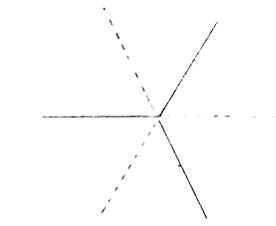


Figure 4



Figure 6



— = croisement essentiel
 - - - = croisement de 2e espèce

Figure 5

3. 2. On dit que (f, C) est une fonction marquée, si C est un marquage de M dont chaque composante est dans un niveau de f . Chaque composante du marquage désigne une arête de $\Gamma(f)$ et le complémentaire de ces arêtes (ouvertes) est un sous-arbre maximal. Toute fonction générique admet un marquage, mais une fonction de codimension 1 ou 2 adhérente à une strate de croisement essentiel n'admet qu'un marquage incomplet ($n-1$ composantes).

Par exemple, si f appartient à une strate de croisement essentiel, on peut marquer f par des courbes simples $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$; si on marque des fonctions génériques voisines f' et f'' , de part et d'autre de la strate, par $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha')$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha'')$ respectivement, alors l'intersection minimale de α' et α'' est un point.

On met sur les fonctions marquées la relation d'isotopie suivante : (f, C) est isotope à (f', C') si f est isotope à f' et C isotope à C' . [Cette relation est

moins fine que la relation d'isotopie de paires]. Le complexe cellulaire Y des fonctions marquées est construit avec l'ensemble des classes d'isotopie de fonctions marquées pour 0-squelette. On a une projection :

$$\pi : Y^{[0]} \longrightarrow N^{[0]}$$

par oubli du marquage. La fibre au-dessus de $[f] \in N^{[0]}$ est formée de tous les marquages, à isotopie près, de f .

LEMME. Il existe une borne indépendante de f pour la cardinalité de $Y^{[0]} \cap \pi^{-1}([f])$.

Preuve : Le graphe $\Gamma(f)$ "collapse" sur un sous-graphe réduit (incompressible)

$\Gamma_{\text{red}}(f)$. Le nombre de marquages, à isotopie près de f , coïncide avec le nombre de marquages de $\Gamma_{\text{red}}(f)$; en effet, si deux marquages C_1 et C_2 de f marquent $\Gamma(f)$ de part et d'autre du pied d'un arbre collapsible (voir Figure 7), alors C_1 et C_2 sont isotopes.

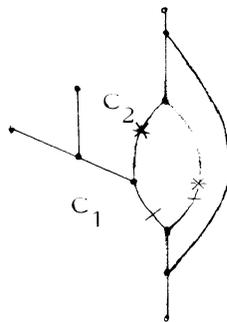


Figure 7

Le lemme résulte alors du fait que, le nombre de Betti étant fixé, à isomorphisme PL près, il n'y a qu'un nombre fini de graphes réduits. \square

Remarquons que ce lemme n'est pas vrai si on munit les fonctions marquées de la relation d'isotopie fine.

Le groupe G agit à droite sur $Y^{[0]}$ par $(f, C) \rightarrow (f\phi, \phi^{-1}(C))$. Cette action n'est pas transitive. La projection π est équivariante.

3. 3. Le 1-squelette.

Arête de 1ère espèce : Soient y_0 et y_1 deux sommets de Y représentés par (f_0, C_0) et (f_1, C_1) , où C_0 et C_1 ont $(n-1)$ composantes communes. A toute arête de 1ère espèce de N joignant $[f_0]$ à $[f_1]$, (unique si elle existe) ^{*}, on associe une arête dite de 1ère espèce de y_0 à y_1 .

Observer que si une telle arête existe, nécessairement le marquage incomplet commun à C_0 et C_1 marque la fonction de codimension 1 du croisement essentiel ; les composantes distinctes se coupent en un point.

Arête de 2e espèce : Soient (f_0, C) et (f_1, C) deux sommets ayant le même marquage. Soit f_t , $t \in [0, 1]$, un chemin représentant une arête τ de deuxième espèce dans N . Si, à isotopie près, C est un marquage de f_t pour tout t , on relève τ en une arête, dite de 2e espèce, de (f_0, C) à (f_1, C) .

Arête de 3e espèce : On joint par une arête, dite de 3e espèce, chaque paire de sommets distincts de $\pi^{-1}([f])$.

La projection π et l'action de G s'étendent naturellement à $Y^{[1]}$.

3. 4. Le 2-squelette.

Face du type I : Par examen des modèles géométriques associés à chaque strate de codimension 2 de l'espace des fonctions (voir [1]), on vérifie que, pour chaque face σ^1 de N , il existe un lacet γ de $Y^{[1]}$ tel que $\pi|_\gamma$ soit un isomorphisme de γ sur $\partial\sigma^1$.

(*) S'il y avait deux arêtes de 1ère espèce de $[f_0]$ à $[f_1]$, on aurait pour f_1 deux marquages C_1 et C_1' tels que $i(C_1, C_1') \neq 0$, ce qui est absurde (ici $i(.,.)$ est l'intersection au sens de Thurston ; voir exposé 4). Pour voir cela, on utilise la classification des croisements de valeurs critiques, due à J. Cerf [1].

Cette remarque étant faite, on choisit une face σ' dans chaque classe modulo G ; on choisit un relèvement γ de $\partial\sigma'$ vérifiant la condition précédente ; on attache à γ une 2-cellule σ et on sature par l'action de G .

Noter que la condition 1) du lemme 2.3 est assurée.

Face du type II : Soit τ et τ' deux arêtes de Y relevant la même arête de 1ère ou 2e espèce de N . En joignant leurs extrémités dans les fibres de π , on forme un carré ou un triangle, sur lequel on attache une face σ . On étend π à σ , à valeurs dans $\pi(\tau) = \pi(\tau')$, de sorte que π soit cellulaire.

La condition 2) du lemme est maintenant assurée.

Face du type III : A tout triangle d'une fibre de π , on attache une face ; façon brutale de rendre 1-connexes les fibres $\pi^{-1}([\tilde{f}])$ pour tout $[\tilde{f}] \in N^{[0]}$.

Finalement, on a construit Y , qui est 1-connexe d'après le lemme 2.3, et sur lequel G agit cellulièrement.

Remarque. On aurait pu économiser des arêtes de 3e espèce et, par conséquent, des faces des types II et III ; dans ce langage, Hatcher et Thurston n'auraient mis une arête entre (f, C_0) et (f, C_1) que si C_0 et C_1 ont $(n-1)$ composantes communes. L'avantage de leur système restreint est d'obtenir des relations dans G qui sont toutes portées par une surface de genre 2 trouée.

§ 4. - LE COMPLEXE DES MARQUAGES

4. 1. Construction. Le 0-squelette $X^{[0]}$ est formé des classes d'isotopie de marquages de M . On a une projection équivariante

$$P : Y^{[0]} \longrightarrow X^{[0]}$$

par oubli de la fonction. Rappelons que le groupe G agit transitivement sur X^{-0} avec H pour stabilisateur.

Deux marquages distincts C_0 et C_1 sont joints par une arête dès qu'il existe des fonctions marquées (f_0, C_0) et (f_1, C_1) jointes par une arête de Y^{-1} . L'action de G s'étend à $X^{[1]}$ et la projection P se prolonge équivariante à Y^{-1} . Par exemple, si (f_0, C) et (f_1, C) sont liées par une arête (nécessairement de 2e espèce), sa projection est réduite à un point.

On attache une 2-cellule σ à un lacet γ de X^{-1} s'il existe un lacet $\tilde{\gamma}$ de $Y^{[1]}$ tel que :

- 1) $\tilde{\gamma} = \partial\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma} \in Y^{[2]}$,
- 2) P est de degré 1 de $\tilde{\gamma}$ sur γ .

Il est alors facile de prolonger P en un homéomorphisme $\text{int } \tilde{\sigma} \rightarrow \text{int } \sigma$. D'autre part, G agit sur X .

En examinant les types des faces, on voit tout de suite que, pour chaque face σ de Y , ou bien $P(\partial\sigma)$ est un arête ou un point, ou bien $P(\partial\sigma)$ est une boucle dans $X^{[1]}$ et $P|\partial\sigma$ est de degré 1 sur son image (c'est par exemple le cas pour les relèvements dans Y des faces principales de N). Il est alors immédiat de prolonger P à Y .

La projection π identifie injectivement $P^{-1}([C])$ au nerf d'un ouvert convexe de l'espace des fonctions, à savoir l'ouvert des fonctions qui admettent C pour marquage. Par conséquent $P^{-1}([C])$ est sûrement connexe (même 1-connexe). Ainsi X est 1-connexe (Lemme 2.3).

4. 2. Finitude.

Soit C_0 un marquage de base.

LEMME 1 Soit f une fonction marquée par C_0 . Les cellules de Y passant par (f, C_0) se projettent sur un ensemble fini modulo H de cellules de X .

Preuve : Soit G_f le stabilisateur de $\pi(f, C_0) = [f]$. On démontre en fait un lemme plus fort, où on considère toutes les cellules rencontrant $\pi^{-1}([f])$ et où on remplace H par le sous-groupe $G_f \cap H$.

D'après le lemme 3.2, il n'y a qu'un nombre fini, uniformément borné, de cellules de Y au-dessus d'une cellule de N ; d'ailleurs, appliqué aux 0-cellules, cela dit que $G_f \cap H$ est d'indice fini dans G_f . Le lemme est donc réduit à l'affirmation que, dans N , il n'y a qu'un nombre fini de cellules passant par f modulo G_f .

Ce fait ne correspond pas à une propriété générale de la stratification de l'espace des fonctions sur une variété. En dimension 2, il suffit de le prouver pour les arêtes de croisement (valeurs critiques doubles) et les faces de valeurs critiques triples ; car les cellules passant par $[f]$, qui sont duales de singularités "à la source", sont, elles, en nombre fini. Le fait, qui lui est général, c'est qu'une cellule duale d'une strate d'égalité de deux ou trois valeurs critiques est déterminée par un système de nappes adaptées à f (voir [1]). Mais justement, pour les surfaces, les "twists" de Dehn le long de courbes de niveau de f représentent des éléments de G_f et agissent sur les systèmes de nappes adaptées à f , transitivement à un ensemble fini près. \square

Définitions. J'appelle "petite boucle" un lacet de $\Gamma(f)$ non homotope à zéro et ne passant que par deux points de branchement.

Si m est un maximum (resp. un minimum) de f , je note $d(m)$ le nombre minimal d'arêtes que l'on parcourt pour descendre (resp. monter) du sommet de $\Gamma(f)$, correspondant à m , jusqu'à une "petite boucle" ; si celle-ci n'existe pas, $d(m)$ n'est pas défini.

Une fonction est dite minimale si elle ne possède qu'un maximum et un minimum.

Une fonction de Morse f , à valeurs critiques distinctes, est dite presque-minimale dans l'un des cas suivants :

- a) si $\Gamma(f)$ ne possède pas de "petite boucle", alors f est minimale ;
- b) si $\Gamma(f)$ possède au moins une "petite boucle", alors, pour tout extremum non absolu

m , on a $d(m) \leq 2$.

Remarquons que les graphes des fonctions presque-minimales forment un ensemble fini. Les fonctions presque-minimales sont importantes parce que, en général, par une fonction minimale il ne passe pas de face principale de N .

LEMME 2. Il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isotopie de fonctions presque-minimales marquées par C_0 .

Preuve. A partir d'une fonction minimale, on ne peut faire naître qu'un nombre fini de paires de points critiques si l'on veut rester dans l'espace des fonctions presque-minimales ; à isotopie près, il n'y a qu'un nombre fini de choix possibles pour chaque naissance. Comme toute fonction presque-minimale est obtenue par ce procédé à partir d'une fonction minimale, il suffit de prouver le lemme pour les fonctions minimales. En fait, on va prouver que si, en plus du marquage, on se donne le graphe, muni de sa fonction hauteur, et la position du marquage sur ce graphe, alors la fonction est déterminée à isotopie près.

Pour cela, il s'agit de placer les courbes en huit de niveau critique dans le disque Δ , qui est obtenu en coupant M le long du marquage. Or le graphe marqué indique quels sont les trous de Δ entourés par chaque boucle du huit. Donc, en partant du niveau le plus bas, les courbes de niveau critique se placent les unes après les autres, de façon unique à isotopie près. A partir de là, le lemme est clair. \square

Si f , marquée par C_0 , n'est pas presque-minimale, $\Gamma(f)$ contient une arête α avec une extrémité libre m telle que $d(m)$ soit ou bien non défini ou bien > 2 . Collapser α revient à faire l'élimination d'une paire de points critiques de f . Soit f' l'extrémité de ce chemin.

LEMME 3. Pour toute cellule σ de Y passant par (f, C_0) , il existe une cellule σ' passant par (f', C_0) telle que $P(\sigma) = P(\sigma')$.

Comme corollaire immédiat de ces trois lemmes, on obtient que par C_0 ne passent qu'un nombre fini de cellules de X modulo H .

Preuve du lemme 3. Puisque l'arête qui est collapsée, lorsqu'on passe de f à f' , se trouve loin des "petites boucles", l'élimination est indépendante de tous les croisements essentiels ou changements de marquage que l'on peut faire à partir de (f, C_0) . A partir de là, le lemme est clair. Noter que si σ fait jouer la selle correspondant au point de branchement de α , alors $\dim P(\sigma) < \dim \sigma$ et on prend σ' avec $\dim \sigma' = \dim P(\sigma)$. \square

THÉORÈME. Le groupe G de difféotopies d'une surface est de présentation finie.

Preuve : Pour appliquer la proposition 2.1, il reste à prouver que les stabilisateurs des arêtes sont de type fini.

Soient C_0 et C_1 deux marquages de M que l'on choisit dans leurs classes d'isotopie avec un nombre minimal de points d'intersection. Soient H_0 et H_1 les stabilisateurs de $[C_0]$ et $[C_1]$ dans X . Si les deux sommets sont joints par une arête, $H_0 \cap H_1$ est le stabilisateur de l'arête. D'après prop. 12 (exp. 3), ce groupe s'identifie aux composantes connexes du groupe des difféomorphismes de M laissant C_0 et C_1 invariants. A des permutations près, il s'agit du groupe des difféomorphismes d'un certain disque troué, qui est donc de type fini. \square

4.3. Le cas du tore T^2 .

On a ici la simplification qu'une fonction n admet qu'un seul marquage à isotopie près. Donc :

$$Y \cong N.$$

D'après les lemmes de 4.2, on obtient les classes de cellules passant par $[C_0]$ dans X de la façon suivante : on considère une fonction marquée (f_0, C_0) , presque minimale, c'est-à-dire dont le graphe $\Gamma(f_0)$ a l'allure de la figure 8 ; on considère

un croisement essentiel issu de f_0 (unique modulo G_{f_0}) que l'on détermine en choisissant une courbe C_1 coupant C_0 en un point ; on considère une face principale passant par cette arête que l'on détermine en choisissant une courbe C_2 telle que $C_1 \cap C_2 = 1 \text{ pt}$ et $C_0 \cap C_2 = 1 \text{ pt}$. Dans le cas particulier du tore, il se trouve que, C_0 et C_1 étant fixés, il y a exactement deux possibilités pour C_2 à isotopie près (Figure 9), notée respectivement C_2^I et C_2^{II} . Donc modulo H , X possède en $[C_0]$ une arête (C_0, C_1) et deux triangles (C_0, C_1, C_2^I) , (C_0, C_1, C_2^{II}) .



Figure 8

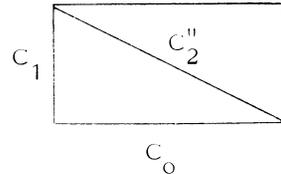
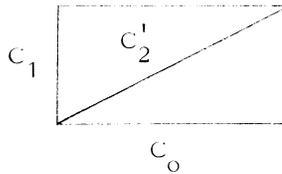


Figure 9

On note σ la rotation de 90° dans les axes du tore où C_0 et C_1 coïncident avec chacun des axes :

$$(1) \quad \begin{aligned} C_1 &= C_0 \sigma, \\ \sigma^2 &\in H. \end{aligned}$$

Soit ρ le twist parallèle à C_0 , tel que : $C_2^I = C_1 \rho$.

Alors, on a : $C_2^{II} = C_1 \rho^{-1}$. Enfin, la géométrie du tore donne que l'arête (C_1, C_2^I) est transformée par σ de (C_0, C_2^{II}) . Donc le chemin (C_0, C_1, C_2^I) est décrit par le mot $\sigma \rho^{-1} \sigma$, alors que l'arête (C_0, C_2^I) est décrite par $\sigma \rho$. D'où la relation :

$$(2) \quad \sigma \rho^{-1} \sigma \rho^{-1} \sigma \in H.$$

On voit immédiatement que l'autre cellule donne :

$$(3) \quad \sigma \rho \sigma \rho \sigma \in H.$$

Mais (3) résulte de (2) et (1). Enfin le stabilisateur d'une arête est trivial ; donc

on a écrit un système complet de relations modulo H . Pour déterminer complètement la relation (2), on calcule l'effet de l'élément écrit sur C_1 ; il transporte C_1 sur C_2 ; donc $(\sigma \rho^{-1})^3$ stabilise l'arête (C_0, C_1) . D'où :

$$(\sigma \rho^{-1})^3 = 1 .$$

Enfin, H est engendré par ρ et σ^2 , avec la relation de commutation $[\sigma^2, \rho] = 1$. □

Remarque finale. Dans [3], McCool a donné une preuve purement algébrique du théorème. Dans [4], Joan Birman, qui a été la première à donner une présentation explicite dans le cas d'une surface de genre 2, signale qu'il paraît difficile d'exhiber une présentation à partir de la démonstration de McCool.

D'autre part, il y a une approche par la géométrie algébrique (voir [5]).

RÉFÉRENCES

- [1] J. CERF, La stratification naturelle de l'espace des fonctions différentiables réelles et le problème de la pseudo-isotopie, Publ. Math. I.H.E.S. 39 (1970), p. 5-173.
- [2] A. HATCHER and W. THURSTON, A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface, à paraître.
- [3] J. MCCOOL, Some finitely presented subgroups of the automorphism group of a free group, J. Algebra 35 (1975), p. 205-213.
- [4] J. BIRMAN, The algebraic structure of surface mapping class groups, in Discrete groups and automorphic functions, edited by W. Harvey, Acad. Press, 1977.
- [5] A. MARDEN, Geometrically finite kleinian groups, ouvrage collectif édité par W. Harvey, déjà cité.

Astérisque

AST

Pages annexes (abstract et errata)

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 283-286

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__283_0>

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ABSTRACT

This book is an exposition of Thurston's theory of surfaces (measured foliations, compactification of Teichmüller space and classification of diffeomorphisms).

The mathematical content is roughly the following.

For a surface M (let's say closed, orientable, of genus $g > 1$), one defines \mathcal{L} as the set of isotopy classes of simple closed curves in M . For $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$, one denotes by $i(\alpha, \beta)$ the minimum number of geometric intersection points of α' with β' , where α' (resp. β') is a simple curve in the class α (resp. β). This induces a map $i_* : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$ which turns out to be injective. In fact, if one projectivizes $\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} - \{0\}$, i_* induces an injection $\mathcal{L} \rightarrow P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}})$ which endows \mathcal{L} with a nontrivial topology. Here $\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$ is provided with the weak topology (= product topology). Two curves $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ are "near to each other" in $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}})$ if, up to a multiple, they are made up by more or less the same strands going more or less in the same direction. This has nothing to do with homotopy theory.

The limits of curves are naturally interpreted as projective classes of "measured foliations", which means foliations with an "invariant" transverse distance, having a certain kind of singularities (well-known in the theory of quadratic holomorphic differentials, or in smectic liquid crystals). The space of measured foliations considered in $\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$ (or in $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}})$) is denoted by \mathfrak{MF} (resp. $P\mathfrak{MF}$). One shows that :

$$\mathfrak{MF} \cong \mathbb{R}^{6g-6}, \quad P\mathfrak{MF} = S^{6g-7}.$$

In $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}})$, $P\mathfrak{MF}$ and the Teichmüller space $\mathfrak{T}(M)$ glue together into a $6g-6$ dimensional disk :

$$\overline{\mathfrak{T}(M)} = \mathfrak{T}(M) \cup P\mathfrak{MF}(M) = D^{6g-6}.$$

The group $\text{Diff } M$ acts continuously on this compactification of \mathfrak{T} (this is hence "a natural compactification").

Hence any $\varphi \in \text{Diff } M$ has a fixed point in $\overline{\mathfrak{T}(M)}$ (Brouwer) and the analysis of this fixed point shows that (up to isotopy) each φ is either a hyperbolic isometry, or "Anosov-like" (the word is "pseudo-Anosov") or else "reducible".

Pseudo-Anosov diffeomorphisms minimize the topological entropy in their isotopy class. Also two pseudo-Anosov's which are isotopic are actually conjugate.

ABSTRACT

Every diffeomorphism $\phi : M \rightarrow M$ has a (finite) spectrum defined in terms of the length of $\phi^n \alpha$ raised to the power $\frac{1}{n}$. A pseudo-Anosov is characterized by the fact that the spectrum is reduced to a single value $\lambda > 1$.

There is a good method to produce many pseudo-Anosov's out of combination of Dehn's twists which is explained in "exposé 13".

The last two chapters are of a somewhat different character : "exposé 14" is about closed non singular 1-forms on 3-manifolds, and "exposé 15" about the Hatcher-Thurston theorem of finite presentability of $\pi_0 \text{Diff } M$.

Errata

Exposé 2, Théorème 2, page 21

G. Mess nous a signalé que les inclusions $\text{Diff}(S^2) \hookrightarrow G(S^2)$ et $\text{Diff}P^2 \hookrightarrow G(P^2)$ ne sont pas des équivalences d'homotopie.

Le théorème 2 n'est pas réutilisé dans la suite.

Exposé 5, Proposition 5, page 134

L'argument pour la propriété est incomplet. Il manque d'envisager le cas d'une suite de métriques où la longueur de l'une des courbes K_i tend vers zéro. L'inégalité

$$(*) \quad \text{ch}(\ell(m, [K'_i])) \text{sh}(\ell(m, [K_i])) \geq 1$$

montre que, dans ce cas, la longueur de K'_i (et de K''_i) tend vers l'infini.

On peut établir l'inégalité (*) à partir de la formule 7.18.2, page 159 du livre de A. Beardon "*The geometry of discrete groups*" (Springer Verlag 1983).

Montrons comment elle résulte de la formule du haut de la page 153 de ce livre sur les côtés d'un hexagone à angles droits

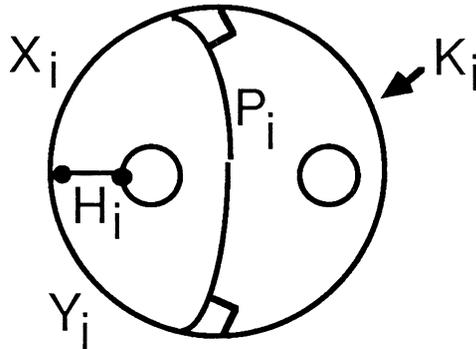


Figure 1

Avec les notations de la figure 1, la longueur de K'_i est supérieure à celle du pont P_i et la longueur de K_i est supérieure à la longueur de X_i

et à celle de Y_i . Si on coupe suivant P_i et H_i , on obtient un hexagone à angles droits qui admet X_i, P_i, Y_i comme côtés consécutifs. La formule du haut de la page 153 montre alors que

$$\operatorname{ch}(\ell(m, P_i)) \operatorname{sh}(\ell(m, X_i)) \operatorname{sh}(\ell(m, Y_i)) \geq 1 + \operatorname{ch}(\ell(m, X_i)) \operatorname{ch}(\ell(m, Y_i)) \quad ;$$

d'où il résulte que

$$\operatorname{ch}(\ell(m, P_i)) \operatorname{sh}(\ell(m, X_i)) \geq 1$$

La formule (*) en résulte. Il est clair, à partir de la démonstration, que cette formule n'est pas optimale. Signalons que c'est un cas particulier du "collar theorem" ou de l'inégalité de Margoulis.

Exposé 11, §3.6. Difféomorphisme pseudo-Anosov pour une variété à bord

B.J. Jiang nous a signalé que, dans la définition d'un "difféomorphisme" pseudo-Anosov d'une variété à bord, on ne peut pas exiger d'être l'identité sur le bord. En particulier, la dernière phrase de la page 216 est incorrecte.