

Astérisque

AST

Table des matières

Astérisque, tome 65 (1979), p. 1

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__65__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__65__1_0)

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
<u>Volume 1 - Astérisque 63</u>	
INTRODUCTION.....	3
Liste des participants.....	4
I. BARSOTTI - Theta functions in positive characteristic.....	5
P. BERTHELOT, W. MESSING - Théorie de Dieudonné cristalline I.....	17
L. BREEN - Rapport sur les théories de Dieudonné.....	39
B. DITTERS - On the classification of smooth commutative formal groups. Higher Hasse-Witt matrices of an abelian variety in positive characteristic.....	67
M. HAZEWINKEL - On formal groups. The fonctionnal equation lemma and some of its applications.....	73
L. ILLUSIE - Complexe de De Rham-Witt.....	83
N. KATZ - Slope filtration of F-crystals.....	113
J. LUBIN - Canonicity of a cyclic subgroup of an elliptic curve.....	165
J. MORAVA - The Weil group as automorphisms of the Lubin-Tate group...	169
<u>Volume 2 - Astérisque 64</u>	
A. OGUS - Supersingular K3 crystals.....	3
M. RAYNAUD - "p-torsion" du schéma de Picard.....	87
J. STIENSTRA - The formal completion of the second Chow group, a K-theoretic approach.....	149
L. SZPIRO - Sur le théorème de rigidité d'Arakelov et Parsin.....	169
<u>Volume 3 - Astérisque 65</u>	
J-M. FONTAINE - Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate.....	3
B. GROSS - Ramification in p-adic Lie extensions.....	81
G. LAFAILLE - Construction de groupes p-divisibles.....	103
R. LANGLANDS - Sur la mauvaise réduction d'une variété de Shimura.....	125
J-P. SERRE - Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate...	155

Astérisque

JEAN-MARC FONTAINE

**Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux
de Barsotti-Tate**

Astérisque, tome 65 (1979), p. 3-80

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__65__3_0>

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODULES GALOISIENS, MODULES FILTRÉS ET ANNEAUX DE BARSOTTI-TATE

par

Jean-Marc FONTAINE
(Grenoble)

- o -

notations

Dans tout ce travail, K est un corps local, i.e. un corps complet pour une valuation discrète, de caractéristique 0, à corps résiduel parfait k de caractéristique $p \neq 0$; on note K_O le corps des fractions de l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans k et σ le Frobenius absolu opérant sur k , $W(k)$ et K_O . On note e le degré de l'extension finie totalement ramifiée K/K_O . On note $\bar{K}$ une clôture algébrique fixée de K et on pose $G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$.

introduction

0.1. - Appelons module galoisien (sous-entendu, de dimension finie) la donnée d'un $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G .

Appelons module filtré (sous-entendu, de dimension finie) la donnée d'un F-iso-cristal D (i.e. d'un K_O -espace vectoriel D de dimension finie muni d'une bijection $F : D \rightarrow D$, σ -semi-linéaire) muni d'une fil-

tration de $D_K = K \otimes_{K_0} D$ par des sous-K-espaces vectoriels $(D_K^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, décroissante, exhaustive et séparée.

Les modules galoisiens d'une part et les modules filtrés d'autre part forment, de manière évidente, une catégorie additive, et la première d'entre elles est abélienne.

0.2. - Soit alors G un groupe p -divisible (ou de Barsotti-Tate) sur l'anneau A des entiers de K . Il lui correspond, d'une part un module galoisien $\underline{V}_p(G)$ et d'autre part un module filtré $\underline{D}_K(G)$:

■ on a $\underline{V}_p(G) = \Phi_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \underline{T}_p(G)$, où $\underline{T}_p(G)$ est le module de Tate de G ; la correspondance $G \mapsto \underline{V}_p(G)$ est un foncteur additif pleinement fidèle de la catégorie des groupes p -divisibles sur A , à isogénie près, dans celle des modules galoisiens ;

■ le F-iso-cristal D sous-jacent à $\underline{D}_K(G)$ est $K_0 \otimes_{W(k)} M$, où M est le module de Dieudonné de la fibre spéciale ; le K -espace vectoriel L des points de l'espace cotangent de G à valeurs dans K s'identifie à un sous- K -espace vectoriel de $D_K = K \otimes_{K_0} D$ (cf. [7], [13] et [6]) et on a

$$D_K^i = \begin{cases} D_K & \text{si } i \leq 0, \\ L & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } i \geq 2; \end{cases}$$

la correspondance $G \mapsto \underline{D}_K(G)$ est un foncteur contravariant additif pleinement fidèle de la catégorie des groupes p -divisibles sur A , à isogénie près, dans celle des modules filtrés.

0.3. - Ce qui précède implique l'existence d'une équivalence entre une certaine catégorie de modules galoisiens (ceux qui sont isomorphes au contragrédient d'un module galoisien provenant d'un groupe p -divisible sur A) et une catégorie "ad hoc" de modules filtrés (nous avons d'ailleurs

montré dans [6] comment, étant donné un groupe p -divisible G sur A , on pouvait construire $\underline{V}_p(G)$ à partir de la seule connaissance de $\underline{D}_K(G)$, et annoncé que la construction inverse était également possible).

On aimerait pouvoir étendre cette équivalence à une catégorie de modules galoisiens d'un type plus général. En particulier, on aimerait que cette catégorie soit stable par produit tensoriel, de façon à pouvoir utiliser la théorie des $\otimes$ -catégories développée par Saavedra dans sa thèse ([16]). C'est essentiellement ce que nous faisons ici.

0.4. - Dans le § 1, on définit les objets avec lesquels on va travailler : les modules galoisiens et les modules filtrés. On introduit la notion de produit tensoriel de deux modules filtrés et on étudie les propriétés "formelles" des catégories de modules galoisiens et de modules filtrés.

0.5. - Dans le § 2, on introduit la notion d'"anneau de Barsotti-Tate" : un tel anneau est une K_0 -algèbre associative commutative et unitaire, munie à la fois d'une structure de module galoisien et de module filtré (pas nécessairement de dimension finie), assujettie à vérifier des propriétés convenables.

(Si nous les appelons ainsi, c'est, outre le fait que ceux qui nous intéressent permettent de classifier les groupes de Barsotti-Tate, parce que, d'une part, la seule façon d'en construire que nous connaissions utilise la notion de "bivecteurs de Witt" introduite par Barsotti, et d'autre part leurs bonnes propriétés sont liées à la décomposition de Hodge-Tate des modules galoisiens).

0.6. - Dans le § 3, on montre qu'à tout anneau de Barsotti-Tate B , on peut associer une sous-catégorie pleine $\underline{\text{Rep}}_B(G)$ (resp. $\underline{\text{MF}}_{K,B}$) de la catégorie des modules galoisiens (resp. filtrés) de dimension finie, qui est

abélienne, stable par somme directe, produit tensoriel, contragrédient (la première est également stable par sous-objet et quotient). On définit une équivalence entre ces deux catégories, compatible avec le produit tensoriel, et on donne quelques propriétés des objets de $\underline{\text{Rep}}_B(G)$. La propriété essentielle est que, si k est algébriquement clos et si V est un objet de $\underline{\text{Rep}}_B(G)$, l'enveloppe algébrique de l'image de G dans la représentation définie par V est un groupe connexe.

0.7. - Dans le §4, on introduit une sous-catégorie pleine, notée $\underline{\text{MF}}_K^f$ de la catégorie $\underline{\text{MF}}_K$ des modules filtrés de dimension finie et on donne diverses caractérisations des objets de $\underline{\text{MF}}_K^f$ (l'une d'entre elles utilise la notion de polygone de Newton et de polygone de Hodge associés aux modules filtrés). On montre que

- i) la catégorie $\underline{\text{MF}}_K^f$ est abélienne ;
- ii) si B est un anneau de Barsotti-Tate, $\underline{\text{MF}}_{K,B}$ est une sous-catégorie pleine de $\underline{\text{MF}}_K^f$;
- iii) si B est un anneau de Barsotti-Tate et si D est un objet de $\underline{\text{MF}}_{K,B}$, pour qu'un sous-objet D' de D dans $\underline{\text{MF}}_K$ soit un sous-objet de D dans $\underline{\text{MF}}_{K,B}$, il faut et il suffit que ce soit un objet de $\underline{\text{MF}}_K^f$.

L'intérêt de cette dernière propriété est qu'elle permet, au moins théoriquement, étant donné un objet D de $\underline{\text{MF}}_{K,B}$, de construire la sous-catégorie de $\underline{\text{MF}}_{K,B}$ engendrée par D , même si l'on ne connaît pas de description de $\underline{\text{MF}}_{K,B}$.

0.8. - Dans le §5, on dit qu'un anneau de Barsotti-Tate B est "adapté aux groupes p -divisibles" si la catégorie $\underline{\text{Rep}}_B(G)$ contient les modules galoisiens provenant des groupes p -divisibles (ou leurs contragrédients, cela revient au même) et si l'équivalence de catégories construite au §3 prolonge celle dont on a parlé au n° 0.3.

L'intérêt de ce travail repose sur l'existence d'un anneau de Barsotti-Tate adapté aux groupes p -divisibles. Nous publierons ailleurs la démonstration de cette existence.

Supposons k algébriquement clos et soit B un anneau de Barsotti-Tate adapté aux groupes p -divisibles. Si $e = 1$ (i.e., si $K = K_0$), on déduit d'un résultat de Laffaille ([10]) que

a) un module galoisien V provient d'un groupe p -divisible sur A si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- i) c'est un objet de $\underline{\text{Rep}}_B(G)$,
- ii) il est de Hodge-Tate de poids 0 et 1 ;

b) un module filtré D provient d'un groupe p -divisible sur A si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- i) c'est un objet de $\underline{\text{MF}}_K^f$,
- ii) on a $D_K^0 = D$ et $D_K^2 = 0$.

Il me semble raisonnable de conjecturer que ces résultats restent vrais sans restriction sur e .

0.9. - Dans le § 6 , on suppose k algébriquement clos, on se donne un anneau de Barsotti-Tate B et un objet V de $\underline{\text{Rep}}_B(G)$ et on note D le module filtré associé à V par l'équivalence de catégories du § 3 . Si $\mathcal{H}_V$ désigne le groupe algébrique, sur $\mathbb{Q}_p$, qui est l'enveloppe algébrique de l'image de G dans la représentation définie par V , on aimerait pouvoir décrire $\mathcal{H}_V$ et sa représentation naturelle dans V en termes du module filtré D sans utiliser B .

Nous n'y parvenons pas totalement. Toutefois nous construisons un groupe algébrique $\mathcal{H}_{D,L}$ défini sur une extension finie non ramifiée L de $\mathbb{Q}_p$ et une représentation de $\mathcal{H}_{D,L}$ dans un espace vectoriel D_L de dimension finie sur L qui sont tels que, après extension des scalaires à B , le groupe $\mathcal{H}_V$ muni de sa représentation V s'identifie au groupe

$\mathbb{H}_{D,L}$ muni de sa représentation D_L . En fait $\mathbb{H}_{D,L}$ est une L -forme intérieure de $\mathbb{H}_V \times L$; on peut donner une description explicite du tore correspondant mais celle-ci fait intervenir l'anneau B . En vertu de résultats classiques, il existe une extension finie non ramifiée L' de L telle que les groupes $\mathbb{H}_V \times L'$ et $\mathbb{H}_{D,L} \times L'$ sont isomorphes (ainsi que les représentations $L' \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ et $L' \otimes_L D_L$).

0.10. - Supposons, pour simplifier, k algébriquement clos. Dans le § 7, on appelle $(\bar{K}/K)$ -anneau de Barsotti-Tate la donnée d'un anneau commutatif B muni, pour chaque extension finie K' de K contenue dans $\bar{K}$, d'une structure d'anneau de Barsotti-Tate relativement à K' , avec des relations de compatibilité évidentes. Un tel anneau existe et on peut même le choisir de façon que, pour toute extension finie K' de K contenue dans $\bar{K}$, la structure d'anneau de Barsotti-Tate de B relative à K' soit adaptée aux groupes p -divisibles définis sur l'anneau des entiers de K' .

Un tel anneau B étant fixé, nous disons qu'un module galoisien V est potentiellement admissible s'il existe un sous-groupe ouvert G' de G tel que le $\mathbb{Q}_p[G']$ -module sous-jacent à V soit un objet de $\text{Rep}_B(G')$. On construit une équivalence entre la catégorie des modules galoisiens potentiellement admissibles et une certaine catégorie de modules "potentiellement filtrés" (ce sont des F -iso-cristaux munis d'une part d'un homomorphisme, à noyau ouvert, de G dans le groupe des automorphismes du F -iso-cristal D et d'autre part d'une filtration de $D_{\bar{K}} = \bar{K} \otimes_{K_0} D$ par des sous- $\bar{K}$ -espaces vectoriels avec des propriétés convenables).

Soit enfin G une variété abélienne sur K ayant potentiellement bonne réduction et soit $V = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(G)$. Alors V est potentiellement admissible et, si D est le F -iso-cristal sous-jacent au module potentiellement filtré associé à V , pour tout nombre premier $\ell \neq p$, la représentation de G sur D est "la même" que celle de G sur $T_\ell(G)$ (i.e., les noyaux de ces deux représentations coïncident, leurs caractères sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et sont égaux).

0.11. - Outre quelques compléments (notamment le §7), le texte que l'on trouvera ici diffère des exposés oraux par l'introduction de la notion d'anneau de Barsotti-Tate. Celle-ci nous a permis de donner des démonstrations complètes, modulo le théorème d'existence d'anneaux de Barsotti-Tate adaptés aux groupes p -divisibles.

Tout au long de ce travail, j'ai bénéficié de conversations constantes avec Jean-Pierre Serre. Je voudrais le remercier ici.

Je voudrais également remercier Madame Guttin-Lombard qui a assuré la frappe de ce texte avec sa compétence et sa gentillesse habituelles.

§1 - modules galoisiens et modules filtrés

1.1. - MODULES GALOISIENS.

1.1.1. - Nous appellerons module galoisien tout espace vectoriel V sur le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p -adiques, muni d'une action linéaire de G , i.e. d'un homomorphisme ρ de G dans le groupe des $\mathbb{Q}_p$ -automorphismes de V (l'application ρ sera, le plus souvent, sous-entendue).

La catégorie des modules galoisiens possède des produits tensoriels et des "hom internes" : si V_1 et V_2 sont deux modules galoisiens, on sait ce que c'est que le module galoisien $V_1 \otimes V_2$ ($= V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2$) et le module galoisien $\underline{\text{Hom}}(V_1, V_2)$ est le $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel des applications linéaires de V_1 dans V_2 , muni de l'action évidente de G .

Le module galoisien $\mathbb{Q}_p$ (muni de l'action triviale de G) est un "objet-unité", i.e., pour tout module galoisien V , on a des isomorphismes canoniques (et fonctoriels en V) $\mathbb{Q}_p \otimes V \simeq V \otimes \mathbb{Q}_p = V$.

Enfin, pour tout module galoisien V , on appelle dual ou contragrédient le module galoisien $V^* = \underline{\text{Hom}}(V, \mathbb{Q}_p)$.

1.1.2. - On note T le module galoisien $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(\mu_{p^\infty})$ (où $T_p(\mu_{p^\infty}) = \varprojlim \mu_{p^n}$) et χ le caractère de Tate, i.e. le caractère de G à valeurs dans $\mathbb{Q}_p^*$ qui donne l'action de G sur T .

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose

$$T^i = \begin{cases} \otimes^i T & \text{si } i \geq 0, \\ (\otimes^{-i} T)^* & \text{si } i < 0. \end{cases}$$

Pour tout module galoisien V , et tout $i \in \mathbb{Z}$, on note $V\{i\}$ le $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel des $v \in V$ tels que $gv = \chi^i(g)v$, pour tout $g \in G$. On

voit que $V\{i\}$ est isomorphe à $\text{Hom}_{\Phi_p[G]}(T^i, V)$, et que $V\{0\}$ s'identifie à V^G .

1.1.3. - On note $\text{Rep}(G)$ la catégorie des modules galoisiens qui sont de dimension finie sur Φ_p , avec action de Galois continue. C'est une catégorie abélienne, et c'est une sous-catégorie pleine de la catégorie des modules galoisiens, stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel, hom interne, contragrédient, qui contient les T^i .

1.2. - MODULES FILTRÉS.

1.2.1. - Nous appellerons module filtré la donnée d'un espace vectoriel D sur K_0 muni

- d'une part, d'une application $F : D \rightarrow D$, bijective, σ -semi-linéaire (i.e. additive et telle que $F(\lambda d) = \sigma\lambda \cdot Fd$, pour tout $\lambda \in K_0$, tout $d \in D$; lorsque D est de dimension finie sur K_0 , on a donc ce que l'on appelle "un F -iso-cristal" ([8] p.145, [16] p.334 ou [1] p.315);
- d'autre part, d'une filtration $(D_K^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de $D_K = K \otimes_{K_0} D$ par des sous- K -espaces vectoriels, décroissante (i.e. $D_K^{i+1} \subset D_K^i$), exhaustive (i.e. $\bigcup D_K^i = D_K$) et séparée (i.e. $\bigcap D_K^i = 0$).

Par abus de langage, on parlera du module filtré D , l'application F et la filtration étant sous-entendues.

1.2.2. - Les modules filtrés forment une catégorie : un morphisme est une application K_0 -linéaire, qui commute à l'action de F et qui, après extension des scalaires à K , respecte les filtrations.

On appelle dimension d'un module filtré D la dimension de D comme espace vectoriel sur K_0 et on note MF_K la sous-catégorie pleine de la catégorie des modules filtrés dont les objets sont ceux qui sont de dimension finie.

La catégorie des modules filtrés et la catégorie $\underline{MF}_K$ sont additives, admettent des noyaux et conoyaux mais ne sont pas abéliennes.

Si D est un module filtré,

- un sous-objet D' de D est un sous- K_O -espace vectoriel, stable par F , muni de la filtration induite ;
- un objet-quotient D'' de D est le quotient de D par un sous- K_O -espace vectoriel de D , stable par F ; l'action de F sur D'' se déduit de l'action de F sur D par passage au quotient, et la filtration aussi.

1.2.3. - On dit qu'une suite

$$0 \rightarrow D' \rightarrow D \rightarrow D'' \rightarrow 0$$

de modules filtrés est exacte si D' s'identifie à un sous-objet de D et D'' au quotient de D par D' . Cela revient à dire que la suite

$$0 \rightarrow D' \rightarrow D \rightarrow D'' \rightarrow 0$$

est exacte en tant que suite de $K_O[F]$ -modules à gauche (ou de K_O -espaces vectoriels) et que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la suite de K -espaces vectoriels

$$0 \rightarrow (D')_K^i \rightarrow D_K^i \rightarrow (D'')_K^i \rightarrow 0$$

est exacte.

1.2.4. - Si D_1 et D_2 sont des modules filtrés, on définit un module filtré $D_1 \otimes D_2$ de la manière suivante :

- en tant qu'espace vectoriel sur K_O , $D_1 \otimes D_2 = D_1 \otimes_{K_O} D_2$; l'action de F est définie par $F(d_1 \otimes d_2) = Fd_1 \otimes Fd_2$;
- la filtration de

$$(D_1 \otimes D_2)_K = K \otimes_{K_O} (D_1 \otimes D_2) = (K \otimes_{K_O} D_1) \otimes_K (K \otimes_{K_O} D_2) = D_{1K} \otimes_K D_{2K}$$

$$\text{est définie par } (D_1 \otimes D_2)_K^i = \sum_{i'+i''=i} D_{1K}^{i'} \otimes D_{2K}^{i''}, \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}.$$

1.2.5. - La catégorie des modules filtrés possède un objet-unité ; comme espace vectoriel sur K_O , c'est K_O lui-même, on a $F = \sigma$, et

la filtration de $K \otimes_{K_O} K_O \simeq K$ est définie par

$$K^i = \begin{cases} K & \text{si } i \leq 0, \\ 0 & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Il est clair que, pour tout module filtré D , $K_O \otimes D \simeq D \otimes K_O \simeq D$.

1.2.6. - Si D_1 et D_2 sont des modules filtrés, on définit un module filtré $\underline{\text{Hom}}(D_1, D_2)$ de la façon suivante :

- en tant qu'espace vectoriel sur K_O , $D = \underline{\text{Hom}}(D_1, D_2)$ est l'espace vectoriel $\text{Hom}_{K_O}(D_1, D_2)$ des applications K_O -linéaires de D_1 dans D_2 ;
- l'action de F est définie par $(F\varphi)(d) = F \cdot \varphi(F^{-1} \cdot d)$;
- la filtration de $D_K = K \otimes_{K_O} \text{Hom}_{K_O}(D_1, D_2) = \text{Hom}_K(D_{1K}, D_{2K})$ est définie par

$$D_K^i = \left\{ \varphi \in D_K \mid \varphi(D_{1K}^j) \subset D_{2K}^{i+j}, \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z} \right\},$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

1.2.7. - Enfin, si D est un module filtré, on pose $D^* = \underline{\text{Hom}}(D, K_O)$. Les opérations $\otimes$, $\underline{\text{Hom}}$, $*$ vérifient toutes les "bonnes" propriétés que l'on est en droit d'attendre de la notion de produit tensoriel, hom interne, contragrédient ou dual (attention toutefois que la catégorie $\underline{\text{MF}}_K$ n'est pas abélienne).

1.2.8. - Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note S^i l'objet de $\underline{\text{MF}}_K$ défini ainsi :

- en tant qu'espace vectoriel sur K_O , on a $S^i = K_O$;
- l'action de F est définie par $F\lambda = p^i \cdot \sigma\lambda$, si $\lambda \in K_O$;
- la filtration sur $(S^i)_K \simeq K$ est définie par

$$(S^i)_K^j = \begin{cases} K & \text{si } j \leq i, \\ 0 & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Le module filtré S^0 s'identifie à l'objet-unité K_O et, si l'on pose

$S^1 = S$, S^i s'identifie à $\bigotimes^i S$ si $i \geq 0$ et à $(\bigotimes^{-i} S)^*$ si $i < 0$.

Pour tout module filtré D , et pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note $D[i]$ le sous- $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de D formé des d vérifiant $Fd = p^i d$ et $d \in D_K^i$ (en identifiant D à un sous K_O -espace vectoriel de $D_K = K \otimes_{K_O} D$). On voit que $D[i]$ s'identifie canoniquement au $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel des morphismes (dans la catégorie des modules filtrés) de S^i dans D .

§2 - anneaux de Barsotti-Tate

2.1. - MODULES GALOISIENS FILTRÉS.

2.1.1. - Nous appellerons module galoisien filtré la donnée d'un module filtré D muni d'une action de G compatible avec la structure de module filtré, i.e. d'un homomorphisme de G dans le groupe des automorphismes de D .

2.1.2. - Les modules galoisiens filtrés forment, de manière évidente, une catégorie additive. Celle-ci possède des produits tensoriels : si D_1 et D_2 sont deux modules galoisiens filtrés, $D_1 \otimes D_2$ est, en tant que module filtré, le produit tensoriel des modules filtrés sous-jacents ; on le munit de l'action de Galois évidente.

2.1.3. - Tout module filtré peut être considéré comme un module galoisien filtré, avec action triviale de G . On obtient ainsi une équivalence, compatible avec le produit tensoriel, entre la catégorie des modules filtrés et la sous-catégorie pleine de la catégorie des modules galoisiens filtrés dont les objets sont ceux sur lesquels l'action de G est triviale.

2.1.4. - De même, à tout module galoisien V , on peut associer un module galoisien filtré V_{K_O} : en tant que $K_O[G]$ -module, on a

$V_{K_O} = K_O \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$; l'action de F est définie par $F(\lambda \otimes v) = \sigma \lambda \otimes v$, pour tout $\lambda \in K_O$, $v \in V$; et la filtration est définie par

$$V_K^i = \begin{cases} V_K = K \otimes_{K_O} V_{K_O} \simeq K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V & \text{si } i \leq 0 , \\ 0 & \text{si } i > 0 . \end{cases}$$

On obtient ainsi une équivalence entre la catégorie des modules galoisiens et la sous-catégorie pleine de celle des modules galoisiens filtrés dont les objets sont ceux qui sont "triviaux en tant que modules filtrés" (i.e. isomorphes à une somme-directe de copies de K_O). Un foncteur quasi-inverse s'obtient en associant à tout module galoisien filtré D , trivial en tant que module filtré, le module galoisien $V = \{ v \in D \mid Fv = v \}$.

Il est clair que cette équivalence est compatible avec le produit tensoriel.

2.1.5. - Si D est un module galoisien filtré et si $i \in \mathbb{Z}$, $D\{i\}$ est un module filtré et $D[i]$ est un module galoisien. Si de plus D est de dimension finie sur K_O , $D\{i\}$ (resp. $D[i]$) est un module filtré (resp. galoisien) de dimension finie.

2.2. - ANNEAUX GALOISIENS FILTRÉS.

2.2.1. - On appelle anneau galoisien filtré la donnée d'une K_O -algèbre associative, commutative et unitaire B , munie d'une structure de module galoisien filtré, compatible avec la structure d'algèbre, i.e. telle que l'application de $B \otimes_{K_O} B$ dans B induite par la multiplication définisse un morphisme de modules galoisiens filtrés. Cela implique, en particulier, que, si $i, j \in \mathbb{Z}$, $B_K^i B_K^j \subset B_K^{i+j}$ et que B_K^0 est une sous-algèbre unitaire de B_K .

2.2.2. - Exemple. - Soit $\bar{k}$ le corps résiduel de $\bar{K}$; c'est une clôture algébrique de k et on note $\hat{K}_O^{nr}$ le corps des fractions de $W(\bar{k})$. On pose $\hat{K}^{nr} = K \otimes_{K_O} \hat{K}_O^{nr}$; c'est un corps local qui s'identifie canoniquement

au complété de l'extension maximale non ramifiée K^{nr} de K contenue dans $\bar{K}$.

On note $\hat{K}_O^{\text{nr}}[T, T^{-1}]$ l'algèbre déduite de $\hat{K}_O^{\text{nr}} \otimes_{\Phi_p} \text{Sym}_{\Phi_p} T$ en rendant inversible un élément non nul quelconque de T . Autrement dit, si t est un élément non nul de T , tout élément de $\hat{K}_O^{\text{nr}}[T, T^{-1}]$ s'écrit, d'une manière et d'une seule, sous la forme $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i t^i$, avec les $\lambda_i \in \hat{K}_O^{\text{nr}}$, presque tous nuls.

On fait de $\hat{K}_O^{\text{nr}}[T, T^{-1}]$ un anneau galoisien filtré, en posant, pour tout $\sum \lambda_i t^i \in \hat{K}_O^{\text{nr}}[T, T^{-1}]$,

$$g(\sum \lambda_i t^i) = \sum \chi^i(g) \cdot g\lambda_i \cdot t^i, \text{ pour tout } g \in G,$$

$$F(\sum \lambda_i t^i) = \sum p^i \cdot \sigma\lambda_i \cdot t^i,$$

la filtration de $K \otimes_{K_O} \hat{K}_O^{\text{nr}}[T, T^{-1}] = \hat{K}^{\text{nr}}[T, T^{-1}]$ étant définie par

$$\hat{K}^{\text{nr}}[T, T^{-1}]^i = T^i \hat{K}^{\text{nr}}[T] = \left\{ \sum_{j \geq i} \lambda_j t^j \right\}, \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z}.$$

2.2.3. - On désigne par C le complété de $\bar{K}$. Le groupe G opère par continuité sur C et on sait ([25], th.1, p.176) que, si I désigne le sous-groupe d'inertie de G , $\hat{K}^{\text{nr}}$ s'identifie à C^I . On pose

$$C[T, T^{-1}] = C \otimes_{\hat{K}_O^{\text{nr}}} \hat{K}_O^{\text{nr}}[T, T^{-1}] = C \otimes_{\hat{K}^{\text{nr}}} \hat{K}^{\text{nr}}[T, T^{-1}] = C \otimes_{\Phi_p} \Phi_p[T, T^{-1}] :$$

tout élément de $C[T, T^{-1}]$ s'écrit donc, de manière unique, sous la forme $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda_i t^i$, avec les $\lambda_i \in C$, presque tous nuls.

L'anneau $C[T, T^{-1}]$ est une algèbre graduée (pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la composante homogène de degré i est $CT^i = \{\lambda t^i \mid \lambda \in C\}$) sur laquelle G opère par

$$g(\sum \lambda_i t^i) = \sum \chi^i(g) \cdot g\lambda_i \cdot t^i.$$

Comme $(CT^i)^I = 0$, pour $i \neq 0$ ([25], th.2, p.176), $\hat{K}^{\text{nr}}$ (resp. K) s'identifie à $(C[T, T^{-1}])^I$ (resp. $(C[T, T^{-1}])^G$).

2.2.4. - Nous appellerons anneau de Barsotti-Tate la donnée d'un anneau galoisien filtré B (avec action de G continue sur tout sous- K_O -espace vectoriel de dimension finie stable par G), contenant $\hat{K}_O^{nr}[T, T^{-1}]$, vérifiant les trois propriétés suivantes :

(Gal) on a $B\{0\} = K_O$,

(Fil) on a $B[0] = \Phi_p$,

(Tate) il existe un monomorphisme $\theta : \text{gr}(B_K) \rightarrow C[T, T^{-1}]$ qui, lorsqu'on le restreint à $\hat{K}^{nr}[T, T^{-1}] = K \otimes_{K_O} \hat{K}_O^{nr}[T, T^{-1}]$ est l'isomorphisme évident de $\text{gr}(\hat{K}^{nr}[T, T^{-1}])$ sur $\hat{K}^{nr}[T, T^{-1}]$ considéré comme sous-algèbre graduée de $C[T, T^{-1}]$.

2.2.5. - Explicitons un peu ces trois propriétés :

■ Rappelons que $B\{0\} = B^G$ est le sous-anneau de B formé des éléments invariants par Galois.

■ Rappelons que $B[0] = B_O \cap B_K^O$, où $B_O = \{b \in B \mid Fb = b\}$; il est clair que B_O et B_K^O s'identifient tous deux à des sous-anneaux de B_K .

■ Se donner θ revient à se donner, pour tout entier i , une application $K[G]$ -linéaire $\theta_i : B_K^i \rightarrow C T^i$; on demande que les trois conditions suivantes soient satisfaites :

- i) pour tout i , le noyau de θ_i est B_K^{i+1} ,
- ii) pour tout i , on a $\theta_i(\lambda t^i) = \lambda t^i$, si $\lambda \in \hat{K}^{nr}$ et $t \in T$,
- iii) pour tout i et tout j , on a $\theta_{i+j}(bb') = \theta_i(b) \theta_j(b')$ si $b \in B_K^i$ et $b' \in B_K^j$.

2.3. - QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ANNEAUX DE BARSOTTI-TATE.

2.3.1. - PROPOSITION. - Soit B un anneau de Barsotti-Tate. Pour tout $b \in B_K$, posons

$$d^\circ(b) = \begin{cases} i & \text{si } b \in B_K^i \text{ et } b \notin B_K^{i+1}, \\ +\infty & \text{si } b = 0. \end{cases}$$

Alors l'application d° est une valuation de B_K ; en particulier, les anneaux B_K et B sont intègres.

En effet, il est clair que, si $b, b' \in B_K$, on a $d^\circ(b+b') \geq \min\{d^\circ(b), d^\circ(b')\}$. Si ce sont des éléments non nuls de B_K et si $d^\circ(b) = i$, $d^\circ(b') = j$, on voit que $\theta_i(b) \neq 0$ et $\theta_j(b') \neq 0$; on en déduit que $\theta_{i+j}(bb') \neq 0$, donc que $bb' \in B_K^{i+j} - B_K^{i+j+1}$, ou encore que $d^\circ(bb') = d^\circ(b) + d^\circ(b')$.

2.3.2. - Remarque. - Soit B un anneau de Barsotti-Tate. Tout élément non nul t de T est une uniformisante pour la valuation d° et tout élément non nul de B_K s'écrit, d'une manière et d'une seule, sous la forme bt^i , avec $i \in \mathbb{Z}$ et $b \in B_K^0 - B_K^1$.

On prendra garde que les anneaux B et B_K ne sont pas, en général, complets pour la valuation d° . L'anneau B_K^0 qui est le sous-anneau de B_K formé des éléments entiers pour la valuation n'est pas, en général, un anneau de valuation (il n'est pas intégralement clos dans son corps des fractions).

2.3.3. - PROPOSITION. - Soit B un anneau de Barsotti-Tate.

- i) Pour tout sous-groupe ouvert I' du groupe d'inertie I de G , on a $B^{I'} = \hat{K}_O^{nr}$;
- ii) Pour tout sous-groupe ouvert G' de G , on a $B^{G'} = (\hat{K}_O^{nr})^{G'} =$ l'extension maximale non ramifiée de K_O contenue dans $\bar{K}^{G'}$.

2.3.4. - Démonstration. - L'assertion (ii) résulte trivialement de (i). Montrons (i) : posons $E = B^{I'}$. Soit b un élément non nul de E et soit i son degré (cf. prop. 2.3.1). Alors $\theta^i(b) \in (CT^i)^{I'}$. Comme $(CT^i)^{I'} = 0$, pour $i \neq 0$ (cf. [25], th.2, p.176), on a $i=0$. On a donc $E \subset B_K^0$ et $E \cap B_K^1 = 0$. On en déduit que la restriction de θ^0 à E est une application injective de E dans $C^{I'}$.

Comme I' est ouvert dans I , $C^{I'}$ est une extension finie de $C^I = \hat{K}^{nr}$; comme l'extension $\hat{K}^{nr}/\hat{K}_O^{nr}$ est finie, $C^{I'}$ est aussi une ex-

tension finie de $\hat{K}_O^{nr}$.

En particulier, E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\hat{K}_O^{nr}$. Comme F commute à l'action de G , E est stable par F . Comme $\hat{K}_O^{nr} = \text{Frac}(W(\bar{k}))$, avec $\bar{k}$ algébriquement clos, E , en tant que F -iso-cristal, est somme-directe de ses composantes isotypiques, autrement dit, on peut écrire (cf., par exemple, [12] th.2.2, p.33 ou [1], p.316)

$$E = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Q}} E_{\alpha, \hat{K}_O^{nr}},$$

où les $E_{\alpha, \hat{K}_O^{nr}}$ sont des $\hat{K}_O^{nr}[F]$ -modules, presque tous nuls, chaque $E_{\alpha, \hat{K}_O^{nr}}$ étant engendré, comme vectoriel sur $\hat{K}_O^{nr}$, par le sous-ensemble E_{α} formé des $b \in E$ tels que $F^s b = p^r b$, si $\alpha = r/s$, avec $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}^*$, r et s premiers entre eux.

Montrons que $E_{0, \hat{K}_O^{nr}} = \hat{K}_O^{nr}$: en effet, si $b \in E_0$, on a $Fb = b$; comme $E_0 \subset E \subset B_K^O$, on a $b \in B[0] = \mathbb{Q}_p$ et $E_{0, \hat{K}_O^{nr}} = \hat{K}_O^{nr}$.

Pour achever la démonstration, il suffit alors de vérifier que, si $\alpha = r/s$ est $\neq 0$, i.e. si $r \neq 0$, alors $E_{\alpha} = 0$. Soit b un élément non nul de E_{α} et soit P son polynôme minimal sur $\hat{K}_O^{nr}$. On a $P(b) = 0$ et, en appliquant F^s , on en déduit que $\sigma^s P(F^s b) = 0$, ou encore que $\sigma^s P(p^r b) = 0$, ce qui est absurde car il est clair que les zéros de $\sigma^s P(X)$ ont même valuation que ceux de $P(X)$.

Remarque. - Cette démonstration prouve, en outre, que les conditions (Fil) et Tate du n° 2.2.4 impliquent (Gal).

§3 - modules admissibles

Dans ce paragraphe, B est un anneau de Barsotti-Tate fixé. On se fixe aussi un monomorphisme $\theta : \text{gr}(B_K) \rightarrow C[T, T^{-1}]$ vérifiant (Tate) (cf. n° 2.2.4). On note C_B l'image de $\theta_O : B_K^O \rightarrow C$. C'est une sous- K -algèbre de C , stable par G , et l'image de θ est $C_B[T, T^{-1}]$.

3.1. - LES FONCTEURS $\underline{D}_B$ ET $\underline{V}_B$.

3.1.1. - Pour tout module galoisien V , on note $B \otimes V$ le module galoisien filtré $B \otimes_{K_O} V$ (produit tensoriel, dans la catégorie des modules galoisiens filtrés, de B par le module galoisien filtré $V_{K_O} = K_O \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$, trivial en tant que module filtré, défini au n°2.1.4).

En d'autres termes, $B \otimes V$ s'identifie, en tant que $K_O[G]$ -module à $B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$; l'action de F est définie par

$$F(b \otimes v) = Fb \otimes v , \text{ pour } b \in B , v \in V ,$$

et la filtration de $(B \otimes V)_K (= K \otimes_{K_O} (B \otimes V))$ qui s'identifie à $B_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ est définie par

$$(B \otimes V)_K^i = B_K^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V , \text{ pour tout } i \in \mathbb{Z} .$$

3.1.2. - Pour tout module galoisien V , on note $\underline{D}_B(V)$ le module filtré $(B \otimes V)\{0\}$. Si $D = \underline{D}_B(V)$, on a donc $D = (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G$ en tant que $K_O[F]$ -module, $D_K = K \otimes_{K_O} D$ s'identifie à $(B_K \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G$ et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $D_K^i = (B_K^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G$.

Il est clair que $\underline{D}_B$ est, de manière évidente, un foncteur additif de la catégorie des modules galoisiens dans celle des modules filtrés.

3.1.3. - De même, pour tout module filtré D , on note $B \otimes D$ le module galoisien filtré produit tensoriel (dans la catégorie des modules galoisiens filtrés) de B par le module galoisien filtré D , trivial en tant que module galoisien (cf. n°2.1.3).

En d'autres termes, $B \otimes D$ s'identifie, en tant que module filtré, au produit tensoriel des modules filtrés B et D et l'action de G est définie par

$$g(b \otimes d) = gb \otimes d , \text{ pour } g \in G , b \in B , d \in D .$$

3.1.4. - Pour tout module filtré D , on note $\underline{V}_B(D)$ le module ga-

loisien $(B \otimes D)[0]$. Si $V = \underline{V}_B(D)$, on voit donc que V est le sous- $\mathbb{Q}_p[G]$ -module de $B \otimes_{K_0} D$ formé des v qui vérifient

$$\begin{cases} Fv = v, \\ v \in (B \otimes D)_K^0 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_K^{-i} \otimes D_K^i. \end{cases}$$

Il est clair que $\underline{V}_B$ est, de manière évidente, un foncteur additif de la catégorie des modules filtrés dans celle des modules galoisiens.

3.1.5. - Soit V un module galoisien. L'application de $B \otimes (B \otimes V)$ dans $B \otimes V$, qui à $b \otimes (b' \otimes v)$ associe $bb' \otimes v$, est un morphisme de modules galoisiens filtrés et elle induit, par restriction, un morphisme de modules galoisiens filtrés

$$\xi_V : B \otimes \underline{D}_B(V) \rightarrow B \otimes V.$$

De même, si D est un module filtré, l'application de $B \otimes (B \otimes D)$ dans $B \otimes D$, qui à $b \otimes (b' \otimes d)$ associe $bb' \otimes d$, est un morphisme de modules galoisiens filtrés et elle induit, par restriction, un morphisme de modules galoisiens filtrés

$$\eta_D : B \otimes \underline{V}_B(D) \rightarrow B \otimes D.$$

3.2. - MODULES GALOISIENS ADMISSIBLES.

3.2.1. - PROPOSITION. - Soit V un module galoisien et soit $D = \underline{D}_B(V)$. Alors,

i) pour tout $i \in \mathbb{Z}$, D_K^i / D_K^{i+1} s'identifie canoniquement (et fonctoriellement en V) à un sous- K -espace vectoriel de

$$(C_B T^i \otimes V)^G \subset (C T^i \otimes V)^G;$$

ii) l'application $\xi_V : B \otimes D \rightarrow B \otimes V$ identifie $B \otimes D$ à un sous-objet de $B \otimes V$ (i.e. elle est injective et, si $\xi_{V,K} : (B \otimes D)_K \rightarrow B_K \otimes V$ est l'application déduite par extension des scalaires, on a

$$\xi_{V,K}((B \otimes D)_K^i) = (B_K^i \otimes V) \cap \xi_{V,K}((B \otimes D)_K), \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z};$$

iii) si $\dim_{\mathbb{Q}_p} V$ est finie, il en est de même de $\dim_{K_O} D$ et l'on a $\dim_{K_O} D \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

3.2.2. - Démonstration. - On voit immédiatement que, pour tout i , l'application θ_i identifie B_K^i/B_K^{i+1} à $C_B T^i$ et

$$D_K^i/D_K^{i+1} = (B_K^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G / (B_K^{i+1} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G$$

est un sous-K-espace vectoriel de $\left((B_K^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) / (B_K^{i+1} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \right)^G \simeq (C_B T^i \otimes V)^G \subset (C_B T^i \otimes V)^G$, d'où l'assertion (i).

Il est clair que démontrer la deuxième assertion revient à vérifier que l'application K-linéaire

$$\text{gr}(\xi_{V,K}) : \text{gr}((B \otimes D)_K) \longrightarrow \text{gr}(B_K \otimes V)$$

induite par $\xi_{V,K}$ sur les gradués associés est injective.

On sait, grâce à Tate (voir Serre [20], §2, prop.4) que l'application canonique évidente de $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (C \otimes_K (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{-i\})$ dans $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ est injective. Si l'on pose $X(-i) = C_B \otimes_K (C_B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{-i\}$, on voit qu'il en est, a fortiori, de même de l'application canonique de $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} X(-i)$ dans $C_B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$.

Il est immédiat que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \text{gr}^j((B \otimes D)_K) &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \left((B_K^{-i+j} / B_K^{-i+j+1}) \otimes_K (D_K^i / D_K^{i+1}) \right) \\ &\simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \left(C_B T^{-i+j} \otimes_K (D_K^i / D_K^{i+1}) \right) \end{aligned}$$

et que

$$\text{gr}^j(B_K \otimes V) = (B_K^j \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) / (B_K^{j+1} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \simeq C_B T^j \otimes_{\mathbb{Q}_p} V.$$

On voit facilement que $\text{gr}^j(\xi_{V,K})$ s'identifie au composé des applications évidentes, toutes injectives,

$$\begin{aligned}
 & \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \left(C_B T^{-i+j} \otimes_K (D_K^i / D_K^{i+1}) \right) \hookrightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \left(C_B T^{-i+j} \otimes_K (C_B T^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G \right) \\
 & \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \left(C_B T^j \otimes_K (C_B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \{-i\} \right) \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \left(C_B T^j \otimes_{C_B} X(-i) \right) \\
 & \simeq C_B T^j \otimes_{C_B} \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} X(-i) \right) \hookrightarrow C_B T^j \otimes_{C_B} (C_B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \simeq C_B T^j \otimes_{\mathbb{Q}_p} V ,
 \end{aligned}$$

ce qui prouve (ii) .

Soit B' le corps des fractions de l'anneau intègre B . Il est clair que l'application injective ξ_V se prolonge, par linéarité, en une application encore injective, $\xi'_V : B' \otimes_{K_O} D \rightarrow B' \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ et $B' \otimes_{K_O} D$ s'identifie donc à un sous- B' -espace vectoriel, de dimension celle de D sur K_O , de $B' \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ qui est un B' -espace vectoriel de dimension celle de V sur $\mathbb{Q}_p$. L'assertion (iii) en résulte .

3.2.3. - Remarques. -

i) L'injectivité de $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \left(C \otimes_K (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \{-i\} \right) \rightarrow C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ n'est énoncée dans [20] que lorsque V est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$ mais la démonstration reste la même dans le cas général.

ii) Rappelons que l'on dit qu'un module galoisien V , de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, est de Hodge-Tate si l'application $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \left(C \otimes_K (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \{-i\} \right) \rightarrow C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ est un isomorphisme. Cela équivaut visiblement à $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_K (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \{-i\} = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

3.2.4. - De la proposition 3.2.1., on déduit le résultat suivant :

COROLLAIRE. - Soit V un module galoisien de dimension finie et soit $D = \underline{D}_B(V)$. Les conditions suivantes sont équivalentes

i) on a $\dim_{K_O} D = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$;

ii) le module V est de Hodge-Tate et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a
 $\dim_K (D_K^i / D_K^{i+1}) = \dim_K (C T^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G$.

En effet, on a

$$\dim_{K_O} D = \dim_K D_K = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_K (D_K^i / D_K^{i+1}) \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_K (CT^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V.$$

On a donc $\dim_{K_O} D = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ si et seulement si les deux inégalités qui précèdent sont des égalités : pour la première, cela revient à dire que $\dim_K (D_K^i / D_K^{i+1}) = \dim_K (CT^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G$ pour tout i , et pour la seconde que V est de Hodge-Tate.

3.2.5. - DÉFINITION. - On dit qu'un module galoisien V est B-admissible (ou, s'il n'y a pas de confusion possible sur B , admissible) s'il est de dimension finie et s'il satisfait aux conditions équivalentes du corollaire 3.2.4.

On note $\text{Rep}_B(G)$ la sous-catégorie pleine de $\text{Rep}(G)$ dont les objets sont les modules galoisiens admissibles.

3.3. - EXEMPLES DE MODULES GALOISIENS ADMISSIBLES.

3.3.1. - PROPOSITION. - Soit V un module galoisien de dimension finie tel que l'image du groupe d'inertie I (dans le groupe des $\mathbb{Q}_p$ -automorphismes de V) est un groupe fini. Pour que V soit admissible, il faut et il suffit que V soit non ramifiée (i.e. que l'image de l'inertie soit réduite à l'élément-neutre).

3.3.2. - La démonstration de cette proposition utilise le résultat suivant (qui est un cas particulier du th.1, p.III.31 de [21]) :

LEMME. - Soit X un espace vectoriel de dimension finie sur $\hat{K}_O^{\text{nr}}$ sur lequel $\text{Gal}(\bar{k}/k) = G/I$ opère continûment et semi-linéairement (i.e., on a $g(\lambda x) = g\lambda \cdot gx$, si $g \in G/I$, $\lambda \in \hat{K}_O^{\text{nr}}$, $x \in X$). L'application canonique $\hat{K}_O^{\text{nr}} \otimes_{K_O} X^{G/I} \rightarrow X$ est un isomorphisme.

3.3.3. - Démontrons alors la proposition : posons $X = (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^I$.

On a $D_B(V) = X^{G/I}$ et il résulte du lemme précédent que $\dim_{K_O} D_B(V) = \dim_{\hat{K}_O^{\text{nr}}} X$. Tout revient donc à montrer que l'on a

$\dim_{\hat{K}_O^{nr}} X = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ si et seulement si l'image de l'inertie est réduite à l'élément-neutre.

Soit I' un sous-groupe invariant ouvert de I dont l'image est triviale et soit $J = I/I'$. On a $X = (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^I = ((B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{I'})^J = (B^{I'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^J$; d'après la proposition 2.3.3, on a $B^{I'} = \hat{K}_O^{nr}$, donc $X = (\hat{K}_O^{nr} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^J = \hat{K}_O^{nr} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V^J$ et la dimension de X sur $\hat{K}_O^{nr}$ est égale à celle de V^J sur $\mathbb{Q}_p$; elle n'est égale à la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$ que si et seulement si $V^J = V$, ce qui équivaut à l'image de l'inertie triviale.

3.3.4. - Remarque. - L'hypothèse que V est un module galoisien de dimension finie tel que l'image du groupe d'inertie est fini est équivalente (Sen, [17], p.167, cor.1) à l'hypothèse que V est de Hodge-Tate, avec $(CT^{-i} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G \simeq (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{i\} = 0$ si $i \neq 0$.

3.3.5. - PROPOSITION. - Soit V un module galoisien de dimension 1 sur $\mathbb{Q}_p$. Pour que V soit admissible, il faut et il suffit qu'il existe un entier i tel que $V \otimes T^{-i}$ soit non ramifié.

3.3.6. - Démonstration. - Soit $\rho : G \rightarrow \mathbb{Q}_p^*$ le caractère définissant l'action de G sur V . Si V est admissible, V est de Hodge-Tate. Soit i l'unique entier tel que $(CT^{-i} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G \neq 0$. On voit (soit en appliquant la remarque 3.3.4, soit directement) qu'il existe un sous-groupe ouvert invariant I' de I tel que la restriction de la représentation à I' est isomorphe à T^i , i.e. tel que $\rho(g) = \chi^i(g)$ pour tout $g \in I'$. En utilisant le fait que B contient $K_O[T, T^{-1}]$, on voit facilement que V est admissible si et seulement si $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} T^{-i}$ l'est et il suffit d'appliquer la proposition 3.3.1. à $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} T^{-i}$.

3.3.7. - Remarque. - Soit V un module galoisien de dimension finie. Si, lorsque l'on se restreint à I , V devient isomorphe à une somme directe de copies de certains des T^i , V est B-admissible. Si B est le plus petit possible, i.e. si $B = \hat{K}_O^{nr}[T, T^{-1}]$, il est facile de voir que l'on

obtient ainsi tous les modules galoisiens B-admissibles.

3.4. - LA CATÉGORIE $\text{Rep}_B(G)$ DES MODULES GALOISIENS B-ADMISSIBLES.

3.4.1. - PROPOSITION. - La catégorie $\text{Rep}_B(G)$ est une sous-catégorie pleine de $\text{Rep}(G)$ stable par somme directe, sous-objet, quotient (en particulier, c'est une catégorie abélienne), et la restriction du foncteur $\underline{D}_B$ à cette catégorie est exacte et fidèle.

3.4.2. - Démonstration. - La stabilité par somme directe est triviale, puisque le foncteur $\underline{D}_B$ est additif. Soit

$$0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0$$

une suite exacte de modules galoisiens de dimension finie. Elle induit une suite exacte

$$0 \rightarrow B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V' \rightarrow B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \rightarrow B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V'' \rightarrow 0 ,$$

donc une suite exacte de K_O -espaces vectoriels

$$0 \rightarrow \underline{D}_B(V') \rightarrow \underline{D}_B(V) \rightarrow \underline{D}_B(V'') .$$

Soit h (resp. h' , h'') la dimension de V (resp. V' , V'') sur $\mathbb{Q}_p$. Si V est admissible, on a $\dim_{K_O} \underline{D}_B(V) = h$, et on sait (prop. 3.2.1) que $\dim_{K_O} \underline{D}_B(V') \leq h'$ et $\dim_{K_O} \underline{D}_B(V'') \leq h''$. Comme $h = h' + h''$, la seule possibilité est que $\dim_{K_O} \underline{D}_B(V') = h'$ et $\dim_{K_O} \underline{D}_B(V'') = h''$. Ceci implique que V' et V'' sont admissibles et que la suite de K_O -espaces vectoriels

$$0 \rightarrow \underline{D}_B(V') \rightarrow \underline{D}_B(V) \rightarrow \underline{D}_B(V'') \rightarrow 0$$

est exacte. Il reste à vérifier que cette suite est exacte, en tant que suite de modules filtrés, autrement dit (cf. n° 1.2.3) que, si l'on pose $D' = \underline{D}_B(V')$, $D = \underline{D}_B(V)$ et $D'' = \underline{D}_B(V'')$, pour tout i , la suite de K -espaces vectoriels

$$0 \rightarrow D_K'^i \rightarrow D_K^i \rightarrow D_K''^i \rightarrow 0$$

est exacte, ce qui résulte facilement de considérations sur les dimensions de ces espaces vectoriels.

Enfin, la fidélité de $\underline{D}_B$, restreint à $\underline{\text{Rep}}_B(G)$, est immédiate.

3.4.3. - PROPOSITION.

- i) Si V_1 et V_2 sont des modules galoisiens admissibles, il en est de même de $V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2$ et les modules filtrés $\underline{D}_B(V_1) \otimes \underline{D}_B(V_2)$ et $\underline{D}_B(V_1 \otimes V_2)$ sont canoniquement et fonctoriellement isomorphes.
- ii) Si V est un module galoisien admissible, il en est de même de V^* et les modules filtrés $\underline{D}_B(V^*)$ et $(\underline{D}_B(V))^*$ sont canoniquement et fonctoriellement isomorphes.

3.4.4. - Démonstration. - Posons $V_3 = V_1 \otimes V_2$ et, pour $i = 1, 2, 3$, $D_i = \underline{D}_B(V_i)$. L'application de $(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1) \otimes_{K_0} (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2)$ dans $B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_3$, qui à $(b_1 \otimes v_1) \otimes (b_2 \otimes v_2)$ associe $b_1 b_2 \otimes (v_1 \otimes v_2)$, induit un homomorphisme canonique (et fonctoriel en V_1 et V_2) de $D_1 \otimes D_2$ dans D_3 . Elle induit une application K-linéaire de $D_{1K} \otimes D_{2K}$ dans D_{3K} , compatible avec les filtrations, donc une application K-linéaire φ des gradués associés.

On voit que la composante homogène du premier gradué est

$$\bigoplus_{i'+i''=i} \left((D_{1K}^{i'}/D_{1K}^{i'+1}) \otimes_K (D_{2K}^{i''}/D_{2K}^{i''+1}) \right) \text{ qui s'identifie à } \bigoplus_{i'+i''=i} \left((CT^{i'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1)^G \otimes_K (CT^{i''} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2)^G \right), \text{ puisque } V_1 \text{ et } V_2 \text{ sont admissibles (n° 3.2.4).}$$

On voit que, si l'on identifie D_{3K}^i/D_{3K}^{i+1} à un sous-K-espace vectoriel de $(CT^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_3)$, l'application φ , en degré i , n'est autre que l'application évidente

$$\bigoplus_{i'+i''=i} (CT^{i'} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1)^G \otimes_K (CT^{i''} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2)^G \rightarrow (CT^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_3)^G$$

dont on vérifie facilement que c'est un isomorphisme.

On en déduit que l'application canonique de D_{3K}^i/D_{3K}^{i+1} dans $(CT^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_3)^G$ est un isomorphisme pour tout i , donc (comme V_3 est évidemment de Hodge-Tate) que V_3 est admissible.

Comme D_1 , D_2 et D_3 sont de dimension finie, le fait que l'application canonique de $D_1 \otimes D_2$ dans D_3 soit un isomorphisme de modules filtrés résulte trivialement de ce que c'est un isomorphisme sur les gradués associés, et l'assertion (i) de la proposition est démontrée.

Si V est admissible et si $h = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$, $\det V = \bigwedge^h V$ est un facteur direct de $\bigotimes^h V$ et est donc admissible ; comme $\det V$ est de dimension 1, il existe, d'après la proposition 3.3.5, un entier i tel que, quitte à se restreindre à I , $\det V$ devienne isomorphe à T^i ; donc $\det^{-1} V = (\det V)^*$, restreint à I , est isomorphe à T^{-i} et, d'après la même proposition, c'est un module galoisien admissible. De même, $\bigwedge^{h-1} V$ est un facteur direct de $\bigotimes^{h-1} V$ et est donc admissible ; il en est alors de même de $V^* \simeq \bigwedge^{h-1} V \otimes \det^{-1} V$.

L'homomorphisme canonique $\mu_V : V \otimes V^* \rightarrow \mathbb{Q}_p$ (défini par $\mu_V(v \otimes v') = v'(v)$) induit un morphisme $\underline{D}_B(\mu_V) : \underline{D}_B(V \otimes V^*) \rightarrow \underline{D}_B(\mathbb{Q}_p)$. On voit que $\underline{D}_B(\mathbb{Q}_p)$ s'identifie canoniquement à K_O et on sait que $\underline{D}_B(V \otimes V^*)$ s'identifie à $\underline{D}_B(V) \otimes \underline{D}_B(V^*)$, puisque V et V^* sont admissibles. On en déduit un morphisme canonique de $\underline{D}_B(V) \otimes \underline{D}_B(V^*)$ dans K_O et on vérifie facilement que celui-ci induit un isomorphisme (évidemment fonctoriel en V) de $\underline{D}_B(V^*)$ sur $(\underline{D}_B(V))^*$.

3.4.5. - Remarques.

i) Il résulte immédiatement de la proposition précédente et des propriétés du foncteur Hom que, si V_1 et V_2 sont deux modules galoisiens admissibles, Hom (V_1, V_2) l'est aussi et $\underline{D}_B(\underline{\text{Hom}}(V_1, V_2))$ s'identifie à $\underline{\text{Hom}}(\underline{D}_B(V_1), \underline{D}_B(V_2))$.

ii) Si V est un module galoisien admissible, la proposition montre que, pour tout entier $n \geq 0$, $\bigotimes^n V$ est admissible et $\underline{D}_B(\bigotimes^n V)$ s'identifie

canoniquement (et fonctoriellement) à $\bigotimes^n \underline{D}_B(V)$. Il est facile de voir que, dans cette identification, on a $\underline{D}_B(\text{Sym}^n V) = \text{Sym}^n(\underline{D}_B(V))$ et $\underline{D}_B(\bigwedge^n V) = \bigwedge^n \underline{D}_B(V)$.

iii) Modulo quelques vérifications faciles, les propositions 3.4.1 et 3.4.3 signifient, dans la terminologie de Saavedra ([16], chap.I, §5 et chap.III, §3) que la catégorie $\underline{\text{Rep}}_B(G)$ est une sous-catégorie $\mathbb{Q}_p$ -linéaire tannakienne de la $\otimes$ -catégorie $\underline{\text{Rep}}(G)$ (elle-même $\mathbb{Q}_p$ -linéaire tannakienne) et que la restriction de $\underline{D}_B$ à $\underline{\text{Rep}}_B(G)$ est un $\otimes$ -foncteur rigide exact et fidèle de cette catégorie dans la $\otimes$ -catégorie $\mathbb{Q}_p$ -linéaire rigide $\underline{\text{MF}}_K$.

3.5. - L'APPLICATION ξ_V POUR LES MODULES GALOISIENS ADMISSIBLES.

3.5.1. - PROPOSITION. - Soit V un module galoisien de dimension finie et soit $D = \underline{D}_B(V)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) le module V est admissible ;
- ii) l'application $\xi_V : B \otimes_{K_0} D \rightarrow B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ est surjective ;
- iii) l'application ξ_V est un isomorphisme de modules galoisiens filtrés.

3.5.2. - Démonstration. - Il est clair que (iii) $\Rightarrow$ (ii). On sait (prop. 3.2.1) que ξ_V identifie $B \otimes D$ à un sous-objet de $B \otimes V$ et l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) en résulte trivialement.

On sait (prop. 2.3.1) que B est intègre. Soit B' son corps des fractions. D'après la proposition 3.2.1, ξ_V est injective et on en déduit qu'il en est de même de l'application $\xi'_V : B' \otimes_{K_0} D \rightarrow B' \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ induite par extension des scalaires. On voit donc que V est admissible si et seulement si l'application ξ'_V est surjective. En particulier (ii) $\Rightarrow$ (i) et, pour montrer que (i) $\Rightarrow$ (ii), il suffit de vérifier que si $v_1, v_2, \dots, v_h$ (resp. $d_1, d_2, \dots, d_h$) est une base de V sur $\mathbb{Q}_p$ (resp. de D sur K_0), alors le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les composantes des d_j sur la base du B -module libre $B \otimes V$ formée par les $1 \otimes v_i$ est inversible dans B .

Quitte à remplacer V par $\bigwedge^h V$ et D par $\bigwedge^h D$ (canoniquement isomorphe à $\underline{D}_B(\bigwedge^h V)$, cf. remarque (ii) du n° 3.4.5), on voit que l'on peut supposer $h = 1$. Mais alors (prop. 3.3.5), il existe un entier i tel que $T^{-i} \otimes V$ est non ramifié. On voit alors que, si v est un générateur de V et t un générateur de T , $t^{-i} \otimes v$ est un générateur du $\hat{K}_O^{\text{nr}}$ -espace vectoriel, de dimension 1, $(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_O}$; on en déduit que l'on peut trouver un élément non nul $\lambda \in \hat{K}_O^{\text{nr}}$ tel que $\lambda t^{-i} \otimes v$ est un générateur de D ; l'assertion résulte de ce que λt^{-i} est inversible dans $\hat{K}_O^{\text{nr}}[T, T^{-1}]$, donc, a fortiori, dans B .

3.6. - MODULES FILTRÉS ADMISSIBLES.

3.6.1. - PROPOSITION. - Soit D un module filtré de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) il existe un module galoisien admissible V et un isomorphisme de D sur $\underline{D}_B(V)$;
- ii) l'application canonique $\eta_D : B \otimes \underline{V}_B(D) \rightarrow B \otimes D$ est un isomorphisme de modules galoisiens filtrés.

3.6.2. - Démonstration. -

■ Si (ii) est satisfaite, posons $V = \underline{V}_B(D)$. L'isomorphisme η_D induit un isomorphisme du module filtré $\underline{D}_B(V) = (B \otimes \underline{V}_B(D))^G$ sur $(B \otimes D)^G = B^G \otimes D = K_O \otimes D \simeq D$. Comme il est clair que $\dim_{\mathbb{Q}_p} V = \dim_{K_O} D$, on en déduit que V est admissible et (ii) $\Rightarrow$ (i).

■ Si (i) est satisfaite, et si l'on identifie D et $\underline{D}_B(V)$, il résulte de la proposition 3.5.1 que $\xi_V : B \otimes D \rightarrow B \otimes V$ est un isomorphisme. On voit que $\underline{V}_B(D) = (B \otimes D)[0]$ s'identifie à $(B \otimes V)[0] = B[0] \otimes_{\mathbb{Q}_p} V = \mathbb{Q}_p \otimes V \simeq V$ et on vérifie immédiatement que $\eta_D = \xi_V^{-1}$. C'est donc bien un isomorphisme.

3.6.3. - Remarque. - On prendra garde que, étant donné un module

filtré D , l'application η_D n'est pas, en général, injective (en général, $\underline{V}_B(D)$ n'est pas de dimension finie sur Φ_p , même si D est de dimension finie sur K_0).

3.6.4. - DÉFINITION. - On dit qu'un module filtré D est B-admissible (ou admissible, s'il n'y a pas de risque de confusion sur B) s'il vérifie les conditions équivalentes de la proposition 3.6.1.

On note $\underline{MF}_{K,B}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_K$ dont les objets sont les modules filtrés admissibles.

3.6.5. - THÉOREME. - Si V (resp. D) est un module galoisien (resp. filtré) admissible, alors $\underline{D}_B(V)$ (resp. $\underline{V}_B(D)$) est un module filtré (resp. galoisien) admissible. Par restriction $\underline{D}_B$ induit une équivalence de $\text{Rep}_B(G)$ sur $\underline{MF}_{K,B}$ et la restriction de $\underline{V}_B$ est un quasi-inverse.

3.6.6. - Démonstration. - Si V est un module galoisien admissible, $\underline{D}_B(V)$ est admissible par définition. Comme $\xi_V : B \otimes \underline{D}_B(V) \rightarrow B \otimes V$ est un isomorphisme (prop. 3.5.1), on voit que $\underline{V}_B(\underline{D}_B(V)) = (B \otimes \underline{D}_B(V))[0]$ s'identifie à $(B \otimes V)[0] = B[0] \otimes_{\Phi_p} V = \Phi_p \otimes V \simeq V$, donc que $\underline{V}_B(\underline{D}_B(V))$ est canoniquement (et fonctoriellement) isomorphe à V .

Si D est un module filtré admissible, on a vu dans la démonstration de la proposition 3.6.1 que $\underline{V}_B(D)$ est admissible et que $\underline{D}_B(\underline{V}_B(D))$ et D sont canoniquement et fonctoriellement isomorphes. Le théorème en résulte.

3.6.7. - Remarque. - Le théorème implique, en particulier, que la catégorie $\underline{MF}_{K,B}$ est abélienne.

Si D est un objet de $\underline{MF}_{K,B}$, on voit facilement que les sous-objets de D dans $\underline{MF}_{K,B}$ sont les sous-objets de D dans $\underline{MF}_K$ qui sont des objets de $\underline{MF}_{K,B}$.

Plus généralement, si φ est un morphisme de modules filtrés admis-

sibles, le noyau (resp. le conoyau, la coimage, l'image) de φ dans $\underline{MF}_K$ coïncide avec le noyau (resp. le conoyau, la coimage, l'image) de φ dans $\underline{MF}_{K,B}$. En particulier, le morphisme canonique de $\text{Coim } \varphi$ dans $\text{Im } \varphi$ est un isomorphisme.

Dans la terminologie de Saavedra ([16], chap. I, §4), les propositions 3.4.1 et 3.4.3 impliquent que l'équivalence de catégories du théorème est une $\otimes$ -équivalence de $\otimes$ -catégories $\mathbb{Q}_p$ -linéaires ; en particulier, la catégorie $\underline{MF}_{K,B}$ est tannakienne et si D_1, D_2 et D sont trois modules filtrés admissibles, il en est de même de $D_1 \otimes D_2$ et D^* et on a des isomorphismes canoniques et fonctoriels de $\underline{V}_B(D_1 \otimes D_2)$ sur $\underline{V}_B(D_1) \otimes \underline{V}_B(D_2)$ et de $\underline{V}_B(D^*)$ sur $(\underline{V}_B(D))^*$.

3.7. - INVARIANTS ET "COVARIANTS".

Le théorème 3.6.5 et la proposition 3.4.3 permettent de décrire les applications multilinéaires invariantes ou covariantes sur les modules galoisiens admissibles en terme des modules filtrés qui leur sont associés. Par exemple, on a le résultat suivant :

3.7.1. - PROPOSITION. - Soient $V_1, V_2, \dots, V_n$ des modules galoisiens admissibles et soit, pour $m = 1, 2, \dots, n$, $D_m = \underline{D}_B(V_m)$. Soit $i \in \mathbb{Z}$. Le $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel des formes $\mathbb{Q}_p$ -multilinéaires $f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow \mathbb{Q}_p$ covariantes de poids χ^i (i.e. vérifiant $f(gv_1, gv_2, \dots, gv_n) = \chi^i(g) \cdot f(v_1, v_2, \dots, v_n)$ si $v_m \in V_m, g \in G$) est isomorphe à celui des applications K_O -multilinéaires $\varphi : D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n \rightarrow K_O$ vérifiant

i) $\varphi(Fd_1, Fd_2, \dots, Fd_n) = p^{-i} \sigma(\varphi(d_1, d_2, \dots, d_n))$ si $d_m \in D_m$,

ii) si $i_1, i_2, \dots, i_n$ sont des entiers vérifiant $i + \sum i_m > 0$, on a

$\varphi_K(d_1, d_2, \dots, d_n) = 0$ si $d_m \in D_{mK}^{i_m}$ pour tout m (on a noté

$\varphi_K : D_{1K} \times D_{2K} \times \dots \times D_{nK} \rightarrow K$ l'application K -multilinéaire déduite de φ par extension des scalaires).

3.7.2. - Démonstration. - Le $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel $\mathfrak{F}$ des formes $\mathbb{Q}_p$ -multilinéaires de poids χ^i s'identifie au $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel des morphismes du module galoisien $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ dans $\mathbb{Q}_p(\chi^i)$ (où l'on a noté $\mathbb{Q}_p(\chi^i)$ le module galoisien qui, comme $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel, est $\mathbb{Q}_p$ -lui-même, l'action de G se faisant à travers le caractère χ^i). Comme $\mathbb{Q}_p(\chi^i)$ est isomorphe (non canoniquement, si $i \neq 0$) à T^i , $\mathfrak{F}$ est isomorphe à $\mathfrak{F}' = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G]}(V_1 \otimes \dots \otimes V_n, T^i)$.

On sait que T^i est admissible et on voit que $\underline{D}_B(T^i)$ s'identifie, canoniquement, à S^{-i} . D'après le théorème 3.6.5, $\mathfrak{F}'$ s'identifie donc au $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel des morphismes du module filtré $\underline{D}_B(V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n)$ dans S^{-i} , ou encore, grâce à la proposition 3.4.3, de $D_1 \otimes D_2 \otimes \dots \otimes D_n$ dans S^{-i} .

La proposition résulte alors facilement de la définition du produit tensoriel des modules filtrés.

3.7.3. - Remarques.

i) Supposons que, dans la proposition précédente, $V_1 = V_2 = \dots = V_n$. Il résulte de la remarque (ii) du n° 3.4.5 que φ est alternée (resp. symétrique) si et seulement si f l'est. Si $n = 2$, φ est non dégénérée si et seulement si f l'est.

ii) Soit V un module galoisien admissible et supposons que $D = \underline{D}_B(V)$ vérifie $D_K^0 = D_K$ et $D_K^2 = 0$ (nous verrons au § 5 que c'est le cas si V est le dual du module galoisien associé à un groupe p -divisible sur l'anneau des entiers de K). Il résulte de ce qui précède que le $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques (resp. alternées) sur V , covariantes de poids χ^{-1} , s'identifie au $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel des formes K_0 -bilinéaires symétriques (resp. alternées) $\varphi : D \times D \rightarrow K_0$ vérifiant

$$(i) \quad \varphi(Fd_1, Fd_2) = p\sigma(\varphi(d_1, d_2)) \quad \text{si } d_1, d_2 \in D,$$

$$(ii) \quad D_K^1 \text{ est totalement isotrope pour } \varphi_K.$$

Si k est algébriquement clos et si V n'a ni sous-objet isomorphe à $\mathbb{Q}_p$, ni quotient isomorphe à $\mathbb{Q}_p(\chi^{-1})$, on montre facilement que toute

forme bilinéaire covariante non nulle sur V est nécessairement de poids χ^{-1} .

3.8. - DEUX PROPRIÉTÉS DES MODULES GALOISIENS ADMISSIBLES.

3.8.1. - PROPOSITION. - Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$ et soient ρ et ρ' deux homomorphismes continus de G dans le groupe des $\mathbb{Q}_p$ -automorphismes de V . On suppose que (V, ρ) est admissible et que ρ et ρ' coïncident sur un sous-groupe ouvert I' du groupe d'inertie I . Pour que (V, ρ') soit admissible, il faut et il suffit que ρ et ρ' coïncident sur I .

3.8.2. - Démonstration. - Il est clair que l'on peut supposer I' invariant dans G . Posons $V = (V, \rho)$ et $V' = (V, \rho')$. Si V et V' sont admissibles, il en est de même de $\underline{\text{Hom}}(V, V') = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(V, V')$ (cf. remarque (i) du n° 3.4.5), donc aussi du sous- $\mathbb{Q}_p[G]$ -module $\text{Hom}_{\mathbb{Q}_p[I']}(V, V')$; comme l'image de l'inertie dans cette représentation est finie, elle doit être triviale (prop. 3.3.1) et tout $\mathbb{Q}_p[I']$ -homomorphisme de V dans V' est un $\mathbb{Q}_p[I]$ -homomorphisme, ce qui montre que la condition est nécessaire.

D'après le lemme 3.3.2, on a

$$\dim_{\hat{K}_O^{\text{nr}}} (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^I = \dim_{K_O} (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G = \dim_{K_O} D_B(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$$

et

$$\dim_{K_O} D_B(V') = \dim_{K_O} (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V')^G = \dim_{\hat{K}_O^{\text{nr}}} (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V')^I.$$

Si ρ et ρ' coïncident sur I , on a donc $(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^I = (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V')^I$ et

$\dim_{K_O} D_B(V') = \dim_{\hat{K}_O^{\text{nr}}} (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^I = \dim_{\mathbb{Q}_p} V = \dim_{\mathbb{Q}_p} V'$ et la condition est suffisante.

3.8.3. - Notons $\underline{\text{Rep}}_{\text{HT}}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\text{Rep}}(G)$ dont les objets sont les modules galoisiens de Hodge-Tate. Il est clair que $\underline{\text{Rep}}_B(G)$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie $\underline{\text{Rep}}_{\text{HT}}(G)$. Comme la catégorie $\underline{\text{Rep}}(G)$ (resp. $\underline{\text{Rep}}_{\text{HT}}(G)$, $\underline{\text{Rep}}_B(G)$) est stable par sous-objet,

quotient, $\oplus$, $\otimes$, $*$, on peut parler du groupe pro-algébrique $\mathbb{H}$ (resp. $\mathbb{H}^{\text{HT}}$, $\mathbb{H}^{\text{B}}$) enveloppe de l'image de Galois (cf. Serre, [22], § 1) ; dans la terminologie de Saavedra ([16], chap.II), c'est le groupe des $\otimes$ -automorphismes du foncteur fibre qui, à tout objet V de la catégorie, associe le $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel sous-jacent. Il est clair que $\mathbb{H}^{\text{HT}}$ s'identifie à un quotient de $\mathbb{H}$ et $\mathbb{H}^{\text{B}}$ à un quotient de $\mathbb{H}^{\text{HT}}$.

3.8.4. - PROPOSITION. - Si k est algébriquement clos, le groupe $\mathbb{H}^{\text{B}}$ est connexe.

Démonstration. - Il est clair que cela revient à démontrer que, pour tout module galoisien admissible V , le groupe $\mathbb{H}_V$, enveloppe algébrique de l'image de Galois dans la représentation, est connexe. S'il ne l'était pas, il existerait une représentation de ce groupe dont l'image serait finie et non triviale. On sait (cf. par exemple, [16], chap.II, n° 4.3.2) qu'elle se réaliserait comme un quotient V' d'un sous-espace d'une somme directe de puissances tensorielles de V et V^* ; on voit facilement que V' serait alors un module galoisien admissible pour lequel l'image de $G = I$, serait finie et non triviale, ce qui est impossible, d'après la proposition 3.3.1.

§ 4 - modules faiblement admissibles

Dans tout ce paragraphe, on suppose le corps k algébriquement clos. On a donc $K_0 = \hat{K}_0^{\text{nr}}$ et $K = \hat{K}^{\text{nr}}$.

4.1. - DÉFINITIONS.

4.1.1. - Pour tout entier $s \geq 1$, on note $\mathbb{Q}_{p^s}$ l'unique extension de $\mathbb{Q}_p$ de degré s contenue dans K_0 .

Pour tout module filtré D et tout nombre rationnel $\alpha = r/s$, avec

$r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}^*$, r et s premiers entre eux, on pose

$$D_\alpha = \{ d \in D \mid F^s d = p^r d \} .$$

On voit que c'est un sous- $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de D . On pose

$$D_{\alpha, K_O} = K_O \otimes_{\mathbb{Q}_p} D_\alpha .$$

Si D est de dimension finie sur K_O , on sait (cf. par exemple, [1] , p.316) que les D_α sont presque tous nuls et tous de dimension finie, et que l'homomorphisme évident

$$\bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Q}} D_{\alpha, K_O} \rightarrow D$$

est un isomorphisme de $K_O[F]$ -modules (les D_{α, K_O} sont les composantes isotypiques du F-iso-cristal sous-jacent à D).

4.1.1.2. - Pour tout module filtré D de dimension finie, on pose

$$t_N(D) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} \alpha \cdot \dim_{K_O} D_{\alpha, K_O}$$

$$t_H(D) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \cdot \dim_K (D_K^i / D_K^{i+1}) .$$

On voit facilement que t_N et t_H sont additives ; autrement dit, pour toute suite exacte de modules filtrés (cf. n° 1.2.3)

$$0 \rightarrow D' \rightarrow D \rightarrow D'' \rightarrow 0 ,$$

on a $t_N(D) = t_N(D') + t_N(D'')$ et $t_H(D) = t_H(D') + t_H(D'')$.

4.1.1.3. - PROPOSITION. Soit D un module filtré de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) On a $t_H(D) = t_N(D)$ et, pour tout sous-objet D' de D , $t_H(D') \leq t_N(D')$;
- ii) On a $t_H(D) = t_N(D)$ et, pour tout quotient D'' de D , $t_H(D'') \geq t_N(D'')$.

Démonstration. - Cela résulte immédiatement de ce que t_H et t_N sont additives.

4.1.4. - DÉFINITION. - On dit qu'un module filtré D est faiblement admissible s'il est de dimension finie et vérifie les conditions équivalentes de la proposition 4.1.3.

On note $\underline{MF}_K^f$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_K$ dont les objets sont les modules filtrés faiblement admissibles.

4.2. - LA CATÉGORIE $\underline{MF}_K^f$.

4.2.1. - PROPOSITION. - La catégorie des modules filtrés faiblement admissibles est abélienne et le noyau (resp. le conoyau) d'un morphisme φ dans cette catégorie coïncide avec le noyau (resp. le conoyau) de φ dans la catégorie des modules filtrés. En outre

i) le dual D^* d'un module filtré faiblement admissible D est faiblement admissible ;

ii) pour qu'un sous-objet D' (resp. un quotient D''), dans $\underline{MF}_K$, d'un module filtré faiblement admissible soit faiblement admissible, il faut et il suffit que $t_H(D') = t_N(D')$ (resp. $t_H(D'') = t_N(D'')$) ;

iii) si

$$0 \rightarrow D' \rightarrow D \rightarrow D'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte de modules filtrés, et si deux d'entre eux sont faiblement admissibles, il en est de même du troisième.

4.2.2. - Démonstration. - On voit facilement que $t_H(D^*) = -t_H(D)$ et $t_N(D^*) = -t_N(D)$, et l'assertion (i) résulte immédiatement de la proposition 4.1.3. L'assertion (ii) est également immédiate. Compte-tenu de la proposition 4.1.3, il est immédiat que, si

$$0 \rightarrow D' \rightarrow D \rightarrow D'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte de modules filtrés, et si D et l'un des deux autres sont faiblement admissibles, il en est de même du troisième. Montrons que, si D' et D'' sont faiblement admissibles, il en est de même de D :

on a $t_H(D) = t_H(D') + t_H(D'') = t_N(D') + t_N(D'') = t_N(D)$, et il suffit de vérifier que, si E est un sous-objet de D , on a $t_H(E) \leq t_N(E)$. Si l'on identifie D' à un sous-objet de D et si l'on note φ la restriction à E de la projection de D sur D'' , on a une suite exacte

$$0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0 ,$$

où $E' = \text{Ker } \varphi = E \cap D'$ est un sous-objet de D' et où $E'' = \text{Coim } \varphi$ est le quotient de E par E' . En particulier, on a

$$t_H(E) = t_H(E') + t_H(E'') \quad \text{et} \quad t_N(E) = t_N(E') + t_N(E'') .$$

Soit maintenant φE l'image de φ . Alors E'' s'identifie à φE en tant que $K_O[F]$ -module à gauche et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $(E'')_K^i$ est un sous- K -espace vectoriel de $(\varphi E)_K^i$. On en déduit facilement que $t_N(E'') = t_N(\varphi E)$ et $t_H(E'') \leq t_H(\varphi E)$.

On a donc $t_H(E) = t_H(E') + t_H(E'') \leq t_H(E') + t_H(\varphi E)$. Comme E' (resp. φE) s'identifie à un sous-objet de D' (resp. D'') qui est faiblement admissible, on a $t_H(E') \leq t_N(E')$ et $t_H(\varphi E) \leq t_N(\varphi E) = t_N(E'')$, d'où $t_H(E) \leq t_N(E') + t_N(E'') = t_N(E)$ et D est faiblement admissible, d'où l'assertion (iii) .

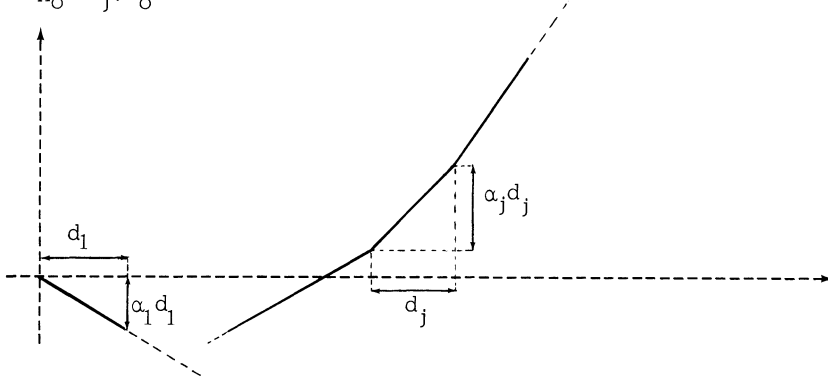
Compte-tenu de ce qui précède, pour achever la démonstration de la proposition, il suffit de vérifier que, si $\varphi : D \rightarrow E$ est un morphisme de modules filtrés faiblement admissibles, l'image $\text{Im } \varphi$ de φ (dans la catégorie des modules filtrés) est faiblement admissible et le morphisme canonique $\bar{\varphi} : \text{Coim } \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi$ est un isomorphisme.

Comme $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme des $K_O[F]$ -modules sous-jacents on a $t_N(\text{Coim } \varphi) = t_N(\text{Im } \varphi)$ et $t_H(\text{Coim } \varphi) \leq t_H(\text{Im } \varphi)$, avec égalité si et seulement si $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme ; comme $\text{Coim } \varphi$ est un quotient de D , qui est faiblement admissible, on a $t_H(\text{Coim } \varphi) \geq t_N(\text{Coim } \varphi)$; de même, comme $\text{Im } \varphi$ est un sous-objet de E qui est faiblement admissible, on a $t_H(\text{Im } \varphi) \leq t_N(\text{Im } \varphi)$. On en déduit que $t_H(\text{Coim } \varphi) = t_H(\text{Im } \varphi)$, donc que $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme, et que $t_H(\text{Im } \varphi) = t_N(\text{Im } \varphi)$, donc, d'après l'assertion (ii) , que $\text{Im } \varphi$ (qui est un sous-objet de E) est faiblement admissible.

4.3. - POLYGONES DE NEWTON ET DE HODGE.

Nous nous proposons de donner une caractérisation des modules filtrés faiblement admissibles. Pour cela, nous allons introduire deux définitions :

4.3.1. - Soit D un module filtré de dimension finie. On appelle (cf. par exemple, [1] p. 317) polygone de Newton de D le polygone de Newton du F-iso-cristal sous-jacent, i.e. le polygone des pentes : de façon précise, si $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_\ell$ sont les pentes de D (i.e. les nombres rationnels α tels que $D_{\alpha, K_0} \neq 0$, cf. n°4.1.1), le polygone de Newton $P_N(D)$ est le polygone convexe d'origine $(0,0)$ dont les pentes sont les α_j , la longueur de la projection du segment de pente α_j sur l'axe horizontal étant $d_j = \dim_{K_0} D_{\alpha_j, K_0}$.

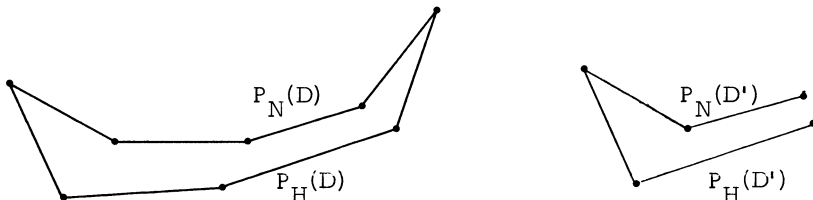


On sait (cf., par exemple, [1], loc. cit.) que chaque d_j est un multiple du dénominateur de α_j et les sommets de ce polygone sont des points à coordonnées entières.

4.3.2. - De même, si D est un module filtré de dimension finie, on appelle polygone de Hodge de D le polygone associé à la filtration de D_K : de façon précise, si $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ sont les entiers i tels que $D_K^i / D_K^{i+1} \neq 0$, le polygone de Hodge $P_H(D)$ de D est le polygone convexe d'origine $(0,0)$ dont les pentes sont les i_j , la longueur de la projection du segment de pente i_j sur l'axe horizontal étant $h_j = \dim_K D_K^{i_j} / D_K^{i_j+1}$.

4.3.3. - PROPOSITION. - Soit D un module filtré de dimension finie.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) le module D est faiblement admissible ;
- ii) pour tout sous-objet D' de D , $P_H(D')$ est en dessous de $P_N(D')$ et $P_H(D)$ et $P_N(D)$ ont mêmes extrémités.



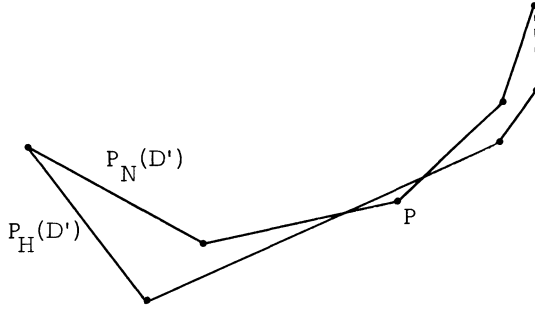
4.3.4. - Démonstration. - On voit immédiatement que, pour tout sous-objet D' de D le point le plus à droite du polygone de Hodge (resp. de Newton) de D' est le point de coordonnées $(\dim_{K_O} D', t_H(D'))$ (resp. $(\dim_{K_O} D', t_N(D'))$). On a donc $t_H(D) = t_N(D)$ si et seulement si $P_H(D)$ et $P_N(D)$ ont mêmes extrémités et, pour achever la démonstration, il suffit d'établir le lemme suivant :

4.3.5. - LEMME. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) pour tout sous-objet non nul D' de D , l'extrémité de $P_H(D')$ est en dessous de celle de $P_N(D')$;
- ii) pour tout sous-objet non nul D' de D , $P_H(D')$ est en dessous de $P_N(D')$.

4.3.6. - Démonstration du lemme. - Il est clair que (ii) $\Rightarrow$ (i) .

Soit D' un sous-objet de D . Supposons que $P_H(D')$ ne soit pas en dessous de $P_N(D')$. Il existe alors un sommet P de coordonnées (x_O, y_O) de $P_N(D')$ situé strictement au-dessous de $P_H(D')$. Soit $\alpha'_1 < \alpha'_2 < \dots < \alpha'_r$ les pentes de la partie de $P_N(D')$ comprise entre $(0,0)$ et P et soit D'' le sous-objet de D' défini par $D'' = \bigoplus_{j=1}^r D'_{\alpha'_j, K_O}$.



On voit que $P_H(D'')$ est un polygone "extrait" de $P_H(D')$ (i.e. on enlève certains segments de $P_H(D')$ et on met bout à bout ceux qui restent, dans l'ordre où on les trouve) et on en déduit que $P_H(D'')$ est situé

au-dessus de la partie de $P_H(D')$ comprise entre le point $(0,0)$ et l'intersection (x_0, y'_0) de ce polygone avec la droite $x = x_0$. En particulier, l'extrémité de $P_H(D'')$ est un point de coordonnées (x_0, y''_0) , avec $y''_0 \geq y'_0 \geq y_0$. Comme l'extrémité de $P_N(D'')$ est le point de coordonnées (x_0, y_0) , on en déduit que (i) $\Rightarrow$ (ii).

4.4. - MODULES FILTRÉS ADMISSIBLES ET FAIBLEMENT ADMISSIBLES.

Dans toute la fin de ce paragraphe, B est un anneau de Barsotti-Tate fixé.

4.4.1. - PROPOSITION. - Soit D un module filtré de dimension 1.
Pour que D soit admissible, il faut et il suffit qu'il existe un entier i tel que $D \simeq S^i$.

(le module filtré S^i a été défini au n° 1.2.8).

4.4.2. - Démonstration. - Pour que D soit admissible, il faut et il suffit qu'il existe un module galoisien admissible V , de dimension 1 sur Φ_p , tel que $D \simeq \underline{D}_B(V)$. Comme k est algébriquement clos, c'est équivalent (prop. 3.3.5) à dire qu'il existe un entier j tel que $D \simeq \underline{D}_B(T^j)$, et on vérifie immédiatement que $\underline{D}_B(T^j)$ est isomorphe à S^{-j} .

4.4.3. - PROPOSITION. - Soit D un module filtré de dimension finie.
Si D est admissible, on a, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $D_i \cap D_K^{i+1} = 0$ (rappe-
lons que $D_i = \{d \in D \mid Fd = p^i d\}$).

4.4.4. - Démonstration. - Soit c un élément non nul de S^i tel que $Fc = p^i c$ et soit $d \in D_1 \cap D_K^{i+1}$. L'application K_O -linéaire $\varphi : S^i \rightarrow D$, telle que $\varphi(c) = d$, est un morphisme de modules filtrés. Posons $D' = \text{Coim } \varphi$ et $D'' = \text{Im } \varphi$; comme S^i et D sont admissibles, le morphisme canonique $\bar{\varphi} : D' \rightarrow D''$ doit être un isomorphisme. On voit que D' et D'' , en tant que $K_O[F]$ -modules, s'identifient tous deux à $K_O d$, donc que D'_K et D''_K s'identifient tous deux à Kd ; on a $D_K^{i+1} = 0$, tandis que $D_K^{i+1} = Kd$; on doit donc avoir $d = 0$.

4.4.5. - PROPOSITION. - Tout module filtré B-admissible est faiblement admissible.

4.4.6. - Démonstration. - On va montrer que D vérifie la condition (i) de la proposition 4.1.3.

On voit facilement que, si D' est un module filtré de dimension r sur K_O , on a $t_H(\bigwedge^r D') = t_H(D')$ et $t_N(\bigwedge^r D') = t_N(D')$.

Comme toute puissance extérieure d'un module admissible doit être admissible, on voit, en appliquant ce qui précède à $D' = D$, qu'il suffit de prouver l'égalité $t_H(D) = t_N(D)$ lorsque D est de dimension 1. S'il en est ainsi, il résulte de la proposition 4.4.1 qu'il existe un entier i tel que $D \simeq S^i$ et alors $t_H(S^i) = t_N(S^i) = i$.

Soit D' un sous-objet non nul de D et soit $r = \dim_{K_O} D'$. Alors $\bigwedge^r D'$ est un sous-objet de dimension 1 de $\bigwedge^r D$ et $\bigwedge^r D$ est admissible. Si $t_N(D') = t_N(\bigwedge^r D') = i$, il existe un élément non nul d de $\bigwedge^r D'$ tel que $Fd = p^i d$. Si $t_H(D') = t_H(\bigwedge^r D') > i$, on a $d \in (\bigwedge^r D)_K^{i+1}$; c'est impossible, d'après la proposition 4.4.3, et on a donc bien $t_H(D') \leq t_N(D')$.

4.5. - DÉTERMINATION DES SOUS-OBJETS ADMISSIBLES.

4.5.1. - PROPOSITION. - Soit D un module filtré admissible et soit D' un sous-objet de D (dans la catégorie MF_K). Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) le module filtré D' est admissible ;
- ii) le module filtré D' est faiblement admissible.
- iii) on a $t_H(D') = t_N(D')$.

4.5.2. - Démonstration. - L'équivalence de (ii) et (iii) a déjà été démontrée (prop. 4.2.1) et il est clair que (i) $\Rightarrow$ (iii) .

Il reste à montrer que (iii) $\Rightarrow$ (i) . Quitte à tensoriser D par S^i , pour un entier i convenable, on peut supposer $t_H(D') = t_N(D') = 0$.

Commençons par énoncer un lemme :

4.5.3. - LEMME. - Soit E un corps commutatif et soit R une E -algèbre associative commutative et unitaire. Soit V un espace vectoriel sur E et soit $X = R \otimes_E V$. Soit X' un sous- R -module, libre de rang fini r , de X . Pour que X' soit rationnel sur E (i.e. pour qu'il existe un sous- E -espace vectoriel V' de V tel que $X' = R \otimes_E V'$), il faut et il suffit que $\bigwedge_R^r X'$, identifié à un sous- R -module, libre de rang 1 , de $\bigwedge_R^r X$, soit rationnel sur E .

(Cette identification est possible car l'application canonique de $\bigwedge_R^r X'$ dans $\bigwedge_R^r X$ est injective, cf. [3] , AIII 88, cor. à la prop. 12).

4.5.4. - Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ce lemme élémentaire. Montrons comment on en déduit que si D est admissible et si D' est un sous-objet de D tel que $t_H(D') = t_N(D') = 0$, alors D' est admissible :

Posons $V = \underline{V}_B(D)$ et utilisons les applications ξ_V et η_D pour identifier $X = B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ à $B \otimes_{K_O} D$. Soit $r = \dim_{K_O} D'$. Alors $X' = B \otimes_{K_O} D'$ est un sous- B -module, libre de rang r , de X et $\bigwedge_B^r X'$ s'identifie à $B \otimes_{K_O} (\bigwedge_{K_O}^r D')$. De l'égalité $t_H(\bigwedge^r D') = t_N(\bigwedge^r D') = 0$, on déduit facilement l'existence d'un générateur d de $\bigwedge^r D'$, comme espace vectoriel sur K_O , vérifiant $Fd = d$ et $d \in (\bigwedge^r D)_K^O$; il en résulte que $d \in \bigwedge_{\mathbb{Q}_p}^r V$, donc que

${}^r\Lambda_B X'$ est rationnel sur $\mathbb{Q}_p$. D'après le lemme 4.5.3, il existe donc un sous- $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel V' de V , tel que $B \otimes_{K_O} D' = B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V'$. On vérifie facilement que V' est stable par G et que D' s'identifie à $\underline{D}_B(V')$; comme V' est un sous-module galoisien de V , il est admissible et $D' = \underline{D}_B(V')$ l'est aussi.

§ 5 - modules admissibles et groupes p-divisibles

5.1. - LES FONCTEURS $\underline{D}_K$ ET $\underline{V}_p$.

5.1.1. - Soit A l'anneau des entiers de K . On sait depuis Grothendieck et Messing (cf. [7], [8], [13], voir aussi [6]) associer à tout groupe p-divisible Γ sur A un couple $\underline{LM}_K(\Gamma)$ formé d'un F-iso-cristal $\underline{M}_{K_O}(\Gamma)$ et d'un sous-K-espace vectoriel $\underline{L}(\Gamma)$ de $K \otimes_{K_O} \underline{M}_{K_O}(\Gamma)$. Rappelons brièvement la construction de $\underline{LM}_K(\Gamma)$ telle qu'elle est décrite dans [6] (p. 221) :

- on a $\underline{M}_{K_O}(\Gamma) = K_O \otimes_{W(k)} \underline{M}(\Gamma_k)$ où $\underline{M}(\Gamma_k) = \text{Hom}(\Gamma_k, CW_k)$ est le module de Dieudonné de la fibre spéciale de Γ ;
- on construit une application K-linéaire injective de l'espace cotangent $t_{\Gamma}^*(K)$ de Γ à valeurs dans K dans $\underline{M}_K(\Gamma) = K \otimes_{K_O} \underline{M}_{K_O}(\Gamma)$ et $\underline{L}(\Gamma)$ est l'image de $t_{\Gamma}^*(K)$ par cette application.

5.1.2. - On peut alors associer à tout groupe p-divisible Γ sur A un module filtré $\underline{D}_K(\Gamma) = D$:

- en tant que $K_O[F]$ -module à gauche, $D = \underline{M}_{K_O}(\Gamma)$;
- la filtration est définie par

$$D_K^i = \begin{cases} D_K & \text{si } i \leq 0, \\ \underline{L}_K(\Gamma) & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } i \geq 2. \end{cases}$$

La correspondance $\Gamma \mapsto \underline{D}_K(\Gamma)$ définit en fait un foncteur contravariant additif de la catégorie des groupes p-divisibles, à isogénie près, sur A dans celle des modules filtrés et la proposition 5.2 du chapitre IV de [6] dit que ce foncteur est pleinement fidèle.

5.1.3. - Si Γ est un groupe p-divisible sur A , notons $\underline{T}_p(\Gamma)$ son module de Tate (on a donc $\underline{T}_p(\Gamma) = \text{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \Gamma(\bar{A}))$, si $\bar{A}$ est l'anneau des entiers de $\bar{K}$) et posons $\underline{V}_p(\Gamma) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \underline{T}_p(\Gamma)$.

Il est clair que la correspondance $\Gamma \mapsto \underline{V}_p(\Gamma)$ définit, en fait, un foncteur additif pleinement fidèle de la catégorie des groupes p-divisibles sur A , à isogénie près, dans celle des modules galoisiens.

5.1.4. - DÉFINITION. Soit B un anneau de Barsotti-Tate. On dit que B est adapté aux groupes p-divisibles s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- i) pour tout groupe p-divisible Γ sur A , $\underline{V}_p(\Gamma)$ est un module galoisien B-admissible ;
- ii) les foncteurs $\Gamma \mapsto \underline{D}_K(\Gamma)$ et $\Gamma \mapsto (\underline{D}_B(\underline{V}_p(\Gamma)))^*$ sont isomorphes.

5.1.5. - THÉORÈME. - Il existe un anneau de Barsotti-Tate adapté aux groupes p-divisibles.

La démonstration de ce résultat, i.e. la construction d'un tel anneau, sera faite ailleurs.

5.1.6. - Remarques. - Supposons k algébriquement clos et soit Γ un groupe p-divisible sur A . Posons $V = \underline{V}_p(\Gamma)$. D'après le théorème précédent, il existe un anneau de Barsotti-Tate B tel que V est B-admissible :

- i) il résulte donc de la proposition 3.8.4 que l'enveloppe algébrique $\mathbb{H}_V$ de l'image de Galois est connexe ;
- ii) soit h la hauteur et soit d la dimension de Γ ; il résulte

de la proposition 3.3.5 que l'action de Galois sur $\bigwedge^h V$ est donnée par le caractère χ^d ; on retrouve ainsi un résultat de Raynaud ([15] , th.4.2.1).

5.2. - CARACTÉRISATION (PARTIELLE) DES MODULES (GALOISIENS ET FILTRÉS) PROVENANT DES GROUPES p-DIVISIBLES.

5.2.1. - Lorsque $e = 1$, i.e. lorsque $K = K_O$, on sait , depuis Messing ([13] , chap.V, th.1.6), caractériser l'image essentielle du foncteur $\underline{D}_K$. Le résultat peut s'énoncer ainsi :

PROPOSITION. - Supposons $e = 1$ et soit D un module filtré de dimension finie. Pour qu'il existe un groupe p-divisible Γ sur A tel que $D \simeq \underline{D}_K(\Gamma)$, il faut et il suffit que D satisfasse aux conditions suivantes :

- i) on a $D_K^0 = D_K$ et $D_K^2 = 0$;
- ii) il existe un réseau M de D (i.e. un sous- A -module tel que $K \otimes_A M$ s'identifie à $D = D_K$) tel que
 - d'une part $pM \subset FM \subset M$,
 - d'autre part, si $L = M \cap D_K^1$, l'application évidente de L/pL dans M/FM est un isomorphisme (de k -espaces vectoriels).

Si $p \neq 2$ (resp. si $p = 2$ et D n'a que des pentes > 0) , c'est une conséquence immédiate de la prop. 1.6 du chapitre IV de [6] qui donne une classification, à isomorphisme près, des groupes p-divisibles (resp. des groupes 2-divisibles connexes). Le cas des groupes 2-divisibles non nécessairement connexes s'en déduit facilement (et n'est pas utilisé dans la suite).

Remarque. - L'existence d'un réseau M de D tel que $pM \subset FM \subset M$ est équivalente au fait que D a toutes ses pentes comprises entre 0 et 1 .

5.2.2. - Laffaille a utilisé les résultats de [6] pour démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION ([10]). - Supposons k algébriquement clos et $e = 1$.
Soit D un module filtré faiblement admissible vérifiant $D_K = D_K^{\circ}$ et
 $D_K^2 = 0$. Alors il existe un groupe p-divisible Γ sur A tel que
 $D_K(\Gamma) \simeq D$.

5.2.3. - COROLLAIRE. - Supposons k algébriquement clos et $e = 1$.
Soit B un anneau de Barsotti-Tate adapté aux groupes p-divisibles.
Soit D un module filtré de dimension finie. Les conditions suivantes
sont équivalentes :

- i) il existe un groupe p-divisible Γ sur A tel que $D \simeq D_K(\Gamma)$;
- ii) on a $D_K^{\circ} = D_K$, $D_K^2 = 0$ et D est B-admissible ;
- iii) on a $D_K^{\circ} = D_K$, $D_K^2 = 0$ et D est faiblement admissible.

En effet, il est clair que (i) $\Rightarrow$ (ii) ; on sait (prop. 4.4.5) que
(ii) $\Rightarrow$ (iii) et (iii) $\Rightarrow$ (i) d'après la proposition 5.2.2.

5.2.4. - COROLLAIRE. - Supposons k algébriquement clos et $e = 1$.
Soit B un anneau de Barsotti-Tate adapté aux groupes p-divisibles.
Soit V un module galoisien de dimension finie. Les conditions sui-
vantes sont équivalentes :

- i) le module V est B-admissible et vérifie $(C \otimes_{\Phi_p} V)\{i\} = 0$ si
 $i \neq 0, 1$;
- ii) il existe un groupe p-divisible Γ sur A tel que $V \simeq \underline{V}_p(\Gamma)$.

5.2.5. - Il me semble raisonnable de conjecturer que la proposition
5.2.2 (et par conséquent aussi ses deux corollaires) reste vraie si l'on sup-
prime l'hypothèse $e = 1$. Laffaille a obtenu des résultats partiels dans cette
direction :

PROPOSITION ([9]). - Supposons k algébriquement clos. Soit D un module filtré faiblement admissible vérifiant $D_K = D_K^0$ et $D_K^2 = 0$. Si $\dim_K D_K^1 \leq 1$ ou si $\dim_{K_0} D \leq 4$, il existe un groupe p -divisible Γ sur A tel que $\underline{D}_K(\Gamma) \simeq D$.

On en déduit immédiatement les deux corollaires suivants :

COROLLAIRE 1. - Supposons k algébriquement clos et soit B un anneau de Barsotti-Tate adapté aux groupes p -divisibles. Soit D un module filtré de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) il existe un groupe p -divisible Γ sur A de dimension 1 (resp. de hauteur ≤ 4) tel que $D \simeq \underline{D}_K(\Gamma)$;
- ii) on a $D_K^0 = D_K$, $D_K^2 = 0$ et $\dim_K D_K^1 = 1$ (resp. $\dim_{K_0} D \leq 4$) et D est B -admissible ;
- iii) on a $D_K^0 = D_K$, $D_K^2 = 0$ et $\dim_K D_K^1 = 1$ (resp. $\dim_{K_0} D \leq 4$) et D est faiblement admissible.

COROLLAIRE 2. - Supposons k algébriquement clos et soit B un anneau de Barsotti-Tate adapté aux groupes p -divisibles. Soit V un module galoisien de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) il existe un groupe p -divisible Γ sur A , de dimension 1 (resp. de hauteur ≤ 4), tel que $V \simeq \underline{V}_p(\Gamma)$;
- ii) le module V est B -admissible, vérifie $(C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{i\} = 0$ si $i \neq 0, 1$ et $\dim_{\mathbb{Q}_p} (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{1\} = 1$ (resp. $\dim_{\mathbb{Q}_p} V \leq 4$).

5.2.6. - Il semble naturel de se poser quelques questions :

Question 1. - Si k est algébriquement clos, existe-t-il un anneau de Barsotti-Tate B tel que tout module filtré faiblement admissible soit B -admissible ?

L'exemple le plus simple de module filtré faiblement admissible D

dont je ne sais pas s'il est B-admissible, pour un anneau de Barsotti-Tate B convenable, est le suivant :

- en tant que F-iso-cristal, D est isotypique de pente 0 et de dimension 2 sur K_O ; autrement dit, il existe une base (d_1, d_2) de D sur K_O telle que $Fd_j = d_j$, pour $j = 1, 2$;

- il existe un entier $i_O \geq 1$ et un $\lambda \in K$, λ non quadratique sur Φ_p , tel que

$$D_K^i = \begin{cases} D_K & \text{pour } i \leq -i_O \\ K(d_1 + \lambda d_2) & \text{pour } -i_O < i \leq i_O \\ 0 & \text{pour } i > i_O \end{cases},$$

Si un tel D est B-admissible, on voit que $V = \underline{V}_B(D)$ est un module galoisien, de dimension 2 sur Φ_p , du type Hodge-Tate, avec

$$\dim_{\Phi_p} (C \otimes_{\Phi_p} V)\{i\} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq -i_O, i_O \\ 1 & \text{si } i = -i_O, i_O \end{cases};$$

et on peut montrer que l'enveloppe algébrique de l'image du groupe d'inertie dans cette représentation est isomorphe à SL_2 .

Question 2. - Si k est algébriquement clos, la catégorie des modules faiblement admissibles est-elle stable par produit tensoriel ?

Si la réponse à la question 1 est oui, il en est évidemment de même de la question 2. Si la réponse à la question 2 est oui, cela entraîne que la catégorie $\underline{MF}_K^f$ est tannakienne sur Φ_p ([16], chap.III, n°3.2.1). Si on note Φ_p^{nr} l'extension algébrique maximale non ramifiée de Φ_p contenue dans K_O , il est facile d'en déduire (op.cit., chap.III, n°3.3) que la catégorie Φ_p^{nr} -linéaire déduite de $\underline{MF}_K^f$ par extension des scalaires s'identifie à la catégorie des représentations, de dimension finie, d'un groupe pro-algébrique sur Φ_p^{nr} .

Il semble que Laffaille vienne de démontrer que la réponse à la question 2 est oui lorsque $e = 1$ (voir [10]).

Question 3. - Existe-t-il un anneau de Barsotti-Tate B et un module galoisien B -admissible qui n'est pas isomorphe à un objet de la $\otimes$ -catégorie engendrée par les modules galoisiens de la forme $\underline{V}_p(\Gamma)$, avec Γ groupe p -divisible sur A ?

La réponse à cette question est probablement oui, mais je ne sais pas comment en construire. Si la réponse à la question 1 est oui, alors la réponse à la question 3 est aussi oui : l'exemple donné après la question 1 le prouve car Serre a montré ([22], §3) que si Γ est un groupe p -divisible sur A , l'enveloppe algébrique de l'image du groupe d'inertie dans la représentation $\underline{V}_p(\Gamma)$ n'a pas de quotient simple simplement connexe.

§6 - l'enveloppe algébrique de l'image de Galois

Dans tout ce paragraphe, pour tout anneau commutatif R , les R -algèbres considérées sont supposées associatives, commutatives et unitaires.

Si R est un anneau commutatif, si $\mathbb{J}$ est un groupe algébrique sur R (ou, si l'on préfère, un schéma en groupes algébrique sur $\text{Spec} R$) et si R' est une R -algèbre, on note $\mathbb{J}_{\otimes_R R'}$ ou $\mathbb{J} \otimes R'$ le R' -groupe algébrique déduit de $\mathbb{J}$ par extension des scalaires.

Si U est un espace vectoriel sur un corps R , on note $\mathbb{GL}_U$ le R -groupe algébrique des automorphismes de U : pour toute R -algèbre R' , le groupe $\mathbb{GL}_U(R')$ des points de $\mathbb{GL}_U$ à valeurs dans R' est donc le groupe des R' -automorphismes de $R' \otimes_R U$.

Dans tout ce paragraphe, k est algébriquement clos et B est un anneau de Barsotti-Tate fixé.

Dans les n° 6.1 à 6.4, V est un module galoisien B -admissible et $D = \underline{D}_B(V)$. On utilise les applications ξ_V et η_D introduites au n° 3.1.5

pour identifier $B \otimes D$ et $B \otimes V$. Alors V (resp. D) s'identifie à un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{Q}_p$ (resp. sur K_0) de $B \otimes V = B \otimes D$ et on a $V = \underline{V}_B(D)$.

6.1. - LE GROUPE $\mathbb{H}_V$.

6.1.1. - On note $\mathbb{H}_V$ l'enveloppe algébrique de l'image de $G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ dans la représentation définie par V . Rappelons (cf. [20], p.119) que, si $\rho : G \rightarrow \text{GL}_V(\mathbb{Q}_p)$ est l'homomorphisme définissant l'action de G sur le $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel V , $\mathbb{H}_V$ est le plus petit sous- $\mathbb{Q}_p$ -groupe algébrique de GL_V tel que $\text{Im } \rho \subset \mathbb{H}_V(\mathbb{Q}_p)$.

Comme V est B -admissible, V est de Hodge-Tate et (cf. [17], th.2, p.167 ou [22], § 1) $\text{Im } \rho$ est un sous-groupe ouvert de $\mathbb{H}_V(\mathbb{Q}_p)$, pour la topologie de groupe de Lie p -adique (rappelons que $\text{Im } \rho$ et $\mathbb{H}_V(\mathbb{Q}_p)$ sont des sous-groupes fermés du groupe de Lie p -adique $\text{GL}_V(\mathbb{Q}_p)$ et peuvent donc être considérés comme des groupes de Lie p -adique, (cf. [19], LG 5.42, cor. au th.1).

6.1.2. - Rappelons brièvement trois manières de décrire le groupe $\mathbb{H}_V$ (la première ne sera pas utilisée dans la suite) :

6.1.2. - A) "à la Mumford-Tate" (cf. Sen[17], p.164, th.1, ou Serre [22], § 1) : soit $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_C(i)$ la décomposition de Hodge-Tate de $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ (rappelons que $V_C(i) = C \otimes_K ((C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)\{i\})$ et que l'on utilise l'isomorphisme canonique de $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_C(i)$ sur $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ pour les identifier).

Pour tout $\lambda \in C^*$, notons $\varphi(\lambda)$ l'automorphisme de $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ qui est l'homothétie de rapport λ^i sur $V_C(i)$; on définit ainsi un homomorphisme $\varphi : C^* \rightarrow \text{GL}_V(C)$ et on pose $\mathfrak{H} = \text{Im } \varphi$. Alors $\mathbb{H}_V$ est le plus petit sous-groupe algébrique de GL_V , défini sur $\mathbb{Q}_p$, dont le groupe des points à valeurs dans C contient $\mathfrak{H}$.

6.1.4. - B) "à la Saavedra" (cf. [16] , chap.II) : soit Rep_V la $\otimes$ -catégorie engendrée par V et V^* (i.e. la plus petite sous-catégorie de $\text{Rep}(G)$, ou, ce qui revient au même, de $\text{Rep}_B(G)$ qui contient V et V^* et est stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel, contragrédiente).

On définit un foncteur fibre $\underline{w}_V$ sur Rep_V à valeurs sur $\text{Spec } \mathbb{Q}_p$ en associant, à tout objet U de Rep_V , le $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel sous-jacent à U . Alors $\mathbb{H}_V = \text{Aut}^{\otimes}(\underline{w}_V)$, groupe des $\otimes$ -automorphismes du foncteur $\underline{w}_V$.

6.1.5. - C) "à la Chevalley" : il résulte facilement d'un théorème de Chevalley (cf. par exemple, [2] , th.5.1) et de ce que, pour tout module galoisien admissible de dimension 1, le caractère qui donne l'action de G est une puissance entière de χ , que le groupe $\mathbb{H}_V$ peut se caractériser ainsi : pour toute $\mathbb{Q}_p$ -algèbre R , $\mathbb{H}_V(R)$ est le sous-groupe de $\mathbb{GL}_V(R)$ formé des s qui vérifient

(C_V) il existe une $\mathbb{Q}_p$ -algèbre R' contenant R et $\lambda \in R'$, tels que ,
pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $i \in \mathbb{Z}$, tout $x \in (\otimes^n V)\{i\}$, on a $sx = \lambda^i x$.

En appliquant ceci à la $\mathbb{Q}_p$ -algèbre des nombres p -adiques, on en déduit que $\text{Lie}(\mathbb{H}_V)$ est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_V$ formée des s qui vérifient

$(\text{Lie}(C_V))$ il existe $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ tel que , pour tout $n \geq 0$, tout $i \in \mathbb{Z}$,
tout $x \in (\otimes^n V)\{i\}$, on a $sx = i\lambda x$.

6.2. - LE GROUPE $\mathbb{H}_D$.

Nous nous proposons maintenant de construire, de deux manières différentes, un groupe algébrique $\mathbb{H}_D$, défini sur une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, qui, après une extension finie non ramifiée des scalaires convenable, devient isomorphe à $\mathbb{H}_V$; ces constructions n'utilisent pas l'anneau B mais seulement les propriétés de la catégorie des modules fil-

trés. La première consiste à utiliser les résultats de Saavedra. La deuxième consiste à retrouver directement les résultats de Saavedra dans ce cas particulier en utilisant la description de $\mathbb{H}_V$ "à la Chevalley".

A) "à la Saavedra" :

6.2.1. - Soit $\underline{\text{MF}}_{K,D}$ la $\otimes$ -catégorie des modules filtrés B-admissibles engendrée par D et D^* , i.e. la plus petite sous-catégorie de $\underline{\text{MF}}_{K,B}$ qui contient D et D^* et est stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel. D'après la proposition 4.5.1, c'est aussi la plus petite sous-catégorie de $\underline{\text{MF}}_K^f$ ayant ces propriétés, ce qui permet, au moins théoriquement, de construire cette catégorie, même si l'on ne connaît pas $\underline{\text{MF}}_{K,B}$.

Soit $\underline{w}_{D,K_O}$ le foncteur, de la catégorie $\underline{\text{MF}}_{K,D}$ dans celle des espaces vectoriels de dimension finie sur K_O , qui à E associe le K_O -espace vectoriel sous-jacent à E . On vérifie immédiatement que c'est, dans la terminologie de Saavedra ([16], chap.II, § 4), un foncteur fibre sur $\underline{\text{MF}}_{K,D}$ à valeurs dans $\text{Spec} K_O$.

Il est clair que le foncteur $\underline{v}_B$ induit une $\otimes$ -équivalence entre la catégorie $\underline{\text{MF}}_{K,D}$ et la catégorie $\underline{\text{Rep}}_V$. Il résulte alors de Saavedra (loc. cit.) que le K_O -groupe algébrique $\mathbb{H}_{D,K_O}^S = \text{Aut}^{\otimes}(\underline{w}_{D,K_O})$ des $\otimes$ -automorphismes de $\underline{w}_{D,K_O}$ est isomorphe à une K_O -forme intérieure de $\mathbb{H}_V \otimes K_O$, ou, ce qui revient au même, que la variété $\text{Isom}^{\otimes}(\underline{w}_V \otimes K_O, \underline{w}_{D,K_O})$, munie de l'action à droite naturelle de $\text{Aut}^{\otimes}(\underline{w}_V \otimes K_O) = \mathbb{H}_V \otimes K_O$, est un $(\mathbb{H}_V \otimes K_O)$ -torseur à droite défini sur K_O .

On déduit facilement (démonstration analogue à la prop. 6.3.3 ci-dessous) de résultats bien connus que ce toseur est trivial, donc que les groupes $\mathbb{H}_V \otimes K_O$ et $\mathbb{H}_{D,K_O}^S$ sont isomorphes (non canoniquement en général).

6.2.2. - La théorie de Saavedra permet, en fait, d'aller plus loin : elle dit ([16], scholie p. 204, l'énoncé de Saavedra est un peu moins fort, mais c'est ce qu'il démontre) qu'il existe une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans K_0 et un foncteur fibre $\underline{w}_{D,L}$ de la catégorie $\underline{MF}_{K,D}$ à valeurs dans $\text{Spec } L$ tel que $\underline{w}_{D,K_0}$ se déduit de $\underline{w}_{D,L}$ par extension des scalaires.

Il est facile, dans le cas considéré ici, d'exhiber une telle extension L et un tel foncteur $\underline{w}_{D,L}$: on choisit un entier $h \geq 1$ tel que $h\alpha \in \mathbb{Z}$, pour toute pente α de D (cf. n°4.1.1) ; par exemple, on peut prendre pour h le ppcm des dénominateurs des pentes de D . On sait (cf. [8], p.146) que si E' (resp. E'') est un F -iso-cristal isotypique de pente α' (resp. α''), alors $E' \otimes E''$ est un F -iso-cristal isotypique de pente $\alpha' + \alpha''$; on en déduit que, pour tout objet E de $\underline{MF}_{K,D}$ et toute pente α de E , $h\alpha \in \mathbb{Z}$.

On prend pour L l'unique extension de degré h de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans K_0 . Pour tout objet E de $\underline{MF}_{K,D}$ et tout $\alpha \in h^{-1}\mathbb{Z}$, on note $E_{\alpha,L}$ l'ensemble des $d \in E$ qui vérifient $F^h d = p^{h\alpha} d$; on voit que c'est un sous- L -espace vectoriel de E et que, si l'on pose $\alpha = r/s$, avec $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}^*$, $(r,s) = 1$, il s'identifie, avec les notations du n°4.1.1, à $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} E_{\alpha}$. Si l'on pose $E_L = \bigoplus_{\alpha \in h^{-1}\mathbb{Z}} E_{\alpha,L}$, on en déduit immédiatement que l'homomorphisme canonique de $K_0 \otimes_L E_L$ dans E est un isomorphisme ; il est alors facile de voir que le foncteur $\underline{w}_{D,L}$, qui à E associe le L -espace vectoriel sous-jacent à E_L , est un foncteur fibre sur $\underline{MF}_{K,D}$ à valeurs dans $\text{Spec } L$.

Il résulte alors de Saavedra que le L -groupe algébrique $\mathcal{H}_{D,L}^S$ des $\otimes$ -automorphismes du foncteur $\underline{w}_{D,L}$ est isomorphe à une L -forme intérieure de $\mathcal{H}_V \otimes L$ (et il résulte facilement, par une démonstration analogue à celle de la proposition 6.3.3 ci-dessous, de résultats bien connus que les groupes $\mathcal{H}_V \otimes L$ et $\mathcal{H}_{D,L}^S$ deviennent isomorphes sur une extension finie non ramifiée convenable de L). Enfin, il est clair que $\underline{w}_{D,L} \otimes K_0$ (resp. $\mathcal{H}_{D,L}^S \otimes K_0$) s'identifie canoniquement à $\underline{w}_{D,K_0}$ (resp. $\mathcal{H}_{D,K_0}^S$).

B) "à la Chevalley" :

6.2.3. - Soit h un entier tel que $h\alpha \in \mathbb{Z}$, pour toute pente α de D et soit L l'unique extension de $\mathbb{Q}_p$ de degré h contenue dans K_O . Pour toute pente α de D , soit $D_{\alpha,L}$ le sous- L -espace vectoriel de D formé des d vérifiant $F^h d = p^{h\alpha} d$ et soit D_L la somme directe des $D_{\alpha,L}$, pour α parcourant les pentes de D .

Comme on l'a vu au n° précédent, D s'identifie à $K_O \otimes_L D_L$; ceci nous permet de considérer D_L comme un sous- L -espace vectoriel de D et, bien sûr, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bigotimes_L^n D_L$ comme un sous- L -espace vectoriel de $\bigotimes_{K_O}^n D$. On voit immédiatement que, pour tout n et pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $(\bigotimes^n D)[i] \subset \bigotimes^n D_L$ et on pose $(\bigotimes^n D_L)[i] = (\bigotimes^n D)[i]$.

Pour toute L -algèbre R , notons $\mathcal{H}_{D,L}(R)$ le sous-groupe de $\mathcal{GL}_{D_L}(R)$ formé des s qui vérifient

$(C_{D,L})$ il existe une L -algèbre R' contenant R et $\mu \in R'$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $i \in \mathbb{Z}$, tout $d \in (\bigotimes^n D_L)[i]$, on a $sd = \mu^i d$.

On voit que l'on a ainsi défini un sous- L -groupe algébrique $\mathcal{H}_{D,L}$ de $\mathcal{GL}_{D_L}$.

6.2.4. - Remarque. - En appliquant cette définition à la L -algèbre des nombres duals, on en déduit que $\text{Lie}(\mathcal{H}_{D,L})$ est formée des $s \in \mathfrak{gl}_{D_L}$ qui vérifient

$(\text{Lie}(C_{D,L}))$ il existe $\mu \in L$ tel que, pour tout $n \geq 0$, tout $i \in \mathbb{Z}$, tout $d \in (\bigotimes^n D_L)[i]$, on a $sd = i\mu d$.

6.2.5. - Rappelons que l'on a identifié $B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ et $B \otimes_{K_O} D$. Comme D s'identifie à $K_O \otimes_L D_L$, $B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ s'identifie aussi à $B \otimes_L D_L$ et $\mathcal{GL}_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B = \mathcal{GL}_{D_L} \otimes_L B$. Ceci donne un sens à l'énoncé suivant :

PROPOSITION. - On a $\mathbb{H}_V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B = \mathbb{H}_{D,L} \otimes_L B$.

6.2.6. - Démonstration. - En comparant les conditions (C_V) du n° 6.1.5 et $(C_{D,L})$ du n° 6.2.3, on voit qu'il suffit de vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \mathbb{Z}$, on a $B \otimes_{\mathbb{Q}_p} (\overset{n}{\otimes} V)\{i\} = B \otimes_{\mathbb{Q}_p} (\overset{n}{\otimes} D)[-i]$. Identifions $B \otimes (\overset{n}{\otimes} V)$ à $B \otimes (\overset{n}{\otimes} D)$ via l'isomorphisme canonique et, de manière évidente, $\overset{n}{\otimes} V$ (resp. $\overset{n}{\otimes} D$) à un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{Q}_p$ (resp. sur K_O) de $B \otimes (\overset{n}{\otimes} V) = B \otimes (\overset{n}{\otimes} D)$. Comme tout élément non nul du sous- $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel T de B est inversible dans B , on voit qu'il suffit d'établir le lemme suivant :

6.2.7. - LEMME. - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $i \in \mathbb{Z}$, on a

$(\overset{n}{\otimes} V)\{i\} = T^i \cdot (\overset{n}{\otimes} D)[-i]$ (où T^i est le sous- $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de B engendré par t^i , avec t un élément non nul de T).

Démonstration. - Comme $\underline{D}_B(\overset{n}{\otimes} V)$ s'identifie à $\overset{n}{\otimes} D$, on voit que l'on peut supposer $n = 1$.

Si $v \in V\{i\}$, on voit que $t^{-i}v \in (B \otimes V)^G = D$; on a $F(t^{-i}v) = (p^{-i}t^{-i}) \cdot v = p^{-i} \cdot (t^{-i}v)$ et $t^{-i}v \in (B_K^{-i} \otimes V)^G = D_K^{-i}$, donc $t^{-i}v \in D[-i]$, ou $v \in T^i \cdot D[-i]$ et $V\{i\} \subset T^i \cdot D[-i]$.

Si $d \in D[-i]$, on a $Fd = p^{-i}d$ donc $F(t^i d) = t^i d$; comme $d \in D_K^{-i} = (B_K^{-i} \otimes V)^G \subset B_K^{-i} \otimes V$, $t^i d \in B_K^0 \otimes D$; on en déduit que $t^i d \in (B \otimes V)[0] = V$; pour tout $g \in G$, on a $g(t^i d) = gt^i \cdot gd = \chi^i(g)t^i d$; finalement $t^i d \in V\{i\}$ et $T^i \cdot D[-i] \subset V\{i\}$.

6.3. - LE TORSEUR $X_{V,L}$.

6.3.1. - On conserve les hypothèses et notations qui précèdent et on note $\text{Isom}(V_L, D_L)$ la variété algébrique, définie sur L , des isomorphismes de $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ sur D_L : pour toute L -algèbre R , $\text{Isom}(V_L, D_L)(R)$ est donc l'ensemble des isomorphismes du R -module $R \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ sur $R \otimes_L D_L$.

Choisissons un élément non nul t de T ; pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \mathbb{Z}$, soit $\tau_{n,i} : (\otimes^n V)\{i\} \rightarrow (\otimes^n D)[-i]$ l'application définie par $v = t^i \tau_{n,i}(v)$ (cf. lemme 6.2.7).

Pour toute L -algèbre R , notons $X_{V,L}(R)$ le sous-ensemble de $\text{Isom}(V_L, D_L)(R)$ formé des φ qui vérifient

$(C_{X_{V,L}})$ il existe une L -algèbre R' contenant R et $\lambda \in R'$ tels que, pour tout $n \geq 0$, tout $i \in \mathbb{Z}$, tout $v \in (\otimes^n V)\{i\}$, on a
 $\varphi(v) = \lambda^i \tau_{n,i}(v)$

(où l'on a, bien sûr, identifié $(\otimes^n V)\{i\}$ (resp. $(\otimes^n D)[-i]$) à un sous- $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel de $\otimes_R^n (R \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \simeq R \otimes_{\mathbb{Q}_p} (\otimes_{\mathbb{Q}_p}^n V)$ (resp. de $\otimes_R^n (R \otimes_L D_L) \simeq R \otimes_L (\otimes_L^n D_L)$) et noté encore φ l'application de $\otimes_R^n (R \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$ dans $\otimes_R^n (R \otimes_L D_L)$ déduite de φ par fonctorialité).

On voit facilement que $X_{V,L}$ est une sous-variété affine de $\text{Isom}(V_L, D_L)$ définie sur L (le fait qu'elle soit définie sur L résulte immédiatement de ce que, si r est le pgcd des entiers i tels qu'il existe n vérifiant $(\otimes^n V)\{i\} \neq 0$, on peut remplacer la condition $(C_{X_{V,L}})$ par la condition suivante :

$(C'_{X_{V,L}})$ il existe $\mu \in R$ tel que, pour tout $n \geq 0$, tout $i \in \mathbb{Z}$, tout $v \in (\otimes^n V)\{i\}$, on a $\varphi(v) = \mu^{i/r} \tau_{n,i}(v)$.

Il est également immédiat que $X_{V,L}$ ne dépend pas du choix de l'élément non nul t de T .

6.3.2. - Pour toute L -algèbre R , si $\varphi \in X_{V,L}(R)$ et si $s \in \mathcal{H}_V(R) = (\mathcal{H}_V \otimes L)(R)$, alors $\varphi \cdot s \in X_{V,L}(R)$. On définit ainsi une action à droite de $\mathcal{H}_V \otimes L$ sur $X_{V,L}$. Muni de cette action, $X_{V,L}$ est un $(\mathcal{H}_V \otimes L)$ -torseur à droite défini sur L et $\mathcal{H}_{D,L}$ s'identifie au groupe algébrique déduit de $\mathcal{H}_V \otimes L$ par torsion au moyen de $X_{V,L}$.

6.3.3. - PROPOSITION. - Il existe une extension finie non ramifiée de L sur laquelle les groupes $H_{V \otimes L}$ et $H_{D,L}$ deviennent isomorphes.

Démonstration. - Soit $E = \mathbb{Q}_p^{nr}$ l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans K_0 . C'est une extension algébrique non ramifiée de L et il suffit de démontrer que le tore $X_{V,L} \otimes E$ est trivial. Comme H_V est connexe (prop. 3.7.4) cela se voit soit en utilisant le théorème de Lang ([11], th.12, p.386) qui dit que E est C_1 et un résultat classique de cohomologie galoisienne (Serre, [18], n°2.3.b, p.III.14), soit en utilisant le résultat bien connu qui dit que K_0 est de dimension cohomologique ≤ 1 et le théorème de Steinberg ([24], th.1.9).

6.3.4. - Remarques. -

1) On peut donner des exemples de modules galoisiens admissibles V pour lesquelles on peut choisir le corps L de manière que le tore $X_{V,L}$ ne soit pas trivial.

2) Il est facile de voir que les groupes $H_{D,L}$ et $H_{D,L}^S$ s'identifient canoniquement, de même que les tores $X_{V,L}$ et $\text{Isom}^{\otimes}(\underline{w}_V \otimes L, \underline{w}_D, L)$.

6.4. - UN SOUS-TORE DE $H_{D,L}$.

6.4.1. - On conserve les hypothèses et les notations qui précèdent. Soit s le ppcm des pentes de D et soit $\mathbb{G}_{m,L}$ le groupe (algébrique) multiplicatif sur L . Notons

$$\psi_{D,L} : \mathbb{G}_{m,L} \rightarrow \mathbb{G}_{L,D_L}$$

le morphisme défini par :

$$(C_{\psi}) \quad \text{pour toute } L\text{-alg\`ebre } R, \text{ tout } \lambda \in R^*, \text{ tout } \alpha \in s^{-1}\mathbb{Z}, \\ \psi_{D,L}(\lambda) \text{ est l'homoth\'etie de rapport } \lambda^{s\alpha} \text{ sur } R \otimes D_{\alpha,L}.$$

L'image de $\psi_{D,L}$ est soit triviale, soit un tore de dimension 1,

suivant que le F-iso-cristal sous-jacent à D est ou n'est pas isotypique de pente 0 .

6.4.2. - PROPOSITION. - L'image de $\psi_{D,L}$ est contenue dans $\mathbb{H}_{D,L}$.

Démonstration. - Soit R une L -algèbre, soit $\lambda \in R^*$ et soit $g = \psi_{D,L}(\lambda)$. Il est clair que, pour tout $n \geq 0$, l'automorphisme de $R \otimes (\otimes_L^n D)$ induit par g est l'homothétie de rapport $\lambda^{s\alpha}$ sur $R \otimes (\otimes^n D)_{\alpha,L}$, pour chaque $\alpha \in s^{-1}\mathbb{Z}$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $(\otimes_L^n D)[i] \subset (\otimes^n D)_{i,L}$ et g induit donc l'homothétie de rapport λ^{si} sur $R \otimes (\otimes_L^n D)[i]$ et vérifie la condition $(C_{D,L})$ du n°6.2.3.

6.5. - PASSAGE A LA LIMITE : LE PRO-TORE DES PENTES.

Il est commode, en particulier pour mieux comprendre l'application $\psi_{D,L}$ que l'on vient de définir, de "passer à la limite" sur tous les modules admissibles.

6.5.1. - On a déjà introduit, au n°3.8.3, le groupe pro-algébrique $\mathbb{H}^B$ défini sur $\mathbb{Q}_p$, enveloppe de l'image de Galois dans la catégorie $\underline{\text{Rep}}_B(G)$ des modules galoisiens admissibles. Rappelons que c'est le groupe des $\otimes$ -automorphismes du foncteur fibre qui, à tout objet V de $\underline{\text{Rep}}_B(G)$, associe le $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel sous-jacent.

6.5.2. - On peut également passer à la limite dans la catégorie $\underline{\text{MF}}_{K,B}$ des modules filtrés admissibles et définir un autre groupe pro-algébrique qui deviendra isomorphe à $\mathbb{H}^B$ sur une extension convenable. Toutefois, comme les dénominateurs des pentes des objets de $\underline{\text{MF}}_{K,B}$ ne sont pas, en général, bornés, il n'est plus possible de travailler avec une extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans K_O .

C'est pourquoi nous introduisons la fermeture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ dans K_O que nous notons P_O . C'est une extension abélienne de $\mathbb{Q}_p$.

6.5.3. - Soit D un F-iso-cristal sur k . Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ est de la forme r/s , avec $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}^*$, r et s premiers entre eux, on a défini au n° 4.1.1 le sous- $\mathbb{Q}_{p^s}$ -espace vectoriel $D_\alpha = \{d \in D \mid F^s d = p^r d\}$ et vu que l'application canonique de $\bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Q}} (K_O \otimes_{\mathbb{Q}_{p^s}} D)$ dans D est un isomorphisme. On pose $D_{\alpha, P_O} = P_O \otimes_{\mathbb{Q}_{p^s}} D_\alpha$ et $D_{P_O} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Q}} D_{\alpha, P_O}$; alors D_{P_O} s'identifie à une P_O -forme de D , i.e. $K_O \otimes_{P_O} D_{P_O}$ s'identifie à D .

6.5.4. - La catégorie des F-iso-cristaux sur k est $\mathbb{Q}_p$ -linéaire tannakienne et la correspondance $D \rightarrow D_{P_O}$ définit un foncteur fibre $\underline{\omega}_{P_O}^F$ sur cette catégorie à valeurs sur $\text{Spec } P_O$. On note Ψ_{P_O} le groupe pro-algébrique des $\otimes$ -automorphismes de ce foncteur fibre.

On vérifie facilement que, pour toute P_O -algèbre R , se donner un élément $g \in \Psi_{P_O}(R)$ revient à se donner une suite $(\lambda_s)_{s \in \mathbb{N}}$ d'éléments de R^* vérifiant $\lambda_{rs}^r = \lambda_s$, si $s, r \in \mathbb{N}$, $r \neq 0$: pour tout F-iso-cristal D , g induit alors l'homothétie de rapport λ_s^r sur $R \otimes_{P_O} D_{r/s, P_O}$.

En d'autres termes, si l'on note $\widetilde{\mathbb{G}}_{m, P_O}$ le groupe pro-algébrique $\mathbb{D}(\mathbb{Q})_{P_O}$, i.e. le groupe $\varprojlim_{s \in \mathbb{N}^*} \mathbb{G}_s$, où, pour tout s , $\mathbb{G}_s$ est le groupe multiplicatif sur P_O , le morphisme de $\mathbb{G}_{rs}$ dans $\mathbb{G}_s$ étant $\lambda \mapsto \lambda^r$, on a un isomorphisme canonique

$$\Psi_{P_O} : \widetilde{\mathbb{G}}_{m, P_O} \longrightarrow \Psi_{P_O}.$$

Celui-ci peut se décrire ainsi : si D est un F-iso-cristal sur k et si s est le ppcm des pentes de D , le composé

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{m, P_O} \longrightarrow \Psi_{P_O} \longrightarrow \mathbb{GL}_{D_{P_O}}$$

se factorise à travers $\mathbb{G}_s$ et le morphisme induit de $\mathbb{G}_s = \mathbb{G}_{m, P_O}$ dans $\mathbb{GL}_{D_{P_O}}$ se déduit par extension des scalaires du morphisme $\Psi_{D, L}$ défini au n° 6.4.1.

6.5.5. - La correspondance qui, à tout module filtré admissible D associe le P_O -espace vectoriel D_{P_O} , définit un foncteur fibre $\underline{u}_{P_O}$ sur la catégorie $\underline{MF}_{K,B}$ à valeurs sur $\text{Spec } P_O$. On note $\mathbb{H}_{\text{Dieud}}^B$ le groupe pro-algébrique (défini sur P_O) des $\otimes$ -automorphismes de ce foncteur fibre.

Pour chaque module filtré admissible D , notons $s(D)$ le ppcm des pentes de D et L_D l'unique extension de $\mathbb{Q}_p$ de degré $s(D)$ contenue dans K_O (donc aussi dans P_O). Il est clair que $\mathbb{H}_{\text{Dieud}}^B$ s'identifie à la limite projective, en un sens évident, des groupes algébriques $\mathbb{H}_{D, L_D} \otimes_{L_D} P_O$, pour D parcourant les modules filtrés admissibles.

Il résulte de la proposition 6.2.5 que les groupes $\mathbb{H}^B \otimes_{\mathbb{Q}_p} B$ et $\mathbb{H}_{\text{Dieud}}^B \otimes_{P_O} B$ s'identifient.

En outre, comme le foncteur $\underline{u}_{P_O}$ s'obtient en composant le foncteur qui à D associe le F -iso-cristal sous-jacent avec le foncteur $\underline{u}_{P_O}^F$, Ψ_{P_O} est un sous-groupe de $\mathbb{H}_{\text{Dieud}}^B$.

§7 - modules potentiellement admissibles

Dans ce paragraphe, on note I le groupe d'inertie de l'extension $\bar{K}/K$. On pose $P_O = \hat{K}_O^{\text{nr}}$, corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans le corps résiduel $\bar{k}$ de $\bar{K}$ et $P = C^I$. Le corps P est aussi l'adhérence de $\bar{K}^I$ dans C et P/P_O est une extension finie de degré e . On note $\bar{P}$ la fermeture algébrique de P dans C ; c'est un corps algébriquement clos, dense dans C , stable par G , et $\text{Gal}(\bar{P}/P)$ s'identifie à I .

Dans tout ce paragraphe, les lettres K' , K'' désignent des corps locaux contenant K et contenus dans C .

Si K' est un tel corps et si k' est son corps résiduel, on note

K'_O le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k' et $\bar{K}'$ la fermeture algébrique de K' dans C . On note $G_{K'}$ (resp. $I_{K'}$) le groupe de Galois (resp. d'inertie) de l'extension $\bar{K}'/K'$. Le groupe $G_{K'}$ s'identifie à un sous-groupe fermé de G et le groupe $I_{K'} = G \cap I_{K'}$ est ouvert dans I . L'application $K' \mapsto G_{K'}$ est une bijection de l'ensemble des corps locaux K' contenant K et contenu dans C sur celui des sous-groupes fermés G' de G tels que $G' \cap I$ est ouvert dans I (la bijection réciproque associe à G' le corps $C^{G'}$).

Si $K' \subset K''$, on dira que l'extension K''/K' est quasi-galoisienne si $G_{K''}$ est invariant dans $G_{K'}$; il revient au même de dire que la fermeture algébrique de K' dans K'' est galoisienne sur K' et, par abus d'écriture, nous poserons alors $\text{Gal}(K''/K') = G_{K'}/G_{K''}$.

Enfin, nous appelons module galoisien (resp. module filtré, module galoisien filtré, anneau de Barsotti-Tate) au-dessus de K' , ce que l'on obtient en remplaçant K par K' dans la définition des modules galoisiens (resp. modules filtrés, ...). Nous notons $\text{Rep}(G_{K'})$ la catégorie des modules galoisiens au-dessus de K' qui sont de dimension finie sur Φ_p , avec action de $G_{K'}$ continue et $\text{MF}_{K'}$ la catégorie des modules filtrés de dimension finie au-dessus de K' .

7.1. - MODULES POTENTIELLEMENT FILTRÉS.

7.1.1. - Nous appelons module potentiellement filtré (au-dessus de K s'il y a risque de confusion sur la base) la donnée d'un P_O -espace vectoriel de dimension finie E muni

- i) d'une application $F : E \rightarrow E$, bijective, σ -semi-linéaire ;
- ii) d'une filtration $(E_P^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de $E_P = \bar{P} \otimes_{P_O} E$ par des sous- $\bar{P}$ -espaces vectoriels, décroissante, exhaustive et séparée ;
- iii) d'une action de G semi-linéaire (i.e. additive et telle que $g(\lambda d) = g\lambda \cdot gd$ si $g \in G$, $\lambda \in P_O$, $d \in E$) et continue, telle que l'image de I (dans le groupe des P_O -automorphismes de E) soit

un groupe fini, qui commute à l'action de F (i.e. on a $F(gd) = g(Fd)$ si $g \in G$, $d \in E$) et qui est compatible avec la filtration (i.e. si l'on prolonge l'action de G à $E_{\bar{p}}$ par semi-linéarité, on a $g(E_{\bar{p}}^i) = E_{\bar{p}}^i$, si $g \in G$, $i \in \mathbb{Z}$).

7.1.2. - Les modules potentiellement filtrés forment, de manière évidente, une catégorie que nous notons $\underline{\text{MPF}}_K$. La catégorie $\underline{\text{MPF}}_K$ est additive, admet des noyaux et conoyaux, mais n'est pas abélienne. Toutes les considérations développées au n° 1.2 sur les modules filtrés se transposent, sans difficulté, aux modules potentiellement filtrés. En particulier, on a une notion de produit tensoriel, de hom interne, de contragrédient et $\underline{\text{MPF}}_K$ est une $\otimes$ -catégorie Φ_p -linéaire rigide.

7.1.3. - Soit E un module potentiellement filtré. Nous disons que E est défini sur K' si $I_{K'}$ opère trivialement sur E .

Si E est défini sur K' et si $K' \subset K''$, E est aussi défini sur K'' .

Pour tout module potentiellement filtré E , il existe une extension finie galoisienne K' de K sur laquelle E est défini.

Pour les modules potentiellement filtrés, la propriété d'être défini sur K' est stable par sous-objet, quotient, produit tensoriel, hom interne, contragrédient.

7.1.4. - Supposons l'extension K'/K quasi-galoisienne et posons $J = \text{Gal}(K'/K)$. Nous appelons module K' -filtré au-dessus de K la donnée d'un module filtré D de dimension finie au-dessus de K' muni d'une action semi-linéaire continue de J (i.e. l'action de J sur le K'_0 -espace vectoriel sous-jacent est Galois-semi-linéaire continue, elle commute à l'action de F et, lorsqu'on l'étend à $D_{K'} = K' \otimes_{K'_0} D$ par semi-linéarité, elle respecte la filtration).

Les modules K' -filtrés au-dessus de K forment, de manière évidente,

une catégorie additive avec noyaux et conoyaux et c'est, de la même manière que $\underline{MF}_{K'}$, une $\otimes$ -catégorie Φ_p -linéaire rigide.

7.1.5. - Supposons toujours l'extension K'/K quasi-galoisienne. A tout module K' -filtré D au-dessus de K , on associe un module potentiellement filtré $\underline{E}_{K'/K}(D)$ de la manière suivante :

- le P_O -espace vectoriel sous-jacent à $\underline{E}_{K'/K}(D)$ est $E = P_O \otimes_{K'_O} D$;
- l'action de F est définie par $F(\lambda \otimes d) = \sigma \lambda \otimes Fd$ si $\lambda \in P_O$, $d \in D$;
- la filtration de $\underline{E}_{\bar{P}} = \bar{P} \otimes_{P_O} E = \bar{P} \otimes_{K'_O} D = \bar{P} \otimes_{K'} D_{K'}$ est définie par $E_{\bar{P}}^i = \bar{P} \otimes_{K'} D_{K'}^i$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$;
- l'action de G sur E est définie par $g(\lambda \otimes d) = g\lambda \otimes \bar{g}d$, si $g \in G$, $\lambda \in P_O$, $d \in D$ (et où l'on a noté $\bar{g}$ l'image de g dans $\text{Gal}(K'/K)$).

Il est clair que le module potentiellement filtré $\underline{E}_{K'/K}(D)$ est défini sur K' et que la correspondance $D \mapsto \underline{E}_{K'/K}(D)$ est fonctorielle.

7.1.6. - PROPOSITION. - Supposons l'extension K'/K quasi-galoisienne. Le foncteur $\underline{E}_{K'/K}$ induit une $\otimes$ -équivalence entre la $\otimes$ -catégorie des modules K' -filtrés au-dessus de K et celle des modules potentiellement filtrés au-dessus de K définis sur K' .

7.1.7. - Démonstration. - Posons $G' = G_{K'}$ et $I' = I_{K'}$. A tout module potentiellement filtré E défini sur K' , on associe un module K' -filtré $\underline{Desc}_{K'}(E)$ au-dessus de K de la manière suivante :

- le K'_O -espace vectoriel D sous-jacent à $\underline{Desc}_{K'}(E)$ est $E^{G'}$ que l'on munit de l'action de F et de l'action de $\text{Gal}(K'/K) = G/G'$ évidente ;
- la filtration de $D_{K'} = K' \otimes_{K'_O} E^{G'} = (K' \otimes_{K'_O} E)^{G'} = (K' P_O \otimes_{P_O} E)^{G'} = (\bar{P}^{I'} \otimes_{\bar{P}} E)^{G'} = (\bar{P} \otimes_{P_O} E)^{G'} = (E_{\bar{P}})^{G'}$ est définie par $D_{K'}^i = (E_{\bar{P}}^i)^{G'}$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Le groupe d'inertie I' opère trivialement sur E et on a donc $E^{G'} = E^{G'/I'}$. Comme E est un espace vectoriel de dimension finie sur P_O sur lequel $G'/I' = \text{Gal}(P'/K') = \text{Gal}(K'_O{}^{\text{nr}}/K'_O)$ opère semi-linéairement et continûment, on sait ([21], th.1, p.III-31) que l'application canonique de $P_O \otimes_{K'_O} E^{G'}$ dans E est un isomorphisme.

Le même raisonnement montre que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, l'application canonique de $K'P_O \otimes_{K'} (E_{\bar{P}}^i)^{G'}$ dans $(E_{\bar{P}}^i)^{I'}$ est un isomorphisme ; comme $E_{\bar{P}} = \bar{P} \otimes_{P_O} E$, on a $(E_{\bar{P}})^{I'} = \bar{P}^{I'} \otimes_{P_O} E = K'P_O \otimes_{P_O} E$ et $E_{\bar{P}}$ s'identifie à $\bar{P} \otimes_{K'P_O} (E_{\bar{P}})^{I'}$; comme $E_{\bar{P}}^i$ est stable par $I' = \text{Gal}(\bar{P}/K'P)$, on en déduit que $E_{\bar{P}}^i$ est rationnel sur $K'P$, i.e. s'identifie à $\bar{P} \otimes_{K'P} (E_{\bar{P}}^i)^{I'}$; finalement $E_{\bar{P}}^i$ s'identifie à $\bar{P} \otimes_{K'} (E_{\bar{P}}^i)^{G'}$.

Il résulte de ces considérations que, pour tout module potentiellement filtré E défini sur K' , $E_{K'/K}(\text{Desc}_{K'}(E))$ s'identifie à E et la proposition s'en déduit facilement.

7.1.8. - Remarques. -

i) Comme, pour tout module potentiellement filtré, on peut trouver une extension finie galoisienne sur laquelle il est défini, la catégorie $\underline{\text{MPF}}_K$ s'identifie à la limite inductive (en un sens évident) des catégories des modules K' -filtrés au-dessus de K , pour K' parcourant les extensions finies galoisiennes de K contenues dans $\bar{K}$.

ii) Soit E un module potentiellement filtré défini sur K' . Si l'extension K'/K n'est pas quasi-galoisienne, on peut encore associer à E un module filtré au-dessus de K' , $\text{Desc}_{K'}(E)$, qui est défini comme dans le cas où K'/K est quasi-galoisienne, à ceci près que, comme $G_{K'}$ n'est pas invariant dans G , on ne peut plus parler de l'action de $G/G_{K'}$.

7.2. - LES $(\bar{K}/K)$ -ANNEAUX DE BARSOTTI-TATE.

7.2.1. - Appelons $(\bar{K}/K)$ -anneau galoisien filtré la donnée d'une P_O -

algèbre associative, commutative et unitaire B munie

- d'une application bijective $F : B \rightarrow B$, σ -semi-linéaire, compatible avec la structure d'anneau ;
- d'une filtration de $B_{\bar{P}} = \bar{P} \otimes_{P_O} B$ par des sous- $\bar{P}$ -espaces vectoriels $(B_{\bar{P}}^i)_{i \in \mathbb{Z}}$, décroissante, exhaustive et séparée, compatible avec la structure d'anneau (i.e. telle que $B_{\bar{P}}^i B_{\bar{P}}^j \subset B_{\bar{P}}^{i+j}$, si $i, j \in \mathbb{Z}$);
- d'une action de G , Galois-semi-linéaire, compatible avec la structure d'anneau, qui commute à l'action de F et qui, lorsqu'on l'étend par Galois-semi-linéarité à $B_{\bar{P}}$ respecte la filtration. On suppose en outre que l'action de G est continue sur tout sous- P_O -espace vectoriel de dimension finie stable par G .

7.2.2. - Exemple. - L'anneau $\hat{K}_O^{nr}[T, T^{-1}] = P_O[T, T^{-1}]$ introduit au n° 2.2.2 peut être muni d'une structure de $(\bar{K}/K)$ -anneau galoisien filtré :

- pour tout $\sum \lambda_i t^i \in P_O[T, T^{-1}]$, on pose

$$\begin{cases} F(\sum \lambda_i t^i) = \sum p^i \cdot \sigma \lambda_i \cdot t^i, \\ g(\sum \lambda_i t^i) = \sum \chi^i(g) \cdot g \lambda_i \cdot t^i, \text{ si } g \in G; \end{cases}$$
- la filtration de $B_{\bar{P}} = \bar{P} \otimes_{P_O} P_O[T, T^{-1}] = \bar{P}[T, T^{-1}]$ étant définie par $(\bar{P}[T, T^{-1}])^i = T^i \bar{P}[T] = \{ \sum_{j \geq i} \lambda_j t^j \}$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

7.2.3. - Nous appelons $(\bar{K}/K)$ -anneau de Barsotti-Tate la donnée d'un $(\bar{K}/K)$ -anneau galoisien filtré B , contenant $P[T, T^{-1}]$, vérifiant les trois propriétés suivantes :

(Gal) on a $B^G = K_O$,

(Fil) si $B_O = \{b \in B \mid Fb = b\}$, on a $B_O \cap B_{\bar{P}}^0 = \Phi_p$,

(Tate) il existe un monomorphisme $\theta : \text{gr}(B_{\bar{P}}) \rightarrow C[T, T^{-1}]$ qui, lorsqu'on le restreint à $\bar{P}[T, T^{-1}] = \bar{P} \otimes_{P_O} P_O[T, T^{-1}]$, est l'isomorphisme évident de $\text{gr}(\bar{P}[T, T^{-1}])$ sur $\bar{P}[T, T^{-1}]$ considéré comme une sous-algèbre graduée de $C[T, T^{-1}]$.

7.2.4. - Si B est un $(\bar{K}/K)$ -anneau de Barsotti-Tate, pour chaque corps local K' contenant K et contenu dans C , B peut être muni d'une structure d'anneau de Barsotti-Tate au-dessus de K' (que nous appellerons la structure canonique) : l'anneau B est déjà une K_O -algèbre munie d'une action de F , l'action de $G' = \text{Gal}(\bar{K}'/K')$ est la restriction de l'action de G et la filtration de $B_{K'} = K' \otimes_{K_O} B = K' P_O \otimes_{P_O} B \subset \bar{P} \otimes_{P_O} B = B_{\bar{P}}$ est la filtration induite par celle de $B_{\bar{P}}$, i.e. on a $B_{K'}^i = B_{K'} \cap B_{\bar{P}}^i$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Si $K' \subset K''$, on voit que $B_{K'}^i = B_{K'} \cap B_{K''}^i$. On a $B_{K''} = K'' P_O \otimes_{K' P_O} B_{K'}$ et $K'' P_O \otimes_{K' P_O} B_{K'}^i \subset B_{K''}^i$, pour tout i ; on prendra garde que cette inclusion est, en général, stricte.

7.2.5. - Etant donné une K_O -algèbre associative, commutative et unitaire B , se donner sur B une structure de $(\bar{K}/K)$ -anneau de Barsotti-Tate revient à se donner, pour chaque K' , une structure d'anneau de Barsotti-Tate au-dessus de K' sur B , avec des relations de compatibilité évidentes.

7.2.6. - Nous dirons qu'un $(\bar{K}/K)$ -anneau de Barsotti-Tate est adapté aux groupes p-divisibles si, pour chaque corps local K' contenant K et contenu dans C , B , muni de sa structure canonique d'anneau de Barsotti-Tate au-dessus de K' , est adapté aux groupes p-divisibles définis sur l'anneau des entiers A' de K' .

Nous démontrerons ailleurs qu'un tel anneau existe effectivement.

7.3. - MODULES GALOISIENS POTENTIELLEMENT ADMISSIBLES.

Dans ce n° et dans le suivant, B est un $(\bar{K}/K)$ -anneau de Barsotti-Tate fixé.

7.3.1. - Pour tout module galoisien V , de dimension finie, au-

dessus de K , notons $\underline{E}_B(V)$ la limite inductive, pour I' parcourant les sous-groupes ouverts de I , de $(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{I'}$.

Soit d la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$. Pour tout sous-groupe ouvert I' de I , V , muni de l'action de I' définie par restriction, est un module galoisien de dimension d au-dessus de $C^{I'}$; comme B est muni d'une structure d'anneau de Barsotti-Tate au-dessus de $C^{I'}$, on a $\dim_{\mathbb{Q}_p}(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{I'} \leq d$ (prop. 3.2.1). On a donc $\dim_{\mathbb{Q}_p} \underline{E}_B(V) \leq d$ et il existe un sous-groupe ouvert I' de I tel que $\underline{E}_B(V) = (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{I'}$.

On en déduit que $\underline{E}_B$ est, de manière évidente, un foncteur additif de la catégorie $\underline{\text{Rep}}(G)$ dans $\underline{\text{MPF}}_K$.

7.3.2. - PROPOSITION. - Soit V un module galoisien de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) il existe un sous-groupe ouvert I' de I tel que V , en tant que module galoisien au-dessus de $C^{I'}$, est B -admissible ;
- ii) il existe une extension finie K' de K contenue dans C telle que V , en tant que module galoisien au-dessus de K' , est B -admissible ;
- iii) on a $\dim_{\mathbb{Q}_p} \underline{E}_B(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

Démonstration. - L'équivalence de (i) et (iii) est claire. Si K' est une extension finie de K et si $G' = G_{K'}$, $I' = I_{K'}$, l'application canonique de $P_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{K_O} (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G'}$ dans $(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{I'}$ est un isomorphisme et l'équivalence de (i) et (ii) en résulte.

7.3.3. - Nous dirons qu'un module galoisien, de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, au-dessus de K est potentiellement B -admissible (ou potentiellement admissible s'il n'y a pas de risque de confusion sur B) s'il vérifie les conditions équivalentes de la proposition 7.3.2.

Nous notons $\underline{\text{Rep}}_B^{\text{pot}}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\text{Rep}}(G)$ dont

les objets sont les modules galoisiens potentiellement admissibles.

Si K' est un corps local contenant K et contenu dans C , nous disons qu'un module galoisien potentiellement admissible devient admissible sur K' si V , en tant que module galoisien au-dessus de K' , est B-admissible et nous notons $\text{Rep}_B^{K'-\text{pot}}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\text{Rep}_B^{\text{pot}}(G)$ dont les objets sont ceux qui deviennent admissibles sur K' .

Il résulte de la définition que $\text{Rep}_B^{\text{pot}}(G)$ s'identifie à la limite inductive des catégories $\text{Rep}_B^{K'-\text{pot}}(G)$, pour K' parcourant les extensions finies de K contenues dans $\bar{K}$.

Il résulte des propositions 3.4.1 et 3.4.3 que les catégories $\text{Rep}_B^{K'-\text{pot}}(G)$ et $\text{Rep}_B^{\text{pot}}(G)$ sont stables par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel, hom interne, contragrédient.

7.3.4. - Soit E un module potentiellement filtré, soit I' le noyau de la représentation associée de I dans le P_O -espace vectoriel sous-jacent à E et soit $K' = C^{I'}$. Nous dirons que E est faiblement admissible (resp. B-admissible) si le module filtré au-dessus de K' sous-jacent à $\text{Desc}_{K'}(E)$ est faiblement admissible (resp. B-admissible).

Si E est faiblement admissible et si $K' \subset K'' \subset C$, avec K''/K quasi-galoisienne, le module filtré au-dessus de K'' sous-jacent à $\text{Desc}_{K''}(E)$ est aussi faiblement admissible. Il résulte alors facilement de la proposition 4.3.1 que la sous-catégorie pleine MPF_K^f de MPF_K , dont les objets sont ceux qui sont faiblement admissibles, est abélienne.

Nous notons $\text{MPF}_{K,B}$ la sous-catégorie pleine de MPF_K dont les objets sont ceux qui sont B-admissibles. D'après la proposition 4.4.5, c'est, en fait, une sous-catégorie de MPF_K^f .

7.3.5. - Il résulte maintenant immédiatement des résultats du §3 et de la proposition 4.5.1 le théorème suivant :

THEOREME. - La catégorie $\underline{\text{MPF}}_{K,B}$ est stable par sous-objet et quotient (pris dans la catégorie $\underline{\text{MPF}}_K^f$), somme directe, produit tensoriel, contragrédient. Par restriction, le foncteur $\underline{E}_B$ induit une $\otimes$ -équivalence entre la catégorie $\underline{\text{Rep}}_B^{\text{pot}}(G)$ et $\underline{\text{MPF}}_{K,B}$.

7.3.6. - Remarques. -

i) Soit E un module potentiellement filtré B -admissible et soit V le $\mathbb{Q}_p[G]$ -module

$$V = (B \otimes_{P_O} E)_O \cap (B \otimes_{P_O} E)_P^O,$$

avec $(B \otimes_{P_O} E)_O = \{d \in B \otimes_{P_O} E \mid Fd = d\}$ et $(B \otimes_{P_O} E)_P^O = \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_P^{-i} \otimes_P E_P^i$. La correspondance $E \mapsto V$ définit un quasi-inverse du foncteur $\underline{E}_B$.

ii) Soit K' un corps local contenant K et contenu dans C . Si V est un module galoisien potentiellement admissible, V devient admissible sur K' si et seulement si $\underline{E}_B(V)$ est défini sur K' . Lorsque K'/K est quasi-galoisienne, on en déduit une $\otimes$ -équivalence entre la catégorie $\underline{\text{Rep}}_B^{K'-\text{pot}}(G)$ et la catégorie $\underline{\text{MPF}}_{K,B}^{K'}$ des modules K' -filtrés au-dessus de K dont le module filtré au-dessus de K' sous-jacent est B -admissible. Elle est induite par le foncteur $V \mapsto \underline{\text{Desc}}_{K'}(\underline{E}_B(V))$. Il est clair que $\underline{D}_B^{K'}(V) = (B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G'}$ (où $G' = G_{K'}$) est, de manière naturelle, un module K' -filtré au-dessus de K . Le foncteur $V \mapsto \underline{\text{Desc}}_{K'}(\underline{E}_B(V))$ s'identifie à $\underline{D}_B^{K'}$.

iii) Lorsque k est algébriquement clos, on a $G = I$ et $P_O = K_O$. Si V est un module galoisien potentiellement admissible et si I_V désigne le noyau de la représentation P_O -linéaire de G dans $\underline{E}_B(V)$, V devient admissible sur K' si et seulement si $G_{K'}$ est contenu dans I_V et, s'il en est ainsi, $\underline{D}_B^{K'}(V) = \underline{\text{Desc}}_{K'}(\underline{E}_B(V))$ s'identifie à $\underline{E}_B(V)$.

7.4. - UNE MESURE DE LA NON-ADMISSIBILITÉ.

Dans tout ce n°, V est un module galoisien potentiellement admissible de dimension h sur Φ_p et on pose $E = \underline{E}_B(V)$.

7.4.1. - On note I_V le noyau de l'action de I sur E . Alors E est, en particulier, un espace vectoriel de dimension h sur P_0 sur lequel le groupe fini I/I_V opère linéairement, et on note $\varphi_V : I/I_V \rightarrow P_0$ le caractère de cette représentation.

7.4.2. - Remarque. - Notons encore $\varphi_V : I \rightarrow P_0$ l'application définie par $\varphi_V(g) = \varphi_V(\bar{g})$, où $\bar{g}$ désigne l'image de g dans I/I_V . Il est immédiat

- i) que $\varphi_{V*} = \varphi_V^*$ (i.e. on a $\varphi_{V*}(g) = \varphi_V(g^{-1})$, si $g \in I$);
- ii) que, si V_1 et V_2 sont deux modules galoisiens potentiellement admissibles, on a $\varphi_{V_1 \oplus V_2} = \varphi_{V_1} + \varphi_{V_2}$ et $\varphi_{V_1 \otimes V_2} = \varphi_{V_1} \cdot \varphi_{V_2}$.

7.4.3. - Soit K' une extension finie galoisienne de K contenue dans C et soit $G' = G_{K'}$. Notons J (resp. J_0) le groupe de Galois (resp. d'inertie) de l'extension K'/K . On a $J = G/G'$ et $J_0 = IG'/G' \simeq I/G' \cap I$.

Supposons que V devienne admissible sur K' ; cela équivaut à dire que $G' \cap I \subset I_V$. Par conséquent, I/I_V s'identifie à un quotient de J_0 et on peut, de manière évidente, considérer φ_V comme un caractère de J_0 à valeurs dans P_0 .

D'autre part, $\underline{D}_B^{K'}(V) = E^{G'}$ est, en particulier, un K'_0 -espace vectoriel de dimension h sur lequel $G/G' = J$ opère semi-linéairement. On peut donc aussi considérer $\underline{D}_B^{K'}(V)$ comme un vectoriel sur K_0 de dimension $h \cdot (J : J_0)$ sur lequel J opère linéairement et nous notons $\psi_V^{K'} : J \rightarrow K_0$ le caractère de cette représentation.

7.4.4. - PROPOSITION. - Avec les hypothèses et les notations qui précèdent, on a $\psi_V^{K'} = \text{Ind}_{J_O}^J \varphi_V$, caractère de la représentation de J induite par une représentation de J_O de caractère φ_V .

Démonstration. - Posons $D = \underline{D}_B^{K'}(V)$. Comme E s'identifie à $P_O \otimes_{K_O} D$, φ_V est aussi le caractère de la représentation K'_O -linéaire de J_O définie par D . La proposition résulte alors du lemme suivant :

7.4.5. - LEMME. - Soit L' une extension finie galoisienne d'un corps commutatif L de caractéristique 0 et soit $H = \text{Gal}(L'/L)$. Soit J un groupe fini extension de H par un sous-groupe invariant J_O . Soit D un espace vectoriel de dimension finie sur L' sur lequel J opère semi-linéairement (i.e. on a $g(\lambda d) = \bar{g}\lambda \cdot gd$, si g est un élément de J d'image $\bar{g}$ dans H , si $\lambda \in L'$ et si $d \in D$). Soit φ le caractère de la représentation L' -linéaire de J_O définie par D et soit ψ celui de la représentation L -linéaire de J définie par D . Alors $\psi = \text{Ind}_{J_O}^J \varphi$.

7.4.6. - Démonstration. - Soit $d_1, d_2, \dots, d_h$ une base de D sur L' . Soit $g \in J_O$ et posons $g(d_j) = \sum \lambda_{ij} d_i$, avec $\lambda_{ij} \in L'$. Soit maintenant $s \in J$; les $s \cdot d_j$, pour $j = 1, 2, \dots, h$, forment une base de D sur L' et on a

$$(sgs^{-1})(sd_j) = s(gd_j) = \sum \bar{s}\lambda_{ij} \cdot sd_i ;$$

on a donc $\varphi(sgs^{-1}) = \sum \bar{s}\lambda_{ii}$, alors que l'on avait $\varphi(g) = \sum \lambda_{ii}$. D'où

$$(1) \quad \varphi(sgs^{-1}) = \bar{s}(\varphi(g)) .$$

Munissons alors l'anneau $L' \otimes_L L'$ d'une structure de L' -algèbre en posant $\lambda(\mu \otimes \nu) = \lambda\mu \otimes \nu$, si $\lambda, \mu, \nu \in L'$. En tant que L' -algèbre, $L' \otimes_L L'$ est canoniquement isomorphe à $\prod_{\tau \in H} L'_\tau$, avec $L'_\tau = L'$, la projection $\pi_\tau : L' \otimes_L L' \rightarrow L'_\tau$ étant définie par $\pi_\tau(\lambda \otimes \mu) = \lambda \cdot \tau\mu$. Pour tout $\tau \in H$, nous notons e_τ l'idempotent correspondant à π_τ (i.e. l'unique idempotent primitif de $L' \otimes_L L'$ tel que $\pi_\tau(e_\tau) = 1$).

Faisons opérer J sur $L' \otimes_L L'$ en posant $g(\lambda \otimes \mu) = \lambda \otimes \bar{g}\mu$, si $g \in J$ et $\lambda, \mu \in L'$. Pour tout $\tau \in H$ et tout $g \in J$, ge_τ est un idempotent ; si $e_\tau = \sum \lambda_i \otimes \mu_i$, on a $ge_\tau = \sum \lambda_i \otimes \bar{g}\mu_i$ et, comme $\sum \lambda_i \tau(\mu_i) = 1$, on a $\sum \lambda_i \cdot (\tau \bar{g}^{-1} \bar{g})(\mu_i) = 1$. On en déduit que $ge_\tau = e_{\tau \bar{g}} - 1$.

Soit $D' = L' \otimes_L D$ sur lequel on prolonge l'action de J par linéarité. Le caractère de la représentation L' -linéaire de J ainsi définie est encore ψ . Comme D est un L' -espace vectoriel sur lequel J opère semi-linéairement, D' est un $(L' \otimes_L L')$ -module libre sur lequel J opère semi-linéairement. Si, pour tout $\tau \in H$, on pose $D'_\tau = e_\tau D'$, c'est un sous- L' -espace vectoriel de D' et $D' = \bigoplus_{\tau \in H} D'_\tau$.

Soit $g \in J$ et soit $d \in D'_\tau$. On a $gd = g(e_\tau d) = e_{\tau \bar{g}}^{-1} \cdot gd$. En particulier, si $g \notin J_0$, g permute les D'_τ et on a donc $\varphi(g) = 0$.

En revanche, chaque D'_τ est un sous- $L'[J_0]$ -module de D' . Nous notons η_τ le caractère de la représentation L' -linéaire de J_0 définie par D'_τ . Pour chaque $\tau \in H$, soit $\theta_\tau : D \rightarrow D'_\tau$ l'application qui à d associe $e_\tau(1 \otimes d)$. Il est immédiat que θ_τ est bijective, additive, commute à l'action de J_0 et vérifie $\theta_\tau(\lambda d) = \tau \lambda \cdot \theta_\tau(d)$, si $\lambda \in L'$, $d \in D$. On en déduit que $\eta_\tau(g) = \tau(\varphi(g))$. Si s est un relèvement de τ dans J , on a donc, d'après (1), $\eta_\tau(g) = \varphi(sgs^{-1})$.

Finalement, si S désigne un système de représentants de H dans J , on a

$$\psi(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \notin J_0, \\ \sum_{s \in S} \varphi(sgs^{-1}) & \text{si } g \in J_0, \end{cases}$$

et on a donc bien $\psi = \text{Ind}_{J_0}^J \varphi$.

7.4.7. - Si η_1 et η_2 sont les caractères de deux représentations linéaires d'un groupe fini H (sur un corps de caractéristique 0), on note $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle$ leur produit scalaire ; on a donc

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = \frac{1}{(H:1)} \sum_{g \in H} \eta_1(g^{-1}) \eta_2(g)$$

et c'est un entier ≥ 0 .

Soit $P_V = C^{I_V}$ et soit $sw_V : I/I_V \rightarrow \mathbb{Z}$ (resp. $a_V : I/I_V \rightarrow \mathbb{Z}$) le caractère de la représentation de Swan (resp. d'Artin) de l'extension P_V/P (cf. par exemple, [14], p. 2 et 3 ou [5], chap.II, n° 6.1). On sait que $a_V = sw_V + u_V$, où

$$u_V(g) = \begin{cases} -1 & \text{si } g \neq 1, \\ (I/I_V)-1 & \text{si } g = 1. \end{cases}$$

est le caractère du quotient de la représentation régulière de I/I_V par la représentation unité. On pose

$$\begin{cases} \delta_p(V) = \langle sw_V, \varphi_V \rangle, \\ \delta'_p(V) = \langle a_V, \varphi_V \rangle, \\ \epsilon_p(V) = \langle u_V, \varphi_V \rangle; \end{cases}$$

ce sont des entiers ≥ 0 et on a $\delta'_p(V) = \delta_p(V) + \epsilon_p(V)$.

7.4.8. - PROPOSITION. -

- i) On a $\delta'_p(V) = 0 \Leftrightarrow \epsilon_p(V) = 0 \Leftrightarrow V$ est admissible.
- ii) On a $\delta_p(V) = 0$ si et seulement s'il existe une extension finie modérément ramifiée de K sur laquelle V devient admissible.
- iii) Soit $\tilde{V}$ le semi-simplifié du module galoisien V ; on a $\delta_p(\tilde{V}) = \delta_p(V)$, $\delta'_p(\tilde{V}) = \delta'_p(V)$ et $\epsilon_p(\tilde{V}) = \epsilon_p(V)$; l'entier $\epsilon_p(V)$ est inférieur ou égal à la codimension, dans $\tilde{V}$, du plus grand sous-module galoisien admissible de $\tilde{V}$.

7.4.9. - Démonstration. - Si V est admissible, on a

$\epsilon_p(V) = \delta'_p(V) = 0$. Si $\delta'_p(V) = 0$, on a, a fortiori, $\epsilon_p(V) = 0$. Si $\epsilon_p(V) = 0$, cela signifie que $E^I = E$, donc que $I_V = I$ et V est admissible, d'où (i).

L'assertion (ii) résulte trivialement de ce qu'un caractère absolument irréductible de I/I_V intervient dans sw_V avec une multiplicité $\neq 0$ si et seulement si le noyau de la représentation qu'il définit ne contient pas le p -groupe de Sylow de I/I_V .

Comme les représentations $\mathbb{P}_0$ -linéaires, de dimension finie, d'un groupe fini sont semi-simples, $\underline{E}_B(V)$ et $\underline{E}_B(\tilde{V})$ sont isomorphes en tant que $\mathbb{P}_0[I]$ -modules à gauche et les égalités de l'assertion (iii) en résultent. Enfin, si V est semi-simple, si V' est le plus grand sous-module galoisien admissible de V et si $E' = \underline{E}_B(V')$, on a $E' \subset E^I$. Comme $\dim_{\mathbb{P}_0} E = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ et $\dim_{\mathbb{P}_0} E' = \dim_{\mathbb{Q}_p} V'$, on a

$$\epsilon_p(V) = \dim_{\mathbb{P}_0} E - \dim_{\mathbb{P}_0} E^I \leq \dim_{\mathbb{P}_0} E - \dim_{\mathbb{P}_0} E' = \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_{\mathbb{Q}_p} V',$$

d'où la proposition.

7.4.10. - PROPOSITION. - Soit K' une extension finie galoisienne de K sur laquelle V devient admissible et soit f le degré de l'extension résiduelle. Soit $\text{sw}_{K'/K}$ (resp. $a_{K'/K}$) le caractère de la représentation de Swan (resp. d'Artin) de l'extension K'/K . On a

$$\delta_p(V) = \frac{1}{f} \cdot \langle \text{sw}_{K'/K}, \psi_V^{K'} \rangle \quad \text{et} \quad \delta'_p(V) = \frac{1}{f} \cdot \langle a_{K'/K}, \psi_V^{K'} \rangle.$$

7.4.11. - Démonstration. - Reprenons les notations du n° 7.4.3 ; comme d'après la proposition 7.4.4, $\psi_V^{K'} = \text{Ind}_{J_0}^J \varphi_V$, on a, d'après la loi de réciprocité de Frobenius,

$$\langle \text{sw}_{K'/K}, \psi_V^{K'} \rangle = \langle \text{sw}_{K'/K}, \text{Ind}_{J_0}^J \varphi_V \rangle = \langle \text{Res}_{J_0} \text{sw}_{K'/K}, \varphi_V \rangle.$$

Si l'on identifie J_0 à $I/G' \cap I$ et si l'on pose $P' = C^{G' \cap I}$, on voit facilement que $\text{Res}_{J_0} \text{sw}_{K'/K} = f \cdot \text{sw}_{P'/P}$. On a donc

$\langle \text{sw}_{K'/K}, \psi_V^{K'} \rangle = f \cdot \langle \text{sw}_{P'/P}, \varphi_V \rangle$. Or φ_V est le caractère d'une représentation de $\text{Gal}(P'/P)$ dont le noyau est $I_V/G' \cap I$; si X est une représentation linéaire de $\text{Gal}(P'/P)$ dont le caractère est $\text{sw}_{P'/P}$, on sait que le caractère de $X|_{I_V/G' \cap I}$ est $\text{sw}_{P_V/P} = \text{sw}_V$. On a donc bien

$$\langle \text{sw}_{K'/K}, \psi_V^{K'} \rangle = f \cdot \langle \text{sw}_V, \varphi_V \rangle = f \cdot \delta_p(V). \quad \text{La deuxième formule se démontre}$$

de la même manière.

7.4.13. - Remarques. -

i) Soit X (resp. X') un espace vectoriel de dimension finie sur P_0 sur lequel I/I_V opère linéairement, le caractère de la représentation ainsi définie étant sw_V (resp. a_V). On a $\delta_p(V) = \dim_{P_0}(\text{Hom}_{P_0}(X, E))^I$ et $\delta'_p(V) = \dim_{P_0}(\text{Hom}_{P_0}(X', E))^I$.

ii) Soit K' une extension finie galoisienne de K sur laquelle V devient admissible et soit Y (resp. Y') un espace vectoriel de dimension finie sur K_0 sur lequel $\text{Gal}(K'/K)$ opère linéairement, le caractère de la représentation ainsi définie étant $sw_{K'/K}$ (resp. $a_{K'/K}$) (un tel espace existe d'après [5], n° 7.5, cor. au th.2). Si f est le degré de l'extension résiduelle, on a

$$\begin{cases} \delta_p(V) = \frac{1}{f} \cdot \dim_{K_0}(\text{Hom}_{K_0}(Y, \underline{D}_B^{K'}(V)))^G, \\ \delta'_p(V) = \frac{1}{f} \cdot \dim_{K_0}(\text{Hom}_{K_0}(Y', \underline{D}_B^{K'}(V)))^G. \end{cases}$$

iii) Conservons les hypothèses et notations qui précèdent. Il est probable que l'on peut toujours construire un espace vectoriel Z (resp. Z') de dimension finie sur K'_0 sur lequel $\text{Gal}(K'/K)$ opère semi-linéairement, le caractère de la représentation K_0 -linéaire ainsi définie étant $sw_{K'/K}$ (resp. $a_{K'/K}$). On a alors

$$\begin{cases} \delta_p(V) = \dim_{K_0}(\text{Hom}_{K'_0}(Z, \underline{D}_B^{K'}(V)))^G, \\ \delta'_p(V) = \dim_{K_0}(\text{Hom}_{K'_0}(Z', \underline{D}_B^{K'}(V)))^G. \end{cases}$$

7.5. - APPLICATION AUX VARIETES ABELIENNES.

Dans ce n°, B est un $(\bar{K}/K)$ -anneau de Barsotti-Tate adapté aux groupes p -divisibles (cf. n° 7.2.6).

7.5.1. - Si G est une variété abélienne définie sur K et si ℓ est un nombre premier (y compris, si $\ell = p$), on note

$T_\ell(G) = \text{Hom}(\Phi_\ell / \mathbb{Z}_\ell, G(\bar{K}))$ le module de Tate de G .

PROPOSITION. - Soit G une variété abélienne sur K ayant potentiellement bonne réduction et soit $V = \Phi_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(G)$. Alors V est potentiellement admissible et le caractère φ_V (cf. n° 7.4.1) est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Si $\ell \neq p$ et si φ_G désigne le caractère de la représentation $\mathbb{Z}_\ell$ -linéaire de I dans $T_\ell(G)$, on a $\varphi_G = \varphi_V$ (rappe-
lons, cf. [23], th.2, p.496, que φ_G est indépendant de ℓ et à valeurs dans $\mathbb{Z}$).

7.5.2. - Démonstration. - Soit K' une extension finie galoisienne de K sur laquelle G acquiert bonne réduction, soient A' l'anneau des entiers de K' et k' le corps résiduel. Soit $G_{A'}$ le modèle de Néron de $G \times_K K'$. C'est un schéma abélien sur $\text{Spec} A'$ et $\Gamma = \varprojlim_p (G_{A'})_p$ est un groupe p -divisible sur A' . Comme V s'identifie à $\underline{V}_p(\Gamma)$ (comme module galoisien au-dessus de K'), V est potentiellement admissible.

La fibre spéciale $G_{k'} = G_{A'} \times_{A'} k'$ de $G_{A'}$ est une variété abélienne définie sur k' et la fibre spéciale $\Gamma_{k'}$ de Γ s'identifie à $\varprojlim_p (G_{k'})_p$. Soit $D = \underline{D}_B^{K'}(V)$. On sait (cf. n° 5.1) que le F -iso-cristal sous-jacent à D s'identifie au dual de $\underline{M}_{K'_O}(\Gamma_{K'}) = K' \otimes_{W(k')} \underline{M}(\Gamma_{k'})$, où $\underline{M}(\Gamma_{k'})$ est le module de Dieudonné de $\Gamma_{k'}$.

Soit J_O le groupe d'inertie de l'extension K'/K et soit $s \in J_O$. Par fonctorialité du modèle de Néron, s opère sur $G_{A'}$, donc aussi sur $G_{k'}$. Comme J_O opère trivialement sur k' , s définit en fait un endomorphisme de la structure de variété abélienne de $G_{k'}$; notons P_s son polynôme caractéristique et $\text{tr}(s)$ sa trace :

- on sait (cf. [13 bis], th.4, p.180) que P_s est aussi le polynôme caractéristique de s opérant sur $T_\ell(G_{k'}) = T_\ell(G_{A'}) = T_\ell(G)$; en particulier, on a $\varphi_G(s) = \text{tr}(s)$;

- on sait (cf. [4] , chap.V, cor. au th. du n°2) que P_s est aussi le polynôme caractéristique de s opérant sur $\underline{M}(\Gamma_k)$, donc aussi sur $\underline{M}_{K'_O}(\Gamma_k)$; comme P_s est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on a $P_{s^{-1}} = P_s$ et P_s est aussi le polynôme caractéristique de s opérant sur le dual D de $\underline{M}_{K'_O}(\Gamma_k)$; comme φ_V est le caractère de la représentation K'_O -linéaire de J_O sur D , on a $\varphi_V(s) = \text{tr}(s)$, d'où la proposition.

7.5.3. - Remarques. -

1. - Soit G une variété abélienne définie sur K et soit $V = \Phi_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(G)$. Il me semble raisonnable de conjecturer que G à bonne réduction (resp. potentiellement bonne réduction) si et seulement si V est admissible (resp. potentiellement admissible).

On a des résultats partiels dans ce sens :

- i) la proposition 7.5.1 montre que la condition est nécessaire et que, si G a potentiellement bonne réduction, alors G a bonne réduction si et seulement si V est admissible (car G a bonne réduction si et seulement si φ_G est le caractère de la représentation triviale de dimension $2g$, avec $g = \dim G$, tandis que V est admissible si et seulement si φ_V est le caractère de la représentation triviale de dimension $2g$) ;
- ii) on peut montrer que la conjecture est vraie si G est une courbe elliptique, i.e. si $g = 1$;
- iii) d'après un théorème de Raynaud (cf. [SGA 7.I] , p. 385, cor.5.10) G a bonne réduction si et seulement s'il existe un groupe p -divisible Γ sur G tel que $V \simeq \underline{V}_p(\Gamma)$; il résulte alors du cor. 5.2.4 que, si $e = 1$, G a bonne réduction si et seulement si V est admissible ;
- iv) de la même manière, on voit que la conjecture est vraie, quel que soit e , si la conjecture du n° 5.2.5 l'est aussi.

2. - Soit G une variété abélienne définie sur K ayant potentiellement bonne réduction et soit $V = \Phi_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(G)$. Soit $\delta_\ell(G)$ (resp. $\delta'_\ell(G)$, $\epsilon_\ell(G)$) l'invariant noté δ_ℓ (resp. $\delta_\ell + \epsilon$, ϵ) dans [23], p.500 : avec les notations du n° 7.4.7, on a $\delta_\ell(G) = \langle \text{sw}_V, \varphi_G \rangle$, $\delta'_\ell(G) = \langle a_V, \varphi_G \rangle$, $\epsilon_\ell(G) = \langle u_V, \varphi_G \rangle$; comme $\varphi_G = \varphi_V$, on a $\delta_\ell(G) = \delta_p(V)$, $\delta'_\ell(G) = \delta'_p(V)$ et $\epsilon_\ell(G) = \epsilon_p(V)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. BERTHELOT, Slopes of Frobenius in crystalline cohomology, in Algebraic Geometry (Arcata 1974), Proc. of Symposia in Pure Maths., vol. 29, Amer. Math. Soc., Providence, 1975, pp.315-328.
- [2] A. BOREL, Linear Algebraic Groups, Benjamin, New-York, 1969.
- [3] N. BOURBAKI, Algèbre I, chap. 1 à 3, Hermann, Paris, 1970.
- [4] M. DEMAZURE, Lectures on p-Divisible Groups, Lecture Notes in Mathematics, n° 302, Springer, Berlin, 1972.
- [5] J.-M. FONTAINE, Groupes de ramification et représentations d'Artin, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t.4 (1971), 337-392.
- [6] J.-M. FONTAINE, Groupes p-divisibles sur les corps locaux, Astérisque 47-48, Soc. math. de France, 1977.
- [7] A. GROTHENDIECK, Groupes de Barsotti-Tate et cristaux, Actes Congrès intern. math. 1970, t.1, 431-436, Gauthier-Villars, Paris, 1971.
- [8] A. GROTHENDIECK, Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné, Université de Montréal, Montréal, 1974.
- [9] G. LAFFAILLE, Construction de groupes p-divisibles. Le cas de dimension 1, dans ce volume.
- [10] G. LAFFAILLE, Groupes p-divisibles et modules filtrés : le cas peu ramifié, en préparation.
- [11] S. LANG, On quasi-algebraic closure, Ann. of Maths, 55 (1952), 373-390.
- [12] Y. MANIN, The theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic, Russian Math. Surveys, 18 (1963), 1-83.

- [13] W. MESSING, The Crystals Associated to Barsotti-Tate Groups : with Applications to Abelian Schemes, Lecture Notes in Mathematics, n° 264, Springer, Berlin, 1972.
- [13 bis] D. MUMFORD, Abelian Varieties, Oxford University Press, London, 1970.
- [14] A.P. OGG, Elliptic curves and wild ramification, Amer. J. Math., 89 (1967), 1-21.
- [15] M. RAYNAUD, Schémas en groupes de type $(p, \dots, p)$, Bull. Soc. Math. France, 102 (1974), 241-280.
- [16] N. SAAVEDRA RIVANO, Catégories Tannakiennes, Lecture Notes in Mathematics, n° 265, Springer, Berlin, 1972.
- [17] S. SEN, Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules, Ann. of Maths, 97 (1973), 160-170.
- [18] J.-P. SERRE, Cohomologie galoisienne, Lecture Notes in Mathematics, n° 5, Springer, Berlin, 1965.
- [19] J.-P. SERRE, Lie algebras and Lie groups, Benjamin, New-York, 1965.
- [20] J.-P. SERRE, Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p -divisibles, Proceedings of a Conference on Local Fields, Nuffic Summer School at Driebergen, 118-131, Springer, Berlin, 1967.
- [21] J.-P. SERRE, Abelian ℓ -Adic Representations and Elliptic Curves, Benjamin, New-York, 1968.
- [22] J.-P. SERRE, Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate, dans ce volume.
- [23] J.-P. SERRE and J. TATE, Good reduction of abelian varieties, Ann. of Maths, 88 (1968), 492-517.
- [24] R. STEINBERG, Regular Elements of Semi-simple Algebraic Groups, Publ. Math. IHES, n° 25 (1965), 49-80.
- [25] J. TATE, p -Divisible Groups, Proceedings of a Conference on Local Fields, Nuffic Summer School at Driebergen, 158-183, Springer, Berlin, 1967.
- [SGA 7.I] Groupes de monodromie en géométrie algébrique, séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, 67-69, Lecture Notes in Mathematics, n° 288, Springer, Berlin, 1972.

Astérisque

BENEDICT H. GROSS

Ramification in p -adic Lie extensions

Astérisque, tome 65 (1979), p. 81-102

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__65__81_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RAMIFICATION IN P-ADIC LIE EXTENSIONS

by

Benedict H. Gross

(Princeton)

-:-:-:-

Let $\mathcal{O}$ be a complete discrete valuation ring, with residue field k algebraically closed of characteristic $p > 0$. Let K be the field of fractions, $\overline{K}_s$ the separable closure of K , $\overline{K}$ the algebraic closure of K , and $\mathcal{G} = \text{Aut}_K(\overline{K}) = \text{Gal}(\overline{K}_s/K)$.

If G is a p -divisible group over $\mathcal{O}$, its general fibre determines a continuous Galois representation:

$$\rho : \mathcal{G} \longrightarrow \prod_{\lambda} \text{GL}(d_{\lambda}, D_{\lambda})$$

where the D_{λ} are division algebras with center $\mathbb{Q}_p$. When K has characteristic zero this representation is well-known; it is given by the Galois action on the Tate module $T(G)$ [10]. When K has characteristic p , I will show how to define ρ as a Galois action on a generalized Tate module and will calculate its determinant.

In both cases the image of ρ is a closed subgroup of $\prod_{\lambda} \text{GL}(d_{\lambda}, D_{\lambda})$ and inherits the structure of a p -adic Lie group. It carries two filtrations: an arithmetic filtration by the upper ramification subgroups of $\mathcal{G}$, and an analytic

filtration by the p -saturated subgroups of Lie theory. When $\text{char}(K) = 0$, Sen has shown that these two filtrations are related in a striking manner [7]; unfortunately, his results hold for any p -adic Galois representation and have nothing to do with the group G . When $\text{char}(K) = p$ the ramification behavior of an arbitrary p -adic Galois representation can be quite random [11], but it seems that there is an interesting relation between the two filtrations when the representation comes from a p -divisible group over $\mathcal{O}$. Such a relation would reflect a favorable arithmetic property of ρ in the equicharacteristic case, much as $T(G)$ enjoys a Hodge-Tate decomposition in the case of mixed characteristic [10].

In this paper I will present evidence for such a filtration relation when G has dimension one. In this case the ramification calculations can be made quite explicitly, and one can appeal to the theory of formal A -modules when G has additional endomorphisms. It is a pleasure to express my appreciation to Jon Lubin and John Tate, who taught me this subject and offered many helpful suggestions.

§1. Review of ramification theory [8]

Let K be a local field, with algebraically closed residue field k of characteristic $p > 0$. Let v_K be the valuation on $\bar{K}$ with value group $\mathbb{Z}$ on K^* .

If E is a finite separable extension of K , we may filter the set

$$\Gamma = \Gamma_{E/K} = \text{Hom}_K(E, \bar{K})$$

as follows. Since E is totally ramified over K , it is generated by any uniformizing parameter β . Let $e = [E:K]$ and define for $x \geq 0$ the subset

$$\Gamma_x = \{\sigma \in \Gamma : \text{ev}_K(\beta^{\sigma} - \beta) \geq x + 1\}$$

For large enough x , Γ_x consists only of the identity homomorphism; furthermore this filtration is independent of the choice of β .

We call x a break in the filtration if $\Gamma_x \neq \Gamma_{x+\varepsilon}$ for all $\varepsilon > 0$. When E is a Galois extension of K , the set Γ may be identified with the Galois group and the filtration we have defined coincides with the lower ramification filtration of $\text{Gal}(E/K)$. In this case the breaks all occur at integers; in the general case the breaks may be rational, as $(\beta^\sigma - \beta)$ may ramify over E .

If $x = 0$ is the only break in the filtration of Γ then E/K is tamely ramified (hence cyclic). We shall henceforth assume there are further breaks.

Define the Herbrand transition function:

$$(1.1) \quad \phi_{E/K}(x) = \frac{1}{e} \int_0^x \text{Card}(\Gamma_t) dt$$

This is monotone increasing and piecewise linear. Let $\psi(x)$ be the inverse function on the interval $[0, \infty)$ and define the upper filtration of Γ by setting $\Gamma^y = \Gamma_{\psi(y)}$ for $y \geq 0$. The upper breaks are the values of y such that $\Gamma^{y+\varepsilon} \neq \Gamma^y$ for all $\varepsilon > 0$.

The lower numbering passes well to a subgroup, and the upper numbering to a quotient. To be precise: let L be a finite Galois extension of K containing E . Let $G = \text{Gal}(L/K)$ and $H = \text{Gal}(L/E)$, so $\Gamma \simeq G/H$. Then

$$(1.2) \quad H_x = H \cap G_x \quad \text{for all } x \geq 0.$$

$$(1.3) \quad \Gamma^y = G^y H / H \quad \text{for all } y \geq 0.$$

$$(1.4) \quad \phi_{L/K} = \phi_{E/K} \circ \phi_{L/E}$$

Using (1.3) we may define an upper filtration on the Galois group of an infinite Galois extension L/K by setting:

$$\text{Gal}(L/K)^y = \{ \sigma \in \text{Gal}(L/K) : \text{for all subfields } E \text{ of finite degree over } K, \sigma \in \Gamma_{E/K}^y \text{Gal}(L/E) \}.$$

We say y is a break in this filtration if it occurs as a break in some finite quotient. Then every non-negative rational number occurs as a break in

$\text{Gal}(\overline{K}_S/K)$; on the other hand, when $\text{Gal}(L/K)$ is a p-adic Lie group, the breaks form a discrete subset of the reals [7], [11]. If L is the maximal abelian extension of K , the breaks occur exactly at the non-negative integers.

We now show how to calculate the upper breaks in $\Gamma_{E/K}$ when E is given as the root field of a separable Eisenstein polynomial. By (1.3) these breaks will also occur in the filtration of the Galois group of the normal closure of E .

Lemma 1.5 (Tate)

Assume $E = K(\beta)$, where β satisfies the separable equation:

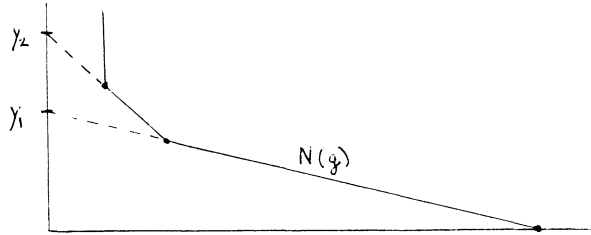
$$f(x) = x^e + a_{e-1}x^{e-1} + \dots + a_0 \text{ with } a_i \in K, \ v_K(a_i) \geq 1, \text{ and } v_K(a_0) = 1.$$

Let $g(x)$ be the polynomial:

$$g(x) = \left(\frac{1}{\beta}\right)^e f(\beta x + \beta) = x^e + b_{e-1}x^{e-1} + \dots + b_1x$$

and let $N(g)$ be its Newton polygon: the convex hull of the points $(i, v_K(b_i))$ in the plane.

Then the upper breaks in the filtration of $\Gamma_{E/K}$ occur at the y-intercepts of the non-trivial sides of $N(g)$.



Proof. The roots of $g(x)$ are the values $a_\sigma = (\beta^\sigma/\beta) - 1$, where σ runs through $\text{Hom}_K(E, \overline{K})$. Thus the distinct rational numbers in the set $S = \{v_K(a_\sigma) : \sigma \neq 1\}$ give the lower breaks of Γ .

On the other hand, the numbers $-v_K(a_\sigma)$ are precisely the slopes of $N(g)$. Since the non-trivial sides of the polygon satisfy linear equations of the form

$$y + \lambda x = \phi_{E/K}(e \cdot \lambda)$$

we see that the y-intercepts give the upper breaks.

Corollary 1.6

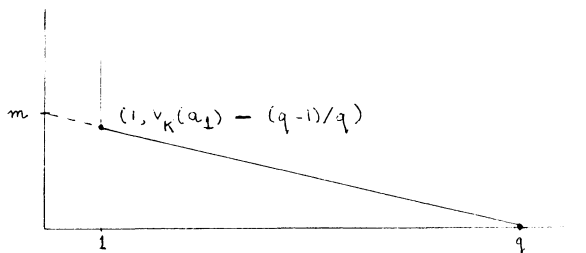
Suppose $\text{char}(K) = p$ and $E = K(\beta)$ is a separable extension of degree
 $q = p^f$, where β satisfies $f(x)$ as in 1.5.

1) If $v_K(a_i) \geq v_K(a_1)$ for all $i \geq 1$ then $a_1 \neq 0$ and the upper and
lower filtrations of $\Gamma_{E/K}$ have a unique break at the point

$$m = (qv_K(a_1)/q-1) - 1.$$

2) If E/K is Galois then $q-1$ divides $v_K(a_1)$ and $\text{Gal}(E/K) \cong \mathbb{F}_q^+$.

Proof. 1) The coefficient a_1 is non-zero as $f(x)$ is assumed separable. If we graph the Newton polygon of $g(x)$ as in (1.5) we find it has but one slope:



The y-intercept is at $(qv_K(a_1)/q-1) - 1$, which is the only upper break. By (1.1) it is also the only lower break.

2) If E/K is Galois the lower break must be integral. As there is only one break point and this point is positive, $\text{Gal}(E/K)$ is an elementary abelian p -group [8].

§2. P-divisible groups and Galois representations

Let K be a field, and G a p -divisible group over K of height h . If $p \neq \text{char}(K)$ then G is étale and is completely determined by its Tate module:

$$(2.1) \quad T(G) = \text{Hom}_{\bar{K}}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, G).$$

This module is free of rank h over $\mathbb{Z}_p = \text{End}_K(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ and admits a left action of $\mathcal{G} = \text{Aut}_K(\bar{K})$ which is continuous and $\mathbb{Z}_p$ -linear:

$$(2.2) \quad \rho : \mathcal{G} \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(T(G)) \cong \text{GL}(h, \mathbb{Z}_p).$$

The functor $G \longmapsto T(G)$ from étale groups to Galois modules is fully faithful [9], [10].

When $p = \text{char}(K)$ the situation is more complicated as G need not be étale. The Tate module, as defined in (2.1), can only give information on the maximal étale quotient of G . To construct a more sensitive functor into the category of p -adic Galois modules, we need a larger supply of initial objects (like $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$).

These objects are furnished by Dieudonné theory. For any reduced rational number $\lambda = r/s$ in the interval $[0,1]$ there is a canonical p -divisible group G_λ defined over $\mathbb{F}_p$ of dimension r and height s . The group G_λ is specified by its Dieudonné module:

$$D(G_\lambda) = \mathbb{Z}_p[F, V] / (F^{s-r} = V^r, FV = VF = p) .$$

All endomorphisms of G_λ are defined over $\mathbb{F}_{p^s}$, and

$$\text{End}_{\mathbb{F}_{p^s}}(G_\lambda) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \simeq D_\lambda ,$$

where D_λ is the central division algebra over $\mathbb{Q}_p$ with invariant $\lambda \pmod{\mathbb{Z}}$. The central assertion of the classical theory is that the category of p -divisible groups up to isogeny over $\bar{K}$ is semi-simple and that the groups G_λ represent the distinct simple objects [1]. If G is any group over K we therefore have

$$G \sim \prod_{\lambda} G_{\lambda}^{d_{\lambda}} \quad \text{over } \bar{K} ,$$

where the d_{λ} are integers, almost all zero, determined by G . We can generalize the construction (2.1) by defining

$$(2.3) \quad V^{\lambda}(G) = \text{Hom}_{\bar{K}}(G_{\lambda}, G) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

Then $V^{\lambda}(G)$ is a right module over D_{λ} of dimension d_{λ} , or a left module for the dual algebra D_{λ}° . It admits a continuous left action of G ; when K contains the field $\mathbb{F}_{p^s}$ this action is D_{λ}° -linear:

$$\rho^\lambda : \mathcal{G} \longrightarrow \text{Aut}_{D_\lambda}^\circ(V^\lambda(G)) \simeq \text{GL}(d_\lambda, D_\lambda) .$$

If K contains the algebraic closure of the prime field we can thus define the representation $\rho = \bigoplus_\lambda \rho^\lambda$ on the generalized Tate module $V(G) = \bigoplus_\lambda V^\lambda(G)$.

Now suppose $\mathcal{O}$ is a complete discrete valuation ring, as in the introduction, with quotient field K and residue field k (algebraically closed of characteristic $p > 0$). Let G be a p -divisible group defined over $\mathcal{O}$. The special fibre G_k and the general fibre G_K are groups over a field; therefore

$$(2.5) \quad \begin{aligned} G_k &\sim \prod_\lambda G_\lambda^{c_\lambda} \\ G_K &\sim \prod_\lambda G_\lambda^{d_\lambda} \quad \text{over } \overline{K} , \end{aligned}$$

where we accept the convention that $G_{0/1} = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ and $d_{0/1} = h$ if $\text{char}(K) = 0$. Consider the Galois representation arising from the general fibre:

$$(2.6) \quad \rho : \mathcal{G} \longrightarrow \prod_\lambda \text{GL}(d_\lambda, D_\lambda) .$$

How can we distinguish this from an arbitrary p -adic Galois representation?

First, we can compose ρ with the homomorphism

$$\det = \prod_\lambda \text{Nm}_\lambda : \prod_\lambda \text{GL}(d_\lambda, D_\lambda) \longrightarrow \mathbb{Q}_p^*$$

where Nm_λ is the reduced norm in the algebra $\text{Mat}(d_\lambda, D_\lambda)$ over $\mathbb{Q}_p$. We obtain a p -adic character $\varepsilon = \det(\rho)$ of $\mathcal{G}$.

Theorem 2.7

If $\text{char}(K) = p$ then $\varepsilon = 1$ in $\text{Hom}(\mathcal{G}, \mathbb{Q}_p^*)$.

Proof. The group G gives rise to an F -crystal $E(G)$ over the perfect closure of $\mathcal{O}$ [3]. The special fibre of this crystal is isogenous to the direct sum $\bigoplus_\lambda E_\lambda^{c_\lambda}$, where $E_{r/s} = \mathbb{Z}_p[F]/(F^s = p^r)$. Over $\overline{K}$ the general fibre is isogenous

to $\oplus_{\lambda}^{d_{\lambda}} E_{\lambda}$; over K^{perf} . it is isogenous to this crystal, twisted by the representation ρ .

The category of F-crystals has an exterior power operation which commutes with fibre products. If G has height h we find

$$(\bigwedge^h E(G))_k \sim E_{\dim(G)/1}$$

$$(\bigwedge^h E(G))_K \sim E_{\dim(G)/1} \quad \text{over } \bar{K} .$$

Over K^{perf} . the general fibre of $\bigwedge^h E(G)$ is isogenous to $E_{\dim(G)/1}$ twisted by the character $\epsilon = \det(\rho)$. But the F-crystal $E_{\dim(G)/1}$ has only the trivial lifting from k to $\mathcal{O}$ [3]. As $\bigwedge^h E(G)$ is such a lifting, its general fibre is isomorphic to its special fibre and $\epsilon = 1$.

Notes: 1) Suppose G has height h over $\mathcal{O}$ and its general fibre decomposes as in (2.5); then $\sum d_{\lambda} s_{\lambda} = h$ where $s_{\lambda} = \text{denom}(\lambda)$. If C is the completion of the maximal unramified extension of $\mathbb{Q}_p$ (which splits all the algebras D_{λ}) , we have an embedding

$$\prod_{\lambda} GL(d_{\lambda}, D_{\lambda}) \hookrightarrow GL(h, C) .$$

Now let U be the open set $\text{Spec } \mathcal{O} - \text{Spec } k$, so $\mathcal{G} = \pi_1(U)$. Then (2.6) gives us a "monodromy representation"

$$(2.8) \quad \rho : \pi_1(U) \longrightarrow GL(h, C) .$$

In the geometric case when K has characteristic p , Theorem 2.7 asserts that the monodromy representation factors through $SL(h, C)$.

2) Theorem 2.7 may be formulated for K of arbitrary characteristic. Let χ be the cyclotomic character giving the action of $\mathcal{G}$ on p -power roots of unity in $\bar{K}$. Then

$$(2.9) \quad \epsilon = \chi^{\dim(G)} \quad \text{in } \text{Hom}(\mathcal{G}, \mathbb{Q}_p^*) .$$

For K of characteristic zero this is due to Raynaud [6]; for K of characteristic p it is a restatement of (2.7) .

§3. Formal A-modules of dimension 1 .

Let G be a connected p -divisible group of dimension 1 over $\mathcal{O}$. Then G can be identified with a formal group on one parameter, and we can make the representation ρ of (2.6) more explicit by using Lazard's one-dimensional theory. When G has additional endomorphisms it is convenient to analyse this situation using the language of formal A-modules [2] [4].

Let A be the ring of integers in a finite extension F of $\mathbb{Q}_p$, let π be a prime of A and $q = \text{Card}(A/\pi A)$. Suppose R is a ring over A and $\gamma : A \longrightarrow R$ is the natural morphism. Then a formal A-module of dimension n over R is a pair $G = (\hat{G}, i)$, where $\hat{G}$ is a formal group of dimension n over R and $i : A \longrightarrow \text{End}_R(\hat{G})$ is an injective ring homomorphism such that $i(a)$ induces multiplication by $\gamma(a)$ on $\text{Lie}(\hat{G})$. We write $[a]_G$ for the element $i(a)$ in $\text{End}_R(\hat{G})$. If G and H are two formal A-modules over R , we define

$$\text{Hom}_R(G, H) = \{ \phi \in \text{Hom}_R(\hat{G}, \hat{H}) : \phi \circ [a]_G = [a]_H \circ \phi \quad \text{all } a \in A \} .$$

We shall henceforth only consider formal A-modules and formal groups of dimension one.

It is quite easy to describe the category of formal A-modules over a field K of characteristic p ; if $A = \mathbb{Z}_p$ this is equivalent to the category of formal groups. Choosing a model for $\hat{G}$ over K we have

$$[\pi]_G(x) = f(x^q)^h$$

where $f(x)$ is a power series over K with $f'(0) \neq 0$, and h is a strictly positive integer, the height of G . (The height of $\hat{G}$, as a formal group, is then $h \cdot [A:\mathbb{Z}_p]$, and we shall assume the height is finite.) If K is separably closed there is one isomorphism class of formal A-modules for each finite height.

As a representative, we can take the formal A-module $G_{1/h}$, which is defined over $A/\pi A$ and characterized by

$$(3.1) \quad [\pi]_{G_{1/h}}(x) = x^{q^h}.$$

This formal A-module achieves all of its endomorphisms over the field $\mathbb{F}_q$; there we have

$$\text{End}_{\mathbb{F}_q}(G_{1/h}) = B_{1/h}$$

where $B_{1/h}$ is the maximal order in the central division algebra over $F = A \otimes \mathbb{Q}_p$ with invariant $1/h \pmod{\mathbb{Z}}$. When K is not separably closed G is classified over K by its height and a representation

$$\rho : \text{Gal}(\bar{K}_S/K) \longrightarrow B_{1/h}^*$$

as in §2.

We can now apply this to formal A-modules G over $\mathcal{O}$ whose special fibre is isomorphic to $G_{1/h}$ over k . Let $G_{0/1}$ denote the constant étale A-module F/A . When $\text{char}(K) = 0$ we have $G_K \simeq_{\bar{K}} (G_{0/1})^h$. When $\text{char}(K) = p$ the general fibre of G must also have dimension 1, therefore

$$G_K \simeq_{\bar{K}} G_{1/g} \times (G_{0/1})^d$$

where $1 \leq g \leq h$ and $g + d = h$. Define the Tate modules

$$(3.2) \quad \begin{aligned} T^{1/g}(G) &= \text{Hom}_{\bar{K}}(G_{1/g}, G_K) && \text{of rank } 1 \text{ over } B_{1/g} \\ T^{0/1}(G) &= \text{Hom}_{\bar{K}}(G_{0/1}, G_K) && \text{of rank } d \text{ over } A. \end{aligned}$$

These afford Galois representations:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \rho^{1/g} : \mathcal{G} &\longrightarrow B_{1/g}^* = B^* \\ \rho^{0/1} : \mathcal{G} &\longrightarrow \text{GL}(d, A) \end{aligned}$$

as in (2.4). We shall restrict our study to the equicharacteristic case ($g \geq 1$), as the ramification of $\rho^{0/1}$ when $\text{char}(K) = 0$ is well-known [7].

Choosing a model for $\hat{G}$ over $\mathcal{O}$ we have

$$(3.4) \quad [\pi]_G(x) = f(x^{q^g})$$

where $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots$ has coefficients in $\mathcal{O}$ and $a_1 \neq 0$. If we insist on a model lifting the standard model of $G_{1/h}$, then all the a_i lie in the maximal ideal except for $a_{\frac{d}{q}}$. The integer $e = v_K(a_1)$ is independent of the model chosen; it is zero if and only if $d = 0$. In that case the representation $\rho = \rho^{1/g} \oplus \rho^{0/1}$ is trivial [5]. The simplest nontrivial case is when $d = e = 1$; here we have complete results.

Theorem 3.5

Let G be a formal A -module of dimension 1 and height $h = g + d$ over $\mathcal{O}$.
Assume $d = e = 1$ and for $n \geq 0$ define the rational numbers

$$a(n) = \frac{q^h - 1}{(q^g - 1)(q^d - 1)} (q^{n-1})$$

- 1) a) The representation $\rho^{1/g} : \mathcal{G} \rightarrow B^*$ is surjective, so B^* inherits an upper ramification filtration.
 b) The upper breaks in this filtration are precisely at the points $a(n)$, $n \geq 0$ (or $n \geq 1$ if $q^g = 2$).
 c) For $n \geq 1$ $(B^*)^{a(n)} = 1 + \pi_B^n$, where π_B is a prime of B .
- 2) a) The representation $\rho^{0/1} : \mathcal{G} \rightarrow A^*$ is surjective, so A^* inherits an upper ramification filtration.
 b) The upper breaks in this filtration are precisely at the points $a(gn)$, $n \geq 0$ (or $n \geq 1$ if $q = 2$).
 c) For $n \geq 1$ $(A^*)^{a(gn)} = 1 + \pi_A^n$.

We will prove this result in the following section. First we shall make a few remarks on its contents and provide a concrete example.

Example: Let E be the elliptic curve over $\hat{O} = \overline{\mathbb{F}}_2[[t]]$ with plane equation

$$y^2 + txy + y = x^3$$

and origin at the inflection point $(x,y) = (0,0)$. Then E_K is ordinary, but E_K is supersingular. The formal group $\hat{E}$ associated to this model, using x as a local parameter at the origin, gives a formal A -module G with $A = \mathbb{Z}_2$ and

$$[-2]_G(x) = tx^2 + (1+t^3)x^4 + \dots + (t^{2n-4} + t^{2n-1})x^{2n} + \dots$$

Thus $h = 2$ and $g = d = e = 1$. Applying (3.5) we see the upper breaks in $\rho^{0/1}(\mathcal{G}) = A^*$ occur at the points $a(gn) = 3(2^n - 1)$, and $(A^*)^{3(2^n - 1)} = 1 + 2^n A$ for $n \geq 1$. These are the breaks in the separable quotient of the 2-division field of E_K .

Notes: 1) The breaks in the upper filtration of $\rho^{1/g}(\mathcal{G})$ are integral if and only if $g = 1$, i.e. if and only if $B_{1/g}^*$ is abelian.

2) Since $(\pi_B)^g = (\pi_A)$ in $B_{1/g}$, we find

$$(B^*)^{a(gn)} = 1 + \pi_A^n B \quad \text{for } n \geq 1$$

and the function $a(gn)$ relates the ramification filtration to the π_A -filtration in both $\rho^{0/1}$ and $\rho^{1/g}$. Let H^* denote the elements in $B^* \times A^*$ whose reduced norm down to A^* is 1, and H_n the elements of H^* congruent to 1 (mod π_A^n). I suspect that $\rho = \rho^{1/g} \oplus \rho^{0/1}$ maps $\mathcal{G}$ surjectively onto H^* and that for $n \geq 1$,

$$(H^*)^{a(gn)} = H_n.$$

Theorem 2.7, combined with (3.5), shows that this holds at least when $A = \mathbb{Z}_p$.

3) When $d = 1$ but $e > 1$ we can prove a slightly weaker result. Let e_s be the separable degree of K over $L = k((a_1))$. Then there are positive constants c and N such that, for all $n > N$,

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \rho^{1/g}(\mathcal{G})^{e_s a(n)+c} &\subseteq 1 + \pi_B^n \subseteq \rho^{1/g}(\mathcal{G})^{e_s a(n)-c} \\ \rho^{0/1}(\mathcal{G})^{e_s a(gn)+c} &\subseteq 1 + \pi_A^n \subseteq \rho^{0/1}(\mathcal{G})^{e_s a(gn)-c} . \end{aligned}$$

Indeed, by Drinfeld's moduli theory [2], we can find a model for G over $k[[a_1]]$ where we can apply (3.5) . Then (3.6) follows from a comparison of the upper numbering on $\text{Gal}(\overline{L}_s/L)$ with that on its subgroup $\mathcal{G} = \text{Gal}(\overline{K}_s/K)$ of index e_s .

Thus the breaks in the π_A -filtration of $\rho(\mathcal{G})$ occur near the upper breaks $e_s \cdot a(gn)$. The breaks in the p -saturated filtration therefore occur near the upper breaks $e_s \cdot a(g \cdot e_F \cdot n)$, where $F = A \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p$ and $e_F = v_F(p)$. This result bears an eerie formal relation to a theorem of Sen in characteristic zero. By definition

$$\begin{aligned} e_s a(g e_F n) &= e_s \frac{(q^h - 1)}{(q^g - 1)(q^d - 1)} (q^{g e_F n} - 1) \\ &= e_s \frac{q^h - 1}{q^d - 1} (1 + q^g + q^{2g} + \dots + q^{(e_F n - 1)g}) . \end{aligned}$$

When $\mathcal{O}$ has mixed characteristic, $g = 0$, $d = h$, and $e_s = v_K(\pi_A)$. Thus, arguing purely formally, we might expect that in this case the breaks in the p -saturated filtration of $\rho(\mathcal{G})$ would be near the upper breaks $e_s e_F n = e_K n$. But this is precisely Sen's result [7] : is there a general theory which can obtain both results simultaneously?

4) When $d > 1$ the situation becomes more complicated. It seems that the upper breaks in $\rho(\mathcal{G})$ are determined by the valuations of the d moduli that classify the lifting of G over $G_{1/h}$ [2], [5]. When $d = 1$, a_1 is the unique modulus of the lifting; it might be interesting to study maximal 1-dimensional families in general.

§4. The proof of Theorem 3.5

To prove part 1) we start with the representation

$$\rho^{1/g} : \mathcal{G} \longrightarrow B^* .$$

Recall that the prime π_B gives a filtration on the image:

$$B^* \supseteq 1 + \pi_B B \supset 1 + \pi_B^2 B \supset \dots$$

with successive quotients:

$$B^* / 1 + \pi_B B \simeq \mathbb{F}_q^*$$

$$1 + \pi_B^n B / 1 + \pi_B^{n+1} B \simeq \mathbb{F}_q^+ \quad \text{for } n \geq 1 .$$

For $n \geq 0$ let H_n be the kernel of the composed homomorphism:

$$\rho_n : \mathcal{G} \longrightarrow B^* \longrightarrow (B^* / 1 + \pi_B^{n+1} B) \simeq (B / \pi_B^{n+1} B)^* ,$$

and let K_n be the fixed field of H_n in $\overline{K}_S$. Then $(\mathcal{G}/H_n) \simeq \text{Gal}(K_n/K)$ and we have a tower of fields:

$$\begin{array}{c} \overline{K}_S, \dots, K_1 \\ | \\ K_0 \\ | \\ K = K_{-1} \end{array}$$

If we choose an isomorphism of formal A -modules over $\overline{K}_S$:

$$\phi : G \longrightarrow G_{1/g}$$

we have, for $\sigma \in \mathcal{G}$,

$$\rho^{1/g}(\sigma) = \phi \circ \phi^{-\sigma} \in \text{Aut}(G_{1/g}) \simeq B^* .$$

Choosing models for G and $G_{1/g}$ over $\mathcal{O}$, we may write ϕ as a power series:

$$\phi(x) = k_1 x + k_2 x^2 + \dots$$

with coefficients in $\overline{K}_S$. Similarly, we have the power series over $\mathcal{O}$:

$$[\pi]_G(x) = a_1 x^{q^g} + a_2 x^{2q^g} + \dots$$

$$[\pi]_{G_{1/g}}(x) = x^{q^g}.$$

Since ϕ is an isomorphism of formal A -modules, these series satisfy:

$$(4.1) \quad \phi \circ [\pi]_G(x) = [\pi]_{G_{1/g}} \circ \phi(x) = \phi^{q^g}(x^{q^g}).$$

Lemma 4.2

- 1) The coefficients k_j in $\phi(x)$ are integral in $\overline{K}_S$.
- 2) One has $k_j \in K_{n-1}$ for all $j < q^n$, and $K_n = K_{n-1}(k_{q^n})$.

Proof. The integrality of the k_j follows from the identity (4.1), which may be used to define them successively. Since $\sigma \in H_0$ if and only if $k_1^\sigma = k_1$, we have $K_0 = K(k_1)$. But for $\sigma \in H_0$:

$$\phi \circ \phi^{-\sigma}(x) = x + kx^{q^m} + \dots;$$

furthermore, $\sigma \in H_n$ if and only if $m > n$. This gives part 2).

Lemma 4.3

Assume that $d = e = 1$. Then for $n \geq 0$,

- 1) ρ_n induces an isomorphism $\text{Gal}(K_n/K) \simeq (B/\pi_B^{n+1}B)^*$.
- 2) k_{q^n} is a uniformizing parameter of K_n .
- 3) $\text{Gal}(K_n/K_{n-1})$ has a unique upper and lower break at the point $m = q^{hn} - 1$.
- 4) The lower filtration of $G = \text{Gal}(K_n/K)$ is given by:

$$\begin{aligned}
 G_0 &= G \\
 G_x &= \text{Gal}(K_n/K_0) & \text{for } 0 < x \leq q^h - 1 \\
 G_x &= \text{Gal}(K_n/K_1) & \text{for } q^h - 1 < x \leq q^{2h} - 1 \\
 &\vdots \\
 G_x &= \text{Gal}(K_n/K_{n-1}) & \text{for } q^{(n-1)h} - 1 < x \leq q^{nh} - 1 \\
 G_x &= (1) & \text{for } q^{nh} - 1 < x .
 \end{aligned}$$

5) The upper filtration of $G = \text{Gal}(K_n/K)$ is given by:

$$\begin{aligned}
 G^0 &= G \\
 G^x &= \text{Gal}(K_n/K_0) & \text{for } 0 < x \leq a(1) \\
 G^x &= \text{Gal}(K_n/K_1) & \text{for } a(1) < x \leq a(2) \\
 &\vdots \\
 G^x &= \text{Gal}(K_n/K_{n-1}) & \text{for } a(n-1) < x \leq a(n) \\
 G^x &= (1) & \text{for } a(n) < x ,
 \end{aligned}$$

where $a(1), a(2), \dots, a(n)$ are defined in Theorem 3.5.

Proof. We use an induction on n . For $n = 0$ look at the coefficient of x^{q^g} in the identity (4.1). This gives the equation:

$$k_1 a_1 = k_1^{q^g} .$$

Since $e = v_K(a_1) = 1$, this shows that $K_0 = K(k_1)$ has degree $q^g - 1$ over K and that k_1 is a uniformizing parameter. By counting we see that the injection

$$\rho_0 : \text{Gal}(K_0/K_1) \longrightarrow (B/\pi_B B)^*$$

is an isomorphism. The only upper and lower break is at 0, as K_0 is a tamely ramified extension of K .

Now assume that the lemma holds for K_{n-1}/K . Look at the coefficient of $x^{q^{g+n}}$ in the identity (4.1). This gives the equation:

$$k_1 a_n + \dots + k_{q^{n-1}} a_q^{q^{n-1}} + \dots + k_{q^n} a_1^{q^n} = (k_q)_q^{q^g}.$$

But I claim this is an Eisenstein equation:

$$(4.4) \quad b + a_1^{q^n} y = y^{q^g}$$

for $y = k_q$ over K_{n-1} . It is clear that b is integral, by (4.2). Since G lifts $G_{1/h}$ and $d = 1$, we know $v_K(a_i) \geq 1$ for $i \neq q$. Consequently, $v_{K_{n-1}}(a_i) > 1$ for $i \neq q$ and

$$v_{K_{n-1}}(b) = v_{K_{n-1}}(k_{q^{n-1}} a_q^{q^{n-1}}) = 1$$

by our inductive hypothesis that $k_{q^{n-1}}$ is a uniformizing parameter in K_{n-1} . Therefore $K_n = K_{n-1}(k_q)$ has degree q^g over K_{n-1} and uniformizing parameter k_q . By induction, we know that $[K_{n-1}:K] = (q^{g-1})_q^{q^{g-1}}$; hence the injection

$$\rho_n : \text{Gal}(K_n/K) \longrightarrow (B/\pi_B^{n+1}B)^*$$

is surjective by counting. By applying corollary (1.6) to the equation (4.4) we see that $\text{Gal}(K_n/K_{n-1})$ has a unique upper and lower break at the point:

$$m = v_{K_{n-1}}(a_1^{q^n}) q^{g/q^{g-1}} - 1 = q^{nh} - 1.$$

The calculation of the filtrations on $\text{Gal}(K_n/K)$ is now accomplished using the identity $\phi_{K_n/K} = \phi_{K_{n-1}/K} \circ \phi_{K_n/K_{n-1}}$, the inductive hypothesis, and the fact that

$$\phi_{K_n/K_{n-1}}(x) = x \quad \text{for } x \leq q^{nh} - 1.$$

This lemma yields part 1) of Theorem 3.5 as an immediate corollary. Given an adequate theory of π -divisible A -modules, we can see how part 2) of this Theorem would follow formally from part 1). We can define the character:

$$\epsilon_A = \det_A(\rho) : \mathcal{G} \longrightarrow A^*$$

where $\det_A : B_{1/g}^* \times GL(d, A) \longrightarrow A^*$ is the reduced norm in the category of F-algebras. In analogy with (2.7) one would expect:

$$(4.5) \quad \epsilon_A \stackrel{?}{=} 1 \quad \text{in } \text{Hom}(\mathcal{G}, A^*) .$$

When $d = 1$ this would imply:

$$(4.6) \quad \rho_{0/1} \stackrel{?}{=} (\text{Nm}_{1/g} \circ \rho_{1/g})^{-1} ,$$

from which we could easily derive its ramification filtration. Since the full theory of "A-crystals" is not available to prove (4.5), we shall prove part 2) independently, and check that the results are consistent with (4.6).

First we must identify the representation

$$\rho_{0/1} : \mathcal{G} \longrightarrow GL(d, A) = M^*$$

where $M = \text{Mat}(d, A)$. We appropriate our previous notation: for $n \geq 0$ let H_n be the kernel of the composed homomorphism:

$$\rho_n : \mathcal{G} \longrightarrow M^* \longrightarrow M^* / 1 + \pi^{n+1} M \simeq (M / \pi^{n+1} M)^*$$

and let K_n be the fixed field of H_n in $\bar{K}_S$.

If $\bar{m} = \{x \in \bar{K} : v_K(x) > 0\}$, then the set of points of G in $\bar{m}$ give a genuine A-module $G(\bar{m})$. Let $G(\bar{m})_{\pi^{n+1}}$ be the finite submodule of π^{n+1} -torsion. This module is free of rank d over $A / \pi^{n+1} A$ and is stable under the action of $\mathcal{G}$. The resulting representation:

$$\mathcal{G} \longrightarrow \text{Aut}_{A / \pi^{n+1} A} (G(\bar{m})_{\pi^{n+1}}) \simeq (M / \pi^{n+1} M)^*$$

may be identified with ρ_n . Consequently, K_n is just the separable subfield of the field of π^{n+1} -division points.

Lemma 4.14

Assume that $d = e = 1$. Then for $n \geq 0$,

- 1) ρ_n induces an isomorphism $\text{Gal}(K_n/K) \simeq (A/\pi^{n+1}A)^*$.
- 2) If $\alpha_n \in G(\overline{m})_{\pi^{n+1}}$ and $[\pi^n]_G(\alpha) \neq 0$, then $\beta_n = \alpha_n^{q^{g(n+1)}}$ is a
uniformizing parameter in K_n .
- 3) $\text{Gal}(K_n/K_{n-1})$ has a unique upper and lower break at the point
 $m = q^{hn} - 1$.
- 4) The lower filtration of $G = \text{Gal}(K_n/K)$ is given by:

$$\begin{aligned}
 G_0 &= G \\
 G_x &= \text{Gal}(K_n/K_0) & \text{for } 0 < x \leq q^h - 1 \\
 G_x &= \text{Gal}(K_n/K_1) & \text{for } q^h - 1 < x \leq q^{2h} - 1 \\
 &\vdots \\
 G_x &= \text{Gal}(K_n/K_{n-1}) & \text{for } q^{(n-1)h} - 1 < x \leq q^{nh} - 1 \\
 G_x &= (1) & \text{for } q^{nh} - 1 < x.
 \end{aligned}$$

- 5: The upper filtration of $G = \text{Gal}(K_n/K)$ is given by:

$$\begin{aligned}
 G^0 &= G \\
 G^x &= \text{Gal}(K_n/K_0) & \text{for } 0 < x \leq a(g) \\
 G^x &= \text{Gal}(K_n/K_1) & \text{for } a(g) < x \leq a(2g) \\
 &\vdots \\
 G^x &= \text{Gal}(K_n/K_{n-1}) & \text{for } a(g(n-1)) < x \leq a(gn) \\
 G^x &= (1) & \text{for } a(gn) < x,
 \end{aligned}$$

where $a(g), a(2g), \dots, a(ng)$ are defined in Theorem 3.5.

Proof. We use an induction on n . For $n = 0$ the extension K_0 is generated by the non-zero roots of the polynomial $f(x)$, where

$$[\pi]_G(x) = f(x^{q^g}).$$

Since $d = e = 1$ each non-zero root β_0 has K -valuation $1/(q-1)$. Consequently the injection:

$$\rho_0 : \text{Gal}(K_0/K) \longrightarrow (A/\pi A)^*$$

is an isomorphism, and β_0 is a uniformizing element. The break sequence is obvious as K_0 is tamely ramified over K .

Now assume the result holds for the layer K_{n-1}/K . Let α_n be an element in $G(\overline{m})_{\pi^{n+1}}$ not killed by π^n , and put

$$\alpha_{n-1} = [\pi]_G(\alpha_n) = f(\alpha_n^{q^g}) .$$

Raising this identity to the q^{ng} power, we obtain:

$$\beta_{n-1} = \alpha_{n-1}^{q^{ng}} = f^{q^{ng}}(\alpha_n^{q^{(n+1)g}}) = f^{q^{ng}}(\beta_n) .$$

By our induction hypothesis, β_{n-1} is a uniformizing parameter in K_{n-1} .

Applying the Weierstrass preparation theorem to the power series

$$f^{q^{ng}}(x) = a_1^{q^{ng}} x + a_2^{q^{ng}} x^2 + \dots + a_q^{q^{ng}} x^q + \dots$$

we see that β_n satisfies an Eisenstein polynomial over K_{n-1} :

$$g(x) = x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

with

$$v_{K_{n-1}}(b_0) = 1 \quad v_{K_{n-1}}(b_i) \geq v_{K_{n-1}}(b_1) .$$

We may therefore apply corollary (1.6) to conclude that $K_{n-1}(\beta_n)$ has degree q over K_{n-1} and a unique upper break at the point

$$m = qv_{K_{n-1}}(b_1)/(q-1) - 1 = q^{nh} - 1 ,$$

as

$$v_{K_{n-1}}(b_1) = v_{K_{n-1}}(a_1^{q^{ng}}) = q^{ng}(q-1)q^{n-1} .$$

Clearly β_n is a uniformizing parameter in $K_{n-1}(\beta_n)$; counting degrees shows that $K_n = K_{n-1}(\beta_n)$ and that the injection

$$\rho_n : \text{Gal}(K_n/K) \longrightarrow (A/\pi A)^*$$

is an isomorphism. One can now calculate the entire break sequence using the induction hypothesis and the identity

$$\phi_{K_n/K} = \phi_{K_{n-1}/K} \circ \phi_{K_n/K_{n-1}}.$$

This lemma immediately yields part 2) of Theorem 3.5 as a corollary. It is easy to check that parts 1) and 2) are consistent with (4.6) using the identities:

$$\begin{aligned} \text{Nm}_A(1 + \pi_B^{g_n} B) &= 1 + \pi_A^n A \\ \text{Nm}_A(1 + \pi_B^{g_{n+1}} B) &= 1 + \pi_A^{n+1} A. \end{aligned}$$

-:-:-

Bibliography.

1. Demazure, M. Lectures on p-divisible groups. Lecture notes in mathematics No. 302, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
2. Drinfel'd, V. G. Elliptic modules. (Russian) Math. Sbornik, 94, 1974; English translation: Math. USSR-Sb., 23, 1976.
3. Grothendieck, A. Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné. Séminaire de mathématiques supérieures No. 45, Beaverton, Oregon, 1974.
4. Lubin, J. Formal A-modules defined over A. Symposia math. inst. naz. di alta matematica, 1970.
5. Lubin, J. and Tate, J. Formal moduli for one-parameter formal Lie groups. Bull. soc. math. France (1), 94, 1966.
6. Raynaud, M. Schémas en groupes de type (p,...,p). Bull. soc. math. France, 102, 1974.
7. Sen, S. Ramification in p-adic Lie extensions. Invent. math. (1), 17, 1972.
8. Serre, J.-P. Corps locaux. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, Actualités Sci. Indust. No. 1296, Hermann, Paris, 1962.
9. Serre, J.-P. Groupes p-divisibles(d'après J. Tate). Séminaire Bourbaki No. 318, 1966/67.

B. GROSS

10. Tate, J. p -divisible groups. Proc. conf. on local fields, Springer, Berlin, 1967.
11. Wintenberger, J.-P. Automorphismes et extensions galoisiennes de corps locaux. Thesis, Grenoble, 1978.

--:--:--

Benedict H. GROSS
Department of Mathematics
Princeton University
Princeton, NJ 08540
U.S.A.

Astérisque

GUY LAFFAILLE

Construction de groupes p -divisibles

Astérisque, tome 65 (1979), p. 103-123

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__65__103_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTION DE GROUPES p -DIVISIBLES

Le cas de dimension 1 .

par

Guy LAFFAILLE

0. - INTRODUCTION.

Soit A l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans un corps algébriquement clos k de caractéristique $p \neq 0$. Soit K le corps des fractions de A . Soient K' une extension finie de K de degré e et A' l'anneau des entiers de K' .

Soient G un groupe p -divisible sur A' et M le module de Dieudonné de sa fibre spéciale. Grothendieck [5] , [6] et Messing [9] associent à G un couple $(\mathfrak{L}, \mathcal{M})$ où $\mathcal{M} = K \otimes_A M$ et où $\mathfrak{L}$ est le K' -espace vectoriel des logarithmes, avec une injection K' -linéaire de $\mathfrak{L}$ dans $K' \otimes_K \mathcal{M}$. Ils obtiennent ainsi un foncteur $LM_{K'}$, contravariant, additif et pleinement fidèle de la catégorie des groupes p -divisibles, à isogénie près, sur A' dans une catégorie de couples (voir aussi [3] , p. 221).

Grothendieck a posé la question de savoir quelle est l'image essentielle de $LM_{K'}$, et Fontaine a conjecturé que celle-ci est la catégorie des K' -couples faiblement admissibles définis au n° 1.3 ci-après (voir aussi [4]).

Nous démontrons cette conjecture en dimension 1 : les K' -couples faiblement admissibles $(\mathfrak{L}, \mathcal{M})$ tels que $\dim_K \mathfrak{L} = 1$ proviennent de groupes p -divisibles de dimension 1. La démonstration utilise d'une part un procédé de réduction au cas simple (th.1.8 et cor. 1.12) et d'autre part les formules explicites de Hazewinkel ([7], § 15.2).

Nous obtenons le résultat suivant (cf. prop. 2.4 et 2.7) : soit h un entier ≥ 1 . Posons $\ell_h(X) = \sum_{n=0}^{\infty} X^{p^{nh}}/p^n$ et soit v la valuation de K' normalisée par $v(p) = 1$. Alors quels que soient les éléments b_i de K' , avec $1 \leq i \leq h-1$, tels que $v(b_i) \geq -i/h$, la série formelle $\ell(X) = \ell_h(X) + \sum_{i=1}^{h-1} b_i \ell_h(X^{p^i})$ est le logarithme d'un groupe p -divisible de hauteur h défini sur A' . En outre, tout groupe p -divisible connexe de dimension 1 et de hauteur h défini sur A' est isogène à un (mais pas un seul) groupe dont le logarithme a la forme ci-dessus.

Remarques.

1. Des calculs assez longs permettent de montrer que tout K' -couple faiblement admissible $(\mathfrak{L}, \mathcal{M})$ tel que $\dim_K \mathcal{M} \leq 4$ est l'image d'un groupe p -divisible défini sur A' .

2. Lorsque $e \leq p-1$, on connaît déjà une autre description de l'image essentielle de $LM_{K'}$ (Messing [9] et Fontaine [3]) ; nous montrerons ailleurs que cette description entraîne que la conjecture de Fontaine est vraie dans ce cas.

1. - LA CATÉGORIE DES K' -COUPLES FAIBLEMENT ADMISSIBLES.

1.1. On note π une uniformisante de A' et σ le Frobenius absolu sur k et K .

Un F-iso-cristal est un espace vectoriel de dimension finie sur K

muni d'un automorphisme σ -semi-linéaire F .

On appelle K' -couple la donnée d'un couple $(\mathfrak{L}, \mathcal{M})$ formé :

- d'une part, d'un F -iso-cristal $\mathcal{M}$ contenant un réseau M de $\mathcal{M}$ (i.e. un sous- A -module libre de $\mathcal{M}$ tel que $K \otimes_A M$ s'identifie à $\mathcal{M}$) tel que $pM \subset FM \subset M$;
- d'autre part, d'un sous- K' -espace vectoriel $\mathfrak{L}$ de $\mathcal{M}_{K'} = K' \otimes_K \mathcal{M}$.

Un morphisme de K' -couples est une application K -linéaire $u : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ qui commute à l'action de F telle que, si $u_{K'} = \text{id}_{K'} \otimes u$, on ait $u_{K'}(\mathfrak{L}) \subset \mathfrak{L}'$.

Soit $K_\sigma[F]$ (resp. $A_\sigma[F]$) l'anneau non commutatif engendré par K (resp. A) et une indéterminée F avec les relations $F\lambda = \sigma(\lambda)F$ pour tout $\lambda \in K$ (resp. $\lambda \in A$). Si $\mathcal{M}$ est un F -iso-cristal, $\mathcal{M}$ est muni d'une structure de $K_\sigma[F]$ -module à gauche, et si M est un réseau de $\mathcal{M}$ stable par F , alors M est muni d'une structure de $A_\sigma[F]$ -module à gauche.

On sait depuis Dieudonné [2] et Manin ([8] II §4.1) que la catégorie des F -iso-cristaux est semi-simple. Si $\mathcal{M}$ est un F -iso-cristal, on a une décomposition en composantes isotypiques $\mathcal{M} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Q}} \mathcal{M}_\alpha$, où $\mathcal{M}_\alpha$ est le sous- K -espace vectoriel de $\mathcal{M}$ engendré par les x tels que $F^s x = p^r x$ si $\alpha = r/s$, avec r et s entiers premiers entre eux et $s \geq 1$. Les α tels que $\mathcal{M}_\alpha \neq 0$ sont les pentes de $\mathcal{M}$. Un objet simple de pente $\alpha = r/s$ est isomorphe à $K_\sigma[F]/(F^s - p^r)$, sa dimension sur K est donc égale à s (cf. aussi [1]).

Manin montre aussi (loc. cit.) qu'un F -iso-cristal $\mathcal{M}$ contient un réseau M tel que $pM \subset FM \subset M$ si et seulement si les pentes de $\mathcal{M}$ sont telles que $0 \leq \alpha \leq 1$.

Si $\mathcal{M}$ est un F -iso-cristal, on pose $d_{\mathcal{M}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} \alpha \dim_K(\mathcal{M}_\alpha)$. Si $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de F -iso-cristaux, il est

clair que $d_{\mathcal{M}} = d_{\mathcal{M}'} + d_{\mathcal{M}''}$.

1.2. PROPOSITION. - Soit $\mathcal{M}$ un F-iso-cristal dont les pentes sont ≥ 0 et soit M un réseau de $\mathcal{M}$ stable par F . La longueur du A-module M/FM est égale à $d_{\mathcal{M}}$; en particulier elle ne dépend pas du choix de M .

Démonstration : Montrons d'abord que la longueur de M/FM ne dépend pas du choix de M . Soit N un autre réseau de $\mathcal{M}$ stable par F . Quitte à remplacer N par $p^n N$, pour un entier n convenable, on peut supposer que $N \subset M$. On a alors

$$\lg(M/FN) = \lg(M/N) + \lg(N/FN) = \lg(M/FM) + \lg(FM/FN).$$

L'application F induit par passage aux quotients une bijection σ -semi-linéaire de M/N sur FM/FN , donc ces deux modules ont même longueur et par conséquent $\lg(M/FM) = \lg(N/FN)$.

Il suffit donc pour terminer la démonstration de calculer $\lg(M/FM)$ pour un M particulier. Comme la catégorie des F-iso-cristaux est semi-simple, on peut supposer $\mathcal{M}$ simple de pente $\alpha = r/s$. Soit $x \neq 0$ dans $\mathcal{M}$ tel que $F^s x = p^r x$ et soit M le $A_{\sigma}^+[F]$ -module engendré par x ; alors $(x, Fx, \dots, F^{s-1}x)$ forme une base de M et $\lg(M/FM) = r = s(r/s) = \alpha \dim_K \mathcal{M}_{\alpha}$.

1.3. PROPOSITION. - Soit $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ un K' -couple. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) on a $\dim_{K'} \mathcal{L} = d_{\mathcal{M}}$ et pour tout sous-F-iso-cristal $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$, on a $\dim_{K'} (\mathcal{L} \cap \mathcal{M}'_{K'}) \leq d_{\mathcal{M}'}$;
- (ii) on a $\dim_{K'} \mathcal{L} = d_{\mathcal{M}}$ et pour tout F-iso-cristal quotient $\mathcal{M}''$ de $\mathcal{M}$, la dimension sur K' de l'image de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{M}''_{K'}$ est supérieure ou égale à $d_{\mathcal{M}''}$.

Démonstration . Soit $\mathcal{M}''$ un F-iso-cristal quotient de $\mathcal{M}$ et soit

$\mathcal{M}'$ le noyau de la projection de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}''$. Soit $\mathcal{L}''$ la projection de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{M}'_{K'}$, on a $\dim_{K'} \mathcal{L} = \dim_{K'} (\mathcal{L} \cap \mathcal{M}'_{K'}) + \dim_{K'} \mathcal{L}''$ et $d_{\mathcal{M}} = d_{\mathcal{M}'} + d_{\mathcal{M}''}$, d'où la proposition.

On dit qu'un K' -couple est faiblement admissible s'il vérifie les conditions équivalentes de la proposition précédente.

La catégorie des K' -couples faiblement admissibles forme une sous-catégorie pleine de la catégorie des K' -couples ; c'est une catégorie abélienne [4]. Les objets simples sont caractérisés par le fait que les inégalités de la proposition 1.3 sont strictes pour tout sous- F -iso-cristal propre (ou pour tout quotient propre).

1.4. PROPOSITION. - Soit $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ un K' -couple qui est dans l'image essentielle du foncteur $LM_{K'}$. Alors $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ est faiblement admissible.

Avant de démontrer la proposition, rappelons quelques résultats de [3]. Fontaine y construit un foncteur $M \rightarrow M_{A'}$ de la catégorie des $A'_{\mathcal{O}}[F]$ -modules M , tels que $pM \subset FM \subset M$, dans la catégorie des A' -modules. Il définit un sous- A' -module $M_{A'}[1]$ de $M_{A'}$, tel que $M_{A'}/M_{A'}[1]$ soit fonctoriellement isomorphe à M/FM en tant que k -espace vectoriel (IV, §2).

Si G est un groupe p -divisible sur A' , Fontaine associe à G un A' -module libre $L_{A'}(G)$ avec une application A' -linéaire $\rho : L_{A'}(G) \rightarrow M_{A'}$ où M est le module de Dieudonné de la fibre spéciale de G . L'application ρ induit un isomorphisme de $L_{A'}(G)/\pi L_{A'}(G)$ sur $M_{A'}/M_{A'}[1] \simeq M/FM$ (IV, prop.4.2).

Si $(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = LM_{K'}(G)$, on a $\mathcal{M}_{K'} = K' \otimes_K M_K = K' \otimes_{A'} M_{A'}$ et $\mathcal{L}$ est l'image dans $\mathcal{M}_{K'}$ de $K' \otimes_{A'} L_{A'}(G)$.

1.5. Démonstration de la proposition. On reprend les notations de [3]

rappelées ci-dessus.

Soit G un groupe p -divisible sur A' tel que $(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \simeq LM_{K'}(G)$.
Soit M le module de Dieudonné de la fibre spéciale de G .

Des isomorphismes : $L_{A'}(G)/\pi L_{A'}(G) \simeq M_{A'}/M_{A'}[1] \simeq M/FM$, on déduit $\dim_{K'} \mathcal{L} = d_{\mathcal{M}}$ et $M_{A'} = L_{A'}(G) + M_{A'}[1]$.

Soit $\mathcal{M}''$ un quotient de $\mathcal{M}$ et M'' la projection de M sur $\mathcal{M}''$.
Soit $\psi : M_{A'} \rightarrow M_{A'}''$ la flèche déduite par fonctorialité de la projection de M sur M'' . D'après la proposition 2.4 du chapitre IV de [3], l'application ψ est surjective et on a $\psi(M_{A'}[1]) \subset M_{A'}''[1]$. On en déduit que $M_{A'}'' = \psi(L_{A'}(G)) + M_{A'}''[1]$, d'où une surjection de $\psi(L_{A'}(G))$ sur M''/FM'' . Donc le rang de $\psi(L_{A'}(G))$ sur A' est supérieur ou égal à $d_{\mathcal{M}''}$; comme ce rang est égal à la dimension de la projection de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{M}_K''$, la proposition est démontrée.

1.6. Soit $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ un K' -couple faiblement admissible, on pose $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}^{\text{et}}$ et $\mathcal{M}^C = \bigoplus_{\alpha \neq 0} \mathcal{M}_\alpha$. On dit que le K' -couple $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ est connexe si $\mathcal{M}^{\text{et}} = 0$, étale si $\mathcal{M}^C = 0$.

Comme $d_{\mathcal{M}_0} = 0$, on a $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}_K^{\text{et}} = 0$, donc la projection de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{M}_K^C$ est injective, soit $\mathcal{L}^C$ son image. On pose $(\mathcal{L}, \mathcal{M})^C = (\mathcal{L}^C, \mathcal{M}^C)$ et $(\mathcal{L}, \mathcal{M})^{\text{et}} = (0, \mathcal{M}^{\text{et}})$. On a donc une suite exacte de K' -couples faiblement admissibles :

$$0 \rightarrow (\mathcal{L}, \mathcal{M})^{\text{et}} \rightarrow (\mathcal{L}, \mathcal{M}) \rightarrow (\mathcal{L}, \mathcal{M})^C \rightarrow 0.$$

1.7. PROPOSITION. Si $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ est un K' -couple étale, alors $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ est dans l'image essentielle de $LM_{K'}$.

Démonstration. On a $\mathcal{L} = 0$ et $\mathcal{M} = K \otimes_A M$ où M est le module de Dieudonné d'un groupe p -divisible étale sur k . Ce groupe se relève en un groupe étale G sur A et $LM_{K'}(A' \otimes_A G)$ s'identifie à $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$.

1.8. THÉORÈME. - Soit $0 \rightarrow (\mathfrak{A}', \mathcal{M}') \rightarrow (\mathfrak{A}, \mathcal{M}) \rightarrow (\mathfrak{A}'', \mathcal{M}'') \rightarrow 0$ une suite exacte de K' -couples faiblement admissibles. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $(\mathfrak{A}, \mathcal{M})$ est dans l'image essentielle du foncteur $LM_{K'}$.
- (ii) $(\mathfrak{A}', \mathcal{M}')$ et $(\mathfrak{A}'', \mathcal{M}'')$ sont dans l'image essentielle de $LM_{K'}$.

Avant de démontrer le théorème, rappelons quelques résultats de Fontaine.

Dans [3], p.100, Fontaine associe à certains A' -anneaux R un anneau $\hat{R}_K^{\text{an}}$ de fonctions analytiques qui est le complété de $K' \otimes_{A'} R$ pour une topologie convenable. Si R est la bigèbre d'un groupe p -divisible, connexe, de dimension d , sur A' , l'anneau $\hat{R}_K^{\text{an}}$ est isomorphe à un sous-anneau de $K'[[X_1, \dots, X_d]]$.

Soit G un groupe p -divisible sur A' . Soit B la bigèbre formelle de G et Δ le coproduit de B . Le coproduit Δ se prolonge à $\hat{B}_K^{\text{an}}$ et si $x \in \hat{B}_K^{\text{an}}$ on pose $\partial x = x \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} x - \Delta x$. On peut alors identifier $\mathcal{M}_{K'}(G)$ au quotient, par $K' \otimes_{A'} B$, du sous- K' -espace vectoriel de $\hat{B}_K^{\text{an}}$ formé des x tels que $\partial x \in K' \otimes_{A'} (B \hat{\otimes}_{A'} B)$ et $\mathfrak{L}(G)$ s'identifie à l'image dans $\mathcal{M}_{K'}(G)$ des $x \in \hat{B}_K^{\text{an}}$ tels que $\partial x = 0$.

Soit $\underline{a} = (\dots, a_{-n}, \dots, a_0)$ un covecteur de Witt à coefficients dans $B \otimes_{A'} k$. Pour tout entier n , soit $\hat{a}_{-n}$ un relèvement de a_{-n} dans B ; la série $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{a}_{-n}^n / p^n$ converge dans $\hat{B}_K^{\text{an}}$: c'est un relèvement de $\underline{a}$ dans $\hat{B}_K^{\text{an}}$ ([3], II, §5.5 et IV, §3.2). Comme le module de Dieudonné M de la fibre spéciale de G , s'identifie à un sous- A -module de $CW_k(B \otimes_{A'} k)$, on définit ainsi des relèvements des éléments de M dans $\hat{B}_K^{\text{an}}$. Ces relèvements dépendent du choix des $\hat{a}_{-n}$, Fontaine montre que deux relèvements distincts diffèrent d'un élément de $P'(B)$ qui est le sous- A' -module fermé de $\hat{B}_K^{\text{an}}$ engendré par les $\hat{b}_{-n}^n / p^n$ où $\hat{b}_{-n} \in \pi B$.

1.9. Démonstration du théorème. Posons $d = d_{\mathcal{M}}$, $d' = d_{\mathcal{M}'}$ et $d'' = d_{\mathcal{M}''}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons d'abord que $(\mathfrak{L}'', \mathcal{M}'')$ est connexe. Soit G'' un groupe p -divisible connexe de dimension d'' défini sur A' tel que $LM_{K'}(G'') \simeq (\mathfrak{L}'', \mathcal{M}'')$. Si on choisit des coordonnées $X_1, \dots, X_{d''}$ sur G'' , la bigèbre formelle B'' de G'' s'identifie à $A'[[X_1, \dots, X_{d''}]]$, avec un coproduit Δ'' .

Soit, d'autre part, un groupe p -divisible G' de dimension d' défini sur A' tel que $LM_{K'}(G') \simeq (\mathfrak{L}', \mathcal{M}')$. Notons B' la bigèbre de G' et Δ' le coproduit de B' .

On va munir $B = B' \hat{\otimes}_A B'' = B'[[X_1, \dots, X_{d''}]]$ d'un coproduit Δ tel que $\Delta(b) = \Delta'(b)$ si $b \in B'$ et tel que le groupe formel associé à B ait une image par $LM_{K'}$ isomorphe à $(\mathfrak{L}, \mathcal{M})$.

Identifions le module de Dieudonné de la fibre spéciale de G' à un réseau M' de $\mathcal{M}'$. Soit $m_1, \dots, m_{h'}$ une base de M' sur A . Soit $\hat{m}_j$ un relèvement de m_j dans $\hat{B}_K^{\text{an}}$. D'après Fontaine ([3], IV prop. 4.1), les éléments $\partial \hat{m}_j = 1 \hat{\otimes} \hat{m}_j + \hat{m}_j \hat{\otimes} 1 - \Delta' \hat{m}_j$ sont à dénominateurs bornés. Soit s un entier tel que, pour tout j , les $\partial \hat{m}_j$ appartiennent à $p^{-s+1}(B' \hat{\otimes}_A B')$.

Soit $x_1, \dots, x_{d''}$ une base de $\mathfrak{L}''$; on peut choisir les coordonnées $X_1, \dots, X_{d''}$ de G'' de sorte que x_i se relève dans l'anneau des fonctions analytiques $\hat{B}_K^{\text{an}}$ sur G'' (cf. [3] p.100) en une série $\hat{x}_i$ telle que $\hat{x}_i \equiv X_i$ modulo degré 2. La série x_i appartient à $K'[[X_1, \dots, X_{d''}]]$ et ses dérivées partielles sont à coefficients dans A' (cf. [3] p. 104).

D'après la semi-simplicité de la catégorie des F -iso-cristaux, $\mathcal{M}''$ est isomorphe (de manière non canonique) à un F -iso-cristal supplémentaire de $\mathcal{M}'$ dans $\mathcal{M}$, ceci nous permet d'identifier $\mathcal{M}$ à $\mathcal{M}' \oplus \mathcal{M}''$.

Relevons $x_1, \dots, x_{d''}$ dans $\mathfrak{L}$ en $y_1, \dots, y_{d''}$. On a donc

$y_i = x_i + z_i$, avec $z_i \in K' \otimes_K \mathcal{M}'$.

Les z_i s'écrivent $z_i = \sum_{j=1}^{h'} a_{ij} m_j$ avec $a_{ij} \in K'$. Si on remplace M' par $p^{-r} M'$, pour un certain entier r , on a $z_i = \sum_{j=1}^{h'} (p^r a_{ij}) (p^{-r} m_j)$. Choisissons r de sorte que les z_i appartiennent tous à $p^S M'$, où s est l'entier choisi plus haut. On relève z_i en $\hat{z}_i = \sum_{j=1}^{h'} a_{ij} \hat{m}_j$, donc $\partial \hat{z}_i = \sum_{j=1}^{h'} a_{ij} \partial \hat{m}_j \in p(B' \hat{\otimes}_A B')$. On relève enfin y_i en $\hat{y}_i = \hat{x}_i + \hat{z}_i$.

Soit $\ell(X) = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_{d''} \end{pmatrix}$, c'est un vecteur à d'' composantes dont

chacune est une série à d'' indéterminées, à coefficients dans K' . La jacobienne de $\ell(X)$ est à coefficients dans A' ainsi que son inverse.

Pour définir le coproduit Δ de B dans

$$B \hat{\otimes}_{A'} B = (B' \hat{\otimes}_A B')[[1 \hat{\otimes} X_1, \dots, X_1 \hat{\otimes} 1, \dots]]$$

il reste à définir les $\Delta(X_i)$.

$$\text{Soit } \partial \hat{z} = \begin{pmatrix} \partial \hat{z}_1 \\ \vdots \\ \partial \hat{z}_{d''} \end{pmatrix} \text{ et posons } \Delta(X) = \begin{pmatrix} \Delta(X_1) \\ \vdots \\ \Delta(X_{d''}) \end{pmatrix} = \bar{\epsilon}^{-1} (\ell(X \hat{\otimes} 1) + \ell(1 \hat{\otimes} X) + \partial \hat{z}) .$$

Comme les $\partial \hat{z}_i$ appartiennent à $pB' \hat{\otimes}_{A'} B'$, en appliquant la formule de Taylor à $\bar{\epsilon}^{-1}$ on voit que la définition de $\Delta(X)$ a un sens et que $\Delta(X)$ a ses composantes dans $B \hat{\otimes}_{A'} B$. On vérifie facilement que Δ est un coproduit.

La formule qui définit $\Delta(X)$ entraîne immédiatement que :

$$\Delta(\ell(X) + \hat{z}) = \ell(X \hat{\otimes} 1) + \ell(1 \hat{\otimes} X) + \hat{z} \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} \hat{z}$$

ce qui veut dire que $\Delta(\hat{y}_i) = \hat{y}_i \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} \hat{y}_i$. Il est alors clair que le groupe p -divisible associé à B a une image par $LM_{K'}$, qui s'identifie à $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$, ce qui achève la démonstration de (ii) $\Rightarrow$ (i) lorsque $(\mathcal{L}'', \mathcal{M}'')$

est connexe.

1.10. Si $(\mathfrak{L}'', \mathcal{M}_i'')$ n'est pas connexe, on a le diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \rightarrow & (\mathfrak{L}', \mathcal{M}_i')^{\text{et}} & \rightarrow & (\mathfrak{L}, \mathcal{M}_i)^{\text{et}} & \rightarrow & (\mathfrak{L}'', \mathcal{M}_i'')^{\text{et}} & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & (\mathfrak{L}', \mathcal{M}_i') & \rightarrow & (\mathfrak{L}, \mathcal{M}_i) & \rightarrow & (\mathfrak{L}'', \mathcal{M}_i'') & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & (\mathfrak{L}', \mathcal{M}_i')^C & \rightarrow & (\mathfrak{L}, \mathcal{M}_i)^C & \rightarrow & (\mathfrak{L}'', \mathcal{M}_i'')^C & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array}$$

Comme $(\mathfrak{L}', \mathcal{M}_i')$ est dans l'image essentielle de LM_{K_i} , il existe un groupe p-divisible G tel que $\text{LM}_{K_i}(G) \simeq (\mathfrak{L}', \mathcal{M}_i')$; alors $(\mathfrak{L}', \mathcal{M}_i')^C$ s'identifie à $\text{LM}_{K_i}(G^C)$ où G^C est la composante neutre de G . De même $(\mathfrak{L}'', \mathcal{M}_i'')^C$ est dans l'image essentielle de LM_{K_i} . Donc, d'après la première partie de la démonstration $(\mathfrak{L}, \mathcal{M}_i)^C$ est dans l'image essentielle de LM_{K_i} ; en appliquant encore la première partie et en utilisant la proposition 1.4, on en déduit que $(\mathfrak{L}, \mathcal{M}_i)$ est dans l'image essentielle de LM_{K_i} .

1.11. Démonstration de (i) $\Rightarrow$ (ii) du théorème. On a le même diagramme commutatif exact que ci-dessus; pour terminer la démonstration il suffit donc d'établir (i) $\Rightarrow$ (ii) dans le cas où $(\mathfrak{L}, \mathcal{M}_i)$ est connexe.

Soit G un groupe p-divisible connexe de dimension d défini sur A' tel que $\text{LM}_{K_i}(G) \simeq (\mathfrak{L}, \mathcal{M}_i)$. Identifions le module de Dieudonné de la fibre spéciale de G à un réseau M de $\mathcal{M}_i$.

Soit $M' = \mathcal{M}_i' \cap M$ et soit M'' la projection de M sur $\mathcal{M}_i''$. On a $FM' = FM \cap M'$ et la suite $0 \rightarrow M'/FM' \rightarrow M/FM \rightarrow M''/FM'' \rightarrow 0$ est exacte.

Reprenons les notations du chapitre IV de [3] .

D'après le corollaire 1 de la proposition 2.4 du chapitre IV de [3] ,
on a le diagramme commutatif et exact :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & M'_{A'}[1] & \rightarrow & M_{A'}[1] & \rightarrow & M''_{A'}[1] \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & M'_{A'} & \rightarrow & M_{A'} & \rightarrow & M''_{A'} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & M'/FM' & \rightarrow & M/FM & \rightarrow & M''/FM'' \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Posons $L = L_{A'}(G)$. On sait (loc. cit.) que L s'identifie à un sous- A' -module de $M_{A'}$ et que $L/\pi L \approx M/FM$.

Soient L'' la projection de L sur $M''_{A'}$ et $L' = M'_{A'} \cap L$. On sait (loc. cit.) que l'on peut faire les identifications :

$$\begin{array}{lll}
 \mathcal{M}_{K'} = K' \otimes_{A'} M_{A'} & \mathcal{M}'_{K'} = K' \otimes_{A'} M'_{A'} & \mathcal{M}''_{K'} = K' \otimes_{A'} M''_{A'} \\
 \mathfrak{L} = K' \otimes_{A'} L & \mathfrak{L}' = K' \otimes_{A'} L' & \mathfrak{L}'' = K' \otimes_{A'} L''
 \end{array}$$

On a le diagramme commutatif et exact :

$$\begin{array}{ccccc}
 L & \rightarrow & L'' & \rightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 M/FM & \rightarrow & M''/FM'' & \rightarrow & 0 \\
 \downarrow & & & & \\
 0 & & & &
 \end{array}$$

d'où une surjection $\varphi : L'' \rightarrow M''/FM''$. Comme $\varphi(\pi L'') = 0$, on a encore une surjection $L''/\pi L'' \rightarrow M''/FM''$.

Puisque $(\mathfrak{L}'', \mathcal{M}'')$ est faiblement admissible, les deux k -espaces vectoriels $L''/\pi L''$ et M''/FM'' sont de même dimension, donc

$L''/\pi L'' \rightarrow M''/FM''$ est un isomorphisme. On en déduit le diagramme commutatif et exact :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \pi L & \rightarrow & L & \rightarrow & M/FM & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \pi L'' & \rightarrow & L'' & \rightarrow & M''/FM'' & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

D'après le lemme du serpent, la suite des noyaux des flèches verticales est exacte, donc la suite $0 \rightarrow \pi L' \rightarrow L' \rightarrow M'/FM' \rightarrow 0$ est exacte.

Choisissons des coordonnées $X_1, \dots, X_{d'}$, $Y_1, \dots, Y_{d''}$ de G de sorte que les X_i induisent une base de M'/FM' et les Y_i une base de M''/FM'' . Le A -module M' s'identifie donc à un sous-module de $\hat{C}\hat{W}_k(k[[X_1, \dots, X_{d'}]])$.

Posons $B' = A'[[X_1, \dots, X_{d'}]]$ et $B'' = A'[[Y_1, \dots, Y_{d''}]]$. La bigèbre de G s'identifie donc à $B = B' \hat{\otimes}_A B''$.

Soit $x_1, \dots, x_{d'}$ une base de L' . Il existe donc un relèvement $\hat{x}_j$ de x_j dans $\hat{B}_K^{\text{an}}$ qui appartient à $\hat{B}'^{\text{an}}$. Comme $L' \subset L$, chaque x_j admet un relèvement $\hat{x}'_j$ dans $\hat{B}_K^{\text{an}}$ tel que $\partial \hat{x}'_j = 0$.

La différence $g_j = \hat{x}'_j - \hat{x}_j$ appartient alors à ce que Fontaine note $P'(B)$ (cf. [3], IV § 4.1, § 4.2 et prop. 5.1). On a donc $\partial g_j = \partial \hat{x}'_j - \partial \hat{x}_j = -\partial \hat{x}_j \in P'(B' \hat{\otimes}_A B')$.

Si on écrit $g_j = \sum_{\underline{i}} F_{\underline{i}} Y^{\underline{i}}$ avec $\underline{i} = (i_1, \dots, i_{d''}) \in \mathbb{N}^{d''}$, $F_{\underline{i}} \in K'[[X_1, \dots, X_{d'}]]$ et $Y^{\underline{i}} = Y_1^{i_1} \dots Y_{d''}^{i_{d''}}$, on a :

$$\partial g_j = \partial F_0 + \partial \left(\sum_{\underline{i} \neq 0} F_{\underline{i}} Y^{\underline{i}} \right).$$

Donc $\partial \left(\sum_{\underline{i} \neq 0} F_{\underline{i}} Y^{\underline{i}} \right) = 0$. Comme g_j appartient à $P'(B)$, on a $F_0 \in P'(B')$, donc $\sum_{\underline{i} \neq 0} F_{\underline{i}} Y^{\underline{i}} \in P'(B)$. Comme G est p -divisible, on

a $\sum_{i \neq 0} F_i Y_i^{\frac{1}{p}} = 0$. Donc $g_j \in P'(B')$ et $\hat{x}'_j \in K'[[X_1, \dots, X_d]]$.

On peut donc restreindre le coproduit de B induit par G à B' , ce qui définit un groupe p -divisible G' , dont l'image par $LM_{K'}$ s'identifie à $(\mathfrak{X}', \mathcal{M}')$. Le noyau de la flèche de G dans G' est un groupe p -divisible G'' dont l'image par $LM_{K'}$ s'identifie à $(\mathfrak{X}'', \mathcal{M}'')$.

Le théorème est donc démontré.

1.12. COROLLAIRE. - Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) le foncteur $LM_{K'}$ induit une anti-équivalence entre la catégorie des groupes p -divisibles, à isogénies près, sur A' et la catégorie des K' -couples faiblement admissibles.
- (ii) Tout K' -couple faiblement admissible, connexe et simple, appartient à l'image essentielle de $LM_{K'}$.

Démonstration . Il suffit de remarquer que tout K' -couple faiblement admissible admet une suite de composition telle que le premier terme soit étale et que les quotients successifs soient connexes et simples. On montre alors la proposition en raisonnant par récurrence sur le nombre de termes de la suite de composition et en appliquant le théorème.

2. - LE CAS DE DIMENSION UN .

2.1. L'objet de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant :

THEOREME. - Le foncteur $LM_{K'}$ induit une anti-équivalence entre la catégorie des groupes p -divisibles de dimension un, à isogénies près, sur A' et la catégorie des K' -couples faiblement admissibles $(\mathfrak{X}, \mathcal{M})$ tels que $\dim_{K'} \mathfrak{X} = 1$.

Remarque. Un K' -couple $(\mathfrak{L}, \mathcal{M})$ tel que $\dim_K \mathfrak{L} = 1$ est faiblement admissible si et seulement si $d_{\mathcal{M}} = 1$ et $\mathfrak{L} \not\subset K' \otimes_K \mathcal{M}^{\text{et}}$.

Démonstration du théorème. Il suffit de montrer que si $(\mathfrak{L}, \mathcal{M})$ est un K' -couple faiblement admissible tel que $d_{\mathcal{M}} = 1$ alors $(\mathfrak{L}, \mathcal{M})$ appartient à l'image essentielle de $LM_{K'}$.

D'après le théorème 1.8 et la proposition 1.4, on peut supposer que $(\mathfrak{L}, \mathcal{M})$ est connexe. Comme $d_{\mathcal{M}} = 1$, le F -iso-cristal $\mathcal{M}$ est alors simple de pente $1/h$ où $h = \dim_K \mathcal{M}$.

Si $h = 1$, il est clair que $(\mathfrak{L}, \mathcal{M})$ est l'image par $LM_{K'}$ du groupe multiplicatif. On peut donc supposer que $\dim_K \mathcal{M} \geq 2$.

2.2. PROPOSITION. - Soit $(\mathfrak{L}, \mathcal{M})$ un K' -couple faiblement admissible connexe vérifiant $\dim_K \mathfrak{L} = 1$ et $\dim_K \mathcal{M} = h \geq 2$. Il existe alors un élément e_0 de $\mathcal{M}$ et un élément ℓ de $\mathfrak{L}$ tels que :

- (i) on a $F^h e_0 = p e_0$ et $(e_0, F e_0, \dots, F^{h-1} e_0)$ est une base de $\mathcal{M}$ sur K ;
- (ii) si $\ell = \sum_{i=0}^{h-1} b_i F^i e_0$, avec $b_i \in K'$, on a $b_0 = 1$ et $v(b_i) \geq -i/h$ pour $1 \leq i \leq h-1$ (où v désigne la valuation de K' normalisée par $v(p) = 1$).

Démonstration. Comme k est algébriquement clos, il existe un élément non nul e'_0 de $\mathcal{M}$ tel que $F^h e'_0 = p e'_0$. Alors $(e'_0, \dots, F^{h-1} e'_0)$ est une base de $\mathcal{M}$ sur K . Si ℓ' est un élément non nul de $\mathfrak{L}$, il s'écrit $\sum_{i=0}^{h-1} b'_i F^i e'_0$ avec $b'_i \in K'$. Quitte à remplacer e'_0 par $F^n e'_0$, pour un entier n convenable, et à multiplier ℓ' par une constante, on peut supposer que $b'_0 = 1$.

Soit i tel que $v(b'_1) + \frac{i}{h} \leq v(b'_j) + \frac{j}{h}$ pour tout j vérifiant $1 \leq j \leq h-1$. Si $v(b'_1) + \frac{i}{h} \geq 0$, il suffit de poser $e_0 = e'_0$ et $\ell = \ell'$.

Si non l'élément b'_i est non nul. Posons $e_o = F^i e'_o$; alors
 $\ell = \frac{1}{b_i} \ell'$ s'écrit $\sum_{j=1}^{h-1} b_j F^j e_o$ avec $b_o = 1$ et :

$$b_j = \begin{cases} b'_{i+j}/b'_i & \text{si } i+j < h \\ b'_{i+j-h}/p b'_i & \text{si } i+j \geq h \end{cases}.$$

Si $i+j < h$, on a :

$$v(b_j) = v(b'_{i+j}) - v(b'_i) = (v(b'_i) + \frac{i+j}{h}) - (v(b'_i) + \frac{i}{h}) - \frac{j}{h} \geq -\frac{j}{h}.$$

Si $i+j \geq h$, on a :

$$v(b_j) = v(b'_{i+j-h}) - 1 - v(b'_i) = (v(b'_i) + \frac{i+j-h}{h}) - (v(b'_i) + \frac{i}{h}) - 1 + \frac{h-j}{h} \geq -\frac{j}{h}.$$

La proposition est donc démontrée.

2.3. Soit $\ell_h(X)$ la série formelle $\sum_{n=0}^{\infty} X^{p^{nh}}/p^n$, c'est le logarithme d'un groupe p -divisible G_h de hauteur h et de dimension un défini sur $\mathbb{Z}_p$. L'image x de $\ell_h(X)$ dans le module de Dieudonné de la fibre spéciale de G_o vérifie $F^h x = p x$ ([3], V § 2). On peut donc relever l'élément e_o de la proposition 2.2 en $\ell_h(X)$ dans l'anneau des fonctions analytiques $(\widehat{A'[[X]]})_K^{\text{an}}$ et $F^i e_o$ en $\ell_h(X^{p^i})$. La base de $\mathfrak{L}$ de la prop. 2.2 peut donc se relever en $\ell(X) = \sum_{i=0}^{h-1} b_i \ell_h(X^{p^i})$.

Pour achever la démonstration du théorème 2.1, il suffit alors de montrer la proposition suivante :

2.4. PROPOSITION. - Soit $\ell_h(X) = \sum_{n=0}^{\infty} X^{p^{nh}}/p^n$ et soit pour
 $i = 1, \dots, h-1$ un élément b_i de K' vérifiant $v(b_i) \geq -i/h$. Soit
 $b_o = 1$. Alors la série $\ell(X) = \sum_{i=0}^{h-1} b_i \ell_h(X^{p^i})$ est le logarithme
d'une loi de groupe formel définie sur A' .

Démonstration : la série $\ell(X)$ s'écrit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^{p^n}$. Si $n = rh + j$
 avec $0 \leq j \leq h-1$, on a $a_{rh+j} = b_j/p^r$.

D'après Hazewinkel ([7], § 15.2), la série $\ell(X)$ est le logarithme d'une loi de groupe formel définie sur A' si et seulement si les T_n , définis par les formules suivantes

$$\begin{aligned} T_1 &= pa_1 \\ \dots \\ T_n &= pa_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i} T_i^{p^{n-i}}, \\ \dots \end{aligned}$$

sont entiers.

a) Si $1 \leq n \leq h-1$, on va montrer par récurrence sur n que $v(T_n) \geq \frac{h-n}{h}$. On a $T_1 = pa_1 = pb_1$, donc $v(T_1) \geq 1 - \frac{1}{h} = \frac{h-1}{h}$.

Supposons que, pour $1 \leq i \leq n-1$, on ait $v(T_i) \geq \frac{h-i}{h}$. On a alors :

$$\begin{aligned} v(a_{n-i} T_i^{p^{n-i}}) &= v(b_{n-i} T_i^{p^{n-i}}) \geq -\frac{n-i}{h} + p^{n-i} \frac{h-i}{h} = \frac{1}{h} [p^{n-i}(h-i) - n + i] \\ &\geq \frac{1}{h} [p^{n-i}(h-i) - (h-i)] \geq \frac{h-i}{h} [2^{n-i} - 1] \geq \frac{h-n}{h}. \end{aligned}$$

Comme $v(pa_n) = v(pb_n) \geq 1 - \frac{n}{h} = \frac{h-n}{h}$, on a bien $v(T_n) \geq \frac{h-n}{h}$.

b) On a $T_h = 1 - \sum_{j=1}^{h-1} a_{h-j} T_j^{p^{h-j}}$. D'après a), on a :

$$v(a_{h-j} T_j^{p^{h-j}}) \geq p^{h-j} \frac{h-j}{h} - \frac{h-j}{h} = \frac{h-j}{h} (p^{h-j} - 1) \geq \frac{p-1}{h}.$$

Donc $T_h = 1 + c$ avec $v(c) \geq \frac{p-1}{h}$.

c) Nous allons montrer par récurrence sur n que $v(T_n) \geq 1/h$ pour $n > h$. Si $v(T_1) \geq 1/h$, alors $v(a_n T_1^{p^n}) \geq 1/h$. En effet, posons $n = rh + j$ avec $0 \leq j \leq h-1$, alors

$$\begin{aligned} v(a_n T_1^{p^n}) &= p^n v(T_1) + v(b_j / p^r) \geq \frac{p^{rh+j}}{h} - \frac{j}{h} - r \geq \frac{2^{rh+j}}{h} - \frac{rh+j}{h} \\ &= \frac{1}{h} (2^n - n) \geq \frac{1}{h}. \end{aligned}$$

Donc, d'après a) et en raisonnant par récurrence, dans l'écriture

de T_n , pour $n > h$, tous les termes sont de valuation supérieure ou égale à $1/h$, sauf peut-être le premier et celui qui contient T_h . Il faut donc étudier $pa_n - a_{n-h}T_h^{p^{n-h}}$. Posons $n = rh + j$ avec $0 \leq j \leq h-1$, alors d'après b), on a :

$$pa_n - a_{n-h}T_h^{p^{n-h}} = \frac{b_j}{p^{r-1}} [1 - (1+c)^{p^{(r-1)h+j}}] ,$$

et il suffit de vérifier que $v(1-(1+c)^{p^{(r-1)h+j}}) - (r-1) - \frac{j}{h} \geq \frac{1}{h}$.

2.5. LEMME. - Soit $x \in A'$ tel que $v(x) \geq \frac{p-1}{h}$, alors :

a) si $h \leq (p-1)^2$, on a $v(1-(1+x)^{p^m}) \geq \frac{p-1}{h} + m$ pour tout entier
 $m \geq 0$;

b) si $h > (p-1)^2$, soit s le plus grand entier tel que
 $p^s(p-1)^2 \leq h$; on a alors

$$v(1-(1+x)^{p^m}) \geq p^m \frac{p-1}{h} \quad \text{si} \quad m \leq s$$

et

$$v(1-(1+x)^{p^m}) \geq p^s \frac{p-1}{h} + m - s \quad \text{si} \quad m \geq s .$$

Démonstration. Soit $y \in A'$ et supposons que $v(y) \geq u > 0$.

On a :

$$v(1-(1+y)^p) \geq \inf(v(py), v(y^p)) \geq \inf(1+u, pu) .$$

On a $\inf(1+u, pu) = 1+u$ si $u \geq 1/(p-1)$.

Supposons que $h \leq (p-1)^2$, ce qui veut dire $1 + \frac{p-1}{h} \leq p \frac{p-1}{h}$. D'après la remarque précédente, on a $v(1-(1+x)^p) \geq 1 + \frac{p-1}{h}$. Supposons que $v(1-(1+x)^{p^m}) \geq m + \frac{p-1}{h}$. Ecrivons $(1+x)^{p^m} = 1+z$ avec $v(z) \geq m + \frac{p-1}{h}$. On a alors $v(1-(1+x)^{p^{m+1}}) \geq \inf(v(pz), v(z^p))$. Comme :

$$p[m + \frac{p-1}{h}] - [m + 1 + \frac{p-1}{h}] = \frac{(p-1)^2}{h} + p(m-1) - 1 > 0 ,$$

le a) est démontré.

Si $h > (p-1)^2$, on a $v(1-(1+x)^p) \geq p \frac{p-1}{h}$. Supposons que :
 $v(1-(1+x)^{p^m}) \geq p^m \frac{p-1}{h}$. Posons encore $(1+x)^{p^m} = 1+z$. On a

$$v(1-(1+z)^p) \geq \inf(1+v(z), pv(z)) \geq \inf(1+p^m \frac{p-1}{h}, p^{m+1} \frac{p-1}{h}) .$$

Or $1+p^m \frac{p-1}{h} - p^{m+1} \frac{p-1}{h} = 1-p^m \frac{(p-1)^2}{h}$ et ce nombre est positif si et seulement si $p^m(p-1)^2 \leq h$, donc si $m \leq s$. Donc, pour $m \leq s$, on a $v(1-(1+x)^{p^m}) \geq p^m \frac{p-1}{h}$. D'après la remarque du début, on a $v(1-(1+x)^{p^{s+1}}) \geq 1+p^s \frac{p-1}{h}$. On achève la démonstration du lemme par récurrence.

2.6. Revenons à la démonstration de la proposition. On applique le lemme avec $x = c$ et $m = (r-1)h+j$.

Dans le cas a), on a :

$$v(pa_n - a_{n-h} T_h^{p^{n-h}}) \geq \frac{p-1}{h} + (r-1)h+j-(r-1)\frac{j}{h} = \frac{p-1}{h} + \frac{h-j}{h} + (r-1)h+j-r .$$

Or $(r-1)h+j-r \geq 2(r-1)+j-r = r+j-2$. Si $r \geq 2$, la proposition est démontrée, si $r = 1$, on a $n = h+j > h$, donc $j \geq 1$ et on a bien $r+j \geq 2$.

Dans le cas b), remarquons que l'inégalité $h \geq p^s(p-1)^2$ implique que $h > s$.

Si $m \leq s$, donc $(r-1)h+j \leq s$, on a $r = 1$ et comme $n > h$, on a $j \neq 0$. On a :

$$v(pa_n - a_{n-h} T_h^{p^{n-h}}) \geq -\frac{j}{h} + p^j \frac{p-1}{h} = \frac{1}{h} [p^j(p-1)-j] \geq \frac{1}{h} (2^j-j) \geq \frac{1}{h} .$$

Si $m > s$, ce qui équivaut à $n > s+h$, on a :

$$\begin{aligned} v(pa_n - a_{n-h} T_h^{p^{n-h}}) &\geq -\frac{j}{h} - r + 1 + p^s \frac{p-1}{h} + (r-1)h+j-s = p^s \frac{p-1}{h} + n(1-\frac{1}{h}) - h - s + 1 \\ &\geq p^s \frac{p-1}{h} + (s+h+1)(1-\frac{1}{h}) - (s+h+1) + 2 \\ &\geq \frac{1}{h} - \frac{s+h+1}{h} + 2 = \frac{1}{h} - \frac{s+1}{h} + 1 \geq \frac{1}{h} \quad \text{car } s < h . \end{aligned}$$

La proposition 2.4 et le théorème 2.1 sont donc démontrés.

2.7. De ce qui précède résulte la proposition suivante :

PROPOSITION. - Toute loi de groupe formel à un paramètre définie sur A' de hauteur $h \geq 1$ est isogène à une loi de groupe formel à un paramètre dont le logarithme est de la forme

$$\ell(X) = \sum_{i=0}^{h-1} b_i \left(\sum_{n=0}^{\infty} X^{p^{nh+i}} / p^n \right) \text{ avec } b_i \in K', b_0 = 1 \text{ et } v(b_i) \geq -i/h, \text{ pour } 1 \leq i \leq h-1.$$

2.8. Soit h un entier ≥ 1 . Soit Φ_{p^h} le sous-corps de K de degré h sur Φ_p . Soit $\mathcal{M}$ un F -iso-cristal simple de pente $1/h$; l'ensemble des x de $\mathcal{M}$ tels que $F^h x = px$ forme un sous- Φ_{p^h} -espace vectoriel de $\mathcal{M}$ de dimension h . Un automorphisme u de $\mathcal{M}$ est déterminé par l'image d'un élément non nul tel que $F^h x = px$. Prenons pour base de $\mathcal{M}$ sur K les $F^i x$ avec $0 \leq i \leq h-1$. Si $u(x) = \sum_{i=0}^{h-1} u_i F^i x$, les u_i appartiennent à Φ_{p^h} et si $\Phi = (\varphi_{ij})$ est la matrice de u sur la base $x, Fx, \dots, F^{h-1}x$ de $\mathcal{M}$, on vérifie facilement que :

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} \sigma^j(u_{i-j}) & \text{si } i \geq j \\ p\sigma^j(u_{i-j+h}) & \text{si } i < j \end{cases} \text{ avec } 0 \leq i \leq h-1 \text{ et } 0 \leq j \leq h-1.$$

Si $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{h-1} \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul dont les coordonnées sont dans Φ_{p^h} , on note $\Phi(\underline{u})$ la matrice carrée d'ordre h dont le terme général est donné par les formules ci-dessus. L'ensemble des matrices $\Phi(\underline{u})$ quand les u_i parcourent Φ_{p^h} s'identifie au corps (non commutatif si $h \geq 2$) des endomorphismes du F -iso-cristal simple $\mathcal{M}$.

Etant donné un entier $h \geq 1$ et $\underline{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{h-1} \end{pmatrix}$ avec $c_i \in K'$, $c_0 = 1$ et $v(c_i) \geq -i/h$, on sait d'après la proposition 2.4 construire une loi de groupe formel à un paramètre $G(h, \underline{c})$.

2.9. PROPOSITION. - Les lois de groupe formel $G(h, \underline{c})$ et $G(h, \underline{c}')$ sont isogènes si et seulement s'il existe un vecteur non nul $\underline{u} \in (\mathbb{Q}_p)^h$ et un élément t de K' tels que $\underline{c}' = t\Phi(\underline{u})\underline{c}$.

Soient $(\mathfrak{A}, \mathcal{M}) = LM_{K'}(G(h, \underline{c}))$ et $(\mathfrak{A}', \mathcal{M}') = LM_{K'}(G(h, \underline{c}'))$. Soit $e_0 \in \mathcal{M}$ tel que $F^h e_0 = p e_0$ et que $\mathfrak{A}$ ait pour base $\sum_{i=0}^{h-1} c_i F^i e_0$. De même, soit $e'_0 \in \mathcal{M}'$ tel que $\mathfrak{A}'$ ait pour base $\sum_{i=0}^{h-1} c'_i F^i e'_0$. On peut identifier $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ par l'isomorphisme qui envoie e_0 sur e'_0 . Supposons qu'il existe $\underline{u}$ et t vérifiant les conditions de la proposition tels que $\underline{c}' = t\Phi(\underline{u})\underline{c}$. L'automorphisme de $\mathcal{M}$ associé à la matrice $\Phi(\underline{u})$ sur la base $(F^i e_0)_{0 \leq i \leq h-1}$ envoie $\underline{c}$ sur un vecteur parallèle à $\underline{c}'$, donc $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$, ce qui entraîne que les deux groupes sont isogènes.

Réciproquement, si G et G' sont isogènes, les K' -couples $(\mathfrak{A}, \mathcal{M})$ et $(\mathfrak{A}', \mathcal{M}')$ sont isomorphes. A un automorphisme près de $\mathcal{M}$, on peut choisir le même e_0 pour les deux groupes. On a donc un automorphisme de $\mathcal{M}$ qui après extension des scalaires envoie $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{A}'$, donc $\underline{c}$ sur un vecteur parallèle à $\underline{c}'$, ce qui veut dire qu'il existe $\underline{u}$ et t tels que $\underline{c}' = t\Phi(\underline{u})\underline{c}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. BERTHELOT, Slopes of Frobenius in crystalline cohomology, in Algebraic Geometry (Arcata 1974), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 29, 315-328, American Math. Soc., (1975).
- [2] J. DIEUDONNÉ, Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p > 0$ (VII), Math. Ann. 134 (1957), 114-133.
- [3] J.-M. FONTAINE, Groupes p -divisibles sur les corps locaux, Astérisque, n° 47-48, Soc. Math. France, (1977).
- [4] J.-M. FONTAINE, Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, ce volume.
- [5] A. GROTHENDIECK, Groupes de Barsotti-Tate et cristaux. Actes du Congrès Intern. des Math. 1970, tome I, 431-436, Gauthier-Villars, Paris, (1971).
- [6] A. GROTHENDIECK, Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné, Université de Montréal, (1974).
- [7] M. HAZEWINKEL, Formal Groups and Applications, New-York, San Francisco, London : Academic Press (1978).
- [8] Y. MANIN, The theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic, Russian Math. Surveys, 18 (1963), 1-83.
- [9] W. MESSING, The crystals Associated to Barsotti-Tate Groups : with Applications to Abelian Schemes, Lecture Notes in Math., n° 264, Springer, Berlin, (1972).

Astérisque

R. P. LANGLANDS

Sur la mauvaise réduction d'une variété de Shimura

Astérisque, tome 65 (1979), p. 125-154

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__65__125_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA MAUVAISE RÉDUCTION D'UNE VARIÉTÉ DE SHIMURA

par

R. P. LANGLANDS

(Princeton)

Parce que les relations entre les représentations automorphes et les variétés algébriques sont encore pour la plupart conjecturales, les mécanismes qui lient ces choses tellement disparates restant inconnus, l'étude des cas particuliers a toujours un intérêt vif, surtout quand elle met ces conjectures à l'épreuve, ou nous découvre des aspects nouveaux. Les exemples les plus abordables sont les variétés de Shimura, et on a commencé à comparer les fonctions zêta de ces variétés avec les fonctions L automorphes, non seulement pour les courbes, mais aussi pour les variétés de dimension plus grande [4]. Plus précisément soient F un corps de nombres algébriques totalement réel et D une algèbre de quaternions sur F totalement non ramifiée à l'infini. Le groupe multiplicatif $D^\times$ est le groupe de points rationnels d'un groupe G défini sur $\mathbb{Q}$, et on a considéré les variétés de Shimura attachées à G .

On suppose à présent que D est un corps parce que ces variétés sont alors complètes et les problèmes provenant des pointes n'interviennent pas. Pour

fixer la variété S on choisit un sous-groupe ouvert compact K de $G(\mathbb{A})$, $\mathbb{A}$ étant l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$. S est une variété sur $\mathbb{Q}$ et on peut étudier sa cohomologie complexe par les méthodes habituelles [2], [8]. Soit n le degré de F . On trouve que la partie majeure de la cohomologie se trouve dans le degré moyen n , et que les opérateurs de Hecke la découpent en pièces motiviques de dimension 2^n , chacune associée à une représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$ de dimension infinie et, en plus, des pièces supplémentaires de dimension $\binom{n}{m}$ si $n = 2m$ est pair, chacune associée à une représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$ de dimension 1.

Considérons une des pièces M de dimension 2^n associée à une représentation de dimension infinie π . La projection sur M , qu'on note aussi M , est une combinaison linéaire d'opérateurs de Hecke avec des coefficients algébriques, donc elle opère aussi sur la cohomologie ℓ -adique, prise sur la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$. Elle commute avec l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et on obtient alors une représentation ρ^M de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur l'image de M . Ce sont les relations entre ρ^M et π qui nous intéressent.

D'habitude on définit le L -groupe ${}^L G$ de G comme un groupe complexe, mais pour nos buts il est préférable de le définir comme un groupe algébrique ou proalgébrique sur $\mathbb{Q}$. ${}^L G$ est le produit semi-direct d'un groupe connexe ${}^L G^\circ$ avec $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. ${}^L G^\circ$ est le groupe des fonctions h sur $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \setminus \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ à valeurs dans $GL(2)$, et σ dans $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ envoie h sur h' avec $h'(\tau) = h(\tau\sigma)$. Le groupe habituel est le groupe des points complexes de ce ${}^L G$.

Le groupe ${}^L G$ a une représentation r de dimension 2^n plus ou moins évidente. Soit X l'espace vectoriel de dimension deux sur lequel $GL(2)$ opère et soit $V = \bigotimes_{\tau \in T} X$, où $T = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/G) \setminus \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ est l'ensemble des plongements de F dans $\overline{\mathbb{Q}}$.

On définit la représentation r en posant

$$\begin{aligned} r(h)(\otimes x(\tau)) &= \otimes h(\tau)x(\tau) & h &\in {}^L G^o \\ r(\sigma)(\otimes x(\tau)) &= \otimes x(\tau\sigma) & \sigma &\in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \end{aligned}$$

Ce que je voudrais bien pouvoir démontrer est qu'il existe un homomorphisme

$$\xi : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow {}^L G(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

tel que la composition de ξ avec la projection de ${}^L G$ sur $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ est l'identité et la composition $r \circ \xi$ est équivalente à ρ^M . Mais je n'ai aucune idée comment cela se fait.

Soit p un nombre premier différent de ℓ , et soit ρ_p^M la restriction de ρ^M au groupe de décomposition $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. On peut se demander aussi – et c'est là une question nettement plus facile – s'il existe un homomorphisme

$$\xi_p : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow {}^L G(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

tel que la composition de ξ_p avec la projection de ${}^L G$ sur $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ est le plongement habituel tandis que la composition $r \circ \xi_p$ est équivalente à ρ_p^M . Mais cette question-ci admet une formulation plus précise.

Pour la donner nous rappelons quelques faits locaux. Le sous-groupe d'inertie I du groupe de Galois $\text{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\text{mr}}/\mathbb{Q}_p)$ de l'extension modérément ramifiée maximale de $\mathbb{Q}_p$ est isomorphe à

$$\lim_{(n,p)=1} \mu_n \simeq \prod_{q \nmid p} \mathbb{Z}_q.$$

En fait, le groupe $\text{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\text{mr}}/\mathbb{Q}_p)$ est le produit semi-direct de I et du groupe de Galois $\text{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\text{nr}}/\mathbb{Q}_p)$ de l'extension non ramifiée maximale. Si σ est dans

$\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, on écrit son image dans $\text{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\text{nr}}/\mathbb{Q}_p)$ comme $\bar{\sigma} \times x(\sigma)$ avec $\bar{\sigma} \in \text{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\text{nr}}/\mathbb{Q}_p)$ et $x \in I$. L'élément $x(\sigma)$ correspond à $\prod_{q \nmid p} x_q(\sigma)$. De plus, σ opère dans I et si x correspond à $\prod x_q$, alors $\sigma(x)$ correspond à $\prod a_q(\sigma) x_q$ où $a_q(\sigma)$ est une unité q -adique.

Considérons le produit direct

$$\mathcal{W} = \text{SL}(2, \mathbb{C}) \times W_{\mathbb{Q}_p}$$

qui est intervenu dans [10]. $W_{\mathbb{Q}_p}$ est le groupe de Weil. Supposons que φ soit un homomorphisme continu de $\mathcal{W}$ dans ${}^L G(\mathbb{C})$ qui satisfasse aux conditions suivantes:

- i) La composition de φ avec la projection de ${}^L G$ sur $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ donne le plongement canonique de $W_{\mathbb{Q}_p}$ dans $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$;
- ii) Il existe un élément h dans ${}^L G^0(\mathbb{C})$ tel que (a) la restriction de $\varphi' = \text{ad } h \circ \varphi$ à $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, (b) si $|w|$ est la valeur absolue habituelle de w dans $W_{\mathbb{Q}_p}$, alors pour chaque w

$$\varphi' \left(\begin{pmatrix} |w|^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |w|^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \times w \right)$$

est dans ${}^L G(\overline{\mathbb{Q}})$, et, de plus, est semi-simple et ses valeurs propres dans chaque représentation rationnelle de ${}^L G$ sont de la forme $|w|^m \zeta$ où m est un entier et ζ une racine de l'unité.

On peut associer à un tel φ un homomorphisme continu $\tilde{\varphi}$ de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ dans ${}^L G(\overline{\mathbb{Q}}_l)$. Si $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ est l'image de $w \in W_{\mathbb{Q}_p}$, alors $|w|^{-1} = a_l(\sigma)$ est un nombre rationnel et on pose

$$\tilde{\varphi}(\sigma) = \varphi' \left(\begin{pmatrix} |w|^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |w|^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \times w \right) \varphi' \left(\begin{pmatrix} 1 & x_l(\sigma) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

On définit $\tilde{\varphi}$ en général par continuité. Faute d'une terminologie plus adéquate, nous dirons provisoirement que φ est de type A_0 .

Enfin, revenant à la représentation ρ_p^M , nous rappelons qu'elle est attachée à une représentation π de $G(\mathbb{A})$ de dimension infinie. Soit $\pi'(g) = |\det g|^{-\frac{1}{2}} \pi(g)$. Alors π' est aussi une représentation automorphe et comme telle un produit tensoriel $\otimes \pi'_v$ sur les places de $\mathbb{Q}$. D'une façon qui reste à expliquer, on attache à part quelques difficultés, qui ne se présentent pas dans le cas que nous considérons¹ à π'_p un homomorphisme $\varphi = \varphi(\pi'_p)$ du groupe $\mathcal{M}$ dans ${}^L G(\mathbb{C})$. Ce qu'on voudrait démontrer est que φ est de type A_0 et qu'on peut choisir le ξ_p ci-dessus égal à $\tilde{\varphi}$.

On peut probablement le démontrer sans grande difficulté pour presque tout p en mêlant les méthodes de [8] et [9] et en s'appuyant sur la formule de trace de Lefschetz, mais dans [9] on a supposé carrément qu'aucune ramification n'intervient. C'est Rapoport qui a soulevé le problème des places où la variété se réduit mal, et tout ce qui suit sont les fruits, pas encore mûrs, de nos efforts communs. Il a voulu d'abord généraliser un résultat de Cherednik [5]. En bref, Cherednik a découvert que si $F = \mathbb{Q}$, l'algèbre D est ramifiée en p , et K contient le groupe des unités de $D \otimes \mathbb{Q}_p$, alors l'ensemble des points sur S avec coefficients dans $\mathbb{Q}_p$ est la courbe de Mumford [13] attachée à l'algèbre qu'on obtient en tordant D à l'infini où il devient ramifié et en p où il cesse d'être ramifié. Cette découverte permet en particulier d'étudier la façon dont S se réduit en p (Casselman, Morita, Deligne? des références précises n'existent pas).

Mais une généralisation directe de ce résultat à un corps de degré quelconque ne semble pas exister. Au moins nous n'avons pas su la trouver. Il semble néanmoins que les variétés se réduisent d'une façon intelligible, quoique nous n'ayons examiné que des cas très simples. En fait, pour nous orienter nous

avons commencé avec le cas $[F : \mathbb{Q}] = 2$. De plus nous avons supposé que p reste premier dans F , que D est ramifiée en p tandis que p est non ramifiée dans F , et que K contient le groupe des unités de $D \otimes \mathbb{Q}_p$.

Même dans ce cas, manquant de temps et de la facilité géométrique requise, nous n'avons encore ni une proposition ni une démonstration complètes, et il me faut donc me contenter d'expliquer ce que nous pouvons presque démontrer et de donner l'ébauche d'une démonstration. J'espère que celle-ci sera assez claire pour que le spécialiste, au contraire de nous, n'ait aucune difficulté à en combler les lacunes.²

La démonstration repose sur la théorie des modules de Dieudonné, dont le mérite, pour les mathématiciens de talent modeste, est qu'elle ramène des problèmes difficiles sur des variétés abéliennes aux problèmes élémentaires de l'algèbre linéaire. On peut traiter ceux-ci sans avoir tout à fait compris ni ceux-là ni les liens entre les deux. C'est ce que nous avons fait, et cet article ne prétend à rien, sauf à attirer l'attention des spécialistes de la théorie sur le rôle qu'elle pourrait jouer dans l'étude des variétés de Shimura.

Avant d'aborder la discussion purement géométrique, nous rappelons la définition de l'homomorphisme $\varphi = \varphi(\pi'_p)$ attaché à π'_p . Le groupe G sur $\mathbb{Q}$ provient d'un groupe G' sur F par restriction de scalaires, G' étant soit $GL(2)$ soit une forme tordue de ce groupe. Donc le groupe $G(\mathbb{Q}_p)$ est égal à $\prod_{v|p} G'(F_v)$, le produit étant pris sur les places de F divisant p . Le L -groupe ${}^L_{G'}$ de G' est le produit direct de $GL(2)$ et du groupe $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$. Pour chaque place v divisant p on introduit la groupe

$$\mathcal{M}_v = SL(2, \mathbb{C}) \times W_{F_v}.$$

Des homomorphismes φ_v de $\mathcal{M}_v$ dans ${}^L_{G'}(\mathbb{C})$ étant donnés tels que le

diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{N}_v & \xrightarrow{\varphi_v} & {}^L G_v(\mathbb{C}) \\
 \downarrow & & \searrow \\
 W_{F_v} & \longrightarrow & \text{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \nearrow \text{Gal}(\overline{F}/F)
 \end{array}$$

soit commutatif, on construit un homomorphisme φ de $\mathcal{N}$ dans ${}^L G(\mathbb{C})$, et, plus précisément, dans le L -groupe local, l'image inverse de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ dans ${}^L G(\mathbb{C})$. On se rend compte que dans le diagramme on prend $\overline{F} = \overline{\mathbb{Q}}$ et on étend v à $\overline{F}$. Les places divisant p correspondent d'une façon univoque aux doubles classes dans $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \backslash \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) / \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Pour définir $\overline{\mathbb{Q}}_p$ on étend la valuation attachée à la place p à $\overline{\mathbb{Q}}$ et on obtient une extension de la valuation v correspondante à la double classe de σ dans $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en prenant la valeur absolue de $\sigma^{-1}(x)$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, $x \in \overline{F} = \overline{\mathbb{Q}}$. Cela dit, on voit que les éléments d'une double classe correspondent à l'ensemble $\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \backslash \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, où $\overline{F}_v = \overline{\mathbb{Q}}_p$.

Pour chaque v on définit le groupe ${}^L G_v$ exactement comme on a défini ${}^L G$, sauf que l'on remplace $\text{Gal}(\overline{F}/F) \backslash \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ par $\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \backslash \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Le L -groupe local est l'ensemble des éléments de $\prod_{v|p} {}^L G_v$, dont tous les composants ont la même projection dans $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. Il suffit donc pour définir φ de définir $\varphi'_v : \mathcal{N} \longrightarrow {}^L G_v(\mathbb{C})$.

Si $s \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$, alors φ'_v envoie s dans la fonction sur $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ à valeur constante $\varphi_v(s)$. Pour définir $\varphi'_v(w)$ pour $w \in W_{\mathbb{Q}_p}$, il faut choisir un ensemble U de représentants u des classes dans

$\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \backslash \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) = W_{F_v} \backslash W_{\mathbb{Q}_p}$. Si $w \in W_{F_v}$ on écrit $\varphi_v(w) = a(w) \times \sigma(w)$ où $\sigma(w)$ est l'image de w dans $\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$ et $a(w)$ est dans $\text{GL}(2, \mathbb{C})$. Si $w \in W_{\mathbb{Q}_p}$ et $u \in U$ soit $uw = \alpha_u(w)u'$ avec $u' \in U$ et $\alpha_u(w) \in W_{F_v}$. Alors

$\varphi'_v(w) = a'(w) \times \sigma(w)$ où $a'(w)$ est la fonction qui envoie la classe $G(\overline{F}_v/F_v)u$ sur $\varphi_v(a_u(w))$. On vérifie sans peine que φ'_v ainsi défini est un homomorphisme.

Enfin la représentation π'_p de $G(\mathbb{Q}_p)$ est un produit tensoriel $\otimes \pi'_v$ où π'_v est une représentation irréductible de $G'(F_v)$. Il est bien connu qu'on peut, en général [14], attacher à π'_v un homomorphisme φ_v de $\mathcal{H}_v^1$ dans ${}^L G'(\mathbb{C})$. On construit $\varphi = \varphi(\pi'_p)$ à partir de ces φ_v de la façon qu'on vient d'expliquer.

Nous ne considérons que le cas où p reste premier dans F , et il n'existe donc qu'une place v divisant p . De plus, la restriction de π'_v au groupe des unités de $D \otimes \mathbb{Q}_p$ doit être triviale. Il suit de là que π'_v est de dimension 1. Si $s \times w \in \mathcal{W}_v^1$, alors, d'après la définition,

$$\varphi_v(s \times w) = s\mu(w) \times \sigma(w),$$

où μ est un caractère complexe de W_{F_v} . Le problème est de démontrer que $\varphi = \varphi(\pi'_p)$ est de type A_0 et que ρ_p^M est équivalent à $r \circ \tilde{\varphi}$. Si φ_v lui-même est de type A_0 , on peut attacher à φ_v , ou, plus précisément, à sa composition avec la projection de ${}^L G'_v$ sur son premier facteur $GL(2)$, une représentation ℓ -adique $\tilde{\varphi}_v$ de dimension 2 de $\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$. Cette représentation agit dans l'espace X de dimension 2 et la représentation $r \circ \tilde{\varphi}$ agit dans $V = X \otimes X$. D'après la définition, $\tilde{\varphi}_v$ sera réductible mais indécomposable et il existera

alors une filtration canonique $0 \subsetneq X_0 \subsetneq X_1 = X$ de X . Parce que la restriction de $r \circ \tilde{\varphi}$ à $\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$ est $\tilde{\varphi}_v \otimes \tilde{\varphi}_v$, la filtration induite sur V ,

$0 \subsetneq V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2$, est canoniquement attachée à la représentation $r \circ \tilde{\varphi}$, et si

ρ_p^M est équivalent à $r \circ \tilde{\varphi}$, il existe une filtration semblable sur l'espace de ρ_p^M .

Pour vérifier que ρ_p^M est équivalent à $r \circ \tilde{\varphi}$, on commence par établir que cette filtration existe, et le seul but de cet exposé est de décrire sa source géométrique dans le formalisme des cycles évanescents. On note que $\dim V_0 = 1$, tandis que

$\dim V_1 = 3$.

Pour étudier la représentation de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ dans la cohomologie de S on peut remplacer S par $S \otimes \mathbb{Q}_p$. Ceci fait une fois pour toutes, on dénote la nouvelle variété par S . Cette variété sera la solution d'un problème de modules qu'on pourra formuler sur $\mathbb{Z}_p$. J'admettrai sans démonstration que le problème a une solution qui est un schéma $\mathbb{G}$ propre sur $\mathbb{Z}_p$ à fibre générale S et à fibre spéciale S_0 .

La théorie des modules de Dieudonné nous permettra de décrire S_0 d'une façon concrète et géométrique, et la théorie des déformations des variétés abéliennes nous permettra d'analyser sa situation dans $\mathbb{G}$. Enfin, cette connaissance acquise, nous utiliserons le formalisme des cycles évanescents pour construire une suite spectrale, que nous étudierons à l'aide des opérateurs de Hecke pour obtenir la filtration cherchée. Le lecteur est averti encore une fois que je ne donnerai qu'une ébauche de la démonstration parce que les détails font encore défaut.

Nous rappelons d'abord les données pour le problème de modules résolu par $\mathbb{G}$. Soit $\mathbb{Z}_v$ l'anneau des entiers de F_v , et soit $\mathcal{O}$ un ordre de D tel que $\mathcal{O}_v = \mathcal{O} \otimes \mathbb{Z}_v$ est l'ordre maximal de $D_v = D \otimes F_v$. Si $X \longrightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}_p$ est un schéma sur $\mathbb{Z}_p$ la première donnée est une variété abélienne A sur X de dimension 4 et un homomorphisme ψ de $\mathcal{O}$ dans l'algèbre des endomorphismes de A sur X , tel que la trace de $\psi(a)$ sur l'espace tangent à l'identité est la trace réduite de a , ou plutôt son image dans $\Gamma^0(\mathcal{O}(X))$. Le groupe K est égal à $K_p K^p$, où K_p est le groupe des unités de D_v et K^p est contenu dans $G(\mathbb{A}_f^p)$, $\mathbb{A}_f^p$ étant l'anneau des adèles finis dont le composant en p est 0. Si n est premier à p , soit A_n le noyau de multiplication par n . K^p opère sur

$$Y = \varprojlim_n \text{Isom}_{\mathcal{O}}(A_n, \mathcal{O}/n\mathcal{O})$$

parce qu'il opère sur O/nO . Pour avoir un ensemble complet de données, il faut ajouter à A et ψ un élément de Y à K^p près.

Pour étudier la fibre spéciale, on prend $X = \text{Spec } K$, où K est un corps algébriquement clos de caractéristique p . Dans ce cas on attache à A son module de Dieudonné $M = M(A)$, sur lequel O opère à droite parce que M est un foncteur contravariant. Non seulement O , mais aussi l'anneau de Witt $W(K)$ opère sur M et, partant, le produit tensoriel $O_K = W(K) \otimes O$. On a supposé que p reste premier dans F . On peut donc identifier O_K à l'algèbre des paires de matrices

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ pc_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ pc_2 & d_2 \end{pmatrix} \quad a_i, b_i, c_i, d_i \in W(K) .$$

O_v lui-même s'identifie aux paires

$$\alpha : \begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^\sigma & b^\sigma \\ pc^\sigma & d^\sigma \end{pmatrix},$$

où a, b, c, d sont contenu dans $W(\mathbb{F}_p)$, et

$$a^{\sigma^2} = d, d^{\sigma^2} = a, b^{\sigma^2} = c, c^{\sigma^2} = b .$$

Le symbole σ dénote le Frobenius habituel sur $W(K)$.

Le produit tensoriel N de M et O_p s'identifie à l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{D} \\ \mathcal{U} & \mathcal{V} \end{pmatrix}$$

à coefficients dans le corps quotient $\mathcal{P}$ de $W(K)$. L'action d'un élément de O_K envoie cette matrice sur

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ pc_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 \\ pc_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

Le module M lui-même s'identifie aux matrices pour lesquelles $\mathcal{V} \in K_0$, $\mathcal{W} \in L_0$, $u \in K_1$, $v \in L_1$, K_i , L_i étant des réseaux dans l'espace vectoriel de dimension deux sur $\mathcal{P}$. Ces réseaux sont assujettis à des contraintes, et cela pour deux raisons. M est un module de Dieudonné, et en tant que tel possède l'opérateur F . De plus, l'espace dual de l'espace tangent à l'identité de A s'identifie à M/FM . Donc la trace de a sur M/FM est égal à $a + d + a^\sigma + d^\sigma = a + a^\sigma + a^{\sigma^2} + a^{\sigma^3}$.

Se souvenant que F commute avec O et que $Fa = a^\sigma F$, $a \in W(K)$, on voit qu'on peut supposer que

$$F : \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} d \begin{pmatrix} u_1^\sigma & v_1^\sigma \\ u_2^\sigma & v_2^\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \\ x_1^\sigma & y_1^\sigma \\ x_2^\sigma & y_2^\sigma \end{pmatrix}$$

où d est une matrice à coefficients dans $\mathcal{P}$. Soient

$$A_i = K_i^{\sigma^{-i}} \quad A_{i+2} = d^{-\sigma^{-2}} L_i^{\sigma^{-2-i}} \quad 0 \leq i \leq 1 ;$$

définissons A_i pour tout i par

$$A_{i+4} = p^{-1} d^{-\sigma^{-2}} d^{-\sigma^{-4}} A_i^{\sigma^{-4}}.$$

Les conditions sur la trace de a impliquent alors que

$$pA_{i+1} \subsetneq A_i \subsetneq A_{i+1}$$

pour tout i , et la suite $\{A_i\}$ définit un chemin dans l'immeuble de Bruhat-Tits de $GL(2, \mathbb{F})$.

Le module M est invariant par rapport à O et O_v , et, par conséquent,

$$pL_i \subsetneq K_i \quad K_i \subsetneq L_i.$$

Ces relations, qui impliquent à leur tour l'invariance, sont équivalentes à

$$pUA_i \subsetneq A_{i+2} \subsetneq UA_i$$

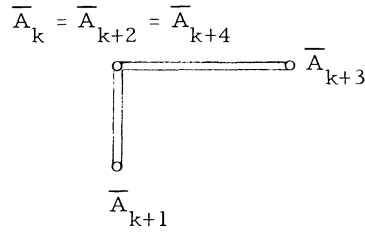
si

$$UA_i = p^{-1} d^{-\sigma^{-2}} A \sigma^{-2}.$$

La longueur du chemin depuis A_i jusqu'à A_{i+4} est 4. Donc le déterminant de d est d'ordre 1, et la distance entre UA_i et A_{i+2} impaire. Nous concluons qu'elle est égale à un. Le choix des coordonnées dans K_0 reste à notre disposition, et nous pouvons remplacer d par $cdc^{-\sigma}$. Donc il n'y a que deux possibilités vraiment distinctes:

$$a) \quad d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \quad b) \quad d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}.$$

Si on identifie deux réseaux dont l'un est un multiple de l'autre, on passe de l'immeuble de $GL(2, \mathbb{F})$ à celui de $SL(2, \mathbb{F})$. Nous dénotons la classe de réseaux contenant A par $\overline{A}$. Dans le cas a) il y a exactement deux classes $\overline{B}_0, \overline{B}_1$ telles que $\text{dist}(\overline{B}_i, \overline{UB}_i) = 1$, et le chemin $\{\overline{A}_i\}$ est de la forme

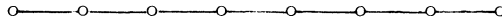


où $\bar{A}_k = \bar{B}_j$ et $\bar{A}_{k+3} = \bar{B}_{j'}$ avec j différent de j' . Nous distinguons deux cas sous-jacents

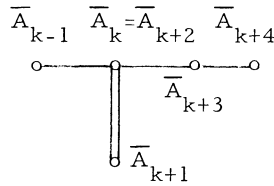
$$\text{a. i)} \quad \bar{A}_{k+1} = \bar{A}_{k+3} \qquad \text{a. ii)} \quad \bar{A}_{k+1} \neq \bar{A}_{k+3} .$$

Même avec ces distinctions il y a encore plusieurs possibilités suivant le choix de k et j , deux pour a.i) et huit pour a.ii).

Dans le cas b), l'ensemble des $\bar{B}$ tels que $\text{dist}(\overline{UB}, \bar{B}) = 1$ forme un appartement, que nous représentons par une ligne horizontale



L'appartement donné, le chemin $\{\bar{A}_i\}$ a la forme



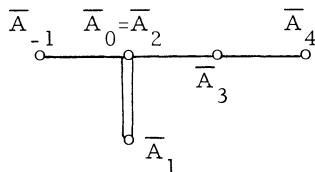
On note l'existence de chemins dégénérés avec $\bar{A}_{k+1} = \bar{A}_{k-1}$ ou $\bar{A}_{k+1} = \bar{A}_{k+3}$, qui seront dits de type b.i), tandis que les chemins non-dégénérés seront dits de type b.ii). Le choix de k nous donne quatre possibilités pour le type b.i) et quatre possibilités pour le type b.ii), parce que la possibilité $k = k_0$,

$$\bar{A}_{k+1} = \bar{A}_{k+3} \text{ se confond avec } k = k_0 + 1, \bar{A}_{k+1} = \bar{A}_{k-1}.$$

Pour utiliser cette classification des modules de Dieudonné attachés aux points de S_0 , il faut lui adjoindre une classification plus géométrique des variétés A . Mais d'abord nous observons que le module M étant donné, avec sa représentation par $\{A_k^0\}$, on peut construire d'autres modules en remplaçant A_{k+1} par n'importe quel A'_{k+1} contenant A_k et à une distance un de A_k . Un module M' ainsi obtenu est le module de Dieudonné d'une variété abélienne A' isogène à A , l'ordre du noyau de l'isogénie $A \rightarrow A'$ étant une puissance de p . L'isogénie est défini par l'application $m \rightarrow pm$ de M dans M' . Pour attacher à A' les données du problème de modules, on observe que O continue d'opérer sur A' et que A'_n est isomorphe à A_n si $(n, p) = 1$.

L'ensemble des A'_{k+1} forme un $\mathbb{P}^1(k)$, et nous obtenons une application $\mathbb{P}^1(k) \rightarrow S_0(k)$; nous admettons sans démonstration qu'elle est définie par un morphisme $\mathbb{P}^1 \rightarrow S_0$. Il n'y a qu'un de ces $\mathbb{P}^1$ passant par un point de type a.ii) ou b.ii), mais à cause de l'ambiguïté du choix de k , deux passant par un point de type b.i) et quatre par un point de type a.i). D'ailleurs, si on prend K^p suffisamment petit, on peut supposer que l'application est un plongement.

Ensuite, nous attachons à chaque point de $S_0(k)$ un sous-ensemble de $\{0, 1, 2, 3\}$, l'ensemble de tous les m , $0 \leq m < 4$, pour lequel il existe un vecteur non nul x dans l'espace tangent tel que $\psi(a)x = a^{-\sigma^m}x$ pour tout $a \in O$. La barre dénote le résidu modulo p . Cet ensemble se calcule facilement à l'aide du module M . Par exemple, pour le diagramme



les modules M et FM sont les ensembles

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} * & \frac{*}{p} \\ * & * \\ \lambda \frac{\varepsilon}{p} + * & \frac{*}{p} \\ \lambda \frac{1}{p} + * & \frac{*}{p} \end{pmatrix} \right\} \quad FM = \left\{ \begin{pmatrix} * & \lambda \frac{\varepsilon^\sigma}{p} + * \\ p* & \lambda + p* \\ * & \frac{*}{p} \\ * & * \end{pmatrix} \right\}$$

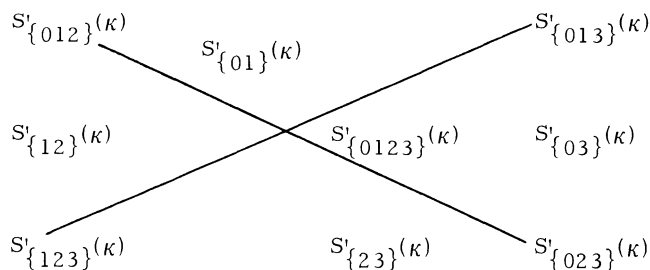
ε est donné mais λ et les astérisques dénotent des éléments arbitraire de $W(K)$.

La représentation de O sur M/FM est équivalente à celle donnée par

$$a = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^\sigma & b^\sigma \\ pc^\sigma & d^\sigma \end{pmatrix} \right) \longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ 0 & \bar{d} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \bar{a}^\sigma & \bar{b}^\sigma \\ 0 & \bar{d}^\sigma \end{pmatrix}.$$

L'ensemble attaché à un point de ce type est alors $\{2, 3\}$.

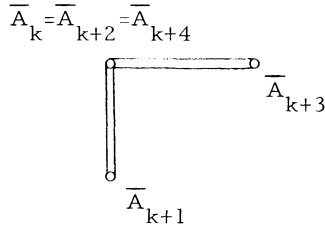
Faisant des calculs semblables pour des autres types, on découvre qu'il n'y a que neuf ensembles possibles. Donc l'ensemble $S_0(K)$ se coupe en neuf morceaux, que nous nous représentons schématiquement:



Le rapport entre les diagrammes et cette partition est le suivant:

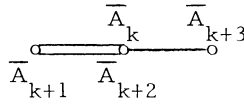
a. i) Un point de type a. i) est contenu dans $S'_{0123}(K)$.

a. ii) Un point avec le diagramme



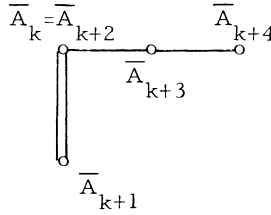
est contenu dans $S'_{\{ij\}}(\kappa)$ si $\{k, k+1, i, j\} \equiv \{0, 1, 2, 3\} \pmod{4}$.

b. i) Un point avec le diagramme



est contenu dans $S'_{\{hij\}}(\kappa)$ si $\{k, h, i, j\} \equiv \{0, 1, 2, 3\} \pmod{4}$.

b. ii) Un point avec le diagramme



est contenu dans $S'_{\{ij\}}$ si $\{k, k+1, i, j\} \equiv \{0, 1, 2, 3\} \pmod{4}$.

Il est intuitivement évident que l'ensemble attaché à des données du problème de modules s'accroît ou reste le même quand ces données se spécialisent, et nous l'admettons sans démonstration. Par conséquent, $S_X(\kappa)$ est contenu dans $\bigcup_{Y \supseteq X} S'_Y(\kappa)$, si S_X est la clôture de S'_X pour la topologie de Zariski.

Nous donnerons une esquisse d'une démonstration de la proposition suivante:

Proposition. La variété S_X est lisse de dimension $4 - |X|$ et $S_X(k) = \bigcup_{Y \supseteq X} S'_Y(k).$

Avec cette proposition, nous pouvons compléter la description de la fibre spéciale, S_0 . Elle est la réunion des quatre variétés $S_{\{01\}}$, $S_{\{12\}}$, $S_{\{03\}}$, $S_{\{23\}}$, qui sont lisses, mais pas nécessairement connexes, et de dimension 2. Les variétés $S_{\{ij\}}$ et $S_{\{jk\}}$ se croisent en $S_{\{ijk\}}$. D'ailleurs, par chaque point de $S_{\{ij\}}$ passe un seul des $\mathbb{P}^1$ décrits dessus entièrement contenu dans $S_{\{ij\}}$. Si $\{i, j, k, k'\} = \{0, 1, 2, 3\}$, alors chacun de ces $\mathbb{P}^1$ contient un seul point de $S_{\{ijk\}}$ et un seul point de $S_{\{ijk'\}}$, qui se confondent si et seulement si les points sur le $\mathbb{P}^1$ sont de type a). Donc ces $\mathbb{P}^1$ nous donnent des fibrations $S_{\{ij\}}(k) \longrightarrow S_{\{ijk\}}(k)$, $S_{\{ij\}}(k) \longrightarrow S_{\{ijk'\}}(k)$, dont les fibres sont les $\mathbb{P}^1$ eux-mêmes. Nous admettons que ces fibrations sont définies par des morphismes lisses $S_{\{ij\}} \longrightarrow S_{\{ijk\}}$. Deux courbes distinctes $S_{\{ijk\}}$, $S_{\{i'j'k'\}}$ se croisent en $S_{\{0123\}}$. Enfin, une composante connexe de S_0 est une réunion $S_{\{01\}}^o \cup S_{\{12\}}^o \cup S_{\{23\}}^o \cup S_{\{03\}}^o$ de composantes connexes des $S_{\{ij\}}$, et chaque composante connexe de S_0 contient la même nombre de points de $S_{\{0123\}}$. Pour vérifier ce dernier point, on utilise les correspondances de Hecke, qui agissent transitivement sur les composantes de S_0 .

Pour démontrer la proposition, nous considérons le voisinage formel $\mathcal{G}_s$ d'un point de $S_0(k)$ dans $\mathcal{G} \otimes_{\mathbb{Z}_p} W(k)$. Il suffit de vérifier les faits suivants:

- i) Si $s \in S'_{ij}(k)$, alors $\mathcal{G}_s$ est isomorphe à $\text{Spec } W(k)[[X, Y]]$, avec des indéterminées X et Y .
- ii) Si $\{ijk\}$ est un des neuf sous-ensembles il y a exactement deux paires, disons $\{ij\}$ et $\{jk\}$, qui sont contenues dans $\{ijk\}$ et qui se trouvent aussi parmi les neuf sous-ensembles. Si $s \in S'_{\{ijk\}}(k)$, alors $\mathcal{G}_s$ est isomorphe à $\text{Spec } W(k)[[X, Y, U]]/(XU = p)$. Les points donnés par une application

$$\eta : W(\kappa)[[X, Y, U]] \longrightarrow \kappa'$$

avec $\eta(p) = 0$, sont dans $S'_{\{ij\}}(\kappa')$ si $\eta(X)$ est inversible et dans $S'_{\{jk\}}(\kappa')$ si $\eta(U)$ est inversible.

iii) Si $s \in S'_{\{0123\}}(\kappa)$, alors $\mathbb{G}_s$ est isomorphe à $\text{Spec } W(\kappa)[[X_0, X_1, X_2, X_3]]/(X_0X_2 = p, X_1X_3 = p)$. Si

$$\eta : W(\kappa)[[X_0, X_1, X_2, X_3]] \longrightarrow \kappa'$$

et $\eta(p) = 0$, alors η donne un point de $S'_{ij}(\kappa')$ si $\eta(X_i)$ et $\eta(X_j)$ sont inversibles.

Même le lecteur qui ne s'est pas trop fâché de tout que nous avons déjà admis sans démonstrations, ne sera peut-être pas trop convaincu par ce que nous dirons sur la démonstration de ces assertions, parce que nous utiliserons la théorie des déformations des variétés abéliennes (cf. [12], §V) d'une façon qui me semble vraiment inadmissible dans l'état actuel de nos connaissances.

Nous considérons un anneau local $\mathcal{O}$ à corps quotient κ , et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} W(\kappa) & \longrightarrow & \mathcal{O} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \kappa & \end{array}$$

Puis nous cherchons un sous-module libre $\mathcal{U}$ de $\mathcal{M} = M \otimes_{W(\kappa)} \mathcal{O}$ qui est invariant par rapport à $\mathcal{O}$ et tel que sa projection sur

$\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \kappa = M \otimes_{W(\kappa)} \kappa = M/pM$ est égal à VM/pM , V étant le décalage. Nous trouverons une solution universelle $\mathcal{U}, \mathcal{N}$ de ce problème, et nous admettrons, non sans quelques scrupules, que $\mathbb{G}_s$ est isomorphe à $\text{Spec } \mathcal{U}$. L'idéal maximal de $\mathcal{U}$ ne sera pas même un idéal à puissances divisées. La

construction de $\mathcal{U}$ se fait avec des calculs élémentaires, et il suffit de traiter un $s \in S_{\{0123\}}^{(K)}$.

Supposons que M soit l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} * & \frac{*}{p} \\ * & * \\ \frac{*}{p} & \frac{*}{p} \\ * & \frac{*}{p} \end{pmatrix}$$

où un astérisque représente un élément de $W(K)$. On obtient m en prenant pour les astérisques des éléments de $\mathcal{U}$, le dénominateur assumant un sens symbolique. Parce que

$$VM = \begin{pmatrix} * & * \\ p* & * \\ * & \frac{*}{p} \\ * & * \end{pmatrix}$$

tandis que $\mathcal{U}$ est invariant par rapport à O , il existe des éléments x_0, x_1, x_2, x_3 dans l'idéal maximal tels que $\mathcal{U}$ est l'ensemble des

$$\begin{pmatrix} \lambda & \frac{\mu x_2}{p} \\ \lambda x_0 & \mu \\ \frac{\nu x_1}{p} & \frac{\varepsilon}{p} \\ \nu & \frac{\varepsilon x_3}{p} \end{pmatrix}$$

où $\lambda, \mu, \nu, \epsilon$ sont des éléments arbitraires dans $\mathcal{A}$. En plus, l'invariance par rapport à O exige que $x_0 x_2 = p, x_1 x_3 = p$. On obtient $\mathcal{B}\mathcal{L}$ en prenant des indéterminées liées par ces relations.

Si on décrit la représentation de O dans $\mathcal{B}\mathcal{L}$ par des matrices, utilisant les coordonnées $\lambda, \mu, \nu, \epsilon$, on obtient la somme directe

$$\alpha \longrightarrow \begin{pmatrix} a & bX_0 \\ cX_2 & d \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a^\sigma & b^\sigma X_1 \\ c^\sigma X_3 & d^\sigma \end{pmatrix}.$$

Ceux qui croient que $\mathbb{G}_s$ est isomorphe à $\text{Spec } \mathcal{A}$ pourront croire aussi que, d'après [11] et [12], le dual de l'espace tangent de l'extension de A à $\mathbb{G}_s$ est isomorphe à $\mathcal{N}$. L'affirmation iii) s'ensuit.

Les affirmations i), ii), et iii) nous sont importantes, parce qu'elles sont à la base de nos calculs cohomologiques, et je regrette de ne pouvoir donner pour l'instant une démonstration plus rigoureuse.

Selon [6] – mais on y parle des faisceaux à torsion – il y a une suite spectrale $H^p(S_0, \psi^q)$ qui converge vers la cohomologie ℓ -adique de la fibre générale. La fibre ψ_s^q du faisceau ψ^q au point s de S_0 s'obtient en prenant la q -cohomologie de l'intersection de $\mathbb{G}_s$ et de la fibre générale S . En nous appuyant sur i), ii), iii) et notre intuition, nous concluons que les ψ_s^q sont donnés par le tableau suivant:

$$\begin{array}{llll} s \in S'_{\{ij\}} & \psi_s^0 = \mathbb{Q}_\ell & \psi_s^q = 0, q > 0 \\ s \in S'_{\{ijk\}} & \psi_s^0 = \mathbb{Q}_\ell & \psi_s^1 = \mathbb{Q}_\ell & \psi_s^q = 0, q > 1 \\ s \in S'_{\{0123\}} & \psi_s^0 = \mathbb{Q}_\ell & \psi_s^1 = \mathbb{Q}_\ell \oplus \mathbb{Q}_\ell & \psi_s^2 = \mathbb{Q}_\ell \quad \psi_s^q = 0, q > 2. \end{array}$$

Soient N le nombre des composantes connexes de la fibre spéciale ou de

la fibre générale, n le nombre des pointes de $S_{\{0123\}}$ dans une de ces composantes, et g le genre d'une composante connexe d'une des courbes $S_{\{ijk\}}$. Nous allons établir que les dimensions de $H^p(S_0, \psi^q)$ sont données par le tableau suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & nN & & & & \\
 & & & & & & \\
 & 2N & 4gN+2(n-1)N & & 4N & & \\
 q \uparrow & & & & & & \\
 & N & 0 & & (n-1)N+4N & 4gN & 4N \\
 & & & & & & \\
 & & & p \longrightarrow & & &
 \end{array}$$

Le N intervient pour une raison évidente et nous pouvons remplacer S_0 dans nos considérations par une composante connexe S_0^o . Les valeurs dans la ligne du haut sont évidentes.

Le faisceau ψ^0 est le faisceau constant. Pour calculer les valeurs dans la ligne du bas, nous utiliserons la désingularisation de S_0^o qui est la somme directe des $S_{\{ij\}}^o$ contenus dans S_0^o . Nous calculons les nombres de Betti de $S_{\{ij\}}^o$ à l'aide de la suite spectrale associée à la filtration $S_{\{ij\}}^o \longrightarrow S_{\{ijk\}}^o$, dont les fibres sont des $\mathbb{P}^1$, et obtenons $b_0 = 1$, $b_1 = g$, $b_2 = 2$, $b_3 = g$, $b_4 = 1$.

D'autre part on peut les calculer comme les nombres de Betti du faisceau $R_\varphi^0 \mathbb{Q}_\ell$ si $\varphi : \coprod S_{\{ij\}}^o \longrightarrow S_0^o$. On a une suite exacte:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow R_\varphi^0 \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

Le faisceau E est concentré sur la réunion des courbes $S_{\{ijk\}}^o$ et se décrit facilement.

Nous calculons les nombres de Betti du faisceau E , et puis, au moyen de

la suite exacte longue, ceux du faisceau constant $\psi^0 = \mathbb{Q}_\ell$. Nous utilisons une fois encore une désingularisation

$$\eta : \coprod S_{\{ijk\}}^0 \longrightarrow \cup S_{\{ijk\}}^0$$

et une suite exacte

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow R_\eta^0 \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow E' \longrightarrow 0 .$$

E' est concentré sur $S_{\{0123\}}$ et ses fibres sont des $\mathbb{Q}_\ell$. Il n'y a qu'une seule condition qu'une section de E sur $\cup S_{\{ijk\}}^0 - S_{\{0123\}}$ s'étende à $\cup S_{\{ijk\}}^0$, et, par conséquent, $\dim H^0(E) = 3$. Il s'ensuit que $\dim H^1(E) = 4g + (n-1)$.

Nous rappelons que les nombres de Betti de la fibre générale peuvent se calculer par les méthodes complexes de [2], et que, en particulier, $\dim H^1(S(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = \dim H^1(S, \mathbb{Q}_\ell) = 0$. Il suit de la suite spectrale que $\dim H^1(\psi^0) = 0$. Nous obtenons alors

$$0 \rightarrow H^1(S_0^0, R_\varphi^0 \mathbb{Q}_\ell) \rightarrow H^1(E) \rightarrow H^2(\psi^0) \rightarrow H^2(S_0^0, R_\varphi^0 \mathbb{Q}_\ell) \rightarrow H^2(E) \rightarrow H^3(\psi^0) \rightarrow H^3(S_0^0, R_\varphi^0 \mathbb{Q}_\ell) \rightarrow 0,$$

et

$$\dim H^4(\psi^0) = \dim H^4(S_0^0, R_\varphi^0 \mathbb{Q}_\ell) = 4 .$$

Il n'y a que les dimensions de $H^2(\psi^0)$ et $H^3(\psi^0)$ qui restent inconnues dans la ligne du bas. Elles sont les nombres donnés si la flèche

$$H^2(S_0^0, R_\varphi^0 \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^2(E)$$

est surjective. On peut expliciter facilement la flèche, et on voit qu'elle est surjective si les classes de cohomologie dans $H^2(S_{\{ij\}}^0, \mathbb{Q}_\ell)$ attachées à $S_{\{ijk\}}$ et $S_{\{ijk'\}}$ sont différentes. Si elles ne le sont pas, l'image est de dimension 3,

et la ligne en bas devrait être

$$N \quad 0 \quad (n-1)N+5N \quad 4gN+N \quad 4N .$$

Pour écarter cette possibilité, il nous faudra faire intervenir les opérateurs de Hecke.

Mais d'abord, considérons la ligne du milieu. Sur la réunion, $\bigcup S_{\{ijk\}}^o$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \varphi^1 \longrightarrow \psi^1 \longrightarrow E'' \longrightarrow 0 ,$$

où φ^1 est localement constant de dimension 1, et E'' , dont les fibres sont des $\mathbb{Q}_\ell$, est concentré sur $S_{\{0123\}}$. La dimension de $H^2(\varphi^1) \simeq H^2(\psi^1)$ est égale à 0 ou à 4, et elle est 4 si et seulement si φ^1 est le faisceau constant. Mais on sait déjà que, dans la suite spectrale convergeant vers $H^*(S, \mathbb{Q}_\ell)$, $\dim E_2^{4,0} = 4N$, tandis que $\dim E_\infty^{4,0} = N$. La dimension ne peut tomber qu'en passant de $E_2^{4,0}$ à $E_3^{4,0}$, et, par conséquent, $\dim E_2^{2,1} \geq 3N$: c'est-à-dire que $\dim H^2(\psi^1) \geq 3$. Nous concluons que φ^1 est le faisceau constant, et, parce qu'il est alors intuitivement évident que $\dim H^2(\psi^1) = 2$, nous pouvons ensuite calculer toutes les dimensions dans la ligne du milieu. Il suit des dimensions données pour les $E_2^{p,q}$, même tenant compte des deux possibilités pour la ligne du bas, que la dimension de $H^2(S, \mathbb{Q}_\ell)$ est $4(n-1)N+2N$, parce que les dimensions nous permettent de calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré.

La suite spectrale nous donne une filtration de $H^2(S, \mathbb{Q}_\ell)$. Les opérateurs de Hecke agissent non seulement sur S mais aussi sur $\mathbb{G}$ et la fibre spéciale et, partant, sur la suite spectrale. La découplant suivant les valeurs propres des opérateurs de Hecke, nous obtenons de toutes petites suites spectrales convergeant vers les espaces sous-jacents aux représentations ρ_p^M , et qui nous

donnent la filtration cherchée de ces espaces.

Pour construire le tableau des dimensions, il nous a fallu construire les $E_2^{p,q}$ à partir des espaces $H^0(S_0) \simeq H^0(S)$, $H^0(S_{\{0123\}})$, et $H^1(S_{\{ijk\}})$. On peut décider facilement où ces espaces interviennent dans le tableau, parce que $H^1(S_{\{ijk\}})$ contribue gN aux dimensions, tandis que $H^0(S)$ contribue N , et $H^0(S_{\{0123\}})$ contribue nN .

Les valeurs propres dans $H^0(S)$ sont celles provenant de N représentations automorphes de dimension 1 de $G(\mathbb{A})$ qui sont triviales sur K . Soient D_{--} l'algèbre de quaternions obtenue en tordant D aux deux places infinies, et G_{--} le groupe sur $\mathbb{Q}$ associé à D_{--} . Parce que les variétés abéliennes définissant les pointes de $S_{\{0123\}}$ sont isogènes au produit de deux courbes elliptiques super-singulières, nous pouvons identifier $S_{\{0123\}}$ avec la réduction modulo p de la variété de Shimura attachée à G et au groupe $K_{--} = K \subseteq G(\mathbb{A}_f) = G_{--}(\mathbb{A}_f)$. C'est une variété de dimension 0.

Les valeurs propres des opérateurs de Hecke sur $H^0(S_{\{0123\}})$ sont celles provenant des représentations de $G_{--}(\mathbb{A})$ qui sont triviales sur $G_{--}(\mathbb{R})$, et qui contiennent la représentation triviale de K_{--} . D'après §16 de [7], il y a un plongement de l'ensemble des représentations automorphes de $G(\mathbb{A})$ ou de $G_{--}(\mathbb{A})$ dans l'ensemble des représentations automorphes de $GL(2, \mathbb{A}_F)$, qui donne un plongement de l'ensemble des représentations automorphes de $G_{--}(\mathbb{A})$ dans l'ensemble de celles de $G(\mathbb{A})$. Les représentations de dimension 1 de $G_{--}(\mathbb{A})$ s'envoient sur celles de dimension 1 de $G(\mathbb{A})$, et les autres, au moins celles qui contiennent la représentation triviale de K_{--} , sur les représentations de $G(\mathbb{A})$ auxquelles sont attachés les ρ^M . Les valeurs propres des opérateurs de Hecke sont conservées par le plongement. Les représentations de dimension infinie et celles de dimension 1 donne des valeurs propres différentes.

Supposons que nous puissions vérifier que les valeurs propres sur les $H^1(S_{\{ijk\}})$ sont encore différentes. Alors de la suite spectrale totale, nous obtenons les pièces suivantes:

i) N suites, attachées chacune à une représentation de $G(\mathbb{A})$ de dimension 1

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ E_2^{p,q} : & 2 & & 0 & & 4 & \\ & & & & & & \\ & 1 & & 0 & & 4 & & 0 & & 4 \end{array} .$$

Tenant compte des égalités: $E_3^{2,1} = E_\infty^{2,1} = 0$, $E_3^{0,1} = E_\infty^{0,1} = 0$, et $\dim E_3^{4,0} = 1$, nous déduisons le tableau suivant pour les dimensions des $E_3^{p,q}$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ E_3^{p,q} : & 0 & & 0 & & 0 & \\ & & & & & & \\ & 1 & & 0 & & 2 & & 0 & & 1 \end{array} .$$

Par conséquent, la suite dégénère ici. Il faut se souvenir, d'ailleurs, que nous avons trouvé une autre possibilité pour la ligne du bas, qui donnerait:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ E_2^{p,q} : & 2 & & 0 & & 4 & \\ & & & & & & \\ & 1 & & 0 & & 5 & & 1 & & 4 \end{array} .$$

Avec ces dimensions, ou bien $E_2^{3,0}$ ou bien $E_2^{2,1}$ survivrait jusqu'à la limite, ce qui est impossible.

ii) $(n-1)N$ suites, attachées chacune à une représentation de dimension infinie:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 1 & & \\
 & & & & & \\
 E_2^{p,q} : & 0 & & 2 & & 0 \\
 & & & & & \\
 & 0 & & 0 & & 1 & & 0 & & 0 \ .
 \end{array}$$

La suite dégénère, et donne la filtration cherchée.

iii) Ce qui reste est:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 0 & & \\
 & & & & & \\
 E_2^{p,q} : & 0 & & 4gN & & 0 \\
 & & & & & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 4gN & & 0 \ .
 \end{array}$$

Si elle donnait de la cohomologie, elle en donnerait en degré 3, et, par conséquent, tous les $E_3^{p,q}$ sont 0.

Les valeurs propres donnant les suites spectrales ii) sont celles définies par des représentations π de dimension infinie, dont la représentation correspondante $\prod$ de $GL(2, \mathbb{A}_F)$ a une composante locale $\prod_v$ qui est spéciale, v étant la place de F divisant p . Pour vérifier que les valeurs propres intervenant dans les $H^1(S_{\{ijk\}})$ ne sont pas imbriquées avec celles des cas i) et ii), il suffit de démontrer qu'elles sont définies par des représentations automorphes $\prod$ de dimension infinie de $GL(2, \mathbb{A}_F)$ qui ont une composante locale $\prod_v$ non ramifiée, car on peut alors appliquer le théorème fort de multiplicité 1 [3].

Soit D_{+-} l'algèbre de quaternions obtenue en tordant D à une des places infinies de F et en v , et soit G_{+-} le group correspondant. Nous pouvons identifier $G_{+-}(\mathbb{A}_f^p)$ à $G(\mathbb{A}_f^p)$, tandis que $G_{+-}(\mathbb{Q}_p) = GL(2, F_v)$. Soit $K_{+-} \subseteq G_{+-}(\mathbb{A}_f)$ le produit d'un sous-groupe compact maximal de $GL(2, F_v)$ et du groupe K^p . La variété de Shimura S_{+-} attachée à G_{+-} et K_{+-} est une courbe

définie sur F , et on anticipe qu'elle a bonne réduction en v . Les opérateurs de Hecke définis par les éléments de $G(\mathbb{A}_f^p) = G_{+-}(\mathbb{A}_f^p)$ agissent sur $H^1(S_{+-})$ et les valeurs propres sont celles définies par des représentations automorphes $\prod$ de $GL(2, \mathbb{A}_F)$ dont la composante locale $\prod_v$ est non ramifiée, contenant la représentation triviale de $K_{+-} \cap G_{+-}(\mathbb{Q}_p)$.

Il suffirait de vérifier qu'il y a un isomorphisme de $S_{\{ijk\}}$ avec la réduction de S_{+-} en v qui respecte les opérateurs de Hecke. Le corps de définition de l'isomorphisme n'est pas important. Heureusement, on peut se débrouiller avec moins. La variété S_{+-} ne provient pas d'un problème de modules, mais elle est une sous-variété ouverte d'une telle variété de Shimura, disons $\tilde{S}_{+-}$. Nous ne changeons pas beaucoup les opérateurs de Hecke en élargissant la variété, et il suffit de comparer la fibre spéciale de $\tilde{S}_{+-}$ et les courbes sur la fibre spéciale d'un élargissement analogue $\tilde{S}$ de S .

Le lecteur ne s'étonnera pas qu'il s'agisse encore de calculs et d'idées que nous n'avons qu'esquissés, et je me contenterai de les présenter d'une façon très brève. On examine le module de Dieudonné d'une variété abélienne A définissant un point de la fibre spéciale de $\tilde{S}_{+-}$, et on trouve qu'en divisant A par un sous-groupe dont l'ordre est une puissance de p on obtient des données pour le problème résolu par $\tilde{S}$. Donc nous obtenons un morphisme de la fibre spéciale de $\tilde{S}_{+-}$ dans celle de $\tilde{S}$. Parce que l'étude des modules de Dieudonné se fait comme ci-dessus, je m'arrêterai après que j'aie décrit les problèmes de modules auxquels $\tilde{S}$ et $\tilde{S}_{+-}$ sont attachés.

Nous choisissons une extension quadratique totalement imaginaire E de F contenue dans D , et dans laquelle p reste premier. Soit O_E l'intersection de E et O . Soit $\langle u, v \rangle$ la forme hermitienne sur D , un espace vectoriel sur E , donnée par $\langle u, v \rangle = \text{trace}_{F/\mathbb{Q}} \text{trace}_{D/F} v^\vee Tu$, où $v \longrightarrow v^\vee$ est l'involution

canonique sur D , et $T \in E$ satisfait l'équation: $T^\vee = -T$. Soit $\varpi \in \mathcal{O}$ un générateur de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_v$, et supposons que $\langle u, v \rangle \in \mathbb{Z}_p$ pour tout $v \in \mathcal{O}_v$ si et seulement si $\varpi u \in \mathcal{O}_v$. Une telle forme existe. Soit

$$\tilde{G} = \{g \in \text{Isom}_E(D) \mid \langle gu, gv \rangle \equiv \lambda(g) \langle u, v \rangle, \lambda(g) \in G_m\}.$$

Fixons un sous-groupe compact $\tilde{K}$ ouvert de $\tilde{G}(\mathbb{A}_f)$. Les données pour $\tilde{S}$ sont:

- i) Une variété abélienne de dimension 4.
- ii) Un homomorphisme ψ de $\mathcal{O}_E$ dans l'algèbre des endomorphismes de A , tel que la trace de $\psi(a)$ sur l'espace tangent est $\text{trace}_{E/\mathbb{Q}}(a)$.
- iii) Une polarisation $\lambda: A \rightarrow A^\vee$, qui induit $\psi(x) \rightarrow \psi(x^\vee)$ dans $\psi(\mathcal{O}_E)$, et dont le noyau est un sous-groupe de A_p . λ est donné à un élément de $F^\times$ près.
- iv) Un ensemble de $\mathcal{O}_E$ -isomorphismes compatibles φ_n de A_n avec $\mathcal{O}/n\mathcal{O}$, $(n, p) = 1$, donné à $\tilde{K}$ près. Les φ_n sont assujettis à la condition:

$$\langle x, \lambda(y) \rangle = \langle c_n \varphi_n(x), \varphi_n(y) \rangle \quad c_n \in (\mathcal{O}_F/n\mathcal{O}_F)^\times.$$

Nous supposons que $\tilde{K} = \tilde{K}_p \tilde{K}^p$, où $\tilde{K}_p$ est un sous-groupe compact maximal de $\tilde{G}(\mathbb{Q}_p)$ et $\tilde{K}^p \subseteq \tilde{G}(\mathbb{A}_f^p)$. Les données pour $\tilde{S}_{+-}$ sont analogues.

Nous remplaçons D par D_{+-} , et nous plongeons E dans D_{+-} . Nous remplaçons $\mathcal{O}$ par un ordre $\mathcal{O}'$ de D_{+-} qui est isomorphe à $\mathcal{O}$ en dehors de v et maximal en v , et T par T' , pour obtenir $\{u, v\}$ au lieu de $\langle u, v \rangle$. Nous supposons que $\{u, v\} \in \mathbb{Z}_p$ pour tout $v \in \mathcal{O}'_v$ si et seulement si $u \in \mathcal{O}'_v$. La condition sur la trace de $\psi(a)$ change. La trace de $\psi(a)$ doit être égale à $2\psi_1(a) + \psi_2(a) + \psi_3(a)$, où ψ_2 et ψ_3 sont les plongements de E dans $\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}$ au dessus de la place infinie de F où D est déployé, et ψ_1 est un des plongements au dessus de l'autre place.

Ajouté en février, 1979

1. D'ailleurs, d'après des résultats récents de Kutzko, ces difficultés n'existent plus.
2. J'ai reçu en janvier, 1979 une lettre, envoyée en octobre, 1978, de Thomas Zink à Berlin, qui donne des démonstrations rigoureuses d'une grande partie de ce que j'ai raconté dans cette conférence. Mais il lui a fallu modifier légèrement quelques énoncés.

Références

1. A. Borel, Automorphic L-functions, à paraître dans Proc. A.M.S. Summer Institute, Corvallis.
2. ——— et N. Wallach, Seminar on continuous cohomology, à paraître dans les Annals of Math. Studies.
3. W. Casselman, On some results of Atkin and Lehner, Math. Ann. t. 201 (1973).
4. ———, The Hasse-Weil zeta-function of some moduli varieties, à paraître dans Proc. A.M.S. Summer Institute, Corvallis.
5. I. V. Cherednik, L'uniformisation des courbes algébriques par des sous-groupes arithmétiques de $\mathrm{PGL}_2(k_w)$ à quotient compact (en russe), Mat. Sbor., t. 100 (1976).
6. P. Deligne, Exposé I de SGA7.I, Springer Lecture Notes 288.
7. H. Jacquet et R. P. Langlands, Automorphic forms on $\mathrm{GL}(2)$, Springer Lecture Notes 114.
8. R. P. Langlands, Modular forms and ℓ -adic representations, dans Modular functions of one variable II, Springer Lecture Notes 349.
9. ———, On the zeta-functions of some simple Shimura varieties, à paraître dans le Jour. Can. des Math.
10. ———, Automorphic representations, Shimura varieties, and motives, à paraître dans Proc. A.M.S. Summer Institute, Corvallis.
11. B. Mazur et W. Messing, Universal extensions and one-dimensional crystalline cohomology, Springer Lecture Notes 370.
12. W. Messing, The crystals associated to Barsotti-Tate groups, with applications to abelian schemes, Springer Lecture Notes 264.
13. D. Mumford, An analytic construction of degenerating curves over complete local rings, Comp. Math., t. 24 (1972).
14. J. Tunnell, On the local Langlands conjecture for $\mathrm{GL}(2)$, Inv. Math., t. 46 (1978).

Robert Langlands
The Institute for Advanced Study
Princeton

Astérisque

JEAN-PIERRE SERRE

Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate

Astérisque, tome 65 (1979), p. 155-188

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__65__155_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GROUPES ALGÈBRIQUES ASSOCIÉS AUX MODULES DE HODGE-TATE

par

Jean-Pierre SERRE

Soit V un module de Hodge-Tate sur un corps local d'inégale caractéristique. Le sous-groupe d'inertie du groupe de Galois qui opère sur V est "presque" algébrique : il est ouvert dans un certain sous-groupe algébrique H_V du groupe linéaire GL_V .

Quelle est la structure de la composante neutre H_V^0 de H_V ?

Le but de cet exposé est de donner deux cas où l'on peut répondre, au moins en partie, à cette question :

i) le cas commutatif, où H_V^0 est un tore, quotient de ceux qui interviennent dans les groupes de Lubin-Tate ;

ii) le cas où V n'a pour poids que 0 et 1 (exemple : module de Tate d'une variété abélienne, ou d'un groupe p -divisible) ; les facteurs simples de H_V^0 sont alors de type classique (A_n , B_n , C_n ou D_n), et leurs poids dans V sont des poids minuscules.

Ces résultats font l'objet des §§ 2 et 3 ; le § 1 contient divers préliminaires.

§ 1. La catégorie des modules de Hodge-Tate1.1. Notations

La lettre K désigne un corps local, i.e. un corps complet pour une valuation discrète. On note A_K l'anneau des entiers de K , et $k = A_K/p_K$ son corps résiduel. On suppose K de caractéristique zéro, et k algébriquement clos de caractéristique $p \neq 0$, de sorte que K est extension du corps p -adique $\mathbb{Q}_p$.

On note $\bar{K}$ une clôture algébrique de K , et C sa complétion. Le groupe de Galois G_K de $\bar{K}$ sur K opère sur C .

On note $\chi : G_K \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique de G_K . On a $s(z) = z^{\chi(s)}$ pour tout $s \in G_K$ et pour toute racine de l'unité $z \in \bar{K}$ d'ordre une puissance de p .

Un module galoisien sur K est un $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel V de dimension finie sur lequel G_K opère continûment. On note ρ_V l'homomorphisme de G_K dans $\text{Aut}(V)$ qui définit l'action de G_K . Le groupe $G_V = \text{Im}(\rho_V)$ est un sous-groupe compact (donc de Lie) du groupe de Lie p -adique $\text{Aut}(V)$. Si $x \in V$ et $s \in G_K$ (ou $s \in G_V$), on note $s(x)$ le transformé de x par s .

1.2. Modules de Hodge-Tate (cf. [5], [6], [9])

Soit V un module galoisien sur K . L'action de G_K sur V se prolonge au C -espace vectoriel $V_C = C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ par la formule

$$s(\sum c_\alpha \otimes x_\alpha) = \sum s(c_\alpha) \otimes s(x_\alpha) \quad (c_\alpha \in C, x_\alpha \in V).$$

Si $i \in \mathbb{Z}$, on note $V_C\{i\}$ l'ensemble des $x \in V_C$ tels que

$$s(x) = \chi(s)^i x \quad \text{pour tout } s \in G_K.$$

C'est un K -sous-espace vectoriel de V_C . On pose :

$$V_C(i) = C \otimes_K V_C\{i\}.$$

D'après un théorème de Tate ([5], prop. 4) les injections $V_C\{i\} \rightarrow V_C$ se prolongent en une injection C -linéaire

$$e : \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_C(i) \rightarrow V_C.$$

Cela permet d'identifier $V_C(i)$ à un C -sous-espace vectoriel de V_C . Si l'on

pose

$$v_i = \dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}}(i) = \dim_K V_{\mathbb{C}}\{i\} ,$$

on a $\sum v_i \leq \dim V$ et $v_i = 0$ pour presque tout i .

L'entier v_i est appelé la multiplicité de i comme poids de V .

On dit que V est un module de Hodge-Tate si ϵ est bijectif, autrement dit si $V_{\mathbb{C}}$ est somme (nécessairement directe) des $V_{\mathbb{C}}(i)$, ou encore si $\sum v_i = \dim V$.

La catégorie des modules de Hodge-Tate est stable par dualité, produit tensoriel, somme directe, passage aux sous-modules et modules quotients. Dans la terminologie de Saavedra ([3], p. 193), c'est une $\otimes$ -catégorie tannakienne sur $\mathbb{Q}_p$, munie d'un foncteur fibre, à savoir le foncteur qui associe à un module V le $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel sous-jacent.

Exemples

Soit $\underline{A}$ un groupe p -divisible sur A_K (resp. une variété abélienne sur K), et soit $V_p(\underline{A})$ son module de Tate. Alors $V_p(\underline{A})$ est un module de Hodge-Tate de poids 0 et 1 , avec multiplicités $v_0 = \dim \underline{A}'$, $v_1 = \dim \underline{A}$, où $\underline{A}'$ est le dual de $\underline{A}$.

Dans le cas p -divisible, ce résultat est dû à Tate [9]. Dans le cas des variétés abéliennes, il est dû à Raynaud (non publié) qui l'a déduit du cas p -divisible en utilisant le théorème de "réduction semi-stable" de Grothendieck-Mumford (SGA 7 I).

Ces modules, et ceux de la $\otimes$ -catégorie qu'ils engendrent, sont (essentiellement) les seuls exemples connus de modules de Hodge-Tate. Il serait intéressant d'en construire d'autres ; cela devrait être possible en utilisant la théorie de Fontaine [2].

1.3. L'enveloppe algébrique de G_V

Soit V un module galoisien sur K , de dimension n . Nous noterons GL_V le groupe algébrique des automorphismes de l'espace vectoriel V ; si L est une extension de $\mathbb{Q}_p$, le groupe $GL_V(L)$ des L -points de GL_V est le groupe

$$\text{Aut}_L(L \otimes V) .$$

On a en particulier :

$$GL_V(\mathbb{Q}_p) = \text{Aut}(V) \quad \text{et} \quad GL_V(\mathbb{C}) = \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}) .$$

Le choix d'une base de V identifie GL_V à GL_n .

Soit G_V le sous-groupe de $GL_V(\mathbb{Q}_p)$ image de G_K , cf. n° 1.1. Nous noterons H_V l'enveloppe algébrique de G_V (cf. [5]), autrement dit le plus petit sous-groupe algébrique H de GL_V tel que $H(\mathbb{Q}_p)$ contienne G_V ; c'est l'adhérence de Zariski de G_V dans GL_V .

La bigèbre Λ_V de H_V s'identifie à la $\mathbb{Q}_p$ -algèbre de fonctions sur G_K engendrée par les coefficients de la représentation ρ_V et de sa duale, mises sous forme matricielle.

On a par construction $G_V \subset H_V(\mathbb{Q}_p)$. Si $\mathfrak{g}_V$ (resp. $\mathfrak{h}_V$) désigne l'algèbre de Lie du groupe p-adique G_V (resp. du groupe algébrique H_V), on a

$$\mathfrak{g}_V \subset \mathfrak{h}_V \subset \text{End}(V),$$

et $\mathfrak{h}_V$ est la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de $\text{End}(V)$ contenant $\mathfrak{g}_V$ (cf. [1], § 7).

Remarque

Soit Rep_V la $\otimes$ -catégorie de G_K -modules engendrée par V et son dual. On peut caractériser H_V comme le groupe des automorphismes du foncteur fibre naturel sur Rep_V , au sens de Saavedra [3], II, § 4 ; de plus, Rep_V s'identifie à la catégorie des représentations linéaires du groupe algébrique H_V ([3], loc.cit.).

THÉOREME 1 ([4], [7]) - Si V est un module de Hodge-Tate, G_V est ouvert dans $H_V(\mathbb{Q}_p)$.

Une formulation équivalente est :

THÉOREME 1' - On a $\mathfrak{g}_V = \mathfrak{h}_V$, autrement dit $\mathfrak{g}_V$ est une sous-algèbre de Lie algébrique de $\text{End}(V)$.

La démonstration du th. 1' donnée par Sen ([4], § 6) utilise le th. 2 ci-dessous. On peut également en donner une démonstration directe : on traite d'abord le cas où G_V est abélien, ce qui est facile à partir de résultats de Tate (cf. § 2, ainsi que [6], chap. III) ; le cas général s'en déduit grâce au théorème de Chevalley ([1], § 7, cor. (7.9)) disant que $\mathfrak{g}_V$ contient l'algèbre dérivée $[\mathfrak{h}_V, \mathfrak{h}_V]$ de $\mathfrak{h}_V$.

1.4. Le groupe à un paramètre h_V

A partir de maintenant, on suppose que V est un module de Hodge-Tate.

La graduation de V_C par les $V_C(i)$ correspond à une action du groupe multiplicatif G_m sur V_C : à tout élément c de $C^* = G_m(C)$, on associe l'automorphisme $h_V(c)$ de V_C défini par la formule

$$h_V(c).x = c^i x \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z} \text{ et tout } x \in V_C(i).$$

On obtient ainsi un homomorphisme de C-groupes algébriques

$$h_V : G_m/C \rightarrow GL_{V/C},$$

où G_m/C et $GL_{V/C}$ désignent les groupes algébriques déduits de G_m et de GL_V par extension des scalaires à C . Il n'est pas difficile de voir que $\text{Im}(h_V)$ est

contenu dans H_V/C ; cela résulte par exemple de l'interprétation de H_V comme groupe d'automorphismes du foncteur fibre de la $\otimes$ -catégorie Rep_V , cf. 1.3 (noter que, si W est un objet de Rep_V , h_W est le composé de h_V et de l'homomorphisme naturel $H_V/C \rightarrow H_W/C$). Comme G_m est connexe, le groupe $\text{Im}(h_V)$ est contenu dans H_V^0/C , où H_V^0 désigne la composante neutre de H_V .

Le résultat suivant, conjecturé dans [7] et démontré dans [4], joue un rôle essentiel dans toute la suite :

THÉORÈME 2 (Sen) - Le groupe H_V^0 est le plus petit sous-groupe algébrique de GL_V défini sur $\mathbb{Q}_p$ qui, après extension des scalaires à $\mathbb{C}$, contient $\text{Im}(h_V)$.

Voici quelques conséquences de ce théorème :

COROLLAIRE 1 - Les propriétés suivantes d'un sous-espace vectoriel W de V sont équivalentes :

- a) W est stable par H_V^0 ;
- b) W est stable par un sous-groupe ouvert de G_V ;
- c) W_C est stable par $\text{Im}(h_V)$;
- d) W_C est somme de ses intersections avec les $V_C(i)$.

Les équivalences $a) \Leftrightarrow b)$ et $c) \Leftrightarrow d)$ sont immédiates. L'équivalence de a) et c) résulte du th. 2.

COROLLAIRE 2 - Soit $x \in V$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) x est fixé par H_V^0 ;
- b) l'orbite $G_V x$ de x est finie ;
- c) x est fixé par $\text{Im}(h_V)$;
- d) x appartient à $V_C(0)$.

Ici encore, les équivalences $a) \Leftrightarrow b)$ et $c) \Leftrightarrow d)$ sont immédiates ; celle de a) et c) résulte du th. 2.

COROLLAIRE 3 - Si 0 est le seul poids de V , i.e. si $V_C = V_C(0)$, on a $H_V^0 = \{1\}$, et le groupe G_V est un groupe fini.

Cela résulte du cor. 2.

Remarque. Inversement, on peut déduire le th. 2 du cor. 3, appliqué à un module convenable de Rep_V .

Variante du théorème 2

Soit Γ_C le groupe des $\mathbb{Q}_p$ -automorphismes (non nécessairement continus) du corps $\mathbb{C}$. Si $\sigma \in \Gamma_C$ et $c \in \mathbb{C}$, notons ${}^\sigma c$ le conjugué de c par σ ; si $x = \sum c_\alpha \otimes x_\alpha$ est un élément de V_C (avec $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $x_\alpha \in V$), posons

$${}^\sigma x = (\sigma \otimes 1)x = \sum {}^\sigma c_\alpha \otimes x_\alpha.$$

Le conjugué de h_V par σ est l'homomorphisme ${}^\sigma h_V$ de $G_{m/C}$ dans $H_{V/C}$ déduit de h_V par le changement de corps de base $\sigma : C \rightarrow C$; il correspond à la décomposition de V_C en somme directe des ${}^\sigma V_C(i)$; on peut le caractériser par la formule

$${}^\sigma h_V({}^\sigma c){}^\sigma x = {}^\sigma (h_V(c)x) \quad \text{pour tout } c \in C^* \text{ et tout } x \in V_C.$$

Un élément c de C appartient à $\mathbb{Q}_p$ si et seulement si l'on a ${}^\sigma c = c$ pour tout $\sigma \in \Gamma_C$: cela résulte de ce que C est algébriquement clos. De là on déduit facilement l'équivalence du th. 2 avec :

THÉOREME 2' - Le groupe $H_{V/C}^0$ est engendré par les conjugués $\text{Im}({}^\sigma h_V)$, $\sigma \in \Gamma_C$, du groupe $\text{Im}(h_V)$.

Voici maintenant une traduction en termes d'algèbres de Lie : notons φ_V la dérivée de h_V en l'élément neutre, autrement dit l'endomorphisme de V_C tel que

$$\varphi_V(x) = ix \quad \text{si } i \in \mathbb{Z}, x \in V_C(i).$$

En vertu d'un résultat connu ([1], th. 7.6), le th. 2 équivaut à :

THÉOREME 2'' - L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_V$ est la plus petite $\mathbb{Q}_p$ -sous-algèbre de Lie de $\text{End}(V)$ qui, après extension des scalaires à C , contient φ_V .

Ou encore :

THÉOREME 2''' - Les conjugués ${}^\sigma \varphi_V$ de φ_V ($\sigma \in \Gamma_C$) engendrent l'algèbre de Lie $C \otimes \mathfrak{h}_V$.

C'est sous cette forme que le th. 2 est démontré par Sen [4]. Sen prouve même un résultat en apparence plus fort : le sous-espace vectoriel Φ de $\text{End}(V_C)$ engendré par les ${}^\sigma \varphi_V$ est égal à $C \otimes \mathfrak{h}_V$. (Ce résultat peut en fait se déduire du th. 2'''. En effet, le cor. à la prop. 1 du n° 1.5 ci-après entraîne que l'ensemble des ${}^\sigma \varphi_V$, $\sigma \in \Gamma_C$, est stable par $\varphi \mapsto g^{-1} \varphi g$ pour tout $g \in G_V$. Il en est donc de même de Φ , et, par dérivation, cela entraîne $[\Phi, \mathfrak{h}_V] \subset \Phi$. Comme Φ est contenu dans $C \otimes \mathfrak{h}_V$, on en déduit $[\Phi, \Phi] \subset \Phi$, et Φ est une algèbre de Lie ; d'après le th. 2''', cette algèbre de Lie est égale à $C \otimes \mathfrak{h}_V$.)

1.5. Degré de transcendance de h_V

Formules de fonctorialité

On a vu au n° 1.4 que l'on peut conjuguer h_V par tout élément σ de $\Gamma_C = \text{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(C)$, et que l'on obtient ainsi un homomorphisme ${}^\sigma h_V$ de $G_{m/C}$ dans $H_{V/C}^0$.

Supposons que ${}^\sigma(K) = K$ et que σ soit continu. Si $s \in G_K$, on a alors $\sigma^{-1} s \sigma \in G_K$. Cela permet de définir une représentation $\rho_{\sigma V}$ de G_K dans $\text{Aut}(V)$

par :

$$\rho_{\sigma V}(s) = \rho_V(\sigma^{-1} s \sigma) \quad \text{pour tout } s \in G_K.$$

L'homomorphisme $h_{\sigma V}$ attaché à $\rho_{\sigma V}$ n'est autre que le conjugué ${}^{\sigma}h_V$ de h_V par σ ; cela se voit par transport de structure.

Supposons maintenant que σ appartienne à G_K , et soit $g = \rho_V(\sigma)$ son image dans $H_V(\mathbb{Q}_p)$. La représentation $\rho_{\sigma V}$ est alors isomorphe à ρ_V : on a

$$\rho_{\sigma V}(s) = g^{-1} \rho_V(s) g \quad \text{pour tout } s \in G_K.$$

On en déduit par fonctorialité :

$$h_{\sigma V} = g^{-1} h_V g = \text{Int}(g^{-1}) \circ h_V,$$

où $\text{Int}(g^{-1})$ désigne l'automorphisme intérieur de H_V défini par g^{-1} .

Utilisant le fait que $h_{\sigma V} = {}^{\sigma}h_V$, on obtient finalement le résultat suivant (que l'on peut aussi vérifier par calcul direct) :

PROPOSITION 1 - Si $\sigma \in G_K$ a pour image g dans $H_V(\mathbb{Q}_p)$, on a

$${}^{\sigma}h_V = \text{Int}(g^{-1}) \circ h_V.$$

COROLLAIRE - On a ${}^{\sigma}\varphi_V = g^{-1} \varphi_V g$.

Pour $\sigma \in G_K$, les ${}^{\sigma}h_V$ et les ${}^{\sigma}\varphi_V$ sont donc des conjugués de h_V et φ_V à la fois au sens galoisien, et au sens de la conjugaison par les automorphismes intérieurs de H_V .

Corps de définition de h_V

Les groupes algébriques G_m et H_V^0 sont définis sur $\mathbb{Q}_p$. On peut donc parler du corps de définition $\mathbb{Q}_p(h_V)$ de l'homomorphisme $h_V : G_m/C \rightarrow H_V^0/C$: c'est le plus petit sous-corps de C contenant $\mathbb{Q}_p$ sur lequel h_V soit rationnel ; c'est aussi le corps de définition de l'élément φ_V de $C \otimes \text{End}(V)$.

Le corps $K(h_V)$ engendré par K et $\mathbb{Q}_p(h_V)$ est le corps de définition de h_V sur K .

Nous allons déterminer les degrés de transcendance des extensions $\mathbb{Q}_p(h_V)$ et $K(h_V)$:

THÉOREME 3 - Soit Z_V le commutant de $\text{Im}(h_V)$ dans H_V^0/C . On a

$$\deg.\text{tr}_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(h_V) = \deg.\text{tr}_K K(h_V) = \dim H_V - \dim Z_V.$$

Démonstration

Choisissons un tore maximal T de H_V^0 défini sur $\mathbb{Q}_p$; on sait que c'est pos-

sible ([1], th. 18.2) et que tout sous-tore de H_V^0/C est conjugué d'un sous-tore de T/C ([1], cor. 11.3). En appliquant ceci au tore $\text{Im}(h_V)$, on en conclut qu'il existe un homomorphisme

$$h_1 : G_m/C \rightarrow T/C$$

et un élément g de $H_V^0(C)$ tels que $h_V = \text{Int}(g) \circ h_1$. Soit E le corps de définition de h_1 . C'est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ ([1], prop. 8.11). Le commutant Z_1 de $\text{Im}(h_1)$ dans $H_{V/E}^0$ est défini sur E . Soit $X = H_{V/E}^0/Z_1$ l'espace homogène correspondant ; c'est une variété algébrique sur E . On a

$$\dim X = \dim H_V^0 - \dim Z_1 = \dim H_V - \dim Z_V.$$

Soit x l'image de g dans $X(C)$; le point x ne dépend pas du choix de g , car g est déterminé à une multiplication à droite près par un élément de $Z_1(C)$. Si L est une sous-extension de C contenant E , on voit tout de suite que x est rationnel sur L si et seulement si h_V est rationnel sur L . Le corps

$$E(h_V) = E \cdot \mathbb{Q}_p(h_V)$$

est donc égal au corps de définition $E(x)$ du point x de X . Le th. 3 équivaut à dire que

$$\deg. \text{tr}_E E(x) = \deg. \text{tr}_{K.E} K.E(x) = \dim X,$$

ou encore que x est un point générique de X sur E et sur $K.E$. Montrons que x est générique sur $K.E$ (l'assertion relative à E en résultera). Soit X' la plus petite sous-variété de X contenant x et définie sur $K.E$; il s'agit de prouver que $X' = X$. Soit G' le sous-groupe ouvert de G_K formé des éléments qui fixent E , et dont l'image dans $H_V(\mathbb{Q}_p)$ appartient à $H_V^0(\mathbb{Q}_p)$. Si $\sigma \in G'$, et si g est l'image de σ dans $H_V^0(\mathbb{Q}_p)$, la prop. 1 montre que $g^{-1}x = \sigma x$, d'où $g^{-1}x \in X'(C)$ puisque la variété X' est définie sur $K.E$. On a donc

$$\rho_V(G') \cdot x \subset X'(C),$$

et comme $\rho_V(G')$ est dense dans H_V^0 pour la topologie de Zariski, ceci entraîne $H_V^0(C) \cdot x \subset X'$, d'où $X' = X$, cqfd.

Exemple. Supposons que V soit un module de Hodge-Tate de dimension 2, avec poids 0 et 1 de multiplicité 1, et que H_V soit égal à GL_V ; c'est le cas lorsque V est le module de Tate d'un groupe formel à un paramètre de hauteur 2 dont l'anneau des endomorphismes est réduit à $\mathbb{Z}_p$, cf. [5], th. 5. La décomposition de Hodge-Tate de V_C est définie par les deux droites $V_C(0)$ et $V_C(1)$. Soient c_0 et c_1 les pentes de ces droites, prises par rapport à une base de V . Le corps de définition de h_V est le corps $\mathbb{Q}_p(c_0, c_1)$ engendré par c_0 et c_1 . On a

$$\dim H_V = 4 \quad \text{et} \quad \dim Z_V = 2 ;$$

la variété X est de dimension 2 (c'est un produit de deux droites projectives).
D'après le th. 3, on a

$$\deg.\text{tr}_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(c_0, c_1) = \deg.\text{tr}_K K(c_0, c_1) = 2 ;$$

autrement dit, c_0 et c_1 sont algébriquement indépendants sur K .

1.6. Passage à la limite : le groupe proalgébrique H

Domination

Soient V et W deux modules de Hodge-Tate. Nous dirons que W est dominé par V si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

- (i) W appartient à la $\otimes$ -catégorie Rep_V engendrée par V et son dual ;
- (ii) la bigèbre Λ_W du groupe H_W (cf. 1.3) est contenue dans la bigèbre Λ_V du groupe H_V ;
- (iii) il existe un morphisme de groupes algébriques (nécessairement unique)
 $\pi_W^V : H_V \rightarrow H_W$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & H_V(\mathbb{Q}_p) \\ G_K \swarrow & & \downarrow \\ & & H_W(\mathbb{Q}_p) \end{array} .$$

(L'équivalence de (ii) et (iii) est immédiate. Celle de (i) et (iii) résulte, par exemple, de [3], II.4.3.2 a), p. 156. L'hypothèse "de Hodge-Tate" n'intervient pas.)

Passage à la limite

La domination est une relation de préordre filtrante sur la catégorie des modules de Hodge-Tate. Cela permet de définir le groupe proalgébrique

$$H = \varprojlim H_V ,$$

limite projective des H_V relativement aux morphismes π_W^V . Ce groupe est un groupe affine sur $\mathbb{Q}_p$. Sa bigèbre Λ est la réunion des bigèbres Λ_V .

Par passage à la limite, les ρ_V et les h_V définissent des homomorphismes

$$\rho : G_K \rightarrow H(\mathbb{Q}_p) \quad \text{et} \quad h : G_{m/C} \rightarrow H/C .$$

Toute représentation linéaire (de dimension finie) de H fournit, via ρ , un module galoisien dont la décomposition de Hodge-Tate est donnée par h ; inversement,

tout module de Hodge-Tate s'obtient de cette manière. Ainsi, la $\otimes$ -catégorie des modules de Hodge-Tate s'identifie à celle des représentations linéaires du groupe proalgébrique H (cf. [3], II, § 4).

Si l'on remplace la catégorie des modules de Hodge-Tate par la sous-catégorie des modules admissibles (au sens de Fontaine [2], 3.2.5), on obtient un groupe proalgébrique H_{adm} , qui est quotient de H . De même, si l'on remplace cette catégorie par la $\otimes$ -sous-catégorie engendrée par les modules de Tate des groupes p-divisibles, on trouve un groupe H_{div} , qui est quotient de H_{adm} , donc aussi de H .

Le groupe H/H^0

Soit $H^0 = \varprojlim H_V^0$ la composante neutre de H . Le groupe quotient

$$H/H^0 = \varprojlim H_V/H_V^0$$

est un groupe proalgébrique de dimension 0. Nous allons déterminer sa structure.

Remarquons d'abord que, si V est un module de Hodge-Tate, toute classe de $H_V \bmod H_V^0$ contient un élément de G_V ; cela provient de ce que H_V est l'enveloppe algébrique de G_V (cf. [5], dém. de la prop. 2). Comme les éléments de G_V sont rationnels sur $\mathbb{Q}_p$, il s'ensuit que H_V/H_V^0 est un groupe "constant", i.e. un groupe de dimension 0 dont tous les points sont rationnels. Par passage à la limite, la même propriété est vraie pour H/H^0 : c'est un groupe "constant", et on peut l'identifier au groupe profini de ses points rationnels sur $\mathbb{Q}_p$. Ce groupe est isomorphe à G_K . Plus précisément :

PROPOSITION 2 - L'homomorphisme composé

$$G_K \rightarrow H(\mathbb{Q}_p) \rightarrow (H/H^0)(\mathbb{Q}_p)$$

est un isomorphisme du groupe profini G_K sur le groupe profini des points rationnels de H/H^0 .

D'après ce qui précède, l'homomorphisme $G_K \rightarrow (H/H^0)(\mathbb{Q}_p)$ est surjectif. Pour voir qu'il est injectif, il suffit de prouver que, si N est un sous-groupe ouvert normal de G_K , il existe un module de Hodge-Tate V tel que $\rho_V(N)$ soit contenu dans le groupe $H_V^0(\mathbb{Q}_p)$; or c'est évident : il suffit de prendre pour V n'importe quelle représentation linéaire fidèle du groupe fini G_K/N (on sait en effet qu'une telle représentation donne naissance à un module de Hodge-Tate, cf. [6], III. 32).

Dans toute la suite, nous identifierons H/H^0 à G_K .

Remarques

1) Du point de vue des $\otimes$ -catégories [3], la prop. 2 exprime simplement le fait que tout module galoisien à action finie est un module de Hodge-Tate.

2) La situation est très différente pour les groupes H_{adm} et H_{div} définis

plus haut. En effet, Fontaine a montré que ces groupes sont connexes ([2], 3.7.4).

1.7. Variation de H par extension finie du corps de base

Soit K_1 une extension finie de K contenue dans $\bar{K}$, et soit $G_{K_1} = \text{Gal}(\bar{K}/K_1)$ le groupe de Galois correspondant ; c'est un sous-groupe ouvert de G_K . Soit H_1 le groupe proalgébrique correspondant à la $\otimes$ -catégorie des modules de Hodge-Tate sur K_1 . Nous allons comparer H_1 au groupe H relatif à K . Tout d'abord :

LEMME 1 - (a) Tout module de Hodge-Tate sur K définit par restriction un module de Hodge-Tate sur K_1 .

(b) Tout module de Hodge-Tate sur K_1 est dominé par un module du type (a).

L'assertion (a) résulte de la définition des modules de Hodge-Tate. Prouvons (b). Soit V_1 un module de Hodge-Tate sur K_1 , et soit V le module induit de V_1 (au sens usuel de l'induction des représentations de groupes). Comme V_1 est contenu dans V , donc dominé par V , il nous suffit de vérifier que V est un module de Hodge-Tate sur K . Choisissons une extension galoisienne finie K' de K , contenue dans $\bar{K}$, et contenant K_1 . D'après [6], III. 32, il suffit de voir que V est un module de Hodge-Tate sur K' . Mais, sur K' , V est somme directe de modules isomorphes à des conjugués de V_1 , lesquels sont bien des modules de Hodge-Tate. D'où notre assertion.

Ce lemme montre que les modules de Hodge-Tate sur K sont cofinaux (pour la relation de domination) dans la catégorie des modules de Hodge-Tate sur K_1 . On a donc

$$H_1 = \varprojlim_{\leftarrow} H_{1V} \quad (V \text{ de Hodge-Tate sur } K),$$

où H_{1V} est l'enveloppe algébrique de $G_{1V} = \rho_V(G_{K_1})$ dans GL_V . Comme G_{1V} est d'indice fini dans G_V , H_{1V} est d'indice fini dans H_V ; en particulier les composantes neutres de H_V et H_{1V} coïncident. De plus, l'image de H_{1V} dans le groupe fini H_V/H_V^0 est égale à l'image de G_{1V} dans ce groupe. Par passage à la limite sur V , on en déduit :

PROPOSITION 3 - Le groupe H_1 s'identifie à un sous-groupe de H contenant H^0 ; son image dans $H/H^0 = G_K$ est G_{K_1} .

COROLLAIRE - Les groupes H et H_1 ont même composante neutre.

(Autrement dit, la composante neutre H^0 de H ne change pas par extension finie du corps de base.)

On peut résumer la situation par le diagramme commutatif suivant, où les flèches verticales sont des inclusions :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \{1\} & \rightarrow & H_1^O & \rightarrow & H_1 & \rightarrow & G_{K_1} & \rightarrow & \{1\} \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \{1\} & \rightarrow & H^O & \rightarrow & H & \rightarrow & G_K & \rightarrow & \{1\} .
 \end{array}$$

Remarque

Ici encore, la situation est différente pour les groupes H_{adm} et H_{div} du n° 1.6. Si l'on remplace K par K_1 , ces groupes sont remplacés par des groupes $H_{1,\text{adm}}$ et $H_{1,\text{div}}$ munis d'homomorphismes

$$H_{1,\text{adm}} \rightarrow H_{\text{adm}} \quad \text{et} \quad H_{1,\text{div}} \rightarrow H_{\text{div}} ;$$

ces homomorphismes sont surjectifs, mais ne sont pas injectifs en général.

§ 2. Le cas commutatif

Le but de ce § est de décrire les modules de Hodge-Tate V dont le groupe de Galois associé G_V est commutatif. Comme on le verra, ces modules se ramènent essentiellement aux modules V_E associés aux groupes formels de Lubin-Tate, cf. 2.1 ci-dessous.

2.1. Les modules V_E et les caractères χ_E

Les modules $V_{E,\pi}$

Soient E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans $\bar{K}$, et π une uniformisante de E . Soit $\bar{E} = \bar{\mathbb{Q}_p}$ la fermeture algébrique de E dans $\bar{K}$. Considérons le groupe formel de Lubin-Tate attaché au couple (E, π) , et notons $V_{E,\pi}$ son module de Tate, tensorisé avec $\mathbb{Q}_p$. On sait (cf. par exemple [6], III. A4) que $V_{E,\pi}$ est un E -espace vectoriel de dimension 1 et que l'action naturelle de $\text{Gal}(\bar{E}/E)$ sur $V_{E,\pi}$ respecte cette structure. Cette action est donnée par un homomorphisme

$$f_{E,\pi} : \text{Gal}(\bar{E}/E) \rightarrow U_E,$$

où U_E est le groupe des unités de E .

Comme U_E est commutatif, on peut, via la théorie du corps de classes, interpréter $f_{E,\pi}$ comme un homomorphisme de $E^\times$ dans U_E ; d'après un théorème de Lubin-Tate, cet homomorphisme est caractérisé par les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} f_{E,\pi}(\pi) &= 1 \\ f_{E,\pi}(u) &= u^{-1} \quad \text{si } u \in U_E. \end{aligned}$$

Cette dernière formule montre en particulier que la restriction de $f_{E,\pi}$ au groupe d'inertie de $\text{Gal}(\bar{E}/E)$ ne dépend pas du choix de π .

Les modules V_E

Supposons maintenant que E soit contenu dans K . L'action de $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ sur $\bar{E}$ définit alors un homomorphisme

$$G_K \rightarrow \text{Gal}(\bar{E}/E)$$

qui permet de faire opérer G_K sur $V_{E,\pi}$. Comme G_K est égal à son groupe d'inertie, le module galoisien ainsi obtenu est indépendant du choix de π ; nous le notons V_E et nous désignerons par χ_E l'homomorphisme correspondant de G_K dans U_E (cf. [6], p. III. 41).

Exemple. Si $E = \mathbb{Q}_p$, $\pi = p$, le groupe de Lubin-Tate est le groupe multiplicatif (formel), V_E est de dimension 1, et χ_E est le caractère cyclotomique χ du n° 1.1.

Décomposition de Hodge-Tate de V_E

Soit Σ_E l'ensemble des plongements $\sigma : E \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont l'identité sur $\mathbb{Q}_p$. On a

$$\text{Card}(\Sigma_E) = [E:\mathbb{Q}_p] = \dim V_E.$$

Parmi les éléments de Σ_E figure l'inclusion $\iota : E \rightarrow \mathbb{C}$.

Si $\sigma \in \Sigma_E$, notons $V_{E,\sigma}$ le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_E$ déduit du E -espace vectoriel V_E par le changement de corps de base $\sigma : E \rightarrow \mathbb{C}$. On a $\dim_{\mathbb{C}} V_{E,\sigma} = 1$.

Le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $V_{E/\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_E$ est somme directe des $V_{E,\sigma}$:

$$V_{E/\mathbb{C}} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_E} V_{E,\sigma}.$$

Il résulte de [9], cor. 2 au th. 3, que V_E est un module de Hodge-Tate de poids 0 et 1, les sous-espaces correspondants étant :

$$V_{E/\mathbb{C}}(0) = \bigoplus_{\sigma \neq \iota} V_{E,\sigma}$$

$$V_{E/\mathbb{C}}(1) = V_{E,\iota} = \mathbb{C} \otimes_E V_E.$$

Enveloppe algébrique de $\text{Im}(\chi_E)$

L'image de G_K dans $\text{Gal}(\bar{E}/E)$ est un sous-groupe d'indice fini du groupe d'inertie de $\text{Gal}(\bar{E}/E)$, l'indice en question étant d'ailleurs égal au quotient e_K/e_E des indices de ramification absolus de K et de E . Il en résulte que $\text{Im}(\chi_E)$ est un sous-groupe ouvert de U_E . Son enveloppe algébrique H_{V_E} (au sens du n° 1.3) est donc le tore $T_E = R_{E/\mathbb{Q}_p}(G_{m/E})$ déduit de $G_{m/E}$ par restriction des scalaires de E à $\mathbb{Q}_p$ ([6], II.1.1). [Rappelons que, si A est une extension de $\mathbb{Q}_p$, le groupe $T_E(A)$ des points de T_E à valeurs dans A est le groupe des éléments inversibles de $A \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$; en particulier, on a $T_E(\mathbb{Q}_p) = E^*$: le tore T_E représente le groupe multiplicatif de E .]

Le groupe à un paramètre attaché à T_E

Sur $\mathbb{C}$ (et même sur $\bar{\mathbb{Q}_p}$) le tore T_E se décompose en produit de groupes multi-

plicatifs indexés par les éléments de Σ_E :

$$T_{E/C} = \prod_{\sigma \in \Sigma_E} G_{m,\sigma} \quad \text{où } G_{m,\sigma} = G_m/C \text{ pour tout } \sigma .$$

Sur $V_{E/C}$, un élément $t = (t_\sigma)$ de $T_{E/C}$ opère par :

$$t \cdot \sum_{\sigma} x_{\sigma} = \sum_{\sigma} t_{\sigma} x_{\sigma} \quad \text{si } x_{\sigma} \in V_{E,\sigma} .$$

Vu la décomposition de Hodge-Tate de V_E donnée ci-dessus, il en résulte que l'homomorphisme $h_{V_E} : G_m/C \rightarrow T_{E/C}$ attaché à V_E (au sens du n° 1.4) est donné par :

$$h_{V_E}(c) = (c_{\sigma}) , \text{ avec } \begin{cases} c_{\sigma} = 1 & \text{si } \sigma \neq \iota \\ c_{\sigma} = c & \text{si } \sigma = \iota . \end{cases}$$

En d'autres termes, h_{V_E} est le plongement de G_m/C dans $T_{E/C}$ correspondant au facteur de $T_{E/C}$ d'indice ι .

2.2. Structure de H^{ab}

Si X est un groupe proalgébrique, nous noterons X^{ab} le plus grand groupe proalgébrique quotient de X qui soit commutatif ; de même, si X est un groupe profini, nous noterons X^{ab} le plus grand quotient profini commutatif de X .

Nous nous proposons de déterminer la structure du groupe proalgébrique H^{ab} , où $H = \varprojlim H_V$, cf. n° 1.6.

Tout d'abord, l'homomorphisme naturel de H sur le groupe G_K (vu comme groupe proalgébrique "constant" de dimension 0, cf. n° 1.6) définit par passage au quotient un homomorphisme

$$\epsilon : H^{ab} \rightarrow G_K^{ab} .$$

D'après la prop. 2, cet homomorphisme est surjectif, et son noyau est la composante neutre $(H^{ab})^o$ de H^{ab} .

D'autre part, si E est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans K , on a défini ci-dessus un module de Hodge-Tate V_E dont le groupe algébrique associé H_{V_E} est le tore T_E défini par E . Comme H est limite projective des H_V , et que T_E est commutatif, on en déduit un homomorphisme $\rho_E : H^{ab} \rightarrow T_E$. Si E' est un sous-corps de E , et si $N_{E/E'} : T_E \rightarrow T_{E'}$ désigne la norme, on a

$$\rho_{E'} = N_{E/E'} \circ \rho_E ;$$

cela résulte de la formule correspondante pour X_E et $X_{E'}$, qui est bien connue (ou, si l'on préfère, de celle pour h_{V_E} et $h_{V_{E'}}$, qui est immédiate). Notons alors $\lim_{E \subset K} T_E$ la limite projective des tores T_E , pour $E \subset K$, relativement aux $N_{E/E'}$; les ρ_E définissent un homomorphisme

$$\rho : H^{ab} \rightarrow \lim_{E \subset K} T_E.$$

La structure de H^{ab} est donnée par le théorème suivant :

THÉOREME 4 - L'homomorphisme

$$(\epsilon, \rho) : H^{ab} \rightarrow G_K^{ab} \times \lim_{E \subset K} T_E$$

est un isomorphisme.

Comme ϵ définit un isomorphisme de $H^{ab}/(H^{ab})^o$ sur G_K^{ab} , le th. 4 équivaut à :

THÉOREME 4' - La restriction de ρ à $(H^{ab})^o$ est un isomorphisme de $(H^{ab})^o$ sur $\lim_{E \subset K} T_E$.

Démonstration

Par construction, l'homomorphisme

$$(\epsilon, \rho) : H^{ab} \rightarrow G_K^{ab} \times \lim_{E \subset K} T_E$$

est surjectif. Montrons que c'est un isomorphisme. Pour cela il suffit de prouver que, si $\pi : H^{ab} \rightarrow A$ est un homomorphisme de H^{ab} sur un groupe algébrique linéaire A , l'homomorphisme π peut se factoriser par (ϵ, ρ) . Or, soit

$$h_A : G_m/C \rightarrow A/C$$

le groupe à un paramètre correspondant à A (cf. 1.4), et soit E le corps de définition de h_A . Du fait que A est commutatif, E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ ([1], prop. 8.11). De plus, la prop. 1 du n° 1.5 montre que ${}^o h_A = h_A$ pour tout $\sigma \in G_K$, donc que h_A est rationnel sur K ; le corps E est donc contenu dans K . D'après une propriété universelle bien connue du tore T_E , il existe un unique homomorphisme $f_E : T_E \rightarrow A$ tel que

$$h_A = f_E \circ h_{V_E},$$

où h_{V_E} est le groupe à un paramètre canonique de T_E , cf. 2.1.

L'homomorphisme f_E définit un homomorphisme f de $\lim_{E \subset K} T_E$ dans A . Posons

$$\pi' = f \circ \rho = f_E \circ \rho_E ;$$

c'est un homomorphisme de H^{ab} dans A qui a le même effet que π sur le groupe à un paramètre canonique de H^{ab} . D'après le th. 2, il en résulte que π et π' coïncident sur $(H^{ab})^0$; leur quotient $\varphi = \pi.(\pi')^{-1}$ est trivial sur $(H^{ab})^0$, donc s'écrit sous la forme $\varphi = g \circ \epsilon$, où g est un homomorphisme continu (à noyau ouvert) de G_K^{ab} dans $A(Q_p)$. En multipliant g par f , on obtient un homomorphisme

$$F = g.f : G_K^{ab} \times \lim_{E \subset K} T_E \rightarrow A ,$$

et il est clair que $\pi : H^{ab} \rightarrow A$ est le composé de (ϵ, ρ) et de F . Cela montre bien que π se factorise par (ϵ, ρ) ; le th. 4 en résulte.

Remarque. Le th. 4 est essentiellement une reformulation, dans le langage des groupes proalgébriques, des résultats de Tate exposés dans [6], III, Appendice; l'emploi du th. 2 (théorème de Sen) n'est pas indispensable.

Application : modules de Hodge-Tate à action abélienne

Soit V un module de Hodge-Tate tel que G_V soit commutatif. L'enveloppe algébrique H_V de G_V est alors commutative; elle s'identifie donc à un quotient du groupe H^{ab} étudié ci-dessus. Vu le th. 4, on en déduit :

a) La composante neutre H_V^0 de H_V est un tore, quotient de l'un des T_E . Cela entraîne que H_V est un groupe réductif ([1], 11.21) et que V est un module semi-simple sur H_V (ou sur G_V , cela revient au même).

b) L'homomorphisme $H^{ab} \rightarrow H_V$, restreint au facteur direct G_K^{ab} de H^{ab} , définit un homomorphisme continu

$$\psi_V : G_K^{ab} \rightarrow H_V(Q_p) ,$$

dont l'image est un sous-groupe fini de $H_V(Q_p)$. En utilisant ψ_V , on munit ainsi V d'une nouvelle structure de module galoisien, où cette fois l'action de G_K est finie; cela permet, par exemple, de parler du conducteur d'Artin de V , pour cette nouvelle structure. Nous dirons que V est non ramifié si $\psi_V = 1$. Cela revient à dire que la projection $H^{ab} \rightarrow H_V$ peut se factoriser par l'un des $\rho_E : H^{ab} \rightarrow T_E$, ou encore que V est dominé (au sens de 1.6) par l'un des V_E .

Lorsque V est ramifié, on peut seulement affirmer que V est dominé par un $V_E \oplus W$, où W est un module galoisien à action finie et commutative : c'est une

autre façon de formuler le th. 4.

2.3. Structure de $H_{\text{adm}}^{\text{ab}}$ et $H_{\text{div}}^{\text{ab}}$

Rappelons (cf. 1.6) que $H_{\text{adm}}^{\text{ab}}$ est le groupe proalgébrique associé à la catégorie des modules admissibles ([2], 3.2.5), et que $H_{\text{div}}^{\text{ab}}$ est le groupe proalgébrique associé à la $\otimes$ -catégorie engendrée par les modules de Tate des groupes p-divisibles. On a des homomorphismes canoniques

$$H \rightarrow H_{\text{adm}}^{\text{ab}} \rightarrow H_{\text{div}}^{\text{ab}},$$

d'où

$$H^{\text{ab}} \rightarrow H_{\text{adm}}^{\text{ab}} \rightarrow H_{\text{div}}^{\text{ab}}.$$

Ces homomorphismes sont surjectifs. Comme $H_{\text{adm}}^{\text{ab}}$ et $H_{\text{div}}^{\text{ab}}$ sont connexes ([2], 3.7.4), la restriction de $H^{\text{ab}} \rightarrow H_{\text{div}}^{\text{ab}}$ à $(H^{\text{ab}})^{\circ}$ est également surjective.

Du fait que les V_E sont des modules de Tate de groupes p-divisibles, l'homomorphisme $\rho : H^{\text{ab}} \rightarrow \lim_{E \subset K} T_E$ se factorise en :

$$H^{\text{ab}} \rightarrow H_{\text{div}}^{\text{ab}} \rightarrow \lim_{E \subset K} T_E.$$

THÉOREME 5 (Fontaine) - Les homomorphismes

$$(H^{\text{ab}})^{\circ} \rightarrow H_{\text{adm}}^{\text{ab}} \rightarrow H_{\text{div}}^{\text{ab}} \rightarrow \lim_{E \subset K} T_E$$

sont tous des isomorphismes.

En effet ils sont surjectifs et leur composé est un isomorphisme d'après le th. 4'.

COROLLAIRE 1 - Les projections $H^{\text{ab}} \rightarrow H_{\text{adm}}^{\text{ab}}$ et $H^{\text{ab}} \rightarrow H_{\text{div}}^{\text{ab}}$ ont pour noyau le facteur direct G_K^{ab} de H^{ab} .

C'est clair.

COROLLAIRE 2 - Soit V un module de Hodge-Tate à action abélienne. Pour que V soit non ramifié (au sens de 2.2), il faut et il suffit que V soit admissible (au sens de [2], 3.2.5).

Cela résulte du cor. 1.

Exemple : module de Tate d'un groupe p-divisible de type (CM)

Soit $\underline{A}$ un groupe p-divisible sur A_K , de hauteur h et de dimension n . Soit E_1 une extension de $\mathbb{Q}_p$ de degré h et supposons qu'un sous-anneau d'indice fini de l'anneau des entiers de E_1 opère sur $\underline{A}$ (de sorte que $\underline{A}$ est "de

type (CM)"). Le module de Tate V de $\underline{A}$, tensorisé avec $\mathbb{Q}_p$, est un E_1 -espace vectoriel de dimension 1. Comme l'action de G_K sur V est E_1 -linéaire, elle est donnée par un homomorphisme $\chi_A : G_K \rightarrow E_1^*$. Par passage aux enveloppes algébriques, on en déduit, comme au n° 2.7, un homomorphisme

$$\rho_A : H_{\text{div}}^{ab} \rightarrow T_{E_1}.$$

D'après le th. 5, cet homomorphisme peut se factoriser en

$$H_{\text{div}}^{ab} \rightarrow T_E \xrightarrow{\delta} T_{E_1},$$

pour E et δ bien choisis. Indiquons brièvement comment on peut construire (E, δ) :

On considère la représentation de E_1 dans l'espace tangent à $\underline{A}$. C'est une représentation de dimension n , définie sur K . Elle provient par extension des scalaires d'une représentation définie sur un sous-corps E de K de degré fini sur $\mathbb{Q}_p$; on obtient ainsi un (E, E_1) -bimodule t , de dimension n sur E . Si $x \in E^*$, l'automorphisme x_t de t défini par x est E_1 -linéaire; soit

$$f(x) = \det_{E_1}(x_t)$$

son déterminant. L'application f de E^* dans E_1^* ainsi définie est "algébrique": elle se prolonge en un homomorphisme δ de T_E dans T_{E_1} . On peut prouver (par exemple en utilisant [6], III. App.) que le couple (E, δ) ainsi construit a les propriétés voulues.

2.4. Structure de $(H^o)^{ab}$

Si U est un sous-groupe ouvert de G_K , notons H_U le sous-groupe de H image réciproque de U par l'homomorphisme canonique $H \rightarrow G_K$ (cf. 1.6). Le groupe H^o est limite projective des H_U . On en conclut que

$$(H^o)^{ab} = \varprojlim H_U^{ab} = \varprojlim (H_U^{ab})^o.$$

Si K_U désigne la sous-extension de $\bar{K}$ fixée par U , le groupe H_U n'est autre que le "groupe H " relatif au corps de base K_U , cf. prop. 3. D'après le th. 4', appliqué à K_U , on a

$$(H_U^{ab})^o = \varprojlim_{E \subset K_U} T_E.$$

Comme la réunion des K_U est $\bar{K}$, on en déduit :

THÉOREME 6 - Le groupe $(H^0)^{ab}$ est isomorphe à $\lim_{E \subset \bar{K}} T_E$.

Remarque. La condition " $E \subset \bar{K}$ " est équivalente à " $E \subset \bar{Q}_p$ ". Il en résulte que le groupe $(H^0)^{ab}$ ne dépend pas de K : il ne dépend que de la caractéristique résiduelle p .

§ 3. Modules de Hodge-Tate à poids 0 et 1

3.1. Rappels sur les poids et racines (cf. [1], [11], SGA 3 III)

Soit M un groupe réductif connexe sur un corps E de caractéristique 0. Soit E' une extension galoisienne finie de E sur laquelle M se déploie ([1], 18.8) ; choisissons un tore maximal $\underline{T}$ de M/E' , qui soit déployé (i.e. isomorphe à un produit de groupes $G_{m/E'}$) et soit $\underline{B}$ un sous-groupe de Borel de M/E' , contenant $\underline{T}$. Notons X (resp. Y) le groupe des caractères (resp. cocaractères, ou "groupes à un paramètre") de $\underline{T}$. On a :

$$X = \text{Hom}(\underline{T}, G_{m/E'}) \quad \text{et} \quad Y = \text{Hom}(G_{m/E'}, \underline{T}).$$

Les groupes X et Y sont des $\mathbb{Z}$ -modules libres duaux l'un de l'autre ; leur rang est égal à $\dim \underline{T}$. On pose

$$X_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes X \quad \text{et} \quad Y_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes Y ;$$

ce sont des $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels en dualité. Si $x \in X_{\mathbb{Q}}$ et $y \in Y_{\mathbb{Q}}$, le produit scalaire de x et y est noté $\langle x, y \rangle$. On a

$$\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} \quad \text{si} \quad x \in X \quad \text{et} \quad y \in Y.$$

Système de racines

Le système de racines de M/E' , relativement à $\underline{T}$ est une partie finie R de X (à savoir l'ensemble des poids $\neq 0$ de $\underline{T}$ dans la représentation adjointe de M), munie d'une injection $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ dans Y . Si $\alpha \in R$, on a $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$; la symétrie s_α de $X_{\mathbb{Q}}$ définie par

$$s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

laisse stable X et R ; sa transposée est la symétrie s_α de $Y_{\mathbb{Q}}$ telle que

$$s_\alpha(y) = y - \langle \alpha, y \rangle \alpha^\vee$$

pour tout y . Le groupe W engendré par les s_α est le groupe de Weyl ; il opère sur $X_{\mathbb{Q}}$ et $Y_{\mathbb{Q}}$; on a

$$\langle wx, wy \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{si} \quad x \in X_{\mathbb{Q}}, y \in Y_{\mathbb{Q}}, w \in W.$$

Base

Au groupe de Borel $\underline{B}$ est associé une base B de R ; tout élément de R s'é-

crit de façon unique sous la forme $\sum_{\alpha \in B} n_{\alpha} \alpha$, où les n_{α} sont des entiers de même

signe. Soit X_Q^+ (resp. Y_Q^+) l'ensemble des $x \in X_Q$ (resp. $y \in Y_Q$) tels que

$$\langle x, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \quad (\text{resp. } \langle \alpha, y \rangle \geq 0) \quad \text{pour tout } \alpha \in B,$$

et posons

$$X^+ = X \cap X_Q^+, \quad Y^+ = Y \cap Y_Q^+.$$

Tout élément de X (resp. Y , X_Q , Y_Q) est le transformé par W d'un élément et d'un seul de X^+ (resp. Y^+ , X_Q^+ , Y_Q^+).

Décomposition de X_Q et Y_Q

Soient $(R_i)_{i \in I}$ les composants irréductibles de R ; les $B_i = B \cap R_i$ sont les composantes connexes du graphe de Coxeter de W (Bourbaki, LIE V.VI). Soit X_i le sous-espace vectoriel de X_Q engendré par R_i , et soit Y_i le sous-espace vectoriel de Y_Q engendré par l'ensemble $R_i^\vee$ des $\alpha^\vee$ avec $\alpha \in R_i$. Si X_c (resp. Y_c) désigne l'orthogonal dans X_Q (resp. dans Y_Q) de la somme des Y_i (resp. des X_i), on a

$$X_Q = X_c \oplus \bigoplus_{i \in I} X_i \quad \text{et} \quad Y_Q = Y_c \oplus \bigoplus_{i \in I} Y_i.$$

Ces décompositions en sommes directes reflètent la décomposition du groupe $M_{/E'}$, à isogénie près, en produit direct d'un tore M_c et de groupes simples M_i , $i \in I$.

Si $x \in X_Q$, nous noterons x_c et $(x_i)_{i \in I}$ les composantes de x dans X_c et dans les X_i ; nous emploierons une notation analogue pour les composantes d'un élément y de Y_Q . On a

$$\langle x, y \rangle = \langle x_c, y_c \rangle + \sum_{i \in I} \langle x_i, y_i \rangle.$$

Si x et y sont des éléments non nuls de $X_i^+ = X_i \cap X_Q^+$ et de $Y_i^+ = Y_i \cap Y_Q^+$, on a $\langle x, y \rangle > 0$.

Action de $\Gamma = \text{Gal}(E'/E)$

Changer le couple (T, B) ne modifie pas (à isomorphisme unique près) le système $(X, Y, R, \alpha \mapsto \alpha^\vee, B)$. Ce système est donc attaché canoniquement au groupe $M_{/E'}$ (cf. Bourbaki, LIE VIII.110, Remarque 2). Du fait que M est défini sur E , il en résulte que le groupe $\Gamma = \text{Gal}(E'/E)$ opère de façon naturelle sur $(X, Y, R, \alpha \mapsto \alpha^\vee, B)$, cf. [11], 3.1 ainsi que Bourbaki, LIE VIII.227, exerc.8. En particulier, Γ opère sur le groupe de Weyl W et sur l'ensemble I des composantes irréductibles de R .

On a

$$\langle \gamma x, \gamma y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \gamma w x = \gamma(w) \gamma x, \quad \gamma X_c = X_c, \quad \gamma X_i = X_{\gamma i},$$

si $x \in X_Q$, $y \in Y_Q$, $w \in W$, $i \in I$ et $\gamma \in \Gamma$.

Représentations linéaires (cf. [11], ainsi que Bourbaki, LIE VIII, § 7)

Soient V une représentation linéaire de M sur E , et V_E la représentation linéaire de M/E , déduite de V par extension des scalaires à E' . Le tore $\underline{T}$ opère sur V_E . Si $\omega \in X$, soit $V_E(\omega)$ le sous-espace propre de V_E correspondant à ω : on a $v \in V_E(\omega)$ si et seulement si $tv = \omega(t)v$ pour tout point t de $\underline{T}$. L'espace V_E est somme directe des $V_E(\omega)$, pour $\omega \in X$. On dit que ω est un poids de V si $V_E(\omega) \neq 0$; la dimension $n_V(\omega)$ de $V_E(\omega)$ est alors appelée la multiplicité de ω . L'ensemble $\Omega(V)$ des poids de V est une partie finie de X , stable par W et Γ . Pour que V soit une représentation linéaire fidèle (resp. à noyau fini) de M , il faut et il suffit que $\Omega(V)$ engendre le $\mathbb{Z}$ -module X (resp. le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel X_Q). La connaissance des poids de V et de leurs multiplicités détermine la représentation V à isomorphisme près.

On peut décomposer V_E en somme directe de représentations absolument irréductibles. Si V^λ est l'une de ces représentations, il existe une droite D^λ de V^λ et une seule qui est stable par le groupe de Borel $\underline{B}$. L'action de $\underline{T}$ sur D^λ se fait grâce à un caractère χ^λ qui appartient à X^+ . On a $D^\lambda = V^\lambda \cap V_E(\chi^\lambda)$; le caractère χ^λ est de multiplicité 1 dans V^λ . L'ensemble $\Omega(V^\lambda)$ des poids de V^λ est le R-saturé de χ^λ , au sens de Bourbaki, LIE VIII.125. Tout élément de cet ensemble est de la forme

$$\chi^\lambda = \sum_{\alpha \in B} n_\alpha \alpha,$$

où les n_α sont des entiers ≥ 0 . On dit que χ^λ est le plus haut poids de V^λ . Le plus bas poids de V^λ est $w_0 \chi^\lambda$, où w_0 est l'unique élément de W qui transforme B en $-B$ [l'automorphisme $-w_0$ est l'involution fondamentale de X ; nous le noterons $x \mapsto x'$].

3.2. Représentations de M à poids 0 et 1

On conserve les notations $M, \underline{T}, \underline{B}, R, \dots$ du n° 3.1. On se donne :

- a) une représentation linéaire V du groupe réductif M ,
- b) un corps algébriquement clos C contenant E' ,
- c) un groupe à un paramètre $h_M : G_{M/C} \rightarrow M/C$ défini sur C .

On fait les hypothèses suivantes :

- (i) V est fidèle ;
- (ii) tout sous-groupe algébrique normal N de M , défini sur E , tel que N/C contienne $\text{Im}(h_M)$, est égal à M ;
- (iii) l'action de $G_{m/C}$ sur $V_C = C \otimes_E V$ définie par h_M a pour seuls poids 0 et 1.

[Rappelons que le groupe des caractères de G_m s'identifie de façon naturelle à $\mathbb{Z}$; cela donne un sens à (iii).]

Nous allons voir que ces hypothèses entraînent des propriétés très particulières pour l'ensemble $\Omega(V)$ des poids de V , ainsi que pour le groupe à un paramètre h_M . Tout d'abord :

LEMME 2 - Il existe $h_0 \in Y^+$ tel que h_M et h_0 , considérés comme homomorphismes de $G_{m/C}$ dans M/C , soient conjugués l'un de l'autre par un automorphisme intérieur de M/C ; on a

$$(1) \quad \langle \omega, h_0 \rangle = 0 \text{ ou } 1 \text{ pour tout } \omega \in \Omega(V).$$

(On peut en fait montrer que h_0 est unique.)

D'après [1], cor. 11.3, il existe un automorphisme intérieur de M/C qui transforme h_M en un homomorphisme

$$h_1 : G_{m/C} \rightarrow \mathbb{T}/C \subset M/C$$

à valeurs dans $\mathbb{T}/C$. Du fait que $\mathbb{T}$ est déployé sur E' , h_1 est rationnel sur E' , donc appartient à Y . D'après ce qui a été rappelé au n° 3.1, il existe $w \in W$ tel que $h_0 = wh_1$ appartienne à Y^+ ; comme tout élément de W est induit par un automorphisme intérieur de M/C , l'élément h_0 répond à la question. Les actions de $G_{m/C}$ sur V_C définies par h_M et par h_0 sont conjuguées, donc ont même poids ; vu (iii), ces poids sont égaux à 0 ou 1, ce qui démontre la formule (1).

Remarque. Comme $\Omega(V)$ est stable par le produit semi-direct ΓW de Γ par W , la formule (1) entraîne :

$$(2) \quad \langle \omega, h \rangle = 0 \text{ ou } 1 \text{ pour tout } \omega \in \Omega(V) \text{ et tout } h \in \Gamma W h_0.$$

LEMME 3 - (a) L'ensemble $\Omega(V)$ des poids de V engendre le $\mathbb{Z}$ -module X .

(b) L'orbite $\Gamma W h_0$ de h_0 par le groupe ΓW engendre le $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $Y_{\mathbb{Q}}$.

L'assertion (a) traduit l'hypothèse que V est fidèle. D'autre part, les sous-espaces de $Y_{\mathbb{Q}}$ stables par W et Γ correspondent de façon naturelle aux sous-groupes normaux connexes de M définis sur E ; si le sous-espace engendré par $\Gamma W h_0$ était distinct de $Y_{\mathbb{Q}}$, il existerait un tel sous-groupe N , distinct de M , et tel que l'image de h_0 soit contenue dans $N/\mathbb{C}$; il en serait alors de même de l'image de h_M , ce qui contredirait l'hypothèse (ii). D'où (b).

LEMME 4 - Si $\alpha \in R$, $\omega \in \Omega(V)$ et $h \in \Gamma W h_0$, on a

$$(3) \quad \langle \omega, \alpha^\vee \rangle = 0, 1 \text{ ou } -1,$$

$$(4) \quad \langle \alpha, h \rangle = 0, 1 \text{ ou } -1.$$

(Noter le rôle symétrique joué par les éléments de $\Omega(V)$ et de $\Gamma W h_0$: ils s'échangent par "dualité de Langlands". Je ne connais pas d'explication a priori de ce phénomène.)

Appliquons (2) à ω et à $s_{\alpha}\omega = \omega - \langle \omega, \alpha^\vee \rangle \alpha$. On obtient

$$\langle \omega, h \rangle = 0 \text{ ou } 1$$

$$\langle \omega, h \rangle - \langle \omega, \alpha^\vee \rangle \langle \alpha, h \rangle = 0 \text{ ou } 1.$$

Par différence, cela donne :

$$(5) \quad \langle \omega, \alpha^\vee \rangle \langle \alpha, h \rangle = 0, 1 \text{ ou } -1.$$

Remarquons maintenant que, pour ω et α fixés, on peut choisir $h \in \Gamma W h_0$ tel que $\langle \alpha, h \rangle \neq 0$: cela résulte du lemme 3 (b). Comme $\langle \alpha, h \rangle$ est un entier non nul, et que $\langle \omega, \alpha^\vee \rangle$ est un entier, (5) n'est possible que si $\langle \omega, \alpha^\vee \rangle = 0, 1$ ou -1 , ce qui démontre (3). De même, pour α et h fixés, on peut choisir $\omega \in \Omega(V)$ tel que $\langle \omega, \alpha^\vee \rangle \neq 0$: cela résulte du lemme 3 (a); on en déduit comme ci-dessus que $\langle \alpha, h \rangle = 0, 1$ ou -1 .

[Variante. Puisque V est un M -module fidèle, la représentation adjointe de M est isomorphe à une sous-représentation de $\text{End}(V)$. Or les poids de $\text{End}(V)$ (pour l'action de $G_m/\mathbb{C}$ donnée par h , h_0 ou h_M) sont différences de deux poids de V (cf. [8], lemme 11.3), donc appartiennent à $\{0, 1, -1\}$. On retrouve ainsi la formule (4).]

Soit $\Omega^+(V)$ l'ensemble des plus hauts poids des composantes irréductibles de V_E ; on a $\Omega^+(V) \subset X^+ \cap \Omega(V)$, et le R -saturé de $\Omega^+(V)$ est $\Omega(V)$, cf. n° 3.1.

LEMME 5 - Soit R_i ($i \in I$) un composant irréductible de R .

(a) Il existe $\omega \in \Omega^+(V)$ tel que $\omega_i \neq 0$; l'élément ω_i de X_i est alors un poids minuscule du système de racines R_i , au sens de Bourbaki, LIE VIII.129.

(b) Il existe $h \in \Gamma h_0$ tel que $h_i \neq 0$; l'élément h_i de Y_i est alors un poids minuscule du système de racines $R_i^\vee$ dual de R_i .

(Rappelons que ω_i et h_i désignent les composantes d'indice i de ω et de h , cf. n° 3.1.)

Si l'on avait $\omega_i = 0$ pour tout $\omega \in \Omega^+(V)$, on aurait aussi $\omega_i = 0$ pour tout $\omega \in \Omega(V)$ puisque $\Omega(V)$ est le R -saturé de $\Omega^+(V)$, et cela contredirait le lemme 3 (a). D'autre part, si $\omega_i \neq 0$, la formule (3) du lemme 4, appliquée avec $\alpha \in R_i$, montre que ω_i satisfait à la condition (iii) de Bourbaki, loc. cit., déf. 1, donc est minuscule. D'où (a).

De même, l'existence de $h \in \Gamma h_0$ tel que $h_i \neq 0$ résulte du lemme 3 (b) ; le fait que " $h_i \neq 0 \Rightarrow h_i$ minuscule" résulte de la formule (4) du lemme 4. D'où (b).

Le lemme 5 entraîne déjà un certain nombre de propriétés de V :

PROPOSITION 4 - On a $\Omega(V) = W \cdot \Omega^+(V)$.

Cela résulte de (a), et du fait que le R -saturé d'un poids minuscule est égal à son orbite par W , cf. Bourbaki, loc. cit., condition (i).

PROPOSITION 5 - Soit m l'algèbre de Lie de M , et soit m^α le sous-espace propre de $m_{E^1} = E^1 \otimes m$ correspondant à une racine $\alpha \in R$. Si x appartient à m^α , l'endomorphisme x_V de V_{E^1} , défini par x est de carré nul.

Cela résulte de la prop. 7 de Bourbaki, LIE VIII.128.

COROLLAIRE - Les éléments x de m_{E^1} , tels que $(x_V)^2 = 0$ engendrent l'algèbre dérivée de m_{E^1} .

(Noter l'analogie avec les " Quadratic Pairs " de Thompson [10].)

PROPOSITION 6 - Le groupe M/E^1 , n'a aucun quotient $\neq \{1\}$ qui soit simplement connexe.

Il suffit de prouver que M/E^1 , n'a aucun quotient simple simplement connexe. Un

tel quotient correspond à un composant irréductible R_i de R ayant la propriété suivante : pour tout $y \in Y$, la composante y_i de y appartient au sous-groupe $Z.R_i^\vee$ de Y_i engendré par $R_i^\vee$ (c'est ainsi que se traduit la simple connexion, cf. SGA 3 III, p. 129). Or, si l'on prend pour y un élément de Γh_0 satisfaisant au lemme 5 (b), la composante y_i de y est minuscule ; d'après la prop. 8 de Bourbaki, LIE VIII.128, y_i n'appartient pas à $Z.R_i^\vee$. D'où la proposition.

COROLLAIRE - Aucun quotient de $M/\mathbb{E}$, n'est isomorphe à SL_n ($n \geq 2$), Sp_{2n} ($n \geq 1$), G_2 , F_4 ou E_8 .

Revenons aux propriétés des w_i et des h_i :

LEMME 6 - Soient $w \in \Omega^+(V)$ et $h \in \Gamma h_0$. Alors :

- (a) Il existe au plus un élément i de I tel que $w_i \neq 0$ et $h_i \neq 0$.
- (b) Si $i \in I$ est tel que $w_i \neq 0$ et $h_i \neq 0$, on a
- (6) $\langle w_i, h_i \rangle + \langle w_i', h_i' \rangle = 1$,

où w_i' est le transformé de w_i par l'involution fondamentale - w_0 , cf. n° 3.1.

Soit J l'ensemble des $i \in I$ tels que $w_i \neq 0$ et $h_i \neq 0$. Si $i \in J$, le lemme 5 montre que (w_i, h_i) est un couple minuscule : ses deux composantes sont minuscules. Définissons alors la hauteur $\ell(w_i, h_i)$ d'un tel couple par la formule

$$(7) \quad \ell(w_i, h_i) = \langle w_i, h_i \rangle + \langle w_i', h_i' \rangle.$$

Comme w_i appartient à $X_i^+ - \{0\}$ et h_i à $Y_i^+ - \{0\}$, les produits scalaires $\langle w_i, h_i \rangle$ et $\langle w_i', h_i' \rangle$ sont > 0 , et il en est de même de $\ell(w_i, h_i)$. De plus, comme $w_i + w_i' = w_i - w_0 w_i$, et que w_i est un poids de X_i , $w_i + w_i'$ appartient au sous-groupe $Z.R_i$ de X_i engendré par R_i (Bourbaki, LIE VI.167, prop. 27). Ceci entraîne que son produit scalaire $\ell(w_i, h_i)$ avec h_i est un entier. On conclut de là que $\ell(w_i, h_i)$ est un entier ≥ 1 .

D'autre part, d'après (2) appliqué à w et $w_0 w = -w'$, on a :

$$(8) \quad \langle w_0, h_0 \rangle + \sum_{i \in J} \langle w_i, h_i \rangle = 0 \text{ ou } 1$$

$$(9) \quad \langle w_0', h_0' \rangle + \sum_{i \in J} \langle w_i', h_i' \rangle = 0 \text{ ou } -1.$$

Comme w_0 opère trivialement sur X_0 , on a $w_0' = -w_0$. En ajoutant les équations

ci-dessus, on obtient :

$$\sum_{i \in J} \{ \langle w_i, h_i \rangle + \langle w_i', h_i \rangle \} = 0, 1 \text{ ou } -1,$$

autrement dit

$$\sum_{i \in J} \ell(w_i, h_i) = 0, 1 \text{ ou } -1.$$

Comme les $\ell(w_i, h_i)$ sont des entiers ≥ 1 , ceci n'est possible que si $J = \emptyset$, ou si J est réduit à un élément $\{i\}$ et si $\ell(w_i, h_i) = 1$, ce qui démontre le lemme.

Remarques

1) Si $J = \{i\}$, les formules (8) et (9) entraînent :

$$(10) \quad \langle w_c, h_c \rangle = \langle w_i', h_i \rangle = 1 - \langle w_i, h_i \rangle.$$

La connaissance des $\langle w_i, h_i \rangle$ détermine donc celle de $\langle w_c, h_c \rangle$. Par contre, si $J = \emptyset$, on a simplement

$$\langle w_c, h_c \rangle = \langle w, h \rangle = 0 \text{ ou } 1,$$

ce qui ne suffit pas à déterminer $\langle w_c, h_c \rangle$.

2) Les arguments utilisés ci-dessus sont essentiellement les mêmes que ceux de Springer [8], § 11 ; la différence principale est la présence du groupe Γ qui n'apparaît pas dans [8], où le corps de base est supposé algébriquement clos.

La proposition suivante résume le lemme 5 et la partie (b) du lemme 6 :

PROPOSITION 7 - Pour tout $i \in I$, il existe $w \in \Omega^+(V)$ et $h \in \Gamma h_o$ tels que $w_i \neq 0$ et $h_i \neq 0$; tout couple (w_i, h_i) ainsi obtenu est un couple minuscule de hauteur 1 (au sens défini ci-dessus).

COROLLAIRE 1 - Tous les composants irréductibles de R sont de type classique A_n , B_n , C_n ou D_n .

En effet, les systèmes de racines irréductibles de type G_2 , F_4 , E_6 , E_7 , E_8 ne possèdent pas de couple minuscule de hauteur 1, cf. Annexe.

COROLLAIRE 2 - Aucun composant irréductible de R n'est de type D_4 trialitaire.

(Soit Γ_i le sous-groupe de Γ qui fixe i . Le groupe Γ_i opère sur R_i . On dit que R_i est "de type D_4 trialitaire" s'il est de type D_4 et si l'image de Γ_i dans $\text{Aut}(R_i)$ est d'ordre 3 ou 6, autrement dit si Γ_i permute tran-

sitivement les trois sommets terminaux du graphe de Dynkin  de R_i .)

Supposons que R_i soit de type D_4 triallitaire. Le groupe Γ_i permute transitivement les trois poids minuscules $\varpi_1, \varpi_3, \varpi_4$ de R_i , cf. Annexe. Comme l'un de ces poids est de la forme ω_i , avec $\omega \in \Omega^+(V)$, ils le sont tous. Choisissons alors $h \in \Gamma h_0$ tel que $h_i \neq 0$. D'après la prop. 7, les trois couples minuscules

$$(\varpi_1, h_i), (\varpi_3, h_i) \text{ et } (\varpi_4, h_i)$$

sont de hauteur 1, ce qui est impossible (cf. Annexe).

Le cas irréductible

Supposons V irréductible. Son commutant Δ est un corps. Notons E_1 le centre de Δ , et posons

$$[\Delta : E_1] = m^2 \text{ et } [E_1 : E] = r.$$

L'entier m est l'indice de Schur de V . La représentation V_{E_1} de M/E_1 se décompose en r représentations irréductibles conjuguées, chacune de multiplicité m . Le groupe Γ opère transitivement sur $\Omega^+(V)$, qui a r éléments. Si $\omega \in \Omega(V)$, la multiplicité $n_V(\omega)$ de ω est égale à m : c'est clair lorsque ω appartient à $\Omega^+(V)$, et le cas général résulte de ce que $\Omega(V)$ est égal à $W.\Omega^+(V)$, cf. prop. 4. On a en particulier

$$\dim V = m \text{ Card } \Omega(V) = m \text{ Card } W.\Omega^+(V).$$

D'autre part, si ω est un élément de $\Omega^+(V)$, on a

$$\text{Card } W.\Omega^+(V) = r \text{ Card } W\omega = r \prod_{i \in I} d(\omega_i),$$

où $d(\omega_i) = \text{Card } W\omega_i$. D'où :

PROPOSITION 8 - Avec les hypothèses et notations ci-dessus, on a

$$(11) \quad \dim V = m r \prod_{i \in I} d(\omega_i).$$

Noter que $d(\omega_i) = 1$ si $\omega_i = 0$; lorsque $\omega_i \neq 0$, ω_i est minuscule, et $d(\omega_i)$ se calcule sans difficulté (cf. Annexe) ; on trouve en particulier que $d(\omega_i)$ est pair si R_i n'est pas de type A . Comme, pour $i \in I$ donné, on peut choisir ω tel que $\omega_i \neq 0$ (lemme 5), on en conclut en appliquant (11) :

COROLLAIRE - Si V est irréductible de dimension impaire, tous les composants irréductibles de R sont de type A .

Remarque

Lorsque $r=1$, ce qui est le cas lorsque V est absolument simple, on peut pré-

ciser davantage la structure de M et de V : si ω est l'unique élément de $\Omega^+(V)$, on a $\omega_i \neq 0$ pour tout $i \in I$ d'après le lemme 5 (a) ; vu le lemme 6 (a), il existe au plus un élément i de I tel que $(h_o)_i \neq 0$. D'où deux cas :

a) $(h_o)_i = 0$ pour tout $i \in I$; d'après le lemme 3, cela entraîne que $I = \emptyset$, i.e. que M est commutatif ; on a alors $m = 1$ et $\dim V = 1$; le groupe M est, soit réduit à $\{1\}$ (poids 0), soit égal à G_m (poids 1).

b) Il existe un unique élément i de I tel que $(h_o)_i \neq 0$; utilisant le lemme 5 (b), on voit que $I = \Gamma i$, donc que Γ opère transitivement sur I . Soit Γ_i le fixateur de i dans Γ , et soit E_i le sous-corps de E' fixé par Γ_i . Le groupe adjoint de M s'obtient par restriction des scalaires de E_i à E à partir d'un groupe absolument simple sur E_i , de type A, B, C ou D . La composante neutre du centre de M est le groupe G_m , opérant par homothéties. On a

$$(12) \quad \dim V = m d(\omega_i)^{[E_i : E]}.$$

3.3. Application aux modules de Hodge-Tate à poids 0 et 1

Soit V un module de Hodge-Tate, et soit H_V le groupe algébrique correspondant, cf. n° 1.3. Soit V_{ss} le semi-simplifié de V , i.e. la somme directe des quotients d'une suite de Jordan-Hölder de V . Le groupe H_V opère sur V_{ss} , et le noyau de cette action est le radical unipotent U_V de H_V , autrement dit le plus petit sous-groupe normal de H_V tel que H_V/U_V soit réductif ([1], 11.21). Si l'on s'intéresse simplement aux quotients réductifs de H_V , on peut donc supposer que $V = V_{ss}$, i.e. que V est semi-simple ; dans ce cas H_V est réductif.

Faisons cette hypothèse, et supposons en outre que les poids de V sont 0 et 1, autrement dit que $V_C = V_C(0) \oplus V_C(1)$. Si l'on pose $E = \mathbb{Q}_p$, $M = H_V^O$, les hypothèses de 3.2 sont satisfaites, en prenant pour h_M le groupe à un paramètre canonique h_V (cf. 1.4) : (i) est évident, (ii) est une conséquence du théorème de Sen (th. 2), et (iii) traduit le fait que les poids de V sont égaux à 0 et 1. On peut donc appliquer au groupe $M = H_V^O$ les résultats du n° 3.2, et en particulier les prop. 4, 5, 6, 7, 8. On obtient ainsi, par exemple :

THÉOREME 7 - Si V est un module de Hodge-Tate semi-simple à poids 0 et 1, les composants irréductibles du système de racines de H_V^O sont de type A, B, C ou D ; si V est irréductible de dimension impaire, ces composants sont tous de type A . Aucun quotient $\neq \{1\}$ de H_V^O n'est simplement connexe.

COROLLAIRE - Tout quotient simple du groupe proalgébrique H_{div} (cf. 1.6) est de type A, B, C ou D.

Problème

Existe-t-il des groupes p-divisibles correspondant aux divers couples (V, H_V^0) qui sont a priori possibles d'après le n° 3.2 ? Par exemple, peut-on construire un tel groupe pour lequel le système de racines de H_V^0 soit de type D_n , le module V étant (à l'action du centre près) une représentation semi-spinorielle de D_n , de degré 2^{n-1} ? La théorie de Fontaine [2] devrait permettre de répondre à ce genre de question.

Annexe - Couples minuscules de type $A_n, B_n, \dots, E_8$

Pour chaque système de racines irréductible réduit, on note $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ sa base, numérotée comme dans Bourbaki, LIE VI, Planches, $\{\varpi_1, \dots, \varpi_n\}$ ses poids fondamentaux, et $\{\check{\varpi}_1, \dots, \check{\varpi}_n\}$ ceux du système dual. Les ϖ_i et les $\check{\varpi}_i$ sont caractérisés par

$$\langle \varpi_i, \check{\alpha}_j \rangle = \langle \alpha_j, \check{\varpi}_i \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Tout poids minuscule est un poids fondamental ; pour qu'un poids fondamental ϖ_i soit minuscule, il faut et il suffit que le coefficient de $\check{\alpha}_i$ dans la plus grande racine du système dual soit égal à 1 (Bourbaki, LIE VIII.128, prop.8). Cela rend immédiate la détermination des poids minuscules. On obtient ainsi :

Type A_n ($n \geq 1$) $\overset{1}{\circ} \text{---} \overset{n}{\circ}$... $\text{---} \overset{n}{\circ}$

Tous les ϖ_i et tous les $\check{\varpi}_j$ sont minuscules. L'involution fondamentale $-w_0$ transforme i en $i' = n + 1 - i$ et j en $j' = n + 1 - j$. La hauteur du couple minuscule $(\varpi_i, \check{\varpi}_j)$ est donnée par :

$$\ell(\varpi_i, \check{\varpi}_j) = \langle \varpi_i, \check{\varpi}_j \rangle + \langle \varpi_{i'}, \check{\varpi}_{j'} \rangle = \text{Inf}(i, j, i', j').$$

Les couples minuscules de hauteur 1 sont :

$$(\varpi_1, \check{\varpi}_1), (\varpi_n, \check{\varpi}_1), (\varpi_i, \check{\varpi}_1), (\varpi_i, \check{\varpi}_n) \quad \text{avec } 1 \leq i \leq n.$$

La représentation associée à w_i est la puissance extérieure i -ème de la représentation standard de degré $n + 1$. Son degré

$$d(w_i) = \text{Card } Ww_i$$

est égal à $\binom{n+1}{i}$.

Type B_n ($n \geq 2$) $\begin{matrix} 1 & & & n \\ \circ & \text{---} & \circ & \dots & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \end{matrix}$

Le couple $(\varpi_n, \check{\varpi}_1)$ est le seul couple minuscule ; sa hauteur est égale à 1 .
La représentation associée à ϖ_n est la représentation spinorielle ; son degré $d(\varpi_n)$ est 2^n .

<u>Type</u>	C_n ($n \geq 2$)	$\begin{array}{c} 1 \qquad \qquad \qquad n \\ \circ \text{---} \circ \quad \dots \quad \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$
-------------	----------------------	---

Ce cas est dual du précédent. Le couple $(w_1, w_n^{\vee})$ est le seul couple minuscule ; sa hauteur est égale à 1 . La représentation associée à w_1 est la représentation standard ; son degré $d(w_1)$ est $2n$.

Type D_n ($n \geq 4$)

The diagram shows a horizontal chain of nodes. The first node is labeled '1'. The chain continues with an ellipsis, then a node connected to the last node of the chain by a double bond. This last node in the chain has two additional nodes branching off it, labeled 'n-1' and 'n'.

Il y a trois poids minuscules w_1 , w_{n-1} et w_n qui correspondent à la représentation standard et aux deux représentations semi-spinorielles. Leurs degrés sont :

$$d(w_1) = 2n, \quad d(w_{n-1}) = 2^{n-1} \quad \text{et} \quad d(w_n) = 2^{n-1}.$$

Les couples minuscules de hauteur 1 sont

pour $n = 4$: $(w_i, w_j^\vee)$ avec $i, j \in \{1, 3, 4\}$ et $i \neq j$

pour $n \geq 5$: $(w_1, w_{n-1}^\vee)$, $(w_1, w_n^\vee)$, $(w_{n-1}, w_1^\vee)$ et $(w_n, w_1^\vee)$.

Type E_6

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & 6 \\
 & & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\
 & & & & & & | & & & & \\
 & & & & & & \circ & & & &
 \end{array}$$

Il y a quatre couples minuscules :

$$(w_1, w_1^\vee), (w_1, w_6^\vee), (w_6, w_1^\vee) \text{ et } (\bar{w}_6, w_6^\vee).$$

Ils sont de hauteur 2 .

Type E_7

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & & & & & & 7 \\
 \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ & - & \circ \\
 & & & & & & | & & & & & & \\
 & & & & & & \circ & & & & & &
 \end{array}$$

Il y a un seul couple minuscule : $(w_7, w_7^\vee)$. Il est de hauteur 3.

Types G_2 , F_4 , E_8

Il n'y a pas de poids minuscule.

* * *

Bibliographie

- [1] A. BOREL - Linear Algebraic Groups, Notes by Hyman Bass, Benjamin, New York, 1969.
- [2] J-M. FONTAINE - Modules galoisiens, modules filtrés, et anneaux de Barsotti-Tate, ce volume.
- [3] N. SAAVEDRA RIVANO - Catégories Tannakiennes, Lect. Notes in Math. 265, Springer-Verlag, Heidelberg, 1972.
- [4] S. SEN - Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules, Ann. of Math. 97 (1973), 160-170.
- [5] J-P. SERRE - Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p-divisibles, Proc. Conf. Local Fields (T.A. Springer edit.), Springer-Verlag, Heidelberg, 1967, 118-131.
- [6] ——— - Abelian ℓ -adic representations and elliptic curves, Benjamin, New York, 1968.
- [7] ——— - Résumé des cours de 1967-1968, Annuaire du Collège de France (1968-1969), 45-50.
- [8] T.A. SPRINGER - Jordan Algebras and Algebraic Groups, Ergebn. der Math. 75, Springer-Verlag, Heidelberg, 1973.
- [9] J. TATE - p-divisible groups, Proc. Conf. Local Fields (T.A. Springer edit.), Springer-Verlag, Heidelberg, 1967, 158-183.
- [10] J.G. THOMPSON - Quadratic Pairs, Congrès Intern. Math. Nice, 1970, tome I, 375-376.
- [11] J. TITS - Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, J. reine ang. Math. 247 (1971), 196-220.
- SGA 3 III M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK - Schémas en groupes III, Lect. Notes in Math. 153, Springer-Verlag, Heidelberg, 1970.
- SGA 7 I A. GROTHENDIECK - Groupes de monodromie en géométrie algébrique, Lect. Notes in Math. 288, Springer-Verlag, Heidelberg, 1972.

Collège de France
75231 PARIS Cedex 05

Errata et Compléments

à

[6] Abelian ℓ -adic representations and elliptic curves

- I-12. La question 3 est trop optimiste. Il est facile de faire des contre-exemples en prenant des représentations à image finie d'indice de Schur > 1 .
- I-13, l. 8-9. Le "problème des groupes de congruence" pour les variétés abéliennes a une réponse positive (cf. Izv. Akad. Nauk CCCP, 35 (1971), 731-737).
- I-17, l. 19-20. L'existence des représentations ℓ -adiques associées aux formes modulaires a été prouvée par Deligne (Sém. Bourbaki 1968/69, exposé 355).
- I-29, l. 8. Remplacer " $c_\chi + o(n)$ " par " $c_\chi n + o(n)$ ".
- II-12, l. -4. Remplacer " $U_{\ell, m}$ " par " $\pi_\ell(U_{\ell, m})$ ".
- II-20, l. 13. Remplacer "Assertion a)" par "Assertion 3)".
- II-25, l. -8. Remplacer " $e(I)$ " par " $e(I)$ ".
- III-13, l. -4. Remplacer "Bambaki" par "Bourbaki".
- III-36, l. -6. Remplacer "in $\mathbb{Q}$ " par "is $\mathbb{Q}$ ".
- III-37, l. 5 ; III-38, l. 7, 11 ; III-51, l. -4. L'espace $H^1(G, C)$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur K , et non sur C .
- IV-14, l. 4. Ajouter l'hypothèse que C est semi-simple.
- IV-18, l. 8. Remplacer " $\text{Gal}(K/K)$ " par " $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ ".
- IV-21, l. -7, -8. La conjecture faite dans cette Remarque a été démontrée (cf. Invent. math. 15 (1972), 259-331).
- IV-28, l. 8. Remplacer "order 2" par "order 4".
- IV-28, l. 9. Remplacer "order 6" par "order 12".
- IV-28, l. 11. Remplacer "an isomorphism" par "a homomorphism with a kernel of order 2".
- IV-41, l. 13. Supprimer "in the near future". Ajouter "A different proof has been published by W. Messing (Lect. Notes in Math. 264, Springer-Verlag, 1972)".
- B-2, [17]. Remplacer "89" par "81".
- B-3, [32]. Supprimer "and applications". Remplacer "In preparation" par "Ann. of Math. 88 (1968), 492-517".