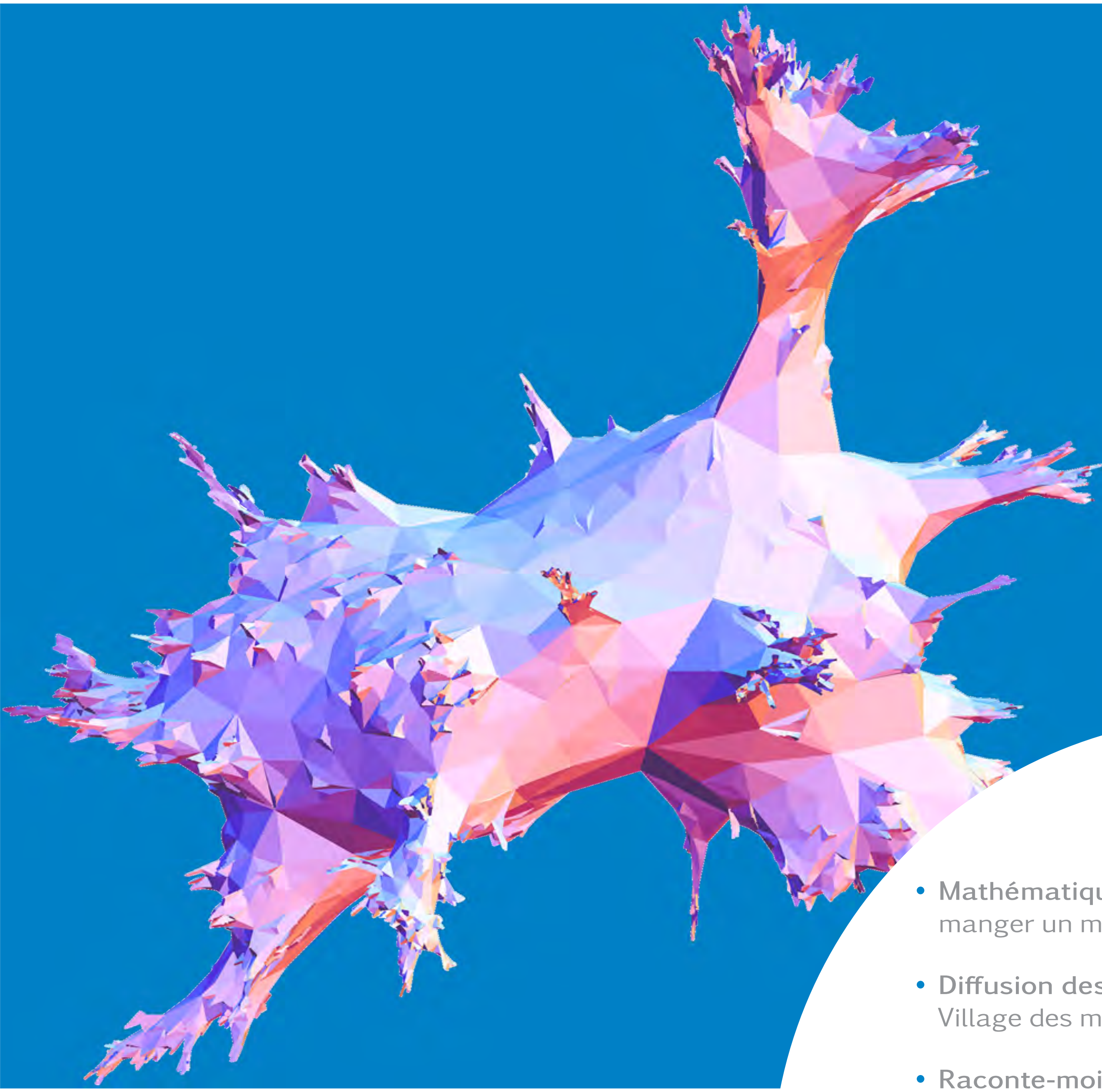
AVRIL 2016 – Nº 148

la Gazette des Mathématiciens



- **Mathématiques** – Comment manger un maximum de pizza ?
- **Diffusion des savoirs** – Le Village des mathématiques
- **Raconte-moi...** la droite de Berkovich
- **Information** – Des ondelettes pour détecter les ondes gravitationnelles

Société Mathématique de France

la Gazette des Mathématiciens

Secrétariat de rédaction :

SMF – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@dma.ens.fr – http://smf.emath.fr

Directeur de la publication : Marc Peigné

ISSN : 0224-8999

Société Mathématique de France

À propos de la couverture. « Le Lama » : c'est une image d'une grande triangulation aléatoire choisie uniformément parmi toutes les triangulations (ayant la topologie de la sphère) avec 20 000 triangles. Le plongement dans l'espace est réalisé avec la fonction GraphPlot de Mathematica ©. L'algorithme place une charge électrique en chacun des sommets du graphe (qui tentent de se repousser) et considère les arêtes comme des ressorts (qui tentent de se contracter) puis calcule une configuration d'équilibre. Heuristiquement parlant on peut considérer que ce plongement « reflète » la géométrie de la triangulation aléatoire munie de sa distance de graphe (un vrai plongement isométrique d'un tel graphe dans $\mathbb{R}^3$ n'existe pas avec grande probabilité). (crédit : Nicolas Curien).

la Gazette des Mathématiciens

N° 148

Éditorial

Chères lectrices, chers lecteurs,

Jean-Jacques Risler est décédé le 17 février 2016 des suites d'une longue maladie, à l'âge de 75 ans. Spécialiste reconnu de géométrie algébrique et de géométrie analytique réelle, il fut président de la SMF de 1996 à 1998 et également un grand passionné de musique. La *Gazette* lui rend hommage à travers quelques témoignages de collègues et amis.

Imaginez des mathématiciens partageant une Pizza avec pour unique but le désir irrépressible d'en dévorer la plus grande quantité possible. Entre gloutonnerie et combinatoire, Marie Albenque vous propose un article récréatif et surprenant. Normales ou de Jordan, les formes s'invitent également dans la rubrique Mathématiques. Quant à Jérôme Poineau, il vous raconte la mystérieuse droite de Berkovich.

La diffusion des savoirs se situe au cœur de notre activité de scientifique, riche et multiforme. Elle est particulièrement à l'honneur dans ce numéro. C'est avec enthousiasme que nous vous invitons tout d'abord à découvrir une aventure humaine étonnante et rafraichissante, celle de la construction d'un « village mathématique » près de Izmir en Turquie : le village de Nessim. Autre initiative stimulante en direction de la jeunesse, le séminaire *Mathematic Park* accueille, à raison d'un dimanche après-midi par mois, des étudiants de premier cycle et de classes préparatoires à l'Institut Henri Poincaré. L'objectif est de proposer des exposés alternatifs permettant d'offrir aux jeunes étudiants une vision des mathématiques différente de celle donnée par leurs cours. Comme le reste de notre société, la planète mathématique n'échappe pas à l'attraction de la blogosphère. Ici et là, des blogs mathématiques fleurissent, source nouvelle d'information. Carlos Mathéus vous sert de guide pour une initiation à ces nouveaux outils.

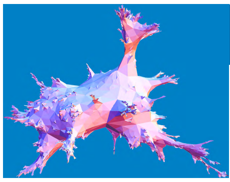
Des mathématiques au service de la physique et de l'exploration de notre univers. Le 14 septembre dernier, les détecteurs américains LIGO effectuaient la première observation d'une onde gravitationnelle. Eric Chassande-Mottin, Stéphane Jaffard et Yves Meyer décryptent pour vous le rôle joué par la théorie des ondelettes dans cette fantastique aventure.

Pour conclure cet éditorial, je souhaiterais saluer chaleureusement Marc Peigné dont j'ai pu apprécier l'enthousiasme et le dynamisme au cours des dernières années. Je tiens également à le remercier pour ses encouragements constants. Bonne route à toi Marc.

En vous souhaitant une agréable lecture,

Boris Adamczewski

la Gazette des Mathématiciens



Nº 148

Sommaire


SMF 2016
Premier congrès national de la Société mathématique de France
Tours
6
au
10
Juin
2016
http://smf2016.sciencesconf.org/
Marie-Claude Arnaud (Université d'Avignon)
Emmanuel Breuillard (Université Paris-Sud)
Francis Brown (CNRS, IHES)
Sébastien Gouëzel (CNRS, Université de Nantes)
Sophie Grivaux (CNRS, Université de Picardie Jules-Verne)
Jean-François Le Gall (Université Paris-Sud)
Gilles Lebeau (Université de Nice)
Stéphane Mallat (ENS Paris)
Frank Pacard (École polytechnique)
Laure Saint-Raymond (Université Pierre et Marie Curie & ENS Paris)
Bertrand Toën (CNRS, Université de Toulouse)
Alexandre Tsybakov (Université Pierre et Marie Curie & CREST)
Cédric Villani (Université de Lyon & IHP)
Claire Voisin (CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche)
Société Mathématique de France
fdp
Fédération Denis Poisson
Orléans - Tours
Conférence grand public : Gérard Besson (CNRS, Université Joseph-Fourier, Grenoble)
Remise du prix d'Alembert

Société Mathématique de France SMF

Nº 148

Mot du président

Chères et chers collègues

Ces trois dernières années, la SMF a effectué un travail très important de réorganisation interne dans son secteur des publications (revues et monographies), jugulant en particulier ses retards afin de retrouver la confiance de ses auteurs et une pleine crédibilité auprès de ses lecteurs. Le monde de l'édition scientifique est en pleine mutation, les débats multiples sur la « Loi pour une république numérique » en discussion en souligne les enjeux, bien au-delà du seul monde de la recherche ; un petit nombre d'éditeurs redouble d'efforts depuis plusieurs mois pour faire pression contre ce texte, avec des motivations économiques bien éloignées de celles d'une société savante comme la SMF, engagée de longue date dans l'édition scientifique et qui a dénoncé la logique financière adoptée à la fin du XX^{e} siècle par des grands groupes, désireux de monopoliser l'édition scientifique.

Le terme « open access » revient constamment dans les discours et autres tribunes sur le sujet. Il revêt des significations très différentes selon les modèles envisagés et les communautés scientifiques ; il a été aussi à l'origine de très belles réussites, pensons notamment au rôle incontournable aujourd'hui des archives ouvertes Arxiv et Hal. La *Gazette* des Mathématiciens s'est emparée du sujet à plusieurs reprises, l'article récent de F. Hélein « La ruée vers l'or des publications ou comment passer des revues avec abonnements aux articles en accès libre », paru dans le numéro de janvier, en présente les multiples facettes et conséquences. Voies « vertes » ou « dorée », régulées ou non, avec ou sans APC (Article Processing Charges, en d'autres termes « frais de publications » pris en charge par les institutions), les conséquences sont multiples pour nous tous, auteurs, lecteurs, bibliothécaires, citoyens... et aussi évaluateurs de nos pairs.

Depuis janvier 2014, les abonnements aux revues de la SMF sont prioritairement en « accès électronique ». La collection des *Mémoires de la SMF* , à mi-chemin entre « journal » et « monographie », s'est également dès cette date inscrite dans cette logique ; elle a été suivie en 2015 par la collection *Astérisque*. Simultanément, forte de la qualité de ses revues, consciente du format particulier de certaines d'entre elles qui permet de publier des textes « longs » avec une mise en perspective développée d'un sujet, et enfin désireuse de répondre de façon réfléchie au nombre de soumissions toujours plus nombreuses, la SMF a augmenté substantiellement le nombre de pages de ses revues : les *Annales de l'ÉNS* sont passées de 1000 à 1500 pages en quelques années, la collection *Astérisque* de 2000 à 2500 et depuis 2016 les *Mémoires de la SMF* proposent 6 volumes par an au lieu de 4. Sans augmentation du prix des abonnements. Lors de son dernier Conseil d'Administration, la SMF a aussi décidé de s'inscrire dans une politique de numérisation de l'ensemble de sa collection *Astérisque*, avec accès électronique libre aux ouvrages de plus de 10 ans. La SMF poursuit ainsi sa politique de mise à disposition de tous sans restriction de son fonds, par le biais de ses dépôts opérés dans l'archive *Numdam*, de concert avec la *Cellule Mathdoc*. Lors de réunions diverses sur les enjeux de l'édition scientifique, et notamment celles organisées par le RNBM, il avait été souligné l'apparition de nombreuses revues de très faible qualité scientifique, et aux motivations mercantiles à peine voilées. Il avait aussi été demandé aux éditeurs académiques et sociétés savantes de prendre leurs responsabilités ; je crois sincèrement que la SMF y a répondu avec toutes les dispositions évoquées ci-dessus.

Le paysage dans ce secteur évolue constamment, en France et à l'étranger. Comme la SMF, les sociétés savantes de mathématiques dans le monde sont attachées à leurs activités de publication suivant des modèles économiques variés, innovants ou non, avec des impératifs de qualité scientifique et éditoriale pérennes. Le nouveau modèle défendu par l'INSMI, incarné de façon spectaculaire par le passage des *Annales de l'Institut Fourier* en libre accès total, représente une évolution majeure à même de faciliter la diffusion du savoir dans la communauté mathématique et au-delà, tout en assurant la pérennité scientifique et technique du processus éditorial. Cette évolution a ses avantages, mais sa généralisation exclusive peut présenter des effets négatifs. En tant que président de la SMF, il est de mon devoir d'alerter l'ensemble de la communauté sur ces enjeux. Il nous faut éviter la déstabilisation d'une édition scientifique de qualité qui a su au fil des années mener une politique raisonnable. La diversité des modèles économiques, les coopérations entre les différents acteurs, le souci d'intégrité scientifique doivent rester à la base de nos activités éditoriales d'aujourd'hui et de nos projets de demain.

Ce mot sera le dernier de ma plume en tant que président de la SMF. Ces trois années au service de cette vieille dame ont été bien remplies, elles resteront pour moi une très belle période de ma vie professionnelle, riche de nombreuses rencontres et d'échanges variés avec les acteurs des mathématiques, en France et dans le monde. Je tiens tout particulièrement à remercier les collègues qui m'ont accompagné au cours de mon mandat, que ce soit comme membres du bureau, chargés de mission, membres du Conseil d'Administration ou du Conseil Scientifique, membres de comités de rédaction ou organisateurs de manifestations, l'équipe du CIRM…, mais aussi les « petites mains » nombreuses, silencieuses mais si précieuses pour mener à bien les actions que nous avons entreprises.

Le Congrès de la SMF du 6 au 10 juin à Tours sera l'occasion de rendre compte de notre travail et de montrer la vitalité de la SMF : j'espère vous y croiser nombreux !

Pour conclure ce mot, je tiens à souligner le travail du personnel de la SMF : Assya, Christian, Claire, Marie-Françoise, Nathalie et Sabine, qui m'ont fait confiance au fil des mois, ont su répondre aux actions que nous avons mises en place avec le bureau et le conseil d'administration et m'ont épaulé sur tant de dossiers où j'étais vraiment perdu. Un grand merci !

Le 2 avril 2016

Marc Peigné, président de la SMF

Comment manger un maximum de pizza ?

• M. Albenque

Vous voilà invité chez une amie mathématicienne. Plongé dans une démonstration récalcitrante, vous avez laissé filer l'heure. Pris au dépourvu, vous arrivez chez elle avec un sérieux retard et dans les mains... une pizza. Votre amie, elle-même sans doute distraite par un autre problème, découpe celle-ci en parts de tailles ridiculement inégales (mais en suivant tout de même les rayons de la pizza). Elle vous propose poliment de vous servir. Vous prenez donc une première part, puis elle se sert à son tour, choisissant naturellement une part adjacente à la vôtre. Et ainsi de suite jusqu'à ce que toute la pizza soit mangée. Vous vous frottez déjà les mains, car vous êtes convaincu qu'avec un peu de réflexion, vous parviendrez bien à manger au moins la moitié de cette savoureuse pizza. Mais se pourrait-il que vous vous trompiez ?

1. Introduction

Alice et Bob se partagent une pizza pour le dîner. Leur pizza est déjà découpée (selon certains de ses rayons) et ils se mettent d'accord pour choisir une part *à tour de rôle* selon le protocole suivant, illustré sur la Figure 1 :

- Alice choisit la première part librement ;
- ensuite, seule une part incidente à des parts déjà mangées peut être choisie.

Cela implique en particulier, qu'à chaque tour (excepté au premier et au dernier tour), Alice et Bob ont le choix entre exactement deux parts de pizza.

On s'intéresse ici à la proportion minimale de pizza qu'Alice est sûre de pouvoir manger, quels que soient la stratégie de Bob et le découpage initial de la pizza. Lorsqu'il énonça ce problème en 2008, Peter Winkler présenta un exemple de pizza (décrit dans la section 4.1) dont Alice ne pouvait manger plus de 4/9 et il conjecturait que cette configuration était la pire possible pour Alice. Sa conjecture a été prouvée indépendamment par deux équipes de chercheurs [2, 3].

Figure 1 – Un début de répartition possible : les parts de Alice et Bob sont respectivement étiquetées A1, A2, A3 et B1, B2, B3 selon l'ordre dans lequel elles ont été choisies.

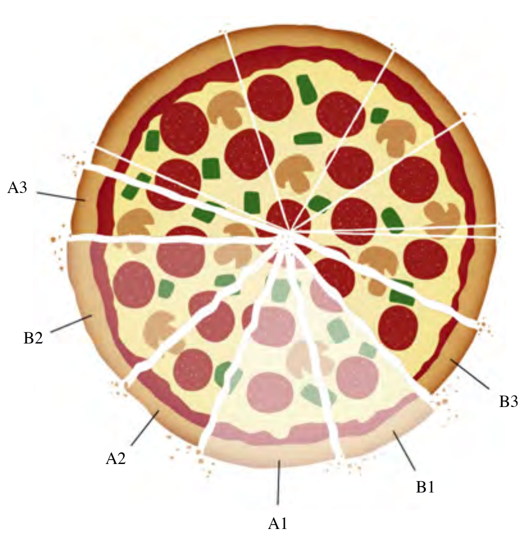
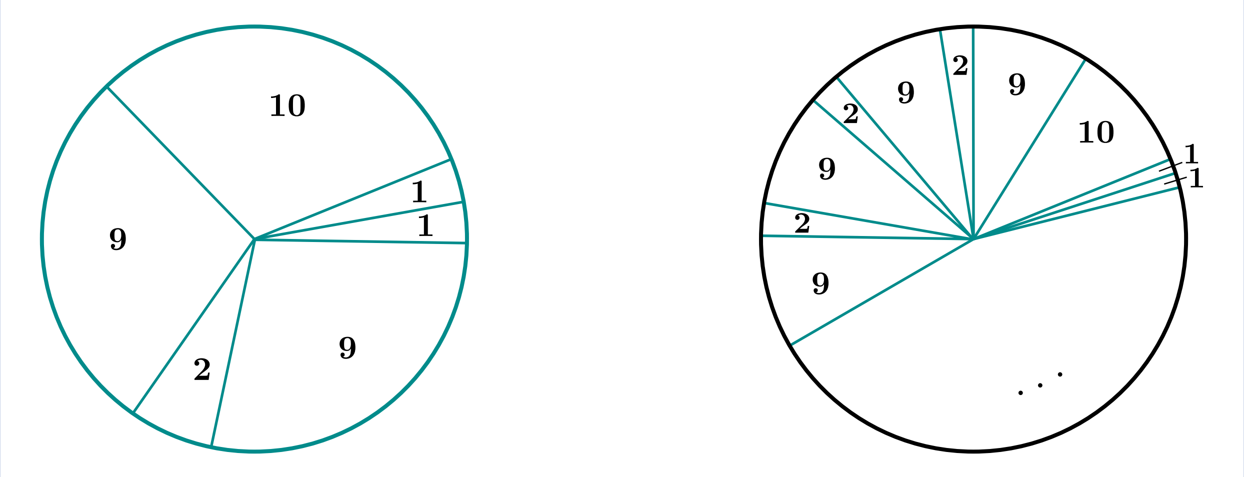


Figure 2 – Exemples de pizzas pour lesquels la stratégie gloutonne ne donne pas une solution optimale (gauche), ni même une approximation de celle-ci (droite).



Théorème 1 ([2, 3]). *La conjecture de Peter Winkler est vraie : pour toute pizza et tout découpage, il existe une stratégie permettant à Alice de manger 4/9 de la pizza.*

Nous ébauchons dans cet article les arguments principaux de la preuve établie dans [3]. La preuve complète étant longue et assez technique, nous renvoyons le lecteur curieux et motivé à l'article original et nous nous contenterons en fait de donner la preuve du résultat suivant :

Théorème 2 ([3]). *Pour toute pizza et tout découpage, il existe une stratégie permettant à Alice de manger 3/7 de la pizza.*

Remarque 1. Pour simplifier le raisonnement, nous autorisons la présence de parts de pizza de taille nulle. Si l'on préfère éviter les parts de taille nulle, il suffit de considérer dans les preuves que ces parts ont taille $\varepsilon > 0$ fixée et de faire ensuite tendre ε vers 0. Sur les illustrations, on représentera les parts de taille nulle par des parts très fines et, quand cela est nécessaire, on indiquera le poids relatif des autres parts.

2. Première stratégie : la gloutonnerie

Les stratégies « gloutonnes » (traduction française de *greedy*) forment un paradigme classique en programmation. Elles consistent à choisir à chaque étape, la stratégie qui maximise le profit immédiat. Dans le cas de notre partage de pizza, cela revient à ce qu'Alice choisisse à chaque tour la plus grande part possible. Il est facile de voir que cette stratégie n'est pas optimale pour Alice. En considérant l'exemple donné Figure 2, on peut en effet constater qu'une stratégie gloutonne permet à Alice de manger 13/32 de la pizza, alors que la stratégie optimale lui permet de manger 20/32 de pizza.

Une question naturelle est alors de savoir si la stratégie gloutonne permet de garantir une solution (certes non-optimale) qui ne diffère de la solution optimale que par un facteur constant. Autrement dit, pour un découpage fixé, notons p_{opt} la quantité minimale de pizza qu'Alice est sûre de pouvoir manger (où le minimum est pris sur les différentes stratégies de Bob) et p_{glout} la même quantité, en supposant cette fois qu'Alice suive une stratégie gloutonne. La question est alors : existe-t-il un *facteur d'approximation* $f > 0$ tel que pour toute pizza, $p_{\text{glout}} > f \cdot p_{\text{opt}}$?

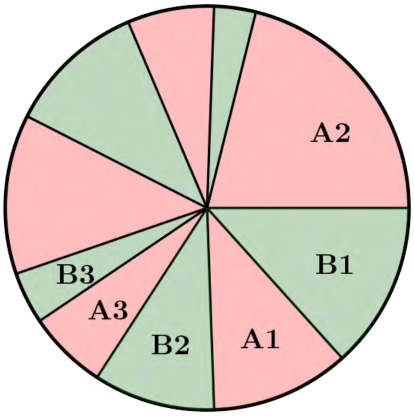
Proposition 1. *La stratégie gloutonne ne permet pas de garantir un facteur d'approximation constant pour les gains d'Alice.*

Corollaire 1. *En particulier, la stratégie gloutonne ne permet pas de garantir qu'Alice mangera une proportion fixée de la pizza.*

Pour prouver cet énoncé, on généralise l'exemple précédent. Fixons $k > 0$, on considère maintenant une pizza comportant une part de taille 10, $k+1$ parts de taille 9, k parts de taille 2 et 2 parts de taille 1, comme représenté sur la Figure 2. Pour cette pizza, $p_{\text{glout}} = 10 + 2k + 1$, tandis que $p_{\text{opt}} = 10 + 9k + 1$. En conséquent, un facteur d'approximation satisfera nécessairement $f \leqslant 2/9$.

Il suffit maintenant de considérer la même pizza où les parts de taille 9 sont remplacées par des parts de taille ℓ quelconque et la part de taille 10 par une part de taille $\ell+1$, pour voir que $f \leqslant 2/\ell$ pour tout ℓ.

Figure 3 – La stratégie d'Alice pour les pizzas avec un nombre pair de parts.



3. Le cas des pizzas paires

Nous commençons par traiter le cas des pizzas ayant un nombre pair de parts, appelées abusivement *pizzas paires*, et qui se révèle être beaucoup plus simple que le cas général.

Proposition 2. *Si la pizza possède un nombre pair de parts, alors il existe une stratégie qui garantit à Alice de manger au moins la moitié de la pizza (quelle que soit la réponse de Bob).*

Preuve. Commençons par colorier les parts de pizza alternativement en rouge et vert (ce qui est possible car le nombre de parts de pizza est pair), comme illustré sur la Figure 3. Sans perte de généralité, on suppose qu'au moins la moitié de la pizza est coloriée en rouge. La stratégie suivante permet à Alice de manger toutes les parts rouges (et donc plus de la moitié de la pizza). Elle commence par manger l'une des parts rouges, ensuite elle choisit toujours la part qui vient d'être « découverte » par Bob. De cette manière, Bob ne peut manger que des parts vertes. □

Le Théorème 2 étant prouvé pour les pizzas paires, on ne considère dorénavant que des pizzas ayant un nombre impair de parts, que l'on appelle *pizzas impaires*.

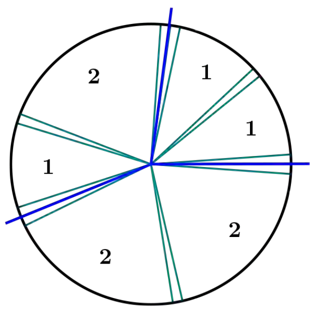
4. Le cas des pizzas impaires : premiers résultats

4.1 – L'exemple initial de Peter Winkler

À première vue, le cas des pizzas impaires semble plus favorable à Alice ; en effet dans ce cas elle mange une part de pizza de plus que Bob. De manière surprenante, il existe pourtant des pizzas avec un nombre impair de parts pour lesquelles Alice ne peut espérer manger plus de 4/9 de la pizza. L'exemple suivant, dû à Peter Winkler, en est une illustration.

Dans cet exemple, la taille totale de la pizza étant de 9, montrons que Bob peut manger au moins 5 unités de pizza. Commençons par le cas où Alice choisit une part de taille 0 au premier tour. Dans ce cas, Bob peut appliquer la même stratégie que celle utilisée par Alice dans le cas des pizzas paires, ce qui lui garantit de pouvoir manger au moins $\lceil 9/2 \rceil = 5$ unités de pizza.

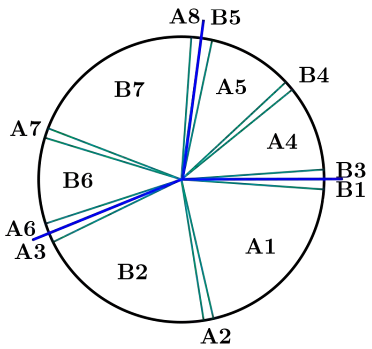
Figure 4 – L'exemple initial de Peter Winkler : Bob peut manger 5/9 de cette pizza.



Pour traiter les autres cas, considérons la partition de la pizza en trois secteurs représentée par les lignes épaisses de la Figure 4. Si Alice commence par manger une part de taille non nulle, Bob choisit la part incidente à une ligne épaisse. Ensuite Bob choisit toujours la part qu'Alice vient de découvrir, sauf si celle-ci se trouve dans un secteur angulaire différent de celui de la part qu'Alice vient de manger. Si les deux parts disponibles pour Bob sont dans des secteurs angulaires qui n'ont pas été touchés jusque là, il attaque le secteur angulaire de taille la plus petite.

Un exemple de cette stratégie est illustré sur la Figure 5.

Figure 5 – Un exemple d'application de la stratégie de Bob.



On peut vérifier, par une analyse au cas par cas, que si Alice joue de manière optimale, alors elle mangera une part non nulle du premier secteur angulaire exploré et les deux parts non nulles du deuxième secteur, tandis que Bob mangera l'autre part non nulle du premier secteur et les deux parts non nulles du troisième secteur. Ce qui permet de conclure la preuve.

4.2 – Une stratégie de type poursuite

Une stratégie de type « poursuite » consiste à jouer dans le même sens que le joueur précédent. Dans notre cas, une stratégie de poursuite consiste à toujours choisir la part qui vient d'être révélée. Les stratégies que nous avons décrites sont toutes de type poursuite (ou une variante d'une telle stratégie). Il est donc relativement naturel de chercher à appliquer ces stratégies pour obtenir de bons résultats dans le cas des pizzas impaires.

Proposition 3. *Alice peut manger 1/3 de n'importe quelle pizza impaire en employant une stratégie de type poursuite.*

Pour prouver cette proposition, on s'appuie à nouveau sur des coloriages de la pizza en rouge et vert. Comme le nombre de parts est cette fois impair, on introduit une variante des coloriages alternants :

Définition 1. Un coloriage *pseudo-alternant* d'une pizza impaire est un coloriage de ses parts en rouge et vert, tel que des parts voisines sont de couleurs différentes à l'exception de deux parts rouges, comme illustré sur la Figure 6. On appelle *coupe du coloriage* la ligne de découpe entre les deux parts rouges voisines.

Preuve (de la Proposition 3). Comme dans la preuve de la Proposition 2, on considère un coloriage des parts de la pizza en rouge et vert, où les parts rouges et vertes correspondent – au moins dans un premier temps – aux parts respectivement mangées par Alice et Bob. Supposons qu'Alice poursuive Bob. Le coloriage que l'on obtient est pseudo-alternant.

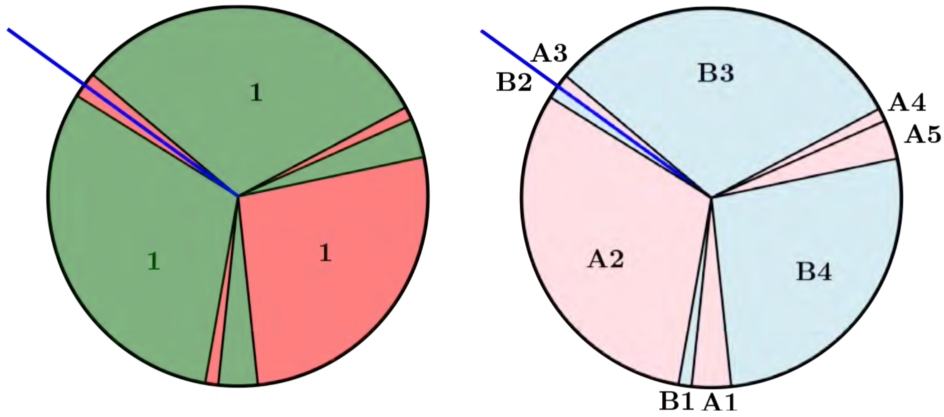
Considérons maintenant l'ensemble des coloriages pseudo-alternants de la pizza. Si, dans tous ces coloriages, la proportion de pizza coloriée en rouge est supérieure à 1/3 alors une stratégie de type poursuite garantit à Alice de pouvoir manger 1/3 de la pizza et la proposition est prouvée. Sinon, considérons un coloriage pseudo-alternant dont la proportion de pizza rouge est inférieure à 1/3. Notons respectivement R et V la proportion de pizza rouge et verte. Soit alors p une part verte telle que la taille totale des parts vertes comprise entre p (inclus) et la coupe du coloriage soit au moins égale à la moitié de V (dans les deux directions). Intuitivement, la part p est la part verte située « au milieu » des parts vertes. Alice peut maintenant suivre la stratégie suivante : elle mange la part p en premier et elle poursuit Bob. De cette façon, elle est sûre de manger toutes les parts vertes comprises entre p et la coupe du coloriage dans au moins une des deux directions. Elle mange donc au moins $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ de pizza. □

La borne inférieure de 1/3 pour les stratégies de poursuite que nous venons d'établir est optimale. En effet, on peut se convaincre qu'Alice ne pourra manger plus d'un tiers de la pizza représentée sur la Figure 6 si elle se contente de poursuivre Bob. D'un autre côté, il est facile de voir qu'Alice peut manger 2/3 de la pizza si elle adopte une autre stratégie. On verra dans la section suivante, comment raffiner les stratégies de poursuite afin de se rapprocher de la borne de 4/9.

5. Poursuite et tripartition de pizzas

Reprenons la stratégie de type poursuite définie ci-dessus. Heuristiquement, le problème pour Alice dans ce type de stratégie est que dès qu'elle a choisi la première part, tout le jeu est déterminé. En effet, Bob peut facilement calculer quel coloriage pseudo-alternant lui sera le plus favorable et jouer en conséquence. On a vu que dans certains cas (cf. Figure 6), cela conduit à un gain pour Alice beaucoup moins favorable que celui qu'elle pour-

Figure 6 – Un coloriage pseudo-alternant dans lequel l'aire des parts rouges représente moins de 1/3 de la pizza (gauche). Exemple de stratégie d'Alice qui lui garantit au moins 1/3 de la pizza.



rait espérer obtenir. Dans l'exemple ci-dessus, on voit qu'une stratégie optimale pour Alice, consiste à suivre Bob à tous les tours *sauf* à un d'entre eux (le deuxième en l'occurence).

On va chercher donc à voir si cette observation peut se généraliser et si on peut garantir une bonne performance à Alice si elle suit une *stratégie de poursuite modifiée* dans laquelle elle suit Bob à tous les tours sauf à l'un d'entre eux. L'idée générale décrite dans cette partie est que si Alice ne peut pas obtenir la moitié de la pizza avec une stratégie de poursuite simple, alors il existe un découpage de la pizza en trois parties qui satisfait à de bonnes propriétés. En s'appuyant sur ce découpage, on peut ensuite exhiber une stratégie de poursuite modifiée qui garantit 3/7 de la pizza à Alice.

5.1 – Meilleure réponse et tripartition

Si Alice utilise une stratégie de poursuite, on a vu qu'il suffit à Bob de calculer quel coloriage pseudo-alternant lui sera le plus favorable et de jouer en conséquence. En d'autres termes, il lui suffit de calculer la coupe du coloriage pseudo-alternant, dont l'aire des parts vertes est maximale sachant que la première part p choisie par Alice doit être rouge. On appelle *meilleure réponse (de Bob)* à p le choix de cette coupe.

Définition 2. Parmi toutes les coupes qui sont des meilleures réponses, on note respectivement $\mathcal{C}_{\text{worst}}$ et $\mathcal{C}_{\text{best}}$ l'ensemble des coupes qui minimisent et maximisent le gain d'Alice.

Si, dans un coloriage associé à une coupe de $\mathcal{C}_{\text{best}}$, l'aire des parts rouges est inférieure à 1/2 (autrement dit, si Alice ne peut espérer manger plus de la moitié de la pizza en poursuivant Bob), on dit que la pizza est *difficile*.

Étant données deux coupes C_1 et C_2, la pizza est naturellement divisée en deux parties dont l'une (partie impaire) comporte un nombre impair de parts et l'autre (partie paire) un nombre pair. On peut ensuite numéroter les parts de la partie impaire, ce qui nous permet de définir les *parts impaires* et les *parts paires* qui sont respectivement numérotées par un nombre impair ou pair. Sur les illustrations, on représente en rouge les parts impaires et en vert les parts paires.

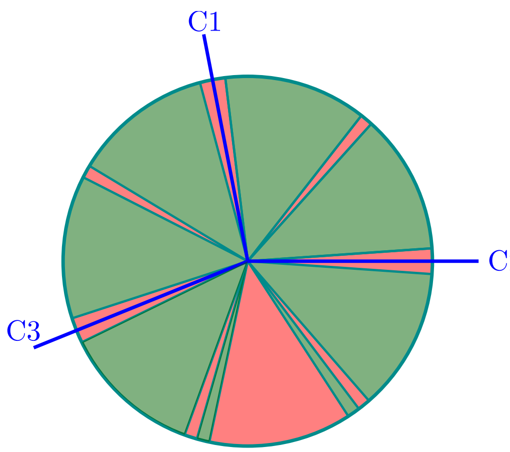
Proposition 4 ([3]). *Si une pizza est difficile, alors il en existe un découpage en trois parties qui vérifient les propriétés suivantes. Si on liste (dans le sens horaire) C_1, C_2, C_3 les 3 coupes qui déterminent le découpage, alors la coupe C_1 appartient à $\mathcal{C}_{\text{worst}}$, la coupe C_2 à $\mathcal{C}_{best}$ et C_3 est une meilleure réponse à une part paire située entre C_1 et C_2.*

De plus, l'aire des parts paires dans chaque partie est supérieure à celle des parts impaires.

5.2 – Stratégie pour 3/7

En s'appuyant sur la tripartition d'une pizza définie à la section précédente, on peut élaborer une nouvelle stratégie pour Alice. Observons d'abord que si Alice suit une stratégie de type poursuite associée à l'une des coupes de la tripartition, alors elle mangera les parts paires d'un secteur et les parts impaires de deux secteurs (cf. Figure 7). Lorsque toute l'aire de la pizza est portée par des parts paires (comme c'est le cas dans les exemples représentés sur la figure 4), cette stratégie ne donne pas de bons résultats. Pour augmenter le gain d'Alice, il faut donc essayer de manger plus de parts paires ! C'est ce qu'on se propose de faire dans cette section. Commençons par obtenir un premier résultat sur les tailles respectives des parts paires et impaires.

Figure 7 – Un exemple de tripartition d'une pizza vérifiant les conditions de la proposition 4. Les parts impaires sont colorées en rouge et les parts paires en vert.



Soit G_1 le secteur angulaire situé entre les coupes C_2 et C_3 et soient o_1 et e_1 les aires respectives des parts impaires (odd) et paires (even) de G_1. (On définit G_2, G_3, o_2, o_3, e_2 et e_3 de manière similaire). Dans une stratégie de poursuite associée à C_1, le gain d'Alice sera égal à $e_1 + o_2 + o_3$ et de manière similaire ceux associés respectivement à C_2 et C_3 sont égaux à $o_1 + e_2 + o_3$ et $o_1 + o_2 + e_3$. Par définition de $\mathcal{C}_{\text{worst}}$ et $\mathcal{C}_{\text{best}}$, on obtient donc en particulier que :

$$e_1 + o_2 + o_3 \leqslant o_1 + o_2 + e_3 \leqslant o_1 + e_2 + o_3. \qquad (1)$$

Soit maintenant p_1 la pièce paire située *au milieu* de G_1, comme défini dans la preuve de la Proposition 3, c'est-à-dire que l'aire des parts paires situées entre p_1 et C_2 d'une part et entre p_1 et C_3 d'autre part est supérieure à $e_1/2$. (On définit p_2 et p_3 de manière similaire). La *stratégie de poursuite modifiée associée* à C_1 est définie ainsi :

1. Alice commence par manger p_1 ;
2. tant que Bob choisit des parts qui ne sont pas voisines de C_2 ou de C_3, Alice le suit ;
3. au moment où Bob révèle une part de G_2 ou de G_3, Alice *ne le suit pas* et choisit l'autre part possible ;
4. ensuite, Alice suit Bob jusqu'à la fin du jeu.

En suivant un raisonnement analogue à celui de la Proposition 3, on peut voir qu'Alice mange ainsi au moins la moitié des parts paires de G_1. Il reste donc à étudier la parité du nombre des parts qu'elle mange dans les autres secteurs. Il est d'abord important de noter que la meilleure réponse pour Bob évolue au fur et à mesure du jeu. Si Alice commence par manger une part paire du secteur G_1 et poursuit ensuite Bob, alors la meilleure réponse est la coupe C_1. En revanche, si Alice se met à suivre Bob alors qu'une partie de la pizza a été mangée (comme c'est le cas après (3)), la meilleure réponse de Bob peut être différente. Dans notre cas, et en s'appuyant sur les propriétés de la tripartition, on peut prouver le lemme suivant :

Lemme 1. *Après (3), au moins une des deux coupes C_2 et C_3 constitue une meilleure réponse (pour Bob).*

En s'appuyant sur le Lemme 1, on peut déduire qu'Alice mange au moins une quantité de pizza égale à $e_1/2 + e_2 + o_3$ (si C_2 est une meilleure réponse) ou $e_1/2 + o_2 + e_3$ (si C_3 est une meilleure réponse). En appliquant l'inégalité (1), on obtient donc qu'Alice mange au moins $e_1/2 + o_2 + e_3$ de pizza.

Preuve (Preuve du Théorème 2). On considère les trois stratégies suivantes :

1. la stratégie de poursuite associée à C_2 qui garantit au moins $o_1 + e_2 + o_3$ à Alice ;
2. la stratégie modifiée associée à C_1 qui garantit au moins $e_1/2 + o_2 + e_3$ à Alice ;
3. la stratégie modifiée associée à C_3 qui garantit au moins $e_1 + o_2 + e_3/2$ à Alice.

En additionnant les gains des stratégies (2) et (3) et 3/2 fois le gain de la stratégie (1), on obtient :

$$\frac{3}{2}(o_1 + e_1 + o_2 + e_2 + o_3 + e_3) + \frac{1}{2}o_2,$$

Autrement dit, les gains d'Alice pondérés par 3.5 sont au moins égaux à 3/2 fois la taille de la pizza. En conséquent, au moins l'une de ces stratégies doit apporter à Alice une proportion de pizza supérieure à $\frac{3}{2}/3.5 = \frac{3}{7}$. □

La borne de 3/7 prouvée dans ce théorème est optimale pour cette stratégie. On peut en effet se convaincre qu'Alice ne peut manger plus de 3/7 de la pizza représentée sur la Figure 7, en utilisant uniquement une stratégie de type poursuite modifiée.

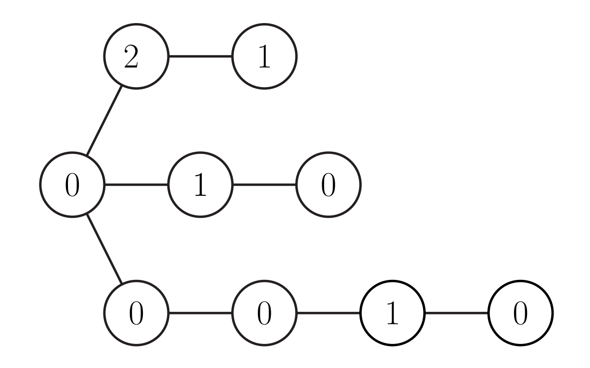
La preuve complète du Théorème 1 donné dans [3] est un raffinement supplémentaire de cette stratégie, dans lequel on considère une tripartition du secteur G_1. Les arguments sont similaires à ceux utilisés ici et nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article original.

6. Perspectives et généralisations : manger des graphes ?

Le problème de la pizza a été généralisé de la façon suivante dans [1, 4, 5]. Étant donné un graphe G avec des poids sur ses sommets, Alice et Bob choisissent à tour de rôle des sommets tels que (*Variante 1*) l'ensemble des sommets *choisis* à chaque instant du jeu soit connexe ou (*Variante 2*) l'ensemble des sommets *non-choisis* soit connexe et en cherchant à maximiser la somme des poids des sommets qu'ils ont choisis. Le cas « pizza » correspond à un graphe G cyclique dans l'une ou l'autre des variantes.

De petits exemples montrent que l'on ne peut pas espérer obtenir de généralisations du Théorème 1 aux graphes généraux que ce soit pour la variante 1 ou la variante 2 du problème. Cependant, en imposant des conditions sur la structure du graphe et sur la parité du nombre de ses sommets, on peut garantir à Alice de bonnes performances. Pour la variante 1, Micek et Walczak [5] ont construit des exemples de graphes très simples (arbres, ...) avec un nombre pair de sommets pour lesquels le gain d'Alice était arbitrairement petit. En revanche, le cas de graphes avec un nombre pair de sommets lui est plus favorable ; dans le cas d'un arbre, il est prouvé qu'elle peut en manger au moins 1/4. Déterminer la valeur exacte de la proportion minimale qu'Alice peut manger dans ce cas est un problème ouvert : des exemples montrent que celle-ci est inférieure à 2/5 (voir Figure 8), mais rien de plus précis n'est connu.

Figure 8 – Dans la variante 1, Alice ne peut manger que 2/5 de cet arbre.



Pour la variante 2, le rôle des parités est échangé : Micek et Walczak ont construit des graphes simples de taille impaire pour lesquels, dans cette variante, le gain d'Alice était arbitrairement petit et ont montré qu'Alice pouvait obtenir 1/4 du poids total si elle mangeait un arbre de taille pair. Seacrest et Seacrest [6] ont ensuite montré qu'Alice pouvait même manger la moitié de l'arbre, résolvant ainsi une conjecture de Micek et Walczak. Les mêmes auteurs ont également conjecturé qu'il existait une constante $c > 0$ telle qu'Alice pouvait toujours obtenir une proportion c du poids total d'un graphe biparti avec un nombre pair de sommets. Ce résultat n'est pour le moment établi que pour les arbres de taille paire.

Références

[1] J. Cibulka et al. « Graph sharing games: complexity and connectivity ». In : *Theory and applications of models of computation*. Springer, 2010, p. 340–349.

[2] J. Cibulka et al. « Solution of Peter Winkler's Pizza Problem ». In : *Fete of combinatorics and computer science*. Springer, 2010, p. 63–93.

[3] K. Knauer, P. Micek et T. Ueckerdt. « How to eat 4/9 of a pizza ». *Discrete Mathematics* **311**, n° 16 (2011), p. 1635–1645.

[4] P. Micek et B. Walczak. « A graph-grabbing game ». *Combinatorics, Probability and Computing* **20**, n° 04 (2011), p. 623–629.

[5] P. Micek et B. Walczak. « Parity in graph sharing games ». *Discrete Mathematics* **312**, n° 10 (2012), p. 1788–1795.

[6] D. E. Seacrest et T. Seacrest. « Grabbing the gold ». *Discrete Mathematics* **312**, n° 10 (2012), p. 1804–1806.

Marie Albenque

Marie Albenque est chargée de recherche cnrs au Laboratoire d'informatique de l'École polytechnique. Ses thématiques de recherche sont les probabilités discrètes et la combinatoire énumérative et bijective.

Ce texte reprend principalement les idées et l'organisation de [3], dont je remercie les auteurs pour m'avoir laissée utiliser certaines de leurs illustrations et en particulier Kolja Knauer pour de nombreuses discussions sur le partage de pizzas.

Réduction ou décomposition : de Jordan à Chevalley

• D. Couty
• J. Esterle
• R. Zarouf

Introduction

On note $GL_n(k)$ le groupe des éléments inversibles de l'algèbre $M_n(k)$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans un corps k. Quand on s'intéresse au théorème de réduction canonique d'une matrice U de $GL_n(k)$ ou à sa décomposition en une somme diagonalisable-nilpotente, on rencontre les noms de Jordan et de Chevalley.

L'article [4] attire entre autres l'attention sur le fait que les décompositions de Jordan sont effectivement calculables à partir du polynôme caractéristique p_U de U. Dans ce même travail, il est aussi indiqué pourquoi préférer la dénomination *décomposition de Jordan-Chevalley* à *décomposition de Dunford*.

Réduction et décomposition sont deux formes différentes du « théorème de Jordan » et elles ont eu des histoires distinctes. À travers un éclairage historique, nous allons tenter de mettre en lumière ces différences, en revenant d'abord sur le théorème de réduction canonique de Camille Jordan puis sur le théorème de décomposition de Claude Chevalley. Notre propos est de regarder à quels moments et comment la contribution mathématique de chacun de ces deux mathématiciens a participé à l'élaboration de ces deux notions, telles que nous les connaissons actuellement.

À la fin de l'article, nous revenons sur l'approche algorithmique effective de la décomposition de Jordan-Chevalley basée sur l'algorithme de Newton (approche aussi appelée « méthode de la tangente »). Nous indiquons comment adapter cet algorithme pour démontrer le théorème d'inversion locale pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Nous discutons un algorithme sous-jacent aux démonstrations usuelles reposant sur le théorème du point fixe du théorème d'inversion locale pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et nous indiquons comment appliquer cet algorithme au calcul de la décomposition de Jordan-Chevalley.

1. Camille Jordan 1838-1922

1.1 – Le Traité des substitutions… et un peu avant

C'est en 1870 que Camille Jordan publie une de ses œuvres majeures, le *Traité des substitutions et des équations algébriques* [13]. On y trouve page 126 la « forme canonique d'une substitution linéaire », forme qui donnera son nom au « théorème de Jordan » de réduction d'une matrice.
Dans la *Préface*, il situe son travail par rapport à la « grande découverte » d'Évariste Galois, affirmant : « Le but de cet Ouvrage est de développer les méthodes de Galois et de les constituer en un corps de doctrine… »

Jordan est loin d'être le premier à lire les travaux de Galois : l'activité mathématique s'inscrivant dans la suite des écrits de Galois a été analysée en détail par Caroline Ehrhardt [7]. Joseph Liouville y a joué un rôle prépondérant en publiant en 1846 les *Œuvres mathématiques* [1] de Galois dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*. Le jeune Jordan, quant à lui, « rencontre » Galois, en 1860, alors qu'il est en train de rédiger sa thèse ([9], p. 8-9).

C'est à travers une analyse fouillée des nom-

1. É. Galois, « Œuvres mathématiques », *J. Math. Pures Appl.* **1** (1846), n°. XI, p. 381-444. Les manuscrits ont été confiés à Liouville par Auguste Chevalier, ami de Galois depuis l'École normale.
2. Une liste de 35 publications de 1860 à 1870 a été établie par Jean Dieudonné lors de l'édition de 1961 des *Œuvres de Camille Jordan*. On y trouve 14 articles tous en lien avec Galois, repérés par les numéros (2), (4), (9), (17)…, certains, comme les articles (18) (24) et (32) étant particulièrement longs.

breux écrits de Jordan [2], sur la période qui s'étend de l'année de sa thèse à la publication du *Traité* en 1870, que l'on peut réellement prendre conscience de l'importance de la « présence » de Galois dans les travaux de Jordan. Ils verront leur aboutissement avec le *Traité des substitutions et des équations algébriques* qui les reprend, les restructure et les généralise, mais supprime « tout développement historique [3] » dans le cours du *Traité*.

Au delà de ce lien avec Galois, dans la *Préface* du *Traité*, Jordan fait aussi référence à Joseph-Alfred Serret [4], dont il fut l'élève. On peut penser avec Caroline Ehrhardt ([7], p. 397) que Serret, qui était présent au jury de la thèse de Jordan, a peut-être encouragé le mathématicien débutant à poursuivre ses recherches.

Les écrits de Jordan nous parlent aussi de Liouville. En préalable à un *Mémoire* [11] de Jordan de 1867 se trouve la *Lettre à M. Liouville sur la résolution algébrique des équations* [10], lettre qui suggère l'incitation à publier que Jordan aurait pu recevoir de Liouville. Il est vrai que Serret et Liouville se connaissaient et que Liouville a un rôle institutionnel essentiel en tant que fondateur du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

Le jeune Jordan a eu bien d'autres sources, que nous ne détaillerons pas [5].

1.2 – Le groupe linéaire dans les textes de Camille Jordan

La *Lettre à M. Liouville* [10], le *Mémoire sur la résolution algébrique des équations* [11] de 1867 et le *Traité* vont nous servir de référence. Ces textes sont bien sûr très postérieurs à l'apparition de la notion de groupe, dont Lagrange fut un précurseur environ un siècle auparavant dans les « Réflexions sur la résolution algébrique des équations ».

Avant d'aborder l'étude du groupe linéaire, reprenons les définitions telles qu'elles sont énoncées par Jordan dans le *Traité des substitutions*, au *Livre Premier-Des Congruences*. Commençons par celle d'une substitution, page 21 : « On donne le nom de substitution à l'opération par laquelle on intervertit un certain nombre de choses que l'on peut représenter par les lettres a, b... »

Cette définition [6] reprend celle de Cauchy de 1815 et décrit notre notion moderne de permutation dans un ensemble X, X étant fini.

Vient ensuite la notion de groupe, page 22 :

> « On dira qu'un système de substitutions forme un groupe (ou un faisceau) si le produit de deux substitutions quelconques du système appartient lui-même au système. »

C'est pour nous un sous-groupe du groupe symétrique.

Puis, Jordan définit son ordre, son degré : « L'ordre d'un groupe est le nombre de ses substitutions : son degré [7] est le nombre des lettres soumises à ses substitutions. »

Le groupe linéaire apparaît chez Jordan dans des textes un peu antérieurs au *Traité*. Dans la *Lettre à M. Liouville* [10] qui introduit le *Mémoire* de 1867, Jordan cite deux théorèmes de Galois :

> « 1. le degré de toute équation primitive [8] soluble par radicaux est une puissance exacte d'un nombre premier ;
>
> 2. les substitutions de son groupe sont toutes linéaires. »

Pour Jordan, un des buts du *Mémoire* de 1867 est de trouver une démonstration de ces théorèmes, perdue, ou dont il ne « reste que quelques lambeaux sans suite ».

De la notion d'équation, il passe, comme Galois, à celle de groupe de l'équation, notion qu'il introduit page 111 du *Mémoire*, par le théorème I, directement issu de celui de Galois de 1830 [9] :

> « Théorème I. Soit $F(x) = 0$ une équation algébrique quelconque à coefficients ra-

3. *Préface* du *Traité*.

4. Dont le nom est associé au trièdre de Serret-Frenet. Serret est l'auteur du *Cours d'algèbre supérieure*, Bachelier, Paris, 1849, cours d'algèbre maintes fois réédité.

5. Frédéric Brechenmacher a analysé avec précision ces différentes sources dans ses nombreux travaux sur Jordan.

6. On trouve une étude extrêmement claire et précise des notions de substitutions et de permutations chez Cauchy et Galois dans un article d'Amy Dahan de 1980 : *Les Travaux de Cauchy sur les Substitutions. Étude de son approche du concept de groupe*, Arch. Hist. Exact Sciences 23.

7. Les lettres soumises à des substitutions sont, dans le cadre de la résolution des équations, les racines d'une équation, leur nombre est le degré de cette équation, ce qui explique ce vocabulaire.

8. Voir la définition de Galois d'une équation primitive dans *Œuvres mathématiques*, p. 409.

9. Proposition I de Galois dans *Œuvres mathématiques*, p. 421. *Théorème : Soit une équation donnée, dont a, b, c... sont les m racines. Il y aura toujours un groupe de permutations des lettres a, b, c... qui jouira de la propriété suivante : 1° que toute fonction des racines, invariable par les substitutions de ce groupe, soit rationnellement connue ; 2° réciproquement, que toute fonction des racines, déterminable rationnellement, soit invariable par les substitutions.*

> tionnels : il existe un certain groupe de substitutions entre ses racines tel que toute fonction des racines, invariable par les substitutions de ce groupe, ait une valeur rationnelle, et réciproquement. »

Puis, dans le cas des groupes qui caractérisent des équations solubles par radicaux, il démontre, page 118 du *Mémoire*, le résultat suivant.

> « Théorème IV. Tout groupe résoluble L peut-être considéré comme le dernier terme d'une série de groupes partiels F, G, H... jouissant des propriétés suivantes : 1) chacun de ces groupes est contenu dans le suivant ; 2) il est permutable à toutes les substitutions L ; deux quelconques de ses substitutions sont échangeables entre elles, aux substitutions près du groupe précédent. »

Il étudie ensuite dans un deuxième chapitre le cas des groupes primitifs [10]. Après avoir déterminé la forme des substitutions du groupe F, et sachant que F est « permutable à toutes les substitutions L [11] », Jordan est en mesure de trouver que les substitutions de L sont de la forme

$$\left|\begin{array}{ll} x & ax+by+\ldots+\alpha \\ y & a'x+b'y+\ldots+\alpha' \\ \ldots & \quad\ldots \end{array}\right|$$

et obtient page 131 : « Théorème III. Les substitutions du groupe primitif L sont toutes de la forme linéaire [12] ».

Le *groupe linéaire* [13] apparaît juste après, Jordan remarquant que les substitutions sans terme constant contenues dans L « forment évidemment un groupe ».
Le contenu de ces deux articles de 1867 est repris dans le *Traité* de 1870, mais sous une présentation totalement différente pour être conforme au plan du *Traité* et s'insérer tout d'abord au *Livre II-Des substitutions*, puis au *Livre IV-De la résolution par radicaux*.

De ce fait, l'exposé que nous venons de parcourir est éclaté en deux parties. La dernière partie de la démonstration, construction assez technique du groupe linéaire à partir du sous-groupe F, appelée *Génération* [14] *du groupe linéaire* prend place au *Livre II, Chapitre II-Généralités sur les substitutions linéaires*, tandis que toute la partie relative aux équations est reportée au *Livre IV, Chapitre Premier-Conditions de résolubilité*.

Le résultat qui nous intéresse particulièrement, c'est-à-dire le théorème de « réduction d'une substitution linéaire à sa forme canonique » apparaît logiquement, selon le plan choisi par Jordan, au *Livre II* après la « génération », l'« ordre », les « facteurs de composition »... du groupe linéaire.

Dans les deux articles de 1867, la recherche de la forme des substitutions du groupe primitif L amène très naturellement au groupe linéaire.

Cette lecture, préalable au *Traité*, donne sens à certains passages du *Traité* et permet d'éclairer le *Livre II* sur deux points.

- D'une part, l'étrange présentation du groupe linéaire dans le *Traité* : c'est en fait une fin de démonstration, volontairement tronquée par l'auteur pour ne pas sortir du cadre des substitutions.
- D'autre part, la source de l'intérêt de Jordan pour le groupe linéaire : ce groupe est en effet pour lui, comme nous l'indique le *Mémoire sur la résolution algébrique des équations*, une étape importante dans l'étude des groupes résolubles.

1.3 – Le théorème de réduction canonique de Jordan

C'est donc au *Livre II* du *Traité des substitutions*, que nous trouvons, page 114, « la forme canonique des substitutions linéaires » dans le cas d'un groupe linéaire de degré p^n (p étant premier). Il s'agit pour Jordan de ramener une substitution donnée A, « à une forme aussi simple que possible », cette expression justifiant pleinement le terme de « réduction ».

Jordan énonce le théorème qui donne la « forme canonique » de la substitution A, pages 125 et 126, après une longue démonstration [15]. Cette fois, c'est

10. Définition p. 34 du *Traité des substitutions*. C'est page 125 du *Mémoire* que Jordan montre que « le nombre des lettres [d'un groupe résoluble] est une puissance, telle que p^n, d'un nombre premier p. »
11. D'après le théorème IV. Cela signifie, en termes actuels, que F est un sous-groupe distingué de L.
12. Ce qui signifie ici : linéaire avec terme constant.
13. Qu'il ne nomme pas ainsi tout de suite, mais c'est la dénomination du *Traité* p. 91.
14. Nous avons choisi ce titre, donné dans la table des matières, de préférence à *Origine du groupe linéaire* qui est celui de la p. 91 car ce paragraphe décrit la construction ou « génération » du groupe linéaire alors que le mot « origine » pourrait laisser espérer une explication sur l'origine historique du groupe linéaire.
15. Frédéric Brechenmacher propose une étude poussée de cette démonstration dans sa thèse (p. 182-186 [2]).

un article de 1868, *Sur la résolution algébrique des équations primitives de degré p^2* [12], première ébauche avant la généralisation de 1870, qui va nous ouvrir la voie.

Dans ce texte où $n = 2$, il est facile de suivre le raisonnement et les calculs pour aboutir aux *formes canoniques* obtenues à partir des substitutions de la forme $\left|x, y \quad ax+by, a'x+b'y\right|$, encore notées $\begin{vmatrix} x & ax+by \\ y & a'x+b'y \end{vmatrix}$.

Jordan étudie la congruence :

$$\begin{vmatrix} a-k & a' \\ b & b'-k \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p} \qquad (1)$$

Il distingue alors trois cas :

– le cas où (1) a deux racines réelles α et β,
– le cas où (1) a deux racines complexes conjuguées $\alpha+\beta i$ et $\alpha+\beta i^p$,
– le cas où (1) a une racine double α.

Et il obtient la réduction canonique figure 1 page 18

FIGURE 1 – Forme canonique en 1868, *Sur la résolution algébrique des équations primitives de degré p^2.*

Toute substitution linéaire S *peut être ramenée par un choix d'indices convenable à l'une des trois formes canoniques suivantes :*

$$\begin{vmatrix} z & \alpha z \\ u & \beta u \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z & (\alpha+\beta i)z \\ u & (\alpha+\beta i^p)u \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z & \alpha z \\ u & \beta z+\alpha u \end{vmatrix}.$$

Regardons maintenant l'énoncé du théorème dans sa version définitive de 1870, figure 2 page 19.

À la ligne 3 du théorème, la « substitution linéaire quelconque à coefficients entiers entre n indices variant chacun de 0 à $p-1$ » est une substitution entre p^n lettres, ce que l'on peut mettre en relation avec un groupe de substitutions de degré p^n, c'est-à-dire avec une équation de même degré.

« Traduisons » maintenant les notations du théorème en langage contemporain dans le cas où $p = 5$ et $n = 3$. Nous associons à la substitution notée par Jordan :

$$\left|x, x', x'' \quad ax+bx'+cx'', \; a'x+b'x'+c'x'', a''x+b''x'+c''x''\right|$$

la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ d'une application linéaire, les coefficients étant dans un corps fini F_5 avec un déterminant différent de zéro ([13], p. 95). L'ensemble de ces matrices est pour nous le groupe linéaire $GL_n(F_5)$, groupe des éléments inversibles de $M_n(F_5)$ (avec $n = 3$). Nous regardons donc aujourd'hui la « forme canonique d'une substitution linéaire » de Jordan en faisant référence à un corps fini F_p, ce qui prend sens si l'on se rappelle que Jordan fait varier les indices x, x'... entre 0 et $p-1$ car son but est l'étude des équations de degré p^n.

On voit aussi apparaître dans l'énoncé le polynôme caractéristique sous la forme

$$\begin{vmatrix} a-K & a' & \dots \\ b & b'-K & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p}$$

ainsi que la « forme de Jordan » qui est, elle, décrite à la fin de l'énoncé sous le terme « forme *canonique* ».

À l'époque de Jordan, les notions de corps et d'espace vectoriel ne sont pas encore dégagées et il travaille sans l'allégement que représentent le langage et les images de vecteurs et de matrices. Pour définir un élément du groupe linéaire ci-dessus, il nous suffit aujourd'hui de connaître l'image d'une base de n éléments. Par contre, pour Jordan, apparaissent les p^n indices représentés par les n lettres x, x', x''... (chacune variant dans F_p), indices revenant sans cesse dans la démonstration, d'où l'intérêt d'aborder cette étude dans le cas particulier choisi par Jordan en 1868.

1.4 – La dénomination « forme » ou « réduite » de Jordan

Il faudra longtemps avant que le théorème que nous venons d'étudier prenne son nom.
En Allemagne, dans le *Moderne Algebra* [16] de Van der Waerden, grand classique de l'Algèbre des années 30, le théorème de réduction de Jordan, écrit sous forme matricielle, se trouve au deuxième tome, page 138, au §109 « Normalformen für eine Matrix in einem kommutativen Körper » (forme normale d'une matrice sur un corps commutatif – noté K). –

16. *Moderne Algebra II*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1931. La première édition en 1930 sera suivie de 8 rééditions au cours du XXe siècle. Il a pour sous-titre : « Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. » de Van der Waerden, grand classique de l'Algèbre des années 30, le théorème de réduction de Jordan, écrit sous forme matricielle, se trouve au deuxième tome, page 138, au §109 « Normalformen für eine Matrix in einem kommutativen Körper » (forme normale d'une matrice sur un corps commutatif – noté K).

Figure 2 – Théorème de réduction canonique du *Traité des substitutions et des équations algébriques* de 1870, p. 125 et 126.

157. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Soit*

$$A = | x, x', \ldots \quad ax + bx' + \ldots, a'x + b'x' + \ldots, \ldots |$$

une substitution linéaire quelconque à coefficients entiers entre n indices variables chacun de 0 à $p-1$;

Soient $F, F', \ldots$ les facteurs irréductibles de la congruence de degré n

$$\begin{vmatrix} a-K & a' & \ldots \\ b & b'-K & \ldots \\ \cdot & \cdots & \ldots \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p};$$

$l, l', \ldots$ leurs degrés respectifs; $m, m', \ldots$ leurs degrés de multiplicité;

On pourra remplacer les n indices indépendants $x, x', \ldots$ par d'autres indices jouissant des propriétés suivantes :

1° Ces indices se partagent en systèmes correspondants aux divers facteurs $F, F', \ldots$ et contenant respectivement $lm, l'm', \ldots$ indices;

2° Soient $K_0, K_1, \ldots, K_{l-1}$ les racines de la congruence irréductible $F \equiv 0 \pmod{p}$; les lm indices du système correspondant à F se partagent en l séries correspondantes aux racines $K_0, K_1, \ldots, K_{l-1}$;

3° Les indices de la première série de ce système sont des fonctions linéaires des indices primitifs, dont les coefficients sont des entiers complexes formés avec l'imaginaire K_0 : ils constituent une ou plusieurs suites $y_0, z_0, u_0, \ldots; y'_0, z'_0, \ldots; \ldots$ telles, que A remplace les indices $y_0, z_0, u_0, \ldots$ d'une même suite respectivement par $K_0 y_0, K_0(z_0+y_0), K_0(u_0+z_0), \ldots$;

4° Les indices de la $r+1^{\text{ième}}$ série sont les fonctions $y_r, z_r, u_r, \ldots; y'_r, z'_r, \ldots; \ldots$, respectivement conjuguées des précédentes, que l'on forme en y remplaçant K_0 par K_r : A les remplace respectivement par $K_r y_r, K_r(z_r+y_r), K_r(u_r+z_r), \ldots; \ldots$

Cette forme simple

$$\begin{vmatrix} y_0, z_0, u_0, \ldots, y'_0, \ldots & K_0 y_0, K_0(z_0+y_0), K_0(u_0+z_0), \ldots, K_0 y'_0, \ldots \\ y_1, z_1, u_1, \ldots, y'_1, \ldots & K_1 y_1, K_1(z_1+y_1), K_1(u_1+z_1), \ldots, K_1 y'_1, \ldots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ v_0, \ldots & K'_0 v_0, \ldots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

a laquelle on peut ramener la substitution A par un choix d'indices convenable, sera pour nous sa forme *canonique*.

Pour K algébriquement clos, si A est la matrice d'une application linéaire, il est démontré qu'on peut en trouver une « forme normale » constituée de blocs, chacun étant sous forme réduite.

Dans ce traité, cette forme réduite s'appelle « die *dritte Normalform* » (la troisième forme normale), sans référence à un nom de mathématicien. Ainsi, ce livre, dont Jean Dieudonné dira, dans son *Abrégé d'histoire des mathématiques*, qu'il rassemble « en un tout cohérent et particulièrement clair l'acquis du demi-siècle précédent » et qu'il « va servir de tremplin aux développements ultérieurs », ne donne pas de nom à la « forme de Jordan ».

Cela n'empêchera pas Van der Waerden, mais c'est une parenthèse dans notre récit, de nous faire partager en 1985 son admiration pour l'œuvre de Jordan !

> « Jordan's monumental work of 667 pages *Traité des substitutions et des équations algébriques* published in 1870 par Gauthier-Villars is a masterpiece of mathematical architecture. The beauty of the edifice is admirable. [17] »

C'est peu de temps après, au cours des années 30 et 40 que « notre » forme de Jordan prend cette dénomination, appelée par exemple « the Classical Canonique Form » avec une référence historique à Jordan ou « the familiar Jordan normal form » [4].

17. *Van der Waerden B.L., A history of Algebra : from Al-Khwàrizmi to Emmy Noether*, New York, Springer Verlag, 1985. p. 117.

2. Claude Chevalley 1909-1984

Claude Chevalley est aux États-Unis lorsqu'il publie deux livres sur les groupes de Lie, le premier en 1944 [18], le deuxième en 1951. Au cœur du second tome se trouve, pages 71 et 72, le théorème suivant :

> « Théorème 7. Soit X un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie sur un corps parfait K. Il est alors possible, d'une manière et d'une seule, de représenter X comme somme d'un endomorphisme semi-simple S et d'un endomorphisme nilpotent N qui commutent entre eux ; S et N peuvent être représentés comme polynômes en X à coefficients dans K. »

Ici, très clairement, la « décomposition », que nous avons choisie d'appeler « décomposition de Jordan-Chevalley », a remplacé la « réduction » de Jordan.

2.1 – Contexte de l'écriture du théorème

Après quelques années passées en France comme boursier de la Caisse nationale des sciences, Chevalley fut suppléant d'André Weil à la faculté des sciences de Strasbourg puis nommé maître de conférences à Rennes en 1937 [1]. Invité en 1938 pour une année académique à l'Institute for Advanced Study de Princeton, il s'y trouve encore quand la guerre éclate en 1939. L'ambassadeur de France lui conseille de rester et l'université de Princeton lui offre un poste de professeur. Il a alors 30 ans [5].

Dans cette période, de nombreux savants ont été amenés à quitter l'Europe à cause de la situation politique. Les mathématiciens Richard Courant et Felix Bernstein fuient l'Allemagne pour les États-Unis, respectivement en 1933 et 1934. Courant obtiendra un poste à New-York et Bernstein enseignera dans différentes universités américaines dont New-York. Emmy Noether est contrainte de quitter Göttingen pour le collège féminin de Bryn Mawr en Pennsylvanie en 1933. À partir de 1933, l'Institute for Advanced Study abrite Hermann Weyl que la montée du national-socialisme a lui aussi contraint à fuir l'Allemagne. Albert Einstein, John von Neumann, puis Kurt Gödel deviennent des membres permanents de l'Institute for Advanced Study. Emil Artin émigre en 1937 et, après quelques années dans l'Indiana, obtient un poste à Princeton en 1946. Carl Siegel, qui a réussi à quitter l'Allemagne en passant par la Norvège, devient professeur à Princeton en 1940. La même année, Jacques Hadamard fuit la France pour les États-Unis, puis c'est le tour de Weil en 1941 (voir [14], [5]). Celui-ci obtient un poste au collège de Haverford, dans la banlieue de Philadelphie, situé non loin de Princeton. Chevalley l'aide dans son installation et lui propose de partager son bureau à Princeton – d'après les *Souvenirs d'apprentissage* de Weil.

Cette émigration massive influence fortement le développement de l'école mathématique américaine à cette époque et Chevalley est plongé dans ce mouvement. De cette période, Dieudonné dit à la page 108 de [5] :

> « Chevalley eut la chance de toujours rester en contact avec certains des meilleurs mathématiciens travaillant alors aux États-Unis. Auprès d'eux et de leurs élèves, son esprit toujours en éveil, son savoir et sa curiosité encyclopédique firent merveille. »

Viendront ensuite pour Chevalley, à partir de 1948, quelques années à Columbia University à New-York, puis le retour en France en 1955.

2.2 – Le théorème de décomposition

Dans ces années-là, Chevalley publie donc les deux ouvrages dont nous avons parlé.

Theory of Lie groups I en 1944 – l'édition de 1946, Princeton Mathematical Series, vol. 8, est dédiée à Elie Cartan et Hermann Weyl. D'après Dieudonné [5], ce volume « est demeuré pendant plus de vingt ans le seul ouvrage où l'on pouvait s'initier à la théorie ».

Théorie des groupes de Lie Tome II – sous-titre : groupes algébriques – en 1951 [3]. Claude Chevalley ouvre l'introduction en ces termes :

> « Le présent ouvrage constitue dans une certaine manière une suite à mon ouvrage *Theory of Lie groups*, publié à la Princeton University Press en 1944. Cependant, les sujets traités ici sont très différents de ceux abordés dans *Theory of Lie groups* et les démonstrations des

18. La date de publication que donne Chevalley pour cet ouvrage est 1944 (voir introduction du deuxième tome) : ce livre aurait donné lieu à une première publication à la Princeton University Press en 1944 mais à cause des circonstances liées à la guerre, il a finalement été définitivement publié en 1946 – d'après un courrier personnel de James E. Humphreys de 2010.

> principaux théorèmes contenus dans ce volume ne dépendent pas de la théorie générale des groupes de Lie. »

Ce deuxième tome est découpé en deux grands chapitres.

Le premier est présenté par Chevalley comme un chapitre rassemblant des théorèmes d'algèbre générale. Le second s'intitule *Groupes algébriques*. Et cela dit presque tout.

C'est à la fin du premier chapitre, au paragraphe *Espaces vectoriels à opérateurs* que nous trouvons le théorème 7 qui est notre théorème de décomposition. Une version très générale de ce résultat a été donnée par les auteurs dans le théorème 1 de [4]. Nous renvoyons à la seconde partie de cet article pour une discussion des notions d'éléments absolument semi-simples, semi-simples et séparables d'une k-algèbre, où k désigne un corps commutatif.

Il est intéressant de se plonger dans la lecture de la démonstration de ce théorème telle qu'elle fut rédigée par Claude Chevalley, figure 3 page 22.

Comme souligné dans [4], un aspect remarquable de la démonstration de Chevalley est qu'elle repose sur un algorithme utilisant seulement le fait qu'il existe un polynôme annulateur de u dont tous les facteurs irréductibles sont séparables, c'est-à-dire relativement premiers avec leur polynôme dérivé. La démonstration de la proposition 5 mentionnée dans la démonstration de Chevalley indique alors qu'il existe un polynôme séparable f et un entier $e \geqslant 1$ tel que $f^e(X) = 0$, et l'élément S de la décomposition vérifie $f(S) = 0$, ce qui signifie qu'il est en fait « absolument semi-simple » (les notions de semi-simplicité et absolue semi-simplicité coïncident sur une k-algèbre A quand le corps k est parfait).

Le théorème de décomposition admet une forme multiplicative, qui permet, sous les mêmes hypothèses, de décomposer de manière unique un automorphisme s d'un espace vectoriel de dimension finie en produit $s = g_s \circ g_u$ où g_s est un automorphisme (absolument) semi-simple et où g_u est un automorphisme unipotent (c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de g_u sont égales à 1) qui commutent entre eux. Le théorème 18 page 184 qui conclut le deuxième volume de Chevalley montre que tout groupe algébrique d'automorphismes qui contient s contient aussi g_s et g_u.

On voit donc que la réduction de Jordan apparaît au moment où émerge la notion de groupe linéaire, tandis que la forme multiplicative de la décomposition de Jordan-Chevalley conduit à un résultat fondateur de la théorie des groupes algébriques.

3. L'enseignement du « théorème de Jordan » en premier cycle

En parallèle des histoires de réduction et de substitutions, de décomposition et de groupes algébriques, se tient une histoire de l'enseignement de ces deux notions ; nous allons l'aborder à partir des années 1960-70 à travers quelques ouvrages.
Tout d'abord, c'est le théorème de réduction de Jordan qui est au premier plan dans les ouvrages destinés à l'enseignement.

Le « théorème de Jordan » du *Cours d'Algèbre* de Roger Godement de 1964, page 448, s'énonce :

> « Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K et u un endomorphisme de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
>
> 1. toutes les valeurs propres de u sont dans K, ie le polynôme p_u a toutes ses racines dans K ;
> 2. il existe une base de E par rapport à laquelle la matrice de u est de la forme : $\begin{pmatrix} U_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & U_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & U_r \end{pmatrix}$ où chaque U_i est une matrice réduite à coefficients dans K. »

Certes, la décomposition de Jordan apparaît, mais seulement tout à la fin du livre, page 636, sous forme d'exercice.

En 1965, Serge Lang adopte le même point de vue page 398 de son ouvrage *Algebra* en décrivant la forme canonique de Jordan :

> « Let k be algebraically closed, and E be a finite dimensional non-zero vector space over k. Let $A \in End_k(E)$. Then there exists a basis of E over k such that the matrix of A with respect to this basis consists of blocks, and each block is of the type described in the theorem. »

Ce sont bien sûr les classiques blocs de Jordan. Là aussi, la décomposition de Jordan trouve sa place, page 406, dans les exercices.

En 1977, dans le *Cours de mathématiques-Algèbre* de Jacqueline Lelong-Ferrand et Jean-Marie Arnaudiès, l'accent est encore mis sur la ré-

Figure 3 – Démonstration du théorème de décomposition dans *Théorie des groupes de Lie II*, Claude Chevalley, 1951

Théorème 7. — *Soit* X *un endomorphisme d'un espace vectoriel* V *de dimension finie sur un corps parfait* K. *Il est alors possible, d'une manière et d'une seule, de représenter* X *comme somme d'un endomorphisme semi-simple* S *et d'un endomorphisme nilpotent* N *qui commutent entre eux ;* S *et* N *peuvent être représentés comme polynomes en* X *à coefficients dans* K.

Soit P l'algèbre des polynomes en une variable U à coefficients dans K. On voit comme au début de la démonstration de la prop. 5 qu'on peut trouver un polynome $f \in \mathrm{P}$ relativement premier à son polynome dérivé f' et un exposant $e > 0$ tels que $(f(\mathrm{X}))^e = 0$. Il existe des polynomes h et h_1 à coefficients dans K tels que $f'h + fh_1 = 1$, d'où $f'h \equiv 1 \pmod{f}$. Si $p = p(\mathrm{U})$ est un élément quelconque de P, nous poserons $s(p) = p(\mathrm{U} - f(\mathrm{U})h(\mathrm{U}))$; il est clair que s est un homomorphisme de P dans lui-même. Faisant usage de la formule de Taylor, on a

$$s(f) \equiv f(\mathrm{U}) - f'(\mathrm{U})f(\mathrm{U})h(\mathrm{U}) = f(\mathrm{U})(1 - f'(\mathrm{U})h(\mathrm{U})) \pmod{(f(\mathrm{U})h(\mathrm{U}))^2},$$

d'où il résulte que $s(f) \equiv 0 \pmod{f^2}$. Il en résulte immédiatement par récurrence sur m que $s^m(f) \equiv 0 \pmod{f^{2^m}}$. Nous choisirons un entier m tel que $2^m \geqslant e$; on a alors $s^m(f) \equiv 0 \pmod{f^e}$. On a $s(\mathrm{U}) = \mathrm{U} - f(\mathrm{U})h(\mathrm{U})$, d'où, pour tout $p \in \mathrm{P}$, $s(p) = p(s(\mathrm{U}))$, et par suite, pour tout entier $k > 0$, $s^k(p) = p(s^k(\mathrm{U}))$. On a $s(\mathrm{U}) \equiv \mathrm{U} \pmod{f}$, d'où, par récurrence, $s^k(\mathrm{U}) \equiv \mathrm{U} \pmod{f}$ pour tout $k > 0$. Ceci dit, posons $\mathrm{S} = (s^m(\mathrm{U}))(\mathrm{X})$; on a

$$f(\mathrm{S}) = (f(s^m(\mathrm{U})))(\mathrm{X}) = (s^m(f))(\mathrm{X}),$$

d'où $f(\mathrm{S}) = 0$ puisque $s^m(f)$ est divisible par f^e. Puisque $\mathrm{U} - s^m(\mathrm{U})$ est divisible par f, on a $(\mathrm{X} - \mathrm{S})^e = 0$; si donc nous posons $\mathrm{N} = \mathrm{X} - \mathrm{S}$, N est nilpotent. Les endomorphismes S et N sont des polynomes en X, et par suite commutent l'un avec l'autre. D'autre part, S est semi-simple en vertu de la prop. 5.

Soient maintenant S′ un endomorphisme semi-simple et N′ un endomorphisme nilpotent qui commute avec S′ tels que $\mathrm{X} = \mathrm{S}' + \mathrm{N}'$. On a donc $\mathrm{S} - \mathrm{S}' = \mathrm{N}' - \mathrm{N}$. Or S′, qui commute avec N′, commute avec $\mathrm{X} = \mathrm{S}' + \mathrm{N}'$, et par suite avec S qui est un polynome en X ; on voit de même que N′ commute avec N. Il résulte de la prop. 4 que $\mathrm{S} - \mathrm{S}' = \mathrm{N}' - \mathrm{N}$ est à la fois semi-simple et nilpotent, d'où $\mathrm{S} - \mathrm{S}' = \mathrm{N}' - \mathrm{N} = 0$ en vertu du lemme 2, ce qui achève la démonstration du th. 7.

duction de Jordan. Elle apparaît sous le titre *Réduction des matrices carrées et application*, page 358, chapitre XI, avec toutefois un rapide détour par la forme $u = \Delta + v$ avec Δ diagonalisable et v nilpotent. Ainsi, même si la *décomposition de Jordan-Chevalley* date de 1951, elle n'a pas amené de traduction très visible dans l'enseignement en premier cycle dans les décennies qui suivent. C'est seulement dans l'enseignement récent en *L*2 que cette décomposition prend un rôle plus central. Et l'enseignement de la méthode basée sur l'algorithme de Newton, qui est apparu dans les préparations à l'agrégation au début des années 2000, reste peu fréquent au niveau licence [6]. Cette méthode s'inscrit pourtant dans la continuité de la démonstration écrite par Claude Chevalley au début des années cinquante.

Le caractère effectif de l'algorithme de Newton adapté par Chevalley à ce contexte (ou à la situation plus générale suivante : comment écrire de manière unique tout élément séparable u d'une k-algèbre A comme somme d'un élément absolument semi-simple de A et d'un élément nilpotent de A qui commutent ?), est étudié dans [4]. Mais la richesse de l'algorithme de Newton ne s'arrête pas là. En effet, dans le cours de *L*3 de calcul différentiel du second auteur [8, Chapitre 3], est développée une approche algorithmique du théorème d'inversion locale dans le cadre des espaces de Banach. Ce dernier théorème montre en particulier que si E et F sont des espaces de Banach, et si $\phi : U \to F$ est une application différentiable telle que la différentielle $D(\phi) : x \mapsto D(\phi)_x$ est continue en $a \in U$, alors l'équation $\phi(x) = b$ admet une solution dans U si $\left\|\phi(a) - b\right\|$ est assez petit. L'idée du second auteur dans [8] est dans un premier temps d'attirer l'attention sur le fait qu'il est naturel d'étendre à ce contexte la méthode de Newton en considérant la suite :

$$\left\{\begin{array}{c} x_{n+1} = x_n - D(\phi)_{x_n}^{-1}(\phi(x_n) - b) \\ x_0 = a \end{array}\right. ,$$

qui – sous certaines hypothèses – converge vers une solution de l'équation $\phi(x) = b$. Ces hypothèses faisant intervenir la différentielle d'ordre 2 de ϕ, il est proposé dans un second temps dans [8] de considérer plutôt la suite définie par :

$$\left\{\begin{array}{c} x_{n+1} = x_n - D(\phi)_{a}^{-1}(\phi(x_n) - b) \\ x_0 = a \end{array}\right. ,$$

mieux adaptée à ce contexte. En effet, si f est une fonction d'une variable réelle dérivable sur un intervalle ouvert contenant a, de dérivée continue en a et non nulle en a, on dispose d'un algorithme (moins rapide que l'original) donné par la formule :

$$\left\{\begin{array}{c} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)-b}{f'(a)} \\ x_0 = a \end{array}\right. ,$$

qui donne une suite convergente $(x_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $f(\lim_{n\to\infty} x_n) = b$ quand $|b - f(a)|$ est assez petit. Plus précisément soit $r > 0$ tel que

$$|f'(\zeta) - f'(a)| \leqslant \frac{f'(a)}{2}$$

pour $|\zeta - a| < r$ et soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $|f(b) - a| < \frac{r}{2}|f'(a)|$. On a, d'après le théorème des accroissements finis,

$$|x_{n+1} - a| \leqslant \left|x_n - a - \frac{f(x_n) - f(a)}{f'(a)}\right| + \left|\frac{b - f(a)}{f'(a)}\right|$$

$$< sup_{\zeta\in[a,x_n]}\left|1 - \frac{f'(\zeta)}{f'(a)}\right||x_n - a| + \frac{r}{2},$$

et on voit par récurrence que l'algorithme est bien défini et que $|x_n - a| < r$ pour tout $n \geqslant 1$. On a alors, pour $n \geqslant 1$,

$$|x_{n+1} - x_n| = \left|x_n - x_{n-1} - \frac{f(x_n) - f(x_n - 1)}{f'(a)}\right|$$

$$\leqslant sup_{\zeta\in[x_{n-1},x_n]}\left|1 - \frac{f'(\zeta)}{f'a)}\right||x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{|x_n - x_{n-1}|}{2},$$

ce qui montre que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$est convergente, et on a évidemment $f(lim_{n\to+\infty}(x_n)) = b$. Le même schéma de démonstration fonctionne dans le cadre Banachique pour démontrer le théorème d'inversion locale : on choisit $r > 0$ tel que $\left\|D(\phi)_x - D(\phi)_a\right\| < \frac{1}{2\|D(\phi)_a^{-1}\|}$ pour $\|x - a\| < r$, et l'algorithme donné plus haut donne une suite convergente $(x_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $\phi(lim_{n\to+\infty} x_n) = b$ pour $\|b - \phi(a)\| < \frac{r}{2\left\|D(\phi)_a^{-1}\right\|}$. Cette démonstration est en fait analogue aux démonstrations classiques reposant sur le théorème du point fixe, mais cette approche « algorithmique » nous semble pédagogiquement préférable.

Forts de cette idée, revenons à la preuve donnée par Chevalley de la décomposition faisant l'objet de notre présent article : l'algorithme ci-dessus fonctionne encore (avec $b = 0$, $a = u$ et $f = \tilde{p} = \frac{p}{pgcd(p,p')}$ où p est un polynôme annulateur de u, élément séparable d'une k-algèbre A) en conservant les notations de [4, Théorème 1], il est moins rapide certes, mais il évite un calcul d'inverse à chaque itération (celui de $f'(x_n)^{-1}$). En voici une description à travers le théorème ci-dessous, dont la démonstration est laissée au lecteur.

Théorème. *Soient k un corps, A une k-algèbre et soit $u \in A$. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur unitaire $p = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r} \in k[x]$ de u dont les facteurs irréductibles unitaires $p_1, \dots, p_r$ sont séparables. On pose $m = \max_{1\leqslant j\leqslant r} m_j$, $\tilde{p} = p_1 \dots p_r$, $\overline{p} = p/\tilde{p}$, de sorte que $\tilde{p}$ est séparable. Il existe $q \in k[x]$ tel que $q\tilde{p}' \equiv 1 \bmod \overline{p}$. On définit par récurrence une suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de A en posant*

$$\left\{\begin{array}{c} d_0 = u \\ d_{n+1} = d_n - \tilde{p}(d_n)\,q(d_0) \ pour\ n \geqslant 0. \end{array}\right.$$

Soit N le plus petit entier tel que $N \geqslant m - 1$. Alors $\tilde{p}(d_N) = 0$, d_N est absolument semi-simple, $u - d_N$ est nilpotent, $[d_N, u - d_N] = 0$ et $(d_N, u - d_N)$ est l'unique décomposition de Jordan-Chevalley de u.

Remarque. En désignant par d la partie absolument semi-simple de u, on remarque que la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ du théorème ci-dessus converge (ou stationne pour être plus précis) plus lentement vers d que celle issue de l'adaptation directe de la méthode de Newton par Chevalley faisant l'objet du Théorème 1 de [4]. En effet, ici on a $d_n = d$ pour tout $n \geqslant m - 1$ alors que dans [4, Théorème 1], on a $d_n = d$ pour tout n satisfaisant à $2^n \geqslant m$. L'algorithme est donc certes moins rapide, mais il présente l'avantage de ne pas nécessiter un calcul d'inverse à chaque itération : celui de $\tilde{p}'(d_n)^{-1}$.

Références

[1] L. Beaulieu. « Bourbaki, une histoire du groupe de mathématiciens français et de ses travaux (1934–1944) ». Thèse de doct. Institut d'histoire et de sociopolitique des sciences, Faculté des arts et sciences, Montréal, 1989.

[2] F. Brechenmacher. « Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930) ». Thèse de doct. École des Hautes Études en Sciences sociales, 2006.

[3] C. Chevalley. *Théorie des groupes de Lie. Tome II. Groupes algébriques.* Actualités Sci. Ind. n°. 1152. Hermann & Cie., Paris, 1951, p. vii+189.

[4] D. Couty, J. Esterle et R. Zarouf. « Décomposition effective de Jordan-Chevalley ». *Gaz. Math.* n° 129 (2011), p. 29–49.

[5] J. Dieudonné. « Claude Chevalley ». *Transform. Groups* **4**, n° 2-3 (1999). Dedicated to the memory of Claude Chevalley, p. 103–113.

[6] X. Dussau et al. *Mathématiques, Cours d'algèbre linéaire.* ESTIA première Année. ESTIA, 2010.

[7] C. Ehrhardt. « Évariste Galois et la théorie des groupes, fortune et réélaborations (1811-1910) ». Thèse de doct. École des Hautes Études en Sciences Sociales, 2007.

[8] J. Esterle. *Calcul Différentiel et Equations Différentielles.* Cours de licence. Université de Bordeaux I, 2011.

[9] C. Jordan. « 1) Sur le nombre des valeurs des fonctions ; 2) Sur les périodes des fonctions inverses des intégrales des différentielles algébriques ». Thèse de doct. Faculté des sciences de Paris, 1860.

[10] C. Jordan. « Lettre à M. Liouville sur la résolution algébrique des équations ». *J. Math. Pures Appl.* **2**, n° XII (1867), p. 105–108.

[11] C. Jordan. « Mémoire sur la résolution algébrique des équations ». *J. Math. Pures Appl.* **2**, n° XII (1867), p. 109–157.

[12] C. Jordan. « Sur la résolution algébrique des équations primitives de degré p^2 (p étant premier impair) ». *J. Math. Pures Appl.* **2**, n° XIII (1868), p. 111–135.

[13] C. Jordan. *Traité des substitutions et des équations algébriques.* Gauthiers-Villars, Paris, 1870.

[14] N. Schappacher. *Questions politiques dans la vie des mathématiques en Allemagne, 1918-1935.* La science du Troisième Reich (sous la direction de J. Olff-Nathan). Seuil, Paris, 1993.

Danielle Couty

Institut de Mathématiques de Toulouse

danielle.couty@iut-tarbes.fr

Danielle Couty est maître de conférences à l'IUT de Tarbes. Ses recherches actuelles portent sur l'histoire des mathématiques aux XIXe siècle et XXe siècle.

Jean Esterle

Université de Bordeaux

j.esterle@estia.fr

Jean Esterle est professeur émerite à l'université de Bordeaux et chargé de cours à l'École d'ingénieurs ESTIA à Bidart (64). Ses recherches portent sur l'analyse fonctionnelle et la théorie des opérateurs.

Rachid Zarouf

ESPE d'Aix-Marseille, Aix-Marseille Université. Département de Mathématiques et Mécanique, université d'État de Saint-Pétersbourg, Russie.

rachid.zarouf@univ-amu.fr

Rachid Zarouf est maître de conférences à l'École Supérieure du Professorat et de l'Éducation d'Aix-Marseille Université. Ses recherches portent sur l'analyse matricielle, l'approximation rationnelle et l'interpolation.

Nous remercions Frédéric Brechenmacher pour sa relecture, en janvier 2012, de la version initiale de cet article ainsi que pour ses nombreuses remarques. Nous remercions Daniel Ferrand pour ses explications sur la diffusion de la méthode de Newton dans le cadre de la préparation à l'agrégation, Jean Lerbet pour avoir attiré notre attention sur la référence à Claude Chevalley concernant la décomposition, dès 2003, dans le livre *Systèmes Dynamiques* de Charles-Michel Marle ainsi qu'Alin Bostan pour nous avoir signalé l'article de Dieter Schmidt *Construction of the Jordan decomposition by means of Newton's method*, 2000. Merci également à Christian Ille pour son aide précieuse dans la dernière écriture de ce texte. Ce travail est soutenu par la Russian Science Foundation grant 14-41-00010.

Formes normales de champs de vecteurs

• P. Bernard

Pour étudier la dynamique d'un champ de vecteurs au voisinage d'un point fixe, il est naturel de chercher des coordonnées dans lesquelles ce champ a une expression aussi simple que possible. On va décrire une méthode générale pour le faire qui remonte à Lindstedt (1854–1939), Poincaré (1854-1912), Dulac (1870-1955), Birkhoff (1884-1944) et d'autres. On rappelle que tout champ de vecteurs se ramène à un champ constant dans les bonnes coordonnées au voisinage d'un point régulier (point non fixe). Du point de vue de l'étude locale, seuls les points fixes présentent donc une difficulté.

On s'intéresse aux champs de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui sont définis et C^∞ dans un voisinage de 0 et nuls en 0. On note $\mathcal{X}$ cet espace de champs. On note $\phi_* X$ l'action usuelle du difféomorphisme local ϕ sur le champ X :

$$\phi_* X(x) = d\phi_{\phi^{-1}(x)} \cdot X(\phi^{-1}(x)),$$

c'est l'expression de X dans les nouvelles coordonnées données par ϕ. On note $\mathcal{G}$ le groupe des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^n$ en 0 qui fixent 0. Le groupe $\mathcal{G}$ préserve $\mathcal{X}$, c'est-à-dire que $\phi_* X \in \mathcal{X}$ si $X \in \mathcal{X}$ et $\phi \in \mathcal{G}$. Pour tout champ $X \in \mathcal{X}$, le flot φ^1_X au temps 1 est défini au voisinage de 0, c'est un élément de $\mathcal{G}$. L'une des opérations essentielles dans ce texte est le crochet de Lie $[X, Y]$ des champs de vecteurs. Il est défini par

$$[X, Y](x) = dY_x \cdot X(x) - dX_x \cdot Y(x),$$

et il est caractérisé par la propriété

$$D_{[X,Y]} = D_X D_Y - D_Y D_X$$

en notant D_X l'opérateur sur les fonctions C^∞ qui à la fonction f associe la fonction $x \longmapsto df_x \cdot X(x)$. Il est utile pour les applications de travailler avec des classes restreintes de champs de vecteurs. On se donne pour ceci une sous-algèbre de Lie $\mathcal{Y}_1 \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$ (l'espace des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, muni du crochet de commutation), c'est-à-dire un sous-espace vectoriel stable par crochet de commutation. On considère alors le sous-espace $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ des champs X tels que $dX_x \in \mathcal{Y}_1$ pour tout x voisin de 0. C'est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{X}$, c'est-à-dire qu'il est stable par crochet de Lie.

Quelques exemples classiques sont les champs de divergence nulle, les champs holomorphes sur $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, les champs Hamiltoniens sur $\mathbb{R}^{2n}$ (les champs de la forme $X(x) = J\nabla H(x)$, où J est la matrice de la multiplication par i dans l'identification standard entre $\mathbb{R}^{2n}$ et $\mathbb{C}^n$, et où H est une fonction).

On notera $[X]^k$ le développement à l'ordre k du champ $X \in \mathcal{X}$ en 0, $[X]_k$ ou X_k le terme homogène de degré k de ce développement. On note $\mathcal{Y}^k := \{[Y]^k, Y \in \mathcal{Y}\}$ et $\mathcal{Y}_k := \{[Y]_k, Y \in \mathcal{Y}\}$, ce sont les espaces de champs polynomiaux (resp. homogènes) de degré k qui appartiennent à $\mathcal{Y}$.

Dans la suite, nous dirons qu'une matrice est diagonalisable si elle est $\mathbb{C}$-diagonalisable (le terme semi-simple est aussi employé dans la littérature). Toute matrice carrée A admet une unique décomposition de Jordan $A = A_s + A_n$, où A_s est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$), A_n est nilpotente, et $A_s A_n = A_n A_s$. Si A est réelle, A_s et A_n le sont aussi (mais A_s n'est pas forcément diagonalisable dans $\mathbb{R}$). Cette décomposition est aussi appelée décomposition de Dunford.

Le but de ce texte est de discuter et de démontrer en détails le résultat suivant, dit théorème de forme normale :

Théorème. *Soit $X \in \mathcal{Y}$ un champ de vecteurs de linéarisé A. Considérons une matrice B qui est, soit la partie diagonalisable de A dans sa décomposition de Jordan, soit une matrice qui a la propriété d'appartenir à $\mathcal{Y}_1$ et d'être l'adjointe de A pour un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Il existe alors une suite $Y_i, i \geqslant 2$ d'éléments de $\mathcal{Y}_i$ qui a la propriété que, pour tout $k \geqslant 2$, le développement de Taylor de $(\varphi^1_{Y_2+\cdots+Y_k})_* X - A$ à l'ordre k commute avec B.*

On verra que le champ $(\varphi^1_{Y_2+\cdots+Y_k})_* X$ est un élément de $\mathcal{Y}$.

Comme le champ $Y_2 + \cdots + Y_k$ n'a pas de terme linéaire, le linéarisé de $(\varphi^1_{Y_2+\cdots+Y_k})_* X$ est égal au linéarisé A de X. Un champ de linéarisé A est dit sous forme normale si sa partie non linéaire commute avec B. Le théorème permet donc de mettre un champ de vecteurs sous forme normale à tout ordre par un changement de variables. Comme il y a plusieurs choix possibles pour la matrice B, il n'y a pas une unique notion de forme normale (mais, dans le cas où A est diagonalisable, c'est en général le choix $B = A$ qui est fait).

L'utilité de ce théorème est d'autant plus grande que la condition de commuter avec B est restrictive. Dans les meilleurs cas (voir ci-dessous), cette condition impose à la forme normale d'être linéaire ; dans les pires cas, par exemple si $A = 0$, (et donc $B = 0$), elle ne donne aucune information..

Lorsque $\mathcal{Y}$ est l'ensemble des singularités de champs de vecteurs holomorphes sur $\mathbb{C}^n$, ce résultat est appelé théorème de forme normale de Poincaré-Dulac. Dans ce cas, on interprète le linéarisé A comme une matrice $n \times n$ complexe (et non comme une matrice $2n \times 2n$ réelle). La matrice $n \times n$ complexe B est l'adjointe de A en tant qu'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ pour un produit scalaire sur $\mathbb{R}^{2n}$ si et seulement si c'est l'adjointe de A pour un produit hermitien sur $\mathbb{C}^n$.

Lorsque $\mathcal{Y}$ est l'ensemble des singularités de champs de vecteurs Hamiltoniens sur $\mathbb{R}^{2n}$, ce résultat est appelé théorème de forme normale de Poincaré-Birkhoff.

Les énoncés initiaux de ces théorèmes de formes normales n'avaient pas une forme aussi similaire que ceux que nous venons de donner. Dans le cas du théorème de Poincaré-Birkhoff, par exemple, les changements de variables canoniques (ceux qui préservent la structure Hamiltonienne des champs de vecteurs) n'étaient pas cherchés initialement comme flots de champs de vecteurs Hamiltoniens, comme ci-dessus, mais à l'aide de fonctions génératrices. Ceci masquait partiellement l'analogie entre les deux énoncés. L'objectif du présent texte est justement de donner une présentation aussi unifiée que possible des différents résultats de forme normale.

C'est surtout le cas où A est diagonalisable et $B = A$ qui a été considéré au départ, ou le cas $B = A_s$. Les variantes où B est l'adjoint de A, qui sont plus précises dans le cas non diagonalisable, mais aussi moins canoniques, sont plus récentes, voir [2] et ses références.

Pour interpréter la conclusion du théorème, il faut décrire les champs qui commutent avec B. On se contente ici de mentionner les cas les plus simples où A est diagonalisable et où $B = A$.

Considérons dans un premier temps le contexte de Poincaré-Dulac, c'est-à-dire celui des champs de vecteurs holomorphes. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres du linéarisé A (interprété comme un élément de $\mathfrak{gl}(\mathbb{C}^n)$). Une relation de résonance est une relation de la forme

$$\lambda_i = m_1\lambda_1 + \cdots + m_n\lambda_n$$

avec $m_i \in \mathbb{N}$ et $\sum m_i \geqslant 2$. S'il n'existe aucune relation de résonance entre les valeurs propres de A, alors tout champ polynomial commutant avec A est linéaire. La conclusion du théorème de forme normale dans ce cas est donc que pour tout k il existe un difféomorphisme holomorphe ϕ tel que $\phi_* X = A$ à l'ordre k.

La condition de non résonance est toutefois trop restrictive, notamment dans le contexte de Poincaré-Birkhoff. Dans ce contexte, $-\lambda$ est une valeur propre du linéarisé A dès que λ en est une. Il existe donc toujours des résonances du type $\lambda = 2\lambda + (-\lambda)$. Le théorème de Poincaré-Birkhoff ne permet jamais de conjuguer un champ à son linéarisé. Décrivons les formes normales dans le cas emblématique où les valeurs propres de linéarisé A sont imaginaires pures, de la forme $\pm i\omega_j, 1 \leqslant j \leqslant n$. Ce choix correspond à l'étude de n oscillateurs non linéaires couplés. Supposons qu'il n'y a pas d'autre résonance (de type Poincaré-Dulac) que celles qui sont inévitables, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de relation non triviale de la forme

$$m_1\omega_1 + \cdots + m_n\omega_n = 0$$

avec $m_j \in \mathbb{Z}$. Ces relations sont dites résonances de Poincaré-Birkhoff. On peut se ramener par un changement de variables linéaires au cas où $A = J\nabla Q$, avec $Q = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \cdots + \omega_n I_n$, où $I_j = (q_j + p_j)^2/2$. Au vu de la condition de non résonance, un argument de densité montre que tout champ qui commute avec A commute en fait avec chacun des champs linéaires $A_j = J\nabla I_j$. Les champs Hamiltoniens vérifiant cette condition sont ceux de la forme $X = J\nabla H$ où $H = f(I_1, \ldots, I_n)$. Ces champs ont une dynamique particulièrement simple, dite intégrable, au cours de laquelle les quantités I_j sont préservées. Dans le cas sans résonances de Poincaré-Birkhoff, le théorème de forme normale permet donc de conjuguer le champ de vecteur initial à une forme normale intégrable à un reste près d'ordre arbitrairement petit.

Pour illustrer le cas où A n'est pas diagonalisable, considérons un champ Hamiltonien sur $\mathbb{R}^2$ dont le linéarisé est donné par la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est associée au Hamiltonien $H(q,p) = p^2/2$, en notant (q,p) les points de $\mathbb{R}^2$. On peut alors appliquer le théorème avec

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Un champ Hamiltonien commute avec B si et seulement si son Hamiltonien est indépendant de p. Les formes normales dans ce contexte sont donc engendrées par les hamiltoniens de la forme $H(q,p) = p^2/2 + f(q)$ où f est une fonction dont le développement d'ordre 2 en 0 est nul. Au delà de la satisfaction de retrouver la forme d'un Hamiltonien classique (énergie cinétique plus énergie potentielle), cette forme normale n'est pas d'une grande utilité dynamique car les systèmes Hamiltoniens sur $\mathbb{R}^2$ ont une structure assez simple pour être étudiés directement. Toutefois, il y a des variantes de cet exemple pour lesquelles la forme normale donne des informations décisives, comme la singularité dite $0^2 i\omega$, voir [2].

L'énoncé général du théorème de forme normale soulève une autre question naturelle. Peut-on trouver un difféomorphisme $\phi \in \mathcal{G}$ tel que $\phi_* X$ commute avec B dans un voisinage de 0 ? Cette question donne lieu à de nombreux développements classiques et récents. La réponse est négative en général, ce qui traduit le fait que les propriétés dynamiques particulières des champs sous forme normale (par exemple l'intégrabilité) ne sont pas toujours satisfaites par le champ de vecteurs initial. Une des erreurs célèbres de Poincaré est d'avoir dans un premier temps négligé ce fait, voire [4]. Il existe malgré tout des cas où une telle conjugaison ϕ existe. Les méthodes algébriques que nous allons exposer pour démontrer le théorème de forme normale ne suffisent toutefois pas pour obtenir de telles conclusions. Une approche naturelle consiste à étudier la convergence de la série $Y_2 + Y_3 + \cdots$, ou celle de la série $\sum [\varphi^1_{Y_2+\cdots+Y_k}]_k$.

Le livre [1], chapitre 5, est une bonne introdution à ces sujets, on peut aussi citer [3, 2].

Ce texte a profité de la relecture attentive et des suggestions profitables de Thomas Dedieu. Il a aussi profité des lumières en matière de formes normales de Gérard Iooss et Éric Lombardi, de qui l'auteur tient l'essentiel de ses connaissances en la matière.

1. Contexte formel

Il est souvent pratique d'identifier un champ de vecteurs X à la dérivation $f \longmapsto df \cdot X$ qu'il engendre sur l'espace des fonctions C^∞. Quand on ne s'intéresse qu'au développement de Taylor à l'ordre k de champs nuls en 0, on peut considérer une action sur l'espace de dimension finie

$$E^k = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$$

des polynômes de degré au plus k sans terme constant à valeurs réelles sur $\mathbb{R}^n$, où E_i est l'espace des polynômes homogènes de degré i. Tout champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}$ engendre un endomorphisme de E^k, noté X ou $X\diamond$, donné par $X \diamond P = [dP \cdot X]^k$, en notant $[f]^k$ le développement de Taylor à l'ordre k de f à l'origine. On fait aussi agir sur E^k les difféomorphismes locaux fixant l'origine en définissant $\phi \diamond P = [P \circ \phi]^k$. Pour tenter de limiter les confusions, on notera $\diamond$ la composition dans $\mathfrak{gl}(E^k)$. On remarque que $(\phi \circ \psi)\diamond = \psi \diamond \phi \diamond$ si $\phi, \psi \in \mathcal{G}$ (le groupe des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^n$ fixant l'origine).

Le développement à l'ordre k d'un champ de vecteurs ou d'un difféomorphisme est déterminé par son action sur E^k. En effet, pour $\ell \in E_1$, on a $X \diamond \ell = [\ell \circ X]^k = \ell \circ [X]^k$ pour tout $X \in \mathcal{X}$, et $\phi \diamond \ell = [\ell \circ \phi]^k = \ell \circ [\phi]^k$ pour tout $\phi \in \mathcal{G}$.

On constate que

$$(\phi_* X)\diamond = \phi^{-1} \diamond X \diamond \phi \diamond$$

c'est-à-dire que l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{X}$ à l'ordre k s'identifie à une action par conjugaison. Le crochet de Lie s'identifie, sans surprise, au crochet de commutation :

$$[X,Y]\diamond = X \diamond Y \diamond - Y \diamond X \diamond.$$

Prendre le flot est une exponentielle :

$$(\varphi^1_X)\diamond = \exp(X\diamond).$$

Pour le démontrer, on constate que $\partial_t (P \circ \varphi^t_X) = (X \cdot P) \circ \varphi^t_X$ pour tout $P \in E^k$, c'est-à-dire que $\partial_t (\varphi^t_X \diamond) = \varphi^t_X \diamond X \diamond$ dans $\mathfrak{gl}(E^k)$. C'est l'équation qui définit $\exp(tX\diamond)$. On rappelle finalement la relation

$$\mathrm{Ad}_{\exp L} = \exp(\mathrm{ad}_L)$$

pour tout $L \in \mathfrak{gl}(E^k)$, en notant $\mathrm{Ad}_V \in GL(\mathfrak{gl}(E^k))$ la conjugaison $M \longmapsto V^{-1} \diamond M \diamond V$ pour tout $V \in GL(E^k)$ et en notant $\mathrm{ad}_L \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(E^k))$ l'opérateur

$M \longmapsto L \diamond M - M \diamond L$. Pour le démontrer, il suffit de vérifier que $\partial_t(\mathrm{Ad}_{\exp tL}) = \mathrm{ad}_X \diamond \mathrm{Ad}_{\exp tL}$ (composition dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(E^k))$).

On dit qu'un endomorphisme de E^k augmente les degrés de d s'il envoie chacun des sous-espaces $E_i \oplus \ldots \oplus E_k \subset E^k$ sur $E_{i+d} \oplus \ldots \oplus E_k$ (ce dernier sous-espace étant réduit à 0 lorsque $i + d > k$). Tout endomorphisme qui augmente les degrés de k est nul. L'endomorphisme $X\diamond$ associé à un champ homogène de degré $d+1$ augmente les degrés de d.

2. Démonstration du théorème de forme normale

On prouve le théorème de forme normale par récurrence sur $k \geqslant 2$. On fixe une matrice B comme dans l'énoncé et on dit qu'un champ de vecteurs est sous forme normale à l'ordre k si sa partie non linéaire commute avec B à l'ordre k. On suppose qu'il existe un champ de vecteurs $Z = Y_2 + \cdots + Y_{k-1} \in \mathcal{Y}$, polynomial de degré $k-1$, tel que $(\varphi^1_Z)_* X$ est sous forme normale à l'ordre $k-1$ (dans le cas $k = 2$, on prend $Z = 0$). On montre alors l'existence d'un champ homogène $Y_k \in \mathcal{Y}_k$ tel que $(\varphi^1_{Z+Y_k})_* X$ est sous forme normale à l'ordre k. En représentant les objets par des opérateurs sur E^k, on a

$$(\varphi^1_Z)_* X = \mathrm{Ad}_{\exp Z}(X) = \exp(\mathrm{ad}_Z)(X).$$

Comme l'opérateur ad_Z préserve le sous-espace $\mathcal{Y}^k \subset \mathfrak{gl}(E^k)$, il en est de même de $\exp \mathrm{ad}_Z$, donc $\mathrm{Ad}_{\exp Z}(X) \in \mathcal{Y}^k$. On a donc (toujours dans $\mathfrak{gl}(E^k)$)

$$(\varphi^1_Z)_* X = \mathrm{Ad}_{\exp Z}(X) = A + N + R_k$$

où N est un champ polynomial sans terme linéaire de degré $k-1$ qui commute avec B et $R_k \in \mathcal{Y}_k$ est homogène de degré k. Pour tout $Y_k \in \mathcal{Y}_k$, on a $Z \diamond Y_k = Y_k \diamond Z = 0$ (car ces endomorphismes de E^k augmentent le degré de k), donc $\exp(Z + Y_k) = \exp Z \diamond \exp Y_k$ dans $\mathfrak{gl}(E^k)$. On a les équations

$$\begin{aligned} &\exp(-Z - Y_k) \diamond X \diamond \exp(Z + Y_k) \\ =&\exp(-Y_k) \diamond (A + N + R_k) \diamond \exp(Y_k) \\ =&A + N + R_k + A \diamond Y_k - Y_k \diamond A. \end{aligned}$$

Le champ $(\varphi^1_{Z+Y_k})_* X$ est sous forme normale à l'ordre k si et seulement si

$$\mathrm{ad}_B\big(R_k + \mathrm{ad}_A(Y_k)\big) = 0.$$

La proposition ci-dessous implique que $\mathrm{ad}_B \circ \mathrm{ad}_A(\mathcal{Y}_k) = \mathrm{ad}_B(\mathcal{Y}_k)$, et donc que cette équation a une solution Y_k. Ceci termine la preuve du théorème. □

Proposition. *L'espace $\mathcal{Y}_k \cap \ker \mathrm{ad}_B$ des éléments de $\mathcal{Y}_k$ qui commutent avec B est un complémentaire de $\mathrm{ad}_A(\mathcal{Y}_k)$ dans $\mathcal{Y}_k$, c'est-à-dire que*

$$\mathcal{Y}_k = (\mathcal{Y}_k \cap \ker \mathrm{ad}_B) + \mathrm{ad}_A(\mathcal{Y}_k).$$

3. Opérateur de commutation

Le but est maintenant de démontrer la proposition utilisée ci-dessus dans la preuve du théorème de forme normale. On se place dans le cadre général d'un espace vectoriel réel E de dimension finie, on note $\mathfrak{gl}(E)$ l'espace des endomorphismes de E et $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des isomorphismes. Pour tout $V \in \mathfrak{gl}(E)$ on considère l'opérateur $\mathrm{ad}_V \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(E))$ défini par

$$\mathrm{ad}_V(M) := VM - MV = [V, M].$$

On vérifie que $\mathrm{ad}_{[V,W]} = [\mathrm{ad}_V, \mathrm{ad}_W]$. On s'intéresse au cas où $E = E^k$ et $V = A\diamond$. L'opérateur ad_V est alors appelé opérateur homologique.

Étant donné un produit scalaire sur E, on munit $\mathfrak{gl}(E)$ du produit scalaire $\mathrm{tr}\,(NM^t)$, où M^t est l'adjoint de M relativement au produit scalaire de E. Ce produit scalaire est aussi caractérisé par la propriété suivante : pour toute base orthonormée (e_i) de E, en notant (l_i) la base duale, les éléments $e_i \otimes l_j$ (c'est-à-dire les éléments de $\mathfrak{gl}(E)$ représentés dans la base (e_i) par une matrice ayant tous ses coefficients égaux à zéro sauf un, qui est égal à 1) constituent une base orthonormée de $\mathfrak{gl}(E)$.

Propriété. *Si W est l'adjoint de V, alors ad_W est l'adjoint de ad_V. Le noyau de ad_W est donc un supplémentaire de l'image de ad_V.*

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}\,((VN - NV)M^t) = \mathrm{tr}\,(VNM^t - NVM^t) \\ &\quad = \mathrm{tr}\,(NM^tV - NVM^t) = \mathrm{tr}\,(N(WM)^t - N(MW)^t) \\ &\qquad = \mathrm{tr}\,(N(\mathrm{ad}_W M)^t). \end{aligned}$$

□

Un endomorphisme est dit normal s'il commute avec son adjoint. Tout endomorphisme normal est $\mathbb{C}$-diagonalisable, et a le même noyau que son adjoint. Dans le cadre réel, tout opérateur normal peut être représenté dans une base orthonormée par une matrice diagonale par blocs 1×1 ou 2×2 de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

Propriété. *Si V est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$), alors il existe un produit scalaire sur E (donc sur $\mathfrak{gl}(E)$) pour lequel ad_V est normal. En notant W l'adjoint de V, on a donc $\ker \mathrm{ad}_W = \ker \mathrm{ad}_V$.*

Si V est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$), il existe une base réelle dans laquelle V est représentée par une matrice diagonale par blocs 1×1 ou 2×2 de la forme $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. En considérant le produit scalaire sur E pour lequel cette base est orthonormée, on voit que V commute avec son adjoint W. On a alors $[\mathrm{ad}_V, \mathrm{ad}_W] = \mathrm{ad}_{[V,W]} = 0$, donc ad_V est normal. L'endomorphisme ad_V est donc $\mathbb{C}$-diagonalisable, et il a le même noyau que son adjoint ad_W. □

Plus généralement, on peut considérer la décomposition de Jordan $V = V_s + V_n$ de V.

Propriété. *La décomposition de Jordan de ad_V est $\mathrm{ad}_V = \mathrm{ad}_{V_s} + \mathrm{ad}_{V_n}$.*

On a vu que ad_{V_s} est $\mathbb{C}$-diagonalisable. On a $[\mathrm{ad}_{V_s}, \mathrm{ad}_{V_n}] = \mathrm{ad}_{[V_s,V_n]} = 0$, donc il suffit de vérifier que ad_{V_n} est nilpotent. Pour tout $M \in \mathfrak{gl}(E)$, on voit que $\mathrm{ad}^l_{V_n}(M)$ est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $V_n^i M V_n^j$ avec $i + j = l$. En choisissant k tel que $V_n^k = 0$, ces termes sont tous nuls si $l \geqslant 2k$, donc $\mathrm{ad}^{2k}_{V_n} = 0$. □

Propriété. *Il existe un produit scalaire de E pour lequel l'adjoint W de V a la propriété suivante : tout endomorphisme qui commute avec W commute avec V_s.*

La décomposition de Jordan de l'adjoint W de V est $W = W_s + W_n$ où W_s est l'adjoint de V_s et W_n celui de V_n. Il existe un produit scalaire pour lequel W_s commute avec V_s, ce qui implique que ad_{W_s} et ad_{V_s} ont le même noyau. Comme $\mathrm{ad}_W = \mathrm{ad}_{W_s} + \mathrm{ad}_{W_n}$ est la décomposition de Jordan de ad_W, on a $\ker \mathrm{ad}_W \subset \ker \mathrm{ad}_{W_s} = \ker \mathrm{ad}_{V_s}$. □

La proposition à démontrer est une variante des résultats ci-dessus dans le cas où $E = E^k$, où $V = A\diamond$ et où on s'intéresse à la restriction de ad_V au sous-espace invariant $\mathcal{Y}_k \subset \mathfrak{gl}(E^k)$.

Lemme. *Soit $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(E)$ un sous-espace invariant par ad_V.*

Si $W \in \mathfrak{gl}(E)$ est l'adjoint de V pour un produit scalaire de E tel que $\mathrm{ad}_W(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g} \cap \ker \mathrm{ad}_W$ est un supplémentaire de $\mathrm{ad}_V(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{g}$.

Si $W = V_s$ est la partie diagonalisable de V, alors $\mathfrak{g} \cap \ker \mathrm{ad}_W$ est transverse à $\mathrm{ad}_V(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{g}$ (c'est-à-dire que $\mathrm{ad}_V(\mathfrak{g}) + (\mathfrak{g} \cap \ker \mathrm{ad}_W) = \mathfrak{g}$).

On munit $\mathfrak{gl}(E)$ du produit scalaire défini plus haut, et $\mathfrak{g}$ de sa restriction. Comme

$$\langle \mathrm{ad}_V M, N \rangle = \langle M, \mathrm{ad}_W N \rangle,$$

la restriction $\mathrm{ad}_{W|\mathfrak{g}}$ est l'adjointe de la restriction $\mathrm{ad}_{V|\mathfrak{g}}$, donc $\ker \mathrm{ad}_{W|\mathfrak{g}}$ est un supplémentaire de l'image de $\mathrm{ad}_{V|\mathfrak{g}}$ dans $\mathfrak{g}$. Ceci démontre le premier point.

Concernant le second point, on rappelle d'abord que tout sous-espace invariant par ad_V (en particulier $\mathfrak{g}$) est invariant par ses parties diagonalisables et nilpotentes ad_{V_s} et ad_{V_n}. La réduction de Jordan de la restriction $\mathrm{ad}_{V|\mathfrak{g}}$ est donc $\mathrm{ad}_{V|\mathfrak{g}} = \mathrm{ad}_{V_s|\mathfrak{g}} + \mathrm{ad}_{V_n|\mathfrak{g}}$.

On considère un produit scalaire sur E tel que V_s, et donc ad_{V_s}, sont normales, et donc tel que $\ker \mathrm{ad}_{W_s} = \ker \mathrm{ad}_{V_s}$, où W_s est l'adjoint de V_s. Admettons pour l'instant que $\mathfrak{g}$ est invariant par ad_{W_s}. Il découle alors du premier cas que $\mathfrak{g} \cap \ker \mathrm{ad}_{W_s} = \mathfrak{g} \cap \ker \mathrm{ad}_{V_s}$ est un supplémentaire de $\mathrm{ad}_{V_s}(\mathfrak{g})$ donc qu'il est transverse à $\mathrm{ad}_V(\mathfrak{g})$ (on a en effet $\mathrm{im}\, \mathrm{ad}_{V_s|\mathfrak{g}} \subset \mathrm{im}\, \mathrm{ad}_{V|\mathfrak{g}}$ car $\mathrm{ad}_{V_s|\mathfrak{g}}$ est la partie diagonalisable de $\mathrm{ad}_{V|\mathfrak{g}}$).

Il reste à montrer que tout espace invariant par ad_{V_s} (donc $\mathfrak{g}$) est invariant par ad_{W_s} si ad_{V_s} est normale. Il suffit pour ceci de remarquer que ad_{W_s} est un polynôme de ad_{V_s}. Soient $\mu_i, 1 \leqslant i \leqslant r$ les valeurs propres réelles de ad_{V_s} (listées sans multiplicité) et $(\lambda_i, \bar{\lambda}_i), 1 \leqslant i \leqslant s$ les paires de valeurs propres complexes non réelles de ad_{V_s}. Par interpolation de Lagrange, il existe un unique polynôme complexe P de degré $r + 2s - 1$ tel que $P(\mu_i) = \mu_i, P(\lambda_i) = \bar{\lambda}_i$, et $P(\bar{\lambda}_i) = \lambda_i$, et ce polynôme est réel. En posant $\lambda_i = a_i + \mathrm{i} b_i$, $(\mathrm{i}^2 = -1)$ on constate que le polynôme P envoie chaque bloc $\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{bmatrix}$ sur son transposé $\begin{bmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{bmatrix}$, et donc que $P(\mathrm{ad}_{V_s}) = \mathrm{ad}_{W_s}$. □

Il reste à vérifier qu'on peut appliquer le lemme ci-dessus avec $W = B\diamond$.

Lemme. *Étant donné un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, il existe un produit scalaire sur E^k tel que, pour tout $A \in \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$, $B\diamond$ est l'adjoint de $A\diamond$ (où B est l'adjoint de A).*

Si $A = A_s + A_n$ est la décomposition de Jordan de A, alors $A\diamond = (A_s)\diamond + (A_n)\diamond$ est la décomposition de Jordan de $A\diamond$.

Les opérateurs $A\diamond$ et $B\diamond$ préservent chacun des termes de la décomposition

$$E^k = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$$

en composantes homogènes. Pour construire un produit scalaire sur E^k tel que $(A\diamond)^* = B\diamond$, il suffit donc de le faire sur chacun des termes E_i. On a $E_1 = (\mathbb{R}^n)^*$, et la restriction de $A\diamond$ à E_1 est l'adjointe de A, $A\diamond\ell = \ell\circ A$. On utilise le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ (celui pour lequel B est l'adjointe de A) pour identifier $(\mathbb{R}^n)^*$ à $\mathbb{R}^n$, et au moyen de cette identification, pour munir E_1 d'un produit scalaire. Notons ℓ_x la forme linéaire $\langle x,.\rangle$. On a alors $A\diamond\ell_x = \ell_x\circ A = \ell_{Bx}$, et donc

$$\langle A\diamond\ell_x,\ell_y\rangle = \langle \ell_{Bx},\ell_y\rangle = \langle Bx,y\rangle = \langle Ay,x\rangle = \langle B\diamond\ell_y,\ell_x\rangle,$$

c'est-à-dire que $(A\diamond)^* = B\diamond$.

L'espace E_i s'identifie à l'espace des formes i-linéaires symétriques sur $\mathbb{R}^n$, et donc à un sous-espace de l'espace $\otimes^i E_1$ des formes i-linéaires sur $\mathbb{R}^n$. L'endomorphisme $A\diamond$ sur E_i se prolonge en un endomorphisme D_A de $\otimes^i E_1$ par

$$\begin{aligned} D_A : m(x_1,\dots,x_i) \longmapsto\ & m(Ax_1,x_2,\dots,x_i) \\ & + m(x_1,Ax_2,\dots,x_i)+\cdots+m(x_1,\dots,Ax_i), \end{aligned}$$

qui est aussi caractérisé par la propriété

$$D_A(\ell_1\otimes\cdots\otimes\ell_i) = \ell_1\circ A\otimes\ell_2\otimes\cdots\otimes\ell_i+\cdots+\ell_1\otimes\cdots\otimes\ell_i\circ A.$$

On associe naturellement au produit scalaire sur E_1 l'unique produit scalaire sur $\otimes^i E_1$ tel que

$$(\ell_1\otimes\cdots\otimes\ell_i, l_1\otimes\cdots\otimes l_i) = (\ell_1,l_1)\cdots(\ell_i,l_i).$$

On constate alors que $(D_A)^* = D_B$. Comme les restrictions $A\diamond$ et $B\diamond$ à E_i sont égales aux restrictions de D_A et D_B à $E_i\subset\otimes^i E_1$, on a donc bien $(A\diamond)^* = B\diamond$ dans E_i pour le produit scalaire induit. Ce produit scalaire est présenté d'une façon différente dans [2], p. 97.

Si $A = A_s + A_n$ est la décomposition de Jordan de A, alors $[A_s\diamond, A_n\diamond] = 0$ puisque $[A_s,A_n] = 0$. Il faut donc vérifier que $A_s\diamond$ est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$) et $A_n\diamond$ nilpotente. Comme plus haut, on peut choisir un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ pour lequel A_s commute avec son adjoint B_s. Alors $A_s\diamond$ commute avec $B_s\diamond$, qui est son adjoint pour le produit scalaire donné par la première partie du lemme. L'endomorphisme $A_s\diamond$ est normal, donc diagonalisable.

Pour montrer que $A_n\diamond$ est nilpotent, on considère un monôme $P(x) = m(x,\dots,x)$ de degré j, où m est une forme j-linéaire symétrique. On a

$$(A_n\diamond)^r P(x) = \sum m(A_n^{i_1}x, A_n^{i_1}x,\dots,A_n^{i_j}x),$$

où la somme est prise sur tous les multi-indices $(i_1,\dots,i_j)\in\mathbb{N}^j$ vérifiant $i_1+\cdots+i_j = r$. Comme $(A_n)^n = 0$, on voit que $(A_n\diamond)^r P = 0$ pour $r > j(n-1)$, et donc que $(D^k_{A_n})^r = 0$ pour $r > k(n-1)$. □

4. Familles de singularités de champs de vecteurs

L'une des applications des formes normales est l'étude des bifurcations, c'est-à-dire des familles de champs de vecteurs X_λ dépendant d'un paramètre $\lambda\in\Lambda$ (qui peut être $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ ou même un espace de Banach). On cherche dans ce contexte à réduire les champs X_λ à des formes normales par des difféomorphismes qui dépendent régulièrement de λ. On suppose que chacun des champs X_λ est nul en 0.

On fixe k, et on suppose que l'application $\lambda\longmapsto[X_\lambda]^k$ à valeurs dans l'espace de dimension finie $\mathcal{Y}^k$ est $C^r, r\geqslant 0$. On note $A\in\mathcal{Y}_1$ le linéarisé de X_0 en 0, on choisit une matrice B comme dans le théorème de forme normale. On a alors :

Théorème. *Il existe un champ de vecteurs $Y^k_\lambda\in\mathcal{Y}^k$ qui dépend de λ de manière C^r, tel que Y_0 n'a pas de terme linéaire, et tel que $(\varphi^1_{Y^k_\lambda})_*X_\lambda - A$ commute avec B à l'ordre k pour tout λ proche de* 0.

Comme dans le cas sans paramètre, on fait la preuve par récurrence sur k. Une fois que le champ Y^{k-1}_λ est construit, $k\geqslant 2$, on obtient comme plus haut l'équation suivante pour le terme homogène Y_λ de degré k :

$$\mathrm{ad}_B(R_\lambda)+\mathrm{ad}_B\circ\mathrm{ad}_{a_\lambda}(Y_\lambda) = 0,$$

où R_λ est le terme homogène de degré k de $(\varphi^1_{Y^{k-1}_\lambda})_*X_\lambda$, et où a_λ est son terme linéaire. L'hypothèse de récurrence implique que a_λ et R_λ sont C^r. Le choix de B implique que $\mathrm{ad}_B\circ\mathrm{ad}_A : \mathcal{Y}_k\longrightarrow\mathrm{ad}_B(\mathcal{Y}_k)$ est surjective. On choisit un supplémentaire K de son noyau de sorte que $\mathrm{ad}_B\circ\mathrm{ad}_A : K\longrightarrow\mathrm{ad}_B(\mathcal{Y}_k)$ est un isomorphisme. Il en est donc de même de $\mathrm{ad}_B\circ\mathrm{ad}_{a_\lambda} : K\longrightarrow\mathrm{ad}_B(\mathcal{Y}_k)$ lorsque λ est assez petit. On note $\theta_\lambda : \mathrm{ad}_B(\mathcal{Y}_k)\longrightarrow K$ l'isomorphisme inverse, il est C^k en λ. On pose alors $Y_\lambda = -\theta_\lambda\circ\mathrm{ad}_B(R_\lambda)$, qui est C^r et résout l'équation ci-dessus.

L'initialisation $k = 1$ demande un traitement spécifique. Notons A_λ le linéarisé de X_λ. On veut montrer l'existence d'une famille C^r de matrices $L_\lambda\in\mathcal{Y}_1$, $L_0 = 0$, telle que

$$(\exp - L_\lambda)A_\lambda(\exp L_\lambda) - A$$

commute avec B pour tout λ proche de 0. Soit K un supplémentaire du noyau de $\mathrm{ad}_B\circ\mathrm{ad}_A$ dans $\mathcal{Y}_1$. On considère l'application

$$\begin{aligned}F : K \times \Lambda \ni (L,\lambda)\\ \mapsto \mathrm{ad}_B\Big((\exp -L)A_\lambda(\exp L) - A\Big) \in \mathrm{ad}_B(\mathcal{Y}_1).\end{aligned}$$

On a $\partial_L F(0,0) = \mathrm{ad}_B \circ \mathrm{ad}_A$, qui est un isomorphisme car $\ker \mathrm{ad}_B$ est transverse à $\mathrm{ad}_A(\mathcal{Y}_1)$ dans $\mathcal{Y}_1$. On applique le théorème des fonctions implicites pour trouver $L_\lambda \in K$ résolvant l'équation $F(L_\lambda,\lambda) = 0$. □

5. Cas réversible

On considère ici une symétrie linéaire σ, c'est-à-dire un élément $\sigma \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\sigma^2 = I$. Le champ de vecteurs X est dit réversible si $\sigma_* X = -X$, il est dit symétrique si $\sigma_* X = X$. L'espace des champs symétriques est une sous-algèbre de Lie, mais pas l'espace des champs réversibles. Comme la propriété de réversibilité est naturelle dans de nombreux exemples issus de la physique, on se demande si la forme normale d'un système réversible est réversible. On remarque que $(\varphi_Y^1)_* X$ est réversible si X est réversible et Y symétrique.

Théorème. *Dans le contexte du théorème de forme normale, supposons donnée une symétrie linéaire σ qui préserve $\mathcal{Y}$ (c'est-à-dire que $\sigma_* X \in \mathcal{Y}$ pour tout $X \in \mathcal{Y}$). Si X, et donc son linéarisé A sont réversibles, et si B est réversible (c'est le cas de la partie diagonalisable de A), alors les champs $Y_i \in \mathcal{Y}_i$ peuvent être choisis symétriques. La forme normale $(\varphi^1_{Y_2+\cdots+Y_k})_* X$ est alors réversible.*

On prouve ce théorème comme en l'absence de symétrie, par récurrence sur k. L'équation qui doit être résolue par le terme homogène Y_k de degré k est

$$\mathrm{ad}_B(R_k) + \mathrm{ad}_B \circ \mathrm{ad}_A(Y_k) = 0,$$

où $R_k \in \mathcal{Y}_k$ est réversible. Notons $\mathcal{Y}_k^+$ le sous-espace des éléments symétriques de $\mathcal{Y}_k$ et $\mathcal{Y}_k^-$ le sous-espace des éléments réversibles. En notant S la symétrie linéaire de $\mathcal{Y}_k$ donnée par $Y \longmapsto \sigma_* Y$, c'est-à-dire $S = \mathrm{Ad}_\sigma$, on a $\mathcal{Y}_k^- = \ker(S+I)$ et $\mathcal{Y}_k^+ = \ker(S-I)$, donc

$$\mathcal{Y}_k = \mathcal{Y}_k^+ \oplus \mathcal{Y}_k^-.$$

Comme A et B sont réversibles, $\mathrm{ad}_B(\mathcal{Y}_k^-) \subset \mathcal{Y}_k^+$ et $\mathrm{ad}_B(\mathcal{Y}_k^+) \subset \mathcal{Y}_k^-$, et pareillement pour ad_A. En conséquence, en rappelant que $\mathrm{ad}_B \circ \mathrm{ad}_A(\mathcal{Y}_k) = \mathrm{ad}_B(\mathcal{Y}_k)$, on obtient,

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_B(\mathcal{Y}_k^-) &= \mathcal{Y}_k^+ \cap \mathrm{ad}_B(\mathcal{Y}_k)\\ &= \mathcal{Y}_k^+ \cap \mathrm{ad}_B \circ \mathrm{ad}_A(\mathcal{Y}_k) = \mathrm{ad}_B \circ \mathrm{ad}_A(\mathcal{Y}_k^+).\end{aligned}$$

L'équation en Y_k a donc une solution dans $\mathcal{Y}_k^+$, ce qui termine la preuve.

Vérifions maintenant que la partie diagonalisable A_s est réversible si A l'est. La décomposition de Jordan de $\mathrm{Ad}_\sigma(A)$ est $\mathrm{Ad}_\sigma(A) = \mathrm{Ad}_\sigma(A_s) + \mathrm{Ad}_\sigma(A_n)$. Dans le cas réversible, l'unicité de la décomposition de Jordan de $\mathrm{Ad}_\sigma(A) = -A$ montre que $\mathrm{Ad}_\sigma(A_s) = -A_s$. □

6. Groupe de difféomorphismes associé à $\mathcal{Y}$

Dans les quelques exemples d'espaces $\mathcal{Y}_1$ que nous avons rencontrés, il existe un sous-groupe $\mathcal{H}_1 \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ qui est une sous-variété dont $\mathcal{Y}_1$ est l'espace tangent au point I. On peut prendre, respectivement, le groupe des isomorphismes de déterminant égal à 1, le groupe des isomorphismes complexes, le groupe des isomorphismes symplectiques.

Si $\mathcal{Y}_1$ est une sous-algèbre de Lie quelconque de $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$, il n'existe pas forcément un tel sous-groupe, mais il existe toujours un sous-groupe $\mathcal{H}_1$ ayant la propriété suivante (on peut prendre le sous-groupe engendré par $\exp(\mathcal{Y}_1)$) :

Soit $A(t)$ une courbe C^1 définie sur un intervalle, à valeurs dans $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, et qui prend une valeur dans $\mathcal{H}_1$. Elle est contenue dans $\mathcal{H}_1$ si et seulement si $\dot{A}(t)A^{-1}(t) \in \mathcal{Y}_1$ pour tout t.

On supposera dans la suite qu'est donné un tel $\mathcal{H}_1$. On note $\mathcal{H}$ le sous-groupe de $\mathcal{G}$ constitué des difféomorphismes ϕ vérifiant $d\phi_x \in \mathcal{H}_1$ pour tout x voisin de 0.

Propriété. *Le champ $X \in \mathcal{X}$ appartient à $\mathcal{Y}$ si et seulement si son flot φ_X^t est un élément de $\mathcal{H}$ pour tout t. Le groupe $\mathcal{H}$ préserve donc $\mathcal{Y}$.*

Étant donnée une solution $x(t)$ de l'équation $\dot{x} = X \circ x$, le linéarisé $A(t) = d(\varphi_X^t)_{x(t)}$, satisfait à l'équation $\dot{A}(t) = dX_{x(t)}A(t)$, c'est-à-dire $\dot{A}(t)A^{-1}(t) = dX_{x(t)}$. Au vu de la propriété satisfaite par $\mathcal{H}_1$, on a $A(t) \in \mathcal{H}_1$ pour tout t si et seulement si $dX_{x(t)} \in \mathcal{Y}_1$ pour tout t, ce qui démontre la première partie de l'énoncé.

Si X est un champ dont les flots appartiennent à $\mathcal{H}$, il en est de même de $\phi_* X$ pour $\phi \in \mathcal{H}$, puisque le flot de $\phi_* X$ est $\phi \circ \varphi_X^t \circ \phi^{-1}$. □

Un difféomorphisme, même proche de l'identité, n'est en général pas un flot, mais il l'est à tout ordre fini :

Proposition. *Soit $\phi \in \mathcal{H}$ un difféomorphisme dont* *le linéarisé est l'identité. Il existe alors une unique suite $Y_k \in \mathcal{Y}_k, k \geqslant 2$ telle que, pour tout $k \geqslant 2$, ϕ coïncide à l'ordre k avec le flot du champ $Y_2 + \cdots + Y_k$.*

On fait la preuve par récurrence sur k. On considère un difféomorphisme $\phi \in \mathcal{H}$ dont le linéarisé est l'identité. On suppose qu'il existe un champ de vecteurs $Z \in \mathcal{Y}^{k-1}$ sans terme linéaire tel que $\phi = \varphi_Z^1$ à l'ordre $k-1$, et on montre l'existence d'un champ homogène $Y_k \in \mathcal{Y}_k$ tel que $\varphi^1_{Z+Y_k}$ coïncide avec ϕ à l'ordre k. Notons $R_k := [\varphi_Z^{-1} \circ \phi]_k$, de sorte que $\varphi_Z^{-1} \circ \phi = I + R_k$ à l'ordre k. En représentant les objets par des opérateurs sur E^k, on doit donc résoudre l'équation

$$\exp(Z + Y_k) = (\exp Z)(I + R_k).$$

Comme Z et Y_k commutent dans $\mathfrak{gl}(E^k)$, cette équation se réécrit $\exp(Y_k) = I + R_k$. Comme $\exp(Y_k) = I + Y_k$, la seule solution possible est $Y_k = R_k$. Il nous reste à vérifier que l'on a bien $R_k \in \mathcal{Y}_k$.

Le difféomorphisme $\varphi_Z^{-1} \circ \phi$ appartient à $\mathcal{H}$, il en est donc de même, pour $s > 0$, du difféomorphisme $\psi_s := (s^{-1}I) \circ \varphi_Z^{-1} \circ \phi \circ (sI) = I + s^{k-1}R_k + \cdots$. Pour tout x, la différentielle

$$d(\psi_s)_x = I + s^{k-1} d(R_k)_x + O(s^k)$$

est donc un élément de $\mathcal{H}_1$. En fixant x, la courbe

$$s \longmapsto d(\psi_{s^{1/k-1}})_x = I + s\, d(R_k)_x + O(s^{k/k-1})$$

est à valeurs dans le groupe $\mathcal{H}_1$. Sa différentielle en $s = 0$ est donc un élément de l'espace tangent $\mathcal{Y}_1$, c'est-à-dire que $d(R_k)_x \in \mathcal{Y}_1$ pour tout x, et donc que $R_k \in \mathcal{Y}$. □

Le complément ci-dessous découle aussi de la preuve et sera utile.

Complément. *Soit $B \in \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^n)$ et soit $\phi \in \mathcal{H}$ qui commute avec B à l'ordre k et vérifie $d\phi_0 = I$. Alors dans la propriété ci-dessus les champs $Y_2, \ldots, Y_k$ commutent avec B.*

On remarque que le développement de Taylor $[\phi]^k$ d'un élément de $\mathcal{H}$ n'est pas forcément lui-même un élément de $\mathcal{H}$.

7. Formes normales de difféomorphismes

Le théorème de forme normale a une variante pour les difféomorphismes.

Théorème 1. *Soit $\phi \in \mathcal{H}$, de linéarisé $A \in \mathcal{H}_1$. Soit B une matrice égale soit à la partie diagonalisable de A soit à une matrice qui est l'adjointe de A pour un produit scalaire et qui appartient à $\mathcal{H}_1$. Il existe alors une suite $Y_k \in \mathcal{Y}_k, k \geqslant 2$ telle que, pour tout $k \geqslant 2$, le difféomorphisme*

$$A^{-1} \circ \varphi^{-1}_{Y_2+\cdots+Y_k} \circ \phi \circ \varphi^1_{Y_2+\cdots+Y_k}$$

commute avec B à l'ordre k.

La démonstration ressemble beaucoup à celle du théorème de forme normale des champs de vecteurs. On fait une récurrence sur k. On suppose que $Y_2, \ldots, Y_{k-1}$ ont été construits, et on note φ_{k-1} le difféomorphisme $\varphi^1_{Y_2+\cdots+Y_{k-1}}$. Au vu du complément de la section précédente, il existe un champ $Z + Z_k \in \mathcal{Y}^{k-1} \oplus \mathcal{Y}_k$ sans terme linéaire, qui commute avec B à l'ordre $k-1$ (c'est-à-dire que Z commute avec B), tel que

$$A^{-1} \circ \varphi_{k-1}^{-1} \circ \phi \circ \varphi_{k-1} = \varphi^1_{Z+Z_k}$$

à l'ordre k. En termes d'opérateurs sur E^k, ceci se réécrit

$$\begin{aligned}\exp(Y_2 + \cdots + Y_{k-1}) \diamond \phi \diamond \exp(-Y_2 - \cdots - Y_{k-1}) \diamond A^{-1}\\ = \exp(Z) \diamond (I + Z_k).\end{aligned}$$

Le difféomorphisme $A^{-1} \circ \varphi^{-1}_{Y_2+\cdots+Y_k} \circ \phi \circ \varphi^1_{Y_2+\cdots+Y_k}$ s'écrit donc

$$\begin{aligned}&\exp(Y_k) \diamond \exp(Y_2 + \cdots + Y_{k-1})\\ &\quad \diamond \phi \diamond \exp(-Y_2 - \cdots - Y_{k-1}) \diamond \exp(-Y_k) \diamond A^{-1}\\ &= (I + Y_k) \diamond \exp Z \diamond (I + Z_k) \diamond A \diamond (I - Y_k) \diamond A^{-1}\\ &= \exp Z + Z_k + Y_k - A \diamond Y_k \diamond A^{-1}.\end{aligned}$$

On a utilisé dans ce calcul que Z n'a pas de terme linéaire, et donc que la partie linéaire de $\exp Z$ est l'identité. Comme $\exp Z$ commute avec B, notre difféomorphisme commute avec B si et seulement si

$$Z_k - (\mathrm{Ad}_A - I)(Y_k) \in \ker(\mathrm{Ad}_B - I)$$

où Ad_A est l'opérateur $M \longmapsto A \diamond M \diamond A^{-1}$ sur $\mathfrak{gl}(E^k)$. On conclut la preuve grâce à la proposition ci-dessous :

Proposition 1. *L'espace $\mathcal{Y}_k \cap \ker(\mathrm{Ad}_B - I)$ des éléments de $\mathcal{Y}_k$ qui commutent avec B est un complémentaire de $(\mathrm{Ad}_A - I)(\mathcal{Y}^k)$ dans $\mathcal{Y}^k$.*

La démonstration est similaire à celle de la proposition analogue pour ad_A. Il faut remplacer dans cette démonstration la décomposition de Jordan additive que nous avons utilisée jusque là par la décomposition de Jordan multiplicative. Toute matrice $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ admet une unique décomposition

$A = A_s A_u$, avec A_s diagonalisable, A_u unipotente (c'est-à-dire que $A_u - I$ est nilpotente) et $[A_s, A_u] = 0$. Cette décomposition est $A = A_s(I - A_s^{-1}A_n)$, où $A = A_s + A_n$ est la décomposition de Jordan additive de A. En particulier, la partie diagonalisable de la décomposition multiplicative d'un élément inversible est égale à la partie diagonalisable de sa décomposition additive.

Références

[1] V. I. Arnold. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires, Mir, 1980.*

[2] M. Haragus et G. Iooss. *Local bifurcations, center manifolds, and normal forms in infinite-dimensional dynamical systems*. Springer, 2010.

[3] J. Murdock. *Normal forms and unfoldings for local dynamical systems*. Springer, 2006.

[4] J. C. Yoccoz. « Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré ». *Gazette des mathématiciens*, n° 107 (2006).

Patrick Bernard

Patrick Bernard est professeur à l'École normale supérieure et à l'université Paris-Dauphine. Il est spécialiste de dynamique hamiltonienne.

Le Village Nesin des mathématiques en Turquie

• G. Aslı Rino Nesin

L'été dernier, j'ai participé à une conférence d'informatique théorique à Waterloo (Ontario) organisée par Jeffrey Shallit, l'auteur avec Jean-Paul Allouche du remarquable traité « Automatic Sequences ». Je logeais, de même que deux collègues portugais et une jeune doctorante, Gabriela Nesin, dans une morne résidence étudiante du campus.

Le dernier soir, nous sommes allés dîner tous les quatre. Je ne sais plus par quel enchaînement de la conversation, mais le lecteur du texte ci-dessous comprendra facilement que c'était inévitable, Gabriela a commencé à raconter l'histoire du « Village des mathématiques » fondé par son père. J'ai été subjugué par ce mélange surréaliste de camp scout et d'Oberwolfach implanté dans la patrie de Thalès. Après le dîner, Gabriela nous a envoyé par mail le texte qu'elle avait écrit pour les *Notices de l'AMS*, et que j'ai lu immédiatement.

Le lendemain, nous sommes repartis tous les quatre en voiture pour Toronto. Cela m'a laissé le temps d'expliquer à Gabriela qu'il faudrait publier sa description du Village des mathématiques dans la *Gazette* de la SMF, que j'en toucherais un mot au rédacteur en chef de la *Gazette* et que j'espérais qu'elle pourrait en assurer la traduction. Et ce qui fut dit fut fait : Boris a accueilli cette proposition chaleureusement, les *Notices* ont accepté confraternellement la reproduction du texte dans la *Gazette*, et Gabriela, une fois sa soutenance passée, a repris son texte pour le mettre en français avec l'enthousiasme qui la caractérise.

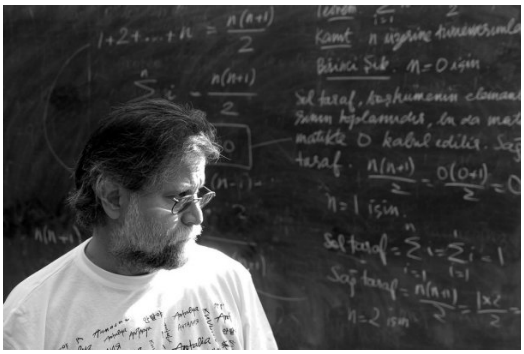
Les réalisations comme le Village des mathématiques contrastent avec les nouvelles moins réjouissantes et autrement médiatisées qui nous parviennent de la région. J'espère que, comme moi, les lecteurs de la *Gazette* seront fascinés par cette présentation et qu'elle donnera à certains l'idée et l'envie de participer à la vie du Village des mathématiques en y organisant des rencontres ou en y donnant des cours, et aussi de contribuer au développement de sa bibliothèque par des dons d'ouvrages.

Jacques Sakarovich

Un des T-shirts en vente au Village Nesin des Mathématiques représente un mathématicien distrait qui, ayant rempli un tableau avec une équation géante, continue simplement à écrire sur le mur adjacent. En dessous, les mots « Mathématiciens sans frontières... ». Une légende justifiée, étant donnée l'expansion phénoménale du Village au cours des huit dernières années et sa nature bénévole – d'où la référence à Médecins Sans Frontières.

Le Village Nesin des mathématiques est une petite ONG dédiée exclusivement à l'enseignement et la pratique des mathématiques et qui a « colonisé » le flanc d'une colline près d'Izmir en Turquie. Inspiré par les académies de la Grèce antique, le Village des mathématiques est un endroit où l'on fait des mathématiques à toute heure, en tout endroit et en toute position, horizontale ou verticale. Au cours des pages suivantes je tenterai de décrire le Village des mathématiques ; mais d'abord je vais commencer par raconter l'origine de l'idée et comment elle se fit réalité. Je décrirai ensuite les divers programmes ayant lieu au village tous les étés, et les installations à la disposition de tout mathématicien, qu'il soit amateur ou militant actif. Enfin suivront des idées pour participer à ce projet ambitieux.

Figure 1 – Ali Nesin, étonnamment bien coiffé



© Hüseyin Ovayolu

1. Origines

1.1 – Aziz Nesin et la Fondation Nesin

Le mathématicien barbu à lunettes et aux cheveux fous du T-shirt ressemble fort à l'homme qui a fondé le village : Ali Nesin (Figure 1). Ayant acquis une certaine renommée en Turquie, il doit cependant une bonne partie de celle-ci à son père, Aziz Nesin. Aziz a été un des écrivains turcs les plus prolifiques de la deuxième moitié du XX^{e} siècle, un satiriste à fort penchant social. Ceci conjugué au fait d'être très probablement la première figure publique turque à se déclarer athée publiquement en fit un personnage adoré par beaucoup mais aussi détesté par un encore plus grand nombre de personnes.

Pendant les années 70, le revenu de ses livres permit à Aziz d'ouvrir la Fondation Nesin, une institution à but non lucratif qui a pour mission l'hébergement et l'éducation (y compris l'éducation universitaire) d'enfants et de jeunes issus de milieux défavorisés. Quel rapport avec les mathématiques ? C'est la Fondation Nesin qui est propriétaire des bâtiments du Village des mathématiques et du terrain sur lesquels ils sont construits. Ainsi, leurs destins sont fondamentalement liés. De plus, les principes qui gouvernent les deux sont essentiellement les mêmes : l'accès au savoir, à l'éducation, et à la liberté.

Mais voyons maintenant comment le besoin d'un village des mathématiques se fit évident, douze ans avant de devenir réalité.

1.2 – L'université Bilgi et ses écoles d'été de mathématiques

À la mort d'Aziz Nesin en 1995, Ali abandonna son poste de professeur à l'université de Californie à Irvine et prit en charge la direction de la Fondation Nesin à Istanbul. Ce poste ne lui procurait aucun salaire ; il cherchait donc une position académique. Heureusement, une université privée appelée l'université Bilgi d'Istanbul ouvrit ses portes en 1996 et embaucha Ali comme chef du département de mathématiques. Rapidement, il rassembla un groupe international de mathématiciens, petit mais cohérent, qui peu à peu gagna la réputation d'offrir une des meilleures éducations mathématiques en Turquie. L'enseignement y est extrêmement ambitieux : les étudiants apprennent la théorie axiomatique des ensembles dès la première année, y compris les ordinaux, les cardinaux, l'axiome du choix, le lemme de Zorn et même les nombres non standard.

L'avantage au départ d'un petit département était la possibilité d'un suivi presque individuel des étudiants. Ainsi, un absent dans une classe de quatre diminuait l'effectif d'un quart – il n'était pas rare que celui qui ne s'était pas réveillé à temps le matin reçoive un rappel à l'ordre téléphonique. Malgré cela, il fut rapidement évident qu'il faudrait plus de temps que celui prévu par le curriculum pour combler les lacunes laissées par l'éducation (orientée vers les examens universitaires) des lycées turcs.

À partir de 1998, le département de Mathématiques de l'université Bilgi organisa donc des écoles d'été d'un mois et demi, dans un lieu de vacances différent chaque année. Les étudiants travaillaient pendant la journée et nageaient et s'amusaient le reste du temps. En dépit de l'aide apportée par l'université Bilgi, ces écoles d'été devinrent de plus en plus chères à organiser, sans parler des problèmes logistiques : une année, il fallut même coller des feuilles blanches derrière les fenêtres pour remplacer un tableau blanc, et il est virtuellement impossible de prouver des théorèmes avec Enrique Iglesias en arrière-plan sonore. Ali commença à penser que la seule manière d'avoir les choses bien faites était de les faire lui-même.

À cette époque, un vieil ami d'Ali, Sevan Nişanyan, construisait un petit hôtel pittoresque dans le village de Şirince, près de Selçuk, dans la région d'İzmir.

1.3 – La construction du village

En 2007, Ali Nesin acheta un terrain d'un hectare à un kilomètre de Şirince, et commença la construction du village selon les plans qu'il dessina lui-même avec Sevan (plans plutôt modestes au début, mais qui s'agrandirent plus tard). L'action de Sevan Nişanyan fut essentielle à la création du Village. Son savoir-faire architectural, son bon goût et son énergie sans bornes permirent qu'il se développe tel qu'il est aujourd'hui.

Le premier été, celui de 2007, environ 100 étudiants participèrent à l'école d'été, la majorité d'eux de l'université Bilgi. La plupart campaient. En plus des 6 à 8 heures quotidiennes de cours, étudiants et enseignants nettoyaient et cuisinaient pour le groupe entier, plantaient des arbres, et aidaient les ouvriers à transporter les matériaux de construction et à monter des murs.

Les bâtiments ont été construits – et le sont encore – avec des blocs de pierre et un mélange de paille et d'argile. La première salle de classe, la salle Robert Langlands, fut construite autour d'un vieil arbre qui jaillit encore aujourd'hui du toit comme une sentinelle. Les gradins de l'amphithéâtre Aziz Nesin sont construits à partir de vieilles traverses de chemin de fer recyclées, et les vignes grimpantes qui aujourd'hui fournissent l'ombre si nécessaire furent plantées dès cette époque.

Figure 2 – Vue panoramique du Village. Les deux dômes bleus (l'un est à peine visible) sont les bains turcs. Le grand bâtiment à gauche est la bibliothèque.

© Burak Barutcu

1.4 – Problèmes légaux

Şirince et ses alentours sont classés « zone protégée », et les permis de construire, sous contrôle des autorités locales, sont donc très difficiles à obtenir. Même si le Village des mathématiques se trouve en dehors de la zone protégée, le permis de construire fut impossible à obtenir en raison de l'antipathie suscitée par le nom Nesin. Un des prétextes donnés à ce refus est l'interdiction de fonder un établissement à vocation éducative sans l'autorisation du gouvernement et cependant le Village de mathématiques est une organisation à but non lucratif, qui n'organise pas d'examens et ne délivre aucun diplôme. Les problèmes ne sont pas restés seulement à un niveau bureaucratique : l'une des premières années du village, les étudiants furent expulsés des classes et des dortoirs par la gendarmerie, arme au poing, qui posa des scellés sur les bâtiments. Les « villageois » ne se laissèrent pas abattre : on monta plus de tentes, on aplanit plus de terrain, on dressa des tableaux dehors, et les cours continuèrent ainsi.

Le conflit est loin d'être fini. Malgré tout, le village espère qu'au fur et à mesure que le soutien populaire et la reconnaissance internationale augmentent, ces persécutions disparaîtront. De plus, le fait de lutter ensemble contre ces obstacles donne naissance à un fort sentiment de communauté.

2. Le Village des mathématiques aujourd'hui

2.1 – Structure sociale des écoles d'été

Dès l'été 2009, le village avait tellement grandi qu'il devint possible d'accepter un beaucoup plus grand nombre d'étudiants d'autres universités, et les étudiants de Bilgi cessèrent d'être la majorité. Au fur et à mesure que les écoles d'été prenaient de l'ampleur, des étudiants de troisième cycle commencèrent aussi à y participer. Ils offrirent d'enseigner quelques cours, assistèrent à d'autres, et eurent l'occasion de rencontrer et de collaborer avec des collègues et des professeurs venus du monde entier – un environnement académique idéal dans une atmosphère détendue.

Un prix standard de séjour et de participation fut décidé, mais très rapidement il fut évident que la plupart des élèves universitaires ne pouvaient pas se le permettre, n'ayant souvent plus le soutien financier de leurs parents. Le Village accepta cependant ces étudiants et prit leur séjour à sa charge, terminant naturellement la saison avec un déficit conséquent. Le soutien financier de la Société Mathématique Turque et les donations généreuses du public turc (certaines provenant de familles qui n'en avaient d'ailleurs guère les moyens) ne suffirent pas à combler les pertes. En réponse à une demande grandissante et comme solution partielle au déficit, le Village des mathématiques décida d'élargir son public et d'accueillir des élèves de lycée.

Depuis, les écoles d'été pour lycéens sont devenues un succès phénoménal, et les demandes d'inscription sont actuellement quatre fois supérieures à la capacité d'accueil. Le village fournit quelques bourses aux lycéens provenant de familles défavorisées, mais la grande majorité des familles de lycéens sont plus que capables et disposées à payer le modeste prix de 500 USD pour deux semaines de séjour et de cours. Avoir un enfant qui a participé aux écoles d'été du Village des mathématiques est devenu un honneur pour ces familles– le village fait donc très attention de vérifier que la décision est bien celle de l'élève, et qu'il ou elle n'y a pas été obligé(e) par ses parents. En revanche, il y eut même le cas d'un adolescent qui s'est enfui de chez lui pour venir au village alors que sa famille lui interdisait de venir dans ce « camp athée » ! Les bénéfices créés par les écoles d'été des lycéens sont utilisés pour des bourses pour les étudiants universitaires qui n'ont pas les moyens de payer.

Pendant leur séjour de deux semaines, tous les lycéens sont sous la responsabilité d'un « grand frère » ou d'une « grande sœur », analogues aux chefs de patrouille chez les scouts, presque toujours des étudiants universitaires qui se sont portés volontaires. Ils s'assurent que leur groupe va en cours, se couche à l'heure, et, d'une façon générale, évite de se blesser (pas toujours facile avec des jeunes gens parfois turbulents à proximité de Şirince, village réputé pour ses alcools de fruits !).

Comme le personnel permanent est très peu nombreux, le village est organisé sur le modèle d'une coopérative. À l'arrivée, les étudiants sont répartis dans des groupes qui comptent des étudiants d'université et de lycée en parts plus au moins égales. Pendant les deux semaines qui suivront, ils aideront à accomplir les tâches nécessaires au fonctionnement du village. Un groupe peut aider le cuisinier à éplucher des pommes de terre un jour, ramassera les poubelles le suivant, veillera au réapprovisionnement des distributeurs d'eau le troisième, et ainsi de suite. Non seulement les étudiants ne se plaignent pas de ce travail, mais le fait d'avoir ainsi contribué à la vie du village leur donne un sentiment d'appropriation et de communauté qui ne les quitte pas pendant de longues années.

Figure 3 – Étudiants et profs de lycée suivent une classe à l'air libre.

© Alexandre Borovik

2.2 – Structure des cours

Les cours sont organisés en blocs de deux semaines pour cadrer avec les séjours des étudiants.

L'éducation lycéenne turque vise principalement les examens d'entrée à l'université. Elle met l'accent sur la mémorisation, la compétition et les solutions des problèmes au détriment des raisonnements qui y conduisent. Le Village des mathématiques tente de contrebalancer cela en donnant aux élèves une idée de ce que sont les mathématiques au niveau universitaire. Ils apprennent à penser par eux-mêmes, à argumenter d'une manière cohérente et à repérer les erreurs de logique. Plus important encore, ils découvrent le processus de résolution d'un problème dont la solution est complètement inconnue (même pour le professeur !). Par exemple, un des exercices qu'Ali Nesin fait souvent avec de nouveaux arrivants consiste à prendre le groupe engendré par l'alphabet turc et ayant comme ensemble de relations les noms de tous les élèves dans la salle et d'essayer de déterminer si cela donne le groupe trivial.

Figure 4 – Özlem Beyarslan dans l'Amphithéâtre, enseignant les espaces vectoriels devant une classe de lycéens.

© Burak Barutcu

Les étudiants sont encouragés à participer, et il devient souvent difficile de les calmer quand ils crient leurs idées de tous les coins de la salle de classe !

Figure 5 – Un lycéen résout un problème sous le regard du prof, Müge Kanuni.

© Alexandre Borovik

Les lycéens apprennent divers sujets tels que la théorie des graphes, celle des probabilités, la combinatoire, la théorie des jeux, et les bases de l'analyse et de l'algèbre. Ces sujets sont complétés par des sessions hétéroclites où les étudiants font connaissance avec des problèmes tels que l'hôtel de Hilbert et sont encouragés à construire leurs propres démonstrations.

Un extrait de conversation entre un élève qui participa aux écoles d'été pour la première fois quand il avait 14 ans et Ali Nesin quand ils se rencontrèrent plus tard en montre les résultats :

> – Tu étais venu au village, n'est-ce pas ? demanda Ali.
>
> – Oui, quatre fois en fait, répondit l'élève.
>
> – Et tu as vu une différence ?
>
> – Une grande différence.
>
> – Comment ça ?
>
> – Monsieur, quand je suis arrivé la première fois je n'ai rien compris. C'est seulement les deux derniers jours que j'ai eu la vague impression de commencer à comprendre. Plus que les choses que j'avais comprises, j'étais tellement content d'avoir finalement compris quelque chose que je suis revenu l'année d'après. La première semaine je n'ai encore rien compris, mais la deuxième semaine j'ai compris tout ce qui se passait ! À ma troisième visite je n'ai rien raté. À la quatrième je devinais la prochaine phrase du prof... Je m'ennuie au lycée maintenant.

Figure 6 – Le garçon au T-shirt violet suit la solution et l'explique à ses collègues.

© Alexandre Borovik

Les cours de niveau universitaire sont organisés par thèmes si les emplois du temps des enseignants s'y prêtent. Cela permet non seulement le regroupement des sujets de recherche mais pose aussi les bases pour une collaboration entre collègues d'un même domaine ou de domaines proches. Par exemple, en 2015 les deuxième et troisième semaines de l'école d'été universitaire comprenaient des cours intitulés « Reflection Groups », « Introduction to Classical Groups », « Fundamental Groups » et « Three Groups Every Mathematician Has to Know ». La gamme entière de sujets est trop large pour les énumérer tous ici, mais les étudiants universitaires ont eu l'occasion d'apprendre des sujets variés tels que les algèbres de Lie, l'analyse de Fourier, la théorie de la mesure ou la théorie des représentations de groupes. Quelques cours pourraient être qualifiés d'interdisciplinaires, entre mathématiques et philosophie, physique ou informatique, par exemple la théorie de la récursion, le théorème d'incomplétude de Gödel ou la programmation linéaire.

L'enseignement au village est volontaire – en échange, le séjour des enseignants est entièrement pris en charge par le village. Cela n'a pas empêché un nombre impressionnant d'universitaires de venir du monde entier pour enseigner au village. Parmi ceux-ci, citons Alexandre Borovik de l'université de Manchester, Edriss Titi de l'université de Californie à Irvine, Max Dickmann de Paris 7 et Ryan O'Donnell de Carnegie Mellon. Cette liste est évidemment très partielle, énumérer tous les contributeurs serait impossible.

À coté de l'enseignement régulier, ceux qui n'ont pas assez de matériel pour un cours entier, ou qui désirent parler de leur propre recherche, font des séminaires organisés de 21 à 23 heures à l'Amphithéâtre Aziz Nesin, dans la brise fraîche de la soirée, auxquels assistent ceux qui le désirent ou qui en ont l'énergie. Ces soirées-séminaires sont très informelles – plusieurs apportent le reste de vin du dîner – et sont l'occasion idéale pour recevoir les commentaires et les idées des collègues.

2.3 – Les installations

Le village s'est largement développé depuis l'origine et comprend maintenant 16 dortoirs (d'une capacité de 169 personnes), et 29 maisons et chambres individuelles. Malgré la capacité d'hébergement qui augmente chaque année, certains étudiants doivent encore dormir dans des tentes, et payent par conséquent un prix réduit. Le village compte également deux hammams (bains turcs, un pour les garçons et un pour les filles), un petit magasin, une cuisine et une salle à manger fonctionnant à pleine capacité pendant l'été. Personne ne sait comment il s'y prend, mais le chef, Chef Asım, produit trois repas délicieux par jour, et même des gâteaux à l'heure du goûter. Pour ce qui est des cours, le village comprend aussi 2 amphithéâtres, 6 salles de classe dont 2 fermées et 4 en extérieur, et une bibliothèque magnifique précédée d'une grande terrasse ombragée.

Figure 7 – Un dimanche typique. Les élèves qui partent prennent des photos avec leurs amis et le personnel du Village.

© Duygu Kaba

Le rez-de-chaussée de la bibliothèque est un vaste espace ouvert, décoré avec des mosaïques géométriques, et éclairé le soir par deux lustres géants en forme de roue. Cet espace accueille une salle de conférences de 150 places. Au premier étage des mezzanines donnent sur la salle ; s'y trouvent également les rayonnages. Leur vide partiel montre l'optimisme pour l'avenir : la bibliothèque accepte volontiers les donations de livres et de revues. On trouve également au premier étage de nombreuses tables pour le travail silencieux. C'est l'un des endroits les plus paisibles du village, surtout parce qu'il offre un panorama magnifique sur la vallée adjacente. Cependant la bibliothèque est loin d'être le seul endroit au village adapté au travail – il y a plusieurs lieux dans le village où l'on peut échapper aux collègues trop amicaux.

Environ 15 employés salariés et environ 100 volontaires travaillent au village tous les ans. Les cycles de deux semaines commencent le dimanche, et ce jour-là il faut une coordination presque parfaite pour régler l'arrivée et le départ de centaines d'étudiants sans finir dans le chaos complet. Ali Nesin prend le temps de s'asseoir avec chaque étudiant de licence pour discuter du choix des cours en fonction de sa formation.

Au Village il n'y a ni télévisions ni diffusion de musique, mais de temps en temps on organise la projection d'un film le soir dans la bibliothèque. Certains soirs aussi, les étudiants sortent leurs instruments – guitares, quelques fois un saz ou un kemençe, et font un petit concert impromptu. Ils jouent des musiques modernes ou traditionnelles, et les autres les accompagnent en chantant. Pour ne pas déranger ceux qui travaillent ou ceux qui doivent se lever tôt pour aller en cours le lendemain, ces mini-concerts ont souvent lieu le mercredi soir, car le jeudi est le jour officiel de vacances au village.

Chaque jeudi, une activité est organisée. Ce peut être un voyage à la plage voisine de Kuşadası, ou à celle, plus éloignée mais beaucoup plus belle, du Parc National de Kuşadası, ou encore un tour en bateau. Ceux qui le désirent peuvent organiser leurs propres voyages, par exemple aux ruines historiques de Selçuk, ou à la fameuse ville de l'antiquité grecque, Éphèse. Sinon, on peut rester au village pour rattraper son retard de sommeil ou de travail, dans des coins retirés du village, sur des balançoires ou dans des hamacs.

3. Encore plus de mathématiques

3.1 – Conférences, ateliers et groupes de recherche passés

Les écoles d'été constituent la période la plus fréquentée du village. Cependant, depuis plusieurs années maintenant, le village accueille aussi d'autres conférences et workshops tout au long de l'année.

Plusieurs écoles d'hiver ont eu lieu en janvier et février. Parmi les workshops qui se sont déroulés au village, on peut citer les workshops d'algèbre et d'analyse en janvier-février 2014 et octobre 2013 respectivement, le workshop sur les mathématiques de l'évolution en septembre 2013, et un workshop d'informatique en octobre 2012. Une école d'été autour de la théorie des valuations prit place en mai 2014. Les XV^{e} et XVII^{e} éditions des « Antalya Algebra Days », normalement organisés à Antalya comme leur nom l'indique, l'ont été au village en mai 2013 et 2015 respectivement, avec, entre autres, Gregory Cherlin, Martin Ziegler, Ian Leary, Serge Bouc, et Ehud Hrushovski comme invités. La prochaine édition aura également lieu au village en 2016.

Figure 8 – Vue de la salle de conférences depuis le premier étage de la bibliothèque.

© Burak Barutcu

Récemment, le Village a inauguré une nouvelle initiative qui permet à des groupes de recherche de toutes tailles de se réunir au village pour des périodes de recherche intensive. J'ai pu en expérimenter personnellement les effets bénéfiques. Le lendemain de notre arrivée, mon directeur de thèse et moi nous sommes mis au travail après un bon petit déjeuner à 9 heures du matin, sur un problème qui nous résistait depuis longtemps. Trois heures plus tard, nous avions les bases d'un article – l'air du Village des mathématiques inspire !

3.2 – Comment contribuer au Village des mathématiques

Le village est un endroit idéal pour organiser une conférence ou un workshop. L'esprit communautaire du village marquera très probablement un projet qui y est organisé, et l'environnement détendu et chaleureux favorise la communication et la collaboration entre les participants. Cela est également vrai pour les groupes de recherche – il y a dans le village une quantité indénombrable de coins où l'on peut se réunir et discuter de mathématiques autant que l'on veut, sans être dérangé.

Les enseignants volontaires sont toujours les bienvenus. Evidemment, tous les cours du niveau du lycée doivent être donnés en turc, car les élèves n'ont pas nécessairement le niveau suffisant en langues étrangères – cependant, tout cours de licence ou plus avancé peut l'être en anglais. Un des commentaires que j'ai entendus le plus souvent de la part des enseignants au village est combien ils sont surpris par l'enthousiasme des étudiants ; leur soif d'apprendre est véritablement étonnante, d'autant plus que leur participation à ces cours ne fournit aucun diplôme ni de note et est ainsi purement par intérêt personnel.

L'enseignement et la recherche ne sont pas mutuellement exclusifs, comme l'exprime le témoignage d'Alexandre Borovik après l'une de ses visites au village :

> Pour moi, le village est un endroit de recherche ; j'y vais pour travailler avec mes amis et collaborateurs, Adrien Deloro de Paris et Sükrü Yalçınkaya d'Istanbul. Nous travaillons sur plusieurs projets ayant comme objectif, en gros, de comprendre le groupe SL_2 à un niveau très détaillé, « sous-atomique », ce que l'on peut voir plus précisément dans nos prépublications. Le village est un paradis pour travailler en petit groupe.
>
> Le nom bizarre du cours que j'ai enseigné en août dernier a déjà été mentionné ci-dessus : Three Groups Every Mathematician Has to Know. Ces groupes sont en fait les trois formes les plus célèbres du groupe SL_2 : $SO_3(\mathbb{R})$, $PGL_2(\mathbb{R})$, et $PSL_2(\mathbb{C})$. Pour nos projets, il me fallait rafraîchir et aiguiser ma compréhension de ces groupes, et rendre cette compréhension utile. Quelle meilleure manière de le faire qu'en donnant, à partir de premiers principes, un cours détendu et fluide sur ces groupes, et en le rendant aussi accessible que possible ? Pouvez-vous expliquer rapidement et simplement pourquoi le produit vectoriel de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tombe dans l'algèbre de Lie de $SO_3(\mathbb{R})$? Ou l'astuce de Dirac avec les ficelles ? Bien sûr, j'ai prêté attention aux géométries de ces groupes, et j'ai rendu hommage aux noms illustres qui y sont associés : Euclide, Lobachevsky, Minkowski.
>
> Quand on enseigne à des débutants complets, on apprend aussi. Peut-être qu'à certaines occasions je suis passé en mode spectacle, y ajoutant des passages savoureux comme, par exemple, le polissage des vases en pierre à l'époque de l'ancien Empire égyptien (ou, en termes mathématiques, la classification des sous-algèbres à trois dimensions de l'algèbre de Lie des « vecteurs glissants », c'est-à-dire les isométries infinitésimales de l'espace euclidien à trois dimensions) – mais pour moi, c'était un moyen de se détendre après des sessions intenses de recherche.
>
> Je ne connais aucun autre établissement mathématique au monde où l'on combine à un tel niveau la recherche et l'exposition.

3.3 – Plans pour l'avenir du Village des mathématiques

FIGURE 9 – Un jour de printemps au village, avec un des nombreux chats et chiens adoptés par hasard.

© Cihat Köseoğlu

Plusieurs projets pour cette année sont déjà en place, outre l'école d'été : la conférence GAeL (Géométrie Algébrique en Liberté) en juin, l'atelier WIN-E2 (Women in Numbers Europe-2) en septembre, et une école d'été en physique mathématique.

Grâce à l'intérêt porté par plusieurs départements de philosophie, un des nouveaux projets ambitieux du Village est de construire un Village de philosophie sur un nouveau terrain adjacent. La construction est déjà commencée, mais pour l'instant il héberge surtout les élèves qui ne trouvent pas de place dans les dortoirs du Village des mathématiques. L'année dernière, un nouveau programme nommé « Village des arts » a été inauguré – il s'agit pour l'instant d'un atelier d'arts plastiques et d'une école d'été organisée par Isin Onol, commissaire d'expositions et artiste turque.

Dans le même temps, la construction au Village des mathématiques ne s'arrête pas – on continue de construire des logements avec l'espoir qu'un jour plus personne ne soit obligé de dormir dans des tentes.

Les projets ambitieux ne manquent jamais au village ! Il en va de même pour les volontaires généreux et enthousiastes qui font de leur mieux pour leur donner vie, et sans lesquels le village ne pourrait survivre ! Plus de projets, plus de volontaires et plus de participation sont toujours les bienvenus, et les résidents du village sont toujours partants pour partager leur fierté avec tous les visiteurs [1].

Gabriela Aslı Rino Nesin

Université d'Oxford, Royaume-Uni

Gabriela Aslı Rino Nesin est née dans le Connecticut, EUA, en 1984. Elle a vécu aux États-Unis, en Turquie, au Portugal, en Espagne, aux Pays-Bas, et au Royaume-Uni. Après une licence en mathématiques et un master en logique, elle a soutenu en décembre 2015 un PhD à l'université de Leicester sur des questions de théorie des langages formels liées à la théorie des groupes sous la direction de Rick Thomas. Elle travaille actuellement dans le cadre du projet « Social Machines of Mathematics » de l'université d'Oxford. Elle a participé à plusieurs écoles d'été au village des Mathématiques depuis sa création et y passe régulièrement plusieurs semaines chaque été soit comme enseignante soit pour participer à des groupes de travail. Elle vit actuellement à Édimbourg.

Cet article est traduit par Gabriela Nesin (avec quelques modifications minimales qui reflètent le passage du temps) de sa version anglaise parue dans Notices Amer. Math. Soc., Vol. 62 (2015), numéro 6, 652-658. ©2015 American Mathematical Society. Voir `http://www.ams.org/notices/201506/rnoti-p652.pdf`.

1. Pour plus d'information, visitez la page web du village : `http://matematikkoyu.org/eng/`.

« Mathematic Park »

• X. Caruso

1. Qu'est-ce que *Mathematic Park* ?

Mathematic Park[1] est un séminaire qui s'adresse prioritairement aux étudiants, dès le premier cycle, et aux enseignants en mathématiques. Il est actuellement organisé par un groupe de cinq jeunes mathématiciens dynamiques : Xavier Caruso (chargé de recherche au Centre national de la recherche scientifique (CNRS)), Émilien Joly (étudiant post-doctoral), Igor Kortchemski (chargé de recherche CNRS), Roger Mansuy (professeur en classes préparatoires), Amine Marrakchi (élève à l'École normale supérieure).

Le séminaire *Mathematic Park* se réunit en moyenne une fois par mois, hors vacances scolaires (zone de Paris), à l'Institut Henri Poincaré (IHP). Les séances ont lieu généralement le dimanche à 15h, et durent une heure et demie. À la fin de chaque exposé, un goûter est servi dans la cafétéria de l'IHP ; l'orateur, les organisateurs et les participants y sont conviés et profitent de l'occasion pour échanger sur des sujets variés. Nous tenons à jour une page web `www.ihp.fr/fr/seminaire/mathematic-park` sur laquelle l'actualité du séminaire (comme le programme) est régulièrement mise à jour.

En outre, depuis 2013, les séances du séminaire sont retransmises en direct puis mises en ligne (généralement quelques jours après) sur la chaine IHP de YouTube[2].

L'inscription aux exposés (qui se fait de façon individuelle) est gratuite mais obligatoire ; ceci nous permet en particulier de tenir des statistiques précises sur la fréquentation. Nous maintenons une liste de diffusion sur laquelle nous annonçons les séances du séminaire ainsi que, de manière très occasionnelle, des manifestations partageant l'esprit de *Mathematic Park* (voir §2). Ceci suffit, semble-t-il, à nous assurer un public régulier. Toutefois, afin de renouveler notre public, nous ne négligeons pas les autres outils usuels de communication : site web, réalisation et distribution d'affiches, présence sur les réseaux sociaux.

Le saviez-vous ?

Une première version « familiale » du séminaire a été organisée entre 2003 et 2006 par l'auteur de cet article. Elle se tenait déjà le dimanche après-midi mais n'était destinée qu'à un petit groupe d'élèves issus principalement de la préparation aux Olympiades Internationales des Mathématiques (OIM). Les séances avaient lieu à l'École normale supérieure (ÉNS) et duraient souvent beaucoup plus d'une heure et demie. Les orateurs étaient généralement des élèves de l'ÉNS ou des intervenants à la préparation aux OIM.
En 2010, le principe du séminaire a été repris et repensé dans l'idée de s'ouvrir à un public plus large. Le nom *Mathematic Park*, quant à lui, a été imaginé dès 2003.

Les sujets des exposés couvrent un large spectre des mathématiques, allant de l'analyse à l'algèbre, en passant par la géométrie, la théorie des nombres, la combinatoire, les systèmes dynamiques, les probabilités, les statistiques, la logique et même régulièrement par l'informatique (informatique théorique et algorithmique principalement). Les mathématiques appliquées sont malgré tout malheureusement relativement peu représentées[3] ; nous avons conscience qu'il s'agit d'un point que

1. `http://www.ihp.fr/fr/seminaire/mathematic-park`
2. `https://www.youtube.com/user/PoincareInstitute` (la liste de lecture de *Mathematic Park* est située en bas de la page)
3. Ce qui est, sans aucun doute, lié à la composition du comité d'organisation.

nous devons améliorer et faisons donc appel à toutes les bonnes volontés pour nous proposer des exposés dans cette direction.

Le programme et le choix des orateurs est le résultat d'une discussion collective du comité d'organisation et peut même, occasionnellement, être suggéré par les participants lors des discussions informelles du goûter. Nous n'avons, pour le moment, reçu aucune proposition spontanée d'un collègue souhaitant intervenir à *Mathematic Park* mais, bien entendu, si le cas se présente à l'avenir, nous étudierons sa candidature avec intérêt...

Le texte ci-après – que nous envoyons systématiquement aux orateurs lorsque nous les contactons – nous immerge encore davantage dans l'esprit du séminaire.

« L'objectif de Mathematic Park est de proposer des exposés de mathématiques "alternatifs" (pas vraiment des cours, ou des exposés de recherche mais pourtant de vraies mathématiques) pour des étudiants de premier cycle (beaucoup d'élèves de classes préparatoires mais pas uniquement). Voici un bref (mais souple) cahier des charges pour un exposé adapté.

Le sujet d'un exposé est tout à fait libre dans l'ensemble des mathématiques et des sujets afférents : un sujet amusant, une présentation d'un domaine, une ouverture vers un sujet de recherche, des variations autour d'un théorème célèbre. Il semble important qu'un exposé ait un objectif lisible que l'on puisse identifier dans le titre et le résumé (sur lesquels nous communiquons via internet).

Un exposé doit rester accessible pour des étudiants motivés de premier cycle (par exemple, ils ont peu de connaissances en algèbre et aucune en topologie mais on peut introduire des notions algébriques ou topologiques a minima pour les besoins de la présentation). Il semble essentiel qu'il ne commence pas trop brutalement et que des exemples illustrent au fur et à mesure les définitions et concepts introduits.

La forme de l'exposé requiert un effort particulier : il y a un compromis à trouver entre la rigueur exhaustive et l'ordre hyper-hierarchisé d'un cours et une présentation trop vulgarisée ou désorganisée qui nous éloignerait de l'esprit des mathématiques. Il nous semble bon de ménager du temps pour les preuves ou tout au moins les schémas de preuve permettant de saisir la nature des arguments mais il convient de ne pas sombrer dans une technicité excessive. On peut tout à fait jouer la carte de l'interactivité avec l'audience en soumettant des questions, des exercices...

La durée d'un exposé peut varier jusqu'à 1h30 environ et on dispose aussi bien du tableau que d'un vidéoprojecteur. Il est possible de découper un exposé en deux séances (même si cela peut poser des problèmes car l'audience risque de changer).

En résumé, un exposé de Mathematic Park devrait motiver les jeunes étudiants et leur donner une vision des mathématiques que leurs cours ne peuvent pas leur fournir. »

2. Les amis de *Mathematic Park*

Notre premier ami est, bien entendu, l'IHP qui soutient fortement notre séminaire : il ouvre exceptionnellement ses locaux le samedi pour nous et nous y accueille, il héberge notre page web, il finance le goûter, la conception et le tirage des affiches ainsi que le déplacement et l'hébergement des orateurs lorsque cela est nécessaire.

Nous avons à plusieurs reprises coordonné notre programme avec les activités de l'IHP ; par exemple, nous avons programmé une journée spéciale sur l'œuvre et l'héritage d'Évariste Galois pour le bicentenaire de sa naissance qui s'est naturellement insérée dans les célébrations organisées par l'IHP à cette occasion.

Depuis 2014, nous sommes partenaires de la Fondation Sciences Mathématiques de Paris (FSMP) pour l'organisation de la journée annuelle *Mathématiques en mouvement*.

Nous relayons de temps en temps sur notre liste de diffusion des annonces pour des séminaires ou des écoles d'été qui s'inscrivent, à notre sens, dans l'esprit de *Mathematic Park* ; tel est le cas par exemple des écoles *Modern Mathematics* et *PROMYS Europe*.

Suite à notre impulsion, plusieurs répliques de *Mathematic Park* ont vu le jour dans d'autres villes françaises :

- à Bobigny et Villetaneuse, un *Mathematic Park* pour les lycéens (qui viennent généralement par classes) est organisé par l'association *Science Ouverte* ;
- à Rennes, un *Mathematic Park*, destiné aux élèves de Terminale et de classes préparatoires du lycée Chateaubriand, s'est tenu jusqu'en 2013 ; il s'est à présent transformé en un nouveau séminaire, nommé *Mathematic World*, qui s'adresse aux étudiants de Licence (L1 à L3) et se tient trois fois par an à l'université Rennes 1.

Nous concluons ce paragraphe en citant deux autres initiatives qui sont proches dans l'esprit de *Mathematic Park* : le *MathsClub* de l'université Paris Diderot qui existe depuis 2008 et les *soirées mathématiques de Lyon* créées en 2012.

FIGURE 2 – Répartition des inscriptions en fonction du niveau d'études

	Lycée	Prépa	L	M	D	Prof.	Autre
Inscriptions aux exposés	4%	38%	16%	9%	3%	13%	17%
Inscriptions à la liste de diffusion [4]	6%	29%	20%	10%	3%	15%	17%

[4] Le niveau d'études indiqué est celui communiqué au moment de l'inscription à la liste de diffusion.

3. *Mathematic Park* en chiffres

Depuis le lancement du séminaire en 2010, nous avons accueilli *50 conférenciers* et mis en ligne *22 vidéos* sur YouTube. Cette différence est due au fait que nous n'avons commencé à filmer les exposés qu'à partir de 2013.

La fréquentation du séminaire varie, en fonction des exposés, *entre 50 et 150 participants* présents dans la salle auxquels il faut ajouter environ *20 personnes* qui visionnent l'exposé en direct sur YouTube. Parmi ces personnes, on compte une proportion significative d'habitués qui assistent à pratiquement tous les exposés. Il est à noter que la fréquentation du séminaire diminue sensiblement en fin d'année scolaire, à partir de fin mars ; cela s'explique en partie par le fait que les étudiants de deuxième année des classes préparatoires sont occupés par les (révisions de) concours à cette période de l'année.

Chaque exposé est visionné en moyenne *3000 fois* sur YouTube avec d'importantes fluctuations, le record actuel étant détenu par l'exposé d'Olivier Wittenberg sur les conjectures de Weil qui totalise plus de *7000 vues*.

Notre liste de diffusion compte actuellement environ *1500 abonnés*. Contrairement à ce à quoi on aurait pu s'attendre *a priori*, les abonnés ne sont pas exclusivement concentrés en région parisienne mais relativement dispersés dans toute la France. Soulignons encore que, depuis le lancement du séminaire, une dizaine de personnes à peine a demandé de se désinscrire de la liste de diffusion ; ainsi, manifestement, même les personnes qui s'éloignent thématiquement ou géographiquement de *Mathematic Park* souhaitent rester informées des activités du séminaire.

4. *Mathematic Park* fête ses cinq ans

Le premier exposé de *Mathematic Park*, donné par Pierre Pansu, a eu lieu le 5 février 2011. Ainsi le 5 février 2016, le séminaire fête ses 5 ans. À cette occasion, nous n'aurons certes pas l'honneur d'être évalués par le HCERES mais nous organiserons *une séance spéciale le 7 mai 2016* à l'issue de laquelle nous soufflerons nos bougies. Venez-y nombreux !

Xavier Caruso

Université Rennes 1

xavier.caruso@normalesup.org

Xavier Caruso est chargé de recherche au CNRS affecté à l'université Rennes 1. Ses centres d'intérêt sont multiples mais ont pour dénominateur commun les nombres p-adiques ; ils vont de l'arithmétique (représentations galoisiennes p-adiques) à l'informatique (calcul formel et calcul scientifique p-adique) en passant par les probabilités (polynômes et matrices p-adiques aléatoires).

Les blogs : un outil dynamique de communication en mathématiques

• C. Mathéus

1. Les mathématiques : une activité humaine

William Thurston a souligné à juste titre dans son joli article [25] que les mathématiques sont une activité humaine : plutôt qu'une simple liste de réponses pures et dures (« vrai/faux », « oui/non », etc.) aux problèmes mathématiques, nous cherchons une compréhension humaine des preuves des théorèmes.

Dans cette quête, Internet est devenu un outil puissant : il permet une diffusion rapide d'informations [1] (de niveaux de détails variables) sur les derniers développements mathématiques [2].

Comme Internet est un vaste terrain de jeu, les possibilités de diffusion mathématique y sont multiples : par exemple, le lecteur trouvera une belle discussion sur la production de *films mathématiques* dans l'article d'Étienne Ghys [3]. Pour rendre la suite de ce texte raisonnable, je restreindrai la discussion aux *blogs mathématiques*.

2. Blogs mathématiques : qu'est-ce que c'est ?

Un *blog* est un « journal personnel en ligne » permettant aux gens de partager leurs pensées sur internet sous la forme de textes appelés *posts*.

Dans un certain sens, les blogs ont « toujours » fait partie de la vie de la communauté mathématique. De fait, sauf par l'aspect « en ligne », les publications d'actes de séminaires [3]pour une diffusion à travers les bibliothèques sont des exemples de « blogs ».

Par conséquent, il n'est pas surprenant que plusieurs mathématiciens possèdent des blogs dédiés aux mathématiques. Nous verrons quelques exemples dans la prochaine section.

3. Blogs mathématiques : pourquoi ?

Les raisons pour débuter un blog mathématique sont diverses :

(a) un groupe de mathématiciens [4] décide de mettre à disposition périodiquement en ligne des textes de vulgarisation mathématique ;

(b) un groupe de mathématiciens [5] décide de créer un « forum virtuel » pour discuter de leurs sujets de prédilection, pour partager des informations pratiques pertinentes dans leur domaines de recherches (par exemple, cours et conférences à venir), pour poser/répondre des questions, pour collaborer en ligne (et de façon « massive ») sur un problème ouvert spécifique, etc. ;

(c) un(e) mathématicien(ne) décide de partager son point de vue sur certains problèmes ouverts et/ou certains points clés de ses théorèmes, diffuser ses notes de cours et articles de vulgarisation, commenter les exposés d'un séminaire, ...

(d) etc.

Ainsi, les blogs mathématiques se sont répandus sur Internet : d'après *n-catlab* [17] et la ru-

1. Textes, figures, photos, films, etc.
2. Par exemple, la résolution par Marques-Neves de la conjecture de Willmore (voir [15] pour un exposé grand public et l'article [7] récemment publié par la *Gazette* des Mathématiciens pour un exposé destiné aux mathématiciens professionnels), la solution de Tao à la conjecture de la discrépance d'Erdös (voir [1]), la découverte par Babai d'un algorithme quasi-polynomial pour résoudre le problème de l'isomorphisme de graphes (voir [21]), etc.
3. E.g., Henri Cartan, Bourbaki, Géométrie Algébrique du Bois Marie, etc.
4. Comme le comité de lecture de la revue *Images des Mathématiques* (voir la Section 5 de l'article de Ghys [3] pour les détails).
5. Comme les fondateurs des blogs *The n-Category Café*, *Noncommutative Geometry*, *MathOverflow*, *The polymath blog*, etc.

brique *Mathematics* du blog de Terence Tao [24], il existe en ce moment au moins une centaine de blogs mathématiques (en anglais, français, espagnol, ...), incluant ceux de cinq médailles Fields [6].

Dans mon cas, j'ai décidé de débuter un blog [13] en 2008 en prenant le blog de Terence Tao [24] (créé en 2007) comme modèle. Ici, en sus des points décrits dans l'item (c) ci-dessus, je dois avouer qu'un point clé pour la création de mon blog était les avantages supplémentaires suivants.

J'estime que ma compréhension d'un sujet mathématique s'améliore significativement quand j'essaie d'en décrire les idées principales avec mes propres mots. Pour cette raison, j'ai l'habitude d'écrire des notes contenant par exemple mes impressions sur la démonstration d'un nouveau théorème. De mon point de vue, les avantages de cet exercice de rédaction sont multiples : je garde des traces de mon activité mathématique (et cela me permet de prendre du recul sur mes recherches), et il m'est souvent plus simple de me rappeler une idée mathématique en regardant mes notes [7] plutôt qu'en relisant l'article original, etc.

On n'est bien sûr pas obligé de partager ses notes sur internet, mais le fait de mettre à disposition ses textes dans un blog donne des avantages supplémentaires : l'idée que nos textes seront accessibles partout dans le monde est souvent une motivation en plus pour bien réfléchir avant d'écrire (ce qui nous amène à comprendre les choses plus finement), les commentaires peuvent parfois apporter des nouveaux points de vues sur un sujet mathématique (spécialement quand on décide de raconter à notre manière un nouveau théorème dans un sujet de recherche en dehors de notre expertise), ...

Évidemment, la publication en ligne de son journal mathématique personnel possède certains aspects négatifs (par exemple, il est parfois gênant de révéler ses faiblesses mathématiques), mais mon impression est que les avantages sont plus que suffisants pour compenser les points négatifs. Personnellement, je suis très content de mes expériences depuis la création de mon blog en 2008 !

Il me semble donc que participer à un blog mathématique, ou en créer un, est une expérience très enrichissante. La prochaine section contient quelques conseils pour quelqu'un souhaitant débuter un blog mathématique. Mais, avant cela, je voudrais donner deux exemples concrets d'avantages supplémentaires (à la fois pour soi-même et pour la communauté mathématique en général), pour rendre un peu plus concrète notre discussion jusqu'ici très générale.

Le premier exemple est la résolution par Tao de la conjecture de discrépance d'Erdös. En décembre 2009, Gowers a débuté un projet *Polymath 5* [4] envisageant une collaboration massive en ligne entre plusieurs mathématiciens pour résoudre cette célèbre conjecture d'Erdös. Les détails de la collaboration entre participants du projet – au moins 11 mathématiciens, incluant Terence Tao et Uwe Stroinski – sont disponibles sur le blog Polymath [19], mais le « résumé de l'ópera » est qu'ils ont fait des progrès significatifs sans pour autant résoudre la conjecture. Le momentum créé par ce projet s'est dissipé, si bien qu'il a été « oublié ». En septembre 2015, Terence Tao a publié un post [22] dans son blog pour expliquer une « stratégie Sudoku » utilisée dans un de ses articles avec Matomäki et Radziwill pour étudier certaines fonctions multiplicatives. Trois jours après, Uwe Stroinski a laissé un commentaire sur la ressemblance de cette « stratégie Sudoku » avec quelques arguments utilisés par certains participants du Polymath 5 dans leur tentative pour résoudre la conjecture de la discrépance d'Erdös. En particulier, il s'est demandé si les techniques introduites par Matomäki, Radziwill et Tao pourraient se prêter à la résolution de la conjecture. Initialement, Terence Tao réfute (dans un commentaire en réponse à Stroinski) une telle possibilité, mais après une réflexion plus profonde il découvre que Stroinski avait raison. En une dizaine de jours, il complète alors la rédaction d'un article contenant la solution de la conjecture de discrépance d'Erdös [23]. En d'autres termes, le partage d'informations et d'idées à travers les blogs a contribué de manière significative à la résolution d'une conjecture importante.

Le second exemple est le service rendu à la communauté mathématique par la publication en ligne de notes d'un séminaire. Je suis toujours reconnaissant quand mes collègues mettent à disposition leurs notes d'un séminaire important auquel je n'ai pas pu assister. Réciproquement, je suis honoré quand mes collègues me remercient (en ligne, pendant les pauses-café de conférences, etc.) de mettre sur mon blog des textes d'un exposé qu'ils ont raté. En fait, l'échange d'informations est une

6. *What's new* (de Terence Tao), *Gowers's weblog*, *Cédric Villani*, *David Mumford's blog*, *Noncommutative geometry* (d'Alain Connes et ses collaborateurs), ...

7. Parce que mes notations et figures sont adaptées à ma manière de réfléchir aux mathématiques, par exemple.

partie importante du métier de mathématicien(ne) et, plus personnellement, la lecture régulière de blogs mathématiques a eu un impact positif sur mes propres recherches.

4. Blogs mathématiques : comment ?

Avant de débuter un blog, se pose la question du temps que nous sommes prêts à investir dans un tel projet.

Une manière simple de s'investir de manière minimale est de contacter le comité de lecture d'un blog mathématique pré-existant et de leur demander la permission de contribuer sporadiquement avec des textes. Ce type de contribution, appelé « guest post » en anglais, est très répandu sur la *blogosphère* (i.e., l'ensemble des blogs).

En revanche, si l'on souhaite investir un peu plus de temps sur ce genre d'activité, une bonne idée est de créer un blog personnel, peut-être à l'aide d'outils spécialisés pour la création de sites web comme *Wordpress*, *Blogger*, etc.

Dans mon cas, j'ai choisi d'héberger mon blog chez *Wordpress* (après la création [gratuite] d'un compte) parce qu'ils acceptent les textes contenant des symboles mathématiques au format LaTeX : il suffit juste d'ajouter le mot `latex` au début d'une formule (e.g., $ latex y=x+2 $ au lieu de $ y =x+2 $). En fait, grâce à un programme de Luca Trevisan [27], il est possible de convertir les textes `.tex` dans un format `.html` qu'on peut copier et coller directement pour publication dans un blog chez Wordpress (de façon à garder des traces de tous ses posts au format `.tex`). On a ainsi besoin de rajouter `latex` uniquement pour écrire des formules mathématiques dans les commentaires d'un post.

Les sites spécialisés dans la création de blogs fournissent plusieurs options pour l'administration d'un blog :

- on peut choisir de ne pas imposer de restriction aux commentaires ou, au contraire, de recevoir des notifications par courriel quand les commentaires arrivent. Ceux-ci seront alors approuvés et publiés seulement après relecture ;
- on peut inviter nos collègues et leur donner différents rôles : certains s'occuperont seulement de contribuer avec des textes (« guest posts »), d'autres s'occuperont de contribuer avec des textes et dans la modération de commentaires, d'autres encore feront partie du comité de lecture du blog (et pourront posséder tous les droits d'administrateur si nécessaire), etc.

Comme on le constate ci-dessus, les blogs sont des outils flexibles qui peuvent rendre service à notre communauté. J'espère vous retrouver sur la blogosphère, et que vous vous amuserez autant que moi en créant/administrant/laissant des commentaires sur un blog !

5. Blogs mathématiques : recommandations de lecture

En guise de conclusion, voici une liste[8] d'adresses de blogs que je consulte régulièrement ainsi que quelques commentaires sur leurs contenus.

- Le blog *What's new* de Terence Tao [24] est certainement un exemple d'un excellent blog destiné aux mathématiciens professionnels. Il contient des billets sur les recherches de Tao, ses notes de cours et d'exposés, etc. Le blog traite de plusieurs sujets mathématiques tels que : analyse harmonique, combinatoire, équations aux dérivées partielles, géométrie différentielle, théorie des nombres, théorie ergodique, etc. En particulier, j'apprécie *What's new* pour l'opportunité d'apprendre quelques détails sur les routes empruntées par un grand mathématicien pour attaquer et/ou résoudre un problème ouvert important (par exemple).
- *Images des Mathématiques* [8] est un blog destiné a la vulgarisation mathématique, avec une attention particulière pour le grand public. Ses billets sont divisés en « pistes de couleurs » (verte, bleue, rouge et noire selon le bagage mathématique requis pour comprendre l'article) et « rubriques » (sur l'Histoire des Mathématiques par exemple). Pour moi, deux aspects particulièrement plaisants de ce blog sont la qualité des figures et illustrations d'objets mathématiques et la richesse de détails dans les articles sur l'histoire de grands mathématiciens.
- *MathOverflow* [14] est un forum de ques-

8. Je m'excuse auprès des auteurs de blogs non mentionnés ici, mais les limitations usuelles d'espace m'ont forcé à préparer une liste de blogs loin d'être complète.

tions/réponses sur les problèmes issus de la recherche mathématique. Ce blog a le format d'un « jeu » : après inscription (e.g., en utilisant le courrier électronique), on obtient des points de « réputation » pour chaque question posée ou résolue, on vote sur la qualité d'une question/réponse, et on gagne un nouveau « droit d'administrateur » (e.g., modifier la formulation d'une question, etc.) à chaque fois qu'on accumule un certain nombre de points de réputation. Ce blog est fréquenté par plusieurs grands mathématiciens (incluant quelques médailles Fields). J'apprécie la quantité de mathématiques qu'on apprend juste en lisant quelques questions et réponses.

– *The polymath blog* [19] est destiné à tous les mathématiciens souhaitant collaborer en ligne sur les projets *polymath*[9]. Dans ce sens, il s'agit d'un blog de « management de la recherche » et je le trouve intéressant pour l'aspect d'expérimentation sur la possibilité de faire des collaborations massives en mathématiques.
– Les blogs *Gowers's Weblog* [5] (de Timothy Gowers) et *Combinatorics and more* [9] (de Gil Kalai) sont célèbres par leurs plaisants billets sur la combinatoire, ainsi que par leur aide dans le « management de la recherche » (par exemple, en hébergeant certaines parties des projets polymaths de nature combinatoire).
– *E. Kowalski's blog* [10] est recommandé pour les lecteurs intéressés par la théorie (analytique) des nombres.
– *Geometry and the imagination* [2] (de Danny Calegari) est un joli blog sur la topologie, la géometrie et les feuilletages (comme on peut s'y attendre de la part d'un ancien élève de W. Thurston).
– *Secret Blogging Seminar* [20] est un blog créé par d'anciens doctorants à Berkeley (États-Unis) autour de la théorie des représentations, la géométrie algébrique, la théorie des nœuds, etc.
– Le blog *Low dimensional topology* [16] (de D. Moskovich) est dédié à la théorie des nœuds.
– Les blogs *Noncommutative Geometry* [18] (d'Alain Connes et ses collaborateurs) et *neverending books* [11] (de Lieven LeBruyn) discutent les géométries non-commutatives et arithmétiques, la théorie des représentations, etc.
– Le blog *in theory* [26] (de Luca Trevisan) contient des billets sur la théorie des graphes et l'informatique.
– Le blog *Gödel's Lost Letter and P=NP* [12] (de R. Lipton et K. Regan) est dédié à la théorie de la complexité.
– Le blog de Joel Hamkins [6] discute divers aspects de la théorie des ensembles et de la logique mathématique.

Références

[1] S. Bailly. *Terence Tao démontre la conjecture de la discrépance de Paul Erdös*. URL : `http://www.pourlascience.fr/ewb_pages/a/actu-terence-tao-demontre-la-conjecture-de-la-discrepance-de-paul-erdos-36013.php`.

[2] D. Calegari. *Geometry and the imagination*. URL : `https://lamington.wordpress.com/`.

[3] É. Ghys. *The internet and the popularization of mathematics*. Proceedings of ICM 2014. URL : `http://perso.ens-lyon.fr/ghys/articles/icmseoul.pdf`.

[4] T. Gowers. *Erdös discrepancy problem*. URL : `https://gowers.wordpress.com/2009/12/17/erdoss-discrepancy-problem/`.

[5] T. Gowers. *Gowers's weblog*. URL : `https://gowers.wordpress.com/`.

[6] J. D. Hamkins. *Mathematics and philosophy of the infinite*. URL : `http://jdh.hamkins.org/`.

[7] L. Hauswirth et L. Mazet. « Aspect variationnel des surfaces minimales et conjecture de Willmore ». *Gaz. Math.* **147** (2016), p. 19–29.

[8] *Images des Mathématiques*. URL : `http://images.math.cnrs.fr/`.

[9] G. Kalai. *Combinatorics and more*. URL : `https://gilkalai.wordpress.com/`.

[10] E. Kowalski. *E. Kowalski's blog*. URL : `http://blogs.ethz.ch/kowalski/`.

[11] L. Le Bruyn. *neverending books*. URL : `http://www.neverendingbooks.org/`.

9. I.e., des projets de collaboration massive sur un problème ouvert spécifique. Ici, l'idée est plutôt de contribuer à un tel projet par des petits commentaires pour une réflexion « en masse » au lieu de proposer une démonstration complète comme fruit d'une réflexion solitaire.

[12] R. J. LIPTON et K. W. REGAN. *Gödel's Lost Letter and P=NP*. URL : `https://rjlipton.wordpress.com/`.

[13] C. MATHEUS. *Disquisitiones Mathematicae*. URL : `http://matheuscmss.wordpress.com/`.

[14] *MathOverflow*. URL : `http://mathoverflow.net/`.

[15] F. MORGAN. *Math Finds the Best Doughnut*. URL : `http://www.huffingtonpost.com/frank-morgan/math-finds-the-best-dough_b_1331844.html`.

[16] D. MOSKOVICH. *Low-dimensional topology*. URL : `https://ldtopology.wordpress.com/`.

[17] *nLab math blogs list*. URL : `https://ncatlab.org/nlab/show/math+blogs`.

[18] *Noncommutative Geometry*. URL : `http://noncommutativegeometry.blogspot.com.br/`.

[19] *Polymath*. URL : `http://michaelnielsen.org/polymath1/index.php?title=Main_Page`.

[20] *Secret Blogging Seminar*. URL : `https://sbseminar.wordpress.com/`.

[21] T. TAO. URL : `https://plus.google.com/+TerenceTao27/posts/BKNM7z74BTF`.

[22] T. TAO. *Sign patterns of the Mobius and Liouville functions*. URL : `https://terrytao.wordpress.com/2015/09/06/sign-patterns-of-the-mobius-and-liouville-functions/`.

[23] T. TAO. *The Erdös discrepancy problem*. URL : `http://arxiv.org/abs/1509.05363`.

[24] T. TAO. *What's new*. URL : `https://terrytao.wordpress.com/`.

[25] W. THURSTON. « On proof and progress in mathematics ». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **30** (1994), p. 161–177.

[26] L. TREVISAN. *in theory*. URL : `https://lucatrevisan.wordpress.com/`.

[27] L. TREVISAN. *LaTex to Wordpress*. URL : `https://lucatrevisan.wordpress.com/latex-to-wordpress/`.

Carlos MATHÉUS

Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS (UMR 7539), F-93430, Villetaneuse, France.
`matheus@impa.br`

Carlos Mathéus est chargé de recherche (CNRS) et membre de l'équipe Théorie ergodique et Systèmes Dynamiques du LAGA (Univ. Paris 13). Ses travaux récents portent sur la dynamique des flots de Teichmüller et Weil-Petersson dans les espaces de modules et la géométrie fractale des fers-à-cheval non-uniformément hyperboliques de Palis-Yoccoz.

Je remercie chaleureusement Sébastien Gouëzel pour son invitation à rédiger ce texte.

Le plafond de verre expliqué par les mathématiques

Ce texte est issu d'un entretien mené par Alice Jacquet avec Claire Mathieu pour la Fondation Sciences Mathématiques de Paris (fsmp) disponible sur le site web de la Fondation [1].

• A. Jacquet

Il y a quelque temps, en janvier 2015, paraissait un article de recherche au titre pour le moins intriguant : « Homophily and the Glass Ceiling Effect in Social Networks ». Pourquoi donc des informaticiens publiaient-ils une étude sur le phénomène sociologique du plafond de verre ? Quel était le rapport avec leur discipline ? Et quels outils informatiques et mathématiques se cachaient-ils derrière ? Pour trouver des réponses, la fsmp a rencontré Claire Mathieu, directrice de recherches au Centre national de la recherche scientifique (cnrs) et professeur attaché à l'éns–Département d'Informatique, l'un des coauteurs de l'article en question [2].

Figure 1 – Claire Mathieu, directrice de recherches au cnrs et professeur attaché à l'éns

Tout a commencé lorsque Zvi Lotker, l'un des informaticiens associés à cette recherche, s'est intéressé au réseau Digital Bibliography & Library Project (dblp). Un réseau bien particulier, puisqu'il s'agit ni plus ni moins de la base de données recensant toutes les publications de la communauté informatique. Plusieurs centaines de milliers d'auteurs y sont répertoriés, sur une période couvrant plus de trente ans. Parmi eux, 79% d'hommes. Un pourcentage qui augmente encore lorsqu'on s'intéresse aux auteurs les plus influents : ainsi, plus un chercheur est reconnu, ce qui est évalué par son nombre de coauteurs notamment, plus il y a de chances pour que ce soit un homme. Ce phénomène sociologique est couramment appelé plafond de verre : la barrière invisible mais infranchissable qui empêche les minorités et les femmes d'accéder à des fonctions plus élevées dans le monde professionnel, en dépit de leurs qualifications.

Zvi Lotker s'est attaché à l'aspect mathématique de ce phénomène. Il s'est demandé quelles conditions devaient être réunies au sein d'un réseau social pour qu'un plafond de verre émerge. Dans le but de déterminer ces conditions, il a proposé à plusieurs collègues, parmi lesquels Claire Mathieu, de s'associer à sa recherche. Ensemble, ils ont alors choisi l'approche suivante : formuler plusieurs hypothèses, d'après les observations qu'ils pouvaient faire sur le réseau dblp, puis créer de toutes pièces un réseau social à partir de ces hypothèses. Leur objectif : trouver les hypothèses qui permettent de créer un réseau social où le phénomène du plafond de verre s'observe.

Forts de cette démarche, les chercheurs impli-

1. `http://www.sciencesmaths-paris.fr/fr/le-plafond-de-verre-explique-par-les-mathematiques-730.htm`
2. « Homophily and the Glass Ceiling Effect in Social Networks » (Chen Avin, Barbara Keller, Zvi Lotker, Claire Mathieu, David Peleg, Yvonne Anne Pignolet), Proceedings of the 2015 Conference on Innovations in Theoretical Computer Science, ITCS 2015, 2015. L'article est disponible à l'adresse suivante : `http://www.sciencesmaths-paris.fr/upload/Contenu/Notes`

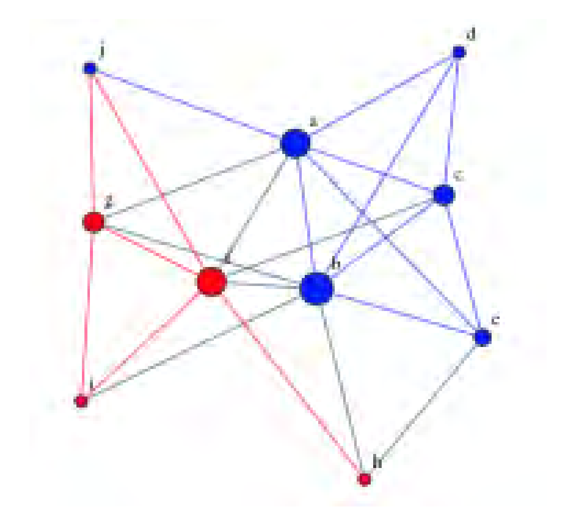
qués dans ce travail se sont alors concertés pour poser trois hypothèses de départ, sous lesquelles construire leur propre réseau social. La première des hypothèses qu'ils ont ainsi définies, c'est qu'il y ait plus d'hommes que de femmes dans leur réseau. La deuxième hypothèse a consisté à créer leur réseau de telle sorte que plus une personne y acquiert de la visibilité, plus cette visibilité grandit. Il s'agit là en réalité d'un phénomène bien connu des sociologues, appelé « the rich get richer mechanism ». La troisième hypothèse, enfin, a été de construire un réseau au sein duquel les femmes s'associent plus avec les femmes et les hommes avec les hommes – c'est le concept d'homophilie.

Ces hypothèses définies, les chercheurs ont alors édifié leur réseau social, sous forme de graphe. Ils ont modélisé chaque femme par un nœud rose et chaque homme par un nœud bleu, et indiqué si deux personnes sont liées dans leur réseau par une arête entre deux nœuds. Pour chaque nouveau nœud du réseau, ils ont considéré que celui-ci avait plus de chances :

- d'être bleu que rose (première hypothèse) ;
- d'être relié à un nœud très connecté qu'à un nœud moins connecté (deuxième hypothèse) ;
- d'être relié à un nœud de la même couleur (troisième hypothèse).

Le graphe de leur réseau a ainsi pris forme, certains nœuds étant davantage connectés que d'autres. Or dans un graphe, plus un nœud est relié à d'autres, plus on dit que son degré augmente.

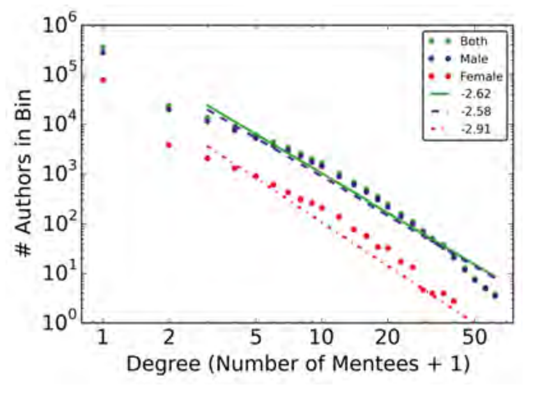
Figure 2 – Réseau social sous forme de graphe.



Les chercheurs ont alors observé que plus le degré d'un nœud était élevé, plus il y avait de chances pour que celui-ci soit bleu. En d'autres termes, ils ont noté l'apparition d'un plafond de verre au sein de leur réseau. La même démarche, réalisée en enlevant successivement l'une des trois hypothèses de départ, n'a pas permis d'observer ce phénomène. Ces trois hypothèses de départ se sont donc avérées nécessaires à l'apparition d'un plafond de verre.

À ce stade de leur recherche, Claire Mathieu et les autres auteurs de l'article étaient donc parvenus à définir trois conditions sous lesquelles le phénomène du plafond de verre s'observe dans un réseau social : un déséquilibre hommes/femmes au détriment de ces dernières, « the rich get richer mechanism » et le concept d'homophilie. S'est alors posée la question de savoir si ces conditions étaient réalistes, c'est-à-dire si le réseau social qu'ils avaient créé pouvait soutenir la comparaison avec un réseau social existant. Ils ont alors représenté le réseau DBLP à l'aide, là encore, de nœuds roses (pour les chercheuses) et bleus (chercheurs), deux coauteurs ainsi représentés étant reliés par une arête. De façon saisissante, le graphe obtenu à partir des données de DBLP s'est révélé fortement semblable au graphe construit artificiellement avec les trois conditions d'apparition du plafond de verre.

Figure 3 – Ressemblance entre le graphe DBLP et le graphe artificiel.



Au bout de cette recherche, ce sont donc trois conditions, clairement définies et qui plus est réalistes, que les auteurs ont avancées pour expliquer l'apparition du plafond de verre dans les réseaux sociaux. Toutefois, il resterait encore à déterminer si ces conditions sont les plus pertinentes. D'après Claire Mathieu, il serait en effet intéressant de faire appel à des sociologues afin d'affiner ces trois conditions ou d'en trouver de nouvelles.

D'autres outils informatiques et mathématiques pourraient également être mobilisés pour approfondir leur travail : des outils de l'apprentissage, des statistiques et des probabilités par exemple. Une recherche à suivre...

Alice Jacquet

Fédération des Sciences Mathématiques de Paris

Alice Jacquet est titulaire du master Histoire et Philosophie des Sciences de l'université Paris Diderot-Paris 7. Elle a travaillé au sein de l'association MATh.en.JEANS puis comme chargée de communication à la FSMP. Elle est actuellement étudiante en master de mathématiques à l'UPMC.

Claire Mathieu est directrice de recherches au CNRS et professeur associé à l'ÉNS. Sa recherche relève de l'algorithmique et porte, entre autres choses, sur les algorithmes d'approximation pour les graphes planaires et pour les problèmes euclidiens, et sur les modèles probabilistes pour les réseaux sociaux.

... la droite de Berkovich

• J. Poineau

On appelle corps valué un corps muni d'une valeur absolue. Les exemples les plus connus sont sans doute $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ munis des valeurs absolues usuelles, mais il en existe beaucoup d'autres. Ces deux corps satisfont à une propriété supplémentaire, dite *propriété d'Archimède* :

$$\text{pour tous } y > x > 0, \text{ il existe un entier } n \text{ tel que } |nx| > |y|.$$

On peut montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont les seuls corps valués archimédiens à être complets.

Dans le cas d'un corps valué $(k, |\cdot|)$ qui n'est pas archimédien, la valeur absolue satisfait à une version renforcée de l'*inégalité triangulaire*, dite *ultramétrique* :

$$\forall f, g \in k,\ |f+g| \leqslant \max(|f|, |g|).$$

Comme exemple de tel corps, on peut citer le corps $\mathbb{C}((t))$ des séries de Laurent complexes, c'est-à-dire des séries de la forme

$$f(t) = \sum_{n \geqslant n_0} a_n t^n,$$

où n_0 est un entier relatif qui dépend de f. Si la série f n'est pas nulle, il existe un plus grand entier n_0, appelé valuation de f, pour lequel la série peut s'écrire sous la forme précédente. On le note $v(f)$. On peut alors définir une valeur absolue ultramétrique $|\cdot|$ sur $\mathbb{C}((t))$ par $|0| = 0$ et

$$|f| = 2^{-v(f)} \text{ pour } f \neq 0.$$ [1]

Un autre exemple classique est celui de la valeur absolue p-adique $|\cdot|_p$ sur $\mathbb{Q}$, où p est un nombre premier. Tout nombre rationnel a non nul peut s'écrire de façon unique sous la forme $\pm p^n \frac{u}{v}$, où n est un entier relatif et u et v des entiers naturels non divisibles par p premiers entre eux. L'entier n est appelé valuation p-adique de a et noté $v_p(a)$. On peut alors définir une valeur absolue ultramétrique $|\cdot|_p$ sur $\mathbb{Q}$ par $|0| = 0$ et

$$|a|_p = p^{-v_p(a)} \text{ pour } a \neq 0.$$ [2]

Nous noterons $\mathbb{Q}_p$ le complété de $\mathbb{Q}$ pour cette valeur absolue.

Précisons qu'un théorème d'Alexander Ostrowski assure que toute valeur absolue non triviale sur $\mathbb{Q}$ est soit la valeur absolue usuelle, soit la valeur absolue p-adique pour un certain nombre premier p (à normalisation près). Pour étudier un problème donné sur $\mathbb{Q}$, comme l'existence d'une solution d'une équation, on perd certainement beaucoup d'information en passant à un complété fixé, par exemple $\mathbb{R}$, mais on peut espérer mieux le comprendre si l'on est capable de le traiter sur *tous* les complétés.

En guise de motivation pour l'étude des espaces définis sur les corps ultramétriques, ajoutons quelques mots sur un problème classique, dit *problème inverse de Galois* : tout groupe fini G est-il groupe de Galois d'une extension finie de $\mathbb{Q}$? Le théorème d'irréductibilité de Hilbert assure qu'il suffit de réaliser G comme groupe de Galois d'une extension finie de $\mathbb{Q}(T)$. Dans la lignée des idées exposées plus haut, il est naturel de se demander tout d'abord si une telle construction est possible pour $\mathbb{R}(T)$, ou même $\mathbb{C}(T)$, et les différents $\mathbb{Q}_p(T)$.

Commençons par le cas complexe. Le corps $\mathbb{C}(T)$ étant le corps des fonctions méromorphes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, la question admet une traduction géométrique en termes de construction de revêtements, éventuellement ramifiés, de cet espace. Si l'on comprend bien

1. La constante 2 est choisie arbitrairement et pourrait être remplacée par n'importe quel nombre réel strictement supérieur à 1.
2. Ici aussi, la constante p que l'on élève à la puissance $v_p(a)$ peut être modifiée. Ce choix particulier est cependant intéressant en ce qu'il conduit à la *formule du produit* : pour tout nombre rationnel non nul a, on a $|a| \prod_p |a|_p = 1$, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers.

la relation entre revêtements algébriques, analytiques et topologiques de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ privé d'un nombre fini de points, ce qui est le cas, on se ramène à un problème purement topologique. La description du groupe fondamental de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ privé d'un nombre fini de points comme un groupe libre permet alors d'apporter une réponse positive au problème inverse de Galois sur $\mathbb{C}(T)$, car tout groupe fini est quotient d'un groupe libre possédant suffisamment de générateurs.

Pour mettre en œuvre des arguments similaires sur $\mathbb{Q}_p$, il faut disposer d'espaces possédant de bonnes propriétés, proches de celles des espaces complexes. Nous expliquons dans la suite de ce texte les problèmes qui se posent et les solutions que l'on peut y apporter.

Nous ne nous attarderons pas davantage sur le problème inverse de Galois, mais souhaitons tout de même signaler que David Harbater a démontré dans [4] que l'on pouvait en effet le résoudre sur $\mathbb{Q}_p$. Le problème original reste cependant ouvert.

1. Topologie sur un corps ultramétrique

Les espaces classiques tels que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ jouissent de bonnes propriétés topologiques : compacité locale, connexité par arcs locale, contractibilité locale, etc. qui tombent en défaut dans le cadre ultramétrique.

Afin d'apporter des précisions, fixons un corps valué ultramétrique complet $(k,|\cdot|)$. Pour $r \in \mathbb{R}^+$ et $a \in k$, notons $B(a,r)$ la boule fermée de centre a et de rayon r. Un calcul direct montre que, pour tout point b de $B(a,r)$, nous avons $B(a,r) = B(b,r)$. En d'autres termes, tout point appartenant à la boule est centre de cette boule. On en déduit que les boules fermées de rayon strictement positif sont ouvertes. Cette propriété pose inévitablement des problèmes de connexité et l'on démontre précisément que les composantes connexes de k sont les points : l'espace est dit *totalement discontinu*.

D'autres pathologies peuvent se présenter. On vérifie, par exemple, que, lorsque $k = \mathbb{C}((t))$, nous avons

$$B(0,1) = \mathbb{C}[[t]] = \bigsqcup_{a\in\mathbb{C}} B(a,1)^\circ,$$

où $B(a,1)^\circ$ désigne la boule unité ouverte centrée en a. Il s'ensuit que $B(0,1)$ n'est pas compacte et, par des arguments du même type, que k n'est pas localement compact.

Il y a une vingtaine d'années, Vladimir G. Berkovich a développé dans [2] une théorie permettant de définir des espaces sur les corps ultramétriques dont les propriétés sont proches de celles des espaces réels et complexes. Ses espaces contiennent beaucoup d'autres points que ceux de k, dont un point appartenant à la boule fermée $B(0,1)$ mais à aucune boule ouverte de rayon 1 (rendant caducs les arguments de topologie qui précèdent). Précisons que la théorie de V. Berkovich est en réalité bien plus complète, puisqu'elle permet de définir une géométrie analytique ultramétrique (et prolonge en cela les travaux fondateurs de John Tate des années soixante), mais nous n'aborderons pas ce point.

2. La droite de Berkovich

Soit $(k,|\cdot|)$ un corps valué ultramétrique complet.

2.1 – Définition

Ensemblistement, la droite affine au sens de Berkovich, notée $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$, est l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $k[T]$ qui induisent la valeur absolue donnée $|\cdot|$ sur k. On la munit de la topologie faible (autrement dit de la topologie la plus grossière rendant continue l'évaluation des polynômes). Montrons tout de suite qu'un point « classique », c'est-à-dire correspondant à un élément α de k, donne naturellement lieu à un point au sens de Berkovich : il suffit pour cela de considérer la semi-norme multiplicative

$$P(T) \in k[T] \mapsto |P(\alpha)| \in \mathbb{R}_+.$$

Dans la suite du texte, nous noterons encore α ce point.

Il est possible de généraliser la construction précédente en considérant non plus seulement des éléments de k, mais aussi d'un corps valué complet arbitraire K contenant k et dont la valeur absolue étend celle de k. Tout point de la droite de Berkovich peut d'ailleurs s'obtenir de la sorte.

Nous disposons donc de deux définitions de la droite de Berkovich. Si la première, en termes de semi-normes multiplicatives, est plus concrète et permet de parvenir à une description explicite de la droite, la seconde, en termes de points à valeurs dans des corps valués, peut sembler plus naturelle et présente en outre un intérêt théorique certain.

Elle doit rappeler la construction classique de Gelfand du spectre d'une algèbre de Banach complexe à partir des caractères de cette algèbre. Il est remarquable que les propriétés connues de ce spectre restent valables ici : l'espace $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ est séparé et localement compact [3], bien que le corps k lui-même ne satisfasse pas toujours à cette dernière propriété.

2.2 – Un nouveau point

Soit $P(T) = \sum_{i=0}^{d} p_i\, T^i$ un polynôme à coefficients dans k. Dans le cadre ultramétrique, le supremum de sa valeur absolue sur le disque $B(0,1)$ est donné explicitement par

$$\|P\|_{\infty,B(0,1)} = \max_{0\leqslant i\leqslant d}(|p_i|).$$

On peut alors vérifier que l'application

$$P \in k[T] \mapsto \|P\|_{\infty,B(0,1)} \in \mathbb{R}_+$$

est une norme multiplicative sur $k[T]$. Insistons sur le fait que cette propriété est très spécifique au cadre ultramétrique et que la norme du supremum sur un disque complexe n'est nullement multiplicative.

La norme multiplicative précédente définit un point de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$, souvent appelé *point de Gauß*, que nous noterons η. Il est loisible d'y penser comme à une sorte de point générique du disque unité fermé (ou du cercle unité) centré en 0. Il appartient en effet à la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 (puisque $\|T\|_{\infty,B(0,1)} = 1$) mais à aucune boule ouverte de centre a, avec $|a| \leqslant 1$, et de rayon 1 (puisque $\|T-a\|_{\infty,B(0,1)} = 1$).

Énonçons un autre résultat pour étayer cette idée de généricité. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de racines de l'unité dont l'ordre tend vers l'infini. Pour tout entier n, notons X_n l'ensemble des conjugués du point x_n et considérons la mesure de probabilité sur $\mathbb{C}$ définie par

$$\delta_n = \frac{1}{\sharp X_n} \sum_{y\in X_n} \delta_y,$$

où δ_y désigne la mesure de Dirac au point y. On vérifie que les éléments des X_n s'équirépartissent sur le cercle unité, au sens où la suite de mesures $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers la mesure de Haar sur ce cercle (*cf.* [SUZ], où les auteurs traitent des cas bien plus généraux).

Soit p un nombre premier. On peut effectuer une construction similaire à la précédente sur la droite de Berkovich $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^{1,\mathrm{an}}$ sur $\mathbb{Q}_p$ et associer à la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans ce cas, Antoine Chambert-Loir a montré dans [3] que cette suite convergeait faiblement vers δ_η, la mesure de Dirac au point de Gauß (ainsi que de vastes généralisations, dans l'esprit de [7]).

Ce dernier résultat rend tangible l'intérêt des espaces de Berkovich pour au moins deux raisons :

i) les points nouveaux, tel η, peuvent apparaître naturellement même dans des questions qui concernent *a priori* seulement des points dans des extensions finies du corps de base (ici $\mathbb{Q}_p$) ;

ii) la compacité locale de l'espace permet d'utiliser le fait que l'ensemble des mesures de probabilité sur un espace compact et métrisable est compact (pour la topologie vague).

2.3 – Beaucoup de nouveaux points

La construction du point η se généralise de la façon suivante. Fixons un élément α de k et un nombre réel r strictement positif. Nous pouvons écrire tout polynôme dans la base des puissances de $T-\alpha$ et définir ainsi une application

$$P(T) = \sum_{i=0}^{d} p_i\,(T-\alpha)^i \in k[T] \mapsto \max_{0\leqslant i\leqslant d}(|p_i|r^i) \in \mathbb{R}_+$$

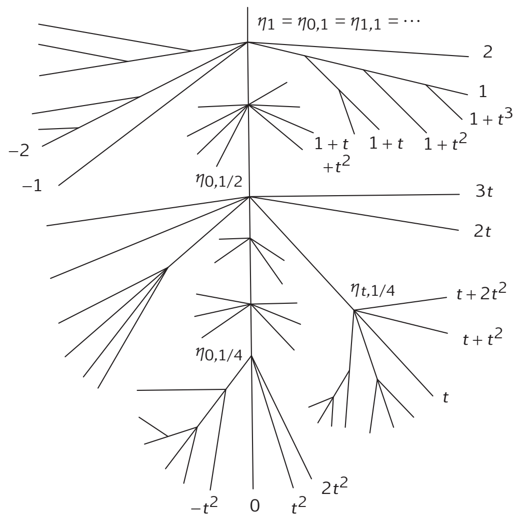
qui est encore une norme multiplicative sur $k[T]$. Nous noterons $\eta_{\alpha,r}$ le point de $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ associé. On vérifie qu'il dépend uniquement du disque de centre α et de rayon r (dans toutes les extensions valuées de k). En particulier, si $|\beta-\alpha| \leqslant r$, alors $B(\alpha,r) = B(\beta,r)$ et $\eta_{\alpha,r} = \eta_{\beta,r}$.

En utilisant cette construction, on voit naturellement apparaître des intervalles réels tracés sur la droite de Berkovich, par exemple $\{\eta_{\alpha,r} \mid r \in \mathbb{R}^+\}$, où l'on a identifié $\eta_{\alpha,0}$ à α. Remarquons que les intervalles issus de deux points α et β de k ne sont jamais disjoints car les points $\eta_{\alpha,|\alpha-\beta|}$ et $\eta_{\beta,|\alpha-\beta|}$ coïncident ! La construction de Berkovich permet donc de tracer un chemin entre les points α et β et d'obtenir des propriétés de connexité par arcs pour $\mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$ alors que, rappelons-le, le corps k lui-même est totalement discontinu.

3. Il serait compact si l'on avait considéré plutôt des disques, c'est-à-dire si l'on avait imposé des bornes aux valeurs prises par les semi-normes sur des fonctions coordonnées.

En traçant les chemins partant de tous les points de k, nous obtenons un dessin qui présente l'aspect suivant.

FIGURE 1 – La droite de Berkovich sur $\mathbb{C}((t))$



Nous obtenons un espace avec une structure d'arbre réel où les points de branchements sont denses dans tous les intervalles et où une infinité de branches partent de chaque point de branchement (sauf dans le cas où la valeur absolue sur k est triviale). Remarquons que les points de branchement correspondent exactement aux plus petits disques contenant deux éléments distincts de k. Leur rayon doit donc être égal à la distance entre deux éléments, et donc appartenir à $|k^*|$.

Nous supposerons désormais que le corps k est algébriquement clos. Dans ce cadre, V. Berkovich a introduit la terminologie suivante :

– un point de la forme $\eta_{\alpha,0} = \alpha$, avec $\alpha \in k$, est dit de type 1 ;
– un point de la forme $\eta_{\alpha,r}$, avec $\alpha \in k$ et $r \in |k^*|$, est dit de type 2 ;
– un point de la forme $\eta_{\alpha,r}$, avec $\alpha \in k$ et $r \notin |k^*|$, est dit de type 3.

La classification n'est pas encore complète car il reste un type de points que nous n'avons pas décrit. Leur construction s'appuie sur la remarque cruciale que la borne inférieure d'une famille décroissante de semi-normes multiplicatives sur $k[T]$ est encore une semi-norme multiplicative. Si cette famille est associée à une famille de disques, alors la semi-norme limite devrait correspondre à leur intersection. Cependant, dans un contexte ultramétrique où les disques fermés peuvent ne pas être compacts, une telle intersection peut être vide. Il en subsiste néanmoins une trace dans l'espace de Berkovich : un point, dit de type 4. Ces points se situent au bout de certaines branches de l'arbre et l'on ne peut les omettre sous peine de perdre la compacité locale de l'espace.

Il est frappant de constater que les points de type 4, qui sont les plus difficiles à se représenter et à étudier, présentent finalement un comportement très simple. Par exemple, la valeur absolue d'un polynôme est toujours constante au voisinage d'un tel point.

3. Espaces de Berkovich de dimension supérieure

Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué ultramétrique complet. En considérant des ensembles de semi-normes multiplicatives non plus sur $k[T]$, mais sur $k[T_1, \ldots, T_n]$, où n est un entier, on obtient l'espace affine de dimension n au sens de Berkovich. On peut alors définir des espaces plus généraux en considérant des fermés analytiques de ceux-ci (ou de leurs boules), puis des recollements de ces derniers. Les propriétés de compacité locale et de connexité par arcs locale que nous avons mentionnées pour la droite restent valables dans ce cadre étendu.

En dimension supérieure à 2, les espaces échappent à toute description explicite. On peut encore définir des points « génériques » de disques et même de parties plus compliquées (données par des inégalités entre polynômes), mais ceux-ci ne recouvrent qu'une petite partie des espaces, de plus en plus limitée au fur et à mesure que la dimension croît. Il est cependant remarquable que ces points contiennent une large part de l'information topologique. Par exemple, dans leurs travaux sur la contractibilité locale des espaces, Berkovich (*cf.* [1]) et Hrushovski-Loeser (*cf.* [5]) rétractent localement les espaces sur des sous-ensembles, homéomorphes à des complexes simpliciaux, qui sont formés de points génériques.

D'autre part, ces points génériques permettent également de réaliser différentes constructions combinatoires à l'intérieur des espaces de Berkovich. Le prototype de ce genre d'idées consiste à plonger $]0,1[^n$ dans $\mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}}$ en envoyant $(r_1, \ldots, r_n)$ sur le point générique de la boule de centre 0 et de poly-rayon $(r_1, \ldots, r_n)$. On peut ainsi plonger l'éventail d'une variété torique dans l'espace de Berkovich associé à cette variété (*cf.* [8]), l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe réductif dans l'espace de Berkovich associé à ce groupe (*cf.* [2] et [6]), etc.

Références

[1] V. G. Berkovich. « Smooth *p*-adic analytic spaces are locally contractible ». *Invent. Math.* **137**, nº 1 (1999), p. 1–84.

[2] V. G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*. **33**. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990, p. x+169.

[3] A. Chambert-Loir. « Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich ». *J. Reine Angew. Math.* **595** (2006), p. 215–235.

[4] D. Harbater. « Galois coverings of the arithmetic line ». In : *Number theory (New York, 1984–1985)*. Vol. 1240. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1987, p. 165–195.

[5] E. Hrushovski et F. Loeser. « Non-archimedean tame topology and stably dominated types ». *Annals of Mathematics Studies* **192** (sept. 2016).

[6] B. Rémy, A. Thuillier et A. Werner. « Bruhat-Tits theory from Berkovich's point of view. I. Realizations and compactifications of buildings ». *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **43**, nº 3 (2010), p. 461–554.

[7] L. Szpiro, E. Ullmo et S. Zhang. « Équirépartition des petits points ». *Invent. Math.* **127**, nº 2 (1997), p. 337–347.

[8] A. Thuillier. « Géométrie toroïdale et géométrie analytique non archimédienne. Application au type d'homotopie de certains schémas formels ». *Manuscripta Math.* **123**, nº 4 (2007), p. 381–451.

Jérôme Poineau

Université de Caen Normandie

jerome.poineau@unicaen.fr

Jérôme Poineau est professeur, spécialiste en géométrie arithmétique. Il a étudié différents aspects des espaces analytiques *p*-adiques au sens de Berkovich : topologie, équations différentielles, etc. Il a également réalisé des travaux de fondement sur la théorie des espaces analytiques sur les entiers. Il est membre des projets anr « globes » : anr-12-JS01-0007-01 et erc Starting Grant « tossiberg » : 637027.

Les enjeux de l'édition scientifique : une réaction à l'article de F. Hélein

• A. Djament

Dans le numéro 147 de la *Gazette*, Frédéric Hélein nous livrait sa vision des enjeux à venir concernant l'évolution du monde de l'édition scientifique. Aurélien Djament a souhaité réagir à ses propos.

J'ai apprécié le tableau détaillé dépeint par Frédéric Hélein sur l'édition scientifique dans le n° 147 de la *Gazette* et partage la majorité de ses analyses ; il y a toutefois un point important sur lequel je ne le rejoins pas : l'opinion selon laquelle « il ne serait pas souhaitable (et, de toute façon, illusoire) de vouloir exclure les éditeurs commerciaux, dont nous aurons toujours besoin. En effet eux seuls sont capables d'éditer des milliers de revues dans des délais raisonnables ».

Certes, se passer complètement des éditeurs commerciaux représente un défi immense, qu'on ne peut envisager de relever qu'à long terme. Mais est-ce vraiment impossible ? J'ai l'impression que c'est surtout la volonté politique qui manque. Comme F. Hélein le souligne à bon escient, l'une des priorités pour sortir des spirales délétères qui rongent une grande partie de l'édition scientifique est de remettre en cause la bibliométrie, l'un des fondements de nombreux maux. Il ne s'agit pas non plus d'une mince affaire, et une telle remise en cause va à l'encontre des politiques de recherche menées depuis des années, mais le jeu en vaut la chandelle. De fait, les présupposés idéologiques des partisans de l'évaluation bibliométrique quantitative recoupent en grande partie ceux des thuriféraires de l'édition scientifique commerciale : croyance en d'hypothétiques bienfaits universels de la concurrence généralisée, en l'incompétence ou tout au moins l'insuffisance intrinsèque du service public, volonté d'intégrer la recherche scientifique à la production marchande (ce qui constitue une aberration monumentale puisque cette dernière ne peut régir la circulation que de marchandises ou services reproductibles de façon standardisée, niant complètement la nature de la recherche et tendant à la transformer en une ingénierie de haut niveau à l'originalité tendant vers zéro).

Attaquer à la racine le mal de la bibliométrie – ce qui suppose un net changement de politique, avec l'implication significative de l'ensemble des collègues – permettrait de réaliser des transformations fastes dans notre secteur ouvrant la voie à une possible sortie complète, à long terme, de l'édition scientifique privée :

- le nombre d'articles publiés et de revues diminuerait considérablement (tandis que leur qualité s'accroîtrait), ce qui rendrait l'ampleur du basculement moins démesurée ;
- nos métiers de la recherche retrouveraient leurs multiples facettes (enseignement non dévalorisé par rapport à la production de papiers, diffusion scientifique démultipliée...), ce qui favoriserait l'implication active de toute la « communauté » pour trouver des solutions (techniques et politiques) adaptées aux évolutions de l'édition scientifique mais affranchies de l'obligation de verser des dividendes usuraires aux actionnaires de sociétés privées dans un domaine exclusivement financé par l'argent public, où la concurrence constitue un leurre absolu (deux articles scientifiques ne sont jamais interchangeables) ;
- sortir du modèle bibliométrique, vecteur de la politique d'austérité qui affaiblit gravement la recherche, est indissociable d'une lutte générale contre ladite austérité et pour un retour aux valeurs du service public : dans ce cadre, réclamer la création de postes statutaires d'administratifs ou d'informaticiens capables

d'effectuer le travail d'édition actuellement accompli par des entreprises commerciales n'aurait rien d'utopique, il serait dommage d'oublier cette composante dans la difficile mais nécessaire émancipation de la tutelle technocratique d'agences « indépendantes » comme l'ANR et de leur diktat du projet finalisé de court terme.

Aurélien Djament

CNRS, laboratoire de mathématiques Jean Leray, Nantes.

Des ondelettes pour détecter les ondes gravitationnelles

• E. Chassande-Mottin
• S. Jaffard
• Y. Meyer

Le 14 septembre 2015, les détecteurs américains LIGO effectuaient la première observation d'une onde gravitationnelle [1] issue de la coalescence de deux trous noirs. L'extraction du signal astrophysique des données de ces instruments a été réalisée par une variété de techniques d'analyse. L'une d'entre elles [11], qui a identifié le signal seulement trois minutes après l'acquisition des données, repose sur une décomposition en ondelettes des observations. Plus précisément, les observations sont décomposées sur des « bases de Wilson », bases orthonormées qui réalisent une analyse de Fourier locale du signal. Longtemps conjecturée, la construction explicite de telles bases en 1991 est l'aboutissement d'un long dialogue entre mathématiciens, physiciens et analystes du signal. Nous verrons pourquoi elles sont pertinentes pour la détection des ondes gravitationnelles.

Le fameux principe d'incertitude d'Heisenberg exprime le fait qu'une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent être arbitrairement bien localisées autour d'un point et d'une fréquence donnés, les gaussiennes réalisant le « meilleur compromis ». La mécanique quantique et le traitement du signal ont motivé la recherche de bases de $L^2(\mathbb{R})$ dont les éléments seraient *uniformément* bien localisés en temps et en fréquence. Ainsi, Dennis Gabor, dans son célèbre texte fondateur « Theory of communication » de 1946, propose de décomposer tout signal à l'aide de gaussiennes translatées en temps et en fréquence, c'est-à-dire sur les fonctions

$$g_{m,n}(t) = e^{2i\pi\alpha m t} g(t-\beta n), \qquad m,n,\in\mathbb{Z}, \qquad (1)$$

où g est la gaussienne

$$g(t) = 2^{1/4} e^{-\pi t^2}.$$

En prenant l'image de la musique, la décomposition sur un tel système réaliserait automatiquement une *dictée* musicale : un grand coefficient associé à la fonction $g_{m,n}$ indiquerait la position de la note (localisée autour de l'instant βn) et sa fréquence ($2\pi\alpha m$). Au début des années 1980, le rêve d'une base aussi simple s'effondre : suivant la valeur du produit $\alpha\beta$, le système de Gabor n'est pas générateur ou est redondant. Plus grave : le théorème de Balian-Low énonce l'impossibilité d'une base du type (1) dès que

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 |g(t)|^2\, dt < \infty \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2\, d\xi < \infty. \quad (2)$$

Le lecteur se persuadera aisément qu'en prenant $\alpha = \beta = 1$ et pour g la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,1]$, on obtient bien une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$, mais la fonction $\hat{g}$ est alors le sinus cardinal dont la transformée de Fourier décroît en $1/\xi$ et ne vérifie donc pas la seconde condition de (2). Le théorème de Balian-Low énonce qu'on ne peut pas espérer beaucoup mieux que cette analyse très brutale où l'on commence par « saucissonner » le signal en le restreignant à des intervalles de longueur 1, puis en réalisant ensuite une analyse en séries de

Fourier sur chaque intervalle. En 1987, le physicien K.G. Wilson (prix Nobel de physique en 1982 pour ses travaux sur la théorie de la renormalisation), a une idée lumineuse pour sortir de cette impasse : remplacer dans (1) l'exponentielle $e^{2i\pi\alpha mt}$ par des sinus ou des cosinus, c'est-à-dire autoriser la localisation des fonctions de base autour de *deux* fréquences de signes opposés, ce qui suffit pour que le théorème de Balian-Low ne s'applique plus. Il est remarquable que cette légère modification de perspective change aussi radicalement les données du problème : en 1991, la première « base de Wilson » explicite est construite [8] ; on dispose d'une unique « fenêtre » ψ, et la base orthonormée obtenue est du type

$$\psi_{0,n}(t) = \psi(t-n) \qquad n \in \mathbb{Z},$$

$$\psi_{l,n}(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\psi\left(t-\frac{n}{2}\right)\cos(2\pi l t) & \text{si } l+n \in 2\mathbb{Z}, \\ \sqrt{2}\psi\left(t-\frac{n}{2}\right)\sin(2\pi l t) & \text{si } l+n \in 2\mathbb{Z}+1. \end{cases}$$

On peut alors choisir ψ telle que ψ et $\hat{\psi}$ soient à décroissance exponentielle, ou bien l'une à support compact et l'autre à décroissance rapide. Une variante est constituée par les « ondelettes de Malvar » [12], dont la simplicité algorithmique est encore plus grande, puisque la base obtenue est de la forme

$$\psi_{l,n}(t) = \psi(t-n)\sin((l+1/2)\pi t), \quad n, l \in \mathbb{Z}.$$

Dans les deux cas, la décomposition réalise une analyse de Fourier « à fenêtre », et l'analyse sur de telles bases permet d'effectuer une *décomposition temps-fréquence* du signal. Bien que leur construction ait été motivée par des problèmes fondamentaux de physique théorique (en théorie de la renormalisation), les bases de Wilson attireront peu l'attention des physiciens ; la situation est différente du côté du traitement du signal où les ondelettes de Malvar, pour lesquelles on dispose de variantes où la taille de la fenêtre est adaptative [6], ont été utilisées pour la segmentation optimale de signaux sonores [7].

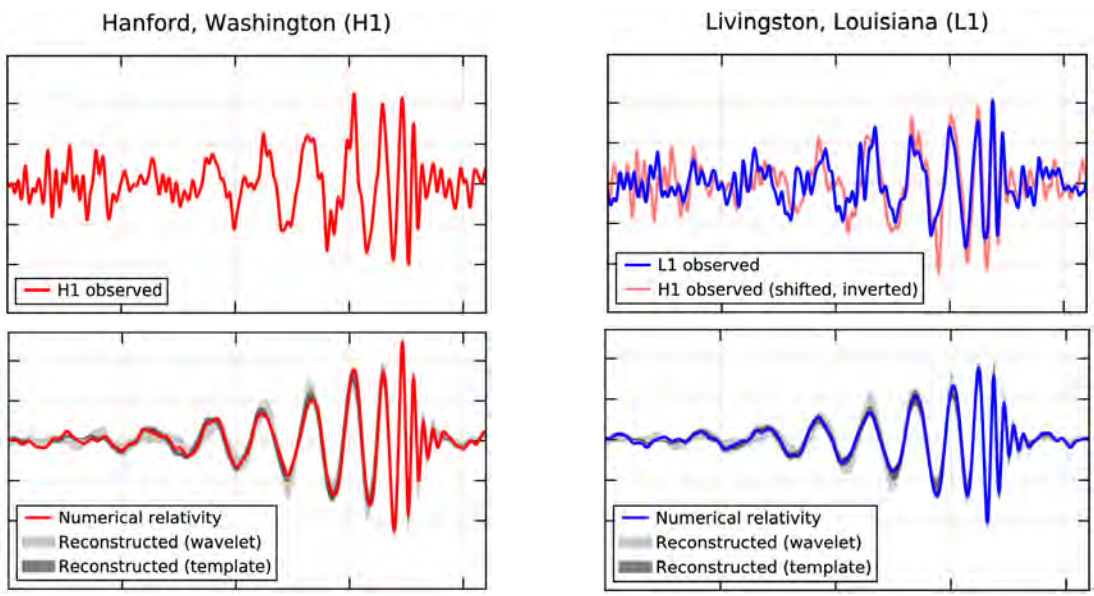
Les bases de Wilson sortent de l'oubli en 2012, lorsque Necula, Klimenko et Mitselmakher proposent de les utiliser pour la détection des ondes gravitationnelles [14]. Pour eux,« *the main advantages of the Wilson-Daubechies transform are the low computational cost, spectral leakage control, flexible structure of the frequency subbands, and the existence of the analytic time-delay filters, which are important for localization of the gravitational-wave sources in the sky.* » La variante qu'ils proposent utilise une ondelette dont la transformée de Fourier est à support compact, l'*ondelette de Meyer* [10], ce qui permet une meilleure séparation fréquentielle, et l'élimination d'artefacts sinusoïdaux dus, par exemple, aux résonances mécaniques dans les systèmes d'atténuation du bruit sismique. De plus, la représentation des données ainsi obtenue peut être calculée et inversée rapidement grâce à la Transformée de Fourier Rapide, deux éléments qui se traduisent par une plus grande efficacité numérique de l'algorithme de recherche.

Le signal gravitationnel issu de la coalescence de deux trous noirs est étroitement lié à la dynamique suivie lors de la spirale orbitale qui finira par la fusion de ses deux composants. La dynamique, et par conséquent l'onde gravitationnelle émise, peuvent être prédites avec une grande précision [2, 3, 4]. Le signal émis est quasi-périodique : il ressemble à une sinusoïde modulée, dont la fréquence f augmente, et se comporte, en première approximation, comme une loi de puissance $f \propto t^{-3/8}$, où t est le temps restant jusqu'à la fusion finale ($t = 0$). On peut alors effectuer une recherche ciblée de ce type de signaux en corrélant le modèle attendu avec les données, technique de détection communément appelée « filtrage adapté ». Le modèle donnant un meilleur accord aux données permet d'estimer les paramètres de la source astrophysique.

La forme particulière du signal gravitationnel se traduit aussi par une représentation temps-fréquence avec un motif caractéristique essentiellement concentré autour de la loi de fréquence [9]. Ceci motive des approches alternatives reposant sur la recherche de ces motifs temps-fréquence [5, 13].

La chaîne d'analyse [11] s'inspire de ces idées et exploite la parcimonie de la décomposition du signal dans une base de Wilson, où il y a peu de coefficients d'amplitude importante. Les principes généraux de la stratégie d'analyse sont les suivants. Les deux détecteurs LIGO à une distance d'environ 3000 km produisent deux mesures indépendantes des ondes gravitationnelles. La série temporelle délivrée par chacun de ces détecteurs est projetée sur une base de Wilson. Dans les deux décompositions obtenues, on repère les coefficients dont l'amplitude diffère significativement de ce qui est obtenu en présence de bruit uniquement, puis on vérifie la cohérence en fréquence et en phase des signaux ainsi extraits des données des deux dé-

Figure 1 – Onde gravitationnelle GW150914 enregistrée par les détecteurs LIGO de Hanford (H1, colonne de gauche) et de Livingston (L1, colonne de droite) le 14 septembre 2015 à 09 :50 :45 UTC. Les fréquences des séries temporelles sont filtrées pour ne conserver que la bande de fréquences la plus sensible du détecteur, et pour éliminer certaines « lignes spectrales » dues aux instruments de mesure. En haut à gauche : Signal H1 ; en haut à droite : Signal L1 (en bleu). À droite, les deux signaux sont superposés (après avoir effectué le décalage en temps et l'inversion de signe nécessaires du fait que les deux détecteurs de LIGO ne reçoivent pas l'onde au même instant et sont orientés différemment). En bas : les fonctions en bleu et rouge sont des ondes gravitationnelles prévues par la théorie, dont les paramètres ont été choisis pour être au plus proche de l'onde détectée. Les régions ombrées indiquent les reconstructions possibles de l'onde gravitationnelle à partir des signaux initiaux, en utilisant une méthode par ondelette (gris clair) et une estimation bayésienne utilisant le modèle astrophysique de la forme d'onde gravitationnelle de la fusion de deux trous noirs (gris foncé). Ces deux reconstructions se recouvrent à 95%.



Images reproduites à partir du DOI `http://dx.doi.org/10.7935/K5MW2F23`
et correspondant aux résultats annoncés dans [1]

tecteurs. Cette approche non-paramétrique permet non seulement de détecter les fusions de deux trous noirs, mais aussi d'autres phénomènes astrophysiques, y compris ceux dont on ne connaît pas la « signature » gravitationnelle a priori.

L'observation des ondes gravitationnelles par les détecteurs LIGO, qui seront bientôt rejoints par le détecteur franco-italien Virgo, ouvre une voie radicalement nouvelle pour explorer l'univers. En effet, jusqu'à maintenant, les phénomènes astrophysiques étaient essentiellement observés grâce au rayonnement électromagnétique qu'ils émettent. Les ondes gravitationnelles nous permettent d'observer des objets astrophysiques n'émettant pas de lumière, chose attendue pour les objets très denses comme les trous noirs. Les méthodes de recherche présentées ici permettent ainsi à cette nouvelle astronomie de révéler les sources inattendues.

Références

[1] B. Abbott et al. « Observation of gravitational waves from a binary black hole merger ». *Physical review letters* **116**, nº 6 (2016), p. 061102.

[2] L. Blanchet. « Gravitational radiation from post-Newtonian sources and inspiralling compact binaries ». *Living Reviews in Relativity* **9** (2006), p. 4.

[3] L. Blanchet et al. « Gravitational-radiation damping of compact binary systems to second post-Newtonian order ». *Physical Review Letters* **74**, nº 18 (1995), p. 3515.

[4] A. Buonanno et T. Damour. « Effective one-body approach to general relativistic two-body dynamics ». *Physical Review D* **59**, nº 8 (1999), p. 084006.

[5] E. Chassande-Mottin et P. Flandrin. « On the Time–Frequency Detection of Chirps ». *Applied and Computational Harmonic Analysis* **6**, nº 2 (1999), p. 252–281.

[6] R. R. Coifman et Y. Meyer. « Remarques sur l'analyse de Fourier à fenêtre ». *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématiques* **312**, nº 3 (1991), p. 259–261.

[7] C. D'Alessandro et al. « Speech signal segmentation via Malvar wavelets ». In : *Progress in wavelet analysis and applications, Y. Meyer and S. Roques Eds*. Editions Frontières, 1993, p. 305–308.

[8] I. Daubechies, S. Jaffard et J.-L. Journé. « A simple Wilson orthonormal basis with exponential decay ». *SIAM J. Math. Anal.* **22**, nº 2 (1991), p. 554–573.

[9] P. Flandrin. *Temps–Fréquence Traité des Nouvelles Technologies, série Traitement du Signal (2ème ed.)* Hermès, 1998.

[10] S. Jaffard, Y. Meyer et R. D. Ryan. *Wavelets*. Revised. Tools for science & technology. Society for Industrial et Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2001.

[11] S. Klimenko et al. « Method for detection and reconstruction of gravitational wawe transients with networks of advanced detectors ». *Phys. Rev. D* **93** (2016), p. 042004.

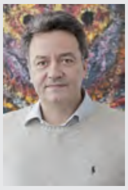
[12] H. S. Malvar. « Lapped transforms for efficient transform/subband coding ». *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on* **38**, nº 6 (1990), p. 969–978.

[13] M. Morvidone et B. Torrésani. « Time scale approach for chirp detection ». *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing* **1**, nº 01 (2003), p. 19–49.

[14] V. Necula, S. Klimenko et G. Mitselmakher. « Method for detection and reconstruction of gravitational wave transients with networks of advanced detectors ». *Journal of Physics :Conference Series* **363** (2012), p. 012–032.

Eric Chassande-Mottin

Eric Chassande-Mottin est chargé de recherche du cnrs au laboratoire Astroparticule et cosmologie où il est responsable du groupe « Gravitation ». Ses recherches portent sur l'analyse et l'exploitation des données des détecteurs d'ondes gravitationnelles terrestres, et du détecteur Virgo en particulier. Depuis 2014, il partage la coordination du groupe de la collaboration Virgo-ligo en charge des recherches de sources d'ondes gravitationnelles transitoires.



Stéphane Jaffard

Stéphane Jaffard est professeur de mathématiques à l'université Paris Est. Ses recherches portent sur les aspects tant théoriques qu'appliqués de l'analyse multifractale et des décompositions en ondelettes. Il a été président de la smf de 2007 à 2010.

Yves Meyer

Yves Meyer est professeur émérite à l'éns Cachan et membre de l'Institut. Le prix Gauss lui a été remis lors de l'icm de 2010, récompensant ses recherches en analyse harmonique, et plus particulièrement ses travaux concernant l'analyse par ondelettes.

Une journée autour de l'édition scientifique

Depuis le début des années 2000, le modèle dominant fondé sur l'abonnement à des revues papier a évolué vers un modèle d'abonnement électronique. Il se poursuit actuellement par une transformation complète et rapide du modèle économique sous-jacent dans l'édition scientifique. Les objectifs annoncés par le programme Horizon 2020 de la communauté européenne ne sont pas sans influencer le comportement des différents acteurs. L'article de F. Hélein dans la *Gazette* 147 de janvier 2016 proposait un regard synthétique sur ces questions et sur les enjeux de l'accès libre (open access). Il est aujourd'hui très difficile de prédire quel sera le comportement des chercheurs individuels, des institutions, et des éditeurs pour s'adapter à ces évolutions. Le laboratoire IRMAR de Rennes souhaite permettre aux mathématicien·ne·s de l'ouest d'accompagner cette actualité essentielle pour notre communauté, et organise une *Journée d'information et de réflexion sur l'édition scientifique* à l'IRMAR, à Rennes, le jeudi 29 septembre 2016.

Cette journée comprendra 5 exposés de 30 minutes suivis de 30 minutes de questions :

– 9h 30 - 10h 30 : Frédéric Hélein, le paysage actuel de l'édition scientifique
– 10h 30 - 11h 30 : Thierry Bouche, présentation du Cedram et autres nouvelles initiatives
– 11h 30 - 12h 30 : Laurent Guillopé, la SMF comme maison d'édition
– 12h 30 - 14h 00 : déjeuner
– 14h 00 - 15h 00 : Reinie Erné et Bas Edixhoven, la Fondation Compositio Mathematica
– 15h 00 -16h 00 : Claude Sabbah, un exemple de journal électronique, le Journal de l'École polytechnique

La journée est organisée par Xavier Caruso, Maryse Collin, Françoise Dal'Bo, Michel Gros, Frank Loray, Florian Méhats, Christophe Mourougane, Nicolas Raymond, Matthieu Romagny et San Vu Ngoc.

Les lettres reçues par J. Dixmier disponibles

• A. Guichardet

Jacques Dixmier a reçu, durant toute sa carrière de mathématicien, une importante quantité de lettres émanant de plus de deux cents mathématiciens du monde entier ; elles s'échelonnent des années 1940 aux années 2010. Il les a classées et en a fait don à la bibliothèque de mathématiques de l'École normale supérieure où tout un chacun peut les consulter ; en outre l'inventaire est consultable en ligne grâce au lien suivant `http://www.math.ens.fr/bibliotheque/archives_scientifiques/Archive_Dixmier_Annexe1.pdf`.

Précisons que cet inventaire ne contient que les lettres reçues par Dixmier, malheureusement pas celles écrites par lui. Leur grande majorité consiste en des échanges d'informations sur les sujets mathématiques étudiés par Dixmier, à savoir tout d'abord les algèbres d'opérateurs dans les espaces hilbertiens, puis les représentations des groupes de Lie, enfin la théorie des invariants. La plupart émanent de mathématiciens étrangers, allant de G.W. Mackey (1947), O. Nikodym (1950) et J. von Neumann (1953) jusqu'à P. de la Harpe (2000). Une seconde catégorie provient de collègues français comme H. Cartan, C. Chevalley, G. Choquet, J. Dieudonné, A. Grothendieck, D. Kastler, M. Lazard, P. Malliavin pour ne citer que les plus anciens. Enfin Dixmier a reçu de très nombreuses lettres de certains de ses élèves, annonçant leurs résultats ou posant quelques questions. Étant le responsable de cet inventaire, je serais très heureux qu'il trouve des utilisateurs, que, bien entendu, j'aiderais avec plaisir s'ils en éprouvent le besoin.

Jean-Jacques Risler est décédé le 17 février 2016 des suites d'une longue maladie, à l'âge de 75 ans. Évoquant quelques aspects de sa carrière, de son œuvre et de sa personnalité, les textes qui suivent rendent hommage à notre collègue et ami disparu.

Jean-Jacques Risler

- E. Brugallé
- I. Itenberg

Jean-Jacques, né le 12 juillet 1940, nous a quittés le 17 février 2016. Ancien élève de l'École normale supérieure, Jean-Jacques a soutenu sa thèse en 1975 à l'université Paris 7. D'abord recruté maître de conférences à l'université Paris 7, il devient professeur à l'université Paris 6 dans les années 80 ; professeur de classe exceptionnelle de 2003 à sa retraite en 2011, il était depuis professeur émérite. À certaines périodes de sa carrière, il fut aussi membre du Centre de Mathématiques de l'École polytechnique, et du Département de Mathématiques et Informatique de l'École normale supérieure. Son talent, son dynamisme et son enthousiasme contagieux auront été un atout non seulement pour les laboratoires et équipes de recherche auxquels il a appartenu, mais aussi pour la communauté mathématique française dans son ensemble. Très impliqué dans la vie institutionnelle des mathématiques, il fut notamment président de la Société Mathématique de France de 1996 à 1998.

Mathématicien de renommée internationale, lauréat en 1992 du prix « Charles Louis de Saulses de Freycinet » de l'Académie des Sciences, Jean-Jacques aura conservé une activité scientifique intense jusqu'à ses derniers jours. Il a été un des acteurs majeurs du développement de la géométrie algébrique et analytique réelle en France. Parmi les résultats fondamentaux qu'il a obtenus dans ce domaine, on peut citer ses travaux sur les idéaux de variétés algébriques réelles, sur la version locale du théorème de Harnack, ou encore sur la courbure des variétés algébriques réelles. Tout au long de sa carrière, il aura fait preuve d'une créativité admirable et d'une rare diversité dans le choix de ses thèmes de recherche. Il aura ainsi également apporté d'exceptionnelles contributions en géométrie sous-riemannienne, théorie du contrôle, géométrie tropicale... Une conférence internationale à Rio de Janeiro en août 2008 a rendu hommage à ses travaux mathématiques.

Jean-Jacques attachait aussi une grande importance à la diffusion et la popularisation de ses domaines de recherche. Il est l'auteur de plusieurs livres qui restent des références incontournables pour chercheurs et étudiants.

Jean-Jacques était aussi un violoncelliste de talent. Membre du trio Risler, il donnait régulièrement des concerts et invitait fréquemment amis et collègues à des récitals à son domicile. Le texte d'Yves André ci-dessous témoigne de l'activité musicale de Jean-Jacques.

Malgré ses réussites, Jean-Jacques était d'une grande modestie et faisait preuve d'une bienveillance particulière envers ses jeunes collègues. Sa gentillesse, sa générosité et sa bonhomie auront enchanté tous ceux qui, amis ou collègues, auront croisé sa route. D'un optimisme sans faille, Jean-Jacques était doté d'une vitalité et d'une joie de vivre extraordinaires qu'il aura su garder jusqu'à la fin. Son départ nous laisse avec une profonde tristesse, mais son importante œuvre scientifique et l'enthousiasme qu'il aura toujours su partager continueront à influencer durablement le développement des mathématiques.

Quelques souvenirs

• B. Teissier

Jean-Jacques est le premier normalien à être devenu membre du Centre de Mathématiques de l'École polytechnique, à la fin des années 1960 (une sévrienne, Monique Lejeune-Jalabert, l'avait précédé). Il est peut-être venu rejoindre notre petit groupe de singularités parce que la géométrie algébrique dominante à l'époque ne reconnaissait pas l'intérêt de la Géométrie algébrique réelle, sujet de sa thèse faite sous la direction d'Henri Cartan et qui, entre autres, créait l'analogue réel du théorème des zéros de Hilbert. Il m'a été rapporté que lors d'une commission, un éminent géomètre algébriste avait déclaré : « la Géométrie algébrique réelle, ça n'existe pas ! ». Comme, à l'exception de la bienveillance importante mais un peu lointaine de René Thom et de celle, plus proche, de Jean Giraud, c'était aussi le sentiment dominant en France à l'égard de la théorie des singularités à cette époque, nous étions faits pour nous entendre !

Et de fait, nous nous sommes très bien entendus, lui, Monique Lejeune-Jalabert, Lê Dũng Tráng, et moi. Nous avons discuté de singularités et de géométrie réelle depuis le début des années 1970, échangé des idées et des opinions mathématiques ou autres, souvent ri ensemble de l'humour de Jean-Jacques et écouté son violoncelle, parfois collaboré. Quand Jean-Jacques n'était pas d'accord avec une idée ou un argument, il avait une manière inimitable de dire : « ah mais noon ! » qui enveloppait la négation de gentillesse et de bonne humeur. Quand il expliquait des choses, c'était toujours avec une simplicité et une clarté merveilleuses. Il a apporté un magnifique démenti à la phrase que j'ai citée plus haut, et de plus sa curiosité l'a mené vers de nouveaux sujets comme la géométrie sous-riemannienne, la théorie du contrôle et la géométrie tropicale.

Il faut souligner la vivacité et la qualité de cette curiosité mathématique : c'est lui qui nous a le premier parlé des travaux d'Oleg Viro et de ce qui ne s'appelait pas encore Géométrie tropicale, c'est lui qui m'a enseigné ce que je sais des splines, quand nous organisions ensemble un séminaire de Géométrie effective au DMI de l'ÉNS Ulm dans les années 1990, séminaire dont il était le moteur et où l'on parlait aussi de géométrie algébrique réelle et robotique, toujours grâce à lui. C'est ce dernier sujet qui l'a conduit vers la géométrie sous-riemannienne. Dans ses publications on trouve non seulement de la géométrie algébrique et analytique réelle et complexe et de la théorie des singularités, mais de l'algèbre commutative, des codes correcteurs d'erreurs à la Goppa, de la robotique, un livre sur les méthodes mathématiques de la C.A.D., de l'algorithmique (théorie de la complexité), de la théorie du contrôle, des singularités de champs de vecteurs analytiques ou polynomiaux. Avec ses collaborateurs, il a obtenu des résultats profonds reliant la théorie des singularités et le 16e problème de Hilbert sur les configurations d'ovales algébriques dans le plan projectif réel, qui était devenu un de ses sujets de prédilection. Il avait un goût très sûr, une créativité exceptionnelle, et était très exigeant sur l'originalité de ses écrits ; je n'en connais pas, en théorie des singularités comme en géométrie réelle ou tropicale, qui n'apporte quelque chose de vraiment nouveau. Malgré cela, sa carrière n'a pas démarré très vite (le « ça n'existe pas ! » a fait des dégâts pendant des années), mais après son recrutement comme professeur à l'upmc dans les années 1980, il a pu donner toute sa mesure et je pense que l'on peut dire qu'il a vraiment, avec Michel Coste et Marie-Françoise Roy (qui sont plus jeunes), installé durablement les aspects les plus géométriques de la géométrie algébrique et analytique réelle dans le paysage mathématique français tout en apportant une contribution vraiment significative à d'autres domaines de la géométrie.

Non seulement il laisse une œuvre riche, importante et appréciée dans le monde entier et des élèves très actifs, mais sa curiosité, sa créativité, sa générosité et sa modestie marqueront longtemps de leur empreinte ses domaines de prédilection à travers tous ceux qui ont eu des contacts mathématiques avec lui, et ceux qui liront ses publications.

Un enthousiasme communicatif

• B. Bertrand

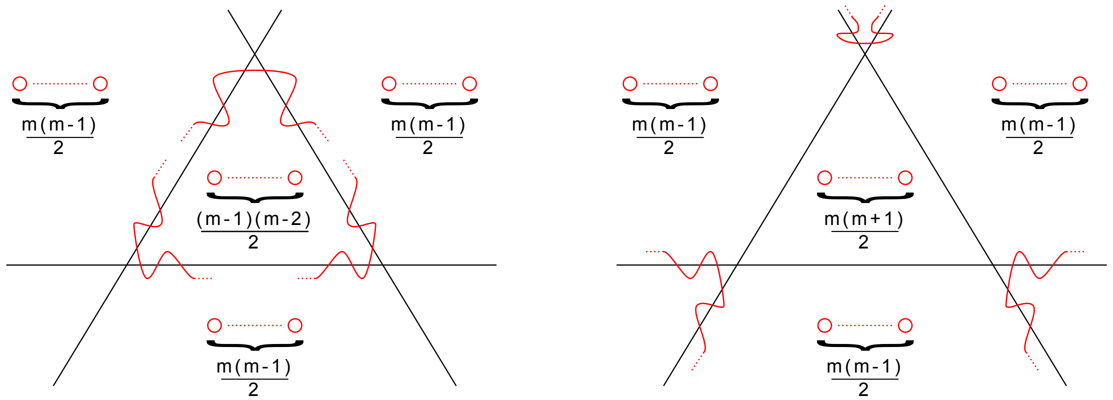
Depuis que je fais des mathématiques, Jean-Jacques a toujours été là. Dès la première école d'été de Géométrie Analytique et Algébrique Réelle à laquelle j'ai assisté, jusqu'à cet article pour lequel il m'avait rendu visite quelques semaines avant son décès. D'habitude il venait me voir à Toulouse, où notre petit groupe de recherche autour du seizième problème de Hilbert lui doit beaucoup. Cette fois-ci il est venu travailler chez moi, à Tarbes. Il m'avait dit un jour qu'il fallait que j'y organise quelque chose pour qu'il puisse y prendre le téléphérique (il avait peut-être dit funiculaire mais c'est bien téléphérique qui était resté comme boutade entre nous). Il a enfin pu constater la platitude parfaite de la ville et son absence totale de remontée mécanique. Il avait, comme toujours, de nouvelles idées, de nouvelles stratégies. Il n'a jamais arrêté de faire des mathématiques, toujours avec un plaisir contagieux. Il a toujours gardé, dans la vie comme en mathématiques, son enthousiasme communicatif et sa bienveillance. L'avant dernière fois que je l'ai eu au téléphone, il était très faible et m'a quand même demandé d'aller vérifier un énoncé dans le Bochnak-Coste-Roy [3], notre bible à nous géomètres algébristes réels.

C'était un mathématicien éclectique, mais c'est grâce à son dynamisme en géométrie algébrique réelle et à sa grande implication pour le développement en France des travaux autour du seizième problème de Hilbert que je l'ai connu. Rappelons succinctement que la première partie de ce problème concerne les dispositions possibles dans le plan projectif réel $\mathbb{RP}^2$, des composantes connexes d'une courbe algébrique réelle $\mathcal{C}$ donnée par un polynôme (réel, donc) de degré d fixé. L'inégalité de Harnack stipule que le nombre de composantes connexes d'une telle courbe est au plus $\frac{(d-1)(d-2)}{2}+1$ et les courbes, dites maximales, réalisant cette borne supérieure présentent un intérêt particulier.

Ceux de mes collègues qui le connaissaient à cette époque se rappellent ses cours avancés sur le sujet à la fin des années 70. Beaucoup d'entre nous ont à l'esprit ses séminaires Bourbaki [10, 9]. Il a propagé avec passion les idées et les questions sur ce seizième problème de Hilbert. Il en a étudié la version locale dans ses publications [13] et [5] avec Viatcheslav Kharlamov et Eugenii Shustin ou, plus récemment, avec Pedro González Pérez dans leur article [8] sur les lissages multi-Harnack.

Il s'est aussi intéressé à la courbure des variétés algébriques réelles. Il a montré, notamment, une inégalité similaire à celle de Harnack pour la courbure totale d'une hypersurface algébrique réelle de degré d dans $\mathbb{R}^n$. Cette courbure est majorée par un polynôme de degré n en d, et il a étudié l'optima-

Figure 1 – Position des courbes de Harnack simples par rapport aux trois axes de coordonnées du plan projectif réel $\mathbb{RP}^2$. Les cercles représentent toutes les composantes connexes de la courbe sauf celle qui intersecte chaque axe d fois comme sur le dessin.



Courbe de Harnack simple de degré $d = 2m$. *Courbe de Harnack simple de degré $d = 2m+1$.*

lité de cette borne supérieure (cf. [11, 12]). Il s'est passionné dès leur apparition pour la géométrie des amibes et la géométrie tropicale.

L'amibe d'un sous-ensemble de $(\mathbb{C}^\times)^n$ est, par définition, son image dans $\mathbb{R}^n$ par l'application associant à chaque coordonnée le logarithme de son module. Ses recherches sur les propriétés de courbure des variétés algébriques réelles l'ont naturellement conduit à travailler ensuite sur celles de leurs amibes et celles des variétés tropicales.

J'aimais les mathématiques qu'il faisait, les mathématiques qu'il aimait, l'élégance de ses exposés, des pistes qu'il découvrait et de ses preuves. Je voudrais décrire ici à titre d'exemple un résultat que je trouve très joli de son article [7] avec Mikael Passare. Ils y considèrent une courbe algébrique réelle $\mathcal{C}$ de $(\mathbb{R}^\times)^2$ définie par un polynôme réel P de degré d. On note $\mathcal{A}_\mathbb{R}(\mathcal{C})$ son amibe et $K(\mathcal{A}_\mathbb{R}(\mathcal{C}))$ sa courbure totale $\int_{\mathcal{A}_\mathbb{R}(\mathcal{C})} |k|$, où k est la courbure en un point. Ils établissent l'inégalité

$$K(\mathcal{A}_\mathbb{R}(\mathcal{C})) \leqslant d^2\pi$$

comparable, pour la courbure, à l'inégalité de Harnack pour le nombre de composantes connexes.

Ils montrent de plus que la courbure $K_\mathbb{R}(\mathcal{A}(\mathcal{C}))$ est maximale (égale à $d^2\pi$) si et seulement si la clôture de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{RP}^2$ est ce que Grigory Mikhalkin (cf. [6]) a appelé une courbe de Harnack simple : elle a le nombre maximal de composantes connexes et une disposition très particulière par rapport aux axes de coordonnées (cf. figure 1).

Il est aussi remarquable qu'en dimension supérieure, comme il l'a montré avec Erwan Brugallé et Grigory Mikhalkin (cf. [4]), les seules hypersurfaces de courbure maximale sont les hyperplans.

C'est dans ces directions que nos travaux communs avec lui et Lucía López de Medrano exploraient la courbure des variétés algébriques réelles, de leurs amibes et de leurs limites tropicales (cf. [2], [1]).

Jean-Jacques a marqué la géométrie algébrique réelle et la géométrie tropicale par ses résultats souvent très jolis et par l'impulsion qu'il a donnée à ces domaines, mais c'est aussi sa jovialité, son optimisme et sa gentillesse que nous appréciions beaucoup.

Deux générations de mathématiciens nous séparent, enfin, ça dépend beaucoup de comment on compte, mais plusieurs décennies en tout cas. C'est en bonne partie grâce à lui que notre génération de géomètres algébristes réels a découvert ces mathématiques qu'il aimait. Ce sont ses mathématiques, celles pour lesquelles Jean-Jacques a tant fait, qui nous ont réunis, c'est pour ces mathématiques qu'on se retrouvait dans des coins du monde renommés, improbables ou exotiques mais, c'est aussi grâce à cette passion commune que de jeunes mathématiciens ont formé un petit groupe de grands amis.

De Berkeley à la Turquie, de la Colombie au Lac Léman, de Madrid à Rio, de Bonn au Mexique où l'on aimait tant aller, notre petite bande se retrouvait un peu partout pour travailler ; et c'était une fête :

les mathématiques, le plaisir de repas partagés, de longues soirées à discuter, à danser, à profiter d'être ensemble, nous qui, depuis quelques années étions rarement tous sur le même continent. Il y avait aussi les concerts et les dîners chez lui, ou dans un des nombreux domiciles que l'un de nous occupait le temps d'une invitation, d'un semestre spécial ou d'une rencontre thématique.

Jean-Jacques avait l'art de raconter et le souci de transmettre, une grande bienveillance pour les jeunes et il n'était pas spécialement à cheval sur les convenances. Nous étions jeunes, insouciants, un peu remuants même, nous n'avions pas la révérence chevillée au corps. Il était d'une grande indulgence avec nous. Il est vite devenu le plus assidu de notre petit groupe d'amis.

Il était très attentionné et d'une grande gentillesse. Toujours très positif, toujours encourageant, il nous félicitait souvent. Nous bossions, nous nous baladions, nous discutions, nous rigolions. Nous avons beaucoup ri ! Partout nous étions bien, notre petit groupe de jeunes dont il faisait partie, naturellement, avec Claudia souvent, avec nos conjoint.e.s, les ami.e.s de passage et ceux qu'on rencontrait, nous étions bien.

Il était toujours trop humble quand on faisait des mathématiques, toujours jovial dans la vie, d'un optimisme inébranlable, souvent le dernier à aller se coucher pour profiter de la nuit jusqu'au bout. Malgré la maladie, il est toujours resté le même, continuant à travailler, à sortir, à voyager, tellement dynamique et confiant que je n'ai pas réussi à croire qu'il ne la surmonterait pas.

Il était partout avec la même aisance, la même simplicité. Nous aimions écouter ses histoires, pas toujours politiquement correctes. Il en avait beaucoup, forcément, il était jeune depuis 75 ans. Nous aimions être ensemble simplement avec lui et je crois que lui aussi était bien avec nous. C'est un grand ami que beaucoup d'entre nous ont perdu.

Références

[1] B. Bertrand, L. López de Medrano et J.-J. Risler. « On the total curvature of real algebraic curves, of their amoebas and of real tropical curves » (2016). En préparation.

[2] B. Bertrand, L. López de Medrano et J.-J. Risler. « On the total curvature of tropical hypersurfaces ». In : *Algebraic and combinatorial aspects of tropical geometry*. Vol. 589. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, p. 21–43.

[3] J. Bochnak, M. Coste et M.-F. Roy. *Géométrie algébrique réelle*. **12**. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]. Springer-Verlag, Berlin, 1987, p. x+373.

[4] E. Brugallé, G. Mikhalkin et J.-J. Risler. « Non-existence of torically maximal hypersurfaces » (juin 2015).

[5] V. Kharlamov, J.-J. Risler et E. Shustin. « Maximal smoothings of real plane curve singular points ». In : *Topology, ergodic theory, real algebraic geometry*. Vol. 202. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, p. 167–195.

[6] G. Mikhalkin. « Real algebraic curves, the moment map and amoebas ». *Ann. of Math. (2)* **151**, nº 1 (2000), p. 309–326.

[7] M. Passare et J.-J. Risler. « On the curvature of the real amoeba ». In : *Proceedings of the Gökova Geometry-Topology Conference 2010*. Int. Press, Somerville, MA, 2011, p. 129–134.

[8] P. D. G. Perez et J.-J. Risler. « Multi-Harnack smoothings of real plane branches ». *Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. (4)* **43(1)** (2010), p. 143–183.

[9] J.-J. Risler. « Complexité et géométrie réelle (d'après A. Khovansky) ». *Astérisque*, nº 133-134 (1986). Seminar Bourbaki, Vol. 1984/85, p. 89–100.

[10] J.-J. Risler. « Construction d'hypersurfaces réelles (d'après Viro) ». *Astérisque*, nº 216 (1993). Séminaire Bourbaki, Vol. 1992/93, Exp. No. 763, 3, 69–86.

[11] J.-J. Risler. « On the curvature of the real Milnor fiber ». *Bull. London Math. Soc.* **35**, nº 4 (2003), p. 445–454.

[12] J.-J. Risler. « Sur la courbure totale des variétés réelles ». *Rev. Semin. Iberoam. Mat. Singul. Tordesillas* **3**, nº 2 (2003), p. 39–46.

[13] J.-J. Risler. « Un analogue local du théorème de Harnack ». *Invent. Math.* **89**, nº 1 (1987), p. 119–137.

Jean-Jacques Risler musicien

• Y. André

Une autre face essentielle de l'activité et de la pensée de Jean-Jacques Risler était consacrée à la musique. Comme beaucoup de collègues le savaient, et ont eu l'occasion de l'écouter au violoncelle, je livre ici quelques souvenirs.

La musique a donné à Jean-Jacques plusieurs motifs de juste fierté.

Fier d'être le petit-fils du célèbre pianiste Edouard Risler cité par Proust, et d'appartenir à une dynastie musicienne.

Fier de ses frères musiciens de profession, et heureux d'avoir joué en trio avec eux. De sa pratique du trio, dont un disque nous garde témoignage, Jean-Jacques avait acquis un sens aigu de l'écoute, une maîtrise vis-à-vis de l'expérience du concert et « du métier » dans la préparation – j'ai beaucoup appris de lui là-dessus, à mon tour.

Il était fier aussi, bien sûr, de son magnifique instrument, un violoncelle italien de la fin XVII^{e}. J'ai toujours été frappé par la manière dont il considérait son instrument : comme un cadeau de la vie. Il le traitait avec la familiarité respectueuse qui lui était coutumière.

Mon histoire avec Jean-Jacques a commencé il y a une douzaine d'années. J'avais entendu parler mainte fois du talent musical de ce distingué collègue, mais c'est lui qui m'a proposé à l'improviste de jouer ensemble. S'en est suivie une décennie de dialogue musical, et d'amitié, qui se nourrissaient l'un l'autre ; ponctuée de concerts, privés et publics. Pour Jean-Jacques, musique rimait avec partage et convivialité.

Schubert, Brahms, Chopin, Rachmaninov : il aimait les Romantiques. Sa virtuosité lui permettait d'aborder une pièce aussi exigeante qu'émouvante que la sonate Arpeggione de Schubert, que nous avions jouée à l'IHÉS. Mais son romantique de prédilection, c'était Schumann. Il chérissait cette musique, sa « romantische Gemütlichkeit » un peu fantasque.

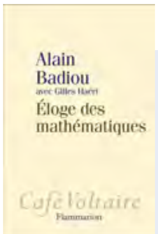
Jean-Jacques aimait aussi se frotter aux défis conceptuels de certaines œuvres plus abstraites : Webern, Beethoven. Telle cette cinquième sonate de Beethoven qui se termine par une fugue hallucinante, dont les voix semblent peu à peu diverger, défier le contrepoint et même la tonalité, et se précipiter dans un abîme silencieux, avant que la chevauchée ne reparte de plus belle, finalement maîtrisée sous la férule du compositeur. Nous l'avions jouée lors d'un concert que Jean-Jacques avait organisé chez lui pour ses amis « géomètres tropicaux ». Pour faire écho à sa franchise habituelle, peut-être devrais-je rappeler qu'on a entendu une note qui n'était pas dans la partition, au moment même de la béance de la fugue... la note stridente de son téléphone indiscret. Tant mieux, après tout ; car nous avons repris la fugue, autrement, et cela a été merveilleux.

C'était la dernière fois que nous avons pu jouer ensemble.

On a souvent souligné la proximité entre musique et mathématique. Les deux pratiques requièrent un engagement profond, une certaine distance lucide, et une grande rigueur. Jean-Jacques mettait tout cela dans sa pratique musicale. Il apprenait par cœur l'essentiel de son répertoire, pour se sentir plus libre disait-il, mais aussi, je crois, par une discipline liée au sérieux avec lequel il abordait la musique.

Si la musique est seule parmi les arts, comme la mathématique parmi les sciences, à posséder son écriture propre, on peut aussi dire pour la musique, comme on l'a dit pour la mathématique, que cette écriture ne comporte pas de signe pour exprimer des idées vagues. Il faut donc partir de la lettre de la partition et y retourner souvent.

Mais de la lettre à l'esprit de l'œuvre, il y a l'espace de liberté de l'interprétation. Et il n'était pas rare que nos avis diffèrent – sur les plans sonores, la dynamique, ou un tempo –, donnant lieu à de longues discussions aiguisées par son ironie courtoise. Il arrivait même que l'échange d'arguments face à la partition ne convainque ni l'un ni l'autre. Dans ce cas, reprenant en main violoncelle et piano, nous rejouions le passage deux fois, selon la conception de l'un et selon celle de l'autre. Là, à l'écoute, nous tombions toujours d'accord.



Éloge des mathématiques
Alain Badiou et Gilles Haéri
Flammarion, 2015. 124 p. isbn : 9782081352452

« Loin d'être l'exercice ingrat ou vain que l'on imagine, les mathématiques pourraient bien être le chemin le plus court vers la vraie vie, laquelle, quand elle existe, se signale par un incomparable bonheur. » Cette phrase quelque peu énigmatique fait la quatrième de couverture du livre d'Alain Badiou qui est bien connu, en tant qu'intellectuel engagé, pour ses prises de position et ses talents de débatteur. Voici donc de quoi piquer notre curiosité. Le titre même du livre nous interpelle : après l'Éloge de la folie, celui de la paresse et de bien d'autres choses encore, s'agit-il d'un exercice de style, d'un essai satyrique, ou d'un panégyrique ?

C'est en philosophe qu'Alain Badiou fait cet éloge, comme le montre déjà l'association des mots mathématiques et bonheur, ou vraie vie. Et cet éloge fait partie d'un ensemble de quatre livres, les trois autres faisant l'éloge de l'amour, du théâtre, de la politique. Il se présente sous la forme d'entretiens, Alain Badiou répondant aux questions de Gilles Haéri [a]. Ce qu'Alain Badiou appelle « la vraie vie », c'est celle qui s'inscrit sous le signe d'une idée, dans le contact d'une « vérité ». Il faut le lire, il faut le méditer pour comprendre. Mais on peut aussi faire de ce livre une lecture moins savante et aimer qu'il écrive que la joie « qu'on éprouve en mathématique est immédiatement universelle : vous savez que ce que vous éprouvez là, n'importe qui, suivant le raisonnement, le découvrant, va l'éprouver aussi ». On a l'impression de s'y reconnaître, même si on doute un peu de cette universalité du plaisir qu'on peut éprouver. Alain Badiou, toutefois, se défend d'en conclure que les mathématiciens sont plus heureux que les autres, « parce qu'il n'est pas sûr que les mathématiciens créateurs fassent, du point de vue de l'existence, de la vie, le meilleur usage des mathématiques ». C'est un des quelques clins d'œil un peu moqueurs qu'on trouvera dans ce livre, qui est aussi, en quelque sorte, un éloge des mathématiciens.

En partant de la quatrième de couverture j'ai commencé par la fin du livre, qui n'est pas la plus facile. Les trois premiers chapitres, intitulés respectivement « Il faut sauver les mathématiques », « Philosophie et mathématiques ou l'histoire d'un vieux couple » et « De quoi parlent les mathématiques ? », sont beaucoup plus accessibles. Ils constituent un plaidoyer vibrant pour les mathématiques, dans lequel nous entraîne Alain Badiou avec son style bien particulier, fait de virtuosité et franc-parler. Ils alternent les souvenirs personnels (à propos de la droite d'Euler : « que l'on puisse démontrer une chose pareille me ravissait »), l'histoire croisée de la philosophie et des mathématiques, les exemples de démonstrations. Pensons-nous que les mathématiques devraient faire partie de la culture générale ? Souhaitons-nous voir réhabilitées les démonstrations dans l'enseignement ? Sommes-nous attachés à l'idée d'universalité des mathématiques, au-delà des frontières ? Autant de questions sur lesquelles la lecture de ce livre viendra nourrir nos réflexions.

Même si le livre s'adresse à un plus vaste public, l'un des buts d'Alain Badiou est de parler mathématiques aux philosophes pour déplorer qu'ils s'en soient éloignés, en égratignant au passage les nouveaux philosophes. Il absout les mathématiciens de toute responsabilité dans cet éloignement. Mais, dit-il, « dès que vous entrez dans la question "Qu'est-ce que les mathématiques ?", vous basculez dans la philosophie, vous faites de la philosophie ».

Seul le quatrième chapitre est d'un abord difficile, en nous faisant entrer dans sa métaphysique de l'infini pour comprendre les liens entre la théorie des ensembles et ce qu'il appelle multiplicité. Mais là encore Alain Badiou nous invite à une excursion qu'on ne regrette pas, qui donne envie d'aller plus loin, et aussi de se plonger ou replonger dans les classiques, Platon, Spinoza...

Les recensions du livre dans la presse généraliste présentent avant tout Alain Badiou comme un défenseur inconditionnel de l'enseignement des mathématiques. « Badiou veut sauver les mathématiques », titre *Marianne*[b]. Après des suggestions qui nous sont familières mais ici exprimées de façon particulièrement convaincante, il fait dans la conclusion une suggestion surprenante pour l'enseignement des mathématiques, celle de « s'armer de la philosophie. Parce que, en fin de compte, l'intérêt des mathématiques, c'est aussi s'interroger sur ce que sont les mathématiques. ».

Qu'on le suive ou non jusque là, il y a là comme ailleurs matière à réfléchir, au-delà du grand plaisir qu'on éprouve à la lecture de ce livre. La position d'Alain Badiou est singulière du fait qu'il n'appartient pas au monde des mathématiques sans en être extérieur. Bien au contraire, il possède avec les mathématiques une familiarité étonnante. Il exprime avec justesse le plaisir qu'on peut éprouver devant une démonstration ou le sentiment de beauté dont on peut être envahi. C'est une lecture stimulante.

Aline Bonami
Université d'Orléans

a. Le livre fait suite à une rencontre de la Villa Gillet à Lyon en 2014 `http://www.villagillet.net/portail/la-villa-toute-lannee/detail/article/eloge-des-mathematiques-alain-badiou-en-dialogue-avec-gilles-haeri/`

b. `http://www.marianne.net/philippepetit/badiou-veut-sauver-les-mathematiques-100236692.html`


PRIX DE THÈSE
du laboratoire de mathématiques
de l'université Blaise Pascal
Date limite de candidature
15 juin 2016
Ce prix d'un montant de 4000 € récompense une thèse de mathématiques fondamentales soutenue entre le 1er janvier 2014 et le 31 décembre 2015.
http://recherche.math.univ-bpclermont.fr/evenements/prix_these_lmbp.php
prix.lmbp@math.univ-bpclermont.fr

Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (`http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/`).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (`gazette@dma.ens.fr`), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier TEX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe LATEX *gztarticle* fournie par les distributions TEX courantes (TEX Live et MacTEX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiKTEX), et sinon téléchargeable depuis la page `http://ctan.org/pkg/gzt`. Sa documentation détaillée se trouve à la page `http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf`. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution TEX à jour.

Classe LATEX : Denis Bitouzé (`denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr`)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (`n.lozanne@free.fr`)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.