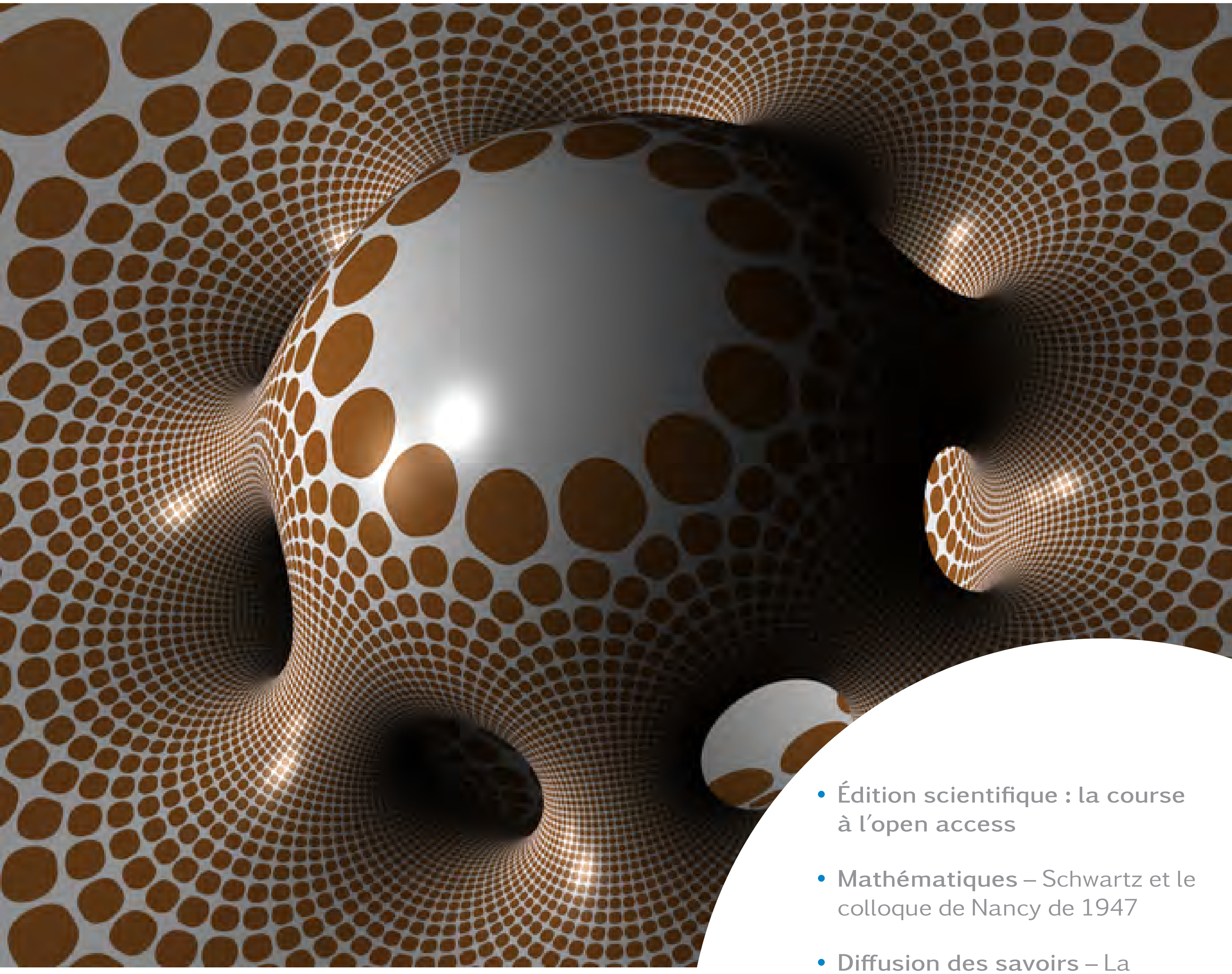
JANVIER 2016 – N° 147

la Gazette des Mathématiciens



- **Édition scientifique : la course à l'open access**
- **Mathématiques** – Schwartz et le colloque de Nancy de 1947
- **Diffusion des savoirs** – La mauvaise porte, une interview d'Adrián Paenza
- **Raconte-moi...** un groupoïde de Lie

Société Mathématique de France
SMF

la Gazette
des Mathématiciens

Comité de rédaction

Secrétariat de rédaction :
SMF – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@dma.ens.fr – http://smf.emath.fr

Directeur de la publication : Marc Peigné

ISSN : 0224-8999

Société Mathématique de France
SMF

À propos de la couverture. L'image représente la surface de Lawson $\xi_{6,1}$ qui est une surface minimale de $\mathbb{S}^3$ de genre 6. Elle est vue ici au travers d'une projection stéréographique de $\mathbb{S}^3$ vers $\mathbb{R}^3$. (crédit : Sebastian Heller, Nick Schitt et Lynn Heller).

Nº 147

Éditorial

Chères lectrices, chers lecteurs,

Il est difficile de commencer cet éditorial sans avoir une pensée pour les évènements tragiques qui ont bouleversé la fin de l'année 2015. Une année folle qui aura fait tourner les têtes, mais espérons-le par ailleurs, également les pages de la *Gazette*.

Depuis quelque temps, le petit monde de l'édition scientifique est en ébullition. Des éditeurs commerciaux qui jouent les gros bras, des scientifiques bénévoles qui commencent à se rebiffer, des bibliothèques agonisantes et pour jouer les arbitres des pouvoirs publics qui sont... ce qu'ils sont. Bref, un vrai petit air de far west au pays de l'open access. La *Gazette* fait régulièrement échos à cette problématique qui touche de plein fouet notre communauté. Nous lui consacrons ici un dossier.

De son côté, la rubrique « mathématiques » part en quête de surfaces minimales, d'une équation de la chaleur jouissant du don d'ubiquité, et d'un colloque d'analyse harmonique qui aurait changé la carrière du célèbre mathématicien aux prises avec son siècle, Laurent Schwartz. Nous vous racontons également les groupoïdes de Lie.

Petite devinette. Il est mathématicien. Omniprésent sur les ondes et les chaines de télévision. C'est... c'est ? Perdu ! Cela se passe en Argentine et il s'agit d'Adrián Paenza. Mathématicien et journaliste, il a reçu en 2014 le prix Leelavati de l'Union Mathématique Internationale pour son action concernant la dissémination des mathématiques. Cet automne, il a donné un exposé à l'ambassade de France intitulé « La mauvaise porte », qui a attiré notre attention. La *Gazette* lui ouvre la sienne.

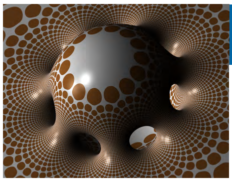
L'Institut Henri Poincaré est un haut lieu d'expression pour les mathématiques en France. Parmi les nombreux évènements qu'accueille l'IHP chaque année, nous revenons dans ces pages sur deux d'entre eux : une rencontre dédiée aux femmes africaines et une journée en l'honneur du vingt-cinquième anniversaire de l'European Mathematical Society.

Enfin, David Holcman monte à la tribune pour livrer un plaidoyer en faveur d'une plus grande interaction entre physique, mathématique, et biologie, et d'une prise de conscience des enjeux économiques sous-jacents.

En vous souhaitant une excellente année 2016 et une agréable lecture,

Boris Adamczewski

la Gazette des Mathématiciens



Nº 147

Sommaire

la Gazette des Mathématiciens

Société Mathématique de France SMF

Nº 147

Mot du président

Chères collègues, chers collègues,

L'année 2015 a été marquée par une intensification au niveau mondial des actes terroristes, notamment la série d'attentats de Paris, en janvier puis en novembre. Ces attaques sont contraires aux valeurs de liberté d'expression, sous toutes ses formes, auxquelles notre communauté mathématique tient tant. Forts des relations que cette dernière noue avec les mathématiciennes et mathématiciens du monde entier, dans le respect des convictions politiques, culturelles et religieuses de chacun, nous avons aujourd'hui plus que jamais un rôle à jouer, collectivement et individuellement, comme acteur vigilant face aux dérives et crispations diverses que l'on voit poindre un peu partout. Les réponses non mûries qui surgissent dans l'effervescence de l'actualité ne résoudront pas les problèmes auxquels nous devons faire face, d'autant qu'ils sont très souvent mal posés ; les débats qui agitent notre classe politique et la société tout entière depuis quelques semaines en sont la cruelle démonstration. C'est donc une année de vigilance à toutes ces dérives que je vous souhaite tout d'abord.

La crise économique que nous traversons durcit le climat de tension que nous connaissons. Or nous savons que notre discipline est pourvoyeuse d'emplois et peut jouer un rôle majeur pour relever les défis économiques, environnementaux et sociétaux qui se présentent. La SMF, en lien étroit avec la SMAI et la SFDS, s'emploie depuis de nombreuses années à participer au rayonnement de notre discipline, sous tous ses aspects ; c'est aujourd'hui plus que jamais un devoir citoyen qui s'impose à chacun de nous, dans notre travail quotidien d'enseignant et de chercheur.

Les mois qui viennent seront marqués par la mise en place des programmes des collèges et lycées et des concours d'enseignement, avec espérons-le, quelques inflexions à venir. Comme membre de la Commission Française de l'Enseignement des Mathématiques (CFEM), nous avons participé activement tout au long de l'année 2015 aux échanges avec le ministère sur ce sujet. Force est de constater que nous n'avons pas été entendus sur certains points ; de nombreux collègues ont contacté la SMF à ce sujet et nous allons, dans les mois qui viennent, porter les inquiétudes qui émergent. Ce mot se veut donc aussi une invitation à faire remonter vos réflexions pour qu'elles soient (peut-être ?) mieux entendues.

L'année 2016 sera exceptionnelle pour la SMF avec son premier congrès, du 6 au 10 juin à Tours ; cette vieille dame de 144 ans vous proposera un panorama non exhaustif de la mathématique française, de ses fondements à ses applications. À l'heure où la spécialisation thématique impose trop souvent ses règles, avec des rendez-vous très (trop ?) ciblés, un tel congrès se veut une vitrine de la diversité ; je compte sur l'implication de chacun d'entre vous pour faire de ce rendez-vous un réel succès.

Je vous souhaite une bonne année 2016, empreinte de mobilisation et de vigilance.

Le 1er janvier 2016

Marc Peigné, président de la SMF

De l'abonnement vers le libre accès, un passage obligé pour les revues scientifiques ? Les enjeux d'un nouveau modèle économique et un exemple réflexion sur le sujet : les Annales de l'Institut Fourier.

La ruée vers l'or des publications ou comment passer des revues avec abonnements aux articles en accès libre

• F. Hélein

En matière de publication scientifique, la dernière décennie a été celle du passage des abonnements à des revues sur papier (avec éventuellement un accès électronique en supplément) aux abonnements électroniques (avec éventuellement un supplément pour le papier).

La décennie en cours est celle d'un bouleversement sans doute encore plus profond, remettant en cause la chaîne de financement de l'édition scientifique et donc, au-delà, l'équilibre des pouvoirs et des droits entre les éditeurs commerciaux, les bibliothèques, les laboratoires et in fine les chercheurs. En effet, conformément aux objectifs « Horizon 2020 » fixés par la communauté européenne, les publications scientifiques devront bientôt être en accès libre et gratuit. Mais la question est de savoir comment y parvenir.

1. La voie « verte » ou le « Green Open Access »

La solution vers laquelle la transition est la plus simple en l'état actuel est celle dite du « Green Open Access » ou « Voie Verte ». Dans ce modèle, les auteurs continuent à publier leurs articles dans des revues traditionnelles auxquelles des bibliothèques sont abonnées mais, après une courte période, dite d'embargo, l'article devient accessible librement et gratuitement sur une plate-forme en ligne. Bien que simple à mettre en œuvre, cette solution nécessite un accord des éditeurs et c'est là, et dans la détermination de la période d'embargo, qu'une volonté politique des institutions publiques est nécessaire. De nombreux pays se sont déjà dotés d'une législation précisant les règles d'embargo, les premiers ayant été les États-Unis pour les publications en médecine (PubMed Central). En France des limites aux périodes d'embargo devraient être fixées par la future loi sur le numérique, qui a fait l'objet d'une consultation nationale du 26 septembre au 18 octobre 2015 et qui est actuellement examinée à l'Assemblée nationale [1]. Cependant il faut noter que, bien qu'elle soit relativement satisfaisante, la voie verte pourrait ne pas être stable à long terme sur le plan économique, à moins qu'elle ne soit accompagnée d'une politique plus élaborée. En effet, rien ne garantit que, dans dix ans, les bibliothèques continueront à payer des abonnements. Il est ainsi possible que ce modèle ne puisse être envisagé qu'à titre de solution transitoire, vers un ou plusieurs modèles plus stables. Mais lesquels ?

1. Mais peut-être n'est-il pas nécessaire de voter une nouvelle loi et il suffirait d'appliquer le code de la propriété intellectuelle (voir plus loin) ?

2. La voie « dorée » ou le « Gold Open Access »

Ce terme désignait il y a plus d'une dizaine d'années un projet défendu essentiellement par les scientifiques soucieux de libérer les revues du joug de plus en plus coûteux des éditeurs commerciaux, grâce aux possibilités offertes par internet. L'idée était simplement de créer des revues électroniques offrant exactement les mêmes services que celles que nous connaissons, à la différence que n'importe qui y aurait accès gratuitement. Un tel projet avait au début de quoi inquiéter les éditeurs commerciaux, sauf qu'en l'absence de politique de financement ambitieuse (vu que l'édition d'un article, même économique, a un coût), il n'a vu le jour que très partiellement. Le beau qualificatif « doré » fut en revanche détourné et perverti par l'industrie de l'édition, puisque désormais le terme « Gold Open Access » désigne le fait de rendre un article gratuitement accessible, à la condition que ses auteurs (plus exactement les institutions finançant leur recherche) payent des frais de publication (appelés Article Processing Charges (APC)). Il serait donc moins ambigu de parler de système « auteur-payeur ».

3. Le pari britannique

En Grande-Bretagne, suite au « rapport Finch » paru en juin 2012, le gouvernement a promulgué une loi en avril 2013 qui oblige tout chercheur dont le travail est financé par une institution britannique à rendre les résultats de sa recherche gratuitement accessibles en choisissant (suivant un protocole précis) l'un des deux modèles précédents, c'est-à-dire soit la voie verte, soit le système « auteur-payeur ». Un fonds spécial a été créé pour financer le surcoût important de cette opération. La Grande-Bretagne, dont la production scientifique représente 6% de la production mondiale, fait ici un pari [2] : qu'elle sera suivie par les autres pays et que, lorsque ce sera le cas, les coûts des abonnements baisseront, voire disparaîtront. Or il faut souligner que, comme on l'a vu plus haut, le modèle vert sous sa forme brute risque d'être instable économiquement, contrairement au modèle doré [3]. Il est donc prévisible qu'en l'absence de politiques complémentaires, le modèle doré finisse par s'imposer en Grande-Bretagne au détriment des autres voies. Comme nous allons le voir plus loin, il y a lieu de s'inquiéter de ces choix pour des raisons économiques et scientifiques.

La politique britannique, qui consiste finalement à accepter le modèle « Gold Open Access » promu par les éditeurs, a été partiellement suivie à des degrés différents aux Pays-Bas, en Autriche et en Allemagne. En particulier ces trois pays ont conclu très récemment des accords avec Springer dans lesquels les frais d'accès (i.e. les abonnements) et les APC sont réglés globalement au niveau national. Cela semble confirmer, hélas, le fait que le modèle « auteur-payeur » risque de devenir la norme internationale. À vrai dire, c'est déjà plus ou moins le cas dans certaines disciplines scientifiques comme la biologie ou la médecine.

À présent il est de mon devoir d'expliquer pourquoi il faut se faire du souci si le modèle « Gold Open Access » s'impose, en commençant par le pire :

4. Le Gold Open Access, version « Far West »

Ce scénario est simplement celui que l'on observe aujourd'hui et qui s'installera définitivement (comme c'est déjà le cas dans certaines disciplines) si aucune politique n'est conçue au niveau des institutions publiques et si on laisse les éditeurs commerciaux dicter leurs règles.

La première question qui se pose est de savoir qui paye les APC, c'est-à-dire les frais de publication, et qui décide de la répartition des fonds pour cela et comment. On peut craindre à ce sujet que le budget dont disposera un chercheur pour publier dépende de l'institution à laquelle il appartient ou de sa participation à des contrats ANR ou ERC. Une première conséquence de cela est que les flux de financement qui vont vers la documentation et vers la recherche deviennent complètement illisibles. D'ailleurs aujourd'hui personne au sein des institutions françaises n'est capable d'estimer, même grossièrement, le montant total des APC payés par les chercheurs travaillant dans des laboratoires de

2. Ce pari n'est sans doute pas aussi risqué qu'il n'y paraît : la Grande-Bretagne est un pays doté d'une industrie de l'édition prospère, concentrée, puissante et qui regroupe des milliers d'emplois. Celle-ci bénéficie donc immédiatement de la politique choisie par le gouvernement. Il en est de même pour les Pays-Bas et l'Allemagne qui semblent s'engager sur la même voie, mais pas pour la France ou d'autres pays européens.

3. Cependant la plupart des expériences de modèles verts (aux USA pour la médecine et en Grande-Bretagne) semblent plutôt indiquer le contraire, du moins à court terme.

notre pays (mais les éditeurs doivent le savoir), ce qui nous met bien mal à l'aise pour concevoir une politique économique. Une deuxième conséquence, sans doute plus grave, est l'apparition d'inégalités entre les chercheurs quant à leurs droits à publier.

Une deuxième question est de savoir combien l'on devra payer. Excluons d'emblée des journaux comme *Science* ou *Nature*, pour lesquels les APC avoisinent les 5 000 dollars. Excluons également les journaux dit « prédateurs », constituant une espèce actuellement en pleine prolifération, dans lesquels l'article n'est visiblement examiné ni par un referee, ni par un quelconque groupe ressemblant de près ou de loin à un comité scientifique et qui publient n'importe quoi contre paiement d'APC se situant en général autour de 300 dollars. Deux types de revues occupent alors ce qui reste du marché des revues Open Access : celles qui sont créées à cet effet par les éditeurs et les revues anciennes. Cette division du marché permet aux éditeurs de gérer la transition du système des abonnements au système des revues en accès libre. En effet il serait difficile de transformer du jour au lendemain une revue comme, par exemple, *Inventiones Mathematicae* en une revue Open Access avec APC. Les éditeurs ont trouvé la solution à ce problème tout en faisant encore plus de bénéfices ! D'une part ceux-ci lancent de nouvelles revues intégralement en Open Access. Mais comme celles-ci sont pour la plupart peu attractives car elles ne jouissent pas en général du prestige et du renom de beaucoup de revues traditionnelles, les éditeurs proposent des tarifs relativement bas pour les APC (de l'ordre de 300 dollars), afin d'attirer les articles. D'autre part, pour les revues traditionnelles, les éditeurs ont trouvé un procédé merveilleux : le système hybride, joliment appelé *Open Choice* chez Springer. Dans ce système, les bibliothèques continuent de payer les abonnements aux revues, mais l'auteur peut immédiatement rendre son article accessible gratuitement aux lecteurs sur le site de l'éditeur s'il verse des APC de l'ordre de 2 000 dollars. Cette offre devrait logiquement se répercuter par une baisse des coûts des abonnements que, malheureusement, on n'observe guère. Il s'agit donc d'une pratique assez scandaleuse et je ne peux que rappeler aux collègues qui ne le savent pas encore qu'il suffit de déposer les versions préliminaires aux publications sur arXiv ou sur HAL pour que leurs contenus soient accessibles à tous. Pour conclure il faudrait préciser que la division du marché telle que je l'ai présentée est schématique et que certaines frontières (notamment entre journaux prédateurs et nouveaux journaux Open Access créés par des éditeurs qui ont une réputation de sérieux à défendre) sont parfois assez floues.

5. Éviter le « far west » : le Gold Open Access régulé

Pour éviter le chaos évoqué plus haut, certains pays ont pris les devants et défini une politique globale à l'échelle nationale. C'est, on l'a vu, le cas de la Grande-Bretagne et, dans une certaine mesure, des Pays-Bas, de l'Allemagne et de l'Autriche. Cette politique séduit plusieurs décideurs en France, notamment la présidence du consortium *Couperin*[4] et les rédacteurs du rapport de l'Académie des Sciences « *Les nouveaux enjeux de l'édition scientifique* » publié en 2014 et sur lequel *Couperin* s'appuie. La logique à la base de ce rapport peut être résumée par le slogan « *ne pas laisser les auteurs seuls face aux éditeurs* »[5], qui semble a priori plein de bon sens. Ses conclusions sont de négocier au niveau national un règlement global des APC, délivrant ainsi le chercheur des démarches de paiement des APC et permettant aussi de fixer une fois pour toute une enveloppe globale de la dépense en APC, au lieu de règlements individuels d'APC impossibles à chiffrer et en constante augmentation (ou, au moins, d'encadrer le montant des APC en leur fixant un plafond).

Sur le plan économique cette solution pourrait être satisfaisante si nous étions sûrs de maîtriser la hausse des dépenses et si nous partions d'une situation saine (i.e. l'équation d'évolution et les conditions initiales). Or ce n'est absolument pas le cas, comme le montre l'expérience britannique, pour laquelle les coûts supplémentaires des APC ont dépassé les estimations initiales. Ainsi, pour la période 2013-2014, plus de 16 millions de Livres Sterling

4. Couperin : Consortium Unifié des Établissements Universitaires et de Recherche pour l'Accès aux Publications Numériques, dont la mission est de représenter les établissements de l'enseignement supérieur et de la recherche dans les négociations avec les éditeurs.

5. Slogan emprunté au président de *Couperin*.

6. cf. DIST Étude N. 4, pages 23 et 24.

7. Tout cela malgré le fait que l'agence nationale britannique en charge des négociations, le JISC, discute avec chaque éditeur afin d'obtenir des réductions sur les APC corrélées aux dépenses d'abonnement.

ont été dépensés en APC au niveau national, auxquels il faut ajouter plus de 9 millions de Livres en coûts indirects pour les universités [6], [7]. Mais le plus grave est que ces surcoûts s'ajouteraient à ceux des abonnements que nous payons aujourd'hui, lesquels ont déjà atteint un niveau inacceptable et injustifié. De plus ces coûts excessifs se trouveraient ainsi « sanctuarisés ». En effet il faut rappeler que la hausse constante des coûts des abonnements combinée à la baisse également constante des crédits des bibliothèques sont un véritable problème et représentent un danger dans des disciplines comme les mathématiques où les petits éditeurs et les revues académiques jouent un rôle primordial : liées par des accords nationaux inter-discliplinaires avec les très gros éditeurs comme Elsevier et Springer, les bibliothèques n'ont pas d'autre choix que de renoncer aux abonnements aux petits éditeurs et aux sociétés savantes. Tous ces « petits détails » sur la transition vers le modèle Gold Open Access prôné dans le rapport de l'Académie des Sciences (qui devraient chacun faire l'objet de négociations difficiles avec les éditeurs) sont malheureusement négligés dans ce rapport.

S'il faut explorer à fond une telle politique, reconnaissons au moins que les britanniques ont été suffisamment cohérents pour ne pas faire les choses à moitié puisque les règles qu'ils ont établies s'appliquent à tous les éditeurs. En revanche, en concluant des accords pour payer globalement à l'avance des APC avec Springer uniquement, les Pays-Bas, l'Allemagne et l'Autriche donnent à cet éditeur un avantage certain sur ses concurrents et faussent ainsi le marché naissant des APC (c'est bien la raison des appels d'offre). Pour ce qui en est de la France, il est préoccupant d'observer que, à l'instar des pays précédents, le consortium Couperin envisage sérieusement d'inclure dans les négociations avec l'éditeur Springer un acquittement global des APC.

Ainsi une politique de Gold Open Access régulé ne résoudrait pas les difficultés d'un système de publication devenu malade depuis que les gros éditeurs ont commencé à abuser de leur situation de monopole, mais conduirait à les perpétuer en les aggravant. De plus, en officialisant et en consacrant un modèle construit par les éditeurs, cette politique tuerait dans l'œuf les projets alternatifs innovants qui voient le jour (voir plus bas).

6. Et la Science dans tout cela ?

Le plus grave est sans doute que, au delà des aspects économiques, les modèles élaborés par les éditeurs à des fins purement commerciales et intégrés par les institutions sont susceptibles d'avoir des répercussions profondes sur le fonctionnement de la recherche scientifique. Il faut à ce sujet, en dire plus sur les maladies de notre système de publications et revenir sur la transition de la décennie précédente, lorsque les bibliothèques ont remplacé les abonnements aux revues titre à titre par des abonnements électroniques à des bouquets de revue (un peu comme chez vous à la maison, lorsque votre abonnement au câble vous permet de regarder des centaines de chaînes de télévision). Cet immense progrès, rendu possible par l'électronique et par des accords nationaux comme ceux conclus par le RNBM et Couperin, a permis à beaucoup de bibliothèques de petites universités d'avoir accès à des revues auxquelles elles n'auraient jamais pu s'abonner auparavant. Cette transition a conduit certains à prophétiser que l'on n'aura plus besoin de bibliothèques et qu'il suffira de conclure un énorme accord au niveau national pour que tout le monde ait accès à tout. Ce fut une bonne affaire également pour les éditeurs qui trouvèrent là un beau prétexte à leurs augmentations constantes de prix, puisque les chercheurs avaient ainsi accès à de plus en plus de revues. Mais aujourd'hui, avec le recul et outre le fait que les coûts sont devenus insupportables (ce qui se répercute sur les petits éditeurs, premiers touchés), on se rend compte que beaucoup de revues sont inutiles (de même qu'on n'a pas vraiment besoin des 250 chaînes disponibles sur le câble à la maison). Surtout nous réalisons que les bibliothèques ne sont pas uniquement des lieux d'archivage et de consultation d'ouvrages sur papier (rôle qu'elles continuent à jouer, notamment en mathématiques), mais qu'elles ont aussi un pouvoir de sélectionner par leur politique d'acquisition les revues et les livres les plus intéressants. Avec le système de bouquets, les bibliothèques ont perdu une grande partie de cette faculté d'opérer une sélection naturelle et on observe la prolifération de revues dans lesquelles tout le monde écrit (puisque les chercheurs ont besoin de publier leurs articles quelque part) mais que personne ne lit. Cette dérive est entretenue par un mal encore plus profond, qui

8. Il faut rappeler que les facteurs d'impact sont des indices proposés par les éditeurs censés refléter la valeur commerciale d'une revue en fonction du nombre de lecteurs. Ces indices peuvent avoir au mieux une vague corrélation avec le niveau général d'une revue, mais n'ont pas de sens pour un article qui y serait publié.

dépasse le cadre de la publication mais qui se développe en symbiose avec l'inflation du nombre de revues : la bibliométrie, les facteurs d'impact [8], instruments aveugles des évaluations à répétition et de la course aux financements, avec pour résultat une pression croissante exercée sur les chercheurs à publier toujours davantage. Cette pression et les intérêts économiques des grands groupes d'édition s'entretiennent mutuellement dans un cercle vicieux qui n'encourage pas les chercheurs à perdre du temps à cultiver l'originalité et la profondeur.

Ainsi le remplacement d'un modèle économique fondé sur la demande (abonnements par les bibliothèques) par un autre fondé sur l'offre (Open Access) ne résout en rien le problème précédent de régulation de la qualité et du nombre de revues, mais ne fait que l'aggraver. Tout cela n'encourage évidemment pas les revues à être exigeantes sur le plan scientifique. Même pour les revues les plus prestigieuses, la tentation est grande d'abandonner une politique éditoriale curieuse et ouverte à toutes les thématiques pour, suivant des mécanismes humains bien connus, favoriser quelques thématiques reconnues excellentes par certaines écoles, au détriment d'une diversité vitale pour la recherche.

7. Quelles sont les autres solutions ?

Si l'on souhaite éviter ce scénario ou, au moins, limiter les dégâts, d'autres solutions doivent être recherchées et développées. Celles-ci existent : en Amérique latine, le portail *SciELO*, développé par le Brésil, héberge plus d'un millier de revues en général accessibles gratuitement et sans frais de mise en ligne pour l'auteur. En effet il est financé par des fonds publics. Des expériences similaires à plus petite échelle voient le jour ailleurs. Ainsi en France le portail *OpenEdition*, financé par le Centre national de la recherche scientifique (cnrs) et un projet *Equipex*, abrite plus de 400 revues en Sciences Humaines et a réussi à dynamiser l'édition dans ce domaine en France. Le projet *épiscience* [9] commence à voir le jour, grâce à l'appui du cnrs (CCSD-HAL) et d'Inria. Pour les mathématiques, des revues comme les *Annales de l'Institut Fourier*, le (nouveau) *Journal de l'École polytechnique* et *Computational Mathematics* sont aujourd'hui accessibles en Open Access sans frais pour l'auteur sur le site Cedram. Leur fonctionnement est financé par l'insmi et d'autres institutions [10]. Quel que soit le modèle, l'édition d'un article a bien sûr un coût estimé en général autour de 300 euros, pouvant varier entre 200 et 1 000 euros, mais qui reste bien en deçà des coûts évoqués plus haut (on estime que le coût d'un dépôt dans une archive ouverte, et donc sans frais de secrétariat d'édition, est autour de 10 euros).

Il est utile de s'inspirer des initiatives prises en sciences humaines qui partagent avec les mathématiques la particularité de fonctionner avec une myriade de petits éditeurs (en plus des gros) et le fait d'avoir des moyens financiers limités. Outre le projet OpenEdition en France, citons les projets *Knowledge Unlatched* pour les livres et *Open Library of Humanities* pour les revues ou encore *Q and A LingOA*, dans les pays anglo-saxons. Ces derniers projets ont l'originalité de proposer des modèles de financement stables, de type « crowdfunding », dans lequel les universités et les institutions engagées dans le projet s'entendent pour financer les publications qu'elles jugent dignes de l'être. Les bibliothèques retrouvent ainsi leur rôle dans la sélection naturelle des publications.

Notons qu'à part SciELO et OpenEdition (financé par un Equipex), ces expériences restent à une échelle relativement modeste face aux capacités de l'industrie de l'édition. C'est pourquoi il ne serait pas souhaitable (et, de toute façon, illusoire) de vouloir exclure les éditeurs commerciaux, dont nous aurons toujours besoin. En effet eux seuls sont capables d'éditer des milliers de revues dans des délais raisonnables. Il est en revanche nécessaire de les remettre à leur place, celle de prestataires au service de la communauté scientifique qui devraient être mis en concurrence et non occuper une position de monopole. C'est notamment le cas dans le projet *Q and A LingOA*.

Enfin il faut insister à nouveau sur le fait que si, dans la plupart des pays et notamment en France, les institutions publiques optaient pour des contrats nationaux de financements des apc, tous les projets précédents seraient fortement mis en péril. Il en serait de même en ce qui concerne l'avenir et l'indépendance de nombreuses maisons d'éditions académiques (à commencer par celles de la smf, de la smai et de la sme), à moins qu'elles adoptent, *sous la contrainte économique*, le modèle auteur-payeur.

9. L'idée du projet *épiscience* est d'utiliser les plates-formes comme arXiv ou hal comme support de publication des articles. Un travail éditorial classique est réalisé en plus par des épijournaux, hébergés sur le site `www.episciences.org`.

10. À ce sujet, le fait d'officialiser le modèle auteur-payeur en France créerait une concurrence qui ruinerait tous les efforts des organismes comme le cnrs, Inria et l'insmi pour construire ces nouveaux modèles.

8. Que peut-on faire ?

Difficile question que se pose David face à Goliath. Mais David n'est pas tout seul.

8.1 – En tant qu'auteur, éditeur ou referee

Début 2012 Timothy Gowers avait lancé un appel, accompagné d'une pétition, à boycotter Elsevier et à s'engager à ne pas publier chez cet éditeur, ni collaborer avec leurs revues (*The cost of knowledge*). En octobre 2012 Ingrid Daubechies, alors présidente de l'IMU, avait appelé les membres des comités éditoriaux des revues qui sont publiées par les éditeurs commerciaux à émanciper leur revue en la faisant migrer vers une structure non commerciale. Ces appels ont été suivis de peu de résultats. Il faut les réitérer car nous sommes à une période de transition : chaque chercheur qui intervient dans le travail éditorial d'une revue éditée par un éditeur commercial doit sérieusement se poser la question de savoir ce qu'il fait là et s'il ne vaut mieux investir son temps et son énergie dans un projet plus profitable aux générations futures (par exemple dans un projet comme ceux passés en revue plus haut).

8.2 – En tant que lecteur d'une bibliothèque

Aujourd'hui nous sommes à un moment clef : Couperin est peut-être sur le point d'entériner le modèle Gold Open Access, entraînant ainsi la plupart des institutions françaises. Des choix devront être faits : les chercheurs doivent être informés de ce qui se prépare et qui conditionnera leur façon de publier et de lire et ils doivent pouvoir exprimer leur opinion (id est : *ne pas laisser les représentants des Services Communs de Documentation seuls face aux éditeurs*).

8.3 – En tant que citoyen

Le projet de « *Loi pour une République Numérique* » a été une occasion unique pour les citoyens et les institutions de s'exprimer publiquement en ligne sur une première version du texte. L'article 9 (devenu article 14 dans la version transmise au Conseil d'État, après la consultation) concerne spécialement l'Open Access. Il fixe notamment des délais d'embargo à ne pas dépasser pour la mise en ligne des articles publiés (voir « La voie verte »). Dans la première version, ceux-ci étaient de 12 mois pour les articles en sciences exactes et de 24 mois pour les articles en sciences humaines, périodes beaucoup trop longues. Suite à une forte mobilisation du monde de la recherche, ces délais maximaux ont été réduits de moitié, à savoir 6 mois pour les sciences exactes et 12 mois pour les sciences humaines, ce qui est au moins conforme aux recommandations de la Communauté Européenne dans son objectif « Horizon H2020 ». La version initiale du texte législatif ne faisait pas mention d'une interdiction aux éditeurs de détenir la totalité des droits sur les articles, notamment l'exclusivité des droits de fouille de texte et de données. Il s'agit là d'un enjeu très important que nous n'avons pas évoqué[11]. Cette lacune a été dénoncée lors de la consultation. Le résultat est, dans le nouvel article 14, l'ajout de la phrase : « *L'éditeur d'un écrit scientifique mentionné au I ne peut limiter la réutilisation des données de la recherche rendues publiques dans le cadre de sa publication* ». Cela n'est sans doute pas suffisant et il faudrait que le texte mentionne explicitement la possibilité de pratiquer de la fouille de textes et de données sur les documents issus de la recherche publique, mais il s'agit néanmoins d'un progrès significatif dans ce sens. Il s'agit de rester vigilant sur l'élaboration de ce texte, maintenant qu'il est dans les mains des parlementaires (sachant que les lobbys des éditeurs commerciaux sont toujours à l'œuvre).

8.4 – Sur le plan juridique

Il est probable que la plupart des droits que les éditeurs s'arrogent lorsque, en tant qu'auteur, nous leur cédons nos droits sont totalement contraires à la législation française. Les chercheurs devraient faire usage de leur bon droit et, en particulier, refuser nombre d'engagements que les éditeurs exigent de nous, comme, par exemple, l'interdiction de mettre sur des archives librement accessibles les prépublications des articles publiés. Cette interdiction n'embarrasse pas trop les mathématiciens, mais dans d'autres disciplines, la plupart des chercheurs sont intimidés par les injonctions des éditeurs et n'osent pas le faire. Je donne plus de détails sur ce point dans l'appendice sur le Code de la Propriété Intellectuelle.

11. Par exemple, selon les termes de l'accord en cours de cinq ans conclu par Couperin avec Elsevier, il est interdit aux institutions françaises de disposer des contenus des articles visés par le contrat afin de rechercher les données qui s'y trouvent.

8.5 – Soigner le mal à la source : remettre en cause la bibliométrie

La raison pour laquelle il est si difficile aux chercheurs et aux revues de s'émanciper des éditeurs commerciaux est le fait que nous avons besoin de publier dans les revues qu'ils détiennent, car c'est la base de notre évaluation. Or, dans bien des domaines, l'évaluation tend à ne plus être qu'un relevé du nombre de publications et de leurs indices bibliométriques, ce qui ne constitue pas un encouragement à un travail profond et original. Nous pensons être relativement épargnés en mathématiques, car nous ignorons les facteurs d'impact, mais en réalité, nous faisons souvent trop confiance aux réputations des revues, lorsqu'il s'agit d'évaluer un collègue suivant ses publications, au lieu de chercher à comprendre réellement ses contributions scientifiques. Une remise en cause de ce mode de fonctionnement serait salutaire.

Appendice : le code de la propriété intellectuelle

Les remarques et les conclusions qui suivent doivent être prises avec précaution, étant donné que je n'ai pas de compétence particulière en droit et que j'ignore tout de la jurisprudence autour du Code de la Propriété Intellectuelle français. De plus, les contrats avec les éditeurs étant internationaux, il faudrait mettre en face les législations de chaque pays. Néanmoins les textes législatifs [12] sont faits pour être lus par les citoyens et la lecture du Code de la Propriété Intellectuelle français est particulièrement édifiante pour un chercheur. Il semble en effet se dégager que ce code n'est plus respecté par les éditeurs commerciaux, surtout depuis le passage à l'édition tout électronique.

L'article L131-4 précise que « *La cession par l'auteur de ses droits sur son œuvre peut être totale ou partielle. Elle doit comporter au profit de l'auteur la participation proportionnelle aux recettes provenant de la vente ou de l'exploitation. Toutefois, la rémunération de l'auteur peut être évaluée forfaitairement dans les cas suivant...* » suit alors une liste de cas qui correspondent tous plus ou moins à des situations où il serait trop compliqué de rémunérer l'auteur en proportion des recettes. L'article L312-6 donne plus de précisions sur la rémunération forfaitaire et indique que « *En ce qui concerne l'édition de librairie, la rémunération de l'auteur peut faire l'objet d'une rémunération forfaitaire pour la première édition, avec l'accord formellement exprimé de l'auteur, dans les cas suivant...* », suit alors une liste de cas, dont le premier est précisément celui des « *Ouvrages scientifiques ou techniques* ». Les deux modes de rémunération possibles sont récapitulés dans l'article L312-5 : « *Le contrat peut prévoir soit une rémunération proportionnelle aux produits d'exploitation, soit, dans les cas prévus aux articles L. 131-4 et L. 132-6, une rémunération forfaitaire.* ».

Première surprise : les auteurs doivent en priorité être rémunérés de façon proportionnelle aux recettes, ou sinon de façon forfaitaire. C'est le cas en général pour les livres, mais ce n'est évidemment pas le cas pour les articles, puisque nous ne touchons en général aucune rémunération (sauf pour les articles en droit, comme par hasard...). On aurait pu considérer à la rigueur que c'était le cas il y a vingt-cinq ans, lorsque les auteurs recevaient gratuitement des tirés à part, que l'on peut assimiler à une rémunération en nature. Mais depuis le passage au tout électronique, l'auteur ne reçoit plus rien [13].

L'article L132-17-6, relatif à l'édition d'un livre sous forme numérique, ajoute : « *Le contrat d'édition garantit à l'auteur une rémunération juste et équitable sur l'ensemble des recettes provenant de la commercialisation et de la diffusion d'un livre édité sous une forme numérique.* » et, plus loin, « *Dans les cas prévus de recours à un forfait, ce dernier ne saurait être versé à l'auteur en contrepartie de la cession de l'ensemble de ses droits d'exploitation sous une forme numérique et pour tous les modes d'exploitation numérique du livre.* ». Cette dernière phrase signifie que la cession exclusive des droits à l'éditeur est interdite en cas de rémunération forfaitaire (et a fortiori, je suppose, en l'absence de toute forme de rémunération !). Ne peut-on pas en conclure que l'éditeur n'a aucun droit d'interdire à l'auteur de déposer une version de son article sur une archive ouverte ?

Il ressort de ces remarques qu'en principe les auteurs français devraient pouvoir dénoncer la plupart des contrats qu'ils signent depuis au moins vingt-cinq ans. Il ne serait pas très constructif de réclamer des royalties sur nos articles, mais en revanche cela pourrait constituer un moyen de faire pression sur les éditeurs pour qu'ils cessent d'en-

12. accessibles sur le site Légifrance.
13. Pire, dans certains cas, les auteurs ne reçoivent pas la version électronique de leur propre publication.

traver l'accès à nos publications. La difficulté est que les chercheurs sont dispersés et que les universités ou le CNRS ne peuvent pas se substituer à eux comme partie civile. En revanche, une association, du même type que la SACEM pourrait sans doute les représenter.

Pour en savoir plus

- une synthèse sur l'Open Access réalisée par les CorIST (Correspondants de l'IST, Information Scientifique et Technique, CNRS) :
`http://corist-shs.cnrs.fr/gold\_open.access`
- l'Open Access pour les nuls (élaboré par les physiciens) :
`http://www.rnbm.org/spip.php?article241`
- les précieuses études de la DIST : `http://www.cnrs.fr/dist/distint.html`
- les nouvelles au fil de l'eau de la DIST : `http://www.cnrs.fr/dist/distlefil.html`
- et les précieux documents de la DIST : `http://www.cnrs.fr/dist/Documents.html`
- d'autres documents sur la page du RNBM : `http://www.rnbm.org/spip.php?article96`
- le rapport Finch, à l'origine de la politique choisie au Royaume-Uni :
`http://www.researchinfonet.org/publish/finch/`
- un rapport sur le financement des APC en Grande-Bretagne (voir les pages 10 et 11) :
`http://www.rcuk.ac.uk/RCUK-prod/assets/documents/documents/Openaccessreport.pdf`
- un document sur le coût des APC par le JISC (agence nationale en charge des acquisitions de ressources documentaires en Grande-Bretagne) :
`http://files.figshare.com/1542374/Analysis_of_Jisc_Collections_APC_data.pdf`
- le texte (un peu trop naïf) de la Max Planck Digital Library :
`http://www.mpg.de/9202262/area-wide-transition-open-access`
- le rapport de l'Académie des Sciences : `http://www.academie-sciences.fr/pdf/rapport/rads_241014.pdf`
- la page d'accueil de Couperin : `http://www.couperin.org/` qui a notamment relayé le texte paru dans *Le Monde* le 10 septembre 2015, sous forme d'une pétition : `https://secure.avaaz.org/fr/petition/Le_Premier_ministre_Manuel_Valls_Consacrer_les_biens_communs_de_la_connaissance_1/` Dans ce texte, la position préconisée pour l'Open Access n'est pas très claire. En revanche ce texte a le mérite de se positionner contre l'attribution de droits d'exploitation exclusifs (notamment pour le Text and Data Mining)
- le texte commun SMF-SMAI-SFDS en septembre 2012 :
`http://smf.emath.fr/files/open_access_trois_societes_0_0.pdf`
- les recommandations de l'EMS :
`http://www.euro-math-soc.eu/system/files/uploads/EMS.Draft_.v10.pdf`
- la dernière recommandation du Conseil Scientifique de l'INSMI :
`http://www.cnrs.fr/insmi/spip.php?article1216`
- le projet Knowledge Unlatched : `http://www.knowledgeunlatched.org/`
- le projet Episciences : `http://www.episciences.org/`
- Le site du Cedram : `http://www.cedram.org/`

Frédéric Hélein

Institut de Mathématiques de Jussieu–Paris Rive Gauche

Frédéric Hélein est professeur à l'université Paris Diderot et directeur scientifique du RNBM. Ses premiers travaux concernent l'analyse des équations aux dérivées partielles issues de la géométrie (applications harmoniques). Par la suite il a travaillé sur les systèmes complètement intégrables en géométrie différentielle. Il s'intéresse actuellement à la physique mathématique et, plus particulièrement, aux théories classiques et quantiques des champs.

Ce texte est une version développée et augmentée d'un article paru dans *Matapli* en novembre 2015. L'auteur de ce texte remercie Albert Cohen, Benoît Kloeckner, Francesca Leinardi, Karim Ramdani, Claude Sabbah, Christoph Sorger et Bernard Teissier pour leurs nombreuses remarques et suggestions sur des versions préliminaires de ce texte, ainsi que Thierry Bouche, Roberto di Cosmo et Émilie Masson pour des échanges fructueux sur le sujet.

Coût des publications : propositions concrètes. L'exemple des Annales de l'institut Fourier

• A. ROLLAND
• R. VANEL

Créées en 1949, les Annales de l'institut Fourier (AIF) sont une revue internationale en mathématiques fondamentales gérée par l'institut Fourier [1], à Grenoble. Forte d'un haut niveau d'exigence, elle reçoit chaque année environ 300 soumissions et publie entre 80 et 90 articles, dans six fascicules, ce qui représente un peu plus de 2700 pages. Les soumissions des jeunes chercheurs, en particulier français, sont particulièrement appréciées. La revue est un des fleurons du laboratoire et constitue une vitrine scientifique internationale. Elle compte ainsi parmi les membres de son comité de rédaction deux femmes (Maryam Mirzakhani et Christine Lescop) et deux lauréats de la médaille Fields (Maryam Mirzakhani et Stanislas Smirnov).

Comme nous allons le voir, la revue a toujours suivi le fonctionnement d'une revue académique « classique ». En 2015, les AIF ont fait le choix du libre accès : comment cette évolution a-t-elle été possible ?

1. Une revue traditionnelle

Éditée par une association loi 1901 (Association des *Annales de l'institut Fourier*), la revue fonctionne avec un secrétaire de rédaction [2] (à temps plein, salarié du CNRS). Il gère le processus éditorial de la revue, la fabrication des fascicules, les abonnements et l'administration de l'association en relation avec le secrétaire trésorier.

Le comité de rédaction est composé d'un rédacteur en chef et de 18 rédacteurs, répartis de manière équitable entre membres de l'institut Fourier et membres extérieurs. Tous les rédacteurs ont accès aux articles soumis. Le comité prend des décisions collégiales lors d'une réunion mensuelle à l'institut Fourier. Les membres sont élus pour quatre ans.

1.1 – Un modèle économique « classique »

Jusqu'en 2015, la revue suit un modèle économique « classique ». Elle est financée pour 80% par la vente des abonnements et pour 20% par diverses subventions publiques locales (université Joseph Fourier, ville de Grenoble) et nationales (INSMI CNRS). Deux types d'abonnements sont proposés : un abonnement papier accompagné de la version électronique et un abonnement exclusivement électronique. L'accès électronique aux cinq dernières années est réservé aux abonnés. Les précédentes sont en accès libre. La version électronique est diffusée, depuis 2005, à l'aide des outils et du site du CEDRAM [3].

Les deux postes de dépenses importants sont la fabrication (impression de 800 volumes papier jusqu'en 2013) et la composition [4]. Le nombre rela-

1. UMR5582 Centre national de la recherche scientifique (CNRS)/Université Joseph Fourier.
2. Ses activités sont coordonnées par le service information scientifique et technique (IST) du laboratoire.
3. Le CEDRAM, centre de diffusion de revues académiques mathématiques, est un service de la cellule Mathdoc, UMS5638 CNRS/Université Joseph Fourier. Sa mission est de fournir aux revues partenaires les services de production, de diffusion et d'archivage de leurs articles. On trouvera davantage d'informations sur les services et les revues sur `http://www.cedram.org`, et sur l'UMS Mathdoc sur `http://www.mathdoc.fr/`.
4. Il s'agit de la mise en page de l'article et de sa mise aux normes techniques pour adapter le format LaTeX des auteurs à celui des AIF. Les manuscrits, dans la majorité des cas, sont écrits en utilisant la classe AMSart, parfois la classe `article` et dans de rares cas, en Plain TeX. Le rôle de la composition est donc de convertir l'article reçu dans la classe LaTeX de la revue (`cedram.cls`). Cette classe a été écrite et est maintenue par le CEDRAM. Voir à ce sujet, les outils pour les revues sur le site du CEDRAM : `http://www.cedram.org/spip.php?article201&lang=fr`.

tivement élevé d'exemplaires à publier et envoyer représente la ligne la plus lourde. La composition est sous-traitée [5], et facturée à la page, quelle que soit la qualité du manuscrit de l'auteur. Entre 20 000 et 30 000 euros sont nécessaires pour le traitement des six fascicules annuels. Les autres dépenses sont négligeables (frais divers de fonctionnement, informatique, etc.). Enfin, l'outil de gestion éditorial, toujours utilisé mais plus maintenu, est hébergé gratuitement par la celulle Mathdoc.

1.2 – Flux éditorial et diffusion

Le flux éditorial, de la soumission à la diffusion, suit un processus tout à fait classique.

Une fois l'article accepté par le comité, l'auteur envoie son manuscrit TEX. Le fichier fourni est envoyé aux prestataires pour être composé. Dès les épreuves validées, il est renvoyé au secrétariat. Le fascicule de la revue est ensuite produit et diffusé par le Cedram sous forme électronique. C'est ce fichier qui est transmis à l'imprimeur. Une fois le fascicule papier produit, il est expédié.

Le système traditionnel dans lequel fonctionne la revue est arrivé à un point de saturation. En effet, comme l'a fait remarquer Djalil Chafaï [6], l'équilibre budgétaire des AIF, comme celui de bon nombre de revues, se fragilise. Baisse des subventions, érosion du nombre d'abonnés (plus de 400 avant 2010, environ 300 en 2014), progression des coûts de fonctionnement sont autant de facteurs qui mettent, doucement, ce modèle en péril.

2. Contexte de l'édition scientifique

Depuis une dizaine d'années, l'édition scientifique connaît de profonds bouleversements [7]. L'un d'eux est l'émergence de nouveaux modèles économiques.

Les AIF se devaient d'entamer une réflexion sur l'évolution de leur propre système de financement et d'être ainsi moteur dans la transition vers un nouveau modèle pour l'édition mathématique. Plusieurs éléments de contexte ont permis cette évolution.

2.1 – Vers une prise de conscience

Les politiques économiques révoltantes des grands éditeurs ont provoqué la prise de conscience des communautés de recherche sur le coût de la publication scientifique. C'est dans ce contexte que se multiplient les initiatives en faveur du libre accès.

Les mathématiciens sont particulièrement moteurs dans cette prise de conscience. C'est ainsi Timothy Gowers qui est à l'initiative de la pétition *The Cost of knowledge*, lancée en 2012 et Benoît Kloeckner (membre de l'institut Fourier de 2007 à 2014) de l'*Appel pour des négociations équilibrées avec les éditeurs de revues scientifiques* rédigé la même année [8].

2.2 – Recommandations européennes en faveur du libre accès

Dans sa recommandation relative aux informations scientifiques et à leur conservation, la commission européenne recommande aux états membres « que les publications issues de la recherche financée par des fonds publics soient librement accessibles dans les meilleurs délais, de préférence immédiatement et, dans tous les cas, au plus tard six mois après leur date de publication, et au plus tard douze mois pour les publications dans les domaines des sciences sociales et humaines [9]. » Elle préconise également « de veiller à ce que les organismes de financement de la recherche chargés de gérer le financement public de la recherche et les établissements universitaires bénéficiaires de financements publics mettent en œuvre les politiques :

– en définissant des politiques institutionnelles assurant le libre accès aux publications scientifiques et leur diffusion, et en élaborant des plans de mise en œuvre au niveau des organismes de financement,
– en mettant à disposition le financement nécessaire pour la diffusion (y compris le libre accès), en permettant des canaux différents, y compris, le cas échéant, des infrastructures électroniques et de nouvelles méthodes pilotes de communication scientifique [10]. »

5. Les prestataires qui assurent ce service pour le compte des AIF sont des auto-entrepreneurs experts en TEX.
6. Voir les précisions de Djalil Chafaï dans [2] p. 85.
7. On lira, à ce sujet, la synthèse de Valérie Girardin sur les publications mathématiques parue dans la *Gazette* en 2012 [5], et ses renvois bibliographiques.
8. Sur ces prises de positions, ces textes et les diverses contributions au débat, on lira le dossier paru dans la *Gazette* en 2012 [4].
9. Pour plus de détails, voir dans `https://ec.europa.eu/programmes/horizon2020/sites/horizon2020/files/FactSheet_Open_Access.pdf`.
10. À l'heure de la rédaction de ces lignes, la France est en train de se doter d'une « loi numérique ». Un débat est ouvert

2.3 – Contexte français de la publication mathématique

En France, les AIF coexistent avec un certain nombre d'autres revues académiques mathématiques qui fonctionnent approximativement sur le même modèle, chacune bénéficiant de subventions locales ou nationales [11].

Par ailleurs, de récents journaux ont choisi avec succès un modèle de publication *open access*. Ce sont des revues électroniques gratuites tant pour les auteurs que pour les lecteurs [12]. Elles existent, bien souvent grâce au travail bénévole d'un mathématicien qui organise les différentes étapes de la production de la revue (flux éditorial, métadonnées, composition, diffusion...) [13].

Aucun de ces modèles ne paraît viable, car l'un est dépendant des subventions et l'autre ne repose que sur la bonne volonté d'une personne. Un nouveau système d'organisation et de financement est à trouver où les établissements ont un rôle majeur à jouer.

3. Une revue en marche vers le libre accès viable et pérenne

Pour toutes ces raisons, il devenait essentiel d'étudier différentes possibilités d'évolution du modèle économique des AIF afin qu'il s'adapte au nouvel environnement de la publication scientifique. Sans parler d'évolution, la revue était déjà engagée dans la libre diffusion de la production scientifique en encourageant l'auteur, lors de l'acceptation, à déposer la prépublication acceptée de son article dans une archive ouverte... Les jalons vers le libre accès étaient déjà posés.

Le service IST et un chercheur de l'institut Fourier ont été chargés d'étudier les différentes possibilités d'évolution présentées lors d'une assemblée générale extraordinaire en décembre 2013. Ils ont proposé des solutions adaptées en tenant compte de la contrainte des échanges, des subventions non pérennes et des souhaits du comité de rédaction.

3.1 – Les échanges : moins mais mieux

À l'instar de nombreuses revues scientifiques, les AIF entretiennent une politique d'échange très active. Le principe est le même qu'ailleurs : l'envoi d'un (parfois deux) exemplaire des AIF contre un exemplaire d'une revue qui alimente le fonds de la bibliothèque. La philosophie de ces échanges était d'accroître la visiblilité et le rayonnement des AIF partout dans le monde. En 2013, on comptait 180 échanges papiers. Ce système permettait de faire d'importantes économies sur le budget abonnement de la bibliothèque mais dans le même temps coûtait beaucoup à la revue en terme d'impression, d'expédition et de stockage. C'est pourquoi une réflexion sur les revues reçues (qualité, intérêt de conserver une version papier...) a semblé nécessaire. Ce chantier a été mené par le service IST de l'institut Fourier accompagné par la commission bibliothèque du laboratoire (sept chercheurs). Les revues reçues ont pu être classées en quatre catégories. La catégorie 1 regroupait les revues dont l'échange papier devait être conservé, la 4, celles dont l'échange pouvait être arrêté. Les revues appartenant aux autres catégories se sont vues proposer des échanges électroniques. En 2015, il n'y a plus que 47 échanges papiers et 38 échanges électroniques. Par ailleurs, de nombreux dons superflus, ont été supprimés.

3.2 – L'évolution du modèle économique : vers une baisse globale des coûts

L'impression des fascicules papier était le plus gros poste de dépense. Il fallait donc travailler à sa réduction. Deux solutions étaient possibles. Reprendre des négociations avec les imprimeurs, ou faire diminuer le tirage, donc le coût global. La réduction du nombre d'échanges a apporté une partie de la solution. Cette réforme mise en place a permis de faire d'importantes économies à la revue, lui ouvrant la route vers le libre accès.

Parallèlement, il a été décidé une augmentation du prix de l'abonnement papier afin d'encourager le passage des lecteurs au numérique, et de faire diminuer le nombre d'exemplaires à imprimer, tout en couvrant les frais de fabrication. De plus, la revue

concernant les questions liées à la publication scientifique, en particulier la durée des embargos. Voir notamment dans [1] et sur `https://www.republique-numerique.fr/consultations/projet-de-loi-numerique/consultation/consultation`.

11. Dans [2], Djalil Chafaï a bien analysé et décrit l'importance du soutien des établissements aux revues mathématiques.

12. C'est, par exemple, le cas du *Journal de l'École Polytechnique* (JEP) lui aussi diffusé par le CEDRAM sur lequel on lira plus de détails dans [6]. On trouvera également dans [3], l'exemple d'*Electronic Journal of Probability* (EJP).

13. Voir à ce sujet [2] p. 83.

est expédiée deux fois par an au lieu de six, ce qui permet une réduction des coûts d'expédition.

Une réflexion a été menée par les AIF et la cellule Mathdoc afin de réduire le coût de la composition. Conjointement, il a été proposé à l'Insmi de prendre en charge un personnel qui pourrait, si cette solution s'avérait efficace, travailler pour les autres revues académiques de mathématiques hébergées par le Cedram. Sous l'impulsion des AIF, l'Insmi a donc organisé la mutualisation. Ainsi l'institut [14] encourage les revues à jouer le jeu du libre accès en remplaçant les subventions par la mise en place d'outils et de moyens humains mutualisés, gratuits pour les revues, gérés par Mathdoc et Mathrice [15], deux structures nationales.

Toutes les revues du Cedram [16] peuvent maintenant bénéficier de ces services : installation, hébergement des logiciels éditoriaux (Mathrice), maintenance et expertise des ces outils, composition en LaTeX, production et diffusion des fascicules (Mathdoc, service Cedram).

Mathdoc a recruté un personnel chargé de la composition des articles [17]. Pris en charge par l'institution, ce poste de dépense a disparu.

La baisse des coûts réalisée et la mutualisation en place, l'accès électronique pour tous a pu être ouvert le 11 juin 2015 en fin d'après-midi, avec la publication du premier fascicule de 2015. Avec le financement de la composition, ce ne sont donc pas les abonnés à la version papier qui financent la publication électronique gratuite, mais bien l'Insmi, partenaire principal des *Annales*.

3.3 – Évolution du modèle de diffusion et visibilité

Dès lors, l'accent est mis sur la version électronique. La version papier est imprimée seulement en juillet et en décembre.

Il manquait sur le site de la revue, la liste des articles à paraître, comme on peut la trouver depuis quelques années sur les sites d'*Annals of Mathematics* ou d'*Inventiones Mathematicae*. En même temps que le premier fascicule du volume 65, la rubrique « Articles à paraître » a été ajoutée au site web par l'équipe du Cedram. Les articles acceptés sont donc publiés aussi rapidement que possible sur cette page, après la validation des épreuves par les auteurs. Ce service répond aux nouveaux usages de la communauté scientifique. L'information validée est disponible rapidement et librement.

Enfin pour que les articles aujourd'hui en libre accès soient davantage diffusés et partagés, la licence Creative Commons a été choisie. Les auteurs conservent le droit d'auteur et accordent à la revue le droit de première publication. L'article est alors disponible sous la licence Creative Commons, CC-BY-ND [18] permettant à d'autres de le partager sans, toutefois, le modifier. Aux AIF, les auteurs ont la possibilité de déposer la version acceptée ainsi que le PDF mis en page par la revue, sur une archive ouverte. Ces libertés font des AIF une revue verte dans la base Sherpa/Romeo [19].

4. Et après...

Tous ces changements étaient nécessaires afin d'adapter la revue aux évolutions très rapides du monde éditorial. Pour y parvenir, l'aide de l'ensemble des partenaires s'est révélée déterminante.

Dans ce processus, la dernière étape pour les *Annales de l'institut Fourier* est le déploiement du logiciel de gestion éditoriale OJS [20] en 2016, pour remplacer l'outil actuel en fin de course.

À plus long terme, le partage des fonctions de secrétariat pourrait être une autre étape, une réponse à la critique faite aux revues gérées par des

14. Sur le projet de l'Insmi pour l'édition, voir aussi [7].
15. Réseau des informaticiens des laboratoires de mathématiques, GDS 2754 du CNRS.
16. En plus des *Annales de l'institut Fourier*, le Cedram héberge les revues suivantes : les *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, les *Annales mathématiques Blaise Pascal*, *Confluentes Mathematici*, le *Journal de l'École polytechnique — Mathématiques*, le *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, *MathS In Action*, les *Publications Mathématiques de Besançon — Algèbre et Théorie des Nombres* et le *Journal of Computational Mathematics*.
17. Pour faciliter le travail de composition et gagner du temps, un effort est demandé aux auteurs. Ils sont maintenant tenus d'envoyer leur manuscrits composés à l'aide de la classe LaTeX utilisée par la revue.
18. Décrite à l'adresse `http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/`.
19. Cette base classe les revues en fonction de leur politique eu égard aux archives ouvertes de blanc, éditeurs les plus restrictifs à vert, plus permissifs.
20. OJS, pour Open Journal System, est un logiciel libre de gestion éditoriale développé par la société canadienne PKP. C'est l'outil choisi par l'Insmi pour les revues de mathématiques.

mathématiciens bénévoles [21]. En effet, le temps de travail du secrétaire de rédaction dévolu aux activités administratives de la revue (abonnements, gestion financière et comptable etc.) devrait être dégagé. Ce temps de secrétariat de rédaction pourraît être redéployé au bénéfice de toutes les revues le désirant.

Références

[1] V. Berthé et al. « La loi numérique concerne le monde de la recherche ». *La Gazette des mathématiciens* **146** (2015), p. 57–59.

[2] D. Chafaï. « Coût des publications : propositions concrètes ». *La Gazette des mathématiciens* **144** (2014), p. 82–86.

[3] D. Chafaï. « Coût des publications : un exemple instructif ». *La Gazette des mathématiciens* **137** (2013), p. 119–122.

[4] « Chercheurs, éditeurs : le débat ». *La Gazette des mathématiciens* **132** (2012), p. 73–86.

[5] V. Girardin. « Quel avenir pour les publications mathématiques ». *La Gazette des mathématiciens* **134** (2012), p. 5–13.

[6] C. Sabbah. « Journal de l'École polytechnique, une renaissance ». *La Gazette des mathématiciens* **138** (2013), p. 90–94.

[7] C. Sorger. « Quelques nouvelles de l'Insmi ». *La Gazette des mathématiciens* **140** (2014), p. 99–102.

Ariane Rolland

Institut Fourier, umr cnrs/Université Joseph Fourier, BP 74 38402 Saint-Martin-d'Hères, France
ariane.rolland@ujf-grenoble.fr

Ariane Rolland est responsable du service information scientifique et technique de l'institut Fourier.

Romain Vanel

Institut Fourier, umr 5582 cnrs/Université Joseph Fourier, BP 74 38402 Saint-Martin-d'Hères, France
romain.vanel@ujf-grenoble.fr

Romain Vanel est secrétaire de rédaction des Annales de l'institut Fourier.

Il nous est agréable de remercier l'ensemble de l'équipe du Cedram, centre de diffusion de revues académiques mathématiques, un service de la cellule Mathdoc, UMS5638 cnrs/Université Joseph Fourier, pour leur aide et leurs conseils. Merci également à Damien Gayet, Gérard Besson et Hervé Pajot pour les diverses relectures de ce document.

21. Voir les remarques de Djalil Chafaï dans [2] p. 82.

Aspect variationnel des surfaces minimales et conjecture de Willmore

• L. Hauswirth
• L. Mazet

En 1965, Thomas Willmore énonce une question portant sur la géométrie des surfaces de $\mathbb{R}^3$. Cette question a été la source de très nombreux travaux portant aussi bien sur des aspects théoriques qu'appliqués. Un travail récent de Fernando Codà Marques et André Neves apporte la réponse et confirme l'intuition de Willmore. Nous souhaitons ici présenter les idées mises en jeu dans leur preuve : elle repose sur la théorie des surfaces minimales de la sphère unité de dimension 3. La question qui va nous guider est de savoir comment on peut construire des objets géométriques qui sont des points critiques de certaines fonctionnelles avec pour idée de mettre en place une approche de type lemme du col, appelée aussi min-max. Nous allons tout d'abord fixer quelques terminologies de la théorie des sous-variétés et expliquer en quoi consiste cette approche dans un cadre simple. Nous verrons ensuite comment George Birkhoff a mis en place cette idée pour construire des géodésiques sur les surfaces et ainsi résoudre une question de Henri Poincaré. Dans un second temps, nous présenterons la théorie de Frederick Almgren et Jon Pitts qui permet de construire des surfaces minimales par cette approche de min-max. Enfin, nous en viendrons à la conjecture de Willmore et au travail de Marques et Neves où la théorie de Almgren et Pitts est un outil central.

1. Préliminaires

1.1 – Sous-variétés de $\mathbb{R}^k$

Commençons par fixer quelques notations et terminologies de la théorie des sous-variétés de $\mathbb{R}^k$. Nous allons considérer des sous-variétés M compactes sans bord de dimension m dans un certain $\mathbb{R}^k$.

Dans le cas $k = m+1$, fixons p un point de M. En choisissant un repère orthonormé de $\mathbb{R}^{m+1}$ d'origine p et dont le dernier vecteur de base est le vecteur unitaire normal à M en p, on peut décrire localement M comme le graphe d'une fonction u avec $u(p) = 0$ et de gradient nul en p, $\nabla u(p) = 0$. La différentielle seconde ou Hessienne de cette fonction u est alors appelée seconde forme fondamentale de M en p : cette Hessienne décrit où se situe M par rapport à son espace tangent en p. La trace de cette Hessienne est appelée courbure moyenne de M en p et est notée $H(p)$. Elle décrit donc en moyenne où se situe M par rapport à son plan tangent en p. Ces notions de seconde forme fondamentale et de courbure moyenne se définissent aussi pour une sous-variété M de dimension m contenue dans une sous-variété N de dimension $m+1$.

Enfin si Σ est une surface de $\mathbb{R}^3$, le déterminant de la seconde forme fondamentale est appelé courbure de Gauss de Σ au point p et est noté $K(p)$.

1.2 – L'approche de min-max

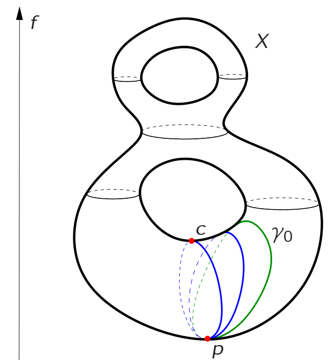
Pour expliquer l'approche de min-max ou lemme du col, nous allons nous placer dans un cas particulier. Considérons pour cela la surface X de la Figure 1 et f une fonction de Morse[1] définie sur X. Sur le dessin, f est représentée comme la coordonnée verticale. On suppose de plus que le minimum absolu de f sur X est 0 et est réalisé au point p.

Considérons alors γ_0 le lacet vert qui est basé au point p (ses extrémités sont p). Les lacets bleus

1. Une fonction de Morse est une fonction C^2 dont tous les points critiques sont non dégénérés : la Hessienne au point critique a un noyau nul.

et γ_0 ont la propriété que l'on peut déformer l'un en l'autre de façon continue (sans déplacer le point p) mais que l'on ne peut pas les rétracter sur le point p (point que l'on paramètre par un lacet constant) : on dit que ces lacets sont homotopes [2] relativement à leurs extrémités mais non homotopiquement triviaux.

FIGURE 1 – Une fonction de Morse sur une surface.



On note $[\gamma_0]$ l'ensemble des lacets homotopes à γ_0 relativement aux extrémités (on dit aussi que $[\gamma_0]$ est la classe d'homotopie de γ_0) et on définit alors la quantité de min-max suivante

$$W = \inf_{\gamma \in [\gamma_0]} \sup_{t \in [0,1]} f(\gamma(t)).$$

On regarde donc la plus grande valeur de f le long d'un lacet homotope à γ_0 et on minimise parmi ces lacets. Sur le dessin, les maxima le long des lacets bleus tendent à se rapprocher de cette valeur. On voit (et on peut démontrer) que $W = f(c) > 0$ avec c un point critique de f (le point c est un col pour la fonction hauteur f). Remarquons que si γ_0 pouvait se rétracter sur p, la quantité W serait nulle.

On peut donc retenir que, si on a un lacet γ_0 non homotopiquement trivial dans X, la quantité W est strictement positive et doit être une valeur critique non triviale (pas le minimum absolu) de f. On montre ainsi l'existence d'un point critique c non trivial de f.

Dans la suite, nous verrons des situations où cette idée peut être utilisée pour construire des objets géométriques.

2. Géodésiques sur les surfaces

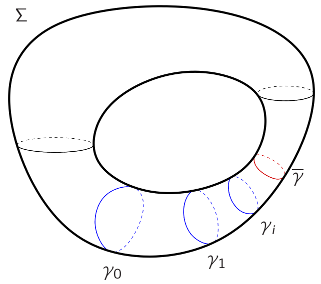
Si γ est une courbe sur une surface Σ, on note $\ell(\gamma)$ sa longueur. La courbe γ est appelée géodésique si c'est un point critique de la fonctionnelle ℓ ; autrement dit, si $\{\gamma_t\}_{t\in[-\varepsilon,\varepsilon]}$ est une famille à un paramètre de courbes sur Σ ayant toutes les mêmes extrémités et avec $\gamma = \gamma_0$, on a

$$\frac{d}{dt}\ell(\gamma_t)_{|t=0} = 0.$$

Par ailleurs, une géodésique réalise localement le plus court chemin entre deux de ses points.

Dans un article de 1905, Poincaré [14] pose la question de l'existence d'une géodésique fermée (pouvant être paramétrée par le cercle) et simple (sans point double) sur toutes surfaces.

FIGURE 2 – Minimisation de la longueur d'un lacet.



Commençons par considérer le cas de la surface Σ de la Figure 2. Les lacets bleus sont homotopes mais non homotopiquement triviaux (on ne peut pas les déformer sur un lacet constant). Si γ_0 est l'un de ces lacets, on peut alors considérer $[\gamma_0]$, l'ensemble des lacets de Σ qui lui sont homotopes. Comme aucun de ces lacets n'est homotope à un lacet constant, on a

$$\ell([\gamma_0]) := \inf_{\gamma\in[\gamma_0]} \ell(\gamma) > 0.$$

On peut alors considérer une suite $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $[\gamma_0]$ telle que $\ell(\gamma_i) \to \inf_{\gamma\in[\gamma_0]} \ell(\gamma)$ et en déduire un lacet $\overline{\gamma} \in [\gamma_0]$ (en rouge) tel que $\ell(\overline{\gamma}) = \inf_{\gamma\in[\gamma_0]} \ell(\gamma)$: il s'agit nécessairement d'une géodésique fermée.

Cet argument utilise l'existence de lacets non homotopiquement triviaux. Ainsi si la surface Σ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$, tout lacet γ_0 se rétracte sur un point et $\ell([\gamma_0]) = 0$: l'argument précédent ne donne rien. Or c'est précisément le cas

2. Soient X et Y deux espaces topologiques, $f_0, f_1 : X \to Y$ continues sont homotopes s'il existe $g : [0,1] \times X \to Y$ continue avec $f_i(\cdot) = g(i,\cdot)$ pour $i = 0,1$. Si f_0 et f_1 coïncident sur une partie A de X, on peut demander que $g(t,\cdot) = f_0(\cdot)$ sur A, on parle alors d'homotopie relative à A.

que considère Poincaré puisqu'il s'intéresse aux surfaces à courbure de Gauss K positive qui sont nécessairement topologiquement des sphères. Poincaré propose alors la stratégie suivante. Une géodésique fermée simple (si elle existe) sépare la surface en deux domaines Ω_1 et Ω_2 tels que

$$\int_{\Omega_i} K da = 2\pi \tag{1}$$

où da est la mesure d'aire sur la surface. Poincaré suggère donc de produire une géodésique fermée en minimisant la longueur ℓ parmi les lacets γ séparant Σ en deux domaines Ω_i vérifiant (1) [3]. Poincaré montre par des raisonnements de nature physique qu'une solution minimisante (si elle existe) sera une géodésique fermée simple. La justification complète de cette approche sera donnée par Melvyn S. Berger et Enrico Bombieri [2] puis Christopher B. Croke [4] au début des années 80 ; le point délicat est l'existence d'une minoration uniforme de la longueur des lacets considérés par Poincaré.

L'approche de Birkhoff

En 1917, Birkhoff [3] propose une solution alternative pour la construction des géodésiques sur les surfaces Σ homéomorphes à $\mathbb{S}^2$, elle repose sur une approche de type min-max. Il introduit la notion de balayage de la surface Σ. Un balayage de Σ est une application continue

$$\varphi : [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to \Sigma$$

avec $\varphi(0,\cdot)$ et $\varphi(1,\cdot)$ constants. Autrement dit un balayage est une famille continue de lacets partant d'un lacet constant et finissant en un lacet constant. Un exemple de balayage est donné dans la Figure 3.

Parmi les balayages de $\mathbb{S}^2$, on a le balayage standard défini par $\overline{\varphi}(t,\theta) = (2\sqrt{t-t^2}(\cos\theta, \sin\theta), 2t-1)$ et qui est donné par les parallèles de $\mathbb{S}^2$.

Pour comparer avec la partie 1.2, X serait ici l'espace des lacets sur la surface Σ, la fonction f serait ℓ et un balayage correspond à un lacet dans X.

Comme $\varphi(0,\cdot)$ et $\varphi(1,\cdot)$ sont constants, on peut aussi voir un balayage φ comme une application continue $\Phi : \mathbb{S}^2 \to \Sigma$ et définir ainsi la classe d'homotopie $[\Phi_0]$ d'un balayage Φ_0.

Birkhoff s'intéresse alors à la réalisation de la valeur de min-max suivante :

$$L([\Phi_0]) = \inf_{\varphi \in [\Phi_0]} \left(\sup_{t\in[0,1]} \ell(\varphi(t,\cdot)) \right)$$

pour un certain balayage φ_0. Autrement dit, parmi tous les balayages que l'on peut déduire par déformations continues de φ_0, quel est celui qui possède le plus court lacet de longueur maximale ? Dans l'esprit de la partie 1.2, Birkhoff montre que, si $L([\Phi_0]) > 0$, il existe un lacet de longueur $L([\Phi_0])$ qui est un point critique de la fonctionnelle ℓ donc un lacet géodésique sur Σ.

Reste donc à savoir si on peut assurer $L([\Phi_0]) > 0$. Remarquons que si φ_0 est un balayage constant, tous les lacets sont constants donc de longueur nulle ; ainsi $0 = \sup_{t\in[0,1]} \ell(\varphi_0(t,\cdot)) = L([\Phi_0])$ dans ce cas. On a vu que tout balayage φ a une application associée $\Phi : \mathbb{S}^2 \to \Sigma$. À une telle application continue, on peut associer un nombre $\deg(\Phi) \in \mathbb{Z}$ appelé degré qui compte le nombre d'antécédents d'un point générique $p \in \Sigma$ par Φ avec un signe dépendant de savoir si Φ préserve ou renverse l'orientation au voisinage de chaque antécédent. Ce degré a la propriété importante d'être invariant par homotopie.

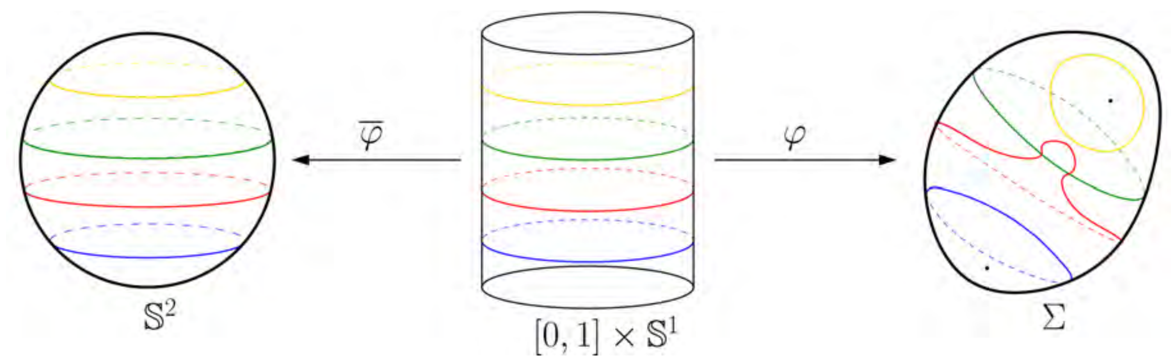
Maintenant, si $\sup_{t\in[0,1]} \ell(\varphi(t,\cdot))$ est très petit, chaque lacet $\varphi(t,\cdot)$ reste dans un voisinage de $\varphi(t,0)$, on peut alors déformer globalement φ vers le balayage $\widetilde{\varphi}$ défini par $\widetilde{\varphi}(t,\theta) = \varphi(t,0)$ qui est lui-même homotope au balayage constant. Ainsi si $\sup_{t\in[0,1]} \ell(\varphi(t,\cdot))$ est très petit, le degré de l'application Φ associée est nul. Ceci montre que si $\deg(\Phi_0) \neq 0$, $L([\Phi_0]) > 0$ et on a un lacet géodésique associé. Le balayage standard $\overline{\varphi}$ est de degré 1 car tout point (hormis les deux pôles) sur $\mathbb{S}^2$ possède exactement un antécédent. Donc si $H : \mathbb{S}^2 \to \Sigma$ est un homéomorphisme, $H \circ \overline{\varphi}$ est un balayage de Σ de degré 1 et $L([H \circ \overline{\varphi}]) > 0$. Birkhoff montre ainsi que toute surface homéomorphe à $\mathbb{S}^2$ possède un lacet géodésique.

3. Les surfaces minimales

Les surfaces minimales sont des généralisations des géodésiques en dimension supérieure. Nous

3. Sur une surface homéomorphe à une sphère, on a toujours $\int_\Sigma K da = 4\pi$.

FIGURE 3 – Le balayage standard de $\mathbb{S}^2$ et un balayage général de Σ.



présentons la théorie en dimension 3 tout en sachant qu'une grande partie de ce que nous allons décrire se généralise en dimension supérieure.

Fixons donc une sous-variété M de dimension 3 de $\mathbb{R}^k$ et considérons Σ une surface contenue dans M. Nous pouvons calculer son aire $\mathcal{A}(\Sigma)$. Nous dirons que Σ est une surface minimale de M si Σ est un point critique de cette fonctionnelle d'aire. Décrivons un peu mieux ce que cela signifie. Considérons pour cela $N(p)$ le vecteur unitaire normal à Σ en p tangent à M et u une fonction définie sur Σ. On définit alors Σ_u la surface de M qui est construite en « poussant » la surface Σ dans la direction $N(p)$ à distance $u(p)$ pour chaque point p de Σ (si $u(p)<0$ on pousse dans la direction de $-N(p)$). Si u est petit, Σ_u est une déformation de Σ. Dire que Σ est minimale revient donc à écrire

$$0=\frac{d}{dt}\mathcal{A}(\Sigma_{tu})_{|t=0}$$

pour toute fonction u. Or un calcul donne

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(\Sigma_{tu})_{|t=0}=-\int_\Sigma Hu\,da \qquad (2)$$

où H est la courbure moyenne de Σ dans M. Ainsi une surface minimale est précisément une surface dont la courbure moyenne est nulle en tout point.

Comme pour les géodésiques, on peut alors poser la question de l'existence d'une surface minimale dans M. À nouveau, on peut chercher à la construire par un procédé de minimisation direct mais comme pour les géodésiques cela ne répond pas au problème pour toutes les sous-variétés M : par exemple, si M est homéomorphe à $\mathbb{S}^3$. Almgren et Pitts vont résoudre cette difficulté en construisant une théorie de min-max pour les surfaces minimales.

3.1 – Les surfaces minimales de $\mathbb{S}^3$

Avant de présenter la théorie de Almgren et Pitts, nous allons d'abord exposer certains aspects de la théorie des surfaces minimales dans $\mathbb{S}^3=\{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1\}$.

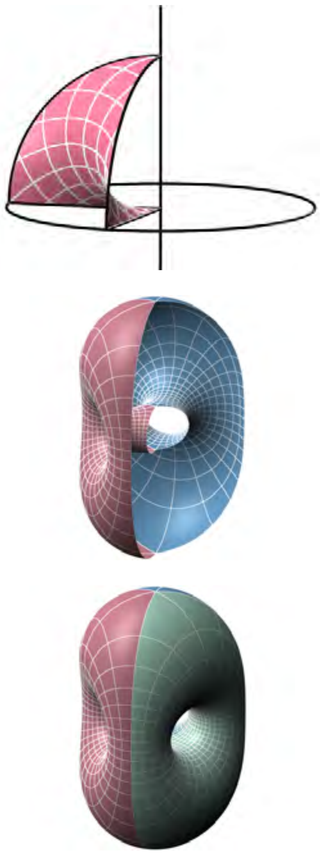
Tout d'abord, on connaît des exemples explicites de surfaces minimales. Les équateurs, par exemple $\{x_4=0\}$, sont des sphères minimales d'aire 4π. On peut montrer que ce sont les seules surfaces minimales de $\mathbb{S}^3$ à être topologiquement des sphères et que toute autre surface minimale a une aire strictement supérieure à 4π. Le tore de Clifford

$$\mathbb{T}=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{S}^3\,|\,x_1^2+x_2^2=x_3^2+x_4^2=1/2\}$$

est aussi minimal, de genre[4] 1 et d'aire $2\pi^2$. H. Blaine Lawson [10] a construit de nombreux autres exemples de surfaces minimales de genre supérieur dans $\mathbb{S}^3$. Pour cela, il considère un contour fait de segments géodésiques dans $\mathbb{S}^3$ et construit, par minimisation de l'aire, un disque minimal bordé par ce contour (voir Figure 4). On dit qu'il résout un problème de Plateau. En complétant par réflexions autour des arcs géodésiques du contour, il obtient des exemples sans bord qui possèdent des symétries.

4. Le genre d'une surface compte le nombre de « trous » d'une surface : une sphère est de genre 0, un tore de genre 1 et la surface de la Figure 1 de genre 2.

FIGURE 4 – Problème de Plateau et surface de Lawson de genre 2 d'après Lynn Heller, Sebastian Heller et Nick Schmitt [8].

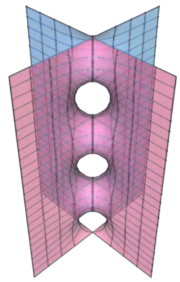


Une autre approche pour construire des surfaces minimales dans $\mathbb{S}^3$ est la technique dite de désingularisation. Si on regarde deux équateurs $\{x_3 = 0\}$ et $\{x_4 = 0\}$, leur union peut être comprise comme une surface minimale qui serait singulière le long du cercle d'intersection de ces deux sphères. La désingularisation consiste à montrer qu'il existe une surface minimale proche de l'union de ces deux sphères mais sans lieu singulier. L'outil fondamental d'une telle construction est la surface minimale de Scherk (voir Figure 5) qui désingularise dans $\mathbb{R}^3$ l'union de deux plans orthogonaux.

Nikolaos Kapouleas [9] a décrit quand et comment une telle désingularisation pouvait être réalisée (Figure 6).

Les surfaces minimales sont des points critiques de la fonctionnelle $\mathcal{A}$, ce sont donc des points où la différentielle de $\mathcal{A}$ s'annule.

FIGURE 5 – La surface de Scherk.

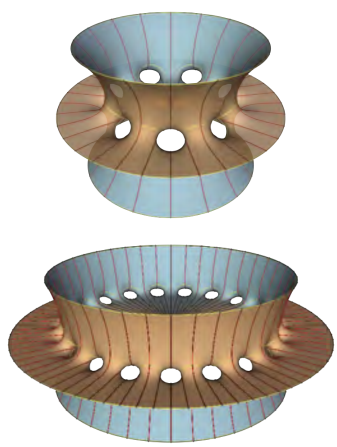


En un tel point, on peut s'intéresser à la différentielle seconde de $\mathcal{A}$. En reprenant, les notations introduites plus haut, si Σ est minimale dans $\mathbb{S}^3$, on montre :

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{A}(\Sigma_{tu})_{|t=0} = \int_\Sigma |\nabla u|^2 - (2 + \|A\|^2)u^2\, da =: Q(u)$$

où ∇u est le gradient de u le long de Σ et $\|A\|$ désigne la norme de la seconde forme fondamentale de Σ. Q est une forme quadratique en u d'indice fini. Cet indice qui est la dimension de l'espace des directions négatives de Q compte donc le nombre de déformations indépendantes de Σ qui font décroître l'aire de Σ (au moins à l'ordre deux). L'équateur a pour indice 1 et le tore de Clifford a pour indice 5. Francisco Urbano [17] a montré que ce sont les seules surfaces minimales de $\mathbb{S}^3$ d'indice au plus 5. Nous y reviendrons dans la suite.

FIGURE 6 – Désingularisation d'un caténoïde et d'un plan.



On pourra consulter le site de Nick Schmitt [16] pour une documentation en image sur les surfaces minimales de $\mathbb{S}^3$.

3.2 – La théorie de Almgren et Pitts

Nous allons maintenant décrire la théorie de Almgren et Pitts pour une sous-variété M de dimension 3. Celle-ci s'appuie sur la théorie de la mesure géométrique et nous allons en simplifier certains aspects afin d'en faciliter l'accès.

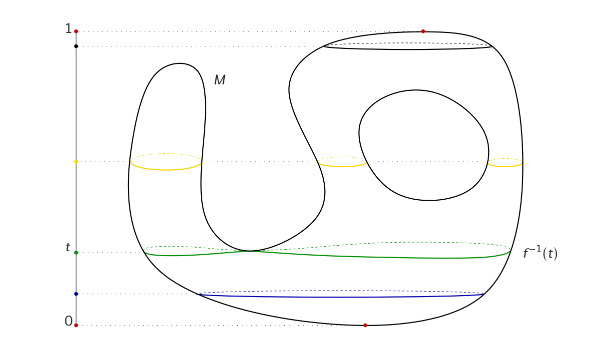
Tout d'abord, nous introduisons $\mathcal{Z}_2(M)$ l'espace des « surfaces » de M (l'indice 2 fait référence à la dimension 2 des surfaces). Cet espace est muni d'une topologie que nous décrirons en disant juste que deux surfaces sont proches si la partie de M contenue entre ces deux surfaces a un petit volume. Par exemple, dans $\mathbb{S}^3$, le parallèle $\{x_4 = t\}$ converge vers l'équateur $\{x_4 = 0\}$ lorsque $t \to 0$. Mais que dire de la limite de l'union $\{x_4 = t\} \cup \{x_4 = -t\}$? La topologie nous dit qu'elle converge vers $\{x_4 = 0\}$ compté deux fois. En fait, un élément T de $\mathcal{Z}_2(M)$ peut être décrit comme une somme formelle $T = \sum_{i=1}^k n_i S_i$ où $n_i \in \mathbb{Z}$ et S_i est une surface de M dont la régularité est *a priori* seulement Lipschitz. Les nombres n_i sont des multiplicités que l'on affecte à chacune des surfaces S_i. Ainsi on peut écrire

$$\{x_4 = t\} + \{x_4 = -t\} \xrightarrow[t\to 0]{} 2\{x_4 = 0\}.$$

On peut alors étendre la définition de l'aire par $\mathcal{A}(T) = \sum_{i=1}^k |n_i|\mathcal{A}(S_i)$. Notons aussi que $\mathcal{Z}_2(M)$ contient un élément nul ($n_i = 0$ pour tout i) dont l'aire est 0.

Comme à la Partie 1.2, on souhaite développer une approche de min-max avec $X = \mathcal{Z}_2(M)$ et $f = \mathcal{A}$. Dans un premier temps, Almgren [1] étudie la topologie de $\mathcal{Z}_2(M)$ et montre qu'il existe des lacets basés en 0 qui ne sont pas homotopiquement triviaux [5]. Voici comment décrire un tel lacet non homotopiquement trivial. Soit $f : M \to [0,1]$ une fonction de Morse (il en existe toujours), on pose alors $\gamma_0(t) = f^{-1}(t) \in \mathcal{Z}_2(M)$ (Figure 7). Notons que $\gamma_0(0)$ et $\gamma_0(1)$ sont chacun un point ce qui correspond à l'élément 0 de $\mathcal{Z}_2(M)$: γ_0 est bien un lacet. De plus, $\mathrm{Vol}(f^{-1}([t,s]))$ tend vers 0 lorsque $s \to t$: γ_0 est bien continu.

Figure 7 – Le balayage standard de M.



On pourrait alors directement construire une approche de min-max à partir de γ_0. La théorie est un peu plus générale et nous en aurons besoin dans la suite. On introduit la notion de balayage à k paramètres : ce sont les applications continues

$$\varphi : I^k \longrightarrow \mathcal{Z}_2(M)$$

où $I = [0,1]$. Tout d'abord, le lacet γ_0 que nous avons défini au paragraphe précédent est un balayage à un paramètre. Dans la partie précédente, les balayage que Birkhoff considérait étaient des familles à un paramètre de lacets paramétrés, ici on ne tient plus compte d'une éventuelle paramétrisation des surfaces.

On définit la largeur [6] d'un balayage par $L(\varphi) := \sup\{\mathcal{A}(\varphi(x)); x \in I^k\}$. Si φ_0 est un balayage, on note $[\varphi_0]$ l'ensemble des balayages φ homotopes à φ_0 relativement à ∂I^k (on ne déforme pas φ_0 le long du bord de l'hypercube I^k). On définit enfin une valeur de min-max appelée largeur de $[\varphi_0]$ par

$$L([\varphi_0]) = \inf\{L(\varphi); \varphi \in [\varphi_0]\}.$$

Pitts [13], un étudiant d'Almgren, montre alors :

Théorème du min-max. Si $L([\varphi_0]) > \sup\{\mathcal{A}(\varphi_0(x)), x \in \partial I^k\}$, il existe des surfaces minimales $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_p$ dans M disjointes telles que

$$L([\varphi_0]) = \sum_{i=1}^p n_i \mathcal{A}(\Sigma_i), \; n_i \in \mathbb{N}.^{7}$$

Ainsi ce théorème affirme que la valeur de min-max $L([\varphi_0])$ est l'aire d'un certain point critique de $\mathcal{A}$. La condition $L([\varphi_0]) > \sup\{\mathcal{A}(\varphi_0(x)), x \in \partial I^k\}$

5. En fait, Almgren montre, entre autre, que le premier groupe d'homotopie de $\mathcal{Z}_2(M)$ est isomorphe au groupe d'homologie $H_3(M)$.
6. On utilise ici le mot largeur pour traduire le terme width utilisé par Almgren et Pitts même s'il ne rend pas bien compte de sa nature géométrique.
7. Ce théorème est valable en toute dimension, toutefois, dans M^{m+1} avec $m \geqslant 7$, les hypersurfaces Σ_i peuvent présenter un lieu singulier de codimension 7.

affirme essentiellement que l'information topologique contenue dans φ_0 ne se lit pas sur ∂I^k. Par ailleurs, ce résultat ne donne pas d'informations sur les Σ_i : quelle est leur topologie par exemple ?

Si on considère le lacet γ_0 construit par Almgren, on a $\sup\{\mathcal{A}(\gamma_0(x)), x \in \partial I\} = 0$ puisque $\gamma_0(0) = \gamma_0(1) = 0$. Le lacet γ_0 étant non homotopiquement trivial, Almgren montre que $L([\gamma_0]) > 0$. Le théorème de min-max affirme alors qu'il existe une surface minimale dans M, ce qui était la question initialement posée.

Que dit cette approche pour $\mathbb{S}^3$? La fonction coordonnée x_4 est une fonction de Morse sur $\mathbb{S}^3$, on a donc un balayage standard $\overline{\gamma} : t \mapsto x_4^{-1}(2t-1)$ donné par les parallèles de $\mathbb{S}^3$. On a $L(\overline{\gamma}) = 4\pi$, en fait on peut montrer que $\overline{\gamma}$ est optimal pour le problème de min-max, $L([\overline{\gamma}]) = 4\pi$ et que les équateurs sont précisément les surfaces minimales produites par cette approche. De plus, ceci nous dit que, si γ est un balayage homotope à $\overline{\gamma}$ et $L(\gamma) = 4\pi$, il existe $t \in I$ tel que $\gamma(t)$ est un équateur de $\mathbb{S}^3$. Cependant, cette approche ne nous dit pas comment construire d'autres surfaces minimales de $\mathbb{S}^3$.

4. La conjecture de Willmore

Dans un article de 1965, Willmore [18] s'intéresse à la fonctionnelle qui est définie sur les surfaces Σ de $\mathbb{R}^3$ par :

$$\mathcal{V}(\Sigma) = \frac{1}{4}\int_\Sigma H^2\, da$$

où H est la courbure moyenne de Σ. Cette quantité est maintenant appelée énergie de Willmore.

Willmore montre que pour toute surface $\mathcal{V}(\Sigma) \geqslant 4\pi$ avec égalité uniquement pour les sphères euclidiennes. Willmore s'intéresse au lien entre la topologie de Σ et cette énergie. Il constate que, pour une certaine classe de tores T, $\mathcal{V}(T) \geqslant 2\pi^2$ avec égalité pour des tores particuliers appelés cyclides de Dupin. Il formule alors la conjecture.

Conjecture de Willmore. Pour toute surface Σ de genre 1 (un tore), on a $\mathcal{V}(\Sigma) \geqslant 2\pi^2$ avec égalité uniquement pour les cyclides de Dupin.

Une propriété importante de l'énergie de Willmore est son invariance conforme : ceci signifie que si $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est conforme [8], alors $\mathcal{V}(F(\Sigma)) = \mathcal{V}(\Sigma)$. Cette propriété est à l'origine de l'intérêt qui a été porté à l'énergie de Willmore et à la conjecture.

Cette propriété permet aussi de reformuler la conjecture sous la forme qui sera étudiée par Marques et Neves. Une projection stéréographique $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}^3$ est une application conforme. Ainsi si Σ est une surface de $\mathbb{S}^3$ on peut définir son énergie de Willmore par $\mathcal{W}(\Sigma) = \mathcal{V}(\pi(\Sigma))$. Un calcul montre que

$$\mathcal{W}(\Sigma) = \int_\Sigma (1 + \frac{\overline{H}^2}{4})\, da = \mathcal{A}(\Sigma) + \frac{1}{4}\int_\Sigma \overline{H}^2\, da$$

où $\overline{H}$ est la courbure moyenne de Σ calculée dans $\mathbb{S}^3$. Notons que $\mathcal{W}$ est aussi invariante conforme. Sur l'écriture ci-dessus, on voit que, pour les surfaces minimales de $\mathbb{S}^3$, l'énergie de Willmore se résume à leur aire et qu'elles sont donc nécessairement des points critiques de $\mathcal{W}$. De plus, pour $\mathbb{T}$, le tore de Clifford, on a $\mathcal{W}(\mathbb{T}) = 2\pi^2$ et les cyclides de Dupin sont précisément les surfaces de la forme $\pi(\mathbb{T})$.

Ainsi la question initiale de Willmore de comprendre le lien entre topologie des surfaces et $\mathcal{V}$, est liée à la compréhension du lien entre la topologie d'une surface minimale de $\mathbb{S}^3$ et son aire. Par exemple les surfaces minimales construites par Lawson ont leur aire comprise entre 4π et 8π et réalisent toutes les topologies possibles ; lorsque le genre tend vers l'infini, l'aire tend 8π. Lawson a-t-il construit toutes les surfaces minimales de $\mathbb{S}^3$ d'aire inférieure à 8π ? Existe-t-il une surface minimale d'aire exactement 8π ? Voici des questions naturelles et toujours ouvertes en lien avec le problème initial de Willmore.

Dans leur article [12], Marques et Neves montrent

Théorème A. Soit $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ une surface minimale de genre $g \geqslant 1$. Alors

$$\mathcal{A}(\Sigma) \geqslant 2\pi^2$$

et il y a égalité si et seulement si Σ est isométrique dans $\mathbb{S}^3$ au tore de Clifford $\mathbb{T}$.

Ce théorème répond alors positivement à la conjecture de Willmore :

Théorème B. Soit $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ une surface de genre $g \geqslant 1$. Alors

$$\mathcal{W}(\Sigma) \geqslant 2\pi^2$$

et il y a égalité si et seulement si Σ est l'image conforme du tore de Clifford $\mathbb{T}$.

8. F est conforme si sa différentielle dF_p est une similitude pour tout p.

Applications des surfaces de Willmore

L'énergie étudiée par Willmore apparaît en fait dans des travaux antérieurs et dans d'autres contextes. Elle apparaît par exemple comme énergie de flexion dans l'étude des plaques minces menée par Sophie Germain. Il s'agit aussi du terme principal de l'énergie de Helfrich associée à l'élasticité des membranes cellulaires. C'est aussi un des termes de la masse de Hawking d'une surface en relativité générale.

Ainsi les surfaces de Willmore qui sont les points critiques de cette énergie sont des objets qui apparaissent naturellement dans certains problèmes physiques ou biologiques. En architecture, on peut aussi citer l'apparition de $\mathcal{V}$ dans l'énergie de flexion lors de la mise sous tension de réseaux de Chebycheff appelés « Gridshell » (voir Figure 8).

Figure 8 – Cathédrale éphémère à Créteil en Gridshell (réalisation : T/E/S/S Atelier d'ingénierie et Laboratoire Navier).

5. La preuve de Marques et Neves

Nous allons maintenant présenter la preuve des théorèmes A et B par Marques et Neves. La question qui les guide est de savoir s'il est possible de construire le tore de Clifford comme solution d'un certain problème de min-max avec la théorie de Almgren et Pitts. Le tore de Clifford est d'indice 5, ceci suggère qu'il faut considérer des balayages à cinq paramètres.

La famille canonique

La première partie du travail consiste à associer un balayage à cinq paramètres à toute surface Σ de $\mathbb{S}^3$.

Une surface Σ sépare $\mathbb{S}^3$ en deux domaines Ω_- et Ω_+. Si $t \in [-\pi, \pi]$ on peut considérer l'ensemble des points de $\mathbb{S}^3$ à distance $|t|$ de Σ. Plus précisément, on définit

$$\Sigma_t = \begin{cases} \Sigma & \text{si } t = 0 \\ \{x \in \mathbb{S}^3 | d_{\mathbb{S}^3}(x, \Sigma) = -t\} \cap \Omega_- & \text{si } t < 0 \\ \{x \in \mathbb{S}^3 | d_{\mathbb{S}^3}(x, \Sigma) = t\} \cap \Omega_+ & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

En tant qu'élément de $\mathcal{Z}_2(\mathbb{S}^3)$, Σ_t dépend continûment de t. De plus, comme le diamètre de $\mathbb{S}^3$ est π, on a $\Sigma_{\pm\pi} = 0$. Le réel t sera un paramètre de notre balayage. Par ailleurs, un résultat dû à Antonio Ros [15] affirme que

$$\mathcal{A}(\Sigma_t) \leqslant \mathcal{W}(\Sigma), \tag{3}$$

faisant ainsi un lien entre aire et énergie de Willmore. De plus, si Σ n'est pas une sphère, on a égalité dans (3) uniquement si $t = 0$ et Σ est minimale.

Les autres paramètres du balayage vont exploiter l'invariance conforme de $\mathcal{W}$. Si p est dans la boule unité ouverte B de $\mathbb{R}^4$, on définit la transformation $F_p : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ par

$$F_p(x) = \frac{(1 - |p|^2)}{|x - p|^2}(x - p) - p.$$

La transformation F_p est conforme et, modulo les isométries, $\{F_p\}_{p \in B}$ décrit toutes les transformations conformes de $\mathbb{S}^3$. On peut alors définir pour $(p, t) \in B \times [-\pi, \pi]$, $\Sigma_{p,t} = (F_p(\Sigma))_t \in \mathcal{Z}_2(\mathbb{S}^3)$. L'application $(p, t) \mapsto \Sigma_{p,t}$ est continue et

$$\mathcal{A}(\Sigma_{p,t}) \leqslant \mathcal{W}(F_p(\Sigma)) = \mathcal{W}(\Sigma).$$

Lorsque (p, t) tend vers un point de $\partial B \times [-\pi, \pi]$, Marques et Neves montrent que $\Sigma_{p,t}$ tend nécessairement vers un parallèle de $\mathbb{S}^3$. Ainsi, après un reparamétrage de la famille près du bord de $B \times [-\pi, \pi]$, ils arrivent à étendre la famille à $\overline{B} \times [-\pi, \pi]$ et définissent deux applications continues

$$\varphi_0 : \overline{B} \times [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathcal{Z}_2(\mathbb{S}^3)$$

et $Q : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ qui satisfont aux propriétés suivantes :

1. $\varphi_0(p,-\pi)$ et $\varphi_0(p,\pi)$ sont l'élément 0 de $\mathcal{Z}_2(\mathbb{S}^3)$ pour $p \in \overline{B}$;
2. si $p \in \mathbb{S}^3 = \partial\overline{B}$, alors $\varphi_0(p,\cdot)$ est un balayage standard de $\mathbb{S}^3$ par des parallèles de $\mathbb{S}^3$ centrés en $Q(p)$; plus précisément $\varphi_0(p,t) = \{x \in \mathbb{S}^3 \mid \langle x, Q(p)\rangle = \sin(t/2)\}$;
3. $\mathcal{A}(\varphi(p,t)) \leqslant W(\Sigma)$.

Notons que $\overline{B}\times[-\pi,\pi]$ est homéomorphe à I^5, φ_0 est donc un balayage à cinq paramètres au sens de Almgren et Pitts. Ce balayage est appelé famille canonique associée à Σ.

Marques et Neves montrent de plus une propriété remarquable de l'application Q. Son degré est relié à la topologie de Σ :

$$\deg(Q) = \mathrm{genre}(\Sigma). \tag{4}$$

Une estimée de la largeur

Pour appliquer le théorème de min-max de Pitts au balayage φ_0, on souhaite vérifier l'hypothèse du théorème

$$L([\varphi_0]) > \sup\{\mathcal{A}(\varphi_0(p,t)); (p,t) \in \partial(\overline{B}\times[-\pi,\pi])\} = 4\pi.$$

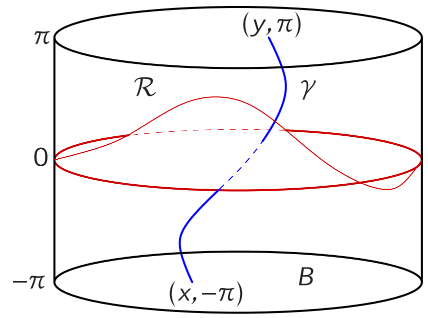
La valeur 4π vient des propriétés 1. et 2. ci-dessus. On va expliquer pourquoi $\mathrm{genre}(\Sigma) \geqslant 1$ implique $L([\varphi_0]) > 4\pi$.

La démonstration est par contradiction. On considère un balayage $\varphi \in [\varphi_0]$ tel que $L(\varphi) = 4\pi$. On choisit γ un chemin dans $\overline{B}\times[-\pi,\pi]$ allant de $(x,-\pi)$ à (y,π) ($x,y \in \overline{B}$) (Figure 9). Alors $\varphi\circ\gamma$ est un balayage de $\mathbb{S}^3$ à un paramètre avec $L(\varphi\circ\gamma) \leqslant 4\pi$. D'après les propriétés 1. et 2., $\varphi\circ\gamma$ est homotope à un balayage standard de $\mathbb{S}^3$. Ainsi d'après la discussion de la fin de la Partie 3.2, $L(\varphi\circ\gamma) \geqslant 4\pi$; donc $L(\varphi\circ\gamma) = 4\pi$ et il existe t tel que $\varphi\circ\gamma(t)$ est un équateur de $\mathbb{S}^3$. Autrement dit, on ne peut pas aller de la face du bas de $\overline{B}\times[-\pi,\pi]$ à la face du haut sans passer par un point (p,t) où $\varphi(p,t)$ est un équateur.

Ceci dit qu'il existe une sous-variété $\mathcal{R}$ de dimension 4 qui sépare ces deux faces avec

1. $\varphi(p,t)$ est un équateur pour $(p,t) \in \mathcal{R}$,
2. $\partial\mathcal{R} = \partial B \times \{0\}$.

Figure 9 – L'hypersurface $\mathcal{R}$.



En fait, on peut même définir $\widetilde{Q} : \mathcal{R} \to \mathbb{S}^3$ de sorte que $\varphi((p,t)) = \{x \in \mathbb{S}^3 \mid \langle x, \widetilde{Q}((p,t))\rangle = 0\}$ et $\widetilde{Q}((p,0)) = Q(p)$. Autrement dit, on a réussi à étendre Q à une sous-variété bordée par $\mathbb{S}^3$. Ceci est impossible si $\deg(Q) \neq 0$; or, d'après (4), $\deg(Q) = \mathrm{genre}(\Sigma) \geqslant 1$. On a donc l'estimée recherchée sur la largeur $L([\varphi_0])$.

La preuve du Théorème A

On considère une surface minimale de $\mathbb{S}^3$ dont l'aire est la plus petite parmi toutes les surfaces minimales de genre supérieure à 1 (une telle surface minimale existe), nous allons voir que cette surface a un indice inférieur à 5. Son aire est nécessairement inférieure à $2\pi^2$, l'aire du tore de Clifford. On considère φ_0 la famille canonique associée à Σ.

D'après la partie précédente, $L([\varphi_0]) > 4\pi$ et le théorème de min-max s'applique. On a donc des surfaces minimales Σ_i et des multiplicités n_i telles que

$$\sum_{i=1}^{p} n_i\mathcal{A}(\Sigma_i) = L([\varphi_0]) \leqslant L(\varphi_0) \leqslant \mathcal{W}(\Sigma) = \mathcal{A}(\Sigma) \leqslant 2\pi^2. \tag{5}$$

Toute surface minimale de $\mathbb{S}^3$ a une aire supérieure à 4π, ceci implique que $p = 1$ et $n_1 = 1$ (en effet, $2\pi^2 < 2\times 4\pi$). De plus Σ_1 ne peut pas être un équateur sinon $L([\varphi_0]) = 4\pi$. Ainsi Σ_1 est de genre non nul et $\mathcal{A}(\Sigma_1) \geqslant \mathcal{A}(\Sigma)$ par définition de Σ. Ainsi on a des égalités dans la chaîne d'inégalités (5). Ceci nous dit que φ_0 est optimale pour le problème de min-max et $\mathcal{A}(\Sigma_1) = \mathcal{A}(\Sigma)$.

Les cinq paramètres de φ_0 donnent cinq déformations qui réduisent l'aire de Σ. Si l'indice de Σ était au moins 6, on pourrait alors utiliser cette sixième direction pour déformer φ_0 en un balayage φ tel que $L(\varphi) < \mathcal{A}(\Sigma)$. Ceci est impossible car $L([\varphi_0]) = \mathcal{A}(\Sigma)$.

L'indice de Σ est donc au plus 5 et Σ est le tore de Clifford grâce au théorème de Urbano (voir Partie 3.1). Ceci finit la preuve du théorème A.

La conjecture de Willmore

Démontrons maintenant le Théorème B. On considère Σ une surface de $\mathbb{S}^3$ de genre non nul avec $\mathcal{W}(\Sigma) < 8\pi$ (sinon il n'y a rien à montrer). On lui associe sa famille canonique φ_0 et on applique le théorème de min-max comme précédemment. On obtient aussi une chaîne d'inégalité du type (5) avec $\mathcal{W}(\Sigma) < 8\pi$ à la place des deux derniers termes. On conclut aussi que $L([\varphi_0]) = \mathcal{A}(\Sigma_1)$ avec Σ_1 minimale de genre non nul. Donc, d'après le Théorème A, $\mathcal{W}(\Sigma) \geqslant \mathcal{A}(\Sigma_1) \geqslant 2\pi^2$.

En cas d'égalité, φ_0 est optimal pour le problème de min-max donc $\mathcal{W}(\Sigma) = \mathcal{A}(\Sigma_{p,t}) = 2\pi^2$. Ceci implique que $t = 0$ et Σ_p est un tore de Clifford : Σ est l'image conforme d'un tore de Clifford.

6. Autour du théorème de min-max

Pour ceux dont la curiosité ne serait pas comblée, disons quelques mots de travaux plus récents. On a vu que, dans $\mathbb{S}^3$, il existe une infinité de surfaces minimales différentes. Une conjecture de Shing-Tung Yau de 1982 prédit l'existence d'une infinité de surfaces minimales dans toutes les variétés compactes de dimension 3. Dans une récente prépublication [11] Marques et Neves démontrent le résultat suivant.

Théorème. *Une variété riemannienne (M,g) compacte sans bord de dimension $n+1$ $(2 \leqslant n \leqslant 6)$ contient au moins $n+1$ hypersurfaces minimales distinctes. De plus, si deux hypersurfaces minimales de M ne peuvent être disjointes, M contient une infinité d'hypersurfaces minimales.*

En particulier si la courbure de Ricci de M est strictement positive, un théorème de Theodore Frankel [5] affirme que deux hypersurfaces minimales de M doivent obligatoirement s'intersecter. Le théorème répond donc positivement à la conjecture de Yau dans le cas de la courbure de Ricci strictement positive.

Disons quelques mots de la preuve du résultat ci-dessus. On considère la notion de p-balayages. Ce sont les applications continues $\varphi : X \to \mathcal{Z}_n(M)$ où X est un complexe simplicial de dimension p qui remplace I^k et $\mathcal{Z}_n(M)$ est l'espace des hypersurfaces de M. On demande de plus que φ satisfasse à une propriété topologique que l'on va caractériser par la propriété de type degré suivante :

> *Pour tout ensemble de points $\{x_1,\dots,x_p\}$ de M, il existe $q \in X$ tel que $\varphi(q)$ contienne exactement cette collection de points.*

On note P_p l'ensemble des p-balayages M et on peut définir la p-largeur de M comme étant la valeur de min-max :

$$\omega_p(M) = \inf_{\varphi \in P_p} \sup\{\varphi(q), q \in X\}.$$

Ces quantités apparaissent dans des travaux de Mikhael Gromov [6] et Larry Guth [7], où ils caractérisent leur comportement asymptotique.

Théorème. *Il existe une constante $C = C(M,g)$ telle que pour $p \in \mathbb{N}^*$*

$$\frac{1}{C} p^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \omega_p(M) \leqslant C p^{\frac{1}{n+1}}.$$

L'idée est maintenant d'appliquer le théorème de min-max pour écrire les p-largeurs en termes d'aires d'hypersurfaces minimales. Dans un premier temps, Marques et Neves montrent que si M ne contient qu'un nombre fini d'hypersurfaces minimales, la suite $(\omega_p(M))_{p\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Appliquons donc maintenant le théorème de min-max aux p-largeurs, on a donc des hypersurfaces minimales disjointes et des multiplicités telles que

$$\omega_p(M) = n_{p,1}\mathcal{A}(\Sigma_{p,1}) + \cdots + n_{p,\ell}\mathcal{A}(\Sigma_{p,\ell}).$$

Si deux hypersurfaces minimales de M ne peuvent pas être disjointes, l'écriture ci-dessus se résume donc à $\omega_p(M) = n_p\mathcal{A}(\Sigma_p)$. Ainsi si M ne contient qu'un nombre fini d'hypersurfaces minimales $\Sigma_1,\dots,\Sigma_\ell$, la suite $(\omega_p(M))_{p\in\mathbb{N}}$ est contenue dans l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{\ell} \mathcal{A}(\Sigma_i)\mathbb{N}^*$. Or cet ensemble ne peut contenir une suite strictement croissante vérifiant le comportement asymptotique donné par Gromov et Guth.

Références

[1] F. J. Almgren Jr. « The homotopy groups of the integral cycle groups ». *Topology* **1** (1962), p. 257–299.

[2] M. S. Berger et E. Bombieri. « On Poincaré's isoperimetric problem for simple closed geodesics ». *J. Funct. Anal.* **42** (1981), p. 274–298.

[3] G. D. Birkhoff. « Dynamical systems with two degrees of freedom ». *Trans. Amer. Math. Soc.* **18** (1917), p. 199–300.

[4] C. B. Croke. « Poincaré's problem and the length of the shortest closed geodesic on a convex hypersurface ». *J. Differential Geom.* **17** (1982), 595–634 (1983).

[5] T. Frankel. « On the fundamental group of a compact minimal submanifold ». *Ann. of Math. (2)* **83** (1966), p. 68–73.

[6] M. Gromov. « Dimension, nonlinear spectra and width ». In : *Geometric aspects of functional analysis (1986/87)*. Vol. 1317. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1988, p. 132–184.

[7] L. Guth. « Minimax problems related to cup powers and Steenrod squares ». *Geom. Funct. Anal.* **18** (2009), p. 1917–1987.

[8] L. Heller, S. Heller et N. Schmitt. « Navigating the space of symmetric CMC surfaces ». preprint, arXiv:1501.01929.

[9] N. Kapouleas. « On desingularizing the intersections of minimal surfaces ». In : *Proceedings of the 4th International Congress of Geometry (Thessaloniki, 1996)*. Giachoudis-Giapoulis, Thessaloniki, 1997, p. 34–41.

[10] H. B. Lawson Jr. « Complete minimal surfaces in ^{3} ». *Ann. of Math. (2)* **92** (1970), p. 335–374.

[11] F. C. Marques et A. Neves. « Existence of infinitely many minimal hypersurfaces in positive Ricci curvature ». preprint, arXiv:1311.6501.

[12] F. C. Marques et A. Neves. « Min-Max theory and the Willmore conjecture ». *Ann. of Math. (2)* **179** (2014), p. 683–782.

[13] J. T. Pitts. *Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds*. **27**. Mathematical Notes. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1981, p. iv+330.

[14] H. Poincaré. « Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes ». *Trans. Amer. Math. Soc.* **6** (1905), p. 237–274.

[15] A. Ros. « The Willmore conjecture in the real projective space ». *Math. Res. Lett.* **6** (1999), p. 487–493.

[16] N. Schmitt. *Surface Gallery*. `http://www.math.uni-tuebingen.de/user/nick/`.

[17] F. Urbano. « Minimal surfaces with low index in the three-dimensional sphere ». *Proc. Amer. Math. Soc.* **108** (1990), p. 989–992.

[18] T. J. Willmore. « Note on embedded surfaces ». *An. Şti. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi Secţ. I a Mat. (N.S.)* **11B** (1965), p. 493–496.

Laurent Hauswirth

Université de Marne la Vallée

Laurent Hauswirth est Maître de conférences. Son travail de recherche porte sur la géométrie des surfaces minimales et leur lien avec les systèmes intégrables.

Laurent Mazet

Université Paris-Est Créteil

Laurent Mazet est chargé de recherche. Son travail de recherche porte sur la géométrie des surfaces minimales et à courbure moyenne constante et leur lien avec certains problèmes d'analyse géométrique.

Comment l'équation de la chaleur explore-t-elle des inégalités géométriques et fonctionnelles ?

• M. Ledoux

Des travaux récents ont exploité les propriétés de monotonie du flot de la chaleur dans l'étude de diverses inégalités pour intégrales multiples, ainsi que d'inégalités isopérimétriques. Initialement considérée dans l'espace euclidien, la méthode s'est amplifiée à divers cadres géométriques, jusqu'à des modèles discrets. Ces développements, au carrefour de l'analyse, de la géométrie et des probabilités, ont trouvé également un écho en analyse booléenne en informatique théorique, dans l'étude de la stabilité au bruit.

Cet exposé propose une introduction élémentaire à ces idées, à travers quelques illustrations simples d'inégalités intégrales (comme celle de Hölder) ou isopérimétriques. Le flot de la chaleur mis en œuvre sera le plus souvent celui régi par l'équation de la chaleur traditionnelle. Sur $\mathbb{R}^n$, soit

$$h_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \, \mathrm{e}^{-|x|^2/4t}, \quad t > 0, \; x \in \mathbb{R}^n,$$

le noyau de la chaleur classique (où $|\cdot|$ est la norme euclidienne), solution fondamentale de l'équation $\partial_t h_t = \Delta h_t$, pour Δ le laplacien sur $\mathbb{R}^n$. Par convolution, ce noyau engendre un semi-groupe d'opérateurs agissant sur toute fonction, par exemple mesurable bornée, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} H_t\varphi(x) &= \varphi * h_t(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, \mathrm{e}^{-|x-y|^2/4t} \, \frac{dy}{(4\pi t)^{n/2}}, \\ &\qquad\qquad t > 0, \; x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

avec la convention $H_0 = \mathrm{Id}$. Sous forme probabiliste,

$$H_t\varphi(x) = \mathbb{E}\big(\varphi(x + B_{2t})\big)$$

où $(B_t)_{t \geqslant 0}$ est un mouvement brownien (issu de 0).

Pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue et bornée, la fonction $u(t,x) = H_t\varphi(x)$ est alors solution de l'équation aux dérivées partielles $\partial_t u = \Delta u$ sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^n$ avec condition initiale $u(0,\cdot) = \varphi$ (cf. [12]).

Au delà de l'exemple euclidien (auquel cet exposé se limite), la construction de noyaux et semi-groupes de la chaleur peut être étendue à de nombreux cadres, variétés riemanniennes, groupes de Lie, physique mathématique, graphes etc., jusqu'en mécanique ou biologie. L'équation de la chaleur peut être considérée sur des domaines de $\mathbb{R}^n$ avec conditions au bord (Dirichlet, Neumann, mixtes). Il fait sens de parler d'un semi-groupe de la chaleur sur une variété riemannienne, de générateur l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la variété. Il est également possible de considérer des opérateurs avec dérive du type (sur $\mathbb{R}^n$) $\mathrm{L} = \Delta - \langle \nabla V, \nabla \rangle$ où $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un potentiel régulier, la mesure $\mathrm{e}^{-V}dx$ étant invariante et symétrique par rapport à L et au semi-groupe $P_t = \mathrm{e}^{t\mathrm{L}}$, $t \geqslant 0$, qu'il engendre. La fonction $u = P_t\varphi$ est alors solution de l'équation de la chaleur $\partial_t u = \mathrm{L}u$ pour L avec condition initiale φ. D'un point de vue plus géométrique, l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure $\mathrm{e}^{-V}dx$ invariante pour L peut alors être analysé comme une variété à poids. L'exemple du potentiel quadratique $V(x) = \frac{|x|^2}{2}$ donne lieu au semi-groupe dit d'Ornstein-Uhlenbeck de mesure invariante la distribution normale $\mathrm{e}^{-|x|^2/2} \frac{dx}{(2\pi)^{n/2}}$.

Dans une formulation duale plus traditionnelle en équations aux dérivées partielles, l'équation de la chaleur $\partial_t u = \mathrm{L}u$ par rapport à l'opérateur $\mathrm{L} = \Delta - \langle \nabla V, \nabla \rangle$ se traduit par l'évolution de Fokker-Planck

$$\partial_t p = \Delta p + \nabla \cdot (p \nabla V)$$

le long d'une famille de densités de probabilités (par rapport à la mesure de Lebesgue) $p = p(t,x)$ $(= u\,\mathrm{e}^{-V})$ (cf. [12, 20]).

1. Flot de la chaleur et inégalités intégrales

Une première illustration du principe de monotonie le long de l'équation de la chaleur est décrite dans une démonstration (pas la plus simple ni la plus générale) de l'inégalité très classique de Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\theta g^{1-\theta} dx \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\, dx\right)^\theta \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\, dx\right)^{1-\theta}$$

pour des fonctions mesurable positives f, g sur $\mathbb{R}^n$ et $\theta \in [0,1]$. Pour établir cette inégalité, il suffit de montrer que, pour tout $t > 0$ et toutes fonctions positives f et g dans une classe de fonctions continues et bornées dense dans tous les espaces L^p,

$$H_t\big(f^\theta g^{1-\theta}\big) \leqslant (H_t f)^\theta (H_t g)^{1-\theta}. \qquad (1)$$

Par rapport à l'inégalité numérique de Hölder, il s'agit là d'une inégalité entre fonctions valide en tout point de $\mathbb{R}^n$ (omis dans les formules). Par définition de H_t, $\lim_{t\to\infty}(4\pi t)^{n/2} H_t\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, dx$ dans la classe considérée. Ainsi, après multiplication par $(4\pi t)^{n/2}$ des deux membres de (1) et passage à la limite, l'inégalité de Hölder s'ensuit.

L'inégalité (1) s'établit alors par un principe d'interpolation remontant aux travaux de J.-M. Duhamel au XIXᵉ siècle (cf. [13]) en montrant que la fonction

$$\Lambda(s) = H_s\Big((H_{t-s}f)^\theta (H_{t-s}g)^{1-\theta}\Big), \quad s \in [0,t],$$

est décroissante, de sorte que $\Lambda(t) \leqslant \Lambda(0)$ qui exprime (1). Pour vérifier que Λ est décroissante, il suffit de prendre sa dérivée (sur $]0,t[$). À cet effet, pour faciliter les écritures, posons

$$F = \ln H_{t-s} f, \quad G = \ln H_{t-s} g, \quad K = \theta F + (1-\theta) G$$

(fonctions de s et de la variable spatiale), et ainsi $\Lambda(s) = H_s(\mathrm{e}^K)$. Par la règle de dérivation des fonctions composées en le temps (et la linéarité des opérateurs H_s),

$$\Lambda'(s) = \partial_s H_s(\mathrm{e}^K) + H_s\big(\partial_s(\mathrm{e}^K)\big).$$

Or, d'après l'équation de la chaleur, $\partial_s F = -\mathrm{e}^{-F}\Delta(\mathrm{e}^F)$, avec l'identité similaire pour G, et donc

$$\partial_s(\mathrm{e}^K) = \mathrm{e}^K \partial_s K = -\mathrm{e}^K\Big[\theta\, \mathrm{e}^{-F}\Delta(\mathrm{e}^F) + (1-\theta)\mathrm{e}^{-G}\Delta(\mathrm{e}^G)\Big].$$

Comme par ailleurs $\partial_s H_s(\mathrm{e}^K) = \Delta H_s(\mathrm{e}^K) = H_s \Delta(\mathrm{e}^K)$ après une autre application de l'équation de la chaleur [1], il vient

$$\Lambda'(s) = H_s\Big(\Delta(\mathrm{e}^K) - \mathrm{e}^K\Big[\theta\, \mathrm{e}^{-F}\Delta(\mathrm{e}^F) + (1-\theta)\mathrm{e}^{-G}\Delta(\mathrm{e}^G)\Big]\Big).$$

Maintenant, par dérivation en espace, $\mathrm{e}^{-F}\Delta(\mathrm{e}^F) = \Delta F + |\nabla F|^2$ et de même pour G et K de sorte que, dans l'expression précédente, les termes linéaires s'éliminent et

$$\Lambda'(s) = H_s\Big(\mathrm{e}^K\Big[|\nabla K|^2 - \theta|\nabla F|^2 - (1-\theta)|\nabla G|^2\Big]\Big).$$

Comme $\nabla K = \theta \nabla F + (1-\theta)\nabla G$, cette expression est négative par convexité de la fonction quadratique et la conclusion s'ensuit.

Un aspect important de cette démonstration est qu'elle ramène une inégalité de type Hölder pour n'importe quelle valeur de $\theta \in [0,1]$ à une inégalité quadratique (autrement dit démontrer Hölder avec Cauchy-Schwarz !) et en un sens introduit de la géométrie dans les inégalités fonctionnelles.

Cette observation est clairement mise en évidence dans la famille des inégalités pour intégrales multiples dites de Brascamp-Lieb remontant aux travaux de ces auteurs dans les années soixante-dix. En effet, exactement le même schéma de démonstration permet d'établir la forme dite géométrique de ces inégalités.

Théorème 1. *Soient $u_1, \dots, u_m$ des vecteurs unités de $\mathbb{R}^n$ décomposant l'identité au sens où*

$$\sum_{k=1}^m c_k u_k \otimes u_k = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \qquad (2)$$

pour des réels $0 \leqslant c_k \leqslant 1$, $k = 1, \dots, m$ (autrement dit, tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ se décompose sous la forme $x = \sum_{k=1}^m c_k \langle u_k, x\rangle u_k$). Alors, pour toutes fonctions mesurables positives $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^m f_k^{c_k}\big(\langle u_k, x\rangle\big) dx \leqslant \prod_{k=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_k\, dx\right)^{c_k}. \qquad (3)$$

En prenant la trace dans (2), on a que $\sum_{k=1}^m c_k = n$ de sorte que (3) améliore l'inégalité de Hölder dans les directions u_k, $k = 1, \dots, m$. Par

1. La démonstration rigoureuse fait usage de la commutation $\Delta H_t \varphi = H_t \Delta \varphi$ qui se vérifie immédiatement sur les fonctions C^∞ à support compact, et s'étend par exemple à la classe de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, stable par H_t et dense dans les espaces L^p.

exemple, pour la décomposition de l'identité de $\mathbb{R}^2$ suivant les racines cubiques de l'unité,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_1^{2/3}(x) f_2^{2/3}\Big(-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{\sqrt{3}}{2}y\Big) f_3^{2/3}\Big(-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{\sqrt{3}}{2}y\Big)\,dx\,dy \leqslant \prod_{k=1}^{3}\bigg(\int_{\mathbb{R}} f_k\,dx\bigg)^{2/3}.$$

La démonstration du Théorème 1 suit donc celle de l'inégalité de Hölder présentée ci-dessus en analysant les variations de la fonction du temps

$$\Lambda(s) = H_s\Big(\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^m c_k F_k}\Big), \quad s\in[0,t],$$

où $F_k = \ln H_{t-s} g_k(x)$, $g_k(x) = f_k(\langle u_k, x\rangle)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $k=1,\ldots,m$. Le semi-groupe commutant aux projections sur les vecteurs u_k, $F_k = \ln H_{t-s} f_k(\langle u_k, x\rangle)$ ($H_{t-s} f_k$ signifiant l'application du semi-groupe de la chaleur uni-dimensionnel à la fonction d'une variable f_k) et donc

$$\nabla F_k = (\ln H_{t-s} f_k)'(\langle u_k, x\rangle)\, u_k .$$

La convexité quadratique est alors assurée par la décomposition (2) qui entraîne que pour tous $\alpha_1,\ldots,\alpha_m \in \mathbb{R}$,

$$\bigg|\sum_{k=1}^m c_k\,\alpha_k u_k\bigg|^2 \leqslant \sum_{k=1}^m c_k\,\alpha_k^2$$

appliquée pour $\alpha_k = (\ln H_{t-s} f_k)'(\langle u_k, x\rangle)$.

Le Théorème 1 admet des versions multi-dimensionnelles en remplaçant les projections sur les vecteurs u_k par des applications linéaires. Ces inégalités pour intégrales multiples remontent donc aux travaux de J. Brascamp et E. Lieb [7] qui les établissaient par des outils de réarrangements. F. Barthe [3] en propose une démonstration par transport optimal, établissant par la même occasion des formes inverses. L'approche par flot de la chaleur a été promue il y a quelques années par E. Carlen, E. Lieb, M. Loss [8] et J. Bennett, A. Carbery, M. Christ, T. Tao [5] qui mettent à profit ce nouvel outil à travers une analyse géométrique et combinatoire des fonctions extrémales. Le principe permet en outre de sortir du cas produit euclidien et d'obtenir des formes de ces inégalités sur la sphère (la motivation première de [8]), des espaces symétriques, des groupes de Lie, et même des modèles discrets comme le groupe symétrique cf. [4].

2. Hypercontractivité

Une première application significative des inégalités de Brascamp-Lieb a été le calcul de la constante optimale dans les inégalités de convolution de Young [7]. Voici une autre application, élémentaire. Notons tout d'abord que, par le simple changement de fonctions $f_k(x)$ en $f_k(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}$, $x\in\mathbb{R}$, et la compatibilité des exposants $\sum_{k=1}^m c_k = n$, la mesure de Lebesgue peut être remplacée dans (3) par la mesure gaussienne

$$d\gamma(x) = d\gamma_n(x) = \mathrm{e}^{-|x|^2/2}\,\frac{dx}{(2\pi)^{n/2}}$$

(produit de la mesure gaussienne standard $d\gamma_1$ sur $\mathbb{R}$), sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{k=1}^m f_k^{c_k}\big(\langle u_k, x\rangle\big)\,d\gamma_n(x) \leqslant \prod_{k=1}^m\bigg(\int_{\mathbb{R}} f_k\,d\gamma_1\bigg)^{c_k}.$$

Illustrons alors l'intérêt de cette inégalité, pour $n=2$, $m=2$, et simplement $u_1=(1,0)$, $u_2=(\rho,\sqrt{1-\rho^2})$ avec $\rho\in]0,1[$ et $c_1,c_2\in]0,1[$ tels que

$$\rho^2 c_1 c_2 = (1-c_1)(1-c_2). \tag{4}$$

Les vecteurs u_1, u_2 ne définissent qu'une sous-décomposition de l'identité, mais suffisante pour conclure que pour $f_1, f_2 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ positives,

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_1^{c_1}(x_1) f_2^{c_2}\Big(\rho x_1+\sqrt{1-\rho^2}\,x_2\Big)\,d\gamma(x_1)\,d\gamma(x_2) \leqslant \bigg(\int_{\mathbb{R}} f_1\,d\gamma\bigg)^{c_1}\bigg(\int_{\mathbb{R}} f_2\,d\gamma\bigg)^{c_2}. \tag{5}$$

Par tensorisation et le caractère produit de la mesure gaussienne $\gamma=\gamma_n$, cette inégalité s'étend immédiatement à des fonctions sur $\mathbb{R}^n$. En outre, en posant $p_i = \frac{1}{c_i}$, $i=1,2$, et en remplaçant f_i par $f_i^{p_i}$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f_1(x_1) f_2\Big(\rho x_1+\sqrt{1-\rho^2}\,x_2\Big)\,d\gamma(x_1)\,d\gamma(x_2) \leqslant \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}, \tag{6}$$

les normes étant entendues dans les espaces de Lebesgue $\mathrm{L}^p(\gamma)$ par rapport à γ.

Soit alors l'opérateur, défini pour tout $\rho\in[0,1]$ et toute fonction convenable $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, par

$$T_\rho\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi\Big(\rho x+\sqrt{1-\rho^2}\,y\Big)\,d\gamma(y), \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{7}$$

L'invariance par rotation de la mesure gaussienne γ entraîne que l'opérateur T_ρ est une contraction dans tous les espaces $\mathrm{L}^p(\gamma)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (décroissants en p). Mais, par dualité et la relation (4), (6) exprime le plongement plus fort, pour toute $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\|T_\rho f_2\|_{p_1'} \leqslant \|f_2\|_{p_2} \tag{8}$$

où p_1' est l'exposant conjugué de p, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = 1$, et p_2 et p_1' sont tels que $1 < p_2 < p_1' < \infty$ et

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{p_1' - 1}{p_2 - 1}$$

(ou seulement $\geqslant$). Cette propriété (8), qui a pris le nom d'hypercontractivité, a été mise en évidence par E. Nelson en théorie quantique des champs. Pour $\rho = \mathrm{e}^{-t}$, $t \geqslant 0$, $P_t = T_{\mathrm{e}^{-t}}$ est le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck de mesure invariante et réversible la mesure gaussienne standard γ et de générateur $\mathrm{L} = \Delta - \langle x, \nabla\rangle$ dans la description de l'introduction. En particulier, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mesurable positive, $\int_{\mathbb{R}^n} P_t f \, d\gamma = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\gamma$, et si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont régulières,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(-\mathrm{L}g)\, d\gamma = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f, \nabla g\rangle \, d\gamma.$$

Si l'inégalité (5) a été présentée à partir du flot de la chaleur euclidien, le même principe s'applique pour ce semi-groupe, et (5) s'établit de façon équivalente, grâce aux propriétés précédentes d'invariance et d'intégration par parties, en faisant évoluer f_1 et f_2 le long de P_t, $t \geqslant 0$, et en montrant que l'expression de gauche est décroissante en le temps.

3. Isopérimétrie gaussienne

L. Gross, dans un jalon important (cf. [1, 2]), démontre, par différentiation de la norme

$$\|T_\rho f_2\|_{p_1'}, \quad p_1' = 1 + \frac{1}{\rho^2}(p_2 - 1),$$

en fonction de ρ, que la propriété d'hypercontractivité (8) est équivalente à l'inégalité dite de Sobolev logarithmique, exprimant que pour toute fonction régulière $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\gamma = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \ln f^2 \, d\gamma \leqslant 2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma. \tag{9}$$

Par rapport à l'inégalité de Sobolev traditionnelle sous la mesure de Lebesgue, une fonction dont le gradient est dans l'espace $\mathrm{L}^2(\gamma)$ n'est pas nécessairement dans un espace $\mathrm{L}^p(\gamma) \subset \mathrm{L}^2(\gamma)$ avec $p > 2$, il y a une dégénérescence quand $p \to 2$ qui conserve toutefois un facteur logarithmique. En revanche, aucune constante dépendant de la dimension n'apparaît dans (9), faisant de l'inégalité de Sobolev logarithmique un outil majeur, notamment dans l'analyse de dimension infinie sur l'espace de Wiener (cf. e.g. [1, 20, 2]).

Maintenant, le champ des inégalités fonctionnelles de Sobolev est étroitement lié aux inégalités isopérimétriques à leur origine. En renvoyant à [15] pour une présentation complète, l'inégalité isopérimétrique classique dans $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, exprimant que les boules réalisent le minimum de mesure de bord à volume fixé, est en effet à la racine de toutes les inégalités de Sobolev à travers sa version fonctionnelle, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 à support compact,

$$n\omega_n^{1/n} \|f\|_{\frac{n}{n-1}} \leqslant \|\nabla f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| dx \tag{10}$$

où les normes sont cette fois prises sous la mesure de Lebesgue et ω_n est le volume de la boule unité. Pour une approximation régulière de la fonction caractéristique $\mathbb{1}_A$ d'un borélien A à bord ∂A régulier, la norme L^1 du gradient de f, $\|\nabla f\|_1$, approche la mesure $\mathrm{vol}_{n-1}(\partial A)$ du bord de A. L'inégalité fonctionnelle (10) indique alors que

$$n\omega_n^{1/n} \mathrm{vol}_n(A)^{(n-1)/n} \leqslant \mathrm{vol}_{n-1}(\partial A) \tag{11}$$

qui décrit l'isopérimétrie euclidienne. En effet, si A a même volume qu'une boule B de rayon $r > 0$, $\mathrm{vol}_n(A) = \mathrm{vol}_n(B) = \omega_n r^n$, $\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B) = n\omega_n r^{n-1}$, de sorte que

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B) = n\omega_n^{1/n} \mathrm{vol}_n(A)^{(n-1)/n} \leqslant \mathrm{vol}_{n-1}(\partial A).$$

Réciproquement, (11) entraîne la forme fonctionnelle (10) par les formules de coaire. En remplaçant dans (10) f (positive) par f^α, $\alpha > 0$, et en faisant usage de l'inégalité de Hölder, toutes les inégalités de Sobolev traditionnelles

$$\|f\|_{\frac{pn}{n-p}} \leqslant C_{n,p} \|\nabla f\|_p, \quad 1 \leqslant p < n,$$

en découlent (avec néanmoins des constantes sous-optimales).

De la même manière, l'inégalité isopérimétrique sous la mesure gaussienne engendre l'inégalité de Sobolev logarithmique. Mais quels sont les éléments extrémaux du problème isopérimétrique sur $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure gaussienne γ ? Autrement dit, à mesure $\gamma(A)$ fixée, quels sont les boréliens A

de $\mathbb{R}^n$ minimisant la mesure gaussienne de bord ? Cette dernière peut se définir à travers le contenu de Minkowski par

$$\gamma(\partial A) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Big[\gamma(A_\varepsilon) - \gamma(A)\Big]$$

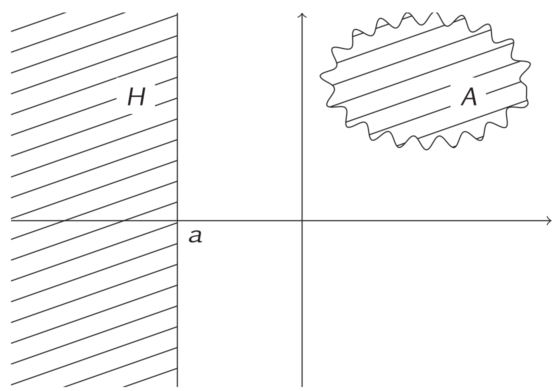
où A_ε est le voisinage, pour la distance euclidienne, d'ordre $\varepsilon > 0$ de A. Lorsque le bord de A est régulier, cette expression revient à intégrer la densité gaussienne le long de ce bord.

Les éléments extrémaux du problème isopérimétrique dans $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure gaussienne γ sont fournis par les demi-espaces

$$H = \Big\{x \in \mathbb{R}^n ; \langle x, u\rangle \leqslant a\Big\}$$

où u est un vecteur unité de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$. Autrement dit, si A est un borélien et si $\gamma(A) = \gamma(H)$ pour un tel demi-espace, alors $\gamma(\partial A) \geqslant \gamma(\partial H)$ (cf. Fig. 1).

Figure 1 – Un ensemble A et un demi-espace H de même mesure gaussienne.



Cette propriété isopérimétrique se traduit de façon équivalente à travers le profil isopérimétrique

$$\mathcal{I}_\gamma(v) = \inf\Big\{\gamma(\partial A); \gamma(A) = v\Big\}, \quad v \in]0,1[,$$

qui se calcule donc sur les demi-espaces. Or, par invariance par rotation de γ, les mesures d'un demi-espace et de son bord peuvent s'évaluer en dimension un sur la représentation, par exemple,

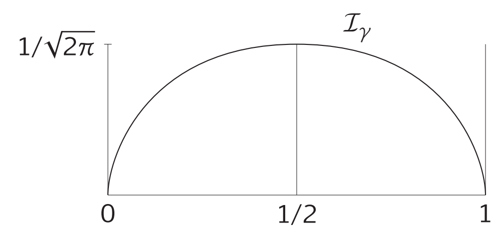
$$H = \Big\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 \leqslant a\Big\}$$

de sorte que $\gamma(H) = \int_{-\infty}^a e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$, noté $\Phi(a)$, et $\gamma(\partial H) = \Phi'(a) = \frac{e^{-a^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$. De façon explicite, la fonction $\mathcal{I}_\gamma$, qui se prolonge par continuité à l'intervalle $[0,1]$, est ainsi donnée par

$$\mathcal{I}_\gamma = \Phi' \circ \Phi^{-1}.$$

La fonction $\mathcal{I}_\gamma$ est concave continue, symétrique par rapport à la verticale passant par $\frac{1}{2}$ et telle que $\mathcal{I}_\gamma(0) = \mathcal{I}_\gamma(1) = 0$. Elle vérifie en outre l'équation différentielle $\mathcal{I}_\gamma \mathcal{I}_\gamma'' = -1$ et $\mathcal{I}_\gamma(v) \sim v\sqrt{2\ln\frac{1}{v}}$ quand $v \to 0$ (cf. Fig. 2).

Figure 2 – Le graphe du profil isopérimétrique $\mathcal{I}_\gamma$.



Si le flot de la chaleur permet d'accéder à l'hypercontractivité, et donc à l'inégalité de Sobolev logarithmique, il permet en fait aussi d'établir l'isopérimétrie gaussienne. En effet, le schéma de monotonie le long du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck peut être mis à profit exactement de la même façon pour démontrer l'énoncé suivant. Rappelons l'opérateur T_ρ de (7).

Théorème 2. *Si A et B sont des boréliens de $\mathbb{R}^n$, pour tout $\rho \in [0,1]$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A T_\rho(\mathbb{1}_B) d\gamma \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_H T_\rho(\mathbb{1}_K) d\gamma \qquad (12)$$

où H et K sont des demi-espaces parallèles de même mesure que A et B respectivement.

Les ensembles H et K étant des demi-espaces, le membre de droite de (12) se calcule explicitement en dimension un comme une fonction $J_\rho(\gamma(A), \gamma(B))$ ne dépendant que (de ρ et) des mesures $\gamma(H) = \gamma(A)$ et $\gamma(K) = \gamma(B)$. L'expression de la fonction $J_\rho(u,v)$, $u, v \in [0,1]$, est explicite comme des intégrales de la densité gaussienne, mais nous ne la détaillons pas ici. En revanche, par définition même, il est immédiat d'observer que $J_\rho(u,v)$ est égale à 0 si l'un de ses arguments est nul ($\gamma(H) = 0$ ou $\gamma(K) = 0$) et à 1 si ses deux arguments sont égaux à 1 ($\gamma(H) = 1$ et $\gamma(K) = 1$), de sorte que la propriété (12) s'exprime de façon équivalente sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} J_\rho\Big(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B\big(\rho x + \sqrt{1-\rho^2}\, y\big)\Big) d\gamma(x) d\gamma(y)$$
$$\leqslant J_\rho\bigg(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A d\gamma, \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_B d\gamma\bigg). \qquad (13)$$

Suivant le principe déployé précédemment pour les inégalités de Brascamp-Lieb et l'hypercontractivité, il suffit alors de remplacer $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ par $P_t(\mathbb{1}_A)$ et $P_t(\mathbb{1}_B)$, $t \geqslant 0$ (plus généralement n'importe quelles fonctions mesurables $f, g : \mathbb{R}^n \to [0,1]$), et l'évolution le long du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck $(P_t)_{t\geqslant 0}$ assurera alors, par monotonie, l'inégalité souhaitée sous réserve de se convaincre que la fonction J_ρ vérifie une propriété un peu curieuse de concavité, à savoir que la matrice

$$\begin{pmatrix} \partial_{11} J_\rho & \rho\, \partial_{12} J_\rho \\ \rho\, \partial_{12} J_\rho & \partial_{22} J_\rho \end{pmatrix} \tag{14}$$

est semi-définie négative. C'est effectivement le cas (mais cela nécessite un peu de calcul). C'est aussi, plus simplement, le cas pour la fonction $J^{\mathrm{H}}(u,v) = u^{c_1} v^{c_2}$, $u, v \in [0,\infty[$, correspondant à l'hypercontractivité lorsque $\rho^2 c_1 c_2 \leqslant (1-c_1)(1-c_2)$ et fournissant (5).

De la propriété (12) à l'isopérimétrie, il est classique que la mesure du bord $\gamma(\partial A)$ peut se décrire le long du flot de la chaleur (gaussien) à travers la limite

$$\gamma(\partial A) \geqslant \limsup_{\rho \to 1} \sqrt{\frac{\pi}{\ln \frac{1}{\rho}}} \left[\gamma(A) - \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A \, T_\rho(\mathbb{1}_A) d\gamma \right]$$

avec égalité sur un demi-espace H, de sorte que si $\gamma(A) = \gamma(H)$, alors $\gamma(\partial A) \geqslant \gamma(\partial H)$.

Le Théorème 2 est dû à C. Borell [6] par les outils de symétrisation gaussienne de A. Ehrhard. L'analyse de la fonction J_ρ et la démonstration précédente par flot de la chaleur ont été proposées par J. Neeman et E. Mossel [16], qui en font usage dans une version robuste contrôlant le déficit dans (12) et l'inégalité isopérimétrique (question aujourd'hui résolue de façon presque optimale [11], cet article fournissant par ailleurs une autre démonstration du théorème de Borell s'appuyant sur le calcul stochastique brownien).

La méthode de monotonie le long de l'équation de la chaleur permet en fait d'accéder à de nombreux théorèmes de comparaison isopérimétrique sur des variétés riemanniennes (à poids) de courbure de Ricci strictement positive, comparant le profil isopérimétrique de l'élément de volume à celui de l'espace gaussien. (Une variété riemannienne à poids est la donnée d'une variété lisse, complète, et d'une fonction de densité régulière Ψ par rapport à la mesure de volume.) Par exemple, si $d\mu = \mathrm{e}^{-V} dx$ finie (de masse 1) où $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un potentiel régulier tel que, uniformément, $\mathrm{Hess}(V) \geqslant \rho\, \mathrm{Id}$ pour un $\rho > 0$ au sens des matrices symétriques, alors le profil isopérimétrique $\mathcal{I}_\mu$ de μ (défini comme $\mathcal{I}_\gamma$) est minoré par $\frac{1}{\sqrt{\rho}} \mathcal{I}_\gamma$ (cf. [2]). Ces énoncés s'apparentent au théorème célèbre de Lévy-Gromov comparant le profil isopérimétrique d'une variété riemannienne compacte de courbure de Ricci strictement positive à celui de la sphère de même dimension et de même courbure. Si un développement récent remarquable de B. Klartag [14] et F. Cavaletti et A. Mondino [9] fournit une version de ce théorème dans les espaces métriques mesurés à l'aide d'un transport de mesures, une démonstration par flot de la chaleur reste néanmoins ouverte.

4. Stabilité au bruit et cube discret

Une autre motivation des travaux de J. Neeman et E. Mossel est la question de la stabilité (ou sensibilité) au bruit sur le cube discret. Restons pour l'instant dans l'espace gaussien en reformulant le théorème de comparaison de Borell (Théorème 2) sous une forme probabiliste. Soit X un vecteur aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi gaussienne standard γ sur $\mathbb{R}^n$, et soit

$$X^\rho = \rho X + \sqrt{1-\rho^2}\, Y$$

où Y est une copie indépendante de X. Le couple (X, X^ρ) est composé de deux vecteurs de loi gaussienne standard de corrélation $\mathbb{E}(X \otimes X^\rho) = \rho\, \mathrm{Id}$, et pour toutes fonctions mesurables positives $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\Big(f(X) g(X^\rho) \Big) = \int_{\mathbb{R}^n} f\, T_\rho g \, d\gamma$$

par définition de l'opérateur T_ρ.

Posons alors, pour un borélien A de $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{S}_\rho(A) = \mathbb{P}(X \in A, X^\rho \in A)$$

appelée stabilité (de A) au bruit, ce dernier étant représenté par la copie indépendante Y. Par passage au complémentaire, on parle aussi de sensibilité au bruit pour la probabilité $\mathbb{P}(X \in A, X^\rho \notin A)$. Une question est de savoir quels sont les ensembles A les plus stables au bruit, donc maximisant $\mathcal{S}_\rho(A)$ à mesure de A fixée. Comme

$$\mathcal{S}_\rho(A) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{1}_A(X) \mathbb{1}_A(X^\rho) \Big) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A \, T_\rho(\mathbb{1}_A) d\gamma,$$

le théorème de Borell (12) exprime que les demi-espaces sont les plus stables.

Cette question de stabilité au bruit a en fait son origine en informatique théorique sur le cube discret $\{-1,+1\}^n$. Soit à présent $X = (X_1,\dots,X_n)$ de loi uniforme sur $\{-1,+1\}^n$ et, pour $\rho \in [0,1]$, X^ρ uniforme et ρ-corrélée avec X. En désignant par Y une copie indépendante de X, le vecteur $X^\rho = (X_1^\rho,\dots,X_n^\rho)$ peut être défini en posant, pour tout $i = 1,\dots,n$, $X_i^\rho = X_i$ avec probabilité ρ et $X_i^\rho = Y_i$ avec probabilité $1-\rho$ (de sorte que, comme dans le cas gaussien, $\mathbb{E}(X \otimes X^\rho) = \rho\,\mathrm{Id}$).

Déterminer les parties A de $\{-1,+1\}^n$ les plus stables est dans ce cas un problème ouvert. Mais une version réduite est connue. Supposons, pour simplifier, que l'on s'intéresse aux parties A telles que $\mathbb{P}(X \in A) = \frac{1}{2}$, et considérons

$$M_n = \left\{ x = (x_1,\dots,x_n) \in \{-1,+1\}^n ; \mathrm{signe}\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = + \right\}.$$

En considérant n impair pour simplifier, il y a nécessairement un nombre différent de $+1$ et de -1 et la définition est ainsi sans ambiguïté. Cet ensemble M_n est l'ensemble dit majoritaire (puisqu'il retient l'avis de la majorité de $+1$). La limite

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{S}_\rho(M_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\arccos(\rho)$$

a été calculée par W. Sheppard dès ...1899. Il n'est pas étonnant, en vertu du théorème central limite, que cette valeur est exactement $J_\rho\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ correspondant, dans la description gaussienne de la partie 3, à un demi-espace dont la frontière passe par l'origine. En effet, par transformée de Laplace par exemple, le couple $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i, \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i^\rho\right)$ converge en loi vers un couple gaussien ρ-corrélé et M_n est essentiellement l'ensemble $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i \geqslant 0\right\}$.

Il est alors naturel, d'après l'analogue gaussien, de se demander si pour tout $A \subset \{-1,+1\}^n$,

$$\mathcal{S}_\rho(A) \leqslant J_\rho\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)? \qquad (15)$$

Cette borne est fausse en général, et un contre-exemple est fourni par l'ensemble dictateur D défini par $D = \{x_1 = +1\}$ (ne prenant en compte que l'avis d'un seul parmi $x_1,\dots,x_n$) puisque

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\rho(D) &= \mathbb{P}(X \in D, X^\rho \in D)\\ &= \frac{1}{4}(1+\rho) > \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\arccos(\rho) = J_\rho\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

pour $\rho \in]0,1[$. Néanmoins, si les ensembles de ce type sont exclus d'une certaine manière, la conjecture (15) est presque vraie. C'est l'objet du théorème « Majority is Stablest ».

5. Majority is Stablest

L'énoncé du théorème « Majority is Stablest » de E. Mossel, R. O'Donnell et K. Oleszkiewicz [17] nécessite d'exclure de façon quantitative des ensembles comme le dictateur D. Ceci s'effectue à travers la notion d'influence d'une coordonnée $i = 1,\dots,n$ sur un ensemble $A \subset \{-1,+1\}^n$ définie comme

$$I_i(A) = \mathbb{P}\big(X \in A, \tau_i(X) \notin A\big)$$

où $\tau_i(x)$ d'un élément $x = (x_1,\dots,x_n)$ de $\{-1,+1\}^n$ est obtenu en changeant la i-ième coordonnée en $-x_i$. L'ensemble majoritaire a de petites influences, de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, alors que l'influence de l'ensemble dictateur dans sa coordonnée déterminante est grande (égale à $\frac{1}{2}$).

Théorème 3. *(« Majority is Stablest ») Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(\rho,\varepsilon) > 0$ tel que pour toute partie $A \subset \{-1,+1\}^n$ telle que $\mathbb{P}(X \in A) = \frac{1}{2}$ et $I_i(A) \leqslant \eta$ pour tout $i = 1,\dots,n$, alors*

$$\mathcal{S}_\rho(A) \leqslant J_\rho\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) + \varepsilon.$$

L'application principale de ce résultat est l'optimalité de la proportion d'approximation algorithmique du problème Max-Cut. Le problème Max-Cut est un problème NP-complet de théorie des graphes. Il admet, sous la conjecture de jeu unique de S. Khot, une approximation par un algorithme polynomial dont l'ordre maximal est précisément fourni par la constante $J_\rho\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Nous renvoyons à l'exposé de P. Pansu [19] et à la monographie récente de R. O'Donnell [18] pour une présentation détaillée de cet aspect du théorème.

La première démonstration du Théorème 3 de [17, 18] fait appel au cas gaussien à travers un nouveau et fructueux principe d'invariance. Une démonstration récente de A. De, E. Mossel, J. Neeman [10] suit une trajectoire proche de l'approche par flot de la chaleur, avec une variation significative due au cadre discret. L'inégalité gaussienne (13) sur des fonctions $f,g : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ se représente en notation probabiliste comme

$$\mathbb{E}\Big(J_\rho\big(f(X), g(X^\rho)\big)\Big) \leqslant J_\rho\Big(\mathbb{E}(f(X)), \mathbb{E}(g(X))\Big). \qquad (16)$$

S'il était vrai, son analogue discret pour des fonctions $f,g : \{-1,+1\}^n \to [0,1]$ sur le cube aurait la même forme, mais donc, pour $f = g = \mathbb{1}_A$ avec $\mathbb{P}(X \in A) = \frac{1}{2}$, entraînerait l'inégalité (15) fausse en général. Néanmoins, l'examen de cet analogue est enrichissant. En désignant par μ^n la loi de X, mesure produit de la mesure uniforme $\mu = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_{+1}$

sur $\{-1,+1\}$, la définition de X^ρ fournit la traduction analytique

$$\int_{\{-1,+1\}^n}\int_{\{-1,+1\}^n} J_\rho\Big(f(x),g(y)\Big) \prod_{i=1}^n (1+\rho\, x_i y_i)\, d\mu^n(x)\, d\mu^n(y) \leqslant J_\rho\bigg(\int_{\{-1,+1\}^n} f\, d\mu^n, \int_{\{-1,+1\}^n} g\, d\mu^n\bigg).$$

Il est assez immédiat de constater d'après le théorème de Fubini que cette inégalité se tensorise, et que sa validité est donc attestée sur $\{-1,+1\}$, où elle se réduit à une inégalité de concavité à quatre points : pour tous $(u,v)\in[0,1]$, $(u',v')\in[0,1]$,

$$\frac{1+\rho}{4}J_\rho(u,v)+\frac{1-\rho}{4}J_\rho(u',v) + \frac{1-\rho}{4}J_\rho(u,v')+\frac{1+\rho}{4}J_\rho(u',v') \leqslant J_\rho\Big(\frac{u+u'}{2},\frac{v+v'}{2}\Big). \tag{17}$$

Pour $\rho=1$, (17) est la concavité usuelle, pour $\rho=0$ la concavité par coordonnées. D'après la formule de Taylor, cette inégalité à quatre points entraîne la concavité différentielle (14), mais la réciproque est donc fausse puisque (15) est en défaut sur l'ensemble dictateur correspondant au choix de $u=v=1$ et $u'=v'=0$. À noter que l'analogue de (17) pour la fonction J^H de l'hypercontractivité est en revanche satisfait, c'est la fameuse hypercontractivité sur l'espace à deux points de Bonami-Beckner (cf. [1, 18]).

Ce que démontrent les auteurs de [10], à travers simplement une formule de Taylor sur J_ρ, est que l'inégalité (17) est néanmoins vraie avec un reste, ajouté au membre de droite, de la forme

$$C(\rho)\,\kappa^{-C(\rho)}\Big(|u-u'|^3+|v-v'|^3\Big)$$

pour tous $u,u',v,v'\in[\kappa,1-\kappa]$ pour $\kappa>0$ et $C(\rho)>0$. Ce reste peut alors être analysé par l'inégalité à deux points de l'hypercontractivité sous l'hypothèse du contrôle des influences, concluant ainsi après tensorisation au Théorème 3. La simplicité de l'argument ouvre la perspective d'énoncés analogues sur d'autres structures discrètes (comme le groupe symétrique par exemple).

Références

[1] C. Ané et al. *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*. Panoramas et Synthèses 10. Société Mathématique de France, 2000.

[2] D. Bakry, I. Gentil et M. Ledoux. *Analysis and geometry of Markov diffusion operators*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 348. Springer, 2014.

[3] F. Barthe. *On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality*. Inventiones Math. 134, 1998, p. 335–361.

[4] F. Barthe et al. *Correlation and Brascamp-Lieb inequalities for Markov semigroups*. Int. Math. Res. Not. IMRN, 2011, p. 2177–2216.

[5] J. Bennett et al. *The Brascamp-Lieb inequalities: finiteness, structure and extremals*. Geom. Funct. Anal. 17, 2008, p. 1343–1415.

[6] C. Borell. *Geometric bounds on the Ornstein-Uhlenbeck velocity process*. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 70, 1985, p. 1–13.

[7] H. J. Brascamp et E. H. Lieb. *Best constants in Young's inequality, its converse, and its generalization to more than three functions*. Advances in Math. 20, 1976, p. 151–173.

[8] E. A. Carlen, E. H. Lieb et M. Loss. *A sharp analog of Young's inequality on S^N and related entropy inequalities*. J. Geom. Anal. 14, 2004, p. 487–520.

[9] F. Cavalletti et A. Mondino. *Sharp and rigid isoperimetric inequalities in metric-measure spaces with lower Ricci curvature bounds*. Preprint arXiv:1502.06465. 2015.

[10] A. De, E. Mossel et J. Neeman. *Majority is stablest: Discrete and SoS*. in Proceedings of the forty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing, 2013, p. 477–486.

[11] R. Eldan. *A two-sided estimate for the Gaussian noise stability deficit*. Invent. Math. 201, 2015, p. 561–624.

[12] L. C. Evans. *Partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics 19. American Mathematical Society, 1998.

[13] F. John. *Partial differential equations*. Applied Mathematical Sciences. Springer, 1982.

[14] B. Klartag. *Needle decompositions in Riemannian geometry*. Mem. Amer. Math. Soc. 2015.

[15] V. Maz'ya. *Sobolev spaces with applications to elliptic partial differential equations*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 342. Springer, 2011.

[16] E. Mossel et J. Neeman. *Robust optimality of Gaussian noise stability*. J. Eur. Math. Soc. 17, 2015, p. 433–482.

[17] E. Mossel, R. O'Donnell et K. Oleszkiewicz. *Noise stability of functions with low influences: invariance and optimality*. Ann. of Math. 171, 2010, p. 295–341.

[18] R. O'Donnell. *Analysis of boolean functions*. Cambridge University Press, 2014.

[19] P. Pansu. *Difficulté d'approximation (d'après Khot, Kindler, Mossel, O'Donnell,. . .)*. Astérisque 352, Société Mathématique de France, 2013.

[20] C. Villani. *Topics in optimal transportation*. Graduate Studies in Mathematics 58. American Mathematical Society, 2003.

Michel Ledoux

Université Paul-Sabatier, Toulouse

Michel Ledoux est professeur à l'Université de Toulouse, Paul-Sabatier, et membre senior de l'Institut Universitaire de France. Ses travaux se situent à l'interface entre analyse et probabilités.

Je remercie B. Helffer d'avoir suscité cette rédaction et de sa lecture attentive et constructive. Mes remerciements vont aussi à D. Bakry, F. Barthe, D. Chafaï, D. Cordero-Erausquin, I. Gentil, S. Gouëzel, J. Lehec et P. Pansu pour leurs remarques et commentaires. Une mention spéciale à S. Gouëzel pour la réalisation des figures.

Laurent Schwartz (1915-2002) et le colloque d'analyse harmonique de Nancy, 15-22 juin 1947

• A.-S. Paumier

Juste après la fin de la guerre, dès 1945, la Fondation Rockefeller va chercher à jouer un rôle dans la reconstruction de la science en France. Son aide va être versée au Centre national de la recherche scientifique (cnrs), sous la forme de deux bourses : l'une destinée à l'achat de matériel scientifique, et l'autre à l'organisation de colloques. Le premier colloque de mathématiques qui a lieu dans ce cadre est celui d'analyse harmonique de Nancy, en juin 1947. C'est lors de ce colloque que Schwartz va exposer pour la première fois ses distributions sphériques (aujourd'hui connues sous le nom de distributions tempérées). Cet article montre comment le colloque participe à la vie collective des mathématiques, et examine en quoi ce colloque en particulier est important pour les mathématiques et la carrière de Laurent Schwartz.

Alors que l'on fête le centenaire de la naissance de Laurent Schwartz (1915-2002) [1], revenons sur un événement peu connu, qui a néanmoins joué un rôle important dans la vie et la carrière de Schwartz : le colloque d'Analyse Harmonique qui a eu lieu à Nancy du 15 au 22 juin 1947 [2].

Événement pour la vie mathématique après la guerre, ce colloque est le premier d'une longue série de colloques internationaux du cnrs organisé en mathématiques. Il traduit la manière dont les mathématiciens ont saisi l'opportunité de réunir un petit nombre de spécialistes d'analyse harmonique, français et étrangers, dans une université de province dynamique, celle de Nancy, sur un sujet précis.

Événement pour l'analyse harmonique, c'est lors de ce colloque que Schwartz expose pour la première fois ses « distributions sphériques » (aujourd'hui connues sous le nom de distributions tempérées), et apporte sa contribution en théorie des distributions à l'analyse de Fourier.

Événement enfin pour Schwartz, ce colloque marque l'internationalisation de sa théorie des distributions et de sa carrière. C'est en effet à partir de ce moment là qu'il fera de nombreux voyages à l'occasion desquels il pourra exposer et faire connaître ses travaux.

1. Une initiative pour reconstruire la science en France après guerre : les colloques internationaux du cnrs

Dès la fin de la guerre, la Fondation Rockefeller cherche à jouer un rôle dans la science française [3]. Il s'agit de restaurer les contacts scientifiques, à

1. Mentionnons une exposition à l'École polytechnique, présentée sur Images des Mathématiques `http://images.math.cnrs.fr/Laurent-Schwartz-1915-2002` ou encore la journée du Centenaire de Laurent Schwartz du 3 novembre 2015, organisée par Bertrand Remy, CMLS et Frédéric Brechenmacher, LinX : `https://indico.math.cnrs.fr/event/828/`.

2. L'essentiel de cet article provient de la thèse de l'auteur [15], dont on peut consulter la bibliographie pour des références précises sur les éléments présentés ici.

3. On se rappelle que la Fondation Rockefeller a déjà joué un rôle pour les mathématiques et la physique françaises, en participant à la création de l'Institut Henri Poincaré en 1928 (voir [23]). En ce qui concerne le rôle joué par la Fondation Rockefeller dans les années d'après-guerre en France, nous nous appuyons en partie sur l'étude de [26]. Le projet de la Fondation Rockefeller s'insère par ailleurs dans un cadre politique global, pour lequel on pourra consulter notamment [11].

l'intérieur et avec l'extérieur de la France, de fournir des équipements cruciaux, et de former le personnel scientifique. Deux bourses vont alors être attribuées au Centre National de la Recherche Scientifique, l'une de 250 000 $ pour l'équipement des laboratoires et l'autre de 100 000 $ pour l'organisation de conférences. Cette deuxième bourse, celle qui nous intéresse ici, vise le premier des besoins recensés, à savoir la restauration de contacts scientifiques, à l'intérieur de la France et avec l'extérieur. L'objet de la bourse est donc d'aider le cnrs à faire venir en France des scientifiques de haut niveau à des colloques. Ces conférences, petites et informelles, réunissent un nombre restreint de scientifiques ; elles doivent avoir lieu dans différents lieux en France et durer assez longtemps pour avoir le temps d'accomplir un vrai travail. Elles sont perçues comme étant le moyen de relancer des programmes scientifiques en France, en incitant les scientifiques français à réorienter leur recherche afin de mieux l'inclure dans les développements internationaux récents.

Institutionnalisation d'une certaine forme de colloque C'est au tout jeune cnrs, alors considéré comme prédominant en France, que la Fondation Rockefeller confie l'organisation de ces colloques. Très concrètement, les fonds Rockefeller servent à financer les séjours et voyages des étrangers, étant ainsi fidèles à l'objectif initial de relancer les contacts entre scientifiques français et étrangers. Les colloques sont publiés par le cnrs dans une collection dédiée.

Géographies Si les bourses de la Fondation Rockefeller ont pour but une restauration de la communauté scientifique française telle qu'elle existait avant la guerre, elles procèdent pour cela à une modification de la manière dont les individus interagissent entre eux, induisent une meilleure visibilité des universités de province en France [4] et de la science française sur la scène internationale.

En terme de géographies, les colloques se positionnent donc à deux échelles. À l'échelle nationale tout d'abord, la volonté de favoriser les universités de province permet l'organisation d'entre un tiers et la moitié des colloques à l'extérieur de Paris. À l'échelle internationale ensuite, puisque les colloques sont l'occasion pour les Français d'inviter des scientifiques étrangers à venir connaître leurs travaux, et donc de relancer les contacts scientifiques interrompus pendant la guerre. Ils ont aussi eu pour conséquence, comme le relève un rapport de la Fondation Rockefeller en 1952, de développer les voyages scientifiques ultérieurs des scientifiques français. C'est le cas pour Laurent Schwartz, pour qui nous pouvons parler d'internationalisation de sa carrière et de ses mathématiques après 1947, ainsi que nous le verrons plus loin.

Spécialisation Un troisième enjeu relatif à l'organisation de ces colloque est celui de la spécialisation, c'est-à-dire de l'organisation de colloques sur des sujets précis, sur lesquels travaillent déjà quelques scientifiques français mais dont les recherches ont à gagner d'une confrontation internationale. Les conférences portent sur de nombreux sujets [26, p. 13], des mathématiques à la biologie. Elles attirent d'éminents scientifiques [5]. L'accent mis sur la spécialisation est aussi précisé par le petit nombre de participants souhaités, autour de quelques experts dont un français et des jeunes.

L'analyse plus précise d'un colloque, celui d'Analyse Harmonique de 1947, va permettre de voir comment le cnrs a mis en œuvre ces différents aspects dans la réalisation concrète des colloques, ainsi que les conséquences qu'un tel colloque a pu avoir sur la vie mathématique de Schwartz. Mais avant cela, nous allons définir plus précisément l'objet « colloque » ou « congrès », et son investissement par les mathématiciens.

2. Colloques et mathématiciens

Des premiers congrès scientifiques aux congrès spécialisés en mathématiques Le premier Congrès International des Mathématiciens a lieu à Zurich en 1897 [6]. Il s'agit d'une conférence très large, qui s'inscrit dans l'internationalisation des mathématiques [14], mais qui n'est pas véritablement comparable aux colloques internationaux du cnrs que l'on présente ici.

À l'inverse, l'unité du colloque international du

4. En ce qui concerne la volonté d'organiser des colloques dans des universités de province, on constate que c'est bien le cas pour 20 des 55 colloques. Il y a ainsi 5 colloques à Lyon, 4 à Strasbourg, 3 à Nancy, 2 à Alger et Marseille, et 1 à Toulouse, Montpellier, Bordeaux et Grenoble. Tous les autres ont lieu à Paris (dont 1 à Gif-sur-Yvette).

5. Remarquons que le côté informel n'est pas toujours respecté néanmoins ; certaines conférences attirant tous les prix Nobel de la discipline par exemple.

6. Rappelons que les congrès internationaux de scientifiques apparaissent progressivement au cours du xix^e siècle, faisant suite à la création de sociétés scientifiques, et se spécialisent peu à peu.

CNRS n'est pas disciplinaire mais institutionnelle et financière (Rockefeller, CNRS). Elle se trouve aussi dans le lieu (national, France notamment province). La régularité n'est pas précisée, mais un certain nombre de colloques ont lieu chaque année. Il s'agit donc d'un type particulier de rencontre scientifique, dont la similitude avec d'autres initiatives, telles que les « Conférences internationales de sciences mathématiques organisées à l'université de Genève » (1933-1938) ou encore les Colloques du Centre Belge de Recherches Mathématiques (à partir de 1949), indique qu'il prend forme au milieu du xx^{e} siècle.

Les mathématiciens se saisissent des colloques internationaux du CNRS Les colloques internationaux du CNRS ont fait une large part aux mathématiques : parmi les 55 colloques financés en partie par la Fondation Rockefeller, on en compte 12 sur les mathématiques (physique théorique incluse). Schwartz a ainsi participé au colloque d'analyse harmonique (Nancy, 15-22 juin 1947), d'algèbre et théorie des nombres (Paris, 25 septembre-1er octobre 1949) et de géométrie différentielle (Strasbourg, 26 mai-1er juin 1953). On peut encore mentionner le colloque de topologie algébrique (Paris, 26 juin-2 juillet 1947) ou encore celui sur le calcul des probabilités et ses applications (Lyon, 28 juin-3 juillet 1948). Tous ont respecté le « cahier des charges » de la Fondation décrit ci-dessus et leurs actes ont été publiés par le CNRS.

Les mathématiciens ont très rapidement saisi l'occasion d'organiser de tels colloques, notamment les bourbakistes, dont l'entreprise est en plein essor après la guerre. Si André Weil, outre-Atlantique, ne paraît guère enchanté par cette idée, il en discute néanmoins fréquemment avec Henri Cartan dans ses lettres, qu'il s'agisse du choix du thème ou des orateurs [7].

La publication de chacun de ces colloques donne lieu à une évocation enthousiaste de l'événement dans l'introduction qui précède les textes des exposés scientifiques. De la forme convenue de tels discours transparaît un enthousiasme suscité par la forme particulière du colloque. Dans le cas du colloque d'analyse harmonique, nous allons confronter cette vision enchantée avec les faits : quelles rencontres ont été permises par ce colloque ? Quelles réalisations en ont découlé ?

3. Le colloque de Nancy, 15-22 juin 1947

Nous décrivons ici, le plus précisément possible, l'organisation du colloque d'Analyse Harmonique et son déroulement. Nous cherchons à confronter ce colloque à la forme particulière proposée par la Fondation Rockefeller, et plus généralement, à comprendre l'importance du colloque dans la vie collective des mathématiques, c'est-à-dire comme lieu de structuration de la communauté, comme espace important pour faire des mathématiques et être mathématicien.

3.1 – Pourquoi un colloque d'analyse harmonique à Nancy en 1947 ?

Prévoir un colloque : réunir des mathématiciens ou bien choisir un thème ? Ainsi que son nom l'indique, le sujet du colloque est l'Analyse Harmonique. Mais que caractérise cette dénomination ? Dans les souvenirs de Norbert Wiener, « la majeure partie de la rencontre tourne autour de [s]es idées » [8]. Dans une certaine mesure, et malgré le côté narcissique de cette citation, cela semble être en partie le cas. Une grande majorité des exposés porte sur des généralisations de la transformation de Fourier ; l'exposé de Schwartz propose ainsi une généralisation « d'un théorème bien connu de Paley-Wiener » dans le cadre de la théorie des distributions, que l'on va énoncer plus loin.

Néanmoins, une autre explication est apportée par deux témoins : celle de la volonté de réunir un certain nombre de personnes, ayant des intérêts proches, plutôt que de définir le thème *a priori*. Ainsi Henri Cartan crédite-t-il Jean Delsarte, alors Doyen de la Faculté des Sciences de Nancy, d'avoir voulu « mieux faire connaître à l'extérieur ses jeunes collègues Schwartz et Godement » [9]. Szolem Mandelbrojt quant à lui, en tant que président, se rappelle avoir pensé que « la découverte des distributions par Schwartz [...] méritait qu'on la fasse connaître à des mathématiciens comme Harald Bohr, Norbert Wiener, Carleman, Plancherel et plusieurs autres créateurs internationaux non moins importants » [10].

7. [2, p. 143-144, 202, 213]
8. « As a matter of fact, much of the meeting was to deal with my ideas. » [25, p. 317].
9. [7, p. 25-26]
10. Archives de l'Académie des Sciences, Dossier biographique Laurent Schwartz, Comité Secret du 4 novembre 1974. Rapport sur les travaux de M. Laurent Schwartz (né en 1915). Professeur à l'École polytechnique. Par S. Mandelbrojt.

Ce dernier va même plus loin, jugeant que c'est plutôt la réunion de tous les participants qui crée le thème autour de l'analyse harmonique :

> Les différentes branches de l'Analyse que nous avons cherché à approfondir étaient, il est vrai, assez disparates. [...] « Analyse Harmonique » convenait certainement à l'ensemble des faits exposés, mais on avait parfois l'impression qu'on chercherait un nom à donner à un ensemble de recherches qu'on désirait voir exposer, plutôt que de rassembler des découvertes qu'on pouvait exposer sous le vocable d'Analyse Harmonique. [9]

Les différents participants travaillent effectivement sur des sujets très proches, et leurs recherches s'entremêlent. En 1946, soit un an avant le colloque, les travaux en analyse harmonique de Cartan et la thèse de Godement se raccordent aux travaux de Wiener, Beurling et Carleman [11]. Lors du colloque, les exposés de Cartan et Godement se suivent, et présentent la transformation de Fourier et l'analyse harmonique sur les groupes abéliens localement compacts respectivement. Les communications de Beurling et Carleman font quant à elles intervenir les fonctions analytiques.

Ce qui est important ici, c'est que c'est le cadre du colloque lui-même qui crée la communauté, qui prend un thème comme sujet de recherche. On voit une interaction forte entre le savoir mathématique et l'organisation collective. Organiser un colloque semble donc, à première vue, commencer par réunir des gens et cette réunion définit le thème. Mais après coup, l'énoncé du thème prend toute sa signification, et Delsarte peut ainsi écrire au Recteur que le colloque « portait sur l'Analyse Harmonique qui est une des parties de l'Analyse mathématique moderne ayant le plus d'importance, tant au point de vue de la philosophie générale, qu'au point de vue des applications, lesquelles sont innombrables et d'une grande conséquence (Calcul des Probabilités, Statistique, Radiotechnique, Théorie des ondes, Physique moderne, Physique atomique) » [12].

Un colloque conforme aux spécifications de la Fondation Rockefeller Il s'agit d'un petit colloque réunissant dix-huit « participants [...] marquants » (invités, dont les frais sont remboursés) [13], des « assistants » (qui assistent au colloque sur invitation) et des « jeunes chercheurs et étudiants déjà spécialisés » (que l'on encourage à venir, mais dont l'autorisation de poser des questions doit être accordée par le président de séance) [14].

Les mathématiciens laissent une place importante aux jeunes chercheurs, qui exposent eux aussi leurs travaux et ne viennent pas simplement écouter le colloque. En effet, parmi les participants français, André Blanc-Lapierre [15], Laurent Schwartz et Roger Godement sont tous les trois des mathématiciens relativement jeunes (nés en 1915 pour les deux premiers, 1921 pour Godement ; et ayant soutenu leurs thèses en 1945, 1942 et 1946 respectivement). En cela, le choix des orateurs (ils le sont presque tous) rejoint à peu près le projet de la bourse Rockefeller, qui mentionne une quinzaine de participants, avec quelques jeunes dans l'audience. Il est difficile de reconstituer l'audience de ce colloque, en plus des participants qui donnent des exposés. Mentionnons enfin que Deny y a participé, étant mentionné comme secrétaire des conférences avec Schwartz.

Précisons les pays d'origine des participants. Trois d'entre eux viennent des États-Unis – seul Norbert Wiener donne un exposé. Quatre participants viennent d'Europe du Nord : Carleman et Beurling de Suède, Bohr et Jessen du Danemark. Ostrowski et Plancherel viennent de Suisse et Loève d'Angleterre. Les neuf autres participants viennent de Paris ou de Nancy. Il s'agit bien d'un colloque international, dont la moitié des participants sont français.

Le colloque a par ailleurs lieu à Nancy, dans une université de province, donc la préconisation d'or-

11. Voir par exemple [2, Lettre de Cartan à Weil du 19 juillet 1946, p. 116-117], qui replace dans ce cadre les travaux de Godement.
12. Archives départementales de Nancy, liasse W 1018/96, versée par le Rectorat de l'Académie de Nancy-Metz.
13. La majorité de ces « participants » donnent des exposés. On peut néanmoins noter la présence dans cette liste du Professeur Linden, attaché culturel Adjoint des USA à Londres, ainsi que celle de Raphaël Salem du MIT.
14. La terminologie utilisée est celle préconisée par la brochure pour l'organisation, Archives de l'Institut Élie Cartan, Nancy, Lettre du 22 juillet 1955 accompagnant les règlements des Colloques internationaux du CNRS, IEC1, 5504. Pour la liste, voir le compte rendu scientifique envoyé par Delsarte au recteur, Archives départementales de Meurthe et Moselle, liasse W 1018/96.
15. Ce dernier donne un exposé sur « L'analyse harmonique des fonctions aléatoires stationnaires », suivi par Paul Lévy qui parle sur le même sujet. Michel Loève donne lui aussi un exposé en théorie des probabilités.

ganiser des colloques partout en France est bien respectée, et se fait l'écho de la préoccupation du CNRS pour les facultés de province [16].

On peut ainsi répondre à la question posée dans le titre, à savoir : pourquoi un colloque d'analyse harmonique à Nancy en 1947 ? À l'origine se trouve la volonté de faire connaître les travaux de jeunes mathématiciens ainsi que Nancy. Delsarte regroupe pour cela des mathématiciens travaillant dans les mêmes domaines, les thèmes des exposés se réunissent autour de l'analyse harmonique. On comprend ici les différents niveaux de la spécialisation, à savoir autour d'un thème et d'un petit nombre de participants, et de la géographie, une participation internationale dans une université de province, qui sont représentés ici.

3.2 – Comment ? L'organisation d'un colloque en pratique

Préparation matérielle et mathématique du colloque Le colloque est organisé dans ses moindres détails. Ainsi Schwartz écrit-il à Jessen le 6 juin 1947, juste avant sa venue au colloque :

> *Cher Monsieur,*
> *Pour l'organisation du colloque d'analyse harmonique de Nancy il nous serait nécessaire de savoir quelle chambre vous désirez que nous réservions. Nous pensons vous réserver une chambre avec salle de bains au "grand Hôtel" place Stanislas. Sauf contre-ordre de votre part c'est ce que nous ferons ; naturellement nous préfèrerions avoir une réponse de votre part. Nous voudrions aussi savoir à quel moment vous pensez arriver afin de pouvoir venir vous chercher à la gare. Le colloque commence le lundi 16 juin au matin, au Palais de l'Académie place Carnot.*
>
> *Je vous prie, cher Monsieur de croire à mes sentiments les plus respectueux.*
>
> *Laurent Schwartz*
> *Maître de conférences à la faculté des Sciences*
> *2 Rue de la Graffe, Nancy FRANCE*
>
> *P.S. Je vous ai envoyé quelques tirages à part. L'article des Annales de Grenoble sert de point de départ à la conférence que je ferai au Colloque* [a].
>
> a. Børge Jessen Papers, The Archive, Institute for Mathematical Sciences, University of Copenhaguen.

Les détails matériels, tout aussi bien que mathématiques, sont très présents. Notons surtout que Schwartz a envoyé des tirages à part de son premier article sur les distributions, permettant ainsi aux participants d'en prendre connaissance avant le colloque.

Déroulement et atmosphère Les participants donnent le récit de l'atmosphère du colloque ; les détails rapportés montrent que les contacts sont facilités à chaque moment. Norbert Wiener se souvient de son hôtel comme étant le « quartier général des visiteurs étrangers » [17] lors du colloque.

Dans le programme détaillé du colloque [18], outre les horaires et titres des exposés des différents participants, on trouve de multiples informations pratiques, qui nous permettent de reconstituer quelques-uns des moments partagés pendant ce colloque.

On apprend ainsi qu'il y a entre une et trois conférences par demi-journée, le plus souvent deux. Schwartz dispose quant à lui de toute la matinée du jeudi 19 juin pour exposer sa « Théorie des distributions et transformation de Fourier ». Outre les exposés, est prévue le premier jour, lundi 16 juin, une réunion d'organisation pour parler de l'emploi du temps et des questions financières. Schwartz et Deny sont secrétaires des conférences.

Le document précise aussi le « déjeuner commun » et le thé « à 16h30, dans la salle des Conférences », qui ont lieu chaque jour du Colloque. Il est aussi fait mention des « Festivités » proposées, comme le « banquet » le mercredi soir, la « soirée » chez le Doyen Delsarte le vendredi soir et le « thé » offert par le Recteur Donzelot le samedi après-midi. Quelques visites de la ville de Nancy et restaurants sont aussi recommandés. Enfin, on peut penser que Schwartz a, lui aussi, participé à l'organisation de ce colloque, car ses coordonnées font partie, avec celles de Mandelbrojt et Delsarte, des « adresses et numéros de téléphone utiles ».

16. Les mathématiques à Nancy sont vivantes à cette date, grâce à Delsarte, qui y est depuis 1927 [1]. Il fait venir à Nancy Paul Dubreil (1933-1937), puis Jean Leray (1936-1947) et Dieudonné (1937-46 et 1948-52) ; puis Schwartz (1945-52), Godement (1946-55) ; et, un peu plus tard, Serre (1954-56), Jacques-Louis Lions (1954-64). Nancy est aussi un haut-lieu de Bourbaki, ainsi que le décrit [3] : le secrétariat de Bourbaki y est entre 1935 et 1968, des réunions Bourbaki y ont lieu, de nombreux membres y passent.

17. « The hotel at which I stayed was the headquarters for the foreign visitors. There was Harld Bohr, from Denmark ; Carleman, from Sweden ; Ostrowski, from Basel, and dear old Papa Plancherel from the Zurich Federal Institute of technology. Jessen was there from Denmark and Beurling from Sweden, both of them belonged to a younger generation. » [25, p. 317].

18. Archives départementales de Meurthe et Moselle, liasse W 1018/96.

3.3 – Comprendre le « succès » : le cas de l'exposé de Schwartz

En guise de préface à l'édition des actes du colloque, on peut lire les mots suivants :

> Un colloque international sur l'Analyse Harmonique s'est tenu à Nancy en juin 1947. Il a été organisé par le Centre National de la Recherche Scientifique avec le Concours de la Fondation Rockefeller. Outre les participants actifs dont les Mémoires suivent, de nombreux auditeurs ont constamment suivi les conférences et les discussions. Ce colloque a donné lieu à de nombreux contacts personnels entre ses participants, français et étrangers. Les idées fécondes nées de ces contacts sont à l'origine de quelques travaux importants parus depuis, ou en train de paraître. [8]

Une telle analyse lyrique du colloque n'a guère de signification si on la lit seule. Nous allons néanmoins essayer de comprendre, du point de vue de Schwartz, quels ont pu être les différents succès de ce colloque. Nous présentons, dans un premier temps, l'exposé de Schwartz, en insistant sur les mathématiques qu'il a présentées et sur l'intérêt partagé de ses résultats afin de comprendre quelles interactions mathématiques ont pu avoir lieu lors de ce colloque. Examiner plus en détail la contribution de Schwartz permet aussi de voir à la fois comment elle s'insère dans les développements récents internationaux en analyse harmonique mais aussi comment elle contribue au renouveau de la recherche française (en l'occurrence en s'intégrant dans le cadre de sa théorie des distributions).

Les distributions sphériques

C'est à l'occasion de ce colloque que Schwartz expose pour la première fois la définition de ses « distributions sphériques », qui deviennent à partir de 1951 les « distributions tempérées ».

La question de la transformation de Fourier des distributions est présente dès 1945 [18], le premier article dans lequel Schwartz définit sa théorie des distributions. On pourrait parler d'une première tentative pour définir la transformée de Fourier d'une distribution ; qui reste néanmoins assez « bancale » par manque de symétrie et de stabilité : une distribution quelconque n'a pas nécessairement de transformée de Fourier, et si elle en a, on n'a pas de formule naturelle d'inversion.

Dans le dernier paragraphe, intitulé « Structure topologique dans l'espace des distributions » Schwartz définit une notion de convergence au sens des distributions :

> Des distributions T_i convergent vers 0 si, quelle que soit φ, les $T_i(\varphi)$ convergent vers 0, et cela uniformément par rapport à tout ensemble de fonctions φ à noyaux contenus dans un compact fixe, et bornées dans leur ensemble ainsi que chacune de leurs dérivées.

Cette topologie, « la plus intéressante » selon Schwartz, permet de « se débarrasser de toutes les difficultés inhérentes habituellement à la dérivation ». Il donne un premier théorème, suivant lequel la convergence de fonctions continues, uniforme sur les compacts, implique la convergence des distributions (que définissent ces fonctions). Cela montre que sa notion de convergence est bien compatible avec la convergence usuelle des fonctions :

> **Théorème 1.** *Si des fonctions continues f_i convergent vers une fonction continue f, uniformément sur tout compact, les distributions f_i convergent vers la distribution f.*

Son deuxième théorème affirme que

> **Théorème 2.** *La dérivation est une opération linéaire continue. Autrement dit si des distributions T_i convergent vers T, les DT convergent vers DT_i, D étant un symbole de dérivation quelconque*

Une fois donnée et explicitée cette topologie sur l'espace des distributions, Schwartz donne quelques exemples autour de la série et de l'intégrale de Fourier. Un premier exemple simple de convergence dans l'espace des distributions est le suivant :

Théorème. *Quel que soit le nombre réel α, les fonctions $t^\alpha e^{itx}$ convergent vers 0 pour $t \to \pm\infty$*

Schwartz remarque que « cet exemple est d'autant plus curieux que pour $\alpha > 0$, les modules, $|t|^\alpha$, de ces fonctions convergent vers $+\infty$ ». Il nous en donne la démonstration, qui se sert des théorèmes énoncés précédemment. En effet, si n est un entier $> \alpha$, les fonctions $\frac{1}{t^n} t^\alpha e^{itx}$ convergent uniformément vers 0. Or les fonctions étudiées en sont les dérivées, à un facteur près. En appliquant le théorème sur la continuité de l'opération de dérivation, nos fonctions convergent donc vers 0, dans l'espaces des distributions.

Schwartz cherche à donner des analogues de ce théorème dans le cadre de la série de Fourier puis de l'intégrale de Fourier. Pour la série de Fourier, cela donne l'énoncé suivant (Schwartz n'énonce pas de théorème, mais le décrit dans le texte) : « La série de Fourier $\Sigma a_n e^{inx}$ est convergente, dès que $|a_n| = O(|n|^\alpha$, α réel > 0 » Cela permet d'en déduire la convergence de la série de Fourier d'une distribution périodique. On peut en effet calculer les coefficients de Fourier d'une telle distribution : $a_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} T * e_n$. Et, quitte à considérer qu'il s'agit de la dérivée p-ième ($p > |\alpha|$) d'une série qui converge ($\Sigma \frac{1}{n^p} a_n e^{inx}$), on peut comme précédemment appliquer les théorèmes énoncés pour conclure que la série de Fourier converge au sens des distributions.

Schwartz dit ensuite que les résultats sont analogues avec l'intégrale de Fourier. Le résultat est le suivant : « L'intégrale de Fourier converge dès que $f(x) = O(x^a)$. » C'est-à-dire que $\int_{-A}^{B} e^{itx} f(x) dx$ *converge vers une limite dans l'espace des distributions de la variable t, quand A et B* $\to +\infty$. La démonstration est similaire à celle pour les séries de Fourier.

Néanmoins, Schwartz écrit qu' « il existe une formule de réciprocité, mais [qu'] elle est plus compliquée que dans le cas où $f(x)$ est sommable ». C'est donc un premier problème. Schwartz conclut en disant que l'on peut être amené à considérer, plus généralement, les transformées de Fourier de toutes les distributions, « quels que soient leur irrégularité et leur comportement à l'infini ». Néanmoins, pour cela, il est précisé qu'on « est obligé d'introduire une nouvelle famille de distributions d'un maniement nettement plus compliqué et moins intuitif. » Il donne l'exemple de la transformée de Fourier de e^x qui est « une masse +1 au point d'abscisse imaginaire $-i$ » (qui n'est pas une distribution, car « dans le cadre des distributions introduites jusqu'ici, les points réels seuls interviennent »). Schwartz promet « un mémoire sur les fonctions moyenne-périodiques où ces diverses notions sont avantageuses ». On voit donc ici, et c'est confirmé par l'article suivant de Schwartz, qu'il n'a pas encore trouvé le bon point de vue pour la transformée de Fourier.

En 1947, à Nancy, il va exposer ses distributions, pour la première fois devant un public international. Il a fait envoyer un tiré à part de son article aux participants, ainsi que nous l'avons lu dans sa lettre à Jessen. Il n'est pas le seul à présenter un exposé parlant de transformées de Fourier généralisées. Nous allons présenter l'exposé publié de Schwartz [21], qui paraît en 1949 [19].

Les deux problèmes rencontrés dans l'article de 1945, à savoir l'absence de formule de réciprocité simple pour le cas des fonctions $f(x) = O(x^a)$ qui ont une transformée de Fourier au sens des distributions, et la non-stabilité de l'espace des distributions général par transformation de Fourier, vont être résolus.

Le discours de Schwartz a changé, car il écrit qu'« il n'est pas possible de définir la transformée de Fourier d'une distribution quelconque. Il faut changer les notions utilisées. »[21, p. 2]

Il introduit donc l'espace $(\mathcal{S})$ qui est *l'ensemble des fonctions* $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$*, indéfiniment dérivables, tendant vers zéro à l'infini plus vite que toute puissance de* $\frac{1}{r}$ ($r^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$)*, ainsi que chacune de leurs dérivées.* On remarque que $(\mathcal{D})$ est inclus dans $(\mathcal{S})$. La convergence sur $(\mathcal{S})$, compatible avec la convergence sur $(\mathcal{D})$, est définie ainsi : « Des $\theta_j \in \mathcal{S}$ convergent vers zéro dans $(\mathcal{S})$ si toute dérivée des θ_j, après multiplication par tout polynôme, converge uniformément vers zéro. »

Il peut alors définir $(\mathcal{S}')$ comme étant l'espace des distributions donné par les formes linéaires continues sur $(\mathcal{S})$. Cet espace ainsi défini est « le domaine naturel de la transformation de Fourier et de l'analyse harmonique ». Schwartz appelle ces distributions les « distributions sphériques » (car pour qu'une distribution de $(\mathcal{D}')$, distribution sur $\mathbb{R}^n$, appartienne à $(\mathcal{S}')$, il faut et il suffit qu'elle soit prolongeable en une distribution sur la sphère).

Avec trois formules, Schwartz peut définir la transformation de Fourier pour une fonction α dans $(\mathcal{S}')$

$$\begin{aligned} F(a) &= \alpha(y_1, \dots, y_n) \\ &= \iint \dots \int a(x_1, \dots, x_n) e^{-2i\pi(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)} dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

donner la formule de réciprocité

19. Pour une version plus détaillée, voir [20].

$$\begin{aligned}\bar{F}(\alpha) &= a(y_1,\dots,y_n)\\ &=\iint\dots\int \alpha(x_1,\dots,x_n)e^{+2i\pi(x_1y_1+\dots+x_ny_n)}dx_1\dots dx_n\end{aligned}$$

et la formule de Parseval, si $F(a)=\alpha$, $F(b)=\beta$:

$$\begin{aligned}&\iint\dots\int a(x_1,\dots,x_n)\bar{b}(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n\\ &\quad=\iint\dots\int \alpha(y_1,\dots,y_n)\bar{\beta}(y_1,\dots,y_n)dy_1\dots dy_n\end{aligned}$$

qui permet de définir la transformation de Fourier dans $(\mathcal{S}')$: si U est une distribution sphérique, on définit sa transformée de Fourier $V=F(U)$ à l'aide de la formule de Parseval : $U(\bar{a})=V(\bar{\alpha})$ où $\alpha=F(a)$. On a F isomorphisme de $(\mathcal{S}')$ sur lui-même ; f et $\bar{F}$ sont deux isomorphismes réciproques.

Un intérêt partagé

L'une des raisons pour lesquelles les distributions de Schwartz ont connu un si grand succès lors de ce colloque tient à l'intérêt partagé de nombre de ses participants pour les mathématiques en question. Norbert Wiener écrit ainsi avoir pu intégrer son travail dans ce colloque qui fut un succès [25, p. 318][20].

C'est l'exposé de Carleman, intitulé « Sur l'application de la théorie des fonctions analytiques dans la théorie des transformées de Fourier » [6], dans lequel il parle des paires de fonctions[21], qui est le plus proche de celui de Schwartz. Les distributions sphériques de Schwartz se rapprochent aussi des travaux de Bochner, dont Schwartz cite un ouvrage : *Vorlesungen über Fouriersche Integrale* [5][22].

Cette discussion sur l'exposé de Schwartz et son introduction des distributions tempérées permet de montrer l'intérêt partagé des thématiques du colloque d'analyse harmonique, autour de généralisations de la transformée de Fourier ; ce qui en justifie l'organisation choisie. Si les distributions tempérées sont un apport majeur de Schwartz à la théorie des distributions, le colloque d'analyse harmonique à l'occasion duquel il les expose est un événement important dans la diffusion de sa théorie. Nous allons présenter maintenant quelques conséquences immédiates de ce colloque, à la fois sur la carrière et les mathématiques de Schwartz.

4. Un tremplin pour Schwartz et sa théorie des distributions.

4.1 – De nouvelles questions mathématiques

L'intérêt de Schwartz pour le colloque d'analyse harmonique ne se limite pas à ses distributions tempérées. Les discussions entre les participants du colloque ont donné lieu à la publication par Schwartz d'une note aux *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* portant sur la synthèse spectrale l'année suivante [19], suivie d'un article en 1951 [17]. Cette note répond à deux problèmes duaux, de Wiener et Beurling, qui étaient tous les deux présents au colloque. Schwartz donne une preuve par les distributions et une preuve élémentaire de la réponse négative qu'il apporte à ces deux problèmes.

Puis Whitney publie un article en 1948, intitulé « On ideals of differentiable functions » dans lequel il répond à la question de Schwartz. [24]. Il précise dans son introduction (p. 635) :

> It was conjectured by Laurent Schwartz (personal communication)[23] that an ideal is determined by its set local ideals, provided that the ideal is closed (we use the topology described below). The main object of this paper is to prove this conjecture (see Theorem I). There is a rather obvious generalization of the theorem to the case where E^n is replaced by a manifold of class C^r.

20. À propos de Schwartz en particulier, il précise : « Schwartz was active along lines very similar to my own. He had generalized still further the field which I had already treated in my *Acta* paper on generalized harmonic analysis. He reduced it to that highly abstract basis which is characteristic of all the work of the Bourbaki school to which he belonged. » [25, p. 318]

21. Récemment, faisant suite à deux questions ouvertes de Lützen [13], Kiselman [10] démontre que les paires de fonctions introduites par Carleman ne représentent pas toujours des distributions et que les transformées de Fourier des distributions tempérées, prises aux sens de Carleman et Schwartz, sont égales.

22. Bochner écrit une recension critique du traité *Théorie des distributions*, devenue célèbre, dans laquelle il conclut « It would not be easy to decide what the general innovations in the present work are, analytical or even conceptual [...] » [4, p. 85] Pour lui, les distributions de Schwartz ne vont pas tellement plus loin que son propre travail de 1932.

23. Cartan se rappelle cette conversation entre Whitney et Schwartz : « C'est à la fin de ce colloque qu'eut lieu la première rencontre entre Schwartz et Whitney, venu en France pour participer à un colloque de topologie qui allait se tenir à Paris quelques jours plus tard. Schwartz voulait poser à Whitney un problème difficile relatif aux idéaux ponctuels de fonctions différentiables. Réponse de Whitney : "Je crois pourvoir la solution en un quart d'heure". Il la trouva en effet, mais après plusieurs semaines. [7, p. 25-26] »

Schwartz écrit la recension de cet article. Il a aussi exposé au séminaire Bourbaki sur les travaux de Whitney (« Les théorèmes de Whitney sur les fonctions différentiables », exposé nº 45, mars 1951). Lorsque Szolem Mandelbrojt présente un rapport sur les travaux de Schwartz à l'Académie des Sciences, il identifie les liens entre la thèse de Schwartz, ses travaux sur les fonctions moyenne-périodiques au résultat de synthèse harmonique qu'il obtient [24].

Dans les articles cités, on trouve de petits indices permettant de relier ces travaux au colloque d'analyse harmonique de 1947, à la rencontre et aux discussions qui ont été rendues possibles. C'est une première manière de comprendre une conséquence possible d'un tel colloque.

4.2 – Premier voyage : internationalisation de la carrière et des distributions de Laurent Schwartz

Pour Schwartz, outre la diffusion de ses distributions tempérées, qui participe plus largement à la réception de sa théorie des distributions, et l'étape sur la synthèse harmonique permise par sa réponse aux questions de Wiener et Beurling, l'une des conséquences principales de ce colloque a été l'internationalisation de sa carrière, qui renforce celle de la réception de sa théorie des distributions. Nous décrivons ici son premier voyage, qui est très directement lié aux mathématiciens qu'il a rencontrés en 1947.

Schwartz considère le « premier voyage universitaire d'envergure » [22, p. 309] qu'il fait au Danemark et en Suède à l'automne 1947 comme « une grande expérience et un grand événement dans [s]a vie », « autant que le colloque d'analyse harmonique » [25].

Harald Bohr et Borge Jessen écrivent à Schwartz dès le 14 juillet 1947 [26] afin de l'inviter à venir parler à Copenhague, concrétisant par là l'invitation informelle dont ils avaient discuté lors du colloque d'analyse harmonique de Nancy, en juin 1947. Il s'agit là d'une invitation conjointe des Instituts de Mathématiques de l'Université et de l'École polytechnique de Copenhague, qui souhaitent entendre Schwartz présenter sa théorie des distributions, dont ils louent l'intérêt dans les mathématiques pures et appliquées. Ils y décrivent l'enthousiasme de tous :

> all our colleagues [...] got enthusiastic about the possibility of seeing you here and of hearing some lectures of you on your extraordinary theory of distributions.

Bohr et Jessen ont été frappés à Nancy du don extraordinaire de simplicité et de clarté avec lequel expose Schwartz. Ils lui demandent néanmoins de proposer un premier exposé sans aucun prérequis pour un public hétérogène. Ils ont obtenu une bourse afin de payer ses frais de transport et de séjour. Schwartz accepte l'invitation avec plaisir, et se rend à Copenhague du 27 octobre au 2 novembre, où il donne trois conférence [27]. Il est logé par Borge Jessen dans sa famille.

Schwartz est de plus invité par Lars Gårding à profiter de son voyage pour se rendre à Lund donner deux conférences, qu'il planifie les lundi et mardi 3 et 4 novembre 1947. Les exposés de Schwartz ont été préparés par Bohr, qui a beaucoup travaillé sur l'article de Schwartz [18] et a un peu enseigné les distributions, ainsi que le raconte Schwartz à sa femme [28].

Le séjour de Schwartz au Danemark est un grand succès. Les Danois sont enchantés, ainsi que cela transparaît dans les remerciements de Jessen à la fin du séjour de Schwartz [29] :

24. Archives de l'Académie des Sciences, Dossier biographique Laurent Schwartz. Rapport sur les travaux de Laurent Schwartz. Professeur à l'École polytechnique (né en 1915) par M. S. Mandelbrojt. Comité secret du 21 janvier 1974.

25. Lettre de Schwartz à sa femme le 5 novembre 1947, de retour à Paris. Cette lettre est reproduite en partie dans un article de la *Gazette des mathématiciens* par Claudine Schwartz [16]. Claudine précise que Schwartz est resté quelque temps à Paris à son retour en France, alors que Marie-Hélène est à Nancy avec Marc-André, 4 ans, et Claudine, 3 mois. Il assiste en effet au congrès Bourbaki, « Congrès de Paris », qui a lieu à Paris du 8 au 11 novembre 1947.

26. Børge Jessen Papers, The Archive, Institute for Mathematical Sciences, University of Copenhaguen.

27. Conformément aux demandes de Bohr et Jessen, il commence par des « Généralités sur la théorie des distributions », se bornant à « l'énoncé des principaux résultats, sans démonstration, et donne ensuite deux exposés plus poussés, l'un sur "Les produits de distributions et leurs applications" et l'autre sur la "Transformation de Fourier et Analyse harmonique" ». Lettre de Schwartz à Jessen, 13 octobre 1947, Børge Jessen Papers, The Archive, Institute for Mathematical Sciences, University of Copenhaguen.

28. Lettre du 5 novembre 1947, archives privées de la famille Schwartz : « J'ai eu une agréable surprise. Bohr avait tellement travaillé sur l'opuscule des annales de Grenoble qu'il en est jaune (l'opuscule, pas Bohr) et il a fait dessus son cours à la Faculté et... aux professeurs des lycées. Les étudiants de l'université se sont passionnés pour le sujet et sont venus me parler en connaisseurs ».

29. Børge Jessen Papers, The Archive, Institute for Mathematical Sciences, University of Copenhagen.

Les auditeurs ont déjà par leurs applaudissements exprimé leur reconnaissance des merveilleuses conférences que nous avons écoutées.
Il me reste seulement d'exprimer à M. Schwartz les remerciements très cordiaux de la part de l'École polytechnique et de l'Institut mathématique de l'Université d'avoir fait le long voyage pour venir nous expliquer son idée.
Cela vous avez fait avec un tel esprit et une telle ardeur que nous n'oublierons jamais vos conférences.
Vous avez obtenu que nous savons maintenant tous ce que c'est, une distribution, et que nous avons une impression très claire des nombreuses applications que l'on peut faire de ces êtres nouveaux dans l'analyse.
Naturellement il faut s'accoutumer à cette nouvelle technique pour pouvoir l'appliquer, mais de ce que vous avez dit – ainsi que de ce que vous n'avez pas dit – vous avez créé en nous une très grande curiosité d'en savoir plus, et nous attendrons avec le plus grand intérêt la publication finale de vos belles recherches.
Par l'amour avec lequel vous avez présenté votre sujet, et par toute votre personnalité ces conférences ont été une grande inspiration.
Encore mille fois merci.

Jessen reconnaît donc à Schwartz son talent d'orateur, qui va de pair avec les beaux objets mathématiques que sont les distributions.

Jessen précise ensuite qu'ils ont arrangé « une rencontre tout à fait informelle avec M. Schwartz à l'Institut mathématique de l'Université, Begdamnsvey 15, le samedi à 11 heures du matin ».

Schwartz écrit à sa femme que ses distributions connaissent un succès, exagéré selon lui, au Danemark [30] et commencent à être connues ailleurs :

> Riesz [31] en a entendu parler par Steinhaus et Stone en Amérique, Gårding en Suède, Bohr au Danemark ; un polonais de Copenhague en a entendu un exposé de Weyssenhoff à Cracovie !

À Lund, où il se rend juste après Copenhague en profitant de l'occasion, il est accueilli par Lars Gårding, Riesz, ainsi que les autres élèves de Riesz. Schwartz ne parlant pas anglais lors de ce premier voyage, il donne donc sa conférence en français, et Riesz résume et traduit toutes les 20 minutes en suédois. Riesz a aussi invité Schwartz chez lui, avec ses élèves, « à de somptueux repas, mais sans dames, et tout se passant plus en famille et plus simplement ». Les discussions se sont prolongées parfois jusqu'à deux heures du matin.

Ce premier voyage a un grand impact, à la fois pour la diffusion et la réception de la théorie des distributions de Schwartz, mais aussi pour la conscience qu'il a de l'insertion de ses travaux sur une scène internationale. Cela réalise bien l'objectif préconisé par la Fondation Rockefeller, qui souhaite que les scientifiques français prennent l'habitude de voyager afin de partager leurs recherches.

L'importance de ce premier voyage et de ces nombreuses rencontres apparaît très clairement dans les dires de Schwartz. Et l'on voit bien que cela ne se limite pas à l'exposition de sa théorie, mais que les échanges, dîners, discussions prennent une place primordiale pour lui et donc dans ce qu'il retranscrit dans ses lettres.

Les premiers voyages de Schwartz sont également à l'image des participants de ce colloque d'analyse harmonique de 1947 : après l'Europe du Nord, il se rend en Angleterre, en Allemagne, en Amérique du Nord (Canada) [32], puis, un peu plus tard, aux États-Unis et en Amérique du Sud. Ils ont une grande importance dans la diffusion de la théorie des distributions de Schwartz et son adoption.

Conclusion

L'attribution de la médaille Fields à Schwartz pour sa théorie des distributions en 1950 marque sans doute l'aboutissement de l'histoire de ce colloque. Harald Bohr est le président du Comité Fields, c'est lui qui décerne la médaille et fait un discours à l'occasion du Congrès International des Mathématiciens de 1950 qui a lieu à Harvard. C'est le premier Congrès International après la guerre, qui revêt donc une importance particulière pour la communauté internationale des mathématiques.

Or il semble que Schwartz ait fait forte impression lors de ses exposés, à Nancy lors du colloque

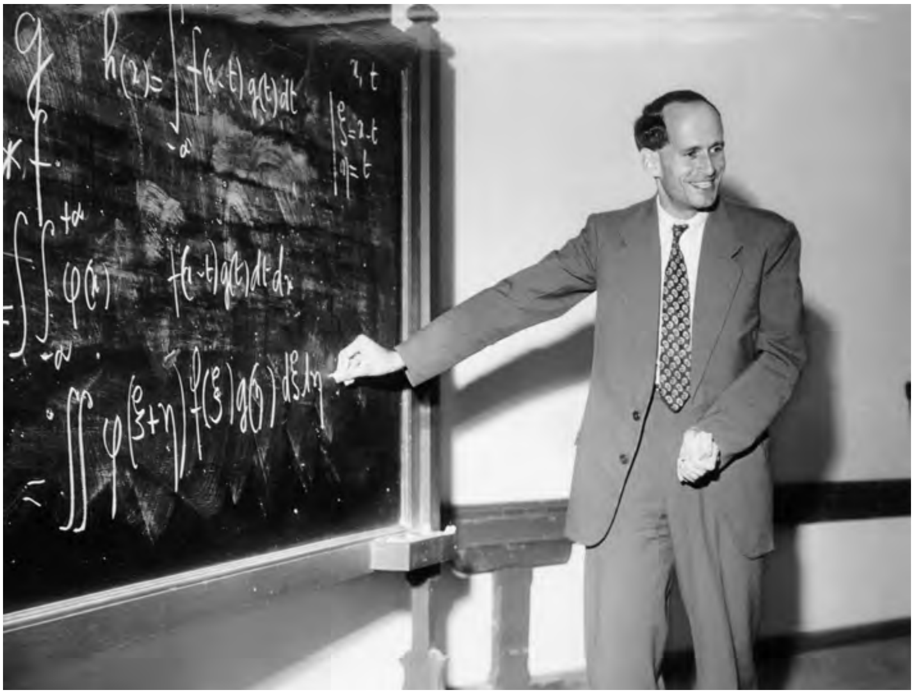
30. « Mais je reste très troublé du succès excessif des distributions. Le succès au Danemark dépasse les bornes permises. Cela risque d'amener des déceptions plus tard ! Mon nouveau-né est beau et bien fait, il est sympathique et aura peut-être un bel avenir, mais il faut le laisser grandir. Ce n'est tout de même pas Jésus-Christ, et les compliments des rois Mages venus de toute la terre m'inquiètent un peu ; s'il est plus tard crucifié ? »

31. Schwartz précise néanmoins que Riesz est beaucoup plus « raisonnable ».

32. Il y donne en particulier un cours sur les distributions, et y rencontre Dirac. Lors de ce voyage, Schwartz renonce à se rendre aux États-Unis, ainsi qu'à Mexico, parce qu'il n'a pu obtenir un visa à cause de ses engagements politiques antérieurs. L'histoire du visa de Schwartz mobilise un grand nombre de mathématiciens, français et américains.

33. Voir ainsi Mandelbrojt : « Il est certain qu'ils furent tous fortement impressionnés par l'exposé de Schwartz. D'ailleurs, Bohr, n'était-il pas de la commission qui décerna en 1950 la médaille Fields à Laurent Schwartz pour sa théorie des distributions. » Archives de l'Académie des Sciences, Dossier biographique Laurent Schwartz. Comité Secret du 4 novembre 1974. Rapport sur les travaux de M.

Figure 1 – Laurent Schwartz, 5 octobre 1952, Montevideo, Uruguay.



d'Analyse Harmonique, ou encore lors de son séjour au Danemark [33]. Schwartz lui-même relie ces deux événements dans son souvenir, en se souvenant de Bohr à l'occasion de la parution de ses œuvres complètes : outre l'« exceptionnelle sympathie » qu'il avait pour lui, Bohr reste pour lui « lié [...]à [s]on premier colloque international, à [s]on premier voyage à l'étranger, et à la médaille Fields ! » [34]

Le cas de Schwartz a donc réalisé les objectifs des colloques financés par la Fondation Rockefeller, qui ont ici lancé un jeune mathématicien français sur la scène internationale, tout en faisant progresser un thème de recherche, ici l'analyse harmonique. L'expérience obtenue par Schwartz en terme d'organisation de la vie collective des mathématiques et sa conception du colloque dans le début d'une carrière mathématique l'amènent à réinvestir les colloques ultérieurs auxquels il participe. Il y fait figure d'expert, et jouer un rôle actif pour que le colloque soit pour ses étudiants un tremplin comme celui de 1947 l'a été pour lui.

Références

[1] *1903-2003 : un siècle de mathématiques à Nancy*. Institut Elie Cartan, Nancy, 2003.

[2] M. Audin. *Correspondance entre Henri Cartan et André Weil (1928-1991)*. Société Mathématique de France, 2011.

[3] L. Beaulieu. « Bourbaki à Nancy ». In : *[1, p. 33-45]*. 2003.

[4] S. Bochner. « Review of *Théorie des distributions* by Laurent Schwartz [1950, 1951] ». *Bulletin of the American Mathematical Society* **58,** (1952), p. 78–85.

[5] S. Bochner. *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1932.

[6] T. Carleman. « Sur l'application de la théorie des fonctions analytiques dans la théorie des transformées de Fourier ». In : *[8, p. 45-54]*. 1949.

Laurent Schwartz (né en 1915). Professeur à l'École polytechnique. Par S. Mandelbrojt.

34. Lettre de Schwartz à Jessen, 26 décembre 1953. Børge Jessen Papers, The Archive, Institute for Mathematical Sciences, University of Copenhaguen.

[7] H. Cartan. « Quelques souvenirs d'une longue amitié ». In : *[12, p.25-31]*. 2003.

[8] C.N.R.S., éd. *Analyse harmonique : Nancy, 15-22 juin 1947*. Colloques internationaux du Centre national de la recherche scientifique, XV, 1949.

[9] CNRS, SMF, éd. *Équations aux dérivées partielles linéaires, Orsay 1972*. Coll. internationaux du CNRS, Ast. 2-3, 1973.

[10] C. O. Kiselman. « Generalized Fourier transformations: the work of Bochner and Carleman viewed in the light of the theories of Schwartz and Sato ». In : *Microlocal analysis and complex Fourier analysis*. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002, p. 166–185.

[11] J. Krige. *American Hegemony and the Postwar Reconstruction of Science in Europe*. Cambridge: MIT Press, 2006.

[12] *Laurent Schwartz (1915-2002), Supplément au nº 98 de la Gazette des Mathématiciens*. Paris, Société Mathématique de France, 2003.

[13] J. Lützen. *The Prehistory of the Theory of Distributions*. Studies in the History of Mathematics et Physical Sciences, Vol. 7. New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag. VIII, 1982.

[14] K. H. Parshall et A. C. Rice, éds. *Mathematics Unbound : the Evolution of an International Mathematical Research Community 1800-1945*. American Mathematical Society, 2002.

[15] A.-S. Paumier. « Laurent Schwartz (1915-2002) et la vie collective des mathématiques ». Thèse de doct. Univ. P. et M. Curie, juin 2014.

[16] C. Schwartz. « Autour des premiers travaux de Laurent Schwartz sur les distributions. » *Gazette des mathématiciens* **113** (2007), p. 113–118.

[17] L. Schwartz. « Analyse et synthèse harmonique dans les espaces de distributions ». *Canadian Journal of Mathematics* **3** (1951), p. 503–512.

[18] L. Schwartz. « Généralisation de la notion de fonction, de derivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques. » *Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. Math. Phys., n. Ser.* **21** (1945), p. 57–74.

[19] L. Schwartz. « Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts ». *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **227** (1948), p. 424–426.

[20] L. Schwartz. « Théorie des distributions et transformation de Fourier ». *Ann. Univ. Grenoble* **23** (1948), p. 7–24.

[21] L. Schwartz. « Théorie des distributions et transformation de Fourier ». In : *[8, p. 1-8]*. 1949.

[22] L. Schwartz. *Un mathématicien aux prises avec le siècle*. Paris: Editions Odile Jacob, 1997.

[23] R. Siegmund-Schultze. *Rockefeller and the Internationalization of Mathematics Between the Two World Wars*. Birkhäuser, 2001.

[24] H. Whitney. « On Ideals of Differentiable Functions ». *American Journal of Mathematics* **70**, nº 3 (1948), p. 635–658.

[25] N. Wiener. *I am a mathematician : the later life of a prodigy : an autobiographical account of the mature years and career of Norbert Wiener and a continuation of the account of his childhood in Ex-prodigy*. M.I.T. Press, 1956.

[26] D. T. Zallen. « The Rockefeller Foundation and French Research ». *Cahiers pour l'histoire du CNRS* **5** (1989).

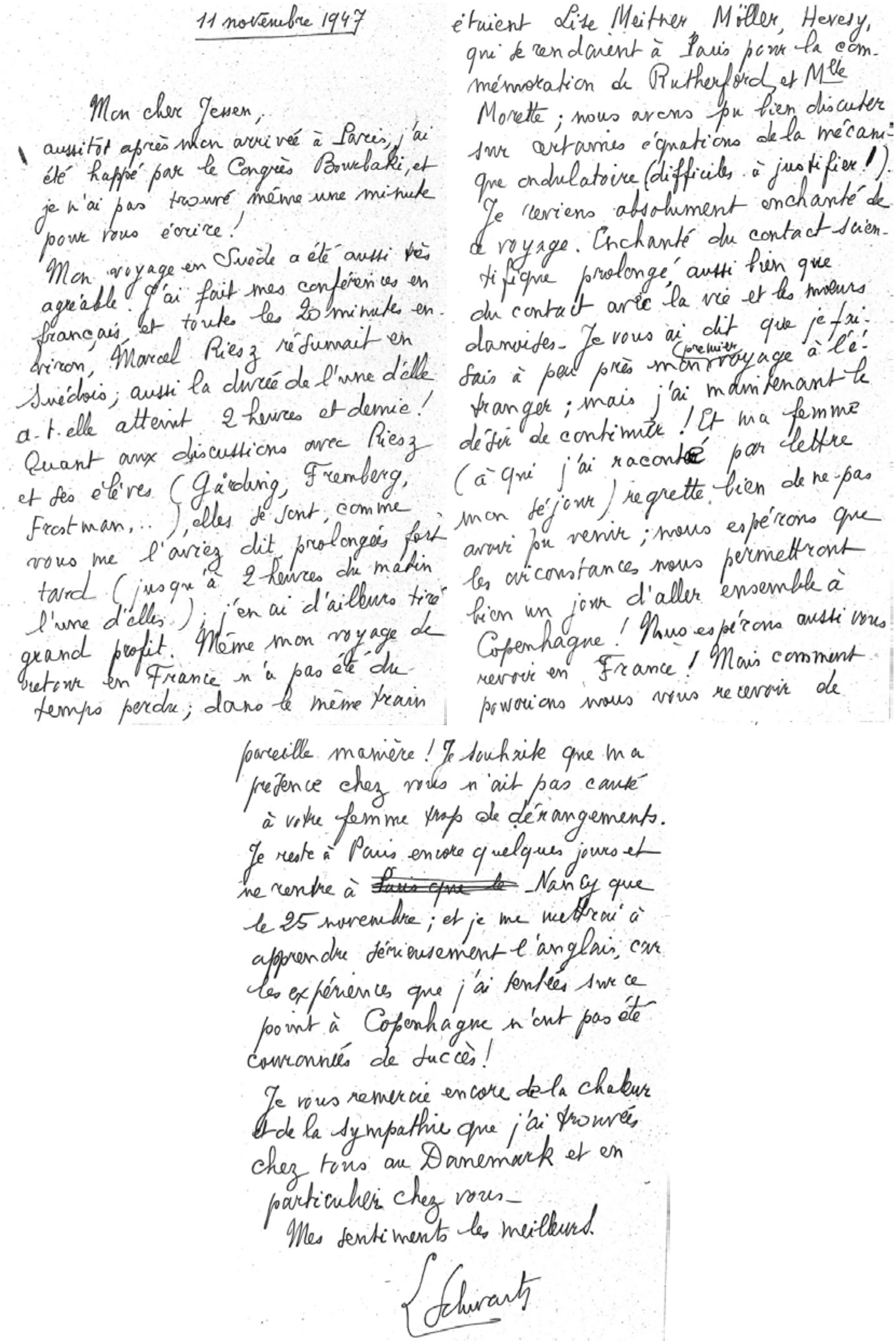
Anne-Sandrine Paumier

ihés, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette – Fondation Mathématique Jacques Hadamard
`anne-sandrine.paumier@ens-lyon.org`

Anne-Sandrine Paumier est post-doctorante à l'ihés. Elle a soutenu sa thèse en 2014 sur « Laurent Schwartz (1915-2002) et la vie collective des mathématiques ». Ses travaux portent sur l'histoire des mathématiques au xx^{e} siècle. Elle travaille actuellement sur l'histoire de l'Institut des Hautes Études Scientifiques (ihés) et ses voisins mathématiques, ainsi qu'à la création d'un Fonds Grothendieck.

Je remercie Caroline Ehrhardt pour ses relectures de mon texte, ainsi que pour ses précieux conseils. Je remercie aussi Claudine Schwartz de m'avoir donné l'autorisation de reproduire la photographie de Laurent Schwartz au tableau, ainsi qu'Olivier Azzola, archiviste de l'École polytechnique, de me l'avoir transmise en haute définition. Cette photographie a pu être datée et localisée grâce aux recherches de Michaël Barany, doctorant à Princeton University. Enfin, je remercie Jesper Lützen, responsable de The Archive, Institute for Mathematical Science, University of Copenhaguen, d'avoir scanné et de m'avoir autorisée à reproduire la correspondance entre Laurent Schwartz et Børge Jessen.

Figure 2 – Lettre de Schwartz à Jessen, 11 novembre 1947. Børge Jessen Papers, The Archive, Institute for Mathematical Sciences, University of Copenhaguen.



11 novembre 1947

Mon cher Jessen,

aussitôt après mon arrivée à Paris, j'ai été happé par le Congrès Bourbaki, et je n'ai pas trouvé même une minute pour vous écrire !

Mon voyage en Suède a été aussi très agréable. J'ai fait mes conférences en français, et toutes les 20 minutes environ, Marcel Riesz résumait en suédois ; aussi la durée de l'une d'elles a-t-elle atteint 2 heures et demie ! Quant aux discussions avec Riesz et ses élèves (Gårding, Fremberg, Frostman, ..), elles se sont, comme vous me l'aviez dit, prolongées fort tard (jusqu'à 2 heures du matin l'une d'elles) ; j'en ai d'ailleurs tiré grand profit. Même mon voyage de retour en France n'a pas été du temps perdu ; dans le même train étaient Lise Meitner, Möller, Hevesy, qui se rendaient à Paris pour la commémoration de Rutherford, et Mlle Morette ; nous avons pu bien discuter sur certaines équations de la mécanique ondulatoire (difficiles à justifier !). Je reviens absolument enchanté de ce voyage. Enchanté du contact scientifique prolongé, aussi bien que du contact avec la vie et les mœurs danoises. Je vous ai dit que je faisais à peu près mon premier voyage à l'étranger ; mais j'ai maintenant le désir de continuer ! Et ma femme (à qui j'ai raconté par lettre mon séjour) regrette bien de ne pas avoir pu venir ; nous espérons que les circonstances nous permettront bien un jour d'aller ensemble à Copenhague ! Nous espérons aussi vous revoir en France ! Mais comment pourrions nous vous recevoir de pareille manière ! Je souhaite que ma présence chez vous n'ait pas causé à votre femme trop de dérangements.

Je reste à Paris encore quelques jours et ne rentre à ~~Paris que le~~ Nancy que le 25 novembre ; et je me mettrai à apprendre sérieusement l'anglais, car les expériences que j'ai tentées sur ce point à Copenhague n'ont pas été couronnées de succès !

Je vous remercie encore de la chaleur et de la sympathie que j'ai trouvées chez tous au Danemark et en particulier chez vous.

Mes sentiments les meilleurs.

L. Schwartz

La mauvaise porte, une interview d'Adrián Paenza

Adrián Paenza a reçu en 2014 le prix Leelavati de l'Union Mathématique Internationale pour son action décisive concernant la dissémination des mathématiques. Cet automne, Adrián a donné un très joli exposé à l'ambassade de France, « La mauvaise porte », autour de son dernier ouvrage, dont le titre veut souligner le fait que nous introduisons et enseignons souvent les mathématiques par la mauvaise porte. À cette occasion, Adrián a offert son aide pour toute action ou réflexion autour de la médiation scientifique. Adrián a ainsi gentiment accepté de se prêter à l'exercice de l'interview à distance en nous renvoyant ses réponses écrites aux questions posées. Cette interview a été réalisée par V. Berthé.

Can you tell us a little about yourself and your mathematical background?

I started college when I was 14 at the Facultad of Exact Sciences, which is part of the University of Buenos Aires. I graduated in Pure Mathematics, and then went on to specialize in several complex variables. I got my PhD in 1979 and I've been a full time professor at my alma mater for 40 years. I'm a mathematician who is not producing and/or generating new math: just divulging it. That said, there are other areas that need to be taken care of, and one of them is giving the average person a different perspective, a different way to be introduced to mathematics. That's my crusade. I'm very happy with everything I've been doing for showing that math can be fun, entertaining... : TV shows, articles in different newspapers but especially in "Pagina 12" (where I have been writing for the last ten years, non stop), plus the books, and the lectures not only in front of professionals, but in front of kids, etc.

How did your career in journalism begin?

There was a military coup in Argentina in 1966 and all universities were closed. At the time that this happened, I wanted to become a sports commentator and I was given an opportunity to do just that when I was only 16 years old. Since then, I've been working in the media, first as a radio-sportscaster, making my debut on TV February 5th 1972, and working in front of a camera to this day (almost 44 years!). I started with politics in 1995 and since 2002, I have been also commenting on science.

How many books have you published?

I have published ten books, five with the Publishing Company Siglo XXI (Century XXI) and then another five with Penguin-Random House.

What are your favorite tools for the dissemination of mathematics: magic tours, games, interviews, etc?

I enjoy all of them! I guess talking to large audiences is something that I enjoy the most, but solving math problems on TV is also fun.

You have experienced various ways of getting in touch with the public (journals, radio, television, theatre, etc). What is your most impressive experiment? Do you see differences between these media for the diffusion of mathematics?

I should say that the most impressive experiences happen when you are in front of young students, who see me like an icon, or something. One of my favourite experiences is when we become engaged in thinking about a problem together, and first fail before solving it. I want to add that I had a great time with a little girl who once grabbed my arm (she was so little) and asked me: "Do you ever make a mistake?" Nothing will ever top that!

You received the Leelavati Prize because of your "decisive contribution in changing the mind of a whole country about the way that mathematics is perceived in daily life". How do you perceive this change with respect to mathematics?

It would be very arrogant for me to say that I perceive any change due to my work, but I can definitely say that we have so many different sources to get math information that did not exist before, and that makes everything much much easier. In the past, we only had books, schools and maybe some interest at home. Now, we have special collections of books dedicated to divulging mathematics that didn't exist before, in several languages, we have plays and movies, TV shows that deal with science in general and math in particular, the use of mathematics in analytics, which is very visible in the sports community... and these are just a few examples. So, I don't think it's the task of just one individual but the collective and cooperative construction of lots and lots of people.

What does the fact that you received the Leelavati Prize change for you? For your country?

I think it was, and is, huge because it was not only me, it was the whole scientific community, and mathematicians in particular, I feel that I am just "one face", as I wrote above, this couldn't have been done alone. Also, recently an Argentinian professor (a lady, no less... which is great) Alicia Dickenstein, was selected as one of the vice presidents of the International Mathematical Union, and Miguel Walsh was awarded the Ramanujan Prize in 2014 for his contributions to Mathematics at a very young age. The list keeps growing, which means that "something" is happening in our country. Both former presidents Nestor Kirchner (2003-2007), and then his wife Cristina Fernández Kirchner (2007-2015), were strong supporters of, and invested money in, science, technology and education, and naturally, after more than a decade of doing that, it shows. So, to answer your question, personally it was a great award (if not the "greatest" award to which I could aspire), but more importantly it means that although I am the one who gets the award, it is a result of the work of lots and lots of people.

You introduced the idea (which was later implemented by the Argentinean Education Minister) of developing a Federal program for digital literacy, inspired by the program "One laptop per child". Your books are distributed with no cost in these free laptops. Can you tell us more about this program?

Yes, this program was first implemented in the US by the pioneer and mentor Dr Nicholas Negroponte, the director of the Media Lab at the MIT, in Boston Massachusetts, who designed a program with the following mandate: every country in the world should distribute netbooks or laptops to EVERY SINGLE kid in each country for free. The project was going to be funded by the Ministry of Education of each particular country. I introduced our former president Nestor Kirchner to Negroponte, who came to Argentina, but finally the deal fell through. However, and this is very important, Kirchner and his minister of education at the time (Daniel Filmus) understood the importance of the project, and although they couldn't do it with Negroponte's program, they ended up cutting a different deal and now, after over a decade of doing so, we can proudly say that the country has already given five million (again, five million) laptops, one for EVERY kid in Argentina, for free.

What do you think concerning the introduction of computer science in teaching?

I think it's paramount and if we don't do it, it's like not allowing kids to use pens and/or pencils a century ago. Plus, it's denying them not the tools of the future, but the tools of the present. I cannot imagine any environment in education without computer science, it's like picturing my house with no refrigerator or running water.

You are involved in the relations between mathematics and the general public. What should we do to improve the image of mathematicians?

Mmmm... I don't know how to answer that one... I think that people are starting to realize that we're not different than them, if nothing else, because WE ARE PART of the people, aren't we?

Do you suffer from a shortage of students in science or in mathematics in Agentina? in South America?

Yes, but that's going to change, once we understand that there's ZERO UNEMPLOYMENT among mathematicians, computer scientists, certain branches of engineering, etc. So, I think that the derivative has changed the sign, and now it's positive and we are going up... just give it some time until it reaches full speed.

Are there young scientists in the new generation following your path?

I think so, and I'm sure that they are going to be not only better (not very difficult) but they're going to bring new blood and new ideas... plus, there are going to be a lot of them, and as we all know, because it happens in every field, with more people working in a subject, more people participating in the team, good things are bound to happen. I'm very pumped about it.

You are interested in open data release. Do you want to say something about this?

Totally: I'm 100 % in favor of everything free, everything open, open source, free access to books, papers, everything. Money CANNOT PUT A STOP to anybody who wants to learn.

Do you think the elections might change something concerning mathematics?

I hope not, but I'm afraid it will. We'll see.

Is there an underrepresentation of women among Argentinian mathematicians? If yes, do you have some hint in oder to change the situation?

I learned a few weeks ago that we have lots of women among our professors and teachers, but we are hiring fewer young women, so, I think that there's reason to be concerned. I know that the Dean of our university, and other members of the mathematical community, are trying to change that trend, but yes, I know that there's still a problem in that regard.

Adrián Paenza est à la fois mathématicien, il a été professeur à l'université de Buenos Aires (UBA), et un journaliste argentin très connu comme chroniqueur sportif, politique mais aussi comme journaliste scientifique. Adrián collabore régulièrement en Argentine avec les radios, les chaînes de télévisions et les journaux principaux, avec des émissions et chroniques régulières, mais il a eu également l'occasion de remplir des théâtres entiers (comme le théâtre Maipo) avec des représentations autour des mathématiques. Adrián a reçu de nombreux prix pour son travail de journaliste (comme le prix Martín Fierro). Il a écrit de nombreux livres dont la série « Matemática... ¿ estás ahí ? » au succès éditorial impressionnant (un million de copies vendues...), livres qui sont très largement traduits dans le monde entier. Adrián a reçu en 2014 le prix Leelavati de l'Union Mathématique Internationale pour son travail concernant la promotion des mathématiques et pour son impact remarquable, en Amérique latine en particulier. Pour en savoir plus, voir le communiqué de presse disponible à l'adresse suivante : `http://www.mathunion.org/fileadmin/IMU/Prizes/2014/news_release_paenza.pdf`.

Nous tenons à remercier R. Yassawi pour sa relecture attentive de l'anglais et pour ses corrections.

« Mathématiciennes africaines »

À propos de la demi-journée « Mathématiciennes africaines » organisée par « FEMMES & MATHS » le 30 mai 2015 à l'Institut Henri Poincaré, Paris.

• D. FALL

Avant de parler de la demi-journée en question, je vais débuter par un petit prologue sur mon histoire personnelle avec « FEMMES & MATHS ».

1. Mon histoire avec « FEMMES & MATHS »

J'ai découvert et adhéré à cette association en 2010. À l'époque, j'étais en thèse mais ignorais l'existence de cette association. Je l'ai donc découverte au travers d'un mail annonçant le dixième forum des jeunes mathématiciennes organisé par FEMMES & MATHS. J'ai décidé d'y participer. Ces quelques jours passés dans les locaux du CIRM à Marseille, entre jeunes chercheuses et mathématiciennes confirmées dont j'admire le parcours, m'ont beaucoup apporté. De plus, à l'époque, étant en thèse dans un laboratoire de traitement du signal, j'ignorais quasiment tout des procédures de qualification et candidatures aux postes de maîtres de conférences en mathématiques. J'ai eu lors de ce forum des conseils très utiles, particulièrement de la part de Marie-Françoise Roy et d'Aline Bonami, et qui ont changé l'orientation que j'avais décidé de donner à la fin de mon doctorat. J'ai retrouvé avec plaisir Aline quelques années plus tard, lorsque j'ai été recrutée en 2013 maître de conférences à l'université d'Orléans où elle est professeur émérite.

Revenons donc à cette rencontre du 30 mai 2015.

2. La demi-journée « Mathématiciennes africaines »

Elle débuta par la présentation de Marie Françoise Ouedraogo, professeur à l'université de Ouagadougou (Burkina-Faso) et présidente de l'association African Women in Mathematics Association (AWMA). Cette association a été créée récemment, en 2013. Son objectif principal est de promouvoir les mathématiques auprès des filles et des femmes en Afrique, notamment en encourageant les femmes africaines à entreprendre et continuer leurs études en mathématiques, en soutenant celles qui sont engagées dans une carrière de recherche en mathématiques ou dans des domaines scientifiques liés aux mathématiques ainsi que celles désirant une telle carrière, et en promouvant l'égalité des chances et l'égalité de traitement entre femmes et hommes dans la communauté mathématique africaine.

Je suis personnellement très sensible à toute initiative visant à encourager la présence de filles dans les filières scientifiques et ai déjà participé à des actions allant dans ce sens en France. J'ai donc été très favorable lorsque Sophie Dabo, professeur à l'université de Lille, m'a sollicitée pour participer aux actions d'AWMA. La première a consisté à dresser mon portrait dans une brochure rassemblant des portraits de femmes mathématiciennes africaines modèles. Cette brochure à paraître devrait être traduite en plusieurs langues et, comme son nom l'indique, vise à proposer des modèles de mathématiciennes africaines aux jeunes filles africaines.

Je dois avouer que parler de moi ne fait pas partie des choses que j'affectionne et, sans faire de fausse modestie, j'ai du mal à me voir « modèle » de quoi que ce soit et encore moins « mathématicienne modèle ». En effet, j'ai eu des difficultés à choisir mon chemin dans les études universitaires (tout m'intéressait, ce qui au final peut s'avérer handicapant !). Après avoir un peu tergiversé, j'ai finalement opté pour la poursuite d'études en mathématiques pures, un peu par défi je dois dire. Puis j'ai eu plus envie d'applications et j'ai choisi un sujet de doctorat dont j'appréciais l'éclectisme, aux confins entre mathématiques, physique et médecine. Je ne me vois donc pas comme une « vraie » mathématicienne, pas comme certains le définiraient en tout cas. Cela tombe bien, je n'aime pas les étiquettes ! Bref, puisque montrer à des jeunes filles des exemples de femmes qui leur ressemblent et qui ont pu faire une carrière scientifique peut les aider ou les inspirer, c'est sans hésitation que j'ai accepté de me livrer à cet exercice et je m'y livrerai autant de fois que cela sera jugé utile. J'en reviens donc à la demi-journée dont il est question.

La présentation de Marie Françoise Ouedraogo fut suivie de celle d'Odon Vallet, spécialiste des religions, venu nous parler de sa fondation en faveur des jeunes mathématicien-ne-s africain-e-s, via l'octroi de bourses d'études à de bons élèves issus de milieux défavorisés dans des pays ciblés.

Après cela, ce fut au tour de Marie-Françoise Roy, professeur émérite à l'université de Rennes, de nous en dire un peu plus sur les réseaux de mathématiciennes en Europe via European Women in Mathematics (ewm), en Afrique (awma) et ailleurs au travers d'imu (International Mathematical Union Committee for Women in Mathematics). Je suis restée stupéfaite devant la proportion dérisoire de femmes parmi les mathématiciens en Afrique subsaharienne, proportion restant hélas constante depuis des dizaines d'années. J'avais déjà pris conscience des problèmes liés à la parité entre les femmes et les hommes dans l'enseignement supérieur et la recherche en France, les problèmes spécifiques que peuvent rencontrer les mathématiciennes dans leurs carrières (dont le fameux plafond de verre !). Étant née et ayant grandi au Sénégal, je voyais l'absence criante de filles en mathématiques. Hélas, force est de constater que cela n'a pas beaucoup changé.

Cette demi-journée s'est achevée avec la table ronde sur le thème *« les relations entre mathématiciennes françaises et africaines : expériences et perspectives »*, et animée par des mathématiciennes de la diaspora africaine parmi lesquelles des universitaires : Sophie Dabo, Ndeye Niang (cnam), Anne-Françoise Yao (université de Clermont-Ferrand) et moi-même ; des industrielles : Fatou Niass, Marie-Liane Lepkeli ; et Aline Bonami en tant que mathématicienne française. Nous avons, entre autres, témoigné sur nos parcours respectifs, sur le déroulement de nos études dans nos pays puis en France, les écueils et embûches rencontrés, nos illusions et désillusions, etc. Nous avons toutes eu des parcours différents mais avec beaucoup de similarités, comme par exemple des débuts plus ou moins laborieux en France, des enseignants et un entourage familial qui nous ont encouragées pour certaines, dissuadées pour d'autres, à poursuivre des études en mathématiques. Je fus aussi marquée par notre commune envie (ou besoin, je ne saurais dire exactement) de nous autres universitaires, en l'occurrence Sophie, Ndeye, Anne-Françoise et moi, d'aller enseigner en Afrique et ce, malgré un emploi du temps déjà très chargé en France et quelques difficultés pour assurer les cours sur place en Afrique. Nous avons aussi eu des échanges avec la salle, d'autres témoignages en sont sortis. Laurence Broze et Aline Bonami nous ont demandé notre avis sur ce que « femmes & maths » pouvait faire pour aider les jeunes étudiantes africaines arrivant en France.

Pour finir cette table ronde, Sophie Dabo a fait un bilan sur la journée **« Filles et Sciences »** ayant eu lieu le 7 mars 2015 à l'université Cheikh Anta Diop de Dakar. Cette journée, la première en son genre au Sénégal, a accueilli quelques centaines de collégiennes et lycéennes de divers établissements de Dakar et sa banlieue. Elle a été conjointement organisée par un collectif de femmes toutes engagées dans une des trois associations porteuses, à savoir awma, femmes & maths et Senchix (association sénégalaise regroupant des femmes évoluant dans le domaine des TICs). L'objectif principal de la journée était d'informer et encourager les jeunes filles sur l'importance mais aussi les opportunités à poursuivre des études scientifiques en général, mathématiques en particulier, de leur faire partager notre expérience. La décision d'organiser cette journée était partie d'un constat. Au Sénégal, il arrive encore que des jeunes femmes arrêtent leurs études quand elles se marient pour mieux satisfaire aux obligations familiales dont elles ont souvent la charge totale. Beaucoup de filles interrompent leurs études précocement à cause du manque de moyens financiers ou d'environnement adapté, et sont victimes de stéréotypes véhiculés par la société sur les différences entre les filles et les garçons et selon lesquels la priorité doit être donnée aux garçons.

L'on sait tous que les stéréotypes sur les mathématiciennes sont tenaces en Europe. La différence culturelle étant plus importante au Sénégal, ces stéréotypes y sont encore plus forts. Les femmes mathématiciennes y sont souvent jugées comme n'étant « pas féminines », ayant du « mal à trouver un mari » car pouvant être perçues comme « trop intelligentes ». Ce dernier point peut effrayer les jeunes femmes dans une société sénégalaise où l'on considère encore une femme non mariée comme étant « incomplète ». Combien de fois ai-je entendu ce genre de phrases stéréotypées qui me font doucement rire (ou pleurer !) même de la part d'enseignants et encore récemment de personnalités haut placées dans l'administration sénégalaise ! C'est dire l'étendue des dégâts ! Je pense donc qu'en plus d'encourager les jeunes filles et leur montrer que l'on peut mener de front vie de famille et carrière scientifique, un long travail en amont doit être fait auprès de l'environnement familial mais aussi académique pour améliorer l'image des mathématiques.

Après le succès rencontré par cette première journée « Filles et Sciences », nous sommes actuellement en train d'en organiser une deuxième pour le 5 mars 2016 à l'université de Dakar. Nous espérons qu'elle sera au moins aussi réussie que la première. Et que par petits pas, nous arriverons à faire bouger les lignes !

Diarra Fall

Laboratoire MAPMO, Orléans – Fédération Denis Poisson, université d'Orléans & Centre national de la recherche scientifique (CNRS)

diarra.fall@univ-orleans.fr

Diarra Fall est maître de conférences en mathématiques appliquées. Ses travaux de recherche concernent notamment le développement de nouvelles méthodes de reconstruction d'images médicales par des approches statistiques non paramétriques bayésiennes.

… un groupoïde de Lie

• S. Vassout

1. Introduction

Un groupoïde peut se définir de manière concise de la façon suivante : c'est une petite catégorie dans laquelle tous les morphismes sont inversibles. Cette définition pourrait laisser penser que les groupoïdes sont des objets abstraits dont l'intérêt pratique pour les mathématiciens est limité. En fait, dès leur introduction par Brandt en 1927, il apparait que ces objets mathématiques s'avèrent au contraire d'une grande utilité dans une très grande variété de champs mathématiques. Commençons par en donner une définition plus concrète. On appelle groupoïde G, d'espace des unités $G^{(0)}$, la donnée des ensembles G et $G^{(0)}$ et des applications suivantes :

- $\Delta : G^{(0)} \to G$, l'application d'inclusion des unités (ou diagonale),
- une involution $i : G \to G$ appelée inversion et notée $i(\gamma) = \gamma^{-1}$,
- des applications source (s) et but (r) de G dans $G^{(0)}$,
- une multiplication associative m à valeurs dans G, définie sur l'ensemble $G^{(2)} \subset G^2$ des couples (γ_1, γ_2) pour lesquels $r(\gamma_1) = s(\gamma_2)$,

qui vérifient les relations suivantes :

1. $r(\Delta(x)) = s(\Delta(x)) = x$, et $m(\gamma, \Delta(s(\gamma))) = m(\Delta(r(\gamma)), \gamma) = \gamma$;
2. $r(\gamma^{-1}) = s(\gamma)$ et $m(\gamma, \gamma^{-1}) = \Delta(r(\gamma))$;
3. $s(m(\gamma_1, \gamma_2)) = s(\gamma_2)$ et $r(m(\gamma_1, \gamma_2)) = r(\gamma_1)$;
4. $m(\gamma_1, m(\gamma_2, \gamma_3)) = m(m(\gamma_1, \gamma_2), \gamma_3)$ si $s(\gamma_1) = r(\gamma_2)$ et $s(\gamma_2) = r(\gamma_3)$.

Tout ensemble E est naturellement un groupoïde (trivial, en prenant $G^{(0)} = G = E$) et est également l'ensemble des unités d'un groupoïde non trivial, appelé groupoïde des paires, où $G = E^2$ et r et s sont respectivement la première et la seconde projection, la multiplication étant donnée par $(x, y)(y, z) = (x, z)$. On voit facilement qu'un groupe est exactement un groupoïde dont l'ensemble des unités $G^{(0)}$ est réduit à un singleton (l'unité du groupe). Plus généralement, une famille de groupes G_b indexée par un ensemble B est un groupoïde d'ensemble des unités B, la multiplication de deux éléments n'étant définie que pour deux éléments du même groupe G_b, par la multiplication du groupe. L'action d'un groupe sur un ensemble X définit également une structure de groupoïde appelée produit croisé, ce qui peut donner l'intuition qu'un groupoïde est une structure dynamique où sont présents simultanément la structure qui agit (le groupe) et l'espace sur lequel elle agit. Les deux situations « extrêmes » sont un groupe ou une famille de groupes, ce qui correspond à $r = s$ (la composante d'espace disparaît) et le groupoïde des paires ou plus généralement le graphe d'une relation d'équivalence sur un ensemble (la composante de groupe disparaît), où l'application (r, s) est une bijection sur son image.

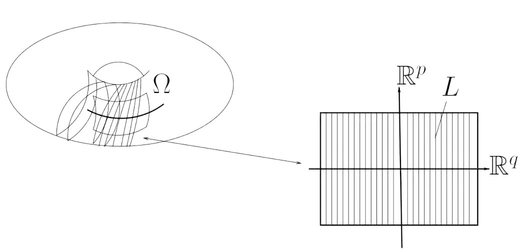
2. Groupoïdes de Lie

Cette structure de groupoïde devient encore plus intéressante, pour traiter des problèmes mathématiques concrets, si elle est pourvue d'une structure mesurable, topologique ou différentielle adaptée. Nous allons nous concentrer essentiellement sur ce dernier cas, dont l'apparition remonte aux travaux fondateurs d'Ehresmann [7] dans les années 50, suivis par ceux de Haefliger et Pradines. Celui-ci a connu un développement très rapide dans les années 70 et 80, à la fois en raison de son intérêt pour les questions de quantification/déformation (Weinstein) et pour la géométrie non commutative développée par Alain Connes. On appelle groupoïde de Lie un groupoïde pour lequel les ensembles G et $G^{(0)}$ sont des variétés différentiables, où toutes les applications structurelles sont lisses, avec la condition que les applications source et but sont des submersions. Dans ce cas l'application i est un difféomorphisme, et l'application Δ une immersion.

Tous les exemples précédents de groupoïdes fournissent des exemples de groupoïdes de Lie : le groupoïde trivial d'une variété différentiable, le groupoïde des paires sur une variété différentiable, un groupe de Lie, un fibré en groupes de Lie (en particulier un fibré vectoriel), l'action d'un groupe (ou d'un groupoïde) de Lie sur une variété différentiable, le graphe de la relation d'équivalence « être dans la même fibre » pour une fibration lisse. Voici un exemple très naturel supplémentaire : le groupoïde de monodromie (appelé aussi groupoïde fondamental) d'une variété différentiable connexe. On considère les classes d'homotopie à extrémités fixes de chemins tracés dans X. Cet ensemble de chemins (à homotopie près) est muni naturellement d'une structure de groupoïde différentiable, les applications but et source étant les extrémités des chemins dans X, et la multiplication de deux chemins d'extrémités qui coïncident étant l'aboutement des deux chemins. Ce groupoïde contient naturellement le groupe fondamental $\Pi_1(X,x)$ pour tout point $x \in X$ comme stabilisateur du point x.

3. Feuilletages et groupoïdes de Lie

FIGURE 1 – Un tore feuilleté.



Un feuilletage régulier (de dimension p) est la donnée sur une variété lisse M d'une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence, appelées feuilles, sont connexes et forment une seconde structure de variété lisse (de dimension p) sur M, compatible avec la première, c'est-à-dire qu'il existe un système de cartes $\varphi : \Omega \to L \times T \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ pour M pour lesquelles les composantes connexes de l'intersection de chaque feuille avec un ouvert (les plaques) sont de la forme $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{t\})$. Le groupoïde associé à la relation d'équivalence (« être dans la même feuille ») d'un feuilletage régulier $(M, \mathcal{F})$ ne peut pas toujours, comme dans le cas particulier d'une fibration, être muni d'une structure topologique ou différentielle consistante. On peut néanmoins toujours associer à un feuilletage un groupoïde de Lie, appelé groupoïde d'holonomie du feuilletage [9]. On peut y penser comme à un quotient du groupoïde fondamental du feuilletage (feuille à feuille) défini ci-dessus : l'ensemble des unités est M et le groupoïde est l'ensemble des classes d'homotopie de chemins tracés dans une même feuille. Étant donné un chemin tracé dans une feuille, on peut le recouvrir par des ouverts de cartes du feuilletage de sorte que chaque plaque d'un ouvert intersecte au plus une plaque de l'ouvert qui suit. De cette manière, on définit en suivant le chemin une bijection d'un voisinage d'une transversale du point de départ vers un voisinage d'une transversale du point d'arrivée. Pour obtenir le groupoïde d'holonomie, il faut encore quotienter le groupoïde fondamental ci-dessus en considérant comme équivalents deux chemins qui agissent de manière identique sur le transport parallèle, le long du chemin, d'un voisinage de la transversale du point de départ vers un voisinage de la transversale du point d'arrivée. Dans ce cas, l'action naturelle du groupoïde $\mathrm{Hol}(M, \mathcal{F})$ sur l'espace des unités M a pour orbites exactement les feuilles du feuilletage. C'est même le groupoïde de Lie minimal vérifiant cette propriété, dans le sens que tout autre groupoïde de Lie d'espace des unités M dont les orbites sont les feuilles du feuilletage admet un sous-groupoïde ouvert se projetant sur $\mathrm{Hol}(M, \mathcal{F})$. Il faut noter que, dans cette construction, le groupoïde d'holonomie (la variété G) n'est pas nécessairement séparé. Cette construction a été étendue par Pradines, Bigonnet, Debord au cas des feuilletages quasi-réguliers, puis plus récemment par Androulidakis et Skandalis [2] au cas de feuilletages singuliers quelconques, le prix à payer dans ce cas étant la disparition de la structure lisse globale de groupoïde de Lie.

D'un autre coté, pour tout groupoïde de Lie, les composantes connexes des orbites de l'action du groupoïde sur l'espace des unités définissent naturellement un feuilletage, en général singulier, de l'espace des unités.

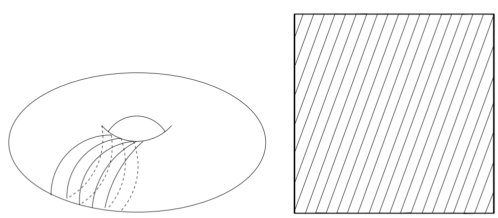
4. Groupoïdes et géométrie non commutative

Le point de départ de la géométrie non commutative est le théorème de Gelfand qui établit une bijection entre les espaces topologiques localement compacts séparés et les C*-algèbres commutatives. Il donne l'idée que pour étudier un espace, on peut étudier, plutôt que l'espace lui-même, une algèbre de fonctions sur cet espace. Cette idée dépasse même le cadre topologique, puisqu'un théorème de Connes montre que la donnée d'une algèbre d'opérateurs commutative vérifiant certaines propriétés additionnelles permet de reconstruire complètement une variété riemannienne compacte. L'idée est d'appliquer cette correspondance à des espaces qui sont pathologiques vis-à-vis de la topologie ou de la géométrie ordinaire, en étudiant des C*-algèbres non commutatives qui remplacent moralement les algèbres de fonctions sur l'objet pathologique. On peut associer naturellement à chaque groupoïde topologique, en particulier aux groupoïdes de Lie, des C*-algèbres [13], et le lien entre groupoïdes et géométrie non commutative se développe donc suivant deux voies.

Une première démarche est d'établir des méthodes générales, qui fournissent pour un groupoïde de Lie des outils analytiques, géométriques et topologiques permettant de construire des invariants, ou d'établir des propriétés du groupoïde au travers des algèbres d'opérateurs qui y sont associées. De nombreux progrès ont été réalisés dans cette direction depuis les années 80 : K-théorie et KK-théorie, cohomologie cyclique, algèbre des opérateurs pseudo-différentiels sur un groupoïde de Lie, théorie de l'indice...

Une direction complémentaire est de traiter des exemples géométriques concrets avec cette théorie générale. Pour ce faire, il faut pouvoir associer à un espace pathologique un groupoïde de Lie, qui constitue une désingularisation de celui-ci. Pour reprendre l'exemple précédent, l'espace des feuilles d'un feuilletage $(M,\mathcal{F})$, c'est-à-dire le quotient de M par la partition en feuilles, est en général très pathologique du point de vue de la topologie et de la géométrie ordinaire. Dans l'exemple très simple du feuilletage de Kronecker obtenu en considérant le feuilletage du tore de dimension 2 par des courbes de dimension 1 de pente irrationnelle constante α, les seules fonctions qui sont continues sur le tore et qui passent au quotient sont les fonctions constantes.

Figure 2 – Le feuilletage de Kronecker.



Ce fut le premier exemple de géométrie non commutative introduit par Connes et la désingularisation de cet espace est obtenue en considérant le groupoïde d'holonomie $\mathrm{Hol}(M,\mathcal{F})$. La C*-algèbre du groupoïde est ainsi l'algèbre se substituant naturellement à l'algèbre des fonctions continues sur l'espace des feuilles. Depuis, de nombreux autres exemples ont enrichi la théorie : variétés à bords ou à coins [10], pseudo-variétés à singularités coniques, pseudo-variétés stratifiées, variétés avec une structure de Lie à l'infini...

L'un des intérêts de cette approche réside dans le fait qu'une fois réalisée l'étape géométrique consistant à construire la désingularisation, les méthodes générales dont nous venons de parler sur les groupoïdes de Lie permettent naturellement d'associer de manière systématique à cette désingularisation un certain nombre d'outils analytiques et topologiques. En particulier, la question du développement d'un calcul pseudo-différentiel adapté à une situation pathologique, par exemple le b-calcul de Melrose pour une variété à bord, requiert généralement le développement d'une analyse raffinée sur le type de singularités considéré (par rapport au cas lisse sans bord). Elle est ici condensée simplement dans la compréhension géométrique du groupoïde de Lie associé, la théorie générale des opérateurs pseudo-différentiels sur un groupoïde de Lie étant déjà établie (dans sa thèse B. Monthubert construit un groupoïde associé à une variété à bord, et montre que le calcul pseudo-différentiel appliqué à ce groupoïde particulier est exactement le b-calcul de Melrose).

5. Groupoïdes de déformation

Un élément essentiel dans la compréhension des variétés lisses compactes (sans bord) est le théorème d'indice d'Atiyah et Singer démontré dans les années 60. À un opérateur différentiel ou pseudo-différentiel elliptique, on peut naturellement associer un entier, appelé indice, qui peut être défini deux manières : de façon purement analytique, ou de façon purement topologique. Le résultat d'égalité est formulé à l'aide de la K-théorie de la variété, et peut donc également être réinterprété en terme de la K-théorie de la C*-algèbre commutative $C(M)$ des fonctions continues sur la variété. Un des enjeux essentiels de la géométrie non commutative est de réussir à étendre de manière appropriée ce théorème à des espaces plus singuliers, en utilisant la K-théorie de C*-algèbres non commutatives qui tiennent le rôle de l'algèbre $C(M)$ ci-dessus.

Dans le développement de la théorie de l'indice dans le cadre des groupoïdes, une notion clé est celle de groupoïde de déformation : on considère deux groupoïdes de Lie G_1 et G_2 ayant même espace des unités M et un recollement lisse de $G_2 \times]0,1]$ sur $G_1 \times \{0\}$ et on obtient ainsi un nouveau groupoïde de Lie, appelé groupoïde de déformation, donné par $G = G_1 \times \{0\} \cup G_2 \times]0,1]$, d'espace des unités $M \times [0,1]$. Le premier exemple d'un tel groupoïde est le groupoïde tangent d'une variété lisse compacte, introduit par Connes [3, 4] défini par le recollement de $TM \times \{0\}$ et de $M \times M \times]0,1]$, le recollement étant fourni par : $(x_t, y_t, t) \to (x, V, 0)$ lorsque x_t et y_t tendent vers x et $\frac{x_t - y_t}{t}$ tend vers V. Cette construction permet notamment de définir l'indice analytique uniquement en termes de groupoïdes, et également de fournir une démonstration du théorème d'indice d'Atiyah-Singer utilisant uniquement les groupoïdes de déformation. La portée générale de ce type d'approche permet de démontrer, dans le même esprit, des théorèmes sur des espaces plus singuliers, comme par exemple le théorème d'indice longitudinal pour les feuilletages réguliers de Connes et Skandalis [3] ou le théorème d'indice pour les pseudo-variétés à singularité conique [5]. L'idée générale consiste à construire un groupoïde de déformation, appelé groupoïde adiabatique en remplaçant le groupoïde des paires $M \times M$ par un groupoïde de Lie G et l'espace tangent à M par « l'espace tangent » AG naturellement associé à un groupoïde de Lie, appelé algébroïde de Lie de G et qui désigne l'objet infinitésimal associé au groupoïde de Lie de la même manière qu'une algèbre de Lie est associée à un groupe de Lie. Plus récemment encore, Debord et Skandalis [6] ont utilisé cette notion de groupoïde adiabatique pour fournir une description du calcul pseudo-différentiel d'ordre négatif ou nul sur un groupoïde G.

Références

[1] B. Ammann, R. Lauter et V. Nistor. « Pseudodifferential operators on manifolds with Lie structure at infinity ». *Annals of Mathematics* **165** (2007), p. 717–747.

[2] I. Androulidakis et G. Skandalis. « The holonomy groupoid of a singular foliation ». *J. Reine Angew. Math.* **626** (2009), p. 1–37.

[3] A. Connes. *Noncommutative Geometry*. San Diego, CA : Academic Press, 1994.

[4] C. Debord et J.-M. Lescure. « Index theory and groupoids ». In : *Geometric and topological methods for quantum field theory*. Cambridge Univ. Press, 2010, p. 86–158.

[5] C. Debord, J.-M. Lescure et V. Nistor. « Groupoids and an index theorem for conical pseudo-manifolds ». *J. Reine Angew. Math.* **628** (2009), p. 1–35.

[6] C. Debord et G. Skandalis. « Adiabatic groupoid, crossed product by $\mathbb{R}_+^*$ and pseudodifferential calculus ». *Adv. Math.* **257** (2014), p. 66–91.

[7] C. Ehresmann. *Catégories et structures*. Paris : Dunod, 1965, p. xvii+358.

[8] K. Mackenzie. *General theory of Lie groupoids and Lie algebroids*. **213**. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge : Cambridge University Press, 2005.

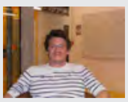
[9] I. Moerdijk et J. Mrčun. *Introduction to foliations and Lie groupoids*. **91**. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge : Cambridge University Press, 2003, p. x+173.

[10] B. Monthubert. « Groupoïdes et calcul pseudo-différentiel sur les variétés à coins ». Thèse de doct. Université Paris VII-Denis Diderot, 1998.

[11] B. Monthubert et F. Pierrot. « Indice analytique et groupoïde de Lie ». *C.R.A.S Série 1* **325** (1997), p. 193–198.

[12] V. Nistor, A. Weinstein et P. Xu. « Pseudodifferential operators on differential groupoids ». *Pacific J. of Math.* **181**, nº 1 (1999), p. 117–152.

[13] J. Renault. *A groupoid approach to C^*-algebras*. **793**. Lecture Notes in Mathematics. Berlin : Springer, 1980, p. ii+160.



Stéphane Vassout

Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche

Stéphane Vassout est maître de conférences à l'université Paris Diderot, dans l'équipe d'Algèbres d'opérateurs. Ses travaux portent sur les feuilletages et les groupoïdes de Lie envisagés du point de vue de la géométrie non commutative.

La nouvelle Physique-Mathématique pour décrypter la biologie cellulaire et booster l'économie de haute technologie

• D. Holcman

Quelques questions en biologie cellulaire comme l'organisation de l'ADN dans le noyau ou le développement du cortex cérébral ont déjà bénéficié de méthodes de calcul, de simulations numériques, ou de l'élaboration de théories mathématiques abstraites. Ce fut aussi le cas à plus grande échelle dans nombre de branches de la physique, chimie, en relativité générale, ou en ingénierie, qui ont motivé des théories sophistiquées. Sur le plan des mathématiques, il a fallu élaborer de nouvelles méthodes pour résoudre de nouvelles équations, et déduire des conclusions solides à partir de leur analyse et de simulations numériques. Cette approche a servi à identifier, trouver de nouveaux motifs cachés dans les données expérimentales et révéler les propriétés secrètes de la matière.

La physique expérimentale a souvent contribué de façon spectaculaire à la biologie avec des grandes révolutions instrumentales telles que la nouvelle microscopie de haute résolution qui a permis de briser la limite de la diffraction et de voir pour la première fois les molécules évoluer dans la cellule avec une résolution de l'ordre de la dizaine de nanomètres. Cette découverte a notamment été récompensée par le Prix Nobel de chimie en 2014 et fait suite à la découverte et l'utilisation surprenante et efficace de molécules fluorescentes, comme la GFP (Prix Nobel de chimie 2008) pour suivre dans le vivant sous un microscope des molécules d'intérêts.

Pourtant, la contribution de la théorie à la biologie est beaucoup moins spectaculaire. La raison principale étant que la découverte de faits nouveaux et non de preuves (qui occupe une grande partie de l'activité mathématique moderne) repose la plupart du temps en biologie sur l'expérience. Mais quand une multitude de règles empiriques est nécessaire pour rendre compte du comportement aux différentes échelles moléculaires et cellulaires, la modélisation devient nécessaire pour élaborer des calculs à partir de ces règles. Cette compilation souvent multi-échelle permet ainsi de mieux comprendre les fonctions élaborées du vivant. Dans ces conditions, le bénéfice d'écrire la biologie en langage mathématique, aussi ambiguë que cette entreprise puisse paraître, reviendrait à découvrir, ordonner ces règles, dériver des prédictions et les utiliser dans l'analyse de données expérimentales. Cette approche n'est pas vraiment nouvelle : dans les années 50, Alan Turing a formulé la notion de morphogènes et dérivé les équations de réaction-diffusion pour comprendre comment certains motifs peuvent se former spontanément dans le vivant. De même, l'identification de structures moléculaires par cristallographie ou par la diffraction avait permis d'identifier des structures nouvelles comme la double hélice de l'ADN.

L'explosion des connaissances en 30 ans grâce aux nouvelles manipulations génétiques, au criblage systématique de différents gènes impliqués dans les fonctions spécifiques du vivant ou encore les nouvelles approches en électrophysiologie et bien d'autres a propulsé la biologie sur le devant de la scène scientifique : la biologie est ainsi devenue la plus grosse discipline scientifique en termes de ressources humaines et financières, mais aussi la plus représentée dans les revues scientifiques. Cette explosion a un coût financier exorbitant mais nécessaire, alimenté par une vitesse de production et d'apparition des connaissances exponentielle, plus rapide que dans toutes les autres disciplines. Quelle est alors le rôle possible de la physique théorique et des mathématiques ?

Ce que révèle la biologie d'aujourd'hui, c'est une variété de formes et d'interactions qui sont le produit de milliards d'années d'évolution. Ces interactions sont d'une richesse encore indescriptible par les modèles mathématiques actuels et les diverses géométries existantes (Euclidienne ou non). Les relations aussi complexes qu'elles soient entre les espaces abstraits provenant de l'analyse semblent en effet bien loin de capturer la richesse des relations entre les formes du vivant et leur fonction. Alors que nous héritons de 60 ans d'effort d'imagination et de rigueur sur des objets mathématiques modernes et des méthodes abstraites pour étudier l'existence et le comportement de solutions d'équations, il semblerait que ce cadre ne soit pas suffisant pour aborder les questions même élémentaires posées par le vivant, comme l'organisation tridimensionnelle des chromosomes, les réponses de la cellule à un seul événement moléculaire ou encore la construction et l'organisation de réseaux cellulaires pour définir des grandes structures fonctionnelles du cerveau. Devant cette grande complexité, pouvoir explorer un espace de paramètres en grande dimension est une étape décisive dans notre compréhension des fonctions du vivant. Cependant, à cause de leur complexité, ces questions demandent des calculs souvent sophistiqués où le besoin de simplification est essentiel. Une partie des nouvelles demandes se trouve ainsi dans la résolution numérique de ces calculs : comment réaliser des simulations en temps raisonnable tout en capturant la complexité du phénomène biologique ? Comment résoudre numériquement des solutions d'équations quand les temps de calculs divergent vers l'infini pour des petites valeurs des paramètres ? Tels sont quelques défis proposés par la biologie aux mathématiciens. L'exigence classique des mathématiques de prouver l'existence et l'unicité des solutions d'équations, de trouver des mesures invariantes, de pousser les inégalités ou autre manipulation élégante est loin de répondre au besoin de comprendre, de calculer et de prédire en biologie.

Cette nouvelle approche nécessite souvent une connaissance fine de la biologie et de la biophysique, mais aussi de la physique statistique, des mathématiques appliquées et de la physique théorique, ainsi que de la curiosité pour continuer d'apprendre si nécessaire n'importe quelle autre discipline qui deviendrait nécessaire en chemin. Les premières et grandes avancées dans ce domaine proviennent d'environnements scientifiques et académiques propices qui ont su créer les conditions favorables, pour faire tomber les barrières réelles bien qu'arbitraires entre les disciplines, concentrées dans certains endroits par exemple, au Royaume-Uni, aux États-Unis (UCSF, Berkeley, Salk, etc.), en Israël (Tel Aviv University) ou encore EMBL en Allemagne.

Malgré quelques efforts pour implanter ce type d'environnement en France à coup de chaires d'excellence pour rapatrier des jeunes talentueux qui ont été formés ou reformés à l'étranger, ce nouvel effort en modélisation mathématique de la biologie est encore largement sous-représenté. De plus, cet effort ne peut être fructueux que s'il y a une véritable volonté de financement sur le long terme afin de favoriser le développement d'équipes et assurer leur compétitivité à l'international. Les tentatives domestiques qui se sont construites en évitant une formation de 3 à 5 ans minimum à l'étranger sont loin d'être concluantes, malgré le potentiel incontestable de chaque génération de chercheurs durement sélectionnés. Il serait temps que les commissions interdisciplinaires arrivent à maturité : elles répondent à un vrai besoin et comblent un manque. Elles sont une très bonne initiative dans un système si cloisonné, mais devraient permettre de recruter des chercheurs d'une certaine stature, celle-ci étant nécessaire dans les disciplines interdisciplinaires où une formation postdoctorale longue et intensive permettra aux jeunes chercheurs théoriques de pouvoir évoluer à l'interface de plusieurs disciplines. Enfin, quand les financements deviennent rarissimes, ce sont les tentatives nouvelles qui sont sacrifiées les premières, devant les disciplines traditionnelles mieux établies. Les critères élémentaires pour caractériser cette recherche sont certainement la capacité à produire des résultats qui se retrouvent dans les journaux de mathématiques, de physique et de biologie ainsi que les journaux à l'interface, par le même auteur en position principale. Il est important de prouver qu'une réflexion sur les processus biologiques mène à de nouvelles analyses mathématiques et statistiques, et à de nouveaux modèles qui sont souvent bien reconnus par la communauté de physique.

De plus, il est illusoire de penser que des chercheurs de premier plan vivant à l'étranger et travaillant à ces interfaces vont venir s'installer en France sans pouvoir compenser la lourdeur, la rigidité de la gestion, les petits salaires non-compétitifs et une loi Sauvadet, appliquée avec zèle par l'administration (INSERM et Centre national de la recherche scientifique (CNRS) entre autres) et qui plombe la recherche et la discrédite sur le plan international. Alternativement, une recherche efficace se prépare en formant une génération, en offrant des cours spécialisées, des enseignements innovants et créatifs, des stages dans des laboratoires de différentes disciplines : les thèses à l'interface doivent pouvoir conduire à des publications pour l'étudiant en premier auteur dans les journaux de différentes disciplines, bien qu'il soit aussi envisageable qu'une formation débute par une thèse théorique ce qui permet de bien ancrer les fondamentaux. Un post-doc de 2 à 5 ans serait alors nécessaire pour apprendre le reste. Il est peu fructueux de modéliser un phénomène biologique sans avoir vu et compris les expériences sur le sujet.

En résumé, former des étudiants qui deviendront des chercheurs en sciences théoriques appliquées aux sciences du vivant demande une révision de l'enseignement qui doit largement aboutir à regrouper pour ces cursus, physique, mathématiques, biophysique théorique et informatique appliquée (reposant sur la programmation pratique). De plus un post-doc long est nécessaire afin d'apporter une autonomie au jeune chercheur et la capacité de publier dans différentes disciplines en premier auteur. Enfin, le recrutement dans les universités et instances de recherche doit être bien orchestré pour protéger ces disciplines minoritaires. Il va sans dire que les chercheurs participant à ces recrutements doivent eux-mêmes avoir démontré leur autorité scientifique à ces interfaces. Une évaluation adaptée et nouvelle doit alors être mise en place pour que ces chercheurs puissent être jugés et promus convenablement, sans quoi il ne faudra pas s'étonner de les voir partir, ou repartir.

Sans promouvoir et subventionner cette nouvelle culture interdisciplinaire, cette richesse scientifique ne pourra émerger. Dans ce cas, comme jadis l'informatique, la cryptographie, la robotique, les drones,... et bien d'autres, l'économie domestique ne pourra bénéficier de cet apport. Les universitaires comme le monde industriel, en bataille depuis tant d'années ont une grande part de responsabilité pour n'avoir pas su vraiment interagir ou voulu apporter de la diversité, en favorisant par exemple des chercheurs capables de mener en même temps et en symbiose une recherche théorique et appliquée.

Une large part de l'économie de haute technologie de demain est dans l'analyse mathématique fine de la biologie et la recherche médicale translationnelle d'aujourd'hui. Sans un effort, une vision et les moyens de la poussée, il faudra alors des sommes considérables pour acheter à l'étranger au prix fort, ce qui aurait pu être produit en France. La course a déjà bien recommencé avec l'intelligence artificielle et le machine learning dans les entreprises web (Google, Facebook...) et devant la sous-représentation française des biotechs à grand succès installées pour la plupart aux USA, Suisse et Israël notamment. Google fait de la biologie computationnelle un domaine d'investissement majeur via GoogleX. La fondation du mathématicien J. Simons concentre une grande partie de ses investissements à encourager les recherches à l'interface pour étudier l'autisme, l'évolution et bien d'autres. Le développement de centres interdisciplinaires dans les grandes villes est déjà très bénéfique comme à Columbia [1], Berkeley-UCSF-UCSC [2] et bien d'autres, qui n'ont aucun équivalent en France. La prochaine révolution scientifique passera sans doute par les méthodes d'analyse pour extraire des motifs dans des données de grande dimension acquises en continu, qui pourront être appliquées à prévenir les accidents de santé. Une nouvelle économie va émerger. Ce fut sans doute l'état d'esprit de Pasteur et de ses collaborateurs, qui ont en une génération fait augmenter l'espérance de vie de 20 ans. Ils ont créé l'institut Pasteur, qui a révolutionné plusieurs fois l'économie en sauvant dès son début les secteurs du vin et du ver à soie en France. À l'aube d'une nouvelle révolution, les mathématiques, la biologie, la physique et l'informatique sont nécessaires. La France saura-t-elle rattraper son retard ou allons-nous le regarder s'accumuler, comme ce fut le cas plusieurs fois ces 20 dernières années, à moins que ne se réveille un certain esprit, comme pendant la Révolution française ?

David Holcman

Directeur du Groupe de Mathématiques appliquées et Biologie Computationnelle, École normale supérieure, Paris, France, Professeur invité au Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics Cambridge University et Fellow of the Churchill college, Cambridge University, CB3 0DS UK.

Je remercie Thibault Lagache (Modélisation et analyse d'image, Institut Pasteur), Khanh Dao Duc (Statistique, Berkeley) et Nathanaël Hozé (Modélisation, ETH Zurich) pour leurs remarques et critiques.

1. http://systemsbiology.columbia.edu/center-for-computational-biology-and-bioinformatics-c2b2
2. http://qb3.berkeley.edu/ccb/

Challenges for the next 25 years : 25e anniversaire de la création de l'European Mathematical Society

• L. Halpern

Le 22 octobre 2015, la European Mathematical Society (EMS) rassemblait à l'IHP environ 80 personnes pour célébrer le 25e anniversaire de sa création.

1. Mathématiques européennes et sociétés savantes

Les premières découvertes mathématiques ont rapidement été appliquées à des problèmes concrets, de l'ordre du commerce, de l'astronomie, de la mécanique, de la guerre ou de l'architecture. Pourtant les sociétés contemporaines ne semblent plus réaliser que les mathématiques, et singulièrement les mathématiques européennes, sont au cœur de l'innovation. Dans les appels d'offre des diverses institutions nationales et européennes, les mathématiques sont bien souvent marginalisées.

La plus ancienne société mathématique européenne est la Koninklijk Wiskundig Genootschap, créée en 1778 aux Pays-Bas, précédant d'un siècle les autres sociétés européennes. Il n'est pas inutile de rappeler que le but de cette société, comme de celles fondées par la suite, était de promouvoir le développement des mathématiques, à la fois d'un point de vue théorique et appliqué.

C'est sans aucun doute la même intention qui a mené deux siècles plus tard, les sociétés mathématiques des pays de toute l'Europe à se fédérer. (Voir la genèse et l'histoire de la fondation de l'EMS `http://www.math.ch/about-sms/` et dans les dernières newsletters de l'EMS `http://www.euro-math-soc.eu/newsletter`). Et en effet l'EMS, riche aujourd'hui de 60 sociétés membres, 3000 membres individuels, a, au fil des années, développé des outils importants pour les mathématiciens. Sur le site `www.euro-math-soc.eu` on peut trouver la liste des divers comités, comme le comité d'éthique, comité pour les femmes en mathématiques, comité « raising public awareness », etc.

Le grand rendez-vous des mathématiques européennes est le congrès quadriennal (ECM), qui décerne les prix de l'EMS à de jeunes chercheurs. De plus l'EMS soutient de son label, et financièrement si nécessaire, des écoles dites d'été, et des activités spécifiques comme les week-ends co-organisés par plusieurs sociétés savantes, les EMS lecturer et distinguished speaker. Sur le site de l'EMS on peut aussi trouver un onglet d'offres d'emploi, très prisé par les doctorants et post-doctorants. L'EMS a également sa propre société d'édition, qui publie des livres et des journaux de premier plan, dans une politique active de respect des règles d'éthique. Elle organise la rencontre régulière des présidents des sociétés savantes membres, leur permettant ainsi de confronter leurs expériences sur les publications, les rapports avec les politiques, etc.

En effet une partie importante de l'activité des sociétés savantes est consacrée aux interactions avec le monde politique, pour ce qui est de l'éducation, de la recherche ou de l'importance des mathématiques dans le monde économique. De telles actions ne peuvent plus en Europe se faire seulement à l'échelle d'un pays, tant les financements européens prennent une part importante dans l'économie, à travers l'ERC. On consultera ainsi avec profit plusieurs rapports commandités par des sociétés savantes en Grande-Bretagne [1], ou en France [2].

2. La journée

La journée d'anniversaire s'ouvrit sur une adresse de Maria Esteban, présidente de l'ICIAM et représentant le directeur de l'IHP, Cédric Villani. Puis Pavel Exner, président de l'EMS, fit un court historique de la création et des activités de l'EMS (voir ci-dessus). S'ensuivirent 4 exposés scientifiques, entrecoupés par des pauses café et un déjeuner. Durant ce déjeuner, les participants purent visiter dans une salle attenante la maison d'édition de l'EMS, présentée par son directeur Thomas Hintermann, `http://www.ems-ph.org/`. Dans une autre salle, Samuel Lelièvre et Alba Malaga nous initièrent à Imaginary, `www.imaginary.org`. La journée se conclut par une table ronde sur l'avenir des mathématiques, rassemblant autour de Jean-Pierre Bourguignon (président de l'ERC), Ari Laptev (Institut Mittag-Leffler, Suède), Peter Bühlmann (Société Bernoulli), Maria Esteban (présidente de l'ICIAM) et Roberto Natalini (Istituto per le Applicazioni del Calcolo, Rome, Italie). Une discussion animée, y compris avec la salle, confronta les pratiques européennes sur une large gamme de sujets, l'éducation et la formation des maîtres, la communication scientifique, l'interaction avec les autres disciplines, la prise en compte de nouveaux sujets (les « big data » par exemple).

La journée se termina par une réception à la mairie du 5e arrondissement, où nous fûmes accueillis avec beaucoup d'intérêt et de générosité par madame la maire, madame Florence Berthou, et son équipe, dans le très beau salon Pierrotet.

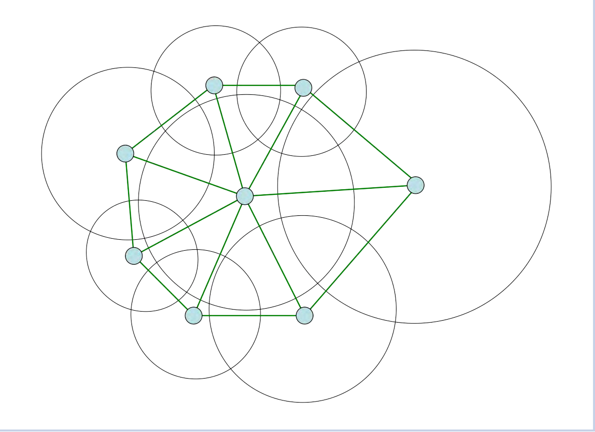
3. Les exposés

Le choix des exposés reflétait la diversité des mathématiques, leurs applications aux autres sciences, et aux grands problèmes applicatifs.

Dans l'exposé d'ouverture, Hendrik Lenstra (Leiden University, Pays-Bas) nous invitait à une promenade arithmétique, définissant les nombres de $\hat{\mathbb{Z}}$, complétion profinie de $\mathbb{Z}$, par leurs développements infinis en écriture factorielle, puis généralisant dans ce cadre la suite de Fibonacci et débouchant sur une nouvelle forme d'arithmétique et de dynamique.

Le deuxième exposé de la matinée par Laure Saint-Raymond (ÉNS Paris, France), *Exchangeability, chaos and dissipation in large system of particles* présentait un voyage dans la dynamique des sphères dures. Les travaux récents avec Bodineau, Gallagher, Texier ont permis de valider le modèle de Boltzmann linéaire comme limite asymptotique des équations de Newton de la mécanique classique, pour un système formé d'un grand nombre de sphères n'interagissant que par des collisions élastiques.

Après le déjeuner, László Lovász (Eötvös Loránd University, Hongrie) nous entraînait dans un monde de figures avec l'exploration des *Geometric representations of graphs*. Certains choix de représentations peuvent être utilisés pour explorer les propriétés combinatoires des graphes. La figure suivante en est une illustration.



Andrew Stuart (University of Warwick, U.K) concluait la journée avec *Blending Mathematical Models and Data : Algorithms, Analysis and Applications*. La question de la pertinence des modèles et de la prise en compte des masses de données disponibles apparaît dans de nombreuses applications, comme l'assimilation de données venant des observations dans la prédiction météorologique, où le modèle largement accepté est celui des équations de Navier-Stokes. C'est un domaine qui touche beaucoup de disciplines, et Andrew Stuart a insisté sur le fait qu'il y a beaucoup à faire dans ce domaine, et que les financements ERC doivent y être développés.

1. `http://www.ima.org.uk/i_love_maths/mathematics_matters.cfm.html`
2. `http://www.agence-maths-entreprises.fr/a/eisem`

Laurence Halpern

LAGA, université Paris 13

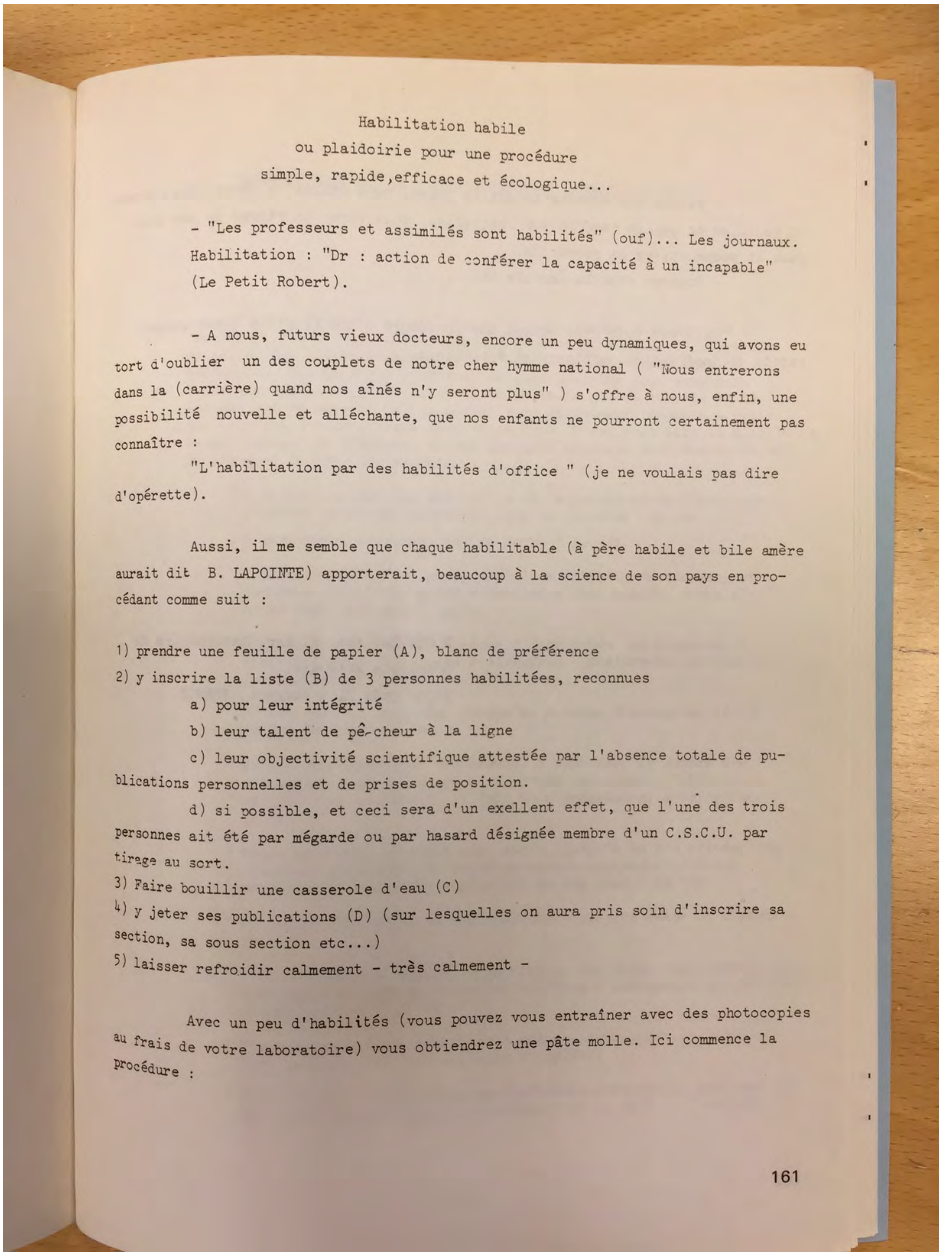
halpern@math.univ-paris13.fr

https://www.math.univ-paris13.fr/~halpern/

Laurence Halpern est professeur, spécialiste d'analyse numérique et plus précisément de modélisation de problèmes en domaine non borné et de calcul haute performance (décomposition de domaines). Elle est membre du comité exécutif de l'EMS depuis le 1er janvier 2013.

La célébration de l'anniversaire de l'EMS à l'IHP n'aurait pu être aussi réussie sans l'invitation enthousiaste de Cédric Villani. Tous nos remerciements aux membres de l'équipe efficace et sympathique de l'IHP qui ont mis à notre disposition leur temps, leurs compétences, leurs carnets d'adresses.
Merci aussi aux sociétés savantes françaises, SMF, SMAI et SFDS, qui ont contribué au financement.
Merci également à l'équipe de la Mairie du 5e arrondissement, et au cabinet de Mme la Maire, Florence Berthou, qui nous ont reçus pour le cocktail de fin de journée.
L'auteure exprime sa reconnaissance à Pierre Pansu dont les notes prises à la volée ont été source d'inspiration, et à Richard Elwes, publicity officer de l'EMS, pour son article dans la dernière Newsletter.

En 1985, les réflexions étaient vives autour de l'évolution de la thèse de 3^{e} cycle et du doctorat d'état. Ces deux diplômes allaient être remplacés respectivement par le doctorat (en 1984, mais dont les modalités d'attribution ont été régulièrement modifiées depuis) et l'habilitation (en novembre 1988). Plusieurs articles de la *Gazette* en 1985 ont été consacrés à ces discussions. Certaines réglementations proposées, notamment autour de la composition du jury, ont paru à certains trop contraignantes, comme exprimé non sans humour par Dominique Cerveau en juillet 1985.



Habilitation habile
ou plaidoirie pour une procédure
simple, rapide, efficace et écologique...

- "Les professeurs et assimilés sont habilités" (ouf)... Les journaux.
Habilitation : "Dr : action de conférer la capacité à un incapable" (Le Petit Robert).

- A nous, futurs vieux docteurs, encore un peu dynamiques, qui avons eu tort d'oublier un des couplets de notre cher hymne national ("Nous entrerons dans la (carrière) quand nos aînés n'y seront plus") s'offre à nous, enfin, une possibilité nouvelle et allèchante, que nos enfants ne pourront certainement pas connaître :

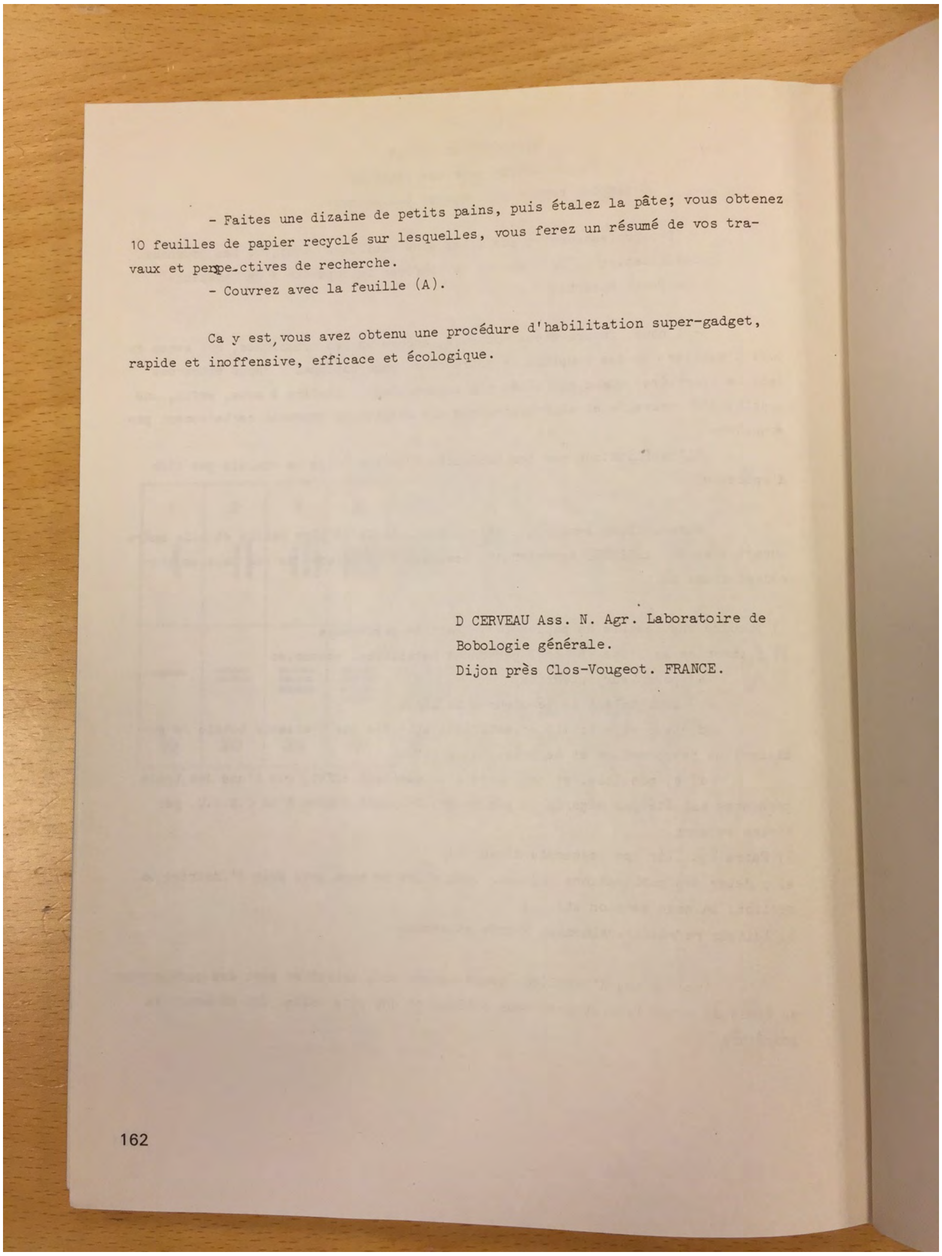
"L'habilitation par des habilités d'office " (je ne voulais pas dire d'opérette).

Aussi, il me semble que chaque habilitable (à père habile et bile amère aurait dit B. LAPOINTE) apporterait, beaucoup à la science de son pays en procédant comme suit :

1) prendre une feuille de papier (A), blanc de préférence
2) y inscrire la liste (B) de 3 personnes habilitées, reconnues
   a) pour leur intégrité
   b) leur talent de pê-cheur à la ligne
   c) leur objectivité scientifique attestée par l'absence totale de publications personnelles et de prises de position.
   d) si possible, et ceci sera d'un exellent effet, que l'une des trois personnes ait été par mégarde ou par hasard désignée membre d'un C.S.C.U. par tirage au sort.
3) Faire bouillir une casserole d'eau (C)
4) y jeter ses publications (D) (sur lesquelles on aura pris soin d'inscrire sa section, sa sous section etc...)
5) laisser refroidir calmement - très calmement -

Avec un peu d'habilités (vous pouvez vous entraîner avec des photocopies au frais de votre laboratoire) vous obtiendrez une pâte molle. Ici commence la procédure :

161



- Faites une dizaine de petits pains, puis étalez la pâte; vous obtenez 10 feuilles de papier recyclé sur lesquelles, vous ferez un résumé de vos travaux et perspectives de recherche.
- Couvrez avec la feuille (A).

Ca y est, vous avez obtenu une procédure d'habilitation super-gadget, rapide et inoffensive, efficace et écologique.

D CERVEAU Ass. N. Agr. Laboratoire de
Bobologie générale.
Dijon près Clos-Vougeot. FRANCE.

Marc Huttner

1947-2015

Notre collègue et ami Marc Huttner nous a quittés. Il était professeur à Lille depuis 1990 après y avoir été successivement Assistant puis Maître de conférences entre 1983 et 1990. Avant de rejoindre l'université, il avait d'abord travaillé dix ans dans l'enseignement secondaire. C'est pendant cette première période qu'il a préparé sa thèse, avec passion. Il l'obtiendra en 1981 et il soutiendra plus tard sa thèse d'état, en 1991.

Marc était un théoricien des nombres, un spécialiste renommé de la théorie des approximations diophantiennes. Fonctions hypergéométriques, fonctions elliptiques, polylogarithmes, etc., Marc s'est consacré à l'étude des propriétés d'approximation de leurs valeurs, de leurs intégrales et d'autres constantes liées à ces fonctions classiques ; ses résultats principaux concernent l'irrationalité ou l'indépendance linéaire, avec mesures associées, de ces nombres. Marc avait une culture très fine de son domaine, des textes classiques aux plus récents. Ses contributions avaient la même finesse et ont été appréciées par les plus grands experts.

De son passage dans le secondaire, Marc avait également conservé le souci des questions liées à l'enseignement. Il s'est beaucoup investi dans la préparation aux concours du CAPES, de l'Agrégation, et accueillait toujours avec beaucoup de gentillesse les nouveaux jeunes collègues arrivant à l'UFR. Professeur émérite depuis 2014, Marc avait gardé sa passion intacte et continuait infatigablement d'étudier les nouveaux résultats de son domaine et de chercher lui-même de nouvelles pistes. Nous garderons le souvenir de son enthousiasme, de son désir d'avancer avec son domaine et de sa soif d'échanger avec les autres. Un hommage plus détaillé est disponible sur le site du Laboratoire Paul Painlevé[1].

Charles Read

1958-2015

Charles Read est décédé prématurément le 14 août 2015, à l'âge de 57 ans. Après avoir passé vingt-cinq ans à Cambridge, à Trinity College (d'abord comme étudiant, puis comme *Teaching Fellow*), il était devenu en 2000 professeur à l'université de Leeds, au Royaume-Uni.

Charles Read était internationalement reconnu pour ses remarquables contributions au problème du sous-espace invariant : étant donné un opérateur linéaire borné T sur un espace de Banach X, existe-t-il toujours un sous-espace fermé M de X, distinct de $\{0\}$ et X, qui soit invariant par T ? Une réponse négative reposant sur une construction extrêmement compliquée fut d'abord obtenue par Per Enflo, et soumise pour publication en 1981. Charles Read, alors étudiant en thèse sous la direction de Béla Bollobás, obtint en 1983 un contre-exemple indépendant, mettant également en jeu une construction combinatoire très complexe. Par la suite, Charles Read développa et simplifia son

1. http://math.univ-lille1.fr/d7/node/8817

approche remarquable pour obtenir des opérateurs sans sous-espace invariant non trivial sur des espaces classiques comme ℓ_1 ou c_0, et même un opérateur sans fermé invariant non trivial sur ℓ_1. Ce problème du sous-espace invariant, toujours ouvert aujourd'hui dans le cadre hilbertien, le hantera toute sa vie : en août 2015, il annonçait[1] lors d'un congrès à l'Institut Fields avoir construit (en collaboration avec Eva Gallardo-Guttiérez) un opérateur T sur ℓ_1 tel que pour tout polynôme non constant p, $p(T)$ a un sous-espace invariant non trivial.

Charles Read a également apporté des contributions frappantes à la théorie des espaces de Banach, à la dynamique linéaire et à la théorie des algèbres de Banach. Un hommage de Béla Bollobás est disponible sur le site de la *London Mathematical Society Newsletter*[2], en attendant l'hommage mathématique détaillé qui devrait paraître prochainement dans le *Bulletin of the London Mathematical Society*.

Bernard Prum, un mathématicien épris de biologie

1946-2015

• X. Guyon

Bernard Prum est décédé brutalement le 21 octobre à l'âge de 69 ans. Il était professeur émérite à l'université d'Évry. Ancien élève de l'ÉNS, agrégé de mathématiques en 1969, il s'est orienté d'abord vers l'analyse algébrique puis a bifurqué vers les mathématiques appliquées. Assistant puis maître-assistant à l'université d'Orsay, il y intégra le tout nouveau laboratoire de statistique qui venait de mettre en place une collaboration active avec le département de biométrie de l'INRA de Jouy-en-Josas et le département de mathématiques de l'INAPG (cours dans le DEA, stages, sujets de thèse), donnant ainsi au laboratoire une orientation vers la recherche quantitative en agronomie et en zootechnie. C'est dans ce contexte que j'ai connu Bernard. Nous avons enseigné plusieurs années à la MIAGE en même temps que nous préparions notre thèse, en grande partie commune, sur la théorie générale des processus à deux indices : semi-martingale pour la filtration du drap brownien, formule de Itô, théorème de Girsanov pour un changement de probabilité, intégrale curviligne et formule de Green sont quelques-uns des thèmes qui nous ont occupés. Nous avions aussi mis en évidence le fait que la famille des variations était un outil d'identification très riche en dimension 2. Pour compléter sa thèse et faire que « tout ne soit pas commun » dans notre travail, Bernard avait mené une étude approfondie sur les propriétés de Markov au sens de Ida pour les champs spatiaux. Cette étude sera à l'origine de son intérêt pour les champs latticiels et conduira à son livre « Processus sur réseau – Mesure de Gibbs » publié en 1991 chez Masson, puis traduit chez Kluwer. De même, nous avions exploré les applications en essayant de comprendre quelle était l'influence de l'existence d'une structure de corrélation spatiale dans le dépouillement d'un plan expérimental mené sur un champ aléatoire, à un moment où l'expérimentation était très utile dans le domaine de l'amélioration des plantes. Nous faisions aussi nos premiers pas en informatique, veillant à ne pas écorner nos paquets de cartes perforées, épaisses « lignes » de Fortran, que nous passions au centre de calcul d'Orsay qui était alors celui de l'accélérateur linéaire. Mais dès ces années 70, Bernard, pour « changer d'air », me faisait souvent voyager dans la génétique et ses sous-entendus mathématiques. Son intérêt pour la biologie était déjà présent.

1. http://www.fields.utoronto.ca/video-archive/2015/08/394-4925
2. http://newsletter.lms.ac.uk/charles-read-1958-2015/#more-2011

En 1981, un an après sa thèse, Bernard est nommé professeur à l'université Paris V. Il crée le laboratoire de « Statistiques médicales », rapidement labellisé Centre national de la recherche scientifique (CNRS), qu'il a dirigé jusqu'en 1998. À l'époque, il n'y avait de « mathématiciens », rue des Saints Pères, que ces « statisticiens », le MAP 5 n'arrivera que beaucoup plus tard. Les orientations du laboratoire seront un mixte de questions issues du domaine médical et d'étude mathématique des méthodes utilisées. Comme par exemple, les modèles de survie, les algorithmes stochastiques, l'approche bayésienne des données longitudinales, la modélisation épidémiologiste et son facteur de variabilité géographique, le rapport de vraisemblance dans le cas d'une hypothèse nulle frontière avec l'alternative, la détection de ruptures dans le suivi temporel de patients, l'utilisation de modèles markoviens pour les séquences d'ADN. Bernard a contribué aux échanges entre statisticiens et médecins par sa participation à des enseignements de DEA de médecine, par ses articles de vulgarisation et la rédaction du livre « Modèle linéaire – Comparaison de groupe et régression – », illustré d'exemples « médicaux » et édité par l'INSERM. Depuis la création du laboratoire, le séminaire hebdomadaire abordera des questions posées en médecine comme les aspects mathématiques des procédures utilisées. Ces recherches feront fructifier collaborations et travaux conjoints avec différentes institutions, l'INSERM, le laboratoire « Mathématique, Informatique et Génome » de l'INRA, le groupe « Statistique des séquences biologiques » de l'INAPG et le laboratoire « Analyse et Modèles Stochastiques » de l'université de Rouen. Collaborations qui se poursuivront après son départ à Évry. Bernard fut aussi à l'initiative d'un équipement rapide en informatique, convaincu de l'utilité de cet outil pour confronter modèle et données réelles.

En 1998, le Génopole d'Évry est en pleine expansion et les mathématiques sont intégrées à l'aventure. Bernard y est nommé professeur et fonde le laboratoire mixte CNRS – INRA – université d'Évry « Statistiques et Génome ». Il passe alors dans le cœur de ce qu'il aime, la statistique appliquée à la biologie et à la génétique, comme il l'avait déjà manifesté à Paris V. À son investissement en recherche s'ajoute le pilotage administratif du laboratoire. Patrick Cumi, le président de l'université d'Évry, dira de lui, lors de son éloge funèbre : « Il fallait être visionnaire pour comprendre avant les autres que la génomique envahirait tous les domaines des sciences humaines et que par l'arrivée pressentie de données massives et de leur complexité, il nous faudrait des mathématiques de très haut niveau, des mathématiques qui seraient à inventer et qui deviendraient incontournables ». Pour ce faire, Bernard n'a pas hésité à recruter des chercheurs aux profils peu classiques pour un laboratoire de statistiques. À sa recherche et l'encadrement de thèses s'ajoutaient de nombreux articles de vulgarisation sur « à quoi servent les mathématiques en génétique et génomique », évoquant les nouveaux problèmes que ces disciplines posent aux mathématiciens, tels la lecture des séquences d'ADN, l'héritabilité des caractères, l'analyse des liens entre les maladies et les variantes génomiques observées, la reconstruction des réseaux d'interactions au sein de la cellule. Il travaillait aussi sur l'approche « grandes déviations » de la distribution des occurrences d'un mot. Dans un langage toujours simple et imagé, il y décrit sa façon de faire comme un « cheminement passant par un dialogue constant entre le biologiste et le mathématicien, le premier apportant le problème et d'innombrables connaissances, le second des outils et essayant d'apprendre à son algorithme comment utiliser ce savoir du biologiste. Cette interface enrichit les mathématiques de nouveaux théorèmes et la biologie d'outils permettant l'analyse des millions de lettres produites chaque jour par les séquenceurs » (*Images des Mathématiques* – octobre 2009). Les chaînes de Markov, observées ou non, constituent l'outil central des algorithmes utilisés. Avec G. Nuel, il écrivit en 2007 chez Hermes, son cours « Analyse statistique des séquences biologiques - Modélisation markovienne, alignements et motifs ». Les deux dernières thèses qu'il a encadrées avaient pour sujet, l'une « Les chaînes de Markov régulées et l'approximation de Poisson pour l'analyse de séquences biologiques », l'autre « L'analyse de processus pour la génomique : l'étude du modèle MTD (Mixture Transition Distribution) et l'inférence de réseaux bayésiens dynamiques ». Il poussait les jeunes chercheurs à s'ouvrir davantage aux problèmes posés par les biologistes plutôt que de rester dans une sphère plus fermée purement mathématique. Sa porte était toujours ouverte pour le dialogue et les conseils. Sa dernière voie d'exploration était l'immunologie et il confiait aux jeunes que c'est dans cette direction qu'il aimerait se lancer pour faire des mathématiques appliquées.

Bernard a manifesté tout au long de sa carrière son intérêt pour la « divulgation scientifique » : enseignant-chercheur, il aimait enseigner, faire découvrir la finesse d'un résultat mathématique, mais aussi à quoi il pourrait servir. Je garde un souvenir émerveillé de ses polys manuscrits et ronéotés de la miage, tout particulièrement celui de Recherche Opérationnelle, qui n'était en rien sa spécialité mais où on pouvait faire « beaucoup de dessins ». Convaincu de l'utilité de l'approche mixte mathématique et numérique, Bernard défendait dans son dernier livre d'enseignement, « La démarche statistique » [1], la pratique de tests exacts, faciles à tabuler numériquement, par opposition à la démarche « historique » des approximations gaussiennes, à une époque où l'emploi de l'informatique ou d'un logiciel simple (par exemple *R*) est incontournable pour l'enseignement de la statistique. Professeur émérite, il continuait à enseigner à Évry malgré quelques « freins » administratifs !

Bernard était une personne de communication et il n'a pas hésité à donner de son temps au milieu mathématique. Son implication y a été importante : président de la section 01 de Mathématiques du cnrs de 1987 à 1991, actif dans la préparation du premier congrès européen de mathématiques (1992), secrétaire de la smai de 1995 à 1998 puis membre de son Conseil d'administration, responsable du groupe mas de 2002 à 2006, membre du cnu, de conseils d'ufr, de jurys d'évaluation de la recherche, de commissions de spécialistes. Il a participé à des activités de « Maths en Jeans ». À Évry, il a été membre du Conseil scientifique, responsable de l'École doctorale « Des Génomes aux Organismes » et vice-président en charge des relations internationales. Très tôt, il avait manifesté cet intérêt pour l'international en participant solidairement à plusieurs écoles d'été à « Cuba » au début des années 1970, puis au comité de coopération avec le Nicaragua dans les années 1980 pour mettre en place des accords de coopération universitaires. Il voyagea en Uruguay au temps de la dictature pour obtenir la libération du mathématicien Massera. L'Amérique Latine était son pays.

Christophe Ambroise, qui a pris la succession de Bernard à la direction du laboratoire d'Évry, dit de lui : « Bernard avait su créer une ambiance de travail presque "familiale" au laboratoire. La plupart des membres étaient présents en permanence (hors des cours) et sa porte leur était grande ouverte. Bernard tenait beaucoup à cette ambiance, propice à la communication et aux collaborations entre les membres du laboratoire, particulièrement importantes car les membres du laboratoire sont des scientifiques d'origines très différentes, biologistes, bio-informaticiens, statisticiens appliqués, statisticiens mathématiciens. »

Bernard avait beaucoup d'intuition et la capacité à la faire partager. Il laisse le souvenir d'un collègue attachant, disponible, plein d'humour, clairvoyant et aimant profondément son travail.

Références

[1] F. Muri-Majoube et B. Prum. « Une approche statistique de l'analyse des génomes ». *Gazette des mathématiciens* **89** (2001), p. 63–98.

[2] G. Nuel et B. Prum. « Analyse statistique des séquences biologiques ». *Éditions Hermes, Lavoisier, Paris* (2007).

[3] B. Prum. « Des mathématiques dans nos cellules ? Partie 2 ». *Images des Mathématiques* (2009). url : `http://images.math.cnrs.fr/Des-mathematiques-dans-nos,406.html`.

[4] B. Prum. « Interview ». *La Recherche* (2004). url : `http://www.larecherche.fr/actualite/mathematiques/bernard-prum-nous-croisons-theorie-mathematique-realite-01-04-2004-85917`.

[5] B. Prum. *L'explosion des Mathématiques*. Brochure SMF/SMAI, 2002. url : `http://smf.emath.fr/Publications/ExplosionDesMathematiques/`.

[6] B. Prum. *Travaux depuis les années 2000*. url : `http://www.math-evry.cnrs.fr/members/bprum/welcome`.

[7] B. Prum. *Trouver les gènes coupables*. 2005. url : `http://www.larecherche.fr/savoirs/autre/trouver-genes-coupables-01-11-2005-88238`.

[8] B. Prum et A.-S. Tocquet. « The use of Markov models and hidden Markov models in genomics ». *Mathematical and computational methods in biology* **65** (2006), p. 5.

Xavier Guyon

Université Paris 1

Xavier Guyon est professeur émérite, membre du laboratoire samm (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisciplinaire). Ses principaux travaux portent sur le calcul stochastique à deux indices, l'analyse d'image et les champs de Gibbs, l'étude des variations des champs, la statistique des processus spatiaux.

1. Éditions Cépaduès, 2010.

Alexandre Grothendieck. A mathematical portrait
Leila Schneps, éd.
International Press, 2014. 324 p. isbn : 9781571462824

Alexandre Grothendieck est mort le 13 novembre 2014, plus de vingt ans après avoir fait le choix d'une solitude absolue et farouche. Son nom était peu connu en dehors de la communauté mathématique et des cercles écologistes [a] et on ne peut qu'être surpris par le retentissement de l'annonce de son décès ; il ne fait guère de doute qu'il est appelé à occuper une place de choix dans l'imaginaire collectif.

Plusieurs entreprises biographiques sont en cours [b] mais toutes butent sur les mathématiques de Grothendieck : comment rendre compte de sa singularité dans ce domaine et expliquer la fascination qu'il provoque sans entrer dans des considérations ésotériques ? L'objectif de cet ouvrage est plus modeste : s'adressant à un lecteur ayant déjà une certaine familiarité avec la géométrie algébrique, par exemple un étudiant commençant à se spécialiser dans ce domaine, il se concentre « *not on the actual mathematical content of Grothendieck's contribution, but on features which constitute in some sense his personal mathematical signature* ». Il s'agit d'un recueil de treize articles écrits par des mathématiciens ayant une connaissance intime de l'œuvre de Grothendieck et qui tous, ou presque, l'ont cotoyé entre 1958 et 1970, alors qu'il était au faîte de sa gloire.

Quelques contributions présentent succintement le cœur de l'édifice construit par Grothendieck : les principales notions sous-jacentes à sa refondation de la géométrie algébrique (par Michel Raynaud), la cohomologie étale (par Luc Illusie) et la K-théorie (par Max Karoubi). Il ne s'agit pas de textes introductifs, mais plutôt de survols pouvant servir à s'orienter dans l'étude de ces domaines. Un autre texte (Joe Diestel) présente succintement une partie des travaux antérieurs de Grothendieck en analyse fonctionnelle.

Se remémorant ses réticences initiales à abandonner l'approche de la géométrie algébrique développée quelques années auparavant par André Weil au profit de la théorie des schémas, Jacob Murre note que Grothendieck « *does not strive for* generality as such *but for* naturalness *[...] With his deep insight, he does see what is essential and natural, and then he does not hesitate to develop with his formidable skills the tools necessary to move towards his goal, namely "to see how things truly are"* ». Cette observation est fort bien étayée dans trois textes. Celui de Murre tout d'abord, qui offre une excellente introduction à la théorie du groupe fondamental de Grothendieck : la notion de catégorie galoisienne illustre bien la portée que peut avoir une idée « naturelle », et la détermination du groupe fondamental (premier à p) d'une courbe algébrique sur un corps algébriquement clos de caractéristique p par réduction au calcul topologique en caractéristique zéro illustre magnifiquement la puissance de la notion de schéma. David Mumford et Steven Kleiman présentent un autre exemple éloquent : un problème classique de géométrie des surfaces, hérité d'Enriques et Severi, dont l'élucidation repose sur la différence de comportement du schéma Picard en caractéristique 0 et en caractéristique p. Racontée par Mumford en quelques pages [c], cette histoire est exposée de façon beaucoup plus détaillée par Kleiman dans un texte qui constitue une excellente présentation de la théorie du schéma de Picard. Ces trois auteurs en profitent pour évoquer sur un mode personnel leurs contacts avec Grothendieck. C'est ce que fait également Robin Hartshorne, qui analyse l'évolution de leurs relations jusqu'à la fin des années 70.

Did earlier thoughts inspire Grothendieck ? s'interroge Frans Oort. Sa réponse est un texte original mais inégal, qui s'efforce de jeter un regard lucide sur la révolution que Grothendieck a opérée en géométrie algébrique. Sans rabattre de son admiration pour la portée de ses idées et de ses méthodes, Oort souligne qu'elles doivent sans doute aller de pair avec une approche plus pragmatique lorsqu'on cherche à résoudre un problème donné ; il illustre son propos par plusieurs exemples, dont la démonstration de la dernière des conjectures de Weil par Pierre Deligne ou le relèvement des variétés abéliennes en caractéristique nulle (Mumford-Oort). Il se demande également si Grothendieck n'est pas parfois allé trop loin dans l'abstraction, comme lorsqu'il jeta les bases de la géométrie algébrique relative [d]. Il semble que l'essor important de la géométrie algébrique dérivée depuis une dizaine d'années apporte une réponse négative à cette question !

Carlos Simpson consacre un long texte à la notion de descente, qu'il aborde comme un fil rouge permettant de parcourir une bonne partie de l'œuvre de Grothendieck, depuis les techniques de construction de schémas et le concept de topos jusqu'à ses travaux homotopiques des années 80. Ceux-ci ont eu un impact fondamental sur le développement de la théorie des catégories et des champs supérieurs, au sujet desquels Simpson fait un tour d'horizon qui permet de s'orienter dans une littérature foisonnante.

Il reste à évoquer deux contributions de nature très différente des précédentes. La première, de Leila Schneps, est une synthèse et une contextualisation de la partie publiée de la correspondance entre Grothendieck et Serre, agrémentée de nombreux extraits. Schneps souligne le contraste entre les styles mathématiques des deux interlocuteurs et le résume en écrivant que « *the difference between them might be expressed by saying that Serre devoted his life to the pursuit of beauty, Grothendieck to the pursuit of the absolute* ». Le dernier texte, de Pierre Cartier, est issu d'une intervention à un colloque de psychanalyse à Cerisy. Après un survol biographique et mathématique émaillé de souvenirs personnels, Cartier se lance dans une « autopsie de l'œuvre » et une « anatomie de l'auteur », en essayant d'en discerner la trame et les lignes de force. Sur le premier plan, Cartier souligne la vision unificatrice de Grothendieck ainsi que sa capacité à reconnaître et à nommer les concepts centraux à l'œuvre en mathématiques ; sur le second, il esquisse une unité psychologique sous-jacente à la nature de son activité mathématique, un temps guidée et favorisée par une forte dimension collective, et certaines de ses obsessions ultérieures.

Une fois refermé, cet ouvrage disparate laisse un sentiment un peu mitigé. Les divers témoignages personnels qu'il contient permettent d'ancrer dans la réalité un homme devenu très tôt un mythe, et plusieurs exemples détaillés avec soin permettent d'illustrer *in situ* la puissance et la portée de la révolution opérée par Grothendieck. Pour autant, on reste sur sa faim devant toutes les tentatives d'analyse extérieure de la singularité profonde de sa démarche mathématique. Peut-être ne peut-on réellement la percevoir qu'en l'expérimentant soi-même, dans une forme de dialogue avec son auteur. Ainsi que l'écrit Cartier en conclusion de son texte : « *His work is unique in that his fantasies and obsessions are not erased from it, but live within it, and it takes its life from them : at the same time as he gave us a strictly mathematical work, he also delivered to us, in a Freudian style, what he believed to be its meaning* ».

Amaury Thuillier
Université Lyon 1

a. Le rôle et l'influence de Grothendieck dans l'émergence de l'écologie politique sont analysés dans l'ouvrage *Survivre et vivre. Critique de de la science, naissance de l'écologie*, de Céline Pessis (L'Échappée, 2014).

b. Signalons particulièrement l'imposant travail entrepris par Winfried Scharlau.

c. Qui observe au passage que le calcul infinitésimal mis en place par Grothendieck permet de formuler rigoureusement la démonstration « intuitive » d'Enriques.

d. Au sens de Toën-Vaquié-Vezzosi.

Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (`http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/`).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (`gazette@dma.ens.fr`), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier TEX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe LATEX *gztarticle* fournie par les distributions TEX courantes (TEX Live et MacTEX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiKTEX), et sinon téléchargeable depuis la page `http://ctan.org/pkg/gzt`. Sa documentation détaillée se trouve à la page `http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf`. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution TEX à jour.

Classe LATEX : Denis Bitouzé (`denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr`)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (`n.lozanne@free.fr`)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.