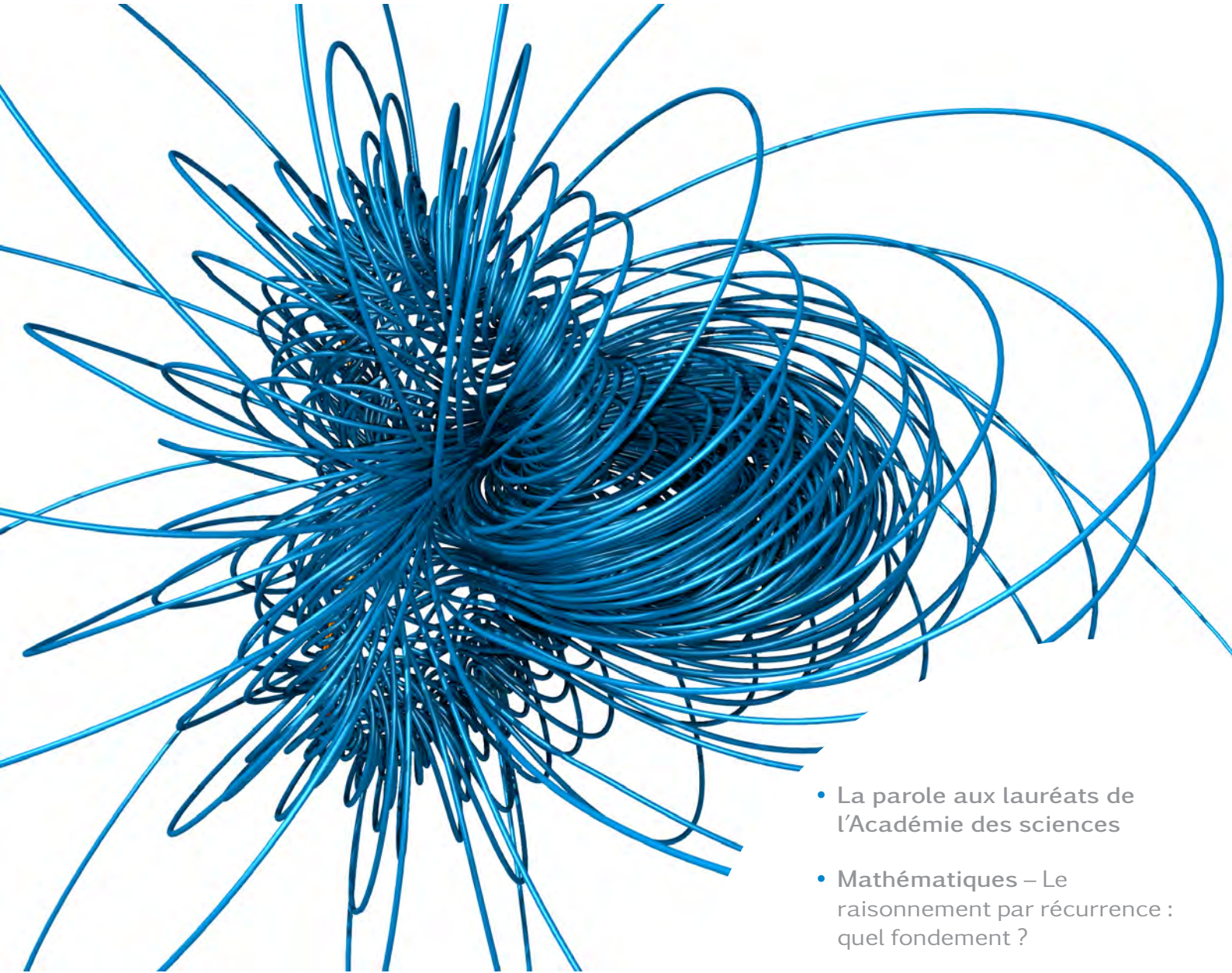


la Gazette

des Mathématiciens



- La parole aux lauréats de l'Académie des sciences
- Mathématiques – Le raisonnement par récurrence : quel fondement ?
- Parité – La sous-représentation des femmes en mathématiques
- Raconte-moi... une orbite de Reeb

Comité de rédaction

Rédacteur en chef

Boris ADAMCZEWSKI

Institut de Mathématiques de Marseille
boris.adamczewski@math.cnrs.fr

Rédacteurs

Thomas ALAZARD

ENS, Paris
alazard@dma.ens.fr

Julie DESERTI

Université Paris Diderot
deserti@math.univ-paris-diderot.fr

Caroline EHRHARDT

Université Vincennes Saint-Denis
caroline.ehrhardt@inrp.fr

Damien GAYET

Institut Fourier, Grenoble
damien.gayet@ujf-grenoble.fr

Sébastien GOUÉZEL

Université Rennes 1
sebastien.gouezel@univ-rennes1.fr

Sophie GRIVAUX

Université de Picardie
sophie.grivaux@u-picardie.fr

Bernard HELFFER

Université Paris-Sud
bernard.helffer@math.u-psud.fr

Pierre LOIDREAU

Université Rennes 1
pierre.loidreau@univ-rennes1.fr

Martine QUEFFÉLEC

Université Lille 1
Martine.Queffelec@univ-lille1.fr

Stéphane SEURET

Université Paris Est Créteil
seuret@u-pec.fr

Secrétariat de rédaction :

SMF – Claire ROPARTZ
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@dma.ens.fr – <http://smf.emath.fr>

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

ISSN : 0224-8999

Classe \LaTeX : Denis BITOUZÉ (denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr)

Conception graphique : Nathalie LOZANNE (n.lozanne@free.fr)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe CAIGNAERT.



À propos de la couverture. Le flot géodésique sur la surface modulaire est un exemple de flot de Reeb. Les points ayant asymptotiquement la même trajectoire sous ce flot qu'un point donné forment sa *variété stable*. L'image de couverture représente une telle variété stable, et illustre le fait que les variétés stables s'équirépartissent dans l'espace, dû à la nature chaotique du flot géodésique. www.josleys.com (crédit : Jos LEYS).

N° 146

Éditorial

Chères lectrices, chers lecteurs,

Les vacances sont déjà loin et l'heure de la rentrée a bel et bien sonné. Heureusement, la *Gazette* ne vous laisse pas tomber en ce moment difficile ! Avec ce numéro d'octobre, c'est (un peu) l'été indien...

Courageux et téméraires ! *Images des Mathématiques* et la *Gazette* poursuivent leur partenariat. Une tâche ardue : demander à des lauréats de l'Académie des sciences de rédiger simultanément deux textes, l'un pour la *Gazette* et l'autre pour IdM, sur le même sujet mais en adaptant l'écriture à leurs lectorats. Cette année, Sébastien Boucksom et Patrick Gérard sont venus à bout de ce véritable chemin de croix : un grand merci à eux !

Incontournable, le raisonnement par récurrence accompagne inlassablement les premiers pas de tout mathématicien. Paul Égré, en tant que philosophe, nous offre un regard différent sur ce pilier de la pensée mathématique et se pose la question même de son fondement, analysant plusieurs réponses possibles influencées notamment par Hilbert, Poincaré et Frege.

La grande réforme des programmes de lycée, mise en place en 2011, commence à livrer à nos universités ses premières fournées d'étudiants. La commission enseignement de la SMF nous dévoile, non sans un certain optimisme, ses conclusions dont voici un court extrait : « les étudiants qui arrivent à l'université ou en classe préparatoire, semblent, pour une majorité d'entre eux : ne plus maîtriser le calcul numérique ou littéral, avoir perdu le goût et la capacité de travailler chez eux ou en classe, ignorer ce que sont les mathématiques. »

La sous-représentation des femmes en mathématique, aujourd'hui tout le monde est contre ! Oui, mais... À travers un texte très documenté, Greg Martin tord le cou à quelques idées reçues et nous place face à notre responsabilité.

Anne Vaugon nous raconte, quant à elle, les orbites de Reeb.

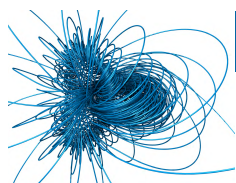
Enfin, plusieurs membres du conseil scientifique du CNRS cosignent une tribune nous rappelant que l'élaboration de la loi pour une République nu-

mérique fait actuellement l'objet d'une consultation publique. Cette loi concerne au premier plan les acteurs de la recherche scientifique.

La tribune libre se veut, comme son nom l'indique, un espace vivant et de libre expression au sein de la communauté mathématique, permettant d'informer, ou d'alimenter débats et controverses. Ne soyez pas frileux, profitez-en ! La lettre de Laurent Schwartz à Igor Shafarevich, reproduite dans la rubrique *Rétrovisseur*, témoigne d'ailleurs d'un temps où les mathématiciens n'hésitaient ni à s'engager, ni à polémiquer.

En vous souhaitant une agréable lecture,

Boris ADAMCZEWSKI



N° 146

Sommaire

SMF	4
Mot du président	4
LA PAROLE AUX LAURÉATS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES	8
Systèmes automatiques et évolutions intégrables – <i>P. GÉRARD</i>	8
Limite thermodynamique et théorie du potentiel – <i>S. BOUCKSOM</i>	16
MATHÉMATIQUES	27
Le raisonnement par récurrence : quel fondement ? – <i>P. ÉGRÉ</i>	27
DIFFUSION DES SAVOIRS	39
Exo7 – Une interview d'Arnaud Bodin	39
À propos de la licence	41
PARITÉ	45
La sous-représentation des femmes en mathématiques – <i>G. MARTIN</i>	45
RACONTE-MOI	52
... une orbite de Reeb – <i>A. VAUGON</i>	52
TRIBUNE LIBRE	57
La loi sur le numérique concerne le monde de la recherche	57
INFORMATION	60
Quelques nouvelles de l'INSMI	60
À propos de la campagne d'attribution de la PEDR-2015 de l'INSMI	62
Les Unités Mixtes Internationales du CNRS	62
Calendrier Mathématique 2016 – <i>A. RECHTMAN</i>	65
RÉTROVISEUR	66
CARNET	68
Pierre DOLBEAULT – <i>H. SKODA</i>	68
Daniel KASTLER	70
Jean-Claude DOUAI	71
LIVRES	72



N° 146

Mot du président

Chères collègues, chers collègues,

L'année universitaire qui vient de commencer va nous mener au premier congrès de la SMF, du 6 au 10 juin prochain à Tours. La SMF est une vieille dame de plus de 150 ans pour laquelle il était grand temps d'organiser un tel rendez-vous. Quinze oratrices et orateurs pleinières, représentant tous les domaines couverts par l'école française, ont accepté dans un délai très bref de se libérer pour ce rendez-vous, malgré un agenda déjà bien rempli. Huit sessions thématiques seront organisées en parallèle durant cette semaine, là aussi la mobilisation des collègues a été forte. Le site SMF-2016, accessible depuis celui de la SMF, est d'ores et déjà ouvert, je vous invite à le visiter dès à présent et vous inscrire en ligne rapidement.

La maison d'édition qu'est la SMF reste à l'écoute des mathématiciennes et mathématiciens. Ses revues périodiques et la collection *Astérisque* sont depuis plusieurs mois accessibles en ligne. Le volet « éditorial », avec la mise à disposition d'outils performants pour les comités de rédaction, est désormais une priorité. Face au nombre croissant de soumissions de haut niveau, il est essentiel de tout mettre en œuvre pour raccourcir les délais d'acceptation ou de refus des articles ; nos comités de rédaction disposent désormais d'une base éditoriale et la SMF envisage dans des délais courts d'utiliser le logiciel libre « Open Journal System » (OJS), afin de gagner en fiabilité informatique et de disposer du savoir-faire des revues françaises qui l'utilisent déjà. Par ailleurs, nous devons assumer les responsabilités d'une société savante qui se veut maison d'édition. Lors des débats récents – nombreux et souvent passionnés – sur l'édition scientifique, ont été soulignés à de multiples reprises les excès de certains éditeurs privés et de consortia puissants et peu transparents ; les sociétés savantes et autres éditeurs académiques ont été interpellés à plusieurs reprises pour s'emparer de cette question et proposer des réponses pertinentes et financièrement acceptables. Dans la continuité des solutions qui ont émergé récemment (archives ouvertes, journaux en accès électronique libre, épi-journaux...) et riche de la notoriété de ses publications, la SMF a depuis trois ans augmenté de façon substantielle le nombre de pages de plusieurs revues qu'elle édite et dont elle assure la diffusion. Après les *Annales de l'ENS*, *Panoramas*

et *Synthèses* puis *Astérisque* qui ont vu leur nombre de pages croître ces dernières années, c'est au tour des *Mémoires* ; dès janvier prochain, et sans répercussion sur le coût de l'abonnement en 2016, seront diffusés non pas quatre mais six numéros par an. De part leur format adapté à des articles longs, toujours en pointe au niveau de la recherche mais offrant la possibilité d'une mise en perspective approfondie par rapport à l'état de l'art, les *Mémoires* reçoivent de très nombreuses soumissions auxquelles il était urgent de pouvoir répondre. Cette augmentation du nombre de numéros a un coût clairement identifié, et plusieurs solutions sont envisagées pour y faire face.

Je profite aussi de cette tribune pour évoquer l'apparition d'une nouvelle collection de la SMF, *Jean Morlet Series*, en co-édition avec Springer. L'objectif est de permettre aux lauréats de la Chaire Jean Morlet au CIRM de livrer une synthèse du travail du semestre par une monographie thématique. Il était essentiel que la SMF, tutelle du CIRM avec le CNRS, s'empare de ce projet ; le partenariat avec Springer en augmente très clairement la visibilité. Certains objecteront qu'il entre en contradiction avec les débats récents sur les pratiques des éditeurs scientifiques privés évoqués quelques lignes plus haut. Des échanges ont eu lieu à ce sujet en bureau et en conseil d'administration ; s'inscrire dans une analyse critique des pratiques ne signifie aucunement fermer la porte aux collaborations. C'est dans cet esprit que cette série voit le jour, je lui souhaite longue vie.

En ce début d'automne, plusieurs médias se sont emparés du sujet de la place des mathématiques dans l'enseignement et dans notre société. Dans un article inutilement véhément¹, Didier Raoult, biologiste de premier plan, s'insurge contre la sélection par les mathématiques, qui provoquerait un intolérable gâchis et reposerait sur trois leurres : une supposée « neutralité » dans la notation d'une part, un tri dont notre discipline accentuerait en fait l'injustice d'autre part, et enfin une prétendue capacité des mathématiques à mieux comprendre le monde. À titre personnel, je serais enclin à rejoindre son analyse sur la notation, mais je déplore une absence totale d'argumentation sur le deuxième leurre. Quant au troisième, Didier Raoult insiste sur le fait que notre système éducatif n'est bon qu'à former des élites. Dans le même temps, il attribue pourtant la reconnaissance au plus haut niveau de l'école mathématique française aux seules vertus de « l'immigration » ; argument très malhonnête ! Depuis des années, de nombreux collègues s'insurgent contre le manque de substance des programmes de mathématiques et il est difficile de ne pas prêter l'oreille à leurs inquiétudes lorsque l'on compare les programmes des filières scientifiques aujourd'hui avec

1. http://www.lepoint.fr/invites-du-point/didier_raoult/raoult-arretez-la-selection-par-lesmaths-11-09-2015-1963909_445.php

ceux d'il y a trente ans ! Cependant, aucune prise de position tranchée n'est pertinente dans le contexte actuel. Les questions autour de l'enseignement de notre discipline et de la façon dont elle est perçue dans la société sont d'importance ; nier l'existence d'une sélection par les mathématiques serait suicidaire tout autant que s'inscrire dans la logique de l'article de D. Raoult. Depuis de longues années, notre communauté, dans toute sa diversité, essaye d'apporter des éléments de réponses à ces questions. La Commission Française de l'Enseignement des Mathématiques (CFEM), riche de l'expérience et du travail de nombreuses associations, s'est emparée pleinement ces derniers mois de la réflexion sur les nouveaux programmes des collèges et lycées ; l'enjeu est de taille, car c'est dans nos écoles que l'essentiel de la formation mathématique des citoyens de demain a lieu. La nécessaire évolution des programmes est bien une priorité dans un monde où les frontières entre disciplines deviennent de plus en plus floues. Simultanément, existent de nombreuses expériences sur le terrain, mobilisant les mathématiciens de tout niveau ; une partie d'entre elles est coordonnée par l'association *Animath*, mais il existe de nombreuses autres manifestations à destination du grand public. Ce savoir-faire développé au fil des ans est une richesse qui doit alimenter notre enseignement à venir. Il doit aussi aider à briser les idées préconçues et les conclusions hâtives sur notre discipline, relayées par des journalistes et politiques formés le plus souvent par les sciences humaines ; l'article de P. Arnoux dans la *Gazette* de janvier 2015 est très éclairant à ce sujet !

Quelques jours plus tard, un article de D. Larousserie et N. Herzberg alertait les lecteurs du *Monde* sur les dérapages incontrôlés des mathématiques ; leur contribution a suscité de nombreuses réactions, très intéressantes à lire ². Dans cet article, il est essentiellement fait mention du mauvais usage des outils mathématiques, conséquence d'une méconnaissance par de nombreux utilisateurs de la puissance, de la finesse mais aussi des limites des outils mis à leur disposition ; cette thèse va clairement à l'encontre des conclusions de D. Raoult qui affirme haut et fort qu'une connaissance superficielle des mathématiques est amplement suffisante dans de nombreux domaines, même dans le monde de la recherche de pointe ! La contribution de D. Larousserie et N. Herzberg soulève aussi de façon très pertinente des questions d'ordre éthique auxquelles notre communauté, longtemps à part dans le monde des sciences, se trouve confrontée aujourd'hui. On ne peut simultanément chercher à mesurer l'impact de notre discipline dans l'économie afin d'en assurer la promotion auprès de la puissance publique et des jeunes générations, et refuser de s'interroger sur les

2. <http://alasure.blog.lemonde.fr/2015/09/28/retour-sur-les-maths-et-leurs-derapages-incontroles/>

dérives que les outils et analyses qu'elle propose peuvent engendrer ; le débat est d'actualité, à nous de nous en saisir.

Il est aussi important de garder du recul par rapport aux avancées de la recherche scientifique et de ses pratiques, dans un monde où tout fonctionne de plus en plus vite, à en donner le tournis. Il y a soixante-dix ans, dès les premières pages du Mythe de Sisyphe, Albert Camus interpellait ainsi les physiciens et plus généralement le monde scientifique ; son analyse reste d'une actualité saisissante :

Pourtant toute la science de cette terre ne me donnera rien qui puisse m'assurer que ce monde est à moi. Vous me le décrivez et vous m'apprenez à le classer. Vous énumérez ses lois et dans ma soif de savoir je consens qu'elles soient vraies. Vous démontrez son mécanisme et mon espoir s'accroît. Au terme dernier, vous m'apprenez que cet univers prestigieux et bariolé se réduit à l'atome et que l'atome lui-même se réduit à l'électron. Tout ceci est bon et j'attends que vous continuiez. Mais vous me parlez d'un invisible système planétaire où des électrons gravitent autour d'un noyau. Vous m'expliquez ce monde avec une image. Je reconnais alors que vous en êtes venus à la poésie : je ne connaîtrai jamais. Ai-je le temps de m'en indigner ? Vous avez déjà changé de théorie. Ainsi cette science qui devait tout m'apprendre finit dans l'hypothèse, cette lucidité sombre dans la métaphore, cette incertitude se résout en œuvre d'art.

Je vous souhaite une bonne année universitaire.

Le 1^{er} octobre 2015

Marc PEIGNÉ, président de la SMF



LA PAROLE AUX LAURÉATS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

L'an dernier, la *Gazette* lançait une initiative en partenariat avec le site Images des Mathématiques (IdM) : demander à des lauréats de l'académie des sciences de rédiger simultanément deux textes, l'un pour la *Gazette* et l'autre pour IdM, sur le même sujet mais en adaptant l'écriture à leurs lectorats. Nous réitérons cette année l'expérience avec la publication dans ce dossier de textes de Sébastien Boucksom et Patrick Gérard, lauréats 2014 de l'académie des sciences.

Systemes automatiques et évolutions intégrables

• P. GÉRARD

1. Introduction

L'étude des systemes automatiques est au cœur de nombreuses questions des sciences de l'ingénieur. Cet article explique comment un systeme automatique à temps discret peut être repéré par une suite décroissante de nombres positifs, ses énergies caractéristiques, et une suite d'angles associés. Cette correspondance peut être utilisée de façon inattendue pour décrire explicitement une évolution non linéaire, et pour mettre en évidence un phénomène s'apparentant à la turbulence : la transition vers les hautes fréquences.

2. Une introduction élémentaire aux systemes automatiques

Dans le cadre le plus simple que nous adoptons ici, un systeme automatique est un procédé transformant un signal d'entrée en un signal de sortie. Dans ce qui suit, un signal est modélisé par une suite de nombres complexes

$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}} = x_0, x_1, x_2, \dots,$$

l'indice entier décrivant un temps discret. On ap-

pelle *énergie* d'un signal la somme des carrés des modules de ses coefficients

$$|x_0|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots$$

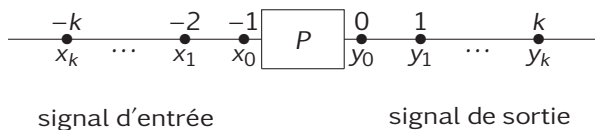
On dit que le signal est d'énergie finie si cette somme est finie. C'est par exemple le cas pour un signal géométrique

$$x_k = a q^k$$

où a et q sont des nombres complexes et $|q| < 1$. Nous utiliserons quelques opérations simples sur les signaux d'énergie finie.

1. **Superposition.** Étant donnés deux signaux d'énergie finie x_0, x_1, x_2, \dots et x'_0, x'_1, x'_2, \dots le superposé de ces deux signaux est le signal $x_0 + x'_0, x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \dots$
2. **Conjugaison et dilatation.** Étant donné un signal d'énergie finie x_0, x_1, x_2, \dots le *conjugué* de ce signal est le signal $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ et le *dilaté* de ce signal par un nombre complexe λ est le signal $\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2, \dots$
3. **Décalages.** Étant donné un signal d'énergie finie x_0, x_1, x_2, \dots on lui associe le signal *décalé vers la droite* $0, x_0, x_1, x_2, \dots$ et le signal *décalé vers la gauche* x_1, x_2, x_3, \dots

Un système automatique est un procédé associant à tout signal d'énergie finie x_0, x_1, x_2, \dots , dit signal d'entrée, un signal d'énergie finie y_0, y_1, y_2, \dots , dit de sortie, avec les propriétés suivantes : à la superposition de deux signaux d'entrée est associée la superposition des deux signaux de sortie correspondants, au signal d'entrée dilaté est associé le signal de sortie dilaté, et à un signal d'entrée décalé vers la droite est associé le signal de sortie correspondant décalé vers la gauche. Cette dernière propriété est illustrée par la figure suivante, le signal d'entrée étant représenté aux temps négatifs, dans le sens décroissant, et le signal de sortie aux temps positifs, dans le sens croissant. L'effet de décalage vers la droite du signal d'entrée est alors vu comme un décalage de l'origine des temps d'une unité vers le passé, en considérant toutefois que les valeurs du signal de sortie sont notées à partir de la même date qu'auparavant, ce qui a pour effet d'oublier la valeur y_0 .



Un système automatique est caractérisé par une suite particulière de nombres, qui est le signal de sortie $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ associé au signal d'entrée $1, 0, 0, \dots$. On peut montrer qu'un signal d'entrée quelconque $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est alors transformé en le signal de sortie $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donné par les formules

$$y_k = c_k x_0 + c_{k+1} x_1 + c_{k+2} x_2 + \dots = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{k+\ell} x_{\ell}, \quad k \in \mathbb{N},$$

la somme sur un nombre infini de termes étant bien définie à cause de la condition d'énergie finie. Une telle application linéaire Γ , définie sur l'espace vectoriel des suites de carrés sommables, est appelée un *opérateur de Hankel*. Le signal $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est appelé signal *fondamental* du procédé P , ou *symbole* de l'opérateur de Hankel. Il vérifie en fait des conditions plus contraignantes que le simple fait d'être d'énergie finie¹. Nous supposons dans ce qui suit que cette suite tend rapidement vers 0, par exemple aussi vite qu'une suite géométrique de raison plus petite que 1.

Étant donné un procédé P , on construit un autre procédé P' en décalant l'origine des temps d'une unité vers le passé : si le signal x_0, x_1, x_2, \dots est transformé en y_0, y_1, y_2, \dots par le procédé P , alors

P' le transforme en y_1, y_2, y_3, \dots . Si c_0, c_1, c_2, \dots est le signal fondamental de P , le procédé décalé P' ainsi défini a pour signal fondamental c_1, c_2, c_3, \dots

2.1 – Les énergies caractéristiques d'un système

Étant donné un procédé P , on peut montrer que le quotient de l'énergie d'un signal de sortie par l'énergie du signal d'entrée correspondant ne dépasse pas une certaine valeur. En d'autres termes, l'opérateur de Hankel associé est toujours continu. La valeur maximale de ce quotient est appelée la *première énergie caractéristique* du système. Du point de vue de l'opérateur de Hankel Γ associé, cette quantité n'est autre que le carré de la norme de l'opérateur Γ , ou encore la plus grande valeur propre de l'opérateur autoadjoint compact $\Gamma^* \Gamma$, l'adjoint étant pris au sens du produit scalaire hermitien sur les suites de carrés sommables,

$$(x|y) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \bar{y}_k.$$

Pour définir la *deuxième énergie caractéristique*, on se restreint aux signaux d'entrée vérifiant une certaine contrainte linéaire, c'est-à-dire une condition du type

$$x_0 h_0 + x_1 h_1 + x_2 h_2 + \dots = 0,$$

où h_0, h_1, h_2, \dots est un signal donné d'énergie finie. Les quotients correspondants définissent à nouveau une valeur maximale, dépendant de la contrainte choisie, et la valeur minimale de ces quantités pour toutes les contraintes possibles est appelée la *deuxième énergie caractéristique* du système. La *troisième énergie caractéristique* se définit de même, en considérant cette fois des signaux d'entrée satisfaisant à deux contraintes linéaires, la quatrième correspond à trois contraintes linéaires, et ainsi de suite, jusqu'à trouver éventuellement la valeur 0. On définit ainsi une suite, finie ou infinie, de nombres strictement positifs, appelés *énergies caractéristiques* du système, et formant la suite des valeurs propres non nulles de l'opérateur autoadjoint compact $\Gamma^* \Gamma$, classées par ordre décroissant, chacune étant répétée selon sa multiplicité.

1. Cette condition nécessaire et suffisante, qui a été établie par Z. Nehari, *Ann.Math.*, 1957, s'exprime ainsi : il existe une fonction L^∞ f sur le cercle telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, c_k est le coefficient de Fourier de f d'indice k .

Voyons tout de suite un exemple.

Considérons le procédé associé à la suite géométrique

$$c_k = a q^k$$

où a est un nombre complexe non nul, et q est un nombre complexe de module strictement plus petit que 1. Le signal d'entrée x_0, x_1, x_2, \dots est alors transformé en

$$\begin{aligned} y_k &= a q^k x_0 + a q^{k+1} x_1 + a q^{k+2} x_2 + \dots \\ &= a q^k (x_0 + q x_1 + q^2 x_2 + \dots). \end{aligned}$$

Un calcul fondé sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz² montre que le quotient de l'énergie de y par l'énergie de x a pour valeur maximale

$$e_1 = \frac{|a|^2}{(1 - |q|^2)^2}$$

et que cette valeur n'est atteinte que si le signal x est proportionnel au signal $1, \bar{q}, \bar{q}^2, \dots$, où \bar{z} désigne le nombre complexe conjugué du nombre complexe z . En outre, dès que le signal d'entrée x satisfait à la contrainte linéaire³

$$x_0 + q x_1 + q^2 x_2 + \dots = 0,$$

la formule ci-dessus montre que le signal de sortie vérifie $y_k = 0$ pour tout k . Il n'existe donc pas d'autre énergie caractéristique pour P .

Les énergies caractéristiques d'un système sont des quantités importantes ; en pratique elles peuvent souvent être mesurées. Une question essentielle est alors d'explorer les liens entre ces énergies caractéristiques et le signal fondamental c_0, c_1, c_2, \dots définissant le procédé. On a remarqué plus haut que la suite des énergies caractéristiques était décroissante, et on peut montrer que, lorsqu'elle est infinie, elle tend vers la valeur 0. Réciproquement, peut-on créer un procédé ayant une suite d'énergies caractéristiques qui soit donnée à l'avance ? En quoi ces quantités sont-elles caractéristiques du système ? C'est à ce type de question que nous allons répondre au paragraphe suivant.

Concluons ce paragraphe en observant que le procédé décalé P' a lui aussi des énergies caractéristiques e'_1, e'_2, \dots . On peut montrer qu'elles sont intercalées avec celles de P ,

$$e_1 \geq e'_1 \geq e_2 \geq e'_2 \geq \dots$$

Le plus souvent⁴, les inégalités ci-dessus sont strictes : on dit alors que le procédé P est *générique*.

3. Le repérage d'un système par ses énergies caractéristiques

Revenons à l'exemple du procédé P dont le signal fondamental est la suite géométrique $a, a q, a q^2, \dots$. Le procédé P' a donc pour signal fondamental $a q, a q^2, a q^3, \dots$, ce qui revient à remplacer a par $a q$. Il n'a donc qu'une seule énergie caractéristique non nulle, égale à

$$e'_1 = \frac{|a|^2 |q|^2}{(1 - |q|^2)^2}.$$

On constate que, puisque le module de q est strictement plus petit que 1, celle-ci est strictement inférieure à celle de P . Le procédé P est donc générique au sens défini ci-dessus⁵. On constate sur cet exemple que la connaissance des énergies caractéristiques de P et de P' permet de déterminer les modules des nombres complexes a et q . Il manque toutefois les arguments de ces nombres complexes pour reconstruire le signal fondamental.

3.1 – Les angles d'un système

Étant donné un procédé P générique, nous allons associer un angle à chaque énergie caractéristique non nulle de P ou de P' . Il faut d'abord observer que, pour chaque énergie caractéristique de P , il est possible de définir une notion de signal d'entrée optimal : par exemple, pour la première énergie caractéristique e_1 de P , un signal x est optimal si le quotient de l'énergie du signal de sortie par l'énergie de x vaut e_1 . Plus généralement, les signaux d'entrée optimaux pour l'énergie caractéristique e_n sont les vecteurs propres de l'opérateur $\Gamma^* \Gamma$ associés à la valeur propre.

On peut alors décomposer le conjugué du signal fondamental de P en la superposition de signaux optimaux pour les énergies caractéristiques de P . Si x est le signal optimal associé à une énergie e intervenant dans cette décomposition, on montre que le signal de sortie obtenu en appliquant le procédé

2. Voir l'article <http://images.math.cnrs.fr/Inegalite-de-Cauchy-Schwarz-sommes-717.html>

3. Cette contrainte s'écrit $c_0 x_0 + c_1 x_1 + \dots = 0$, où (c_k) est le signal fondamental.

4. Au sens de Baire, dans l'espace des opérateurs de Hankel compacts.

5. Rappelons que, par définition, les énergies caractéristiques sont strictement positives.

P à x est proportionnel au conjugué de x , l'énergie caractéristique étant égale au carré du module du rapport de proportionnalité. L'argument du rapport de proportionnalité est appelé *l'angle du système associé à l'énergie e* .

On procède de même avec les énergies caractéristiques de P' , à ceci près que l'on décompose toujours le conjugué du signal fondamental de P , et non de P' , en la superposition de signaux optimaux pour P' .

Revenons à l'exemple du procédé de signal fondamental

$$c_k = a q^k.$$

On a vu ci-dessus que P et P' avaient chacun une seule énergie fondamentale,

$$e_1 = \frac{|a|^2}{(1-|q|^2)^2}, \quad e'_1 = \frac{|a|^2|q|^2}{(1-|q|^2)^2},$$

et que les signaux optimaux correspondants étaient proportionnels au signal $1, \bar{q}, \bar{q}^2, \dots$. En dilatant de \bar{a} ce dernier signal, on obtient le conjugué x du signal fondamental, et les signaux de sortie associés y et y' sont alors donnés par

$$y_k = \frac{|a|^2}{1-|q|^2} q^k = \frac{\bar{a}}{1-|q|^2} \bar{x}_k,$$

$$y'_k = \frac{|a|^2 q}{1-|q|^2} q^k = \frac{\bar{a} q}{1-|q|^2} \bar{x}_k.$$

Les angles associés sont donc

$$\psi_1 = -\arg(a), \quad \psi'_1 = \arg(q) - \arg(a).$$

3.2 – Comment reconstruire le signal fondamental

Le point essentiel est le suivant : il est possible de reconstruire explicitement le signal fondamental d'un procédé générique P à partir de la liste des énergies caractéristiques de P et de P' , et des angles associés. Donnons une idée de cette reconstruction dans le cas où P et P' ont chacun un nombre fini q d'énergies caractéristiques,

$$e_1 > \dots > e_q, \quad e'_1 > \dots > e'_q.$$

Désignons par ψ_1, \dots, ψ_q et ψ'_1, \dots, ψ'_q les angles associés. Pour tout nombre complexe z , considérons la matrice $\mathcal{C}(z)$ carrée d'ordre q dont les coefficients sont

$$c_{jk}(z) = \frac{\sqrt{e_j} e^{i\psi_j} - z \sqrt{e'_k} e^{i\psi'_k}}{e_j - e'_k}, \quad 1 \leq j, k \leq q.$$

On montre alors que, si le module de z est au plus égal à 1, la matrice $\mathcal{C}(z)$ est inversible, de sorte que l'on peut résoudre le système linéaire

$$\mathcal{C}(z) \begin{pmatrix} v_1(z) \\ \vdots \\ v_q(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On pose alors

$$u(z) = v_1(z) + \dots + v_q(z).$$

La fonction u est une fraction rationnelle, sans pôle dans le disque unité fermé, on peut donc la décomposer en série entière,

$$u(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots,$$

et les coefficients c_n sont alors ceux du signal fondamental de P !

Ce fait se généralise au cas d'une infinité d'énergies caractéristiques. Le processus de reconstruction est toujours de la même nature : on inverse des matrices de plus en plus grandes, et on passe à la limite lorsque la taille de la matrice tend vers l'infini.

La fonction $u(z)$ est appelée *fonction de transfert* du système. Dans le cas d'un nombre fini d'énergies caractéristiques, c'est une fraction rationnelle, mais dans le cas général toute fonction admettant par exemple un développement en série entière au voisinage du disque unité fermé, est la fonction de transfert d'un système automatique. Les coefficients c_n du développement peuvent aussi s'interpréter comme les coefficients de Fourier de la fonction 2π -périodique $u(e^{ix})$.

Lorsque le procédé n'est pas générique, c'est-à-dire s'il existe des répétitions dans la liste des énergies caractéristiques, une formule du même type subsiste, mais la notion d'angle doit être remplacée par une notion plus générale, celle de produit de Blaschke.

4. Évolutions linéaires et non linéaires

Un grand nombre de phénomènes sont décrits par ce que l'on appelle une équation d'évolution. Le principe en est simple : supposons que l'état d'un système physique, biologique, économique, etc. soit décrit par une grandeur u . Le but est de décrire comment varie la grandeur u au cours du temps. Dans

de très nombreux cas, cette description se fait à travers un problème mathématique, dont l'énoncé est du type suivant : la dérivée de u par rapport au temps est une quantité $X(u)$:

$$\frac{du}{dt} = X(u).$$

Comme on peut s'y attendre, la difficulté de ce problème dépend beaucoup de l'expression de la quantité $X(u)$ en fonction de u . Pour simplifier un peu la discussion, nous supposons que l'évolution obéit au principe d'invariance temporelle : l'évolution ne dépend pas du choix de l'origine des temps. Voyons quelques exemples.

4.1 – Le principe de superposition

On dit que l'évolution ci-dessus obéit au *principe de superposition*, ou principe de linéarité, si, chaque fois que u et v sont deux solutions du problème ci-dessus, alors $u + v$ l'est aussi, et, pour tout nombre λ , λu l'est aussi.

Supposons d'abord que l'état du système soit décrit par une seule valeur. Alors on montre que $X(u)$ est proportionnel à u ,

$$X(u) = a u$$

où a est une constante complexe, et il est facile de résoudre ce problème d'évolution,

$$\frac{du}{dt} = a u$$

en fonction de la valeur initiale de u :

$$u(t) = e^{ta} u(0).$$

Si l'état est décrit par un ensemble fini de valeurs, on montre qu'il est possible, à l'aide de la réduction des matrices, de se ramener essentiellement à l'équation précédente⁶.

Mais souvent l'état d'un système ne se limite pas à la donnée d'une seule valeur, ni même d'un nombre fini de valeurs : il est décrit par une fonction dépendant elle-même d'une ou de plusieurs autres variables. Par exemple, la température en chaque point d'un conducteur thermique, la vitesse de vibration en tout point d'une membrane, la densité de population en tout point d'un territoire, ... Pour illustrer cette situation, plaçons-nous dans un cadre simple, où u est une fonction d'une variable réelle x , qui est périodique de période 2π . La quantité $X(u)$

est alors elle aussi une fonction 2π -périodique de x , qui peut être très compliquée. Supposons en outre l'invariance spatiale du problème : l'évolution ne dépend pas du choix du point d'origine de la variable x . Alors il existe à nouveau un moyen de se ramener au cas où $X(u) = a u$. Il suffit de remplacer la fonction u par la suite $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier. On montre en effet que chaque coefficient de Fourier c_k vérifie une équation du type

$$\frac{dc_k}{dt} = a_k c_k$$

où a_k est une constante. C'est d'ailleurs pour résoudre un problème de ce type – l'équation de la chaleur – que Joseph Fourier a créé ce changement d'inconnues au début du XIX^e siècle.

4.2 – Dynamiques non linéaires et transition vers les hautes fréquences

Même si l'on se restreint aux évolutions obéissant aux principes d'invariances temporelle et spatiale, le cadre des évolutions non linéaires est considérablement plus vaste que celui des évolutions linéaires, et offre à ce jour de très nombreux problèmes ouverts.

Parmi eux, le comportement de la solution u lorsque le temps devient très grand est une question importante et délicate. Supposons pour simplifier que l'évolution se fasse à énergie constante, c'est-à-dire que la quantité

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(t, x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(t)|^2$$

ne dépende pas du temps t . Dans le cas linéaire précédemment décrit, cette situation entraîne que le module de chaque coefficient de Fourier c_k reste constant au cours du temps, seul l'argument change, à vitesse constante. Dans le cas non linéaire, c'est loin d'être vrai. Il peut arriver que, bien que la somme des $|c_k|^2$ reste constante, les termes de cette somme évoluent au cours du temps, en se concentrant par exemple sur les indices k très grands. Ce phénomène, appelé une *transition vers les hautes fréquences*, joue un rôle important dans de nombreuses applications : mécanique des fluides, optique non linéaire, mécanique quantique... [4] On le détecte en général en observant que la solution u présente de fortes oscillations dans la variable spatiale x pour de grandes valeurs

6. Quitte à s'autoriser à dériver par rapport au paramètre a , pour prendre en compte d'éventuels blocs de Jordan.

du temps. Voici un exemple très élémentaire. Considérons le problème

$$\frac{du}{dt} = -i|u|^2 u.$$

Alors on vérifie aisément que la fonction $|u|^2$ reste constante au cours du temps, de sorte que la solution de valeur initiale u_0 est donnée par la formule

$$u(t) = u_0 e^{-it|u_0|^2}.$$

Supposons maintenant que u_0 et u dépendent aussi de la variable spatiale x , de façon 2π périodique. Alors la solution

$$u(t, x) = u_0(x) e^{-it|u_0(x)|^2},$$

présente de fortes oscillations lorsque t est grand. En effet, pourvu que $|u_0|^2$ ne soit pas une constante, la formule ci-dessus montre que le module de la dérivée en x de $u(t, x)$ est de taille t lorsque t est très grand. Ce phénomène, que l'on a réussi à mettre en évidence ici grâce à une formule explicite, est en général très difficile à détecter, précisément à cause de l'absence de formules explicites. Nous allons toutefois décrire un exemple où une modification du terme $X(u) = -i|u|^2 u$ entraîne des transitions beaucoup plus fortes vers les hautes fréquences.

5. Le cas de l'équation de Szegő

Reprenons l'équation

$$\frac{du}{dt} = -i|u|^2 u,$$

et supposons que la donnée initiale u_0 a des coefficients de Fourier c_k nuls pour tout $k < 0$. Il est facile de voir que cette propriété n'est pas conservée au cours du temps, aussi allons-nous modifier le terme non linéaire $X(u)$ pour assurer qu'elle le soit. Remplaçons donc la fonction $-i|u|^2 u$ par la fonction $\Pi(-i|u|^2 u)$, égale à la somme des coefficients de Fourier de $-i|u|^2 u$ correspondant à $k \geq 0$. Il s'agit d'un exemple très simple de *filtrage* du terme non linéaire $-i|u|^2 u$, et on peut montrer que cette évolution, appelée équation de Szegő cubique⁷ est un modèle simplifié de propagation d'onde non linéaire. Que devient alors le phénomène de transition vers les hautes fréquences pour cette nouvelle évolution ?

7. En hommage au mathématicien hongrois Gabor Szegő, qui a étudié certaines propriétés du projecteur Π .

8. Voir par exemple l'ouvrage de Michèle Audin [1].

5.1 – Le rôle inattendu des systèmes automatiques

Cette fois, la formule explicite ci-dessus n'est bien sûr plus valable, et il est difficile de deviner comment on pourrait la modifier pour obtenir la solution du nouveau problème. Par ailleurs, du fait que l'équation est non linéaire, l'équation sur les coefficients de Fourier c_k semble également inaccessible à la résolution. Nous allons résoudre cette difficulté en faisant appel aux systèmes automatiques. Considérons une solution u de l'équation de Szegő, et, à chaque instant t , le procédé $P(t)$ dont $u(t)$ est la fonction de transfert. En d'autres termes, le signal fondamental de $P(t)$ est la suite $c_0(t), c_1(t), c_2(t), \dots$ des coefficients de Fourier de $u(t)$.

On observe alors une surprenante propriété : chacune des énergies caractéristiques du procédé $P(t)$ et de son procédé décalé $P'(t)$ est une fonction constante de t ! En outre, les angles correspondants évoluent à vitesse constante, égale à cette énergie caractéristique, exactement comme les arguments des coefficients de Fourier de la solution d'une équation linéaire ! Il est donc possible de résoudre explicitement l'équation de Szegő, selon la procédure suivante :

1. Déterminer les énergies caractéristiques du procédé P_0 défini par la condition initiale u_0 , et de son procédé décalé, et les angles associés.
2. Faire évoluer les angles, pendant le temps t , à vitesse constante égale à l'énergie caractéristique.
3. Reconstruire la fonction de transfert $u(t)$ selon le principe décrit au paragraphe 3.

5.2 – Une incursion des systèmes hamiltoniens

À l'intention du lecteur possédant quelques notions de la théorie des systèmes hamiltoniens⁸, voici une interprétation de ces propriétés. Pour tout entier $q \geq 1$, désignons par \mathcal{Y}_{2q} l'ensemble des fractions rationnelles de la forme

$$u(z) = \frac{A(z)}{B(z)},$$

où B est un polynôme de degré q , sans zéro dans

le disque unité fermé, tel que $B(0) = 1$, et où A est un polynôme de degré au plus $q - 1$, premier à B . Il est facile de voir que u est caractérisé par $2q$ paramètres complexes, évoluant dans un ouvert de \mathbb{C}^{2q} . L'ensemble \mathcal{V}_{2q} est donc naturellement muni d'une structure de variété complexe de dimension $2q$, l'espace tangent $T_u(\mathcal{V}_{2q})$ en $u = A/B$ s'identifiant à l'espace des fractions rationnelles de dénominateur B^2 , et de numérateur de degré au plus $2q - 1$. Introduisons alors sur \mathcal{V}_{2q} la forme symplectique

$$\omega_u(h_1, h_2) = \text{Im} \int_0^{2\pi} h_1(e^{ix}) \bar{h}_2(e^{ix}) \frac{dx}{2\pi}, h_1, h_2 \in T_u(\mathcal{V}_{2q}),$$

et la fonction

$$H(u) = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} |u(e^{ix})|^4 dx.$$

Alors on vérifie que le flot défini par l'équation de Szegő laisse invariant la variété \mathcal{V}_{2q} , et n'est autre que le flot hamiltonien d'énergie H sur \mathcal{V}_{2q} .

En outre, les éléments de \mathcal{V}_{2q} définissant un procédé générique forment un ouvert dense de \mathcal{V}_{2q} , invariant par le flot hamiltonien, avec les formules

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q (de_j \wedge d\psi_j - de'_j \wedge d\psi'_j)$$

$$H = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^q (e_j^2 - (e'_j)^2).$$

En d'autres termes, l'équation de Szegő est un système hamiltonien intégrable au sens de Liouville sur \mathcal{V}_{2q} , les énergies caractéristiques et les angles associés fournissant un système de variables action-angle au sens du théorème de Liouville-Arnold. L'évolution est alors donnée par

$$\dot{e}_j = 0, \dot{\psi}_j = e_j, \dot{e}'_j = 0, \dot{\psi}'_j = e'_j,$$

ce qui correspond à la description ci-dessus.

5.3 – Trajectoires turbulentes

Les formules explicites obtenues par cette procédure, bien que considérablement plus compliquées que dans le cas d'une évolution linéaire, permettent de montrer un phénomène de transition vers les hautes fréquences : pour la plupart⁹ des données initiales u_0 , on peut trouver une suite de temps t arbitrairement grands tels que la taille de la dérivée

en x de la solution $u(t)$ soit plus grande que toute puissance de t !! En outre, pour les mêmes solutions, il existe une autre suite de temps tendant vers l'infini pour lesquels la solution u converge vers la donnée initiale u_0 avec des dérivées uniformément bornées. On a donc mis en évidence un phénomène de cascades directes et inverses d'énergie, selon la terminologie employée en théorie de la turbulence [4], où l'énergie de la solution se concentre de façon intermittente sur les hautes et les basses fréquences.

Le principe de construction, détaillé dans [3], est le suivant : on choisit des énergies caractéristiques qui se rapprochent très vite les unes des autres en tendant vers 0, de sorte que les formules ci-dessus deviennent singulières lorsque les angles correspondants sont en phase.

Voici un exemple simple montrant en quoi le rapprochement des énergies caractéristiques facilite la transition vers les hautes fréquences. Considérons la donnée initiale

$$u_0(z) = z,$$

dont la suite des coefficients de Fourier est $0, 1, 0, 0, \dots$. Le procédé P_0 a alors deux énergies caractéristiques, égales à 1, tandis que P'_0 a une seule énergie caractéristique, égale à 1. Alors on montre facilement que la solution au temps t est

$$u(t, z) = e^{-it} z,$$

de coefficients de Fourier

$$0, e^{-it}, 0, \dots$$

Introduisons maintenant un petit paramètre $\varepsilon > 0$, et considérons la nouvelle donnée initiale

$$u_{0,\varepsilon}(z) = z + \varepsilon,$$

dont la suite des coefficients de Fourier est $\varepsilon, 1, 0, 0, \dots$. Le procédé P_0 est alors générique, les énergies associées sont proches des précédentes, et les angles associés sont $0, \pi$ pour P_0 , 0 pour P'_0 . Alors la solution au temps t s'écrit sous la forme

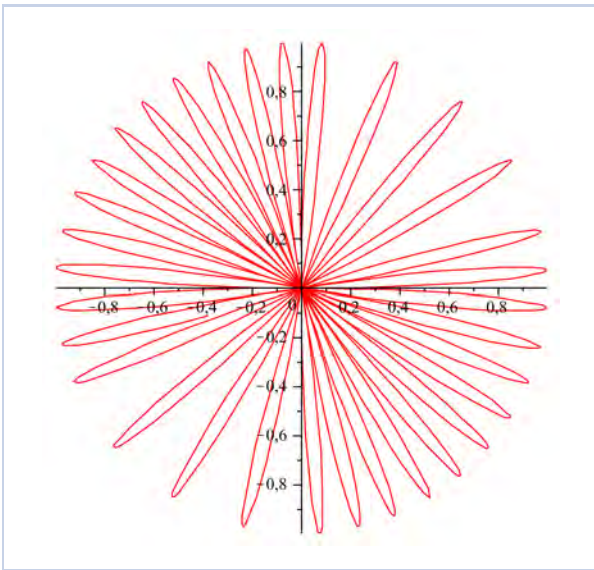
$$u(t, z) = \frac{a(t)z + b(t)}{1 - p(t)z},$$

de coefficients de Fourier

$$b(t), a(t) + b(t)p(t), a(t)p(t) + b(t)p(t)^2, \\ a(t)p(t)^2 + b(t)p(t)^3, \dots$$

9. Au sens de Baire.

où le nombre complexe $p(t)$ parcourt la trajectoire suivante dans le disque unité.



On constate que, pour certaines valeurs du

temps dont la première est de l'ordre de $1/\varepsilon$, le point $p(t)$ se rapproche du cercle unité à une distance de l'ordre de ε^2 , ce qui suffit à créer de très fortes oscillations de la solution dans la variable spatiale. Puis $p(t)$ revient à sa valeur initiale 0.

6. Conclusion

On a donc montré, à partir d'un exemple, comment certaines évolutions non linéaires peuvent être décrites en recourant à des transformations apparemment très éloignées du contexte dans lequel ces équations sont posées, et qui jouent le même rôle que celui de la décomposition de Fourier dans le cas des équations linéaires. On dit que de telles évolutions sont *intégrables*. Il existe un petit nombre d'exemples connus de telles transformations, mais elles permettent d'explorer des phénomènes encore très mystérieux comme la transition vers les hautes fréquences, que l'on peut espérer dans un second temps mettre en évidence pour une plus grande classe d'évolutions.

Références

- [1] M. AUDIN. *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*. Cours Spécialisés. Société Mathématique de France ; EDP Sciences, 2001.
- [2] P. GÉRARD et S. GRELLIER. « Invariant Tori for the cubic Szegő equation ». *Invent. Math.* **187** (2012), p. 707–754. ISSN : 0020-9910.
- [3] S. GRELLIER et P. GÉRARD. « The cubic Szegő equation and Hankel operators ». *prépublication, arXiv: 1508.06814 [math.AP]* (2015).
- [4] S. NAZARENKO. *Wave turbulence*. Lecture Notes in Physics. Springer, Heidelberg, 2011.
- [5] V. V. PELLER. *Hankel operators and their applications*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2003.



Patrick GÉRARD

Université Paris-Sud, laboratoire de mathématiques d'Orsay, CNRS, UMR 8628.
patrick.gerard@math.u-psud.fr

Patrick Gérard est professeur. Sa spécialité est l'étude des équations aux dérivées partielles, en particulier l'étude des évolutions hamiltoniennes dispersives, des phénomènes à haute fréquence ainsi que l'analyse des systèmes intégrables de dimension infinie.

L'auteur remercie Thomas Alazard pour ses précieux conseils et sa relecture attentive.

Limite thermodynamique et théorie du potentiel

• S. BOUCKSOM

Introduction

Comme chacun sait, un système physique à l'équilibre cherche à minimiser son énergie. En présence d'un grand nombre de particules en interaction, la mécanique statistique nous amène cependant à nuancer ce principe, en restreignant sa validité au cas où la température est nulle. À température non nulle, un mouvement désordonné des particules apparaît, qui entre en compétition avec le principe de minimisation de l'énergie. La quantité à minimiser devient alors l'énergie libre, c'est-à-dire l'énergie restant après soustraction de l'entropie, laquelle rend compte à l'échelle macroscopique de l'aléa introduit.

Le but de ce texte est d'ébaucher le formalisme mathématique utilisé pour décrire rigoureusement ces phénomènes, en les illustrant dans le cas classique de l'électrostatique. Commençons par cette dernière. Le champ électrique engendré par une particule ponctuelle placée en un point $y \in \mathbb{R}^d$ et de charge $e = -1$ dérive d'un potentiel $V_y(x)$ qui satisfait à l'équation de Poisson $\Delta_x V_y(x) = \delta_y$, avec Δ_x le laplacien (des analystes, i.e. défini négatif) et δ_y la masse de Dirac en y .

Il faut imposer une condition au bord pour assurer l'unicité de V_y , et le cadre le plus réaliste consiste sans doute à travailler dans un domaine borné $\Omega \Subset \mathbb{R}^d$ dont le bord est mis à la masse, de sorte que $V_y|_{\partial\Omega} = 0$. Par définition, on obtient alors $V_y(x) = G_\Omega(x, y)$, la fonction de Green de Ω .

En théorie du potentiel classique, on idéalise cette situation en travaillant avec la fonction de Green $G_d(x, y)$ de \mathbb{R}^d , i.e. l'unique solution de $\Delta_x G_d(x, y) = \delta_y$ invariante par translation, explicitement donnée par

$$G_d(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x-y| & \text{si } d = 2 \\ -c_d |x-y|^{2-d} & \text{si } d \geq 3, \end{cases}$$

avec $1/c_d = (d-2)\text{Vol}(S^{d-1})$. Pour $d \geq 3$, ceci revient donc à une mise à la masse à l'infini.

Deux particules identiques x, y de même charge $e = -1$ se repoussent mutuellement en cherchant à diminuer l'énergie d'interaction $E_2(x, y) = -G_d(x, y)$. On modélise l'interaction d'une configuration de N particules x_1, \dots, x_N en moyennant les contributions de toutes les paires (« champ moyen »), i.e.

$$E_N(x_1, \dots, x_N) = \binom{N}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq N} E_2(x_i, x_j). \quad (1)$$

Si l'on cantonne ces particules à un compact $X \subset \mathbb{R}^d$, qu'on pense comme un condensateur sur lequel nos N particules se meuvent librement, celles-ci s'éloigneront de façon à minimiser l'énergie E_N , et la position à l'équilibre sera donc donnée par une configuration $P = (x_1, \dots, x_N) \in X^N$ telle que $E_N(P) = \inf_{X^N} E_N$.

Ainsi définies, les configurations à l'équilibre sont loin d'être uniques en général. Fait remarquable, l'unicité est cependant restaurée asymptotiquement lorsque N tend vers l'infini. Plus précisément, une « distribution continue » de charges sur X est décrite par une mesure de probabilité μ , dont l'énergie est donnée par

$$E(\mu) = \iint E_2(x, y) \mu(dx) \mu(dy).$$

L'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des mesures de probabilité sur X est compact pour la topologie faible, et la fonctionnelle $E : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue inférieurement (sci) par semi-continuité de E_2 . Un point-clé non trivial de la théorie du potentiel est que E est de plus *strictement convexe*.

Il résulte de ces propriétés la dichotomie suivante. Si $E(\mu) = +\infty$ pour toute mesure $\mu \in \mathcal{P}(X)$, on dit que X est *polaire*, i.e. négligeable¹ du point de vue de la théorie du potentiel dans \mathbb{R}^d . Sinon,

1. Un tel ensemble est en particulier de mesure de Lebesgue nulle, et même de dimension de Hausdorff au plus $d-2$.

l'énergie à l'équilibre $\inf_{\mu \in \mathcal{P}(X)} E(\mu)$ est atteinte en une unique mesure μ_{eq} , la *mesure d'équilibre* de X .

Comme on le verra, l'énergie à l'équilibre « microscopique » $\inf_{X^N} E_N$ tend vers l'énergie à l'équilibre « macroscopique » $\inf_{\mathcal{P}(X)} E$, et l'unicité asymptotique évoquée ci-dessus signifie que toute suite de configurations $P_N \in X^N$ minimisant E_N s'équ répartit sur la mesure d'équilibre μ_{eq} lorsque $N \rightarrow \infty$. En d'autres termes, on a convergence faible $\delta_N(P_N) \rightarrow \mu_{\text{eq}}$, avec $\delta_N : X^N \rightarrow \mathcal{P}(X)$ l'application *mesure empirique*, qui associe à une configuration $P = (x_1, \dots, x_N) \in X^N$ la mesure de probabilité discrète correspondante

$$\delta_N(P) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}. \quad (2)$$

S'il est naturel de considérer $(\mathcal{P}(X), E)$ comme la limite de (X^N, E_N) via δ_N , la signification précise de cette convergence n'est pas immédiate. En particulier, on notera que $E \circ \delta_N \equiv +\infty$! L'un des points de ce texte est de proposer une définition de convergence dans un contexte général, que l'on peut penser comme un cas limite (température nulle) de la théorie probabiliste des grandes déviations.

Introduisons maintenant de l'aléa dans le modèle précédent. On se donne une mesure de probabilité de référence $\mu_0 \in \mathcal{P}$ d'énergie $E(\mu_0)$ finie, et on considère une configuration aléatoire $P_N \in X^N$ formée de N particules $x_1, \dots, x_N \in X$ indépendantes et de même loi μ_0 , de sorte que P_N est de loi μ_0^N . Lorsque ces particules interagissent, cet aléa entre en compétition avec le principe de minimisation de l'énergie ; à l'équilibre, la loi de P_N est modifiée pour se concentrer autour des minima de E_N , avec d'autant plus de vigueur que la température T diminue. Comme nous l'enseigne la mécanique statistique, cette nouvelle loi est donnée par la *mesure de Gibbs*

$$\gamma_{\beta, N} := \frac{1}{Z_{\beta, N}} e^{-\beta N E_N} \mu_0^N,$$

où $\beta = T^{-1}$ est la température inverse et le facteur de normalisation $Z_{\beta, N} = \int_{X^N} e^{-\beta N E_N} \mu_0^N$, appelé *fonction de partition*, garantit que $\gamma_{\beta, N}$ est une mesure de probabilité.

On verra qu'on a alors équirépartition d'une configuration typique $P_N \in X^N$ de loi $\gamma_{\beta, N}$ sur une mesure d'équilibre μ_β , au sens où la suite de mesures empiriques $\delta_N(P_N)$ converge en loi vers la mesure déterministe μ_β . La mesure μ_β est caractérisée

comme l'unique minimiseur dans $\mathcal{P}(X)$ de l'énergie libre

$$E(\mu) + \beta^{-1} H(\mu | \mu_0),$$

avec $H(\mu | \mu_0) \in [0, +\infty]$ l'entropie relative de μ par rapport à μ_0 , définie par

$$H(\mu | \mu_0) = \begin{cases} \int (f \ln f) \mu_0 & \text{si } \mu = f \mu_0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus, μ_β est elle-même une mesure de Gibbs, de la forme

$$\mu_\beta = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta U} \mu_0$$

où U est solution de l'équation « champ moyen de type Liouville »

$$-\frac{1}{2} \Delta U = \frac{e^{-\beta U} \mu_0}{\int e^{-\beta U} \mu_0}.$$

1. Entropie et grandes déviations

Le second principe de la thermodynamique a trait à l'existence de l'entropie S , fonction d'état maximisée à l'équilibre étant données les contraintes macroscopiques imposées au système. La célèbre formule de Boltzmann énonce que $S = k \ln \Omega$, où k est la constante de Boltzmann et Ω le nombre d'états microscopiques compatibles avec les contraintes macroscopiques. Pour faire le lien avec le second principe, il faut en fait comprendre cette formule à la « limite thermodynamique », i.e. lorsque le nombre N de particules en présence tend vers l'infini.

Afin de formuler ceci de façon plus précise, considérons un système physique dont les états sont paramétrés par les points d'un espace métrique \mathcal{X} , supposé *compact* pour simplifier. On représente les contraintes imposées au système par un sous-ensemble (borélien) $B \subset \mathcal{X}$, et le nombre d'états microscopiques correspondant par $\Gamma(B)$, avec Γ une mesure (de Radon) positive sur \mathcal{X} . On peut alors justifier comme suit le second principe à partir de la formule de Boltzmann.

En posant $c(B) := k \ln \Gamma(B)$, on définit une *capacité*, entendue ici comme une fonction $B \mapsto c(B) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ définie sur les boréliens qui est croissante, continue le long des suites croissantes, et *régulière*² au sens où

2. On devrait plutôt dire que $B \mapsto \exp c(B) \in [0, +\infty]$ est une précapacité, et le théorème de capacitabilité de Choquet implique de façon générale que la régularité intérieure résulte de la régularité extérieure, \mathcal{X} étant compact.

$$\sup_{K \text{ compact } \subset B} c(K) = c(B) = \inf_{U \text{ ouvert } \supset B} c(U)$$

pour tout borélien B . À la différence d'une mesure, une capacité n'est pas nécessairement sous-additive, mais notons que la capacité que nous considérons satisfait à

$$c(B_1 \cup B_2) \leq \max(c(B_1), c(B_2)) + k \ln 2 \quad (3)$$

pour tout couple de boréliens $B_1, B_2 \subset \mathcal{X}$.

En physique, la constante de Boltzmann s'écrit $k = R/N$ où R est la constante des gaz parfaits et $N \simeq 6,022 \cdot 10^{23}$ est la constante d'Avogadro, i.e. le nombre de particules dans une mole de matière. Le passage à la limite thermodynamique consiste à faire tendre N vers l'infini; on est donc amené à travailler avec une suite Γ_N de mesures positives et des capacités associées de la forme

$$c_N(B) = r_N^{-1} \ln \Gamma_N(B) \quad (4)$$

avec $r_N \rightarrow +\infty$. Généralisant le cas des mesures, on dira qu'une suite de capacités c_N converge faiblement vers une capacité c si

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_N c_N(K) &\leq c(K) \text{ pour tout compact } K; \\ \underline{\lim}_N c_N(U) &\geq c(U) \text{ pour tout ouvert } U. \end{aligned} \quad (5)$$

En utilisant la régularité de la limite c , on voit facilement que celle-ci est unique. Pour c_N de la forme (4), l'inégalité (3) implique que la limite c satisfait à

$$c(B_1 \cup B_2) = \max(c(B_1), c(B_2)) \quad (6)$$

pour B_1, B_2 boréliens. Par régularité extérieure de c , la fonction $S(x) := c(\{x\})$ est semi-continue supérieurement. En utilisant (6), on vérifie que $c(K) = \sup_K S$ pour tout compact. Par régularité intérieure, on en déduit $c(B) = \sup_B S$ pour tout borélien, en accord avec le second principe de la thermodynamique.

On peut en outre décrire plus explicitement la valeur de S en $x \in \mathcal{X}$ comme

$$S(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_N c_N(B(x, \varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\lim}_N c_N(B(x, \varepsilon)).$$

Dans le contexte probabiliste de la *théorie des grandes déviations*, formalisée par Varadhan, on considère plutôt la fonction sci $I := -S$. L'existence d'une limite faible $c(B) = -\inf_B I$ au sens de (5) pour $c_N(B) = r_N^{-1} \ln \Gamma_N(B)$ signifie par définition que la suite de mesures Γ_N satisfait à un *principe de grandes déviations* à vitesse r_N et fonction de taux I . Le livre [8] propose une excellente introduction à

cette théorie. On consultera aussi à profit la référence [7], très complète.

Si chaque Γ_N est une mesure de probabilité, définissant un état aléatoire x_N de \mathcal{X} , alors $\inf_{\mathcal{X}} I = \lim_N c_N(\mathcal{X}) = 0$. Le contenu essentiel du principe de grandes déviations est que les états aléatoires x_N se concentrent à vitesse exponentielle vers les minima de I , au sens où tout voisinage U des minima de I satisfait à

$$\mathbb{P}(x_N \notin U) := \Gamma_N(\mathcal{X} \setminus U) = O(e^{-c r_N}) \quad (7)$$

avec $c > 0$. En particulier, si I est minimisée en un unique point $x_{\text{eq}} \in \mathcal{X}$ (l'état d'équilibre), alors les états aléatoires x_N convergent en loi vers l'état déterministe x_{eq} .

2. Le point de vue fonctionnel

Considérons une suite de capacités c_N sur \mathcal{X} de l'un des deux types suivants :

- (a) $c_N(B) = r_N^{-1} \ln \Gamma_N(B)$ avec Γ_N mesure positive sur \mathcal{X} et $r_N \rightarrow +\infty$;
- (b) $c_N(B) = -\inf_B I_N$ avec I_N sci sur \mathcal{X} .

Comme on l'a vu plus haut, si c_N converge faiblement vers une capacité c , alors celle-ci vérifie (6), donc est nécessairement de la forme $c(B) = -\inf_B I$ avec I sci sur \mathcal{X} . Dans le cas (a), ceci correspond à un principe de grandes déviations pour Γ_N .

Dans le cas (b), on dira que la suite de fonctions sci I_N converge faiblement vers I . D'après la première condition de (5), on a alors en particulier $\underline{\lim}_N \inf_K I_N \geq \inf_K I$ pour tout compact K , propriété dont on peut vérifier qu'elle équivaut à $\underline{\lim}_N I_N(x_N) \geq I(x)$ pour toute suite convergente $x_N \rightarrow x$. En utilisant ceci, on obtient :

Proposition 1. *Supposons que c_N converge faiblement vers une capacité $c(B) = -\inf_B I$, et que I soit minimisée en un unique point $x_{\text{eq}} \in \mathcal{X}$. Dans les cas (a) et (b), on a alors respectivement :*

- (a) *l'état aléatoire $x_N \in \mathcal{X}$ de loi $\tilde{\Gamma}_N := \Gamma_N / \Gamma_N(\mathcal{X})$ converge en loi vers l'état déterministe x_{eq} ;*
- (b) *toute suite $x_N \in \mathcal{X}$ telle que $I_N(x_N) = \inf_{\mathcal{X}} I_N$ converge vers x_{eq} .*

Définissons ensuite des fonctionnelles $\Lambda_N : C^0(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{R}$ en posant respectivement pour $\Phi \in C^0(\mathcal{X})$

- (a) $\Lambda_N(\Phi) = -r_N^{-1} \ln \int e^{-r_N \Phi} d\Gamma_N$;
- (b) $\Lambda_N(\Phi) = \inf_{\mathcal{X}} (I_N + \Phi)$.

Dans les deux cas, Λ_N est concave sur $C^0(\mathcal{X})$ (par l'inégalité de Hölder, dans le cas (a)); elle est aussi clairement croissante et satisfait à $\Lambda_N(\Phi + c) = \Lambda_N(\Phi) + c$ pour $c \in \mathbb{R}$, ces deux propriétés impliquant que Λ_N est 1-lipschitzienne.

Le résultat suivant est dû à Bryc et Varadhan dans le cas (a) (cf. [7, Chapitre 4]), et s'adapte aisément au cas (b).

Proposition 2. Une suite de capacités c_N de la forme (a) ou (b) converge faiblement vers une capacité c si et seulement si la suite Λ_N converge simplement vers une fonctionnelle $\Lambda : C^0(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{R}$.

De plus, la fonction sci I définie par $I(x) := \sup_{\Phi} (\Lambda(\Phi) - \Phi(x))$ satisfait alors à $c(B) = -\inf_B I$ et $\Lambda(\Phi) = \inf_{\mathcal{X}} (I + \Phi)$.

Supposons maintenant que \mathcal{X} soit réalisé comme un compact du dual topologique V^* d'un espace de Banach V , muni de la topologie \star -faible. En pratique pour nous, \mathcal{X} sera l'espace des mesures de probabilité sur un autre espace métrique compact X , et donc $V = C^0(X)$. On s'intéresse alors à la stricte convexité de I , propriété qui a le bon goût de garantir l'unicité d'un éventuel minimiseur, comme dans la proposition 1. On introduit pour cela sa transformée de Legendre concave $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ en posant pour $\phi \in V$

$$F(\phi) := \inf_{x \in \mathcal{X}} (I(x) + \langle \phi, x \rangle) \quad (8)$$

qui coïncide donc avec $\Lambda(\langle \phi, \cdot \rangle)$ avec Λ définie comme ci-dessus et $\langle \phi, \cdot \rangle \in C^0(\mathcal{X})$ la forme linéaire induite par ϕ . Un peu d'analyse convexe permet alors de montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) I est strictement convexe ;
- (ii) pour tout $\phi \in V$, l'infimum définissant $F(\phi)$ est atteint en un unique $x_{\phi} \in \mathcal{X}$;
- (iii) F est dérivable au sens de Gâteaux (i.e. en restriction à toute droite).

Lorsqu'elles sont satisfaites, la dérivée de F en ϕ est donnée par $x_{\phi} = \nabla F(\phi)$, et on reconstruit I via

$$I(x) = \sup_{\phi \in V} (F(\phi) - \langle \phi, x \rangle), \quad (9)$$

par dualité de Legendre. Ceci motive le théorème suivant, dû à Gärtner et Ellis dans le cas (a) (cf. [7, §4.5.3]), et s'adaptant à nouveau sans peine au cas (b).

Théorème 1. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) une suite de capacités c_N de la forme (a) ou (b) converge faiblement vers $c(B) = -\inf_B I$ avec I strictement convexe sur V^* ;
- (ii) la suite de transformées de Legendre concaves F_N définies par (8) admet une limite finie $F(\phi)$ pour tout $\phi \in V$, et F est dérivable au sens de Gâteaux sur V .

La fonction I est alors donnée par (9).

Comparé à la proposition 2 de Bryc-Varadhan, la condition imposée dans (ii) est plus faible, puisqu'elle ne demande la convergence de Λ_N que sur le sous-espace V^* des formes linéaires dans $C^0(\mathcal{X})$. Comme nous le verrons plus loin, cet énoncé fournit un moyen efficace d'établir un principe de grandes déviations.

3. Particules en interaction

On s'intéresse ici à un système formé d'un grand nombre de particules identiques, et à sa limite macroscopique.

Pour formaliser ceci, on se donne un espace métrique compact X , l'espace des états internes de notre particule type. Dans le cas de l'électrostatique, X est un compact de \mathbb{R}^d à l'intérieur duquel se meut librement une particule négativement chargée. On appelle les fonctions $\phi \in C^0(X)$ les *observables internes*.

Un état macroscopique du système est donné par une « distribution » de particules identiques, qu'on formalisera par un élément μ de l'espace $\mathcal{P} = \mathcal{P}(X)$ des mesures de probabilité sur X , appelé l'espace des états macroscopiques ; l'espace \mathcal{P} est lui-même métrique compact pour la convergence faible des mesures, et on pourra donc lui appliquer les considérations du §1.

On appellera *observable macroscopique* une fonction continue $\Phi \in C^0(\mathcal{P})$. Toute observable interne $\phi \in C^0(X)$ définit une observable macroscopique Φ par moyennisation, i.e. $\Phi(\mu) = \langle \phi, \mu \rangle$.

Un état microscopique de notre système est donné par une configuration de N particules identiques, donc un point $P = (x_1, \dots, x_N)$ de X^N . Tout état microscopique détermine un état macroscopique via l'application *mesure empirique* $\delta_N : X^N \rightarrow \mathcal{P}$ qui associe à $P = (x_1, \dots, x_N) \in X^N$ la mesure de probabi-

lité

$$\delta_N(P) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}.$$

On note que δ_N induit un homéomorphisme $X^N/S_N \simeq \delta_N(X^N)$, où le groupe symétrique S_N agit sur X^N par permutation des facteurs, et que la réunion des $\delta_N(X^N)$ est dense dans \mathcal{P} .

Pour chaque N , on modélise les interactions entre N points par une *énergie d'interaction microscopique* E_N , qui est par définition une fonction symétrique sci $E_N : X^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Les configurations à l'équilibre sont celles qui minimisent E_N .

Exemple 1 (Champ moyen). Un modèle « champ moyen » consiste à se donner l'énergie d'interaction E_2 des paires de points de X , et à définir E_N en moyennant les contributions des paires de points comme dans (1).

Outre le cas de l'électrostatique mentionné dans l'introduction, on considère classiquement le potentiel de Riesz $E_2(x, y) = |x - y|^{-s}$, ou encore le potentiel « sphère dure de rayon r »

$$E_2(x, y) = \begin{cases} +\infty & \text{si } |x - y| \leq r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Tout ces modèles sont répulsifs, au sens où $E_2(x, x) = +\infty$. À l'opposé, un modèle attractif bien connu est celui de Curie-Weiss, approximation à champ moyen du modèle d'Ising d'interaction entre des spins. On a ici $X = \{-1, 1\}$, et l'énergie d'interaction de deux spins $\sigma, \sigma' \in X$ est donnée par $E_2(\sigma, \sigma') = -J\sigma\sigma'$ avec $J > 0$.

Plus généralement, on dira que l'interaction est d'ordre r si E_N est la moyenne des interactions entre r points, i.e.

$$E_N(x_1, \dots, x_N) = \binom{N}{r}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq N} E_r(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}). \quad (10)$$

On mentionnera plus loin le cas de la répulsion déterminantale, qui n'est pas d'ordre r en général.

Puisque E_N est symétrique par hypothèse, elle descend au quotient $X^N/S_N \simeq \delta_N(X^N)$. On peut donc la voir comme une fonction sci $\tilde{E}_N : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en posant $\tilde{E}_N \equiv +\infty$ sur $\mathcal{P} \setminus \delta_N(X^N)$.

On dira que E_N admet une *limite macroscopique* $E : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ si \tilde{E}_N converge faiblement vers E au sens du §2. Plus concrètement, ceci signifie donc

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_N \inf_{\delta_N^{-1}(U)} E_N &\leq \inf_U E \text{ pour tout ouvert } U \subset \mathcal{P}; \\ \underline{\lim}_N \inf_{\delta_N^{-1}(K)} E_N &\geq \inf_K E \text{ pour tout compact } K \subset \mathcal{P}, \end{aligned} \quad (11)$$

ou de façon équivalente (proposition 2)

$$\inf_{X^N} (E_N + \Phi \circ \delta_N) \rightarrow \inf_{\mathcal{P}} (E + \Phi)$$

pour toute observable macroscopique $\Phi \in C^0(\mathcal{P})$.

Lorsque E admet un unique minimiseur μ_{eq} , la proposition 1 entraîne que toute suite $P_N \in X^N$ minimisant E_N s'équirépartit sur μ_{eq} .

Ceci est en particulier le cas lorsque E_N admet une limite macroscopique E strictement convexe, ce qui, d'après le théorème 1, se produit si et seulement si les fonctionnelles concaves $F_N : C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$F_N(\phi) = \inf_{X^N} (E_N + \langle \phi, \delta_N \rangle)$$

convergent simplement vers une fonctionnelle Gâteaux dérivable $F : C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$, qui satisfait alors

$$E(\mu) = \sup_{\phi \in C^0(X)} (F(\phi) - \langle \phi, \mu \rangle).$$

Cela fournit un outil puissant pour démontrer l'existence d'une limite macroscopique lorsqu'on ne sait pas la deviner *a priori*, comme dans le cas de l'interaction déterminantale discutée plus bas.

Afin d'illustrer la notion de limite macroscopique, considérons le cas où l'énergie d'interaction microscopique est d'ordre r au sens de (10), ce qui couvre par exemple le cas de l'électrostatique classique discutée dans l'introduction. Il est naturel de s'attendre à ce que la limite macroscopique soit donnée par $E(\mu) := \langle E_r, \mu^r \rangle$. Ceci est confirmé par le résultat suivant.

Théorème 2. *Si E_N est d'ordre k , alors E_N admet comme limite macroscopique la fonction sci $E : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par $E(\mu) = \langle E_r, \mu^r \rangle$.*

Sans hypothèse supplémentaire, il arrive que $E \equiv +\infty$ sur \mathcal{P} . Pour l'énergie électrostatique considérée dans l'introduction, c'est le cas si X est polaire, par définition.

Preuve. On va montrer que $\inf_{X^N} (E_N + \Phi \circ \delta_N)$ converge vers $\inf_{\mathcal{P}} (E + \Phi)$ pour toute $\Phi \in C^0(\mathcal{P})$. En intégrant (10) contre μ^N avec $\mu \in \mathcal{P}$, on trouve

$$\langle E_N, \mu^N \rangle = \langle E_r, \mu^r \rangle = E(\mu)$$

pour tout N . D'un autre côté, la loi des grands nombres montre que la suite de mesures sur \mathcal{P} $(\delta_N)_* \mu^N$ converge faiblement vers la masse de Dirac en μ , i.e. $\langle \Phi \circ \delta_N, \mu^N \rangle \rightarrow \Phi(\mu)$. Puisque

$$\inf_{X^N} (E_N + \Phi \circ \delta_N) \leq \langle E_N + \Phi \circ \delta_N, \mu^N \rangle,$$

il en résulte que $\overline{\lim} \inf_{X^N} (E_N + \Phi \circ \delta_N) \leq E(\mu) + \Phi(\mu)$ pour tout $\mu \in \mathcal{P}$.

Considérons maintenant l'inégalité inverse. Puisque E_r est sci, elle coïncide avec le sup des fonctions $G \in C^0(X^r)$ symétriques telles que $G \leq E_r$. Pour tout $P = (x_1, \dots, x_N) \in X^N$ on a

$$E_N(x_1, \dots, x_N) \geq \binom{N}{r}^{-1} \sum_{i_1 < \dots < i_r} G(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}).$$

Par symétrie de G , on observe que

$$r! \sum_{i_1 < \dots < i_r} G(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) = N^k \langle G, \delta_N(P)^r \rangle + O(N^{r-1}).$$

Puisque $\binom{N}{r} \sim N^r/r!$, on en déduit

$$E_N(P) \geq \langle G, \delta_N(P)^k \rangle + O(N^{-1}), \quad (12)$$

où la constante dans le O dépend de G , mais pas de $P \in X^N$.

On choisit maintenant une suite $N_k \rightarrow +\infty$ telle que

$$\liminf_N \inf_{X^N} (E_N + \Phi) = \liminf_k \inf_{X^{N_k}} (E_{N_k} + \Phi)$$

et $P_k \in X^{N_k}$ minimisant $E_{N_k} + \Phi$. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que $\delta_{N_k}(P_k)$ admet une limite $\mu \in \mathcal{P}$. D'après (12), on a

$$\begin{aligned} \liminf_N \inf_{X^N} (E_N + \Phi) &\geq \liminf_k \left(\langle G, \delta_{N_k}(P_k)^r + \Phi(\delta_{N_k}(P_k)) \rangle + O(N_k^{-1}) \right) \\ &= \langle G, \mu^r \rangle + \Phi(\mu). \end{aligned}$$

En prenant le sup sur $G \leq E_r$, on conclut

$$\liminf_N \inf_{X^N} (E_N + \Phi) \geq \langle E_r, \mu^r \rangle + \Phi(\mu) \geq \inf_{\mathcal{P}} (E + \Phi).$$

□

4. Électrostatique dans \mathbb{R}^d et dans \mathbb{C}^n

On considère d'abord plus en détail le cas de l'électrostatique dans un compact $X \subset \mathbb{R}^d$, discuté dans l'introduction. Les interactions sont d'ordre $r = 2$, et $E_2(x, y) = -G_d(x, y)$, avec G_d la fonction de Green de \mathbb{R}^d . Le théorème 2 montre que la limite macroscopique de

$$E_N(x_1, \dots, x_N) = \binom{N}{2}^{-1} \sum_{i < j} E_2(x_i, x_j)$$

est donnée par l'énergie

$$E(\mu) = \iint E_2(x, y) \mu(dx) \mu(dy),$$

Un point essentiel de la théorie du potentiel est que E est *strictement convexe* sur les mesures de probabilité μ à support compact dans \mathbb{R}^d .

On dit que X est *polaire* si X ne porte aucune mesure μ d'énergie finie, ce qui équivaut donc à $\inf_{X^N} E_N \rightarrow +\infty$. Si X n'est pas polaire, la stricte convexité de E implique que celle-ci est minimisée par une unique mesure $\mu_{\text{eq}} \in \mathcal{P}(X)$, la *mesure d'équilibre* de X , qui décrit la distribution macroscopique des charges électriques sur X à l'équilibre, et sur laquelle s'équirépartit toute suite $P_N \in X^N$ de configurations minimisant E_N , d'après la proposition 1.

Afin de décrire la mesure d'équilibre, appelons *potentiel* une fonction sous-harmonique V sur \mathbb{R}^d telle que $V(x) \rightarrow 0$ (resp. $V(x) - \frac{1}{2\pi} \ln|x| \rightarrow 0$) à l'infini pour $d \geq 3$ (resp. $d = 2$). Une fonction harmonique et bornée sur \mathbb{R}^d étant constante, un potentiel V est uniquement déterminé par la mesure positive $\mu = \Delta V$, dont on montre qu'elle est automatiquement de masse 1 dans le cas $d = 2$. On dit que V est le potentiel de μ .

Réciproquement, toute mesure de probabilité μ à support compact dans \mathbb{R}^d admet un potentiel V_μ , donné par

$$V_\mu(x) = \int G_d(x, y) \mu(dy).$$

La mesure μ est d'énergie finie si et seulement si $V_\mu \in L^1(\mu)$, avec $E(\mu) = -\int V_\mu d\mu$.

On montre que le potentiel de la mesure d'équilibre μ_{eq} de $X \subset \mathbb{R}^d$ est l'unique potentiel V_{eq} qui est harmonique en dehors de X et constant q.p. sur X , q.p. étant une abréviation de « quasi-partout », i.e. en dehors d'un ensemble polaire. La mesure de probabilité $\mu_{\text{eq}} = \Delta V_{\text{eq}}$ ne chargeant pas de tels ensembles, la constante c telle que $V_{\text{eq}} = c$ q.p. sur X est donnée par

$$c = \int V_{\text{eq}} d\mu_{\text{eq}} = -E(\mu_{\text{eq}}) = -\inf_{\mathcal{P}(X)} E.$$

Pour $d \geq 3$, on considère plutôt la fonction super-harmonique $U_{\text{eq}} = c^{-1} V_{\text{eq}}$, qui est harmonique hors de X , vaut 1 q.p. sur X et 0 à l'infini, et on définit la *capacité* du condensateur X comme la charge totale

$$c(X) = -\int_X \Delta U_{\text{eq}} = 1 / \inf_{\mathcal{P}(X)} E.$$

Dans le cas $d = 2$, on définit le N -diamètre d'un compact $X \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ comme le maximum de la moyenne géométrique des distances entre N points de X , i.e.

$$d_N(X) := \sup_{(z_1, \dots, z_N) \in X^N} \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{2/N(N-1)},$$

le diamètre usuel de X étant donc $d_2(X)$. Une configuration $P = (z_1, \dots, z_N) \in X^N$ réalisant le sup de droite est appelée *configuration de Fekete*. Ces points jouent un rôle important en théorie de l'interpolation polynomiale, car les polynômes de Lagrange associés

$$P_i(z) = \prod_{j \neq i} (z - z_j) / \prod_{j \neq i} (z_i - z_j),$$

qui satisfont à $P_i(z_j) = \delta_{ij}$, sont de norme sup au plus 1 sur X .

On observe que $d_N(X) = e^{-2\pi \inf_{X^N} E_N}$, et que les configurations de Fekete sont celles qui minimisent l'énergie E_N sur X^N . La convergence de E_N vers E entraîne donc l'existence de la limite

$$d_\infty(X) = \lim_N d_N(X) = e^{-2\pi \inf_{\mathcal{P}(X)} E},$$

appelée *diamètre transfini* (ou capacité logarithmique) de X , ainsi que l'équirépartition des configurations de Fekete sur la mesure d'équilibre μ_{eq} .

On se tourne maintenant vers le cas de l'interaction déterminantale en n variables complexes. On note

$$N_k = \binom{n+k}{n} = \frac{k^n}{n!} + O(k^{n-1})$$

la dimension de l'espace des polynômes complexes en n variables et de degré au plus k , et on introduit le déterminant de Vandermonde généralisé

$$V_k(z_1, \dots, z_{N_k}) := \det(z_i^\alpha)_{\substack{1 \leq i \leq N_k \\ \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k}},$$

bien défini modulo ± 1 (choix d'un ordre pour les monômes). Pour un compact $X \subset \mathbb{C}^n$, on définit l'énergie d'interaction déterminantale $E_k : X^{N_k} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en posant

$$E_k = -\frac{1}{kN_k} \ln |V_k|^2.$$

En dimension $n = 1$, on a $N_k = k + 1$,

$$V_k(z_1, \dots, z_{N_k}) = \det(z_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq N_k} = \prod_{1 \leq i < j \leq N_k} (z_j - z_i),$$

et donc

$$E_k(z_1, \dots, z_{N_k}) = \frac{2}{N_k(N_k - 1)} \sum_{i < j} \ln |z_i - z_j|^{-1},$$

qui redonne le cas de l'électrostatique dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Les configurations (z_1, \dots, z_{N_k}) maximisant $|V_k|$ sur X^{N_k} sont à nouveau appelées *configurations de Fekete*, avec des polynômes de Lagrange associés

$$P_i(z) = \frac{V_k(z_1, \dots, z_{i-1}, z, z_{i+1}, \dots, z_{N_k})}{V_k(z_1, \dots, z_{N_k})}$$

de norme sup au plus 1 sur X . Dans les années 50, Leja introduit le k -diamètre

$$d_k(X) := \exp\left(-\inf_{X^{N_k}} E_k\right) = \sup_{z_i \in X} |V_k(z_1, \dots, z_{N_k})|^{2/kN_k}$$

et postule l'existence d'un diamètre transfini $d_\infty(X) = \lim_k d_k(X)$, démontrée par Zakharyuta dans les années 70 via un argument non trivial de sous-additivité.

On aimerait cependant aller plus loin et montrer l'existence d'une limite macroscopique E des E_N , comme dans le cas d'une variable complexe. La difficulté dans ce cas est qu'on ne peut plus deviner la forme de la limite, et l'approche suivie dans [5] consiste à travailler avec la transformée de Legendre concave

$$F_k(\phi) := \inf_{X^{N_k}} (E_k + \langle \phi, \delta_{N_k} \rangle)$$

$$= -\frac{1}{kN_k} \ln \sup_{z_i \in X} |V_k(z_1, \dots, z_{N_k})|^2 e^{-2k(\phi(z_1) + \dots + \phi(z_{N_k}))}.$$

En utilisant des résultats sur l'asymptotique des noyaux de Bergman et une bonne dose de théorie du pluripotentiel, on démontre l'existence d'une limite $F(\phi)$, Gâteaux dérivable. Le théorème 1 montre alors que la limite macroscopique E de E_N existe, et qu'elle est strictement convexe, donnée par

$$E(\mu) = \sup_{\phi \in C^0(X)} (F(\phi) - \langle \phi, \mu \rangle).$$

On obtient en particulier l'équirépartition des points de Fekete sur la mesure d'équilibre, établie dans [6].

Grâce à l'approche variationnelle pour l'opérateur de Monge-Ampère complexe développée dans [4], on peut donner de cette énergie pluri-complexe E la description suivante. Toute mesure $\mu \in \mathcal{P}(X)$ telle que $E(\mu) < +\infty$ s'écrit comme la mesure de Monge-Ampère complexe $\mu = (i\partial\bar{\partial}V_\mu)^n$ (en

un sens faible adéquat) d'une fonction plurisous-harmonique V_μ sur \mathbb{C}^n à croissance logarithmique, unique à une constante additive près ; on a alors

$$E(\mu) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j+1}{n+1} \int_{\mathbb{C}^n} i\partial(V_\mu - V_0) \wedge \bar{\partial}(V_\mu - V_0) \wedge (i\partial\bar{\partial}V_\mu)^j \wedge (i\partial\bar{\partial}V_0)^{n-j-1} - \langle V_0, \mu \rangle,$$

avec $V_0(z) = \max_i \ln^+ |z_i|$. On peut voir cette formule comme une version non-linéaire de la fonctionnelle de Dirichlet classique, et constater que la convergence de

$$E_k(z_1, \dots, z_{N_k}) = -\frac{1}{kN_k} \ln \left| \det(z_i^\alpha)_{1 \leq i \leq N_k, |\alpha| \leq k} \right|^2$$

vers $E(\mu)$ ne saute pas aux yeux !

5. Énergie libre et mesures de Gibbs

On résume ici quelques faits élémentaires du formalisme thermodynamique. On pourra par exemple consulter le chapitre 5 de [8] pour plus de détails.

Considérons comme au §1 un espace métrique compact \mathcal{X} paramétrant les états d'un système physique. On se donne une fonction d'énergie sci $U : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, de sorte que les états à l'équilibre sont les $x \in \mathcal{X}$ qui minimisent U .

Si l'on considère un état aléatoire $x \in \mathcal{X}$ de loi Γ_0 , l'aléa entre en compétition avec le principe de minimisation de l'énergie. À température inverse $\beta = T^{-1} > 0$ fixée, le *principe variationnel de Gibbs* nous dit qu'à l'équilibre, le système se place dans un nouvel état aléatoire, de loi Γ minimisant l'*énergie libre*

$$\langle U, \Gamma \rangle + \beta^{-1} H(\Gamma) \quad (13)$$

où $\langle U, \Gamma \rangle$ est l'*énergie moyenne* et $H(\Gamma) = H(\Gamma|\Gamma_0)$ est l'*entropie relative* de Γ par rapport à Γ_0 , définie par

$$H(\Gamma|\Gamma_0) = \begin{cases} \int (f \ln f) \Gamma_0 & \text{si } \Gamma = f\Gamma_0 \text{ absolument continue;} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'inégalité de Jensen implique que $H(\Gamma) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\Gamma = \Gamma_0$. L'entropie relative H est caractérisée comme la transformée de Legendre

$$H(\Gamma) = \sup_{\Phi \in C^0(\mathcal{X})} (\langle \Phi, \Gamma \rangle - L(\Phi)) \quad (14)$$

de la fonctionnelle convexe $L : C^0(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $L(\Phi) := \ln \int e^\Phi d\Gamma_0$, ce qui montre en particulier que $H : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow [0, +\infty]$ est sci et strictement convexe, L étant Gâteaux dérivable.

On vérifie facilement que l'énergie libre (13) admet un unique minimiseur sur $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, donné par la *mesure de Gibbs* (connue en mécanique statistique sous le nom de *statistique de Maxwell-Boltzmann* ou *ensemble canonique*)

$$\Gamma_\beta := \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta U} \Gamma_0,$$

où $Z_\beta = \int e^{-\beta U} \Gamma_0$ est un facteur de normalisation appelé *fonction de partition*. On a de plus

$$\inf_{\Gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{X})} (\langle U, \Gamma \rangle + \beta^{-1} H(\Gamma)) = -\beta^{-1} \ln Z_\beta. \quad (15)$$

Lorsque $\beta \rightarrow +\infty$ (i.e. $T \rightarrow 0$), la mesure de Gibbs Γ_β se concentre exponentiellement vite vers les minima de U via un principe de grandes déviations, et c'est donc l'ordre qui prédomine. Pour $\beta \rightarrow 0$, Γ_β converge vers l'aléa original Γ_0 , et c'est le désordre qui l'emporte.

6. Particules aléatoires en interaction

On se place maintenant dans le cadre du §3. On considère donc N particules identiques $P = (x_1, \dots, x_N) \in X^N$, qui interagissent via une énergie microscopique E_N , dont on suppose qu'elle admet une limite macroscopique $E : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ lorsque $N \rightarrow \infty$.

On soumet chaque particule à un aléa interne, de loi $\mu_0 \in \mathcal{P}(X)$. Comme on l'a vu au §5, l'état microscopique à l'équilibre à température inverse $\beta > 0$ est une configuration aléatoire $P_N \in X^N$ de loi donnée par la mesure de Gibbs

$$\gamma_{\beta, N} := \frac{1}{Z_{\beta, N}} e^{-\beta N E_N} \mu_0^N. \quad (16)$$

On espère alors montrer que la loi de la mesure empirique $\delta_N(P_N)$ se concentre exponentiellement vite vers les minima d'une fonctionnelle, qui jouera le rôle de l'énergie libre macroscopique.

D'après le §2, il suffit pour cela d'établir la convergence faible des capacités sur \mathcal{P} définies par

$$c_{\beta, N}(B) := \frac{1}{\beta N} \ln \int_{\delta_N^{-1}(B)} e^{-\beta N E_N} \mu_0^N,$$

ou, de façon équivalente (proposition 2), la convergence simple sur $C^0(\mathcal{P})$ des fonctionnelles

$$\Lambda_{\beta,N}(\Phi) := -\frac{1}{\beta N} \ln \int_{X^N} e^{-\beta N(E_N + \Phi \circ \delta_N)} \mu_0^N.$$

Exemple 2 (Théorème de Sanov). Il s'agit du cas sans interactions, i.e. $E_N = 0$. On peut supposer que $\beta = 1$, par homogénéité. Pour toute observable interne $\phi \in C^0(X)$, on a alors

$$\Lambda_{1,N}(\langle \phi, \cdot \rangle) = -\frac{1}{N} \ln \int_{X^N} e^{-(\phi(x_1) + \dots + \phi(x_N))} \mu_0^N = -\ln \int_X e^{-\phi} \mu_0,$$

qui est Gâteaux dérivable sur $C^0(X)$. Le théorème de Gärtner-Ellis 1 montre donc que la loi $(\delta_N)_*(\mu_0^N)$ satisfait à un principe de grandes déviations à vitesse N , de fonction de taux donnée par la transformée de Legendre

$$\sup_{\phi \in C^0(X)} \left(-\ln \int_X e^{-\phi} \mu_0 - \langle \phi, \mu \rangle \right) = H(\mu | \mu_0),$$

cf. (14). Ceci est l'énoncé du théorème de Sanov (cf. [8, §5.2]), qui nous dit en termes plus imagés que $e^{-NH(\mu | \mu_0)}$ donne la probabilité que la mesure empirique de N points $P_N = (x_1, \dots, x_N)$ i.i.d. de loi μ_0 soit proche de μ , rendant quantitative la convergence en loi des mesures empiriques $\delta_N(P_N)$ vers la mesure déterministe μ_0 , garantie par la loi des grands nombres.

Dans le cas avec interaction, on dispose du résultat général suivant, qui couvre en particulier le cas des interactions d'ordre r , d'après le théorème 2.

Théorème 3. *Supposons que l'énergie d'interaction microscopique E_N admet une limite macroscopique E , et que de plus l'énergie moyenne $\langle E_N, \mu^N \rangle$ converge vers $E(\mu)$ pour toute $\mu \in \mathcal{P}$. Pour toute mesure de référence μ_0 et toute température inverse $\beta > 0$, on a alors convergence*

$$\Lambda_{\beta,N}(\Phi) \rightarrow \inf_{\mathcal{P}} (E + \beta^{-1}H + \Phi)$$

pour chaque $\Phi \in C^0(\mathcal{P})$, avec $H(\mu) = H(\mu | \mu_0)$ l'entropie relative.

Preuve. On commence par observer que les hypothèses sont aussi vérifiées par $\tilde{E}_N := \beta E_N + \beta \Phi \circ \delta_N$ et $\tilde{E} := \beta E + \beta \Phi$. On peut donc alléger les notations en supposant que $\beta = 1$ et $\Phi = 0$, et on cherche à montrer que la fonction de partition

$$Z_N = \int_{X^N} e^{-NE_N} \mu_0^N$$

satisfait à $\frac{1}{N} \ln Z_N \rightarrow -\inf_{\mathcal{P}}(E + H)$.

Comme H et E sont sci, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut choisir un recouvrement fini de \mathcal{P} par p boules fermées $B_i = B(\mu_i, r_i)$ telles que $H(\mu_i) \leq \inf_{B_i} H + \varepsilon$ et $E(\mu_i) \leq \inf_{B_i} E + \varepsilon$. On a alors

$$\ln Z_N \leq \max_i \int_{\delta_N^{-1}(B_i)} e^{-NE_N} \mu_0^N + \ln p$$

avec pour chaque i

$$\ln \int_{\delta_N^{-1}(B_i)} e^{-NE_N} \mu_0^N \leq -N \inf_{\delta_N^{-1}(B_i)} E_N + \ln \int_{B_i \cap X^N} \mu_0^N.$$

Puisque E est la limite macroscopique des E_N , on a pour chaque i

$$\lim \left(\inf_{\delta_N^{-1}(B_i)} E_N \right) \geq \inf_{B_i} E,$$

d'après (11). D'un autre côté, le théorème de Sanov (cas sans interaction) donne

$$\overline{\lim} \frac{1}{N} \ln \int_{B_i \cap X^N} \mu_0^N \leq -\inf_{B_i} H.$$

Pour chaque boule B_i on a donc

$$\begin{aligned} \overline{\lim} \left(\frac{1}{N} \ln \int_{\delta_N^{-1}(B_i)} e^{-NE_N} \mu_0^N \right) &\leq -\inf_{B_i} E - \inf_{B_i} H \\ &\leq -E(\mu_i) - H(\mu_i) + 2\varepsilon \leq -\inf_{\mathcal{P}}(E + H) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

et on en déduit $\overline{\lim} \frac{1}{N} \ln Z_N \leq -\inf_{\mathcal{P}}(E + H)$.

Considérons maintenant la réciproque. Par le principe variationnel de Gibbs (15), on a

$$\inf_{\gamma \in \mathcal{P}(X^N)} \left(\langle E_N, \gamma \rangle + N^{-1}H(\gamma | \mu_0^N) \right) = -\frac{1}{N} \ln Z_N.$$

En appliquant ceci avec $\gamma = \mu^N$, on obtient

$$\langle E_N, \mu^N \rangle + H(\mu | \mu_0) \geq -\frac{1}{N} \ln Z_N$$

en utilisant l'identité triviale $H(\mu^N | \mu_0^N) = NH(\mu | \mu_0)$. Puisqu'on suppose que $\langle E_N, \mu^N \rangle \rightarrow E(\mu)$, on obtient l'inégalité souhaitée $E(\mu) + H(\mu) \geq -\overline{\lim} \frac{1}{N} \ln Z_N$ pour toute $\mu \in \mathcal{P}$. \square

Corollaire 1. *Supposons que l'énergie d'interaction E_N est d'ordre r , et soit $P_N \in X^N$ une configuration aléatoire suivant la loi de Gibbs (16). La loi des mesures empiriques $\delta_N(P_N)$ satisfait alors à un principe de grandes déviations à vitesse βN et fonction de taux $E + \beta^{-1}H$.*

En particulier, s'il existe une unique mesure $\mu_\beta \in \mathcal{P}$ telle que

$$E(\mu_\beta) + \beta^{-1}H(\mu_\beta) = \inf_{\mathcal{P}}(E + \beta^{-1}H) < +\infty,$$

alors $\delta_N(P_N)$ converge en loi vers l'état déterministe μ_β .

Dans le cas de l'électrostatique dans un compact $X \subset \mathbb{R}^d$, l'existence d'un unique minimiseur μ_β est satisfaite dès que la mesure de référence μ_0 est d'énergie finie, E et H étant toutes deux strictement convexes. Fait remarquable, μ_β est alors elle-même une mesure de Gibbs sur X , de la forme

$$\mu_\beta = \frac{1}{Z} e^{-\beta U} \mu_0 \quad (17)$$

avec $V = -\frac{1}{2}U$ satisfaisant à l'équation « champ moyen de type Liouville »

$$\Delta V = \frac{e^{2\beta V} \mu_0}{\int e^{2\beta V} \mu_0}. \quad (18)$$

En admettant l'existence d'un potentiel V solution de (18) (ce qui peut être établi par un argument variationnel), voyons pourquoi $\nu := \Delta V$ doit nécessairement minimiser $E + \beta^{-1}H$, et donc coïncider avec μ_β .

Rappelons que le potentiel V_μ de toute mesure $\mu \in \mathcal{P}(X)$ d'énergie finie satisfait à $E(\mu) = -\langle V_\mu, \mu \rangle$. Puisque G_d est majorée sur X , le théorème de Fubini-Tonelli donne la propriété de symétrie

$$\langle V_\mu, \nu \rangle = \iint G_d(x, y) \mu(dx) \nu(dy) = \langle V_\nu, \mu \rangle,$$

qui implique

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E(t\mu + (1-t)\nu) = -2\langle V_\nu, \mu - \nu \rangle.$$

Par convexité de E , on a donc

$$E(\mu) \geq E(\nu) - 2\langle V_\nu, \mu - \nu \rangle,$$

qui se réécrit $E(\mu) + 2\langle V_\nu, \mu \rangle \geq E(\nu) + 2\langle V_\nu, \nu \rangle$. D'un autre côté, puisque $\nu = \gamma_{\beta, U}$ est une mesure de Gibbs avec $U = -2V_\nu$, le principe variationnel de Gibbs (15) donne

$$-2\langle V_\nu, \mu \rangle + \beta^{-1}H(\mu) \geq -2\langle V_\nu, \nu \rangle + \beta^{-1}H(\nu),$$

et on obtient bien $E(\mu) + \beta^{-1}H(\mu) \geq E(\nu) + \beta^{-1}H(\nu)$.

Dans le cadre de la répulsion déterminantale dans \mathbb{C}^n , on peut également montrer que l'unique minimiseur μ_β de l'énergie libre $E + \beta^{-1}H$ est une mesure de Gibbs de la forme (17), où $V = -\frac{1}{2}U$ est maintenant une fonction plurisousharmonique sur \mathbb{C}^n à croissance logarithmique satisfaisant à une version non-linéaire de l'équation « champ moyen de type Liouville » (18) dans laquelle le laplacien est remplacé par l'opérateur de Monge-Ampère complexe.

Notons cependant que l'hypothèse de convergence de l'énergie moyenne dans le théorème 3 n'est pas établie à ce jour pour l'interaction déterminantale dans \mathbb{C}^n , de sorte qu'on ne peut pas encore conclure la convergence en loi vers μ_β comme dans le corollaire 1.

Dans un tour de force s'appuyant sur la *géométrie de comparaison*, Robert Berman a néanmoins réussi dans [2] à établir les conclusions de ce corollaire dans le cas où X est une variété complexe compacte, obtenant en particulier pour les variétés complexes projectives canoniquement polarisées la convergence en loi de certains processus déterminantaux *canoniques* vers la forme volume de l'unique métrique de Kähler-Einstein à courbure négative.

Références

- [1] R. J. BERMAN. « Determinantal point processes and fermions on complex manifolds: large deviations and bosonization » (déc. 2008). eprint : 0812.4224.
- [2] R. J. BERMAN. « Kähler-Einstein metrics, canonical random point processes and birational geometry » (juil. 2013). eprint : 1307.3634.
- [3] R. J. BERMAN. « Statistical mechanics of permanents, real-Monge-Ampere equations and optimal transport » (fév. 2013). eprint : 1302.4045.

- [4] R. J. BERMAN et al. « A variational approach to complex Monge-Ampère equations ». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **117** (2013), p. 179–245.
- [5] R. BERMAN et S. BOUCKSOM. « Growth of balls of holomorphic sections and energy at equilibrium ». *Invent. Math.* **181**, n° 2 (2010), p. 337–394. ISSN : 0020-9910. DOI : 10.1007/s00222-010-0248-9. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s00222-010-0248-9>.
- [6] R. BERMAN, S. BOUCKSOM et D. WITT NYSTRÖM. « Fekete points and convergence towards equilibrium measures on complex manifolds ». *Acta Math.* **207**, n° 1 (2011), p. 1–27.
- [7] A. DEMBO et O. ZEITOUNI. *Large deviations techniques and applications*. **38**. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [8] F. RASSOUL-AGHA et T. SEPPÄLÄINEN. *A course on Large Deviations with an Introduction to Gibbs Measures*. **162**. American Mathematical Soc., 2015.



Sébastien BOUCKSOM

CNRS, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, Palaiseau.
 sebastien.boucksom@polytechnique.edu

Sébastien Boucksom est directeur de recherche en mathématiques. Sa spécialité est la géométrie complexe (algébrique et kählérienne), avec quelques incursions en géométrie non-archimédienne.

Le point de vue développé dans ce texte est fortement influencé par les travaux remarquables de Robert Berman sur les processus déterminantiaux [1, 3, 2], valables dans le contexte très général de la théorie du pluripotentiel sur les variétés complexes compactes. Ils font suite aux travaux en commun [5, 6, 4], et je tiens à remercier très chaleureusement mes collaborateurs et amis Robert Berman, Vincent Guedj, Ahmed Zeriahi et David Witt-Nyström pour ces collaborations croisées aussi fructueuses qu'enrichissantes. Je tiens enfin à remercier chaleureusement Julie Déserti, Vincent Guedj et Benjamin Texier pour leur lecture attentive de ce texte.

Côté IdM, Jérôme Buzzi, François Béguin et Radu Ignat ont assuré la coordination de l'évaluation des textes par des chercheurs et des doctorants. Les textes écrits pour IdM seront disponibles à l'URL suivante : <http://images.math.cnrs.fr/+-Gazette-des-Mathematiciens-+.html>

Mémoires de la Société Mathématique de France - Nouveauté 2015



Vol. 142
A Stability Criterion for High-Frequency Oscillations
 Y. Lu, B. Texier

ISBN 978-2-85629-812-1
 2015 - 138 pages - Softcover. 17 x 24
 Public: 30 € - Members: 21 €

Authors show that a simple Levi compatibility condition determines stability of WKB solutions to semilinear hyperbolic initial-value problems issued from highly oscillating data. If this condition is satisfied, the solutions are defined over time intervals independent of the wavelength, and the associated WKB solutions are stable under a large class of initial perturbations. If it is not satisfied arbitrarily small initial perturbations can destabilize the WKB solutions in small time. Examples include coupled Klein-Gordon systems, and systems describing Raman and Brillouin instabilities.



Disponible sur le site de la SMF : <http://smf.emath.fr>
 *frais de port non compris



Le raisonnement par récurrence : quel fondement ?

• P. ÉGRÉ

Quel est le fondement du raisonnement par récurrence, ou principe d'induction mathématique ? J'examine trois réponses à la question. Une réponse formaliste : la question est un faux problème, l'induction est un axiome parmi d'autres. Une réponse de type intuitionniste, celle de Poincaré : le fondement de l'induction est un acte de l'esprit, qui condense une infinité d'inférences logiques. Enfin la réponse logiciste de Frege : l'induction suit d'une définition explicite de la notion de nombre entier naturel. Le but de cet article est de comparer ces positions et de rendre accessible le Théorème de Frege, qui donne une preuve des axiomes de Peano en logique du second ordre et dérive ainsi le principe d'induction comme un théorème.

1. Le principe de récurrence

L'objet de cet article est de réfléchir au fondement du principe de *récurrence* arithmétique, encore appelé principe d'*induction* mathématique. Sans doute la formulation la plus commune en est elle celle de l'axiome dit de *récurrence faible*, qui énonce que si une propriété arithmétique vaut de zéro, et si elle vaut du successeur d'un entier quelconque dès lors qu'elle vaut de cet entier, alors cette propriété vaut de tout entier. Dans le langage de la logique des prédicats, cet axiome s'exprime à l'aide du schéma suivant :

$$[P(0) \wedge \forall n(P(n) \rightarrow P(n+1))] \rightarrow \forall nP(n). \quad (1)$$

Il est plus courant, de fait, de parler de *raisonnement par récurrence*, car en pratique on se sert du principe comme d'une *règle d'inférence*, plutôt que comme d'un *énoncé axiomatique* : on démontre que P vaut de 0, puis on démontre que P vaut de $n+1$ sous l'hypothèse que P vaut de n , et on en infère que P vaut de tout n . Dans ce qui suit, j'enten-

drai par principe de récurrence avant tout l'axiome, mais en ayant en tête que la règle d'inférence est dérivable de l'axiome (et réciproquement, moyennant le théorème de la déduction)¹.

Le principe de récurrence est un outil de preuve central en arithmétique. À l'aide du principe de récurrence, on peut démontrer une multitude de théorèmes combinatoires. Par exemple, on peut montrer par récurrence sur n que la somme des n premiers entiers est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$. Certes, cet exemple n'est sans doute pas le meilleur, car on peut donner du même résultat d'autres preuves plus algébriques qui ne font pas intervenir le principe de récurrence (voir par exemple la preuve attribuée au jeune Gauss, qui consiste à réécrire les termes de la suite à l'envers, à sommer terme à terme, puis à diviser par deux). Néanmoins, il existe bien des cas pour lesquels aucune autre voie d'accès obvie à une généralisation sur les entiers ne semble disponible que celle du principe de récurrence. Plus fondamentalement, la validité du principe de récurrence ne devrait pas dépendre de son utilité.

1. Le théorème de la déduction énonce l'équivalence entre la dérivabilité d'un énoncé A à partir d'hypothèses B_1, \dots, B_n et la dérivabilité de l'énoncé conditionnel correspondant $(B_1 \wedge \dots \wedge B_n \rightarrow A)$.

La question qui nous intéresse ici est de savoir quelle justification donner du principe de récurrence arithmétique. S'agit-il d'un axiome primitif, dont la validité ne découle d'aucun principe plus fondamental, ou peut-on espérer dériver le principe de récurrence d'autres principes plus simples ? Dans un premier temps, j'écarterais deux réponses naïves qui sont susceptibles de venir à l'esprit du mathématicien, reposant l'une et l'autre sur la pratique des mathématiques. Dans un deuxième temps, je propose de considérer trois réponses de nature philosophique au problème du fondement de l'induction mathématique, que j'appellerai « formaliste », « intuitionniste », et enfin « logiciste ». Ces réponses ont été proposées à peu près au même moment par trois mathématiciens éminents, à la fin du dix-neuvième siècle, à savoir par Hilbert, par Poincaré, et par Frege. C'est à la réponse logiciste de Frege – la première, en réalité, dans l'ordre chronologique – que je consacrerai l'examen le plus attentif, après seulement avoir rappelé les conceptions de Hilbert et de Poincaré. Ma motivation pour procéder ainsi est que la conception logiciste des mathématiques reste souvent mal distinguée, notamment en France, de la conception formaliste. Une seconde raison tient à l'actualité de Frege en philosophie contemporaine des mathématiques. Depuis une trentaine d'années, sous l'impulsion de plusieurs philosophes des mathématiques, en particulier C. Wright, G. Boolos, et R. Heck Jr., le programme fregéen de fondement de l'arithmétique a été considérablement réévalué, et la conception fregéenne des nombres naturels, encore méconnue des mathématiciens, constitue désormais un point de référence incontournable². L'ambition de cet article sera notamment de donner les étapes de la dérivation fregéenne du principe de récurrence, et d'en discuter la portée philosophique.

2. Deux réponses naïves

D'aucuns diraient que le principe d'induction arithmétique est un principe évident et immédiat, dont la vérité se manifeste clairement à l'imagination. Le terme même d'induction relève d'une métaphore physique : imaginons les entiers organisés comme des dominos disposés debout côte-à-côte, et comparons la propriété P à une force, qui, appliquée au premier d'entre eux, se propage au suivant

(voir par exemple [7], qui emploie la comparaison à des fins pédagogiques ; voir également [25] qui imagine des wagons). Il semble que la force doive s'étendre à tout le système, de proche en proche (l'ensemble des dominos devrait basculer, ou l'ensemble des wagons se mettre en mouvement). Mais comparaison n'est pas raison, et on attend de la justification d'un principe aussi central que le principe d'induction qu'elle nous éclaire davantage. En particulier, il ne va pas de soi que ce mode de justification s'applique à d'autres versions du principe, pourtant logiquement équivalentes, comme celles que nous examinerons ci-après.

Une seconde manière plus intrinsèque de justifier le principe serait justement d'espérer le dériver de formulations distinctes. L'une d'entre elles est l'axiome dit de *récurrence forte*, qui énonce que si une propriété vaut d'un entier chaque fois qu'elle vaut de tous ses prédécesseurs, alors cette propriété vaut de tout entier :

$$\forall n(\forall m(m < n \rightarrow P(m)) \rightarrow P(n)) \rightarrow \forall nP(n). \quad (2)$$

L'équivalence entre les deux formes du principe de récurrence est facilement démontrable. En arithmétique, et moyennant les propriétés usuelles qui relient 0, la notion de successeur, et la relation $<$, la récurrence forte et la récurrence faible sont en outre équivalentes à un autre principe, le principe du *plus petit nombre* (également appelé du *bon ordre*), qu'on énonce généralement en disant que tout ensemble d'entiers non vide admet un plus petit élément³. Traduit en logique des prédicats, ce principe signifie que si une propriété arithmétique vaut d'au moins un entier, alors il existe un entier qui satisfait à la propriété, tel que tout entier plus petit manque de la satisfaire :

$$\exists nP(n) \rightarrow \exists n(P(n) \wedge \forall m(m < n \rightarrow \neg P(m))). \quad (3)$$

Certains mathématiciens verraient peut-être dans le principe du plus petit nombre, ou dans le principe de récurrence forte, des principes plus fondamentaux que le principe de récurrence faible. Mais ici encore, ce qui est susceptible d'amener tel ou tel à cette position tient vraisemblablement à des considérations d'ordre pratique : le principe du plus petit nombre est parfois plus facile à utiliser, ou le principe de récurrence forte rend la preuve souvent plus directe que si l'on doit se limiter à n'utiliser que la version dite faible du principe.

2. Cf. en particulier [26], [3], [16] et [17].

3. Pour montrer l'équivalence, il suffit de supposer que : (i) 0 n'est le successeur d'aucun nombre (ii) tout nombre est inférieur à son successeur (iii) tout nombre est identique à 0 ou est le successeur d'un autre (iv) si n est inférieur au successeur de m , alors n est inférieur ou égal à m .

Si on laisse de côté ces considérations pratiques, l'équivalence logique entre les trois versions du principe constitue cependant une objection de taille à l'idée de fonder telle version du principe sur telle autre : la justification est alors menacée de circularité. Poincaré est probablement le premier à formuler cette critique, lorsqu'il écrit ([24])⁴ :

« le jugement sur lequel repose le raisonnement par récurrence peut être mis sous d'autres formes ; on peut dire par exemple que dans une collection infinie de nombres entiers différents, il y en a toujours un qui est plus petit que tous les autres. On pourra passer facilement d'un énoncé à l'autre et se donner l'illusion qu'on a démontré la légitimité du raisonnement par récurrence. Mais on sera toujours arrêté, on arrivera toujours à un axiome indémontrable qui ne sera au fond que la proposition à démontrer traduite dans un autre langage ».

On pourrait répondre qu'il est erroné de raisonner à équivalence logique près, et soutenir que les considérations pratiques doivent être prises en compte lorsqu'il s'agit de rendre compte du choix d'un axiome. Mais le problème est que même si l'on proposait que le principe du plus petit nombre, admettons, fût le fondement du principe de récurrence dans sa version faible ou dans sa version forte, la question demeurerait la même de savoir si l'on peut trouver pour le principe du plus petit nombre une dérivation à partir de principes logiquement plus simples. Nous n'avons pas trouvé, à ce stade de notre questionnement, de réponse satisfaisante à cette question.

De ces considérations je conclus que ni l'idée de fonder le principe de récurrence sur une intuition de nature physicaliste, ni celle de fonder le principe de récurrence sur telle ou telle de ses versions, ne sauraient donner une réponse satisfaisante à la question de la justification du principe.

3. La vision formaliste

Considérons à présent deux autres stratégies antagonistes concernant la justification du principe de récurrence. La première, envisagée dans cette section, est une stratégie que je qualifierais de « formaliste », dans la lignée de la conception hilbertienne des axiomes mathématiques. Cette stratégie est fondamentalement déflationniste. Elle revient à considérer le principe de récurrence comme un axiome parmi d'autres, ne requérant aucune justification particulière. Considérons les axiomes dits de Peano pour l'arithmétique⁵. Ces axiomes sont au nombre de cinq, et le dernier d'entre eux est justement l'axiome d'induction.

Les axiomes de Peano

1. 0 est un nombre.
2. Tout nombre admet un successeur.
3. Deux nombres distincts ont des successeurs distincts, et deux nombres identiques ont le même successeur.
4. 0 n'est le successeur d'aucun nombre.
5. Pour toute propriété, si 0 a cette propriété, et si le successeur de tout nombre ayant cette propriété a cette propriété, alors tout nombre a cette propriété.

Dans une perspective formaliste, le rôle de ces axiomes est de fournir une *définition implicite* de la notion de nombre. Cela signifie que sera considéré comme nombre tout élément pertinent de tout système d'objets qui *réalise* ce système d'axiomes. Comme l'explique Hilbert à Frege dans une lettre devenue célèbre ([20]), pour qui voit les axiomes comme épistémologiquement premiers, il est mal fondé de chercher à identifier des notions telles que « nombre », « zéro » ou « successeur » *en amont* ou indépendamment de l'énoncé de ce système d'axiomes⁶. Pour Hilbert, la non-contradiction des axiomes d'un système donné est le critère de leur vérité, et non l'inverse. Il serait vain, par conséquent, d'espérer fonder la vérité de tel ou tel axiome au-delà de ce réquisit de cohérence. Dans la conférence prononcée par Hilbert en 1925 « Sur l'Infini »,

4. [6] formule une critique similaire, qu'il généralise à d'autres tentatives, y compris celle de Frege.

5. Voir [22]. Les propriétés sont également appelées axiomes de Dedekind-Peano, en raison du fait que Dedekind identifie déjà ces propriétés dans [9]. Toutefois, seul Peano les présente comme des axiomes à proprement parler, à savoir comme des premiers principes indémontrables. Dedekind, comme Frege, entreprend lui aussi de dériver ces postulats d'une théorie plus générale des ensembles et de la nature des nombres. En cela, l'approche de Peano peut être qualifiée de formaliste, et celle de Dedekind de logiciste (voir [21], qui place Frege et Dedekind dans le même camp). Pour des raisons de place, je laisse ici de côté un examen de la théorie de Dedekind, mais le lecteur doit garder en tête que Frege et Dedekind poursuivent des buts voisins.

6. Hilbert dans sa lettre prend l'exemple des axiomes de la géométrie relativement aux notions de « point » et « droite », mais ses propos s'appliquent de façon identique au cas de l'arithmétique.

Hilbert présente d'ailleurs l'axiome d'induction sans justification particulière. Dans cette même conférence, il suggère de façon plus générale que le choix de tel ou tel axiome, notamment en géométrie, est en partie une affaire de convention. Comment espérer justifier le postulat des parallèles d'Euclide, par exemple, s'il s'avère qu'une géométrie sans ce postulat elle aussi est cohérente ?

De la même manière, considérons le principe du moindre nombre : nous savons que ce principe n'est pas vérifié dans toute structure mathématique. L'ensemble des nombres rationnels ne satisfait pas au principe du moindre nombre, par exemple, et l'ensemble des nombres rationnels est tout simplement une structure mathématique autre que celle des nombres entiers. Une autre façon de se représenter la position formaliste revient à concevoir le principe de récurrence comme une règle conventionnelle, semblable à celle qui concerne le déplacement de telle ou telle pièce dans un jeu. Nous savons que si nous autorisons le fou, aux échecs, à se déplacer comme une dame, alors le jeu changerait de nature *ipso facto*. Mais du moment que la modification n'aboutit pas à une contradiction, alors le choix de ce nouveau système de règles est légitime.

La position formaliste est séduisante à première vue, car elle semble reléguer le problème de la justification du principe de récurrence au statut de pseudo-problème. On peut toutefois formuler deux objections à son encontre. L'une concerne le programme de Hilbert. Hilbert espérait fonder les mathématiques en montrant que l'ensemble des mathématiques pouvait être vu comme une *extension conservative* de l'arithmétique élémentaire, dans laquelle il incluait l'axiome d'induction⁷. Cela signifie que Hilbert accordait néanmoins à l'axiome d'induction un statut épistémologique séparé parmi la multitude des axiomes mathématiques. Mais cette justification du principe d'induction fait défaut⁸.

7. Une théorie T' est une extension conservative de T si T' contient T et l'étend à l'aide de plus de ressources expressives ou d'axiomes, mais est telle que tout théorème du langage de T qui est dérivable dans T' est déjà dérivable dans T . Si les mathématiques étaient incohérentes, mais constituaient une extension élémentaire de l'arithmétique élémentaire, on pourrait donc établir cette incohérence dans l'arithmétique élémentaire. Pour plus de détails sur ces notions et sur le programme de Hilbert, je renvoie à la présentation qu'en donne Dubucs dans [2].

8. Voir en particulier [19], qui répond brièvement aux critiques formulées par [23] sur l'usage subreptice que Hilbert ferait de l'induction pour prouver la cohérence de l'arithmétique. Hilbert suggère que Poincaré aurait manqué de distinguer le principe de récurrence et les définitions par récurrence, mais ne donne pas pour autant de justification du principe lui-même. Hilbert considère par ailleurs dans sa définition de l'arithmétique élémentaire des versions restreintes du principe d'induction à cette époque, c'est-à-dire des versions dans lesquelles la complexité des formules quantifiées est limitée.

9. Une troisième objection, plus générale que les précédentes, consiste à nier que, parce qu'un axiome donné est indépendant d'autres axiomes, la question de sa justification devient caduque. On sait depuis les travaux de P. Cohen que l'hypothèse du continu est indépendante des axiomes de la théorie des ensembles ZFC. Néanmoins, pour de nombreux mathématiciens la question demeure légitime de chercher à décider l'hypothèse du continu à partir de considérations fondamentales sur la nature des ensembles. Sur cette question du choix des axiomes en mathématiques, voir notamment [15], [11], ou encore [10].

Une seconde objection qu'on peut formuler à l'encontre du formalisme concerne ce que j'appellerais le statut cognitif privilégié de l'arithmétique au sein des mathématiques. Dans cette perspective, qui est en réalité celle de Frege et sur laquelle nous reviendrons par la suite, les nombres entiers ne sont pas essentiellement la réalisation de tel ou tel système d'axiomes. Les nombres entiers nous servent à compter les objets, et il est sensé de se demander comment fonder le principe de récurrence à partir d'une définition plus abstraite de la notion de nombre qui remplit cette fonction, plutôt que d'y voir une règle arbitraire⁹.

4. L'intuitionnisme de Poincaré

À l'opposé de la conception formaliste se situe ce que j'appellerai la vision intuitionniste du principe de récurrence. Le terme d'intuitionnisme est dû au mathématicien hollandais Brouwer, qui se réclamait lui-même de Kant et de sa théorie du fondement des mathématiques dans l'intuition *a priori* du temps et de l'espace. Je ne chercherai pas ici à rendre compte de la vision brouwerienne du principe de récurrence (je renvoie pour cela à l'article de van Atten [1]), mais je m'appuierai sur la conception antérieure et plus connue qu'en donne Poincaré, vision par laquelle Poincaré se réclame du kantisme, et qui apparente Poincaré dans une certaine mesure au courant intuitionniste que développeront Brouwer et ses disciples quelques années plus tard.

Poincaré en 1894 se demande si le principe de récurrence pourrait être réduit à des principes logiques plus simples. Il conclut, négativement, que le raisonnement par récurrence n'est pas réductible à un principe logique, mais qu'il constitue « le véritable type du jugement synthétique *a priori* ». Ces notions sont empruntées à Kant. Rappelons d'abord que pour Kant, un énoncé est *analytique*,

en un premier sens du terme que retient Kant, si sa vérité se déduit logiquement du principe de non-contradiction. Il est *synthétique*, inversement, si sa vérité ne dépend pas du seul principe de non-contradiction. Par ailleurs, un jugement est *a priori* pour Kant s'il ne dépend pas de l'expérience, mais qu'il structure l'expérience ; dans le cas contraire, il sera dit *a posteriori*. De façon célèbre, Kant considère tous les jugements arithmétiques comme *a priori*, car indépendants de l'expérience. Cependant, Kant subdivise les énoncés arithmétiques en deux classes : il considère les égalités arithmétiques simples, comme $2 = 2$, comme des jugements analytiques, mais il voit les égalités arithmétiques plus complexes, comme $7 + 5 = 12$, comme exprimant des jugements synthétiques¹⁰. Pour Kant, les énoncés mathématiques non-tautologiques sont donc fondamentalement de nature synthétique *a priori*.

Le choix fait par Poincaré de qualifier de synthétique *a priori* le raisonnement par récurrence n'est pas un simple emprunt rhétorique à Kant, mais s'appuie sur deux arguments précis. Poincaré donne en premier lieu un argument en faveur du caractère synthétique – entendez donc *extra-logique* – du principe de récurrence. À première vue, le raisonnement par récurrence s'obtient sur la base de deux principes logiques, à savoir le *modus ponens* (MP) (que Poincaré appelle « le syllogisme hypothétique ») et la règle d'instantiation universelle (IU), à savoir :

[(MP)] De A et de $A \rightarrow B$, on infère logiquement B .

[(IU)] De $\forall xP(x)$, on infère logiquement $P(k)$ pour tout élément k du domaine de quantification.

Ces deux règles d'inférence sont logiques au sens où, si l'on niait la conclusion tout en admettant les hypothèses, on aboutirait à une contradiction. En utilisant ces deux règles, il semble que l'on puisse dériver $P(k)$ pour n'importe quel entier k , comme le suggère l'arbre de preuve suivant, dans lequel on part de l'hypothèse $P(0)$ (hypothèse à gauche), et où on réinstancie autant de fois k l'hypothèse de récurrence $\forall n(P(n) \rightarrow P(n+1))$ (hypothèse de droite) avant d'appliquer le *modus ponens*, pour obtenir $P(k)$ (une fois pour obtenir $P(1)$, deux

fois pour $P(2)$, et ainsi de suite) :

$$\frac{\frac{\frac{\forall n(P(n) \rightarrow P(n+1))}{P(0) \rightarrow P(1)} \text{ (IU)}}{P(1)} \text{ (MP)}}{P(2)} \text{ (MP)} \quad \frac{\frac{\forall n(P(n) \rightarrow P(n+1))}{P(1) \rightarrow P(2)} \text{ (IU)}}{P(2) \rightarrow P(3)} \text{ (MP)} \text{ (IU)}$$

Une tentative pour transformer cette esquisse de preuve en preuve serait de raisonner par l'absurde : « supposons pour aboutir à une contradiction qu'il existe un n tel que $\neg P(n)$. Posons $n = k$. Par k applications de la règle (IU) et k applications de la règle (MP), on peut inférer que $P(k)$. Or par hypothèse, $\neg P(k)$. Contradiction. »

Toute la difficulté de ce raisonnement, cependant, concerne la justification du lemme que nous avons marqué en italique (ou, dans l'arbre de preuve, la justification des points de suspension). Comment établir avec certitude que par k applications de la règle (IU) et autant d'applications de (MP), on peut dériver $P(k)$ de $P(0)$? Pour le démontrer, il semble que nous devions à nouveau raisonner par induction, et supposer par là le principe même que nous voulons démontrer ! Poincaré en conclut que si on nous donne un entier fini spécifique k , on pourra certes prouver $P(k)$ à partir de $P(0)$ à l'aide de principes purement logiques, mais il ajoute :

« quelque loin que nous allions ainsi, nous ne nous élèverions jamais jusqu'au théorème général, applicable à tous les nombres, qui seul peut être objet de science. Pour y arriver, il faudrait une infinité de syllogismes, il faudrait franchir un abîme que la patience de l'analyste, réduit aux seules ressources de la logique formelle, ne parviendra jamais à combler ».

Ici s'achève le premier argument de Poincaré, en faveur du caractère synthétique du principe de récurrence. L'argument en faveur du caractère *a priori* du principe est beaucoup plus concis. Poincaré fait remarquer que si le principe était *a posteriori* – entendez : s'il était issu de l'expérience – sa validité dépendrait d'une généralisation faite à partir d'un

10. Pour le comprendre, il faut savoir que Kant appelle aussi analytique un énoncé de la forme sujet-prédicat tel que le prédicat soit analytiquement contenu dans le sujet, et synthétique un énoncé de la même forme tel que le prédicat ne soit pas contenu dans le sujet. Kant considérait qu'un énoncé comme $2 = 2$ était analytique aux deux sens du terme qu'il énonçait, mais voyait un énoncé comme $7 + 5 = 12$ comme synthétique, en dépit du fait que sa négation viole le principe de contradiction, parce que, dans ce cas précis, il voyait le concept de 12 comme n'étant pas inclus analytiquement dans les concepts de 7 et de 5. Frege est parmi les premiers à avoir mis à jour et contesté la tension entre les deux définitions kantienne des termes « analytique » et « synthétique » ([14]). L'une des incohérences de la définition kantienne provient notamment de l'hypothèse implicite que fait Kant que les jugements d'égalité arithmétique sont de la forme sujet-prédicat, ce que conteste Frege en inventant la logique des prédicats relationnels ([13]).

nombre fini de cas. Autrement dit, elle correspondrait au même genre de généralisation inductive – cette fois au sens de l'induction empirique – qui nous conduit de l'observation qu'un échantillon de corbeaux sont noirs à la généralisation que « tous les corbeaux sont noirs ». Mais la confiance que nous plaçons dans le principe de récurrence est beaucoup plus élevée que celle que nous plaçons dans une généralisation fondée sur l'expérience.

En résumé, le principe de récurrence est pour Poincaré un principe qui n'est ni démontrable à partir de principes logiques plus élémentaires, ni fondé sur l'expérience. Poincaré en conclut que le raisonnement par récurrence :

« n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible ».

Cette citation illustre clairement le caractère intuitionniste de la conception de Poincaré, puisque le fondement proposé pour le principe se situe dans une intuition de l'esprit sur ses propres actes. La conception poincaréenne, incidemment, est plus explicative que celle que j'ai qualifiée de « formaliste », car elle rapproche le principe de récurrence arithmétique de principes logiques distincts, tout en soulignant l'écart qui les sépare.

5. Le logicisme de Frege

On pourrait penser que les réponses formaliste et intuitionniste qui précèdent nous laissent en proie à un dilemme, mais on omettrait de voir que ces deux conceptions n'épuisent pas l'espace des justifications possibles des axiomes mathématiques, et en particulier des axiomes de l'arithmétique. Une manière de s'en rendre compte est de nous tourner vers la conception logiciste de l'arithmétique défendue par G. Frege dans ses deux ouvrages : *Les fondements de l'arithmétique* [14], et *Les lois fondamentales de l'arithmétique* [12].

Avant Poincaré, Frege entend montrer, notamment contre l'empirisme de Stuart Mill, que le fondement de l'arithmétique ne saurait être dans l'expérience physique courante. Mais à la différence de Poincaré, Frege a l'ambition ouvertement anti-kantienne de montrer que les axiomes et théorèmes de l'arithmétique sont réductibles à des vérités logiques. Le terme de « vérité logique » est toutefois à prendre avec précaution. Frege n'entend pas par là que l'ensemble des axiomes et théorèmes de l'arithmétique seraient réductibles au seul principe

de non-contradiction. Il entend plutôt montrer que les axiomes et théorèmes de l'arithmétique s'obtiennent à l'aide de principes purement logiques à partir d'une définition adéquate de la notion de nombre cardinal, définition qui s'énonce elle-même dans le langage de la logique.

Afin de mieux cerner la conception logiciste de Frege, commençons par expliquer en quoi elle diffère d'une approche formaliste. La différence principale tient justement dans la conception des axiomes. Pour Frege, les axiomes de Peano – que naturellement Frege n'appelle pas ainsi, mais qu'il reconnaît comme des propriétés fondamentales des entiers – ne sauraient constituer une définition satisfaisante de la notion de nombre, fût-ce même une définition implicite. En particulier, un système axiomatique, aussi contraint soit-il, ne pourra jamais distinguer deux objets isomorphes : dans le cas des axiomes de Peano, une approche axiomatique est en ce sens compatible avec des interprétations distinctes des termes primitifs de la théorie, quand même les interprétations considérées sont toutes isomorphes. « Zéro », par exemple, pourrait de façon compatible avec les axiomes désigner le point origine d'une demi-droite infinie, et le successeur de zéro, un point situé à un centimètre de l'origine sur cette droite, et ainsi de suite (voir [18], §7). Mais les objets de ce modèle, intuitivement, ne *constituent* pas les nombres à proprement parler, ceux au moyen desquels nous comptons les objets qui tombent sous divers concepts. Or Frege voit les nombres comme des entités objectives et singulières, indépendantes de l'esprit, et qu'il convient donc de caractériser en propre. À rebours de la vision formaliste qu'énoncera Hilbert, Frege propose par conséquent de *dériver* les postulats de Peano d'une *définition explicite* de la notion de nombre, énoncée dans un langage logique. Pour Frege, la vérité des axiomes mathématiques précède en ce sens leur cohérence, ce qui distingue fondamentalement la conception frégréenne de celle de Hilbert.

6. La construction frégréenne des nombres naturels

Dans ce qui suit je présente les principales étapes de la construction par Frege des entiers naturels. La preuve du principe de récurrence est présentée en annexe de cet article, à partir de l'excellente présentation de Richard Heck Jr [17]. Il me semble important de la rendre accessible ici, parce que la plupart des exposés classiques du théorème de Frege (cf. [25], [18], ou même [8]) manquent de le faire.

6.1 – Le principe de Hume

Pour comprendre la définition fregéenne des nombres naturels, il faut d’abord comprendre la conception que Frege se fait de la notion de nombre en général. Frege a du nombre une conception cardinale : la fonction des nombres est de nous permettre de compter les objets. Frege retient en particulier pour la définition du nombre un principe qu’il attribue à Hume, qui capture pour Frege une partie de l’essence même des nombres, et qu’il partage avec d’autres de ses contemporains qu’il cite, notamment E. Schröder, E. Kossak et G. Cantor (cf. [14], §63). Le « principe de Hume » énonce que deux ensembles ont le même nombre d’éléments si et seulement s’il existe une correspondance bi-univoque entre eux (si, à chaque élément de l’un, correspond un unique élément de l’autre, et réciproquement)¹¹. Frege ne parle pas d’ensembles, mais de concepts. Dans les termes de Frege, on dira que le nombre du concept F est identique au nombre du concept G si et seulement si il existe une correspondance biunivoque entre F et G . Notons que cette définition du nombre est très générale, en cela qu’elle subsume, comme chez Cantor, aussi bien la notion de cardinal fini que celle de cardinal infini.

Un aspect essentiel de cette définition est qu’elle peut se formaliser entièrement dans le langage de la logique du second ordre que développe Frege à la même époque (voir [13]), c’est-à-dire dans cette partie de la logique qui autorise à quantifier non seulement sur des individus mais aussi des propriétés et relations. Pour formaliser le principe de Hume, il suffit de dire que le nombre d’un concept est identique au nombre de l’autre s’il existe une relation fonctionnelle et injective du premier vers le second, qui soit également surjective (cf. [17]; $\#F$ se lit « le nombre du concept F », ou encore « le nombre de F ») :

(Principe de Hume) $\#F = \#G$ ssi, par définition

$$\begin{aligned} \exists R[\forall x\forall y\forall z(Rxy \wedge Rxz \rightarrow y = z) \\ \wedge \forall x\forall y\forall z(Rxz \wedge Ryz \rightarrow x = y) \\ \wedge \forall x(Fx \rightarrow \exists y(Gy \wedge Rxy)) \\ \wedge \forall y(Gy \rightarrow \exists x(Fx \wedge Rxy))] \end{aligned}$$

11. L’expression « principe de Hume » est due à G. Boolos. Elle fait désormais autorité.

12. La notation lambda est postérieure à Frege, et issue du lambda-calcul d’Alonzo Church. C’est une notation fonctionnelle. L’expression $\lambda x.x \neq x$ peut se lire comme : « la fonction qui pour chaque x renvoie la valeur de vérité de l’énoncé $x \neq x$ ». C’est, vue autrement, la fonction caractéristique de l’ensemble vide.

6.2 – Zéro, le successeur immédiat

La seconde étape de la construction de Frege concerne cette fois la définition des nombres naturels (ou cardinaux finis). Frege se sert du principe de Hume pour définir le nombre zéro, puis pour définir la relation de successeur immédiat entre deux nombres. Les définitions sont relativement aisées. Zéro est défini comme le nombre du concept « non identique à soi-même », que nous noterons $\lambda x.x \neq x$ ¹². Comme toute chose est supposée, logiquement, être identique à soi-même, aucun élément ne tombe sous le concept « non identique à soi-même », et on peut vérifier que deux concepts ont le nombre zéro dès lors qu’ils ne contiennent aucun élément. On peut donc écrire :

(Zéro) $0 := \#(\lambda x.x \neq x)$.

Il définit ensuite la relation de successeur immédiat entre n et m en disant que m a pour successeur immédiat n si n est le nombre d’un concept F non vide tel que m soit le nombre du concept « être un F différent d’un F donné » :

(Successeur)

$S(m, n) := \exists F\exists x(Fx \wedge n = \#F \wedge m = \#(\lambda y.Fy \wedge y \neq x))$.

Intuitivement, le nombre d’un concept est le successeur du nombre d’un autre si le second contient un élément de moins que le premier.

6.3 – La relation ancestrale

Étant donnés le zéro et la relation de successeur immédiat, il manque un dernier élément à Frege pour définir la notion de nombre naturel. L’idée directrice de Frege est simple : elle consiste à définir un nombre naturel comme tout nombre qui est soit égal à zéro, soit qui est un successeur de zéro, *immédiat ou non immédiat*. La démarche de Frege consiste à définir la relation de « successeur immédiat ou non immédiat », à partir de la relation de successeur immédiat.

On dira qu’un nombre n est dans la relation de successeur, immédiat ou pas, à un nombre m donné, si et seulement si n appartient à la *clôture transitive* de la relation de successeur immédiat à partir de m . La notion de clôture transitive est facile à illustrer sur un exemple : soient trois éléments, 1, 2, et 3. On sait que 2 est le successeur immédiat de 1, et 3 le successeur immédiat de 2. Mais 3 n’est pas le successeur immédiat de 1. La relation de « suc-

cesseur immédiat » manque par conséquent d'être transitive. Mais on peut définir sa clôture transitive comme étant la plus petite relation qui étend la relation de successeur immédiat en une relation transitive. En suivant cette définition, on voit que 1 devient le successeur (médiat) de 3, 2 reste celui de 1, et 3 celui de 2.

La clôture transitive d'une relation est également connue sous le nom de *relation ancestrale* (cf. [25]). Étant donnée une relation binaire R , représentant le fait pour x d'être un parent direct de y (père ou mère), on peut en effet définir en termes ensemblistes le fait pour b d'être un ancêtre de a , en disant que b appartient au plus petit ensemble qui contient tout parent de a et qui est clos par la relation de parenté directe. Cette définition est énoncée par Frege en logique du second ordre. Étant donnée une relation R , où $R(x, y)$ signifie que y est un parent direct de x , Frege définit la relation ancestrale R^* (ou clôture transitive) entre deux éléments a et b comme suit :

(La relation ancestrale)

$$R^*(a, b) := \forall X \forall x \forall y ((R(a, x) \rightarrow X(x)) \wedge (X(x) \wedge R(x, y) \rightarrow X(y))) \rightarrow X(b).$$

Pour qui n'est pas habitué à la logique du second ordre, il est conseillé de lire $X(x)$ comme équivalent à l'écriture $x \in X$ qu'on aurait en théorie des ensembles. La formule ci-dessus dit par conséquent qu'un couple (a, b) appartient à la clôture transitive de la relation R si b appartient à l'intersection de tous les ensembles qui contiennent tous les parents de a et qui contiennent tous les parents de tous les éléments qu'ils contiennent. Un point important à remarquer dans cette définition de la relation ancestrale est qu'elle s'apparente très fortement à un principe de récurrence. En effet, une manière de comprendre la définition est de la lire comme disant : b est l'ancêtre de a si soit b est un parent de a (base de la récurrence), soit b est le parent d'un ancêtre de a (hypothèse de récurrence).

La définition du nombre entier chez Frege peut désormais être énoncée formellement. On dira que x est un nombre entier naturel, ce que l'on notera $N(x)$, si et seulement si x est soit identique à 0, soit atteignable à partir de 0 moyennant l'ancestral de la relation de successeur immédiat :

(Nombre entier naturel) $N(x) := x = 0 \vee S^*(0, x)$.

13. Grand pourfendeur car en 1902 Russell met à jour une contradiction dans le système de Frege. Cette contradiction est depuis lors connue sous le nom de « paradoxe de Russell » (d'après lequel il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles qui ne s'appartiennent pas eux-mêmes). Russell fait prendre conscience à Frege que l'un de ses principes (la loi fondamentale \forall , que j'ai laissée délibérément de côté dans cet article) aboutit en fait à la définition d'un tel ensemble, et par là à une contradiction. On doit en particulier à [26] d'avoir montré que la partie du système de Frege qui repose sur la logique du second ordre assortie du principe de Hume pouvait être

6.4 – Le théorème de Frege

Muni de la définition des nombres naturels, Frege donne une preuve de chacun des axiomes de Peano. En effet, chacun des axiomes peut s'énoncer en logique du second ordre. Cette dérivation est aujourd'hui connue sous le nom de Théorème de Frege, dont voici un énoncé (cf. [26], [8]) :

Théorème (Théorème de Frege). *Les axiomes de Peano sont déductibles en logique du second ordre à partir du principe de Hume et des définitions pertinentes de zéro, du successeur, et de la notion de nombre entier naturel.*

La preuve de l'axiome 1 de Peano, qui dit que zéro est un nombre, est immédiate, puisqu'un nombre est défini comme tout objet qui est soit identique à 0, soit qui est un successeur de 0 (immédiat ou médiat). Je laisserai ici de côté la preuve des axiomes 2 à 4, pour me concentrer sur l'axiome 5, à savoir le principe d'induction. Énoncé en logique du second ordre à l'aide des définitions de Frege, l'axiome 5 a la forme suivante :

Axiome (d'induction).

$$\forall P (P(0) \wedge \forall x \forall y (N(x) \wedge P(x) \rightarrow (S(x, y) \rightarrow P(y))) \rightarrow \forall x (N(x) \rightarrow P(x))).$$

La partie du Théorème de Frege qui nous intéresse est donc le résultat suivant :

Théorème. *L'axiome d'induction est prouvable en logique du second ordre assortie du principe de Hume à partir des définitions de 0, du successeur immédiat, et de la notion de nombre naturel fondée sur la relation ancestrale.*

Le nerf de la preuve réside presque tout entier dans la définition de la relation ancestrale donnée par Frege, mais la preuve requiert tout de même plusieurs transformations logiques, que le lecteur intéressé trouvera en annexe.

7. « Une définition, non un principe » ?

Bertrand Russell, le premier grand lecteur, grand pourfendeur¹³, mais aussi grand continuateur de l'œuvre de Frege, donne dans son *Introduction à la Philosophie Mathématique*, parue en 1919,

une présentation très éclairante de la conception fregienne des nombres naturels. Au chapitre 3, il tire de l'exposé de Frege la leçon suivante à propos de l'induction mathématique :

« L'utilisation de l'induction mathématique dans les démonstrations était, jadis, quelque peu mystérieuse. [...] Certains croyaient qu'il s'agissait réellement d'une induction, dans le sens que l'on donne à ce mot en logique. Pour H. Poincaré, il s'agissait d'un principe de la plus grande importance, grâce auquel un nombre infini de syllogismes pouvaient être condensés en un seul. Nous savons maintenant que toutes ces façons de voir sont des erreurs et que l'induction mathématique est une définition, non un principe. (...) Nous définissons les "nombres naturels" comme étant ceux qui possèdent toutes les propriétés inductives. Il s'ensuit que de telles démonstrations peuvent être appliquées aux nombres naturels, non pas en vertu de quelque intuition mystérieuse, d'un axiome ou d'un principe, mais en vertu d'une proposition purement verbale. »

Russell a certes raison de souligner que le principe de récurrence se ramène ici à une définition, puisque ce principe dérive directement de la définition des nombres naturels donnée par Frege. Une autre raison qui fait dire à Russell que l'induction mathématique est une définition est que d'autres nombres, par exemple les rationnels ou les réels, comme nous l'avons déjà souligné, manquent de satisfaire au principe d'induction, précisément parce qu'ils ne relèvent pas d'une définition inductive du même type. Par ailleurs le principe d'induction est bien une définition au sens où, à la différence de l'approche formaliste, le principe d'induction pour Frege n'est pas simplement une propriété axiomatique des nombres parmi d'autres, mais une part essentielle de leur définition explicite.

Malgré cela, est-il correct de penser que l'induction s'apparente intégralement à une définition, plutôt qu'à un principe ? Sous le terme de « principe », Russell semble entendre une règle d'inférence, ou encore un axiome. Certes, Frege montre

que l'induction mathématique, comme axiome, et par suite comme règle d'inférence, est dérivable à partir d'une définition, mais on pourrait objecter que la définition même repose sur un principe inductif plus élémentaire. En effet, le cœur de cette définition se situe dans la notion de clôture transitive, dont la définition à son tour recèle un principe inductif (le principe qui assure que si x fait partie de N , alors tout successeur de x aussi en fait partie). On peut donc légitimement s'interroger sur la question de savoir si l'induction ne demeure pas un principe plus fondamental, y compris dans la perspective fregienne (voir notamment [6]).

Russell présente le principe d'induction comme une « proposition purement verbale », semblable à celle qui égale le sens de « quadrupède » à celui de « ayant quatre pattes ». Pour Russell, « nombre naturel » et « nombre inductif » sont des expressions analytiquement équivalentes en ce sens, et il n'est pas utile de chercher une justification plus profonde du concept « inductif ». Il est intéressant, à ce sujet, de souligner qu'un débat analogue se pose pour la notion de nombre. Comme nous l'avons vu, la définition fregienne repose sur un premier principe, à savoir le principe de Hume. Le principe de Hume est en réalité l'objet d'une même controverse : certains, comme [27], y voient un principe analytique, au sens d'un principe qui donnerait la signification de la notion de nombre. D'autres, comme [5], mettent en doute cette caractérisation, en particulier parce que Boolos y voit un principe riche de contenu mathématique, différent en ce sens d'un principe purement logique.

8. Conclusions

En résumé, il me semble avisé de conclure avec Poincaré que le principe de récurrence, bien que très proche en apparence de principes purement logiques, leur est cependant incommensurable. Le principe, comme le montre Frege, peut certes être démontré formellement à partir d'une définition de la notion de nombre – résultat en soi remarquable – mais cette définition elle-même s'appuie sur un premier principe inductif. Il n'en demeure pas moins que l'on doit au génie de Frege d'avoir recherché pour l'induction un fondement dans une théorie générale des suites (cf. le chapitre 3 de [13]), et en

préservée de ce naufrage, et par là que la loi V peut être abandonnée sans que l'édifice entier de Frege ne sombre. C'est cette partie, aujourd'hui appelée Arithmétique de Frege (FA), consistant en la logique du second ordre assortie du principe de Hume, qui fait l'objet d'une attention renouvelée des philosophes des mathématiques depuis trente ans, et dont un aperçu est donné ici. Voir notamment [3] pour une preuve que FA est cohérente si l'arithmétique de Peano du second ordre est cohérente, que Boolos attribue à Frege lui-même. Voir également [8] pour une synthèse historique et mathématique détaillée.

particulier dans une théorie du lien entre succession immédiate et succession médiate dans une suite. Nous devons en outre à Frege une conception des nombres qui l'oppose au formalisme, en cela que les postulats de Peano, au lieu de constituer le point de départ axiomatique d'une définition implicite du nombre, sont pour Frege des propriétés qui résultent d'une définition explicite, ancrée dans le principe de Hume. S'agissant de l'œuvre de Frege, j'ajoute qu'elle connaît une actualité considérable en philosophie des mathématiques, comme en témoigne le nombre croissant de monographies et d'articles parus ces dernières années autour de ses travaux (voir notamment les contributions et bibliographies respectives de [8], [17], et [28]). Signalons notamment le regain d'intérêt porté pour la logique d'ordre supérieur comme cadre général pour les mathématiques, ainsi que la parution en 2013 de la première édition anglaise intégrale des *Grundgesetze der Arithmetik*, par P. Ebert et M. Rossberg. Si les philosophes s'intéressent autant à Frege, et non pas seulement les historiens, c'est à la fois parce que le problème ontologique de la nature des nombres continue de faire énigme (entités abstraites ou concrètes ? concepts ou objets ?), mais aussi parce que Frege a ouvert des perspectives fondationnelles entièrement nouvelles, trop tôt masquées par l'insuccès plus criant de la contradiction de Russell. Au lecteur désireux d'en savoir plus, je recommande particulièrement la lecture de l'article de G. Boolos [4], qui reste à mes yeux la meilleure introduction à l'œuvre comme à la postérité de Frege.

Annexe : la preuve du principe de récurrence

Voici la preuve par Frege de l'axiome d'induction, telle que reconstruite par R. Heck, Jr. en suivant les *Grundgesetze* de Frege (GG) (cf. [17], pp. 152–155). La preuve suit essentiellement de la définition de la relation ancestrale, mais elle implique plusieurs transformations logiques, comme indiqué par les lemmes suivants, que je reproduis ici pour permettre au lecteur d'y accéder directement.

Comme Heck, nous noterons R^* la clôture transitive de R , et $R^{*=}$ la clôture réflexive transitive, soit la relation telle que $R^{*=}(a, b)$ ssi $R^*(a, b) \vee a = b$.

Lemme 1. [GG, Théorème 123] $R^*(a, n) \wedge \forall x(R(a, x) \rightarrow P(x)) \wedge \forall x\forall y(P(x) \wedge R(x, y) \rightarrow P(y)) \rightarrow P(n)$.

Preuve. Immédiat à partir de la définition de R^* . \square

Lemme 2. [GG, Théorème 128] $R^*(a, n) \wedge P(a) \wedge \forall x\forall y(P(x) \wedge R(x, y) \rightarrow P(y)) \rightarrow P(n)$.

Preuve. De Pa et de $\forall x\forall y(P(x) \wedge R(x, y) \rightarrow P(y))$, on déduit $\forall y(R(a, y) \rightarrow P(y))$, et donc l'antécédent du Lemme 1 précédent. \square

Lemme 3. [GG, Théorème 144] $(R^{*=}(a, n) \wedge P(a) \wedge \forall x\forall y(P(x) \wedge R(x, y) \rightarrow P(y)) \rightarrow P(n)$.

Preuve. Posons $\phi := [P(a) \wedge \forall x\forall y(P(x) \wedge R(x, y) \rightarrow P(y))]$. Par le Lemme 2 on sait que $R^*(a, n) \wedge \phi \rightarrow P(n)$. Or $a = n \wedge P(a) \rightarrow P(n)$, donc $a = n \wedge \phi \rightarrow P(n)$. Il suit logiquement que $(R^*(a, n) \vee a = n) \wedge \phi \rightarrow P(n)$, de quoi le lemme résulte. \square

Lemme 4. [GG, Théorème 152] $(R^{*=}(a, n) \wedge P(a) \wedge \forall x\forall y((R^{*=}(a, x) \wedge P(x) \wedge R(x, y) \rightarrow P(y)) \rightarrow P(n)$.

Preuve. Supposons l'antécédent du conditionnel à démontrer. On montre qu'une version de l'antécédent du Lemme 3 en dérive, et que $P(n)$ en résulte par modus ponens. Dans le Lemme 3, substituons à toute occurrence de $P(\cdot)$ la propriété $R^{*=}(a, \cdot) \wedge P(\cdot)$. Cela donne pour l'antécédent : $R^{*=}(a, n) \wedge R^{*=}(a, a) \wedge P(a) \wedge \forall x\forall y(R^{*=}(a, x) \wedge P(x) \wedge R(x, y) \rightarrow R^{*=}(a, y) \wedge P(y))$. Pour démontrer cette clause sous l'hypothèse de l'antécédent du présent lemme, il suffit de montrer que $R^{*=}(a, a)$ et que pour tous x et y , $R^{*=}(a, x) \wedge P(x) \wedge R(x, y) \rightarrow R^{*=}(a, y) \wedge P(y)$. La première condition est immédiate, car elle suit de $a = a$. Pour la seconde, supposons $R^{*=}(a, x) \wedge P(x) \wedge R(x, y)$. Étant donnée l'hypothèse que $R^{*=}(a, x) \wedge P(x) \wedge R(x, y) \rightarrow P(y)$, il suit que $P(y)$. Par ailleurs, $R^{*=}(a, y)$ est démontrable sous l'hypothèse que $R^{*=}(a, x) \wedge R(x, y)$. Il résulte du Lemme 3 que $R^{*=}(a, n) \wedge P(n)$, donc en particulier $P(n)$. \square

Théorème. *L'axiome d'induction est prouvable en logique du second ordre assortie du principe de Hume à partir des définitions de 0, du successeur, et de la notion de nombre entier naturel fondée sur la relation ancestrale.*

Preuve. Le Lemme 4 se réécrit comme suit : $P(a) \wedge \forall x\forall y((R^{*=}(a, x) \wedge P(x) \wedge R(x, y) \rightarrow P(y)) \rightarrow (R^{*=}(a, n) \rightarrow P(n))$. En substituant 0 pour a , et S pour R , et en généralisant universellement sur P et sur n , on obtient exactement l'axiome d'induction. \square

Références

- [1] M. van ATTEN. « Intuition, Iteration, Induction » (2015). Manuscrit, SND, Paris.
- [2] R. BLANCHÉ et J. DUBUCS. *La logique et son histoire*. Armand Colin, 1996.

- [3] G. BOOLOS. *Logic, Logic and Logic*. Harvard University Press, 1998.
- [4] G. BOOLOS. « Gottlob Frege and the Foundations of Arithmetic ». In : [3]. Harvard University Press, 1998, p. 143–154.
- [5] G. BOOLOS. « Is Hume’s Principle Analytic? » In : *Logic, Language and Thought*. Sous la dir. de R. HECK JR. Repr. in [3], chap. 19. Oxford University Press, 1997.
- [6] G. BOOLOS. « The justification of mathematical induction ». In : *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*. Repr. in Boolos 1998b, chap. 24. 1984, p. 469–475.
- [7] D. BOSTOCK. *Intermediate Logic*. Oxford University Press, 1997.
- [8] J. P. BURGESS. *Fixing Frege*. Princeton University Press, 2005.
- [9] R. DEDEKIND. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Fried. Vieweg & Sohn - Braunschweig, 1888.
- [10] P. DEHORNOY. « Progrès récents sur l’hypothèse du continu [d’après Woodin] ». *Séminaire Bourbaki* 915 (2002).
- [11] S. FEFERMAN. « Does mathematics need new axioms? » *American Mathematical Monthly* (1999), p. 99–111.
- [12] G. FREGE. *Grundgesetze der Arithmetik*. Traduction anglaise par P. Ebert et M. Rossberg sous le titre "Basic Laws of Arithmetic", préfacée par C. Wright, avec une annexe de R. Cook. Oxford University Press 2013, 1894.
- [13] G. FREGE. *Idéographie*. Traduction française C. Besson. Louis Nebert: Halle, Vrin 1999, 1879.
- [14] G. FREGE. *Les fondements de l’arithmétique*. Traduction française par C. Imbert. Seuil 1969, 1884.
- [15] K. GÖDEL. « Sur la nature du problème du continu de Cantor ». In : *Intuitionisme et théorie de la démonstration. Trad. française et notice par J. Largeault*. Sous la dir. de J. LARGEAULT. Vrin 1992, 1947, p. 509–531.
- [16] R. HECK JR. *Frege’s theorem*. Oxford University Press, 2006.
- [17] R. HECK JR. *Reading Frege’s Grundgesetze*. Oxford University Press, 2012.
- [18] C. G. HEMPEL. « On the nature of mathematical truth ». *American Mathematical Monthly* (1945), p. 543–556.
- [19] D. HILBERT. « Les fondements des mathématiques ». In : *Intuitionisme et théorie de la démonstration. Trad. française et notice par J. Largeault*. Sous la dir. de J. LARGEAULT. Vrin 1992, 1927, p. 145–163.
- [20] D. HILBERT. « Lettre à Frege datée du 29 décembre 1899 ». In : *Logique et fondements des mathématiques*. Sous la dir. de F. RIVENC et P. DE ROUILHAN. Payot, 1982. 1899, p. 225–229.
- [21] D. HILBERT. « Sur l’infini ». In : *Logique mathématique : textes*. Sous la dir. de J. LARGEAULT. Traduction J. Largeault. Armand Colin, 1972, 1926, p. 215–245.
- [22] G. PEANO. *Arithmetices Principia nova methodo exposita*. Bocca: Torino, 1889.
- [23] H. POINCARÉ. « Les mathématiques et la logique – la logique de Hilbert ». *Revue de métaphysique et de morale* (1906), p. 17–34.
- [24] H. POINCARÉ. « Sur la nature du raisonnement mathématique ». *Revue de métaphysique et de morale* (1894), p. 371–384.
- [25] B. RUSSELL. *Introduction à la philosophie mathématique*. Traduction française par G. Morreau. Payot, 1919.
- [26] C. WRIGHT. *Frege’s conception of numbers as objects*. Aberdeen University Press, 1983.
- [27] C. WRIGHT. « Is Hume’s Principle analytic? » *Notre Dame Journal of Formal Logic* 40 (1) (1999), p. 6–30.
- [28] E. N. ZALTA. « Frege’s Theorem and Foundations for Arithmetic ». In : *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Sous la dir. d’E. N. ZALTA. Spring 2015. <http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/frege-theorem/>. 2015.



Paul Égré

Institut Jean-Nicod, ÉNS, Département d’Études Cognitives et Département de Philosophie, Paris

Paul Égré est chargé de recherche au CNRS et professeur attaché au Département de Philosophie de l’ÉNS. Ses recherches portent principalement sur la logique, le langage, et la théorie de la connaissance. Il a notamment travaillé sur les paradoxes du vague (problème du sorite) et leur résolution en logique trivalente.

Cet article est dédié à Jacques Dubucs, en témoignage reconnaissant du cours de philosophie des mathématiques qu’il dispensait en Sorbonne en 1994-1995, et des riches années de formation passées sous sa direction. Je remercie très vivement Damien Gayet et Maxime Bourrigan de leur relectures critiques et de leurs commentaires détaillés, et Damien Gayet de son invitation à écrire un article pour la *Gazette*. Merci également à Denis Bonnay et Mark van Atten pour plusieurs échanges et suggestions fort utiles en amont et au cours de ce travail, et aux élèves de mon cours à l’ÉNS en 2015 sur les *Fondements de l’arithmétique de Frege*.

Assistant Professor of Mathematics

→ The Department of Mathematics at ETH Zurich (www.math.ethz.ch) invites applications for an assistant professor position in mathematics (non-tenure track).

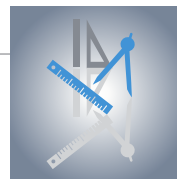
→ Candidates should hold a PhD or equivalent and have demonstrated the ability to carry out independent research work. Willingness to teach at all university levels and to participate in collaborative work within or outside the school is expected. The new professor will be expected to teach undergraduate (in German or English) and graduate courses (in English) for students of mathematics, natural sciences and engineering.

→ Assistant professorships have been established to promote the careers of younger scientists. The initial appointment is for four years with the possibility of extension to six years.

→ **Please apply online at www.facultyaffairs.ethz.ch**

→ Applications should include a curriculum vitae, a list of publications, and a statement of future research and teaching interests. The letter of application should be addressed to the President of ETH Zurich, **Prof. Dr. Lino Guzzella**.

The closing date for applications is 30 September 2015. ETH Zurich is an equal opportunity and family friendly employer and is further responsive to the needs of dual career couples. We specifically encourage women to apply.



Exo7 – Une interview d'Arnaud Bodin

Après avoir publié dans la *Gazette* un article sur les Massive Online Open Courses (MOOCs)¹ et une analyse récente centrée sur les *Www Interactive Multipurpose Server (wims)*², nous poursuivons notre recension des formations en ligne par un entretien avec Arnaud Bodin, qui est à l'initiative du projet *Exo7*.

Que recouvre le projet *Exo7* ?

Le projet est né en 2008 sous l'impulsion d'Uniciciel³. Il s'agissait de mettre en ligne des fiches d'exercices corrigés, sur le programme des trois premières années de licence de mathématiques. Le projet s'est depuis développé autour de deux autres axes : proposer un cours complet en première année ainsi que des vidéos.

Que recherchent les étudiants qui consultent *Exo7* ?

On trouve sur le site des ressources standard de mathématiques. Les étudiants qui arrivent à l'université n'ont pas le réflexe d'ouvrir un livre. Il est beaucoup plus simple de taper un mot-clé qui dirige immédiatement vers le cours en question. C'est un mode d'utilisation simple, gratuit, disponible partout et tout le temps. Ce qui est très apprécié, et qui n'est possible qu'avec l'essor d'internet, sont les vidéos de mathématiques.

Que contiennent ces vidéos et qu'apportent-elles en plus ?

On a la chance à Lille d'avoir un studio d'enregistrement. Les physiciens y filment des expériences de physique amusantes, les biologistes pratiquent des dissections... Pour les mathématiques, c'est beaucoup moins dangereux ! Depuis 2010 on filme la correction d'exercices sur tableau blanc. C'est une reconstitution de correction classique en travaux dirigés. On reprend un à un les exercices déjà

corrigés sur papier. Mais à l'oral, on peut mieux en expliquer la démarche, insister sur les points clés, rappeler l'énoncé d'un théorème, rajouter des commentaires... Évidemment il manque l'interaction étudiant-professeur, mais par contre un étudiant peut faire une pause dans son visionnage, consulter son cours, et revoir la séquence plusieurs fois.

Il y a aussi des cours ?

Effectivement, après les exercices, nous avons eu envie de proposer un cours de première année avec, dès le départ, l'objectif d'en faire des vidéos. Nous avons donc compilé un polycopié à partir de cours de plusieurs collègues. Le format des vidéos est calqué sur celui de la météo : les diapositives défilent et devant, un enseignant présente le cours. Le rendu est très propre, la mise en œuvre (fond vert, prompts...) est beaucoup plus lourde. Encore une fois on propose le cours sous forme papier et sous forme vidéo car les étudiants ont besoin d'entendre « ce théorème est très important », « ce résultat est à connaître » ou même « cette notion est difficile ».

Peut-on proposer d'autres utilisations de ces vidéos ?

Par exemple, afin de garder l'attention des étudiants en amphi, je diffuse des morceaux de vidéos au milieu de la séance. Les étudiants sont fascinés par l'image, plus que par l'enseignant en « live » ! À Marne-la-Vallée, une expérimentation de classe

1. <http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2014/140>

2. <http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2015/145>

3. Université des sciences en ligne.

inversée a vu le jour : il s'agit de développer l'autonomie des étudiants en répondant simplement aux questions qu'ils se posent après avoir visionné le cours en autonomie ; cela revient souvent à détailler des exercices, des exemples, mais le cours est totalement externalisé et le professeur retrouve une place de conseil et d'expert. Il y a aussi les MOOCs où la vidéo joue un rôle central.

Est-ce qu'un étudiant peut apprendre entièrement les maths à distance ?

La réponse est clairement non ! La présence passive devant l'écran risque de faire illusion : elle ne remplace pas l'important travail personnel nécessaire pour comprendre, apprendre et mettre en pratique le cours. Un enseignant de mathématiques reste indispensable. Mais il faut aussi proposer des ressources fiables aux étudiants ayant une notion ponctuelle à étudier lorsqu'ils n'ont pas pu suivre le cours ou ne l'ont pas compris.

Quel retour avez-vous de la consultation de tous ces sites ?

On a un décompte assez précis des fréquentations avec des pointes à 10 000 vidéos vues par jour pendant l'année universitaire. Les plus consultées sont celles sur l'algèbre linéaire et les développements limités. On a proposé aussi quelques cours en dehors du programme officiel (la règle et le compas, la chaînette...) ces vidéos sont beaucoup moins regardées... Les étudiants, clairement, attendent du site une aide pour réussir leurs examens. Dans l'ordre de fréquentation, le Maroc arrive en tête, devant la France et l'Algérie. Par contre il nous manque une étude qualitative sur les usages des vidéos.

Que peut y trouver un enseignant ?

Les collègues ont à leur disposition l'ensemble des fichiers sources : soit 7000 énoncés d'exercices du L1 au L3, des centaines de corrections, 700 pages de cours avec des centaines de dessins. Le tout est donc modifiable à souhait pour l'adapter à son propre enseignement.

Quel est l'avenir du projet Exo7 ?

On termine tout juste l'enregistrement du cours et des exercices de première année ce qui était notre principal objectif. L'année qui vient devrait être une année de transition car les financements actuels se terminent. Par la suite nous souhaiterions trouver un financement durable. Dans l'immédiat, on souhaite publier notre cours sous la forme d'un livre papier à un prix très abordable. Au printemps 2016 nous proposerons un nouveau Mooc « Calcul formel ». Mais on est surtout à la recherche de ressources pédagogiques sur le programme de deuxième année : d'une part des chapitres de cours, mais aussi des exercices, en particulier sur les statistiques et les probabilités (de préférence corrigés). Nous avons ensuite besoin de contributeurs-relecteurs car pour élaborer un chapitre, on mélange des cours de différentes provenances, pour ensuite adapter le tout sous forme de diapositives avant enregistrement. Toutes les bonnes volontés sont les bienvenues !

L'équipe Exo7 est composée de Léa Blanc-Centi, Arnaud Bodin, Niels Borne, Laura Desideri, François Recher, Barbara Tumpach de l'université Lille 1, Benjamin Boutin de l'université Rennes 1 et Pascal Romon de l'université Paris-Est-Marne-la-Vallée. Muriel Boulakia et Nicolas Seguin ont précédemment fait partie de l'équipe. Les ressources pédagogiques proviennent de nombreux collègues d'universités ou de classes préparatoires.



Arnaud Bodin est géomètre et topologue à l'université de Lille. Il s'intéresse aux nouvelles technologies et à ce qu'elles apportent à nos étudiants.

À propos de la licence

Depuis la grande réforme des programmes de lycée mise en place en 2011, nous avons reçu aux rentrées 2013 et 2014 les premières cohortes d'étudiants parvenus dans l'enseignement supérieur. Par une baisse importante des horaires de mathématiques, et surtout, par la suppression progressive de la géométrie au profit d'un enseignement de la statistique, cette réforme a modifié de façon sensible les exigences réelles en mathématiques à la sortie du lycée.

Il a paru important à la Commission Enseignement de la SMF de faire un premier point qui se résume en trois lignes : les étudiants qui arrivent à l'université ou en classe préparatoire, semblent, pour une majorité d'entre eux :

- ne plus maîtriser le calcul numérique ou littéral ;
- avoir perdu le goût et la capacité de travailler chez eux ou en classe ;
- ignorer ce que sont les mathématiques.

Il est tentant de répliquer que ce constat n'est pas nouveau, mais cette fois, il semble que cela concerne même les meilleurs et les plus déterminés de nos étudiants. Pour autant, il faut être prudent avec les jugements tranchés dont souffrent les débats sur l'enseignement et l'école, nous essaierons donc de suggérer quelques pistes en argumentant avec nuances.

1. Constat

1.1 – Difficultés d'adaptation, manque d'autonomie

L'enseignement des mathématiques en L1 ou en classe supérieure surprend considérablement la plupart des entrants par sa différence avec celui du lycée. Pour certains, c'est une véritable douche froide qui entraîne découragements et abandons. Quant à ceux qui poursuivent le cursus jusqu'au bout et réussissent, à l'exception de quelques-uns, ils sortiront de L3 en maîtrisant une faible proportion du programme et en ayant atteint une qualité de rédaction peu satisfaisante.

Alors que l'objectif affiché des différentes ré-

formes de l'enseignement secondaire était de rendre les élèves plus autonomes et d'éveiller leur curiosité, en leur faisant découvrir la matière à travers des documents ou projets, il faut admettre que le résultat n'est pas au rendez-vous, et que nous n'y parvenons guère mieux un an plus tard.

1.2 – Connaissances et compétences

La diminution des horaires et des programmes a entraîné de facto une diminution des connaissances des élèves. Les techniques de base de calcul et de raisonnement ne sont pas acquises. La faillite est totale : règle des signes, distributivité, somme de nombres rationnels, formules trigonométriques, radicaux, dérivées des fonctions simples... rien de tout cela n'est immédiat et tout est source potentielle d'erreur. Mais, bien plus grave, les bases du raisonnement déductif ne sont pas posées.

Parallèlement, la quantité de probabilités et statistiques enseignée au lycée s'est nettement accrue sans qu'aucune amélioration notable des performances des étudiants n'ait été perçue dans ce domaine. Ce déficit de connaissances, de compétences et de compréhension pose le problème de la suite d'études et de l'adaptation des programmes de licence en vue des concours de recrutement, ou des programmes de CPGE en vue des concours et des cursus d'écoles.

1.3 – Capacité de travail et motivation

Ce point est difficile à traiter car il s'agit d'un phénomène sociétal. Les élèves actuels n'ont aucune raison d'être moins intelligents que leurs aînés et ils vivent dans un contexte qui ne peut que les éveiller davantage. La contrepartie de ces sollicitations permanentes est une diminution du temps consacré aux études et une augmentation de celui consacré aux loisirs dont l'offre croît exponentiellement... Le constat est sans appel : les élèves ont perdu l'habitude de travailler en dehors du temps scolaire.

Les entrants en prépa disent très clairement avoir obtenu leur bac avec mention sans avoir jamais travaillé en dehors des cours. À l'université, où

l'on peut penser que les étudiants ont davantage de lacunes et sont souvent moins motivés, la quantité de travail fournie est clairement insuffisante et mal ciblée.

La démarche mathématique classique dans l'enseignement supérieur déstabilise les étudiants actuels pour qui les maths se réduisent à l'application d'une méthode, voire d'une formule. Ils peinent à imaginer un raisonnement faisant appel à plusieurs arguments. Les notions mathématiques qui demandent, pour être domestiquées, une certaine durée d'apprentissage sont perçues comme trop difficiles et provoquent chez certains étudiants une réaction de rejet immédiat, ils n'ont pas l'habitude de persévérer après des tentatives infructueuses. Il est très difficile de faire comprendre que l'erreur est souvent féconde en mathématiques.

2. Causes

2.1 – Programmes et horaires dans le secondaire

Le volume horaire dévolu aux mathématiques n'a cessé de diminuer : on peut estimer la perte au collège à une année d'enseignement environ et le même déficit au lycée depuis la dernière réforme. Il s'en est suivi tout naturellement un appauvrissement des programmes entraînant des défaillances, des incohérences, et des retards jamais compensés. La formation des élèves au raisonnement, à la démonstration et sa rédaction, qui sont des éléments fondamentaux de l'activité mathématique, ne sont que peu présents au lycée. On déplore, par exemple, l'abandon du raisonnement géométrique, au profit de l'introduction d'outils statistiques impossibles à décrire rigoureusement au lycée, et sans que tous les enseignants en poste aient eu droit à une formation sérieuse à cet enseignement.

2.2 – Méthodes pédagogiques du secondaire

L'enseignement classique jusqu'au bac inclus s'est limité à apprendre une méthode et à la répéter à l'identique, l'évaluation consistant alors à vérifier que la technique est acquise et mise en oeuvre sans erreur, avec l'aide de calculatrice programmable. En même temps, un enseignement plus participatif, sous la forme de découverte de la discipline, a été introduit dans le secondaire, en mathématiques

comme dans les autres matières, tendant automatiquement à diminuer la part du cours magistral déjà amputée par la baisse des horaires, et à réduire la phase nécessaire de formalisation des notions.

Par ailleurs, la raréfaction du travail à la maison à l'école primaire (du moins dans les instructions officielles) et son importance toute relative au collège et au lycée, n'ont pas préparé les élèves au travail personnel demandé par l'enseignement supérieur.

2.3 – Pédagogie à l'université

Le but des mathématiques n'est pas seulement d'acquérir des notions ou des techniques, mais surtout d'apprendre à construire un raisonnement logique, la *démonstration* étant le noyau central. Son utilité échappe complètement à la plupart des lycéens qu'il faut convaincre ; or il est presque impossible de bouleverser en un semestre (même une année) des années d'une pratique bien rassurante, qui consiste à apprendre par cœur un petit nombre d'exercices. Il faudrait qu'à l'université, l'étudiant :

- prenne des initiatives sur un problème donné ;
- accepte de chercher, de faire des essais et d'exploiter ses erreurs ;
- combine plusieurs arguments ;
- progresse de manière logique et rédige de façon précise, et, étape suivante,
- se pose des questions et exerce son esprit critique (encore plus indispensable avec internet).

Mais tout ceci prend du temps et paraît incompatible avec l'organisation pédagogique issue du LMD. L'enseignement à l'université est généralement découpé en petites unités qui paraissent indépendantes aux yeux des étudiants et dont le contenu semble effacé après chaque validation. Cela nuit à la cohérence des enseignements et rend très complexe le système d'évaluation. Il paraît aujourd'hui presque impossible d'interroger un étudiant sur un exercice qu'il n'aurait pas déjà fait ! Par ailleurs, la durée des semestres universitaires est trop faible pour un apprentissage qui demande du temps, car il n'est pas rare que l'enseignement s'achève début mai.

Il faut reconnaître que nous sommes loin de passionner nos étudiants, le défi consistant plutôt à introduire, en un minimum de temps, un maximum de notions dont on verra l'utilité... les années suivantes. C'est demander paradoxalement beaucoup de patience à des étudiants dont on pense qu'ils n'en ont plus.

2.4 – Hétérogénéité des publics

La pédagogie à l'université se heurte à l'hétérogénéité des étudiants arrivant en première année. Certains arrivent à l'université faute d'avoir intégré le cursus de leur choix, d'autres, pour se donner une année de réflexion ; ces étudiants démotivés, alièment assez vite la cohorte des « fantômes ». Les autres entrants, bien que pourvus d'un bac S en général, peuvent présenter beaucoup de différences quant à leur option, leur cursus et leurs acquis. Les classes préparatoires sont évidemment plus protégées puisqu'elles accueillent des bacheliers S après sélection.

Dans tous les cas, on doit gérer à la fois quelques bons étudiants, qui ont les acquis nécessaires pour suivre une première année d'enseignement supérieur, avec d'autres ayant des lacunes considérables mais qui ne demandent qu'à les combler si on leur en donne le temps et les moyens. Les premiers s'ennuient si le cours progresse trop lentement, les seconds décrochent dans le cas contraire, et la pédagogie devient un exercice d'équilibriste.

3. Des remèdes envisageables ?

Il paraît clair que les allègements successifs des programmes ne permettent plus aujourd'hui de commencer dès le L1 un véritable apprentissage des mathématiques. D'autant que le lycée, dans sa forme actuelle, nous envoie des étudiants dont les parcours et le bagage mathématique varient énormément.

3.1 – Remise à niveau

Une solution, qui peut paraître utopique et être rejetée pour de fausses raisons économiques, serait d'instaurer une *année de remise à niveau obligatoire* pour tous ceux qui n'ont pas les pré-requis permettant de suivre des études à l'université. Ces étudiants pourraient être détectés par un test de niveau élémentaire, afin que l'orientation vers cette année zéro soit sans équivoque, une remise à niveau ciblée étant bien plus profitable qu'un inévitable redoublement ! Cette solution ne peut fonctionner sans son caractère *obligatoire* pour les étudiants concernés. L'organigramme du LMD n'étant pas toujours adapté, une vraie réforme semble nécessaire plutôt qu'un simple bricolage.

3.2 – Adaptation des programmes et de la pédagogie

On doit aujourd'hui enseigner des mathématiques que nous avons pris l'habitude de considérer comme acquises parce qu'enseignées autrefois au lycée : manipulations d'inégalités, études de fonctions, travail sur les différentes définitions des fonctions usuelles, démonstrations en géométrie du plan, isométries du plan, trigonométrie, formule du binôme etc. Une unité de type *Calculus*, où l'on pratiquerait un entraînement au calcul numérique et littéral semble dès lors *indispensable*.

Mais il faut aussi changer radicalement le point de vue de nos étudiants sur les mathématiques. On observe chaque année des progrès considérables accomplis par ceux qui acceptent et comprennent les « règles du jeu ». La résolution de problèmes a quasiment disparu de l'enseignement en licence, le découpage induit par le LMD et les exercices du lycée en étant en partie responsables, qu'il s'agisse de problèmes à traiter chez soi ou de problèmes présentés en cours pour motiver l'enseignement d'une unité.

Sans doute doit-on réintroduire cette manière de faire des mathématiques qui met en œuvre la réflexion et les sciences en perspective.

Comment faire découvrir et aimer les mathématiques à nos étudiants, sachant que l'introduction d'*activités de découverte* est improductive lorsque manquent les notions de base ? Il nous paraît essentiel de conserver une partie importante d'enseignements traditionnels avec cours magistral et exercices d'entraînement, qui restent un moyen privilégié d'acquisition des objets mathématiques et des techniques de base, mais qu'il faudrait réinvestir dans des problèmes qui leur donnent du sens.

Une question de fond qui se pose aujourd'hui est la suivante : n'est-il pas préférable, à partir de contenus plus restreints, d'apprendre aux étudiants à réfléchir sur un problème et analyser un raisonnement ? Autrement dit, peut-on couvrir un programme plus restreint mais de façon approfondie, en espérant une meilleure imprégnation ? Car actuellement, nous sommes bien en peine de maintenir nos exigences à la hauteur de nos objectifs.

3.3 – Image de l’université

L’image de l’université est faussée par un manque flagrant d’informations sur son action, et conjointement, par un refus d’analyser objectivement les difficultés qui sont les siennes. Les débouchés, autres que ceux liés au professorat, sont souvent mal connus des services d’orientation, malgré

la multiplication des masters scientifiques avec un excellent taux d’insertion professionnelle en entreprise. En revanche, les faibles résultats de première année sont largement diffusés et présentés comme une fatalité. L’explication de ces chiffres, esquissée ici, est assez simple (cf. P. Arnoux¹ ou M. Andler²).

Un effort supplémentaire de communication est de toute évidence nécessaire.

La Commission Enseignement de la SMF est constituée d’une quinzaine de membres. Elle développe au travers de groupes de travail une réflexion sur l’enseignement des mathématiques et ses évolutions, à tous les niveaux. Elle intègre dans sa réflexion la formation et le recrutement des enseignants et collabore avec différentes structures liées à l’enseignement. <http://smf.emath.fr/content/composition-commission-enseignement-de-la-smf>

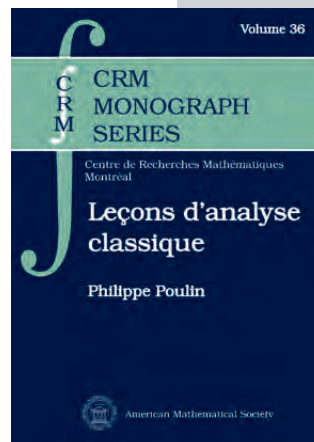
LEÇONS D’ANALYSE CLASSIQUE Exposition d’un Cours Fait par Paul Koosis à l’Université McGill, Montréal

Philippe Poulin, *United Arab Emirates University*

Ce livre est basé sur un cours de deuxième cycle donné en 2005-2006 par M. Paul Koosis, professeur émérite à l’université McGill. Il traite de sujets soigneusement choisis par le professeur à l’intention de ceux qui, plutôt que de rechercher un catalogue exhaustif de résultats techniques et abstraits, veulent être initiés aux découvertes les plus essentielles et prolifiques de l’analyse classique du vingtième siècle. Analyse harmonique, quasi-analyticité, zéros des fonctions entières (dont une preuve inédite du théorème de Levinson-Cartwright), approximation pondérée, principe d’incertitude, mesures harmoniques..., les résultats saillants et géniaux de l’analyse classique sont présentés dans un style soigné, rigoureux et détaillé, préparant les étudiants à des études plus poussées; et au service du lecteur qui, connaissant les bases de la théorie de la mesure et de l’analyse complexe, désire suivre le merveilleux développement de M. Koosis et accroître sa connaissance du sujet.

Je reconnais les choix et le style de Paul Koosis, et j’aime beaucoup les deux. Le titre est volontairement modeste et hors-mode; ce qui fait l’originalité du livre est que, sous l’apparence du “classique”, il échappe complètement aux modes actuelles. Il ne me paraît pas avoir d’équivalent, en aucune langue. C’est un beau cadeau au français ...

— Jean-Pierre Kahane, *Université Paris-Sud Orsay*



CRM Monograph Series Vol. 36
Oct 2015 173pp Hardback 9781470419936 €120.00
A co-publication of the AMS and Centre
de Recherches Mathématiques

Free delivery worldwide at www.eurospanbookstore.com/ams

AMS is distributed by Eurospan | group

CUSTOMER SERVICES:

Tel: +44 (0)1767 604972

Fax: +44 (0)1767 601640

Email: eurospan@turpin-distribution.com

FURTHER INFORMATION:

Tel: +44 (0)20 7240 0856

Fax: +44 (0)20 7379 0609

Email: info@eurospangroup.com



1. <http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2015/143/>
2. <http://tempsreel.nouvelobs.com/education/20141016.OBS2347/facs-oui-la-selection-de-gauche-est-possible.html>



Identifier et remédier à la sous-représentation des femmes en mathématiques

• G. MARTIN

Nous, mathématiciens, aimerions penser que notre discipline est impartiale, et n'a pas à se préoccuper des injustices éventuelles au sein de notre confortable royaume logique. Pourtant, dans nos écoles doctorales, il y a toujours une minorité flagrante de femmes. Il y a un déficit significatif de mathématiciennes dans nos départements, particulièrement quand on monte en grade. Et lors des conférences, il est malheureusement encore fréquent d'avoir tellement peu d'oratrices qu'elles détonnent au sein du bloc homogène des orateurs hommes. Le rythme auquel la situation progresse semble s'amenuiser, si tant est même qu'il y ait encore progrès. En résumé, il y a trop peu de femmes dans notre discipline, et il y a de bonnes raisons de douter que le problème se résoudra simplement par lui-même dans un futur proche.

Le propos de cet article est d'examiner le problème de la sous-représentation des femmes dans les départements de mathématiques, comme oratrices et comme organisatrices de conférences mathématiques, ainsi que comme récipiendaires de prix mathématiques. Nous pensons qu'il est de notre responsabilité éthique de veiller à ce que tous les membres de notre profession soient équitablement représentés, et de démanteler tout obstacle à l'évolution professionnelle, surtout quand ces obstacles pèsent de façon disproportionnée sur une minorité. En particulier, nous affirmons que les organisateurs de conférences mathématiques devraient explicitement veiller à ce que les femmes soient suffisamment représentées parmi les orateurs ; nous soutenons de plus qu'actuellement, nous ne parvenons pas à atteindre cet objectif.

1. Préjugés implicites et perpétuation de l'iniquité de genre

Le déficit de femmes dans les domaines de la science, technologie, ingénierie et des mathématiques (STEM) est aisé à constater. Le système actuel n'est clairement pas à la hauteur de nos attentes en ce qui concerne la diversité de genre. Mais alors, quelles sont les causes de ce déficit ?

On sait de façon certaine qu'il n'existe pas de prédisposition génétique qui favoriserait les hommes par rapport aux femmes dans les domaines STEM (malgré les fréquentes annonces de ce type). La réfutation de cette hypothèse a par exemple paru récemment dans les Notices de l'AMS [22] ; nous nous contenterons ici d'un bref résumé de cette étude. Les filles et les garçons ont toujours réussi de façon comparable les évaluations autres que les tests standardisés tels que le Scholastic Assessment Test (SAT)¹ ; même pour ces tests, les différences ont spectaculairement décliné, jusqu'à être quasiment insignifiantes en ce qui concerne la dernière génération. Dans les autres pays, de plus, ces écarts de performance concernant les tests standardisés sont significativement corrélés aux inégalités de genre dans la culture des élèves concernés. Ces effets se manifestent également au sein des étudiants brillants en mathématiques, et pas seulement dans la population globale, ce qui réfute la théorie du « il y aura toujours plus d'hommes en haut de la pyramide » (voir [2, 11, 16, 19, 18] pour des descriptions détaillées de ces études). Aucune de ces données

1. Le SAT est un examen standardisé sur une base nationale et utilisé pour l'admission dans les universités des États-Unis.

n'est compatible avec l'existence de différences innées reposant sur le sexe en ce qui concerne les compétences en mathématique.

Dans ce cas, quelle est la cause de la sous-représentation des mathématiciennes? Elle provient, en fait, d'un *tissu de préjugés profondément ancrés que notre culture a subrepticement insérés dans nos perceptions et nos réactions*. À cause de ces *préjugés implicites*, nous associons intérieurement par défaut les carrières en STEM (et bien d'autres, comme les postes de pouvoir) aux hommes. Sans nous en rendre compte, sans le réaliser consciemment, nous évoquons les résultats des mathématiciens hommes plus facilement que ceux des mathématiciennes, et notre dissonance cognitive à voir les femmes faisant des mathématiques nous encourage à les évaluer plus négativement.

Malheureusement, l'insertion par notre culture de ces préjugés dans notre inconscient commence extrêmement tôt dans nos vies. Les enseignants, à travers la manière différenciée de répondre aux filles et aux garçons, renforcent chez les garçons l'assurance et la (trop grande) confiance en soi, mais chez les filles la passivité et l'anxiété mathématique². Par exemple, quand les filles répondent à des questions, elles ont plus de chances de recevoir une brève réponse qui reconnaît à peine le fait qu'elles ont répondu, tandis que les garçons bénéficient d'autres questions ou de temps pour développer leur réponse [40]. Les enfants sont involontairement encouragés à considérer les femmes comme moins compétentes que les hommes en mathématiques [26], et les filles deviennent moins enclines que les garçons à demander des approfondissements mathématiques [32]. Ces attitudes dommageables sont amplifiées par l'idée générale que les capacités mathématiques sont fixes et innées, plutôt que plastiques et sujettes au renforcement et à l'amélioration [14] – une conception que notre communauté professionnelle perpétue involontairement.

Une fois ces préjugés implicites en place (et ils sont en effet présents, en *chacun* de nous, non-obstant nos bonnes intentions), ils conduisent à de nouvelles discriminations mesurables qui surviennent sous nos yeux. Des expériences avec des doubles versions de candidatures, de CVs, ou de demandes de promotion – identiques sauf pour le

sexe du nom – démontrent de manière systématique que les femmes sont sous-évaluées par rapport aux hommes, même quand il n'y a absolument aucune différence entre eux.

Par exemple, les professeurs qui sont contactés par les étudiants intéressés par leur programme doctoral répondent plus fréquemment aux hommes qu'aux femmes – cette propension est exacerbée au sein de domaines plus lucratifs et d'institutions prestigieuses [29]. Les membres des facultés, aussi bien les hommes que les femmes, jugent les candidatures des étudiants différemment selon le sexe du candidat : à dossier identique, une femme est jugée moins compétente, et les candidats de sexe masculin ont des offres de salaire de base 14% plus élevées et mieux encadrées en moyenne que les candidats femmes [30]. Quand il s'agit d'évaluer la recherche d'un scientifique par le nombre de publications et les journaux dans lesquels elles paraissent, les évaluateurs dévaluent le travail des femmes au point que pour qu'une femme soit considérée aussi compétente qu'un homme, son dossier doit être 2,5 fois plus fourni que celui d'un homme [41].

Les évaluations de l'enseignement produisent le même différentiel de genre [24, 31], de même que d'autres instruments d'évaluation, au sein des domaines STEM ou ailleurs. Au cours d'une expérience lors de laquelle des femmes et des hommes analysaient et commentaient le travail des uns et des autres, « l'évaluation des femmes dépendait du caractère positif du commentaire qu'elles fournissaient, plus que ce n'était le cas pour les hommes ». De plus, les femmes (mais pas les hommes) qui avançaient des commentaires négatifs étaient jugées moins compétentes par les personnes qu'elles critiquaient [34]. Plus les critères d'évaluation sont vagues et moins ils sont concrets, plus nos préjugés inconscients se manifestent.

Les préjugés implicites de genre de ceux qui nous entourent induisent aussi en nous des manières d'être et des comportements sociaux différents. Inconsciemment, on tend à considérer les manières autoritaires d'un homme comme de la confiance en soi, alors que cette même assurance chez une femme sera prise comme de l'agressivité [12]; on remarque quand les femmes interrompent les hommes, mais pas quand les hommes

2. Notons que les énoncés de ce type sont des faits statistiques qui concernent des tendances à grande échelle de comportements. Bien sûr, il existe des exceptions individuelles à ces tendances. Mais contrairement à une démonstration à partir d'un système axiomatique, l'existence de contre-exemples particuliers n'invalide pas les grandes tendances décrites dans cet article. La démarche scientifique visant à l'étude du comportement humain est bien entendu très différente de celle des mathématiques théoriques, mais elle est parfaitement adaptée à ce sujet.

interrompent les femmes. Le renforcement négatif qui est associé à ces faits enseigne aux femmes la sous-évaluation de leurs propres capacités (et socialise les hommes dans la surestimation des leurs). Quand, par exemple, les conférences fonctionnent par propositions, les femmes s'empressent de congédier leur propre capacité à produire d'excellentes propositions, en tendant à soumettre moins souvent en l'absence d'invitations spécifiques ; de l'autre côté, les hommes s'empressent de soumettre même quand la qualité de leur proposition est d'un niveau inférieur à la moyenne pour la conférence – parce qu'ils surestiment leurs propres compétences [21, 36].

En fait, les effets accumulés de ces préjugés de socialisation sont si puissants qu'ils agissent selon des modes psychologiques différents. L'expression « le syndrome de l'imposteur » a été utilisée par Clance et Imes [8] pour « désigner une expérience intérieure d'imposture intellectuelle, qui semble particulièrement présente et intense parmi un échantillon choisi de femmes de haut niveau. [...] En dépit de leur réussite spectaculaire, tant académique que professionnelle, les femmes qui subissent le syndrome de l'imposteur continuent de penser qu'elles ne sont réellement pas brillantes et ont trompé ceux qui pensent le contraire ». Ce phénomène affecte un grand nombre de femmes aux profils divers et dont les carrières et les travaux sont spectaculaires [23]. Un autre obstacle internalisé au succès des femmes (et d'autres minorités) est la « menace du stéréotype » décrite par Spencer, Steele et Quinn selon ces termes [35] : « quand les femmes font des maths, contrairement aux hommes, elles risquent d'être jugées selon le stéréotype négatif que les femmes ont des capacités mathématiques moindres. Nous appelons cette situation la menace du stéréotype et nous faisons l'hypothèse que ce poids sur les femmes peut avoir des conséquences sur leurs performances en mathématiques. » L'effet de la menace du stéréotype sur les performances réelles a été démontré de nombreuses fois : par exemple « les stéréotypes altérant les capacités peuvent provoquer des processus psychologiques qui peuvent affaiblir la performance des individus subissant le stéréotype, y compris les femmes en mathématiques » [14].

À la lumière de ces renforcements sociologiques négatifs touchant les femmes en science, nous ne pouvons pas juger des choix qu'une femme particulière fait hors du contexte social. Dans notre société actuelle, avec ses préjugés implicites associés au

sexe, il est naïf de penser que les femmes peuvent simplement changer leur façon de réagir à leur environnement et faire disparaître à elles seules l'ensemble de ces iniquités. Il y a des raisons profondément ancrées qui font que résoudre le problème de la sous-représentation ne sera pas possible tant que chacun de nous, et pas seulement ceux qui en sont affectés, décide de faire des efforts dirigés vers la reconnaissance et la résolution des causes de l'iniquité.

Et l'iniquité de genre est clairement présente en mathématiques ; en effet, l'iniquité se fait plus forte quand on monte les échelons. Le fait que les préjugés existent à chaque étape de la formation et des carrières produit une sorte de « canalisation percée » : plus le niveau académique est élevé, plus le pourcentage de femmes baisse (voir [9] et [42]). Dans le monde du commerce, on a constaté des phénomènes analogues, comme l'écart de salaire persistant entre les hommes et les femmes, ainsi que le triste bilan des grandes entreprises concernant la promotion des femmes aux niveaux exécutifs [5]. Par exemple, les femmes sont socialisées de façon à négocier moins souvent une augmentation ou une promotion que les hommes ; mais quand les femmes négocient, la culture de nombreuses entreprises les punit de façon disproportionnée [3, 4]. On peut observer des restrictions similaires en mathématiques lorsque l'on regarde les contrats, les décisions de tenure, et la sélection des récipiendaires de prix. Par exemple, des évaluations biaisées mènent à des bourses plus faibles pour les femmes, ce qui conduit à des opportunités de recherches quelque peu réduites, qui mènent à des curriculums de recherche artificiellement réduits, ce qui produit un nouvel handicap pour les prochaines demandes de contrats [6, 25]. Les iniquités de ce type sont catégorisées dans la littérature sociologique sous le nom de « théorie de l'avantage cumulatif » [10].

Des expériences ont démontré que, lors de conférences, face à un résumé de présentation identique (mais attribué à un homme ou à une femme), les chercheurs – aussi bien hommes que femmes – jugeaient la proposition de meilleure qualité scientifique et étaient plus enclins à vouloir collaborer si un nom masculin y était attaché. De façon similaire, les lettres de recommandation dans les domaines STEM utilisent des figures de langage différenciées qui favorisent les hommes par rapport aux femmes [25]. Les demandes de tenure sont plus durement jugées pour les femmes que pour les hommes professeurs ; même quand une demande

de tenure par une femme est évaluée de façon positive, les évaluateurs ont quatre fois plus de chance d'ajouter des « avertissements », signifiant qu'ils auraient besoin d'informations supplémentaires pour produire un jugement final, que quand c'est la demande d'un homme [37].

Nous sommes essentiellement incapables de percevoir, dans les situations individuelles, cet ensemble diffus de discrimination invisible (c'est la définition d'invisible!); par conséquent, nous nous trompons nous-mêmes en pensant que le monde académique mathématique n'est que pure méritocratie [13, 25]. Après un examen plus approfondi, nous constatons au contraire que notre système de recherche actuel (académique et sociétal) a été corrompu par des éléments externes, qui de façon systématique diminuent le mérite des personnes dès qu'elles appartiennent à des populations désavantagées. Passer un test d'association implicite (par exemple [15]) peut permettre d'ouvrir les yeux et démontrer à chacun de nous qu'il est loin d'être un parangon d'objectivité. En fait, être averti de nos préjugés personnels et de loin supérieur à l'inverse, puisque que les personnes qui se considèrent elles-mêmes comme extrêmement objectives sont souvent les plus promptes à agir de façon discriminatoire [39].

C'est pourquoi faire un effort pour résoudre le problème de la sous-représentation des femmes en mathématiques n'est pas, comme on pourrait craindre, un élément supplémentaire qui apporterait avec lui l'injustice; c'est plutôt une volonté de reconnaître et d'en finir avec l'injustice qui est déjà présente. En d'autres termes, nous ne sommes pas simplement en train d'essayer de réagir au manque patent de mathématiciennes – nous sommes, de façon non intentionnelle et contre nos souhaits, en train de perpétuer nous-mêmes cet écart. Donc, affrontons le problème de la représentation appropriée des femmes en mathématiques, non pas en ajoutant des contraintes, mais plutôt en expurgeant (ou en tout cas en circonvenant) les biais externes qui sont présents.

2. Lutter pour l'équité de genre dans les conférences

En mathématiques, tout comme dans les autres domaines STEM, les écoles doctorales ont produit

une source régulière de docteurs femmes depuis une génération. Par exemple, toutes les années du dernier quart de siècle, le pourcentage des docteurs en mathématiques dans les institutions des États-Unis a été d'au moins 24%, avec un pic à 34% [1]. Pourtant, même ce niveau modeste-ment équitable de représentation ne parvient pas à persister au sein de nombreux aspects de notre discipline, comme nous allons le démontrer avec quelques exemples quantitatifs. Il convient de réitérer ce que nous avons constaté dans la discussion précédente : *même en l'absence de discrimination explicite contre les femmes, les préjugés implicites de genre sont suffisamment puissants pour introduire et renforcer l'iniquité à chacune des étapes de la carrière académique* : délivrance des doctorats aux bons endroits, distribution des postdocs, recrutements universitaires et promotions, évaluation des travaux de recherche, remise de prix, et procédure de sélection pour les conférences.

En ce qui concerne ce dernier point : le manque de conférencières est, malheureusement, extrêmement commun dans tous les champs STEM. Même dans les disciplines scientifiques qui sont actuellement plus paritaires que les mathématiques, les femmes sont moins souvent invitées que les hommes à parler, particulièrement quand il n'y a aucune femme dans le comité d'organisation [7, 20]. La sous-représentation des femmes comme orateurs est un symptôme de ces préjugés, mais elle participe aussi à les perpétuer; par conséquent, affronter le problème de l'iniquité pour les conférences est indispensable pour réduire cette sous-représentation.

Comme exemple édifiant de ce type de sous-représentation, nous pouvons nous pencher sur le dernier Congrès International des mathématiciens (ICM) qui s'est tenu en août 2014 à Séoul en Corée du Sud. En utilisant les informations fournies par le site officiel de l'ICM, nous constatons qu'un seul des orateurs des vingt conférenciers pléniers (5%) était une femme³. De façon générale, parmi l'ensemble des conférenciers invités, il y avait 35 femmes sur 237, soit 14,8%. De simples arguments statistiques confirment que cette forte iniquité de genre ne peut pas être raisonnablement attribuée à une sélection aléatoire tirée parmi la génération associée de titulaires du doctorat.

Un autre exemple, le Joint Mathematics Meeting de l'American Mathematical Society et du Mathe-

3. Toutes les données rassemblées dans cette section peuvent être examinées plus en détail dans la bibliographie annotée rédigée par l'auteur [28].

mathematical Association of America qui s'est tenu en juin 2014 à Baltimore dans le Maryland, exemplifie les alarmantes disparités internes de l'iniquité de genre. Le pourcentage de communications données par des femmes dans le cadre de panels (sessions) était seulement de 36,8%, tandis que celui des oratrices parmi les conférenciers invités n'était que de 25,6% ; ceci fait écho au pourcentage encore plus bas de participants invités observé dans les autres sciences [20]. Quand on se restreint aux sessions invitées organisées par l'AMS, il y avait seulement 24,8% d'oratrices et 22,0% de femmes organisatrices. Pendant les sessions JMM dont la liste des organisateurs a été rendue publique, les sessions avec au moins une femme parmi les organisateurs comportaient une moyenne de 38,3% d'oratrices, tandis que les sessions sans organisatrice avaient seulement 19,8% d'oratrices, soit moitié moins.

Le différentiel dans la représentation des femmes se retrouve de la même manière quand on consulte les statistiques de l'emploi [9] : quand on passe des emplois à temps partiel dans les départements de mathématiques, aux emplois à temps plein non permanents, puis aux emplois permanents (tenured) dans des institutions qui ne délivrent pas de doctorats, puis aux emplois permanents dans des institutions avec doctorats, le pourcentage de femmes décroît régulièrement. En ce qui concerne les journaux, un échantillon de dix journaux parmi les plus prestigieux présente seulement 6,6% de femmes parmi les éditeurs ; six sur ces dix journaux n'ont aucune femme dans leur comité éditorial. Parmi les prix et récompenses prodigués par l'AMS tout au long de son histoire (en excluant le Prix Satter pour les femmes en mathématiques), le pourcentage de récipiendaires femmes est un dérisoire 3,3%. Alors que nous nous sommes légitimement enthousiasmés quand M. Mirzakhani est devenue la première femme à recevoir la Médaille Fields en août 2014, il est vraiment difficile de ne pas être frappés, sachant que moins de 2% des médaillés Fields et 0% des récipiendaires du Prix Abel sont des femmes, par la façon dont de nombreuses mathématiciennes exceptionnelles ne voient pas leur travail suffisamment reconnu⁴.

Il est donc de notre responsabilité d'envisager des actions explicites que nous pouvons prendre pour tempérer l'iniquité actuelle sévissant dans notre discipline. La sous-représentation des

femmes dans les conférences est un symptôme de cette injustice, mais elle contribue également et significativement à la perpétuer ; pour cette raison, nous pensons qu'il est extrêmement important de traiter ce symptôme particulier (en conjonction avec d'autres efforts pour expliciter et attaquer les iniquités à des échelles plus grandes). Notre but devrait être d'implémenter des façons de faire pour compenser tous les autres biais inhérents au système, avec l'espoir qu'une attention consciente à ces discriminations aidera à les réduire dans le futur.

Il faut d'abord songer qu'inviter des orateurs aux conférences signifie plus que récompenser quelques personnes déjà bien reconnues : il s'agit également de promouvoir l'enrichissement scientifique des participants et des orateurs. Un moyen d'y parvenir est de nous exposer aux points de vue les plus différents et nouveaux possibles ; se limiter à notre pool d'orateurs (même de façon non intentionnelle) va à l'encontre de ce but. Des études ont démontré que la diversité démographique produit des effets positifs mesurables sur des projets collectifs [38] ; inversement, le manque de diversité non seulement perpétue les stéréotypes délétères en mathématiques, mais diminue en réalité notre capacité à évaluer des idées qui ne nous sont pas familières [33]. De plus, les gens évaluent inconsciemment les femmes moins favorablement dans des situations où elles forment une faible fraction des participants, et ce d'autant plus en situation de *gender-typing* (c'est-à-dire le processus selon lequel notre société nous conditionne à associer certaines activités ou qualités à un genre unique) [17]. En d'autres termes, continuer à organiser des conférences avec une sous-représentation de mathématiciennes *nous rend en réalité encore moins capables* de reconnaître les femmes comme des mathématiciens compétents.

Inclure la diversité de genre dans les attendus explicites de l'organisation d'une conférence nous permet de penser dès le début nos conférences avec une représentation de genre équitable, et d'explicitement aux autres organisateurs nos attentes à ce sujet. Nous devrions être extrêmement attentifs à la façon dont on désigne les orateurs, en ayant particulièrement en tête que nous avons une tendance à sous-évaluer les travaux des femmes et à négliger des candidates qualifiées. Nous devrions

4. La manière dont ces disparités sont généralement rationalisées consiste à dire qu'« il ne s'est pas encore écoulé assez de temps pour que les femmes aient pu atteindre les échelons les plus hauts du système. » Remarquons que plus d'un quart des doctorats ont été obtenus par des femmes, et ceci depuis assez longtemps pour que la première cohorte soit maintenant trop vieille pour être éligible à la Médaille Fields !

avoir à l'esprit que les femmes sont forcées de refuser des invitations aux conférences plus souvent que les hommes, en raison des iniquités dans les budgets et des responsabilités en dehors du travail, et que les choix logistiques (comme la garde des enfants) peuvent rendre les conférences moins accessibles pour les femmes, si nous n'y prenons pas garde. De plus, nous devrions publiquement nous engager pour une représentation de genre équitable, diffuser cet engagement de façon visible dans les matériels fournis lors de la conférence et à travers nos actions durant la conférence, et ensuite examiner au cours de son déroulement si nous

réussissons (ou non) à atteindre ce but. Finalement, nous devrions plus généralement parler plus ouvertement de la sous-représentation des femmes en mathématiques, pas seulement dans le contexte des conférences mais dans tous les autres aspects de la carrière académique ; et nous devrions nous assurer que nos mots (et notre attention aux mots des autres) reflètent la réalité, qui est que les mathématiques conviennent tout autant aux femmes qu'aux hommes. On trouvera dans [27, Section 4] une liste plus complète de recommandations pour les organisateurs qui cherchent à inclure équitablement les femmes dans leurs conférences.

Références

- [1] American Mathematical Association, *Annual survey of the mathematical sciences: full reports*. accessed September 5, 2014. URL : <http://www.ams.org/profession/data/annual-survey/survey-reports>.
- [2] T. ANDREESCU et al. « Cross-cultural analysis of students with exceptional talent in mathematical problem solving ». *Notices of the AMS* **55**, n° 10 (2008), p. 1248–1260.
- [3] L. BABCOCK et al. « Nice girls don't ask ». *Harvard Business Review* **81**, n° 10 (2003), p. 14–16.
- [4] H. R. BOWLES, L. BABCOCK et L. LAI. « Social incentives for gender differences in the propensity to initiate negotiations: Sometimes it does hurt to ask ». *Organizational Behavior and Human Decision Processes* **103**, n° 1 (2007), p. 84–103.
- [5] L. L. CARLI et A. H. EAGLY. « Gender, hierarchy, and leadership: An introduction ». *Journal of Social issues* **57**, n° 4 (2001), p. 629–636.
- [6] M. CARNES et al. « NIH Director's Pioneer Awards: Could the selection process be biased against women? » *Journal of Women's Health* **14**, n° 8 (2005), p. 684–691.
- [7] A. CASADEVALL et J. HANDELSMAN. « The presence of female conveners correlates with a higher proportion of female speakers at scientific symposia ». *MBio* **5**, n° 1 (2014), e00846–13.
- [8] P. R. CLANCE et S. A. IMES. « The imposter phenomenon in high achieving women: Dynamics and therapeutic intervention. » *Psychotherapy: Theory, Research & Practice* **15**, n° 3 (1978), p. 241.
- [9] R. CLEARY, J. W. MAXWELL et C. ROSE. « Fall 2012 departmental profile report ». *Notices of the American Mathematical Society* **61**, n° 2 (2014), p. 158–168.
- [10] T. A. DIPRETE et G. M. EIRICH. « Cumulative advantage as a mechanism for inequality: A review of theoretical and empirical developments ». *Annual review of sociology* (2006), p. 271–297.
- [11] N. M. ELSE-QUEST, J. S. HYDE et M. C. LINN. « Cross-national patterns of gender differences in mathematics: a meta-analysis. » *Psychological bulletin* **136**, n° 1 (2010), p. 103.
- [12] R. J. ELY, H. IBARRA et D. M. KOLB. « Taking gender into account: Theory and design for women's leadership development programs ». *Academy of Management Learning & Education* **10**, n° 3 (2011), p. 474–493.
- [13] A. GHEAUS. « Three cheers for the token woman! » *Social Science Research Network* (mar. 2013). URL : <http://ssrn.com/abstract=2228632>.
- [14] C. GOOD, A. RATTAN et C. S. DWECK. « Why do women opt out? Sense of belonging and women's representation in mathematics. » *Journal of personality and social psychology* **102**, n° 4 (2012), p. 700.
- [15] A. G. GREENWALD, B. A. NOSEK et M. R. BANAJI. « Take a test: preliminary information, Project Implicit. » (). URL : <https://implicit.harvard.edu/implicit/takeatest.html> (visité le 23/08/2014).
- [16] L. GUIISO et al. « Culture, math, and gender ». *Science* **320**, n° 5880 (2008), p. 1164–1165.
- [17] M. E. HEILMAN. « The Impact of Situational Factors on Personal Decisions Concerning Women: Varying the Sex Composition of the Applicant Pool. » In : *Organizational Behavior and Human Performance*. Vol. 26. 1. 1980, p. 386–395.
- [18] J. S. HYDE et J. E. MERTZ. « Gender, culture, and mathematics performance ». *Proceedings of the National Academy of Sciences* **106**, n° 22 (2009), p. 8801–8807.
- [19] J. S. HYDE et al. « Gender similarities characterize math performance ». *Science* **321**, n° 5888 (2008), p. 494–495.
- [20] L. A. ISBELL, T. P. YOUNG et A. H. HARCOURT. « Stag parties linger: continued gender bias in a female-rich scientific discipline ». *PLOS ONE* **7**, n° 11 (2012).

- [21] JSConf, EU 2012, *Beating the odds—how we got 25% women speakers for JSConf EU 2012*. URL : <http://2012.jsconf.eu/2012/09/17/beating-the-odds-how-we-got-25-percent-women-speakers.html>.
- [22] J. M. KANE et J. E. MERTZ. « Debunking myths about gender and mathematics performance ». *Notices of the AMS* **59**, n° 1 (2012), p. 10–21.
- [23] K. KAPLAN. « Unmasking the impostor. » *Nature* **459**, n° 7245 (2009), p. 468.
- [24] E. KASCHAK. « Sex bias in student evaluations of college professors ». *Psychology of Women Quarterly* **2**, n° 3 (1978), p. 235–243.
- [25] S. KNOBLOCH-WESTERWICK, C. J. GLYNN et M. HUGÉ. « The Matilda Effect in science communication an experiment on gender bias in publication quality perceptions and collaboration interest ». *Science Communication* **35**, n° 5 (2013), p. 603–625.
- [26] S. M. LINDBERG et al. « New trends in gender and mathematics performance: a meta-analysis. » *Psychological bulletin* **136**, n° 6 (2010), p. 1123.
- [27] G. MARTIN. *Addressing the underrepresentation of women in mathematics conferences*. URL : <http://arxiv.org/abs/1502.06326>.
- [28] G. MARTIN. *An annotated bibliography of work related to gender in science*. URL : <http://arxiv.org/abs/1412.4104>.
- [29] K. L. MILKMAN, M. AKINOLA et D. CHUGH. « What Happens Before? A Field Experiment Exploring How Pay and Representation Differentially Shape Bias on the Pathway Into Organizations. » (2015).
- [30] C. A. MOSS-RACUSIN et al. « Science faculty’s subtle gender biases favor male students ». *Proceedings of the National Academy of Sciences* **109**, n° 41 (2012), p. 16474–16479.
- [31] S. NAZARENKO. *Wave turbulence*. Lecture Notes in Physics. Springer, Heidelberg, 2011.
- [32] M. NIEDERLE et L. VESTERLUND. « Explaining the gender gap in math test scores: The role of competition ». *The Journal of Economic Perspectives* (2010), p. 129–144.
- [33] E. RIES. *Why diversity matters (the meritocracy business)*, *Startup Lessons Learned*, February 22, 2010.
- [34] L. SINCLAIR et Z. KUNDA. « Motivated stereotyping of women: she’s fine if she praised me but incompetent if she criticized me ». *Personality and Social Psychology Bulletin* **25**, n° 11 (2000), p. 1329–1342.
- [35] S. J. SPENCER, C. M. STEELE et D. M. QUINN. « Stereotype threat and women’s math performance ». *Journal of experimental social psychology* **35**, n° 1 (1999), p. 4–28.
- [36] C. STANTON. *How I got 50% women speakers at my tech conference*, *Geek Feminism*, May 21, 2012. URL : <http://geekfeminism.org/2012/05/21/how-i-got-50-women-speakers-at-my-tech-conference>.
- [37] R. E. STEINPREIS, K. A. ANDERS et D. RITZKE. « The impact of gender on the review of the curricula vitae of job applicants and tenure candidates: A national empirical study ». *Sex roles* **41**, n° 7-8 (1999), p. 509–528.
- [38] J. SUROWIECKI. « The difference difference makes: waggle dances, the Bay of Pigs, and the value of diversity ». *The Wisdom of Crowds*, *Doubleday* (2004), p. 23–39.
- [39] E. L. UHLMANN et G. L. COHEN. « “I think it, therefore it’s true”: Effects of self-perceived objectivity on hiring discrimination ». *Organizational Behavior and Human Decision Processes* **104**, n° 2 (2007), p. 207–223.
- [40] K. WELLHOUSEN. « Do’s and Don’ts for Eliminating Hidden Bias ». *Childhood Education* **73**, n° 1 (1996), p. 36–39.
- [41] C. WENNERÅS et A. WOLD. « Nepotism and sexism in peer review ». *Nature* **387**, n° 6631 (1997), p. 341–343.
- [42] WISELI, *online brochures and booklets*, *Women in Science & Engineering Leadership Institute (Madison)*. *Advancing women in science and engineering: advice to the top*. URL : <http://wiseli.engr.wisc.edu/docs/AdviceTopBrochure.pdf>.



Greg MARTIN

University of British Columbia

Greg Martin est professeur à l’université de Colombie-Britannique à Vancouver. Il travaille en théorie analytique des nombres, en particulier sur la répartition des nombres premiers.

Ce texte a été traduit de l’anglais par Damien Gayet. La traduction a été amendée et validée par l’auteur.



... une orbite de Reeb

• A. VAUGON

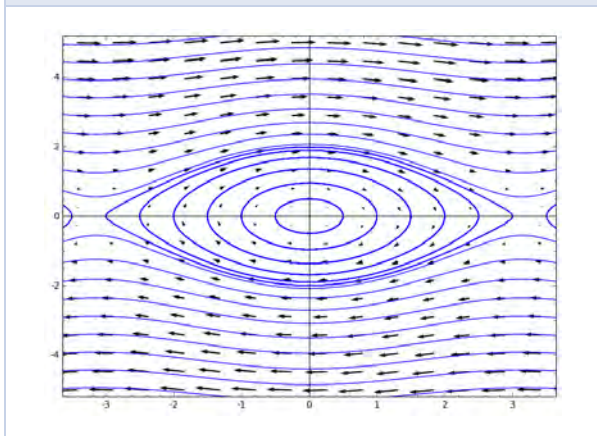
1. Un peu de mécanique hamiltonienne

Considérons un pendule simple de masse m et de longueur l . Repérons sa position par l'angle x qu'il forme avec la verticale et notons y son impulsion. L'énergie H du pendule s'obtient en ajoutant son énergie cinétique et son énergie potentielle, soit $H(x, y) = \frac{1}{2m}y^2 - mgl \cos(x)$. Son mouvement est décrit par le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{y}{m} \\ \dot{y} = -mgl \sin(x) \end{cases}$$

ou, de façon équivalente, par le champ de vecteurs $X_H = \left(\frac{y}{m}, -mgl \sin(x)\right)$. Une trajectoire dans l'espace des phases est alors une courbe $t \mapsto (x(t), y(t))$ dont le vecteur vitesse en tout point est un vecteur de X_H . La figure 1 représente le champ de vecteurs et des trajectoires du pendule simple.

FIGURE 1 – Portrait de phase du pendule simple.



Cette description correspond au formalisme hamiltonien de la mécanique classique qui s'applique dans un cadre très général, des problèmes de pendule à la mécanique céleste. Dans le cas le plus

simple, un système est alors repéré par les coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ où $x \in \mathbb{R}^n$ représente la position et $y \in \mathbb{R}^n$ l'impulsion. Son évolution est décrite grâce à une fonction lisse $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ appelée hamiltonien via l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

Les solutions peuvent également être interprétées comme les orbites associées au champ de vecteurs $X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x}\right)$. Au cours du mouvement le hamiltonien H est préservé et on restreint souvent l'étude à un niveau régulier de H qui est alors une hypersurface de \mathbb{R}^{2n} . C'est ce que nous allons faire ici.

Dans le cas du pendule simple, les niveaux sont de dimension 1. Pour obtenir des propriétés dynamiques intéressantes sur les niveaux de H , il faut regarder des systèmes en dimension plus grande. Considérons donc un exemple explicite d'oscillations en dimension 2 obtenu à l'aide de deux systèmes masse-ressort indépendants et de fréquences propres respectives 1 et ω herz. Le hamiltonien $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ est alors donné par la formule

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \omega^2 x_2^2) + \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)$$

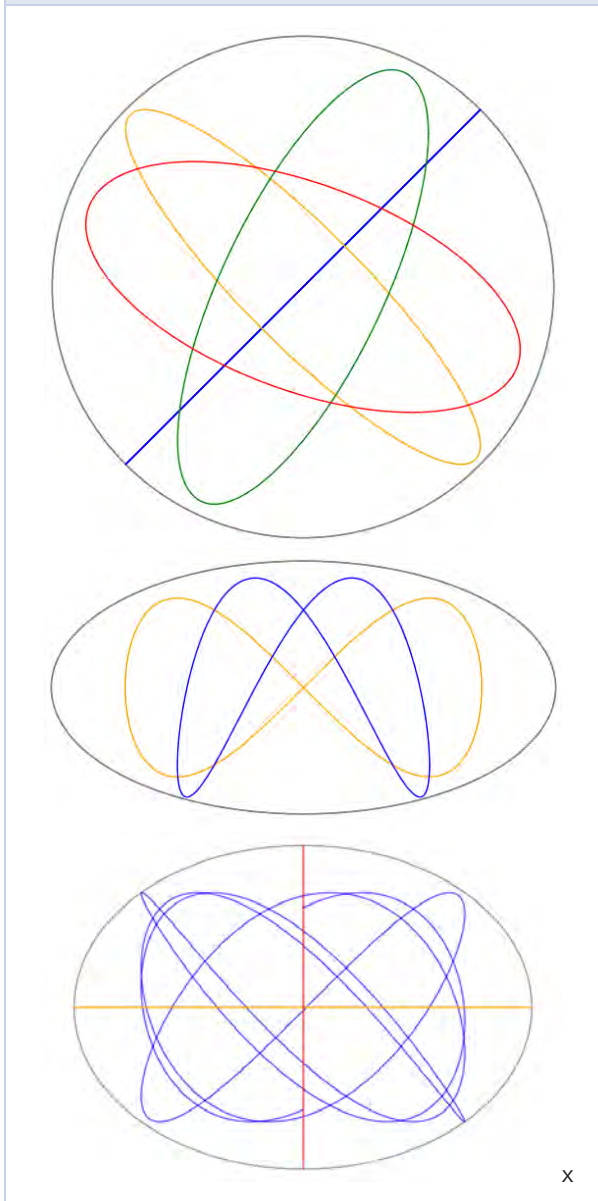
et s'obtient en sommant les énergies cinétique et potentielle. Si $\omega = 1$, on retrouve également l'approximation associée aux petites oscillations d'un pendule sphérique. Il est ici possible de résoudre explicitement l'équation différentielle associée à H . Une solution projetée sur les coordonnées (x_1, x_2) est une courbe de Lissajous, c'est-à-dire une courbe paramétrée de la forme

$$\begin{cases} x_1(t) = a_1 \sin(t + \phi_1) \\ x_2(t) = a_2 \sin(\omega t + \phi_2) \end{cases}$$

où a_1 , a_2 , ϕ_1 et ϕ_2 sont des réels. Une solution est contenue dans l'ellipsoïde $H^{-1}(c)$ où $c = \frac{1}{2}a_1^2 + \frac{1}{2}\omega^2 a_2^2$. Sa projection sur les coordonnées (x_1, x_2) est donc à l'intérieur de l'ellipse d'équation

$x_1^2 + \omega^2 x_2^2 = 2c$ (en gris sur les figures). Lorsque ω est rationnel, toutes les trajectoires sur un niveau régulier de H sont périodiques. Si ω est irrationnel, il y a exactement deux trajectoires périodiques vérifiant respectivement $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ (voir figure 2).

FIGURE 2 – Quelques orbites dans les cas $\omega = 1$, $\omega = 2$ et $\omega = \sqrt{2}$.



Le procédé décrit ici n'est pas limité à \mathbb{R}^n et on peut construire un champ de vecteurs à partir d'une fonction hamiltonienne dès que notre variété est munie d'une structure géométrique appelée structure symplectique. Le flot géodésique peut être interprété dans ce cadre, c'est un exemple fondamental de flot hamiltonien. Considérons une surface S

(ou, plus généralement, une variété de dimension quelconque) munie d'une métrique riemannienne, c'est-à-dire d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur chaque espace tangent. Les courbes qui minimisent localement la distance sont appelées *géodésiques*. Ce sont les trajectoires associées au hamiltonien

$$H(x, v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle$$

défini sur le fibré tangent de S , c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs tangents à S . Choisir un niveau de H revient à choisir la vitesse des géodésiques. Les orbites périodiques correspondent aux géodésiques fermées.

2. À la recherche des orbites périodiques

Il est en général délicat d'étudier les orbites associées à un hamiltonien. Pour dire quelque chose sur les propriétés dynamiques du flot hamiltonien, on s'intéresse aux orbites périodiques. C'est Henri Poincaré qui a introduit cet angle d'approche de la dynamique dans ses travaux sur la mécanique céleste : il démontre l'existence d'orbites périodiques pour le problème à trois corps et peut alors obtenir des informations sur la dynamique au voisinage de ces orbites.

On se pose donc le problème suivant. Soit $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et c une valeur régulière de H . Existe-t-il toujours une trajectoire périodique sur $S = H^{-1}(c)$? En général non (Ginzburg et Herman ont construit de tels exemples) mais on peut répondre positivement à cette question dans certains cas.

Tout d'abord, les trajectoires périodiques de certains flots hamiltoniens particuliers, comme les flots géodésiques, ont fait l'objet de nombreux travaux spécifiques. Ainsi les travaux, entre autres, d'Hadamard en 1898 de Lyusternik et Fet en 1951 ont permis de garantir l'existence de géodésiques fermées dans le cas général (pour une variété compacte sans bord).

Les premières avancées concernant l'existence d'orbites périodiques dans le cas général datent de Rabinowitz et Weinstein en 1978. En 1987, Viterbo [12] a prouvé l'existence d'une orbite périodique sous des hypothèses beaucoup plus satisfaisantes en considérant des hypersurfaces particulières dites de *type contact*. Dans ce cas, l'hypersurface S est en fait une *variété de contact* et le champ hamiltonien est le *champ de Reeb* associé. Tous les exemples précédents rentrent dans ce cadre.

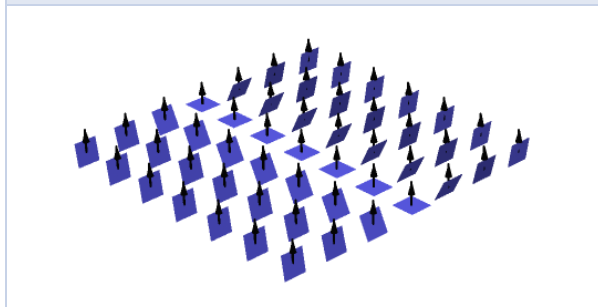
3. Champs de Reeb

Certains champs de Reeb sont donc des champs hamiltoniens sur des hypersurfaces de \mathbb{R}^{2n} mais ce champ de vecteurs est défini dans un cadre plus général et plus intrinsèque. Il est maintenant temps de donner cette définition générale.

Formellement, une 1-forme α sur une variété de dimension 3 (on peut en fait donner une définition en toute dimension impaire) est dite *de contact* s'il existe, au voisinage de tout point, des coordonnées (x, y, z) dans lesquelles $\alpha = dz - ydx$. Dans ces coordonnées, le champ de Reeb est le champ $\frac{\partial}{\partial z}$. Plus intrinsèquement, le champ de Reeb R est décrit par les équations $\alpha(R) = 1$ et $d\alpha(R, \cdot) = 0$. À la différence des structures riemanniennes, par exemple, toutes les formes de contact sont donc les mêmes localement.

Cette définition nous cache beaucoup de choses : en particulier l'objet géométrique fondamental est ici le noyau de α , c'est-à-dire le champ de plans dont le modèle en coordonnées locales est représenté sur la figure 3. On parle alors de *structure de contact*.

FIGURE 3 – Modèle de structure de contact associé à la forme $\alpha = dz - ydx$ (en bleu) et champ de Reeb (en noir)



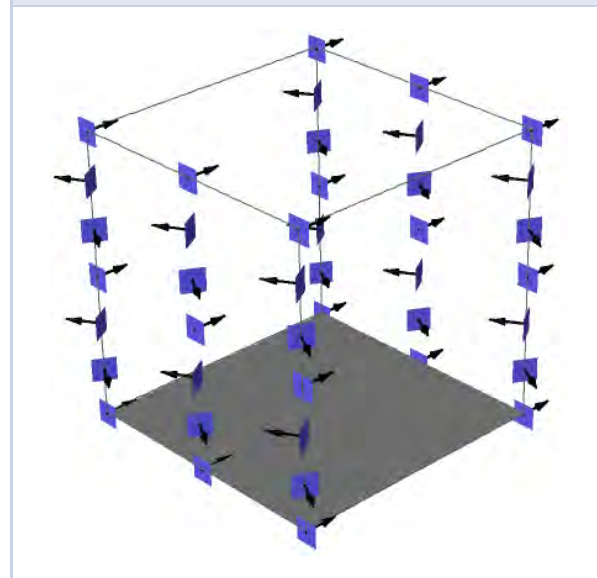
L'étude des structures de contact date des travaux de Sophus Lie sur les équations différentielles. La géométrie de contact puise son inspiration dans la mécanique classique, l'optique géométrique et la thermodynamique. Plus spécifiquement, l'étude des champs de Reeb a été introduite par Georges Reeb [10] à la suite des travaux d'Elie Cartan sur les invariants intégraux.

Les structures de contact existent sur toutes les variétés de dimension 3 compactes sans bord. On a vu qu'elles apparaissent naturellement sur certaines surfaces de niveau d'un hamiltonien. Plus généralement, une structure de contact est ce qui reste d'une variété symplectique sur son bord s'il

est assez « joli » : une forme de contact est alors donnée par la restriction d'une primitive de la forme symplectique. Savoir si une structure de contact est le bord d'une variété symplectique est une question fondamentale en topologie de contact.

Les exemples présentés dans la première section nous fournissent des exemples de variétés de contact et de champs de Reeb. L'exemple de l'oscillateur dans le cas $\omega = 1$ nous donne une forme de contact sur S^3 dont le flot de Reeb n'a que des orbites périodiques (ce sont les fibres de la fibration de Hopf). Dans le cas du flot géodésique, on obtient une forme de contact sur le fibré unitaire tangent d'une surface (c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs tangents de norme 1) dont le flot de Reeb est le flot géodésique.

FIGURE 4 – Structure de contact sur $T^2 \times S^1$ (en gris $T^2 \times \{0\}$) associée à la forme $\alpha = \cos(z)dx - \sin(z)dy$ (en bleu) et champ de Reeb (en noir).



Détaillons un peu ce qui se passe dans le cas du flot géodésique sur le tore plat T^2 (voir figure 4). Le fibré unitaire tangent est alors $T^2 \times S^1$ qui n'est autre que le tore en trois dimensions. Si on repère un point par les coordonnées (x, y, z) , on obtient comme forme de contact $\alpha = \cos(z)dx - \sin(z)dy$. Le champ de Reeb a alors pour coordonnées $(\cos(z), -\sin(z), 0)$, il est tangent aux tores T_z obtenus en fixant la coordonnée z (voir figure 5). Ses trajectoires sont les géodésiques, ici des droites. La pente de la droite est donnée par la coordonnée z . Si la pente est rationnelle, le tore T_z est feuilleté par des orbites périodiques (voir figure 6) et si la pente est irrationnelle, les orbites sont denses dans

le tore T_z . Dans le cas d'une surface hyperbolique la situation est très différente : il y a exactement une orbite fermée par classe d'homotopie libre de la surface (et il y a beaucoup de telles classes).

FIGURE 5 – Structure de contact sur $T^2 \times S^1$ avec quelques orbites de Reeb sur T_π (en rouge).

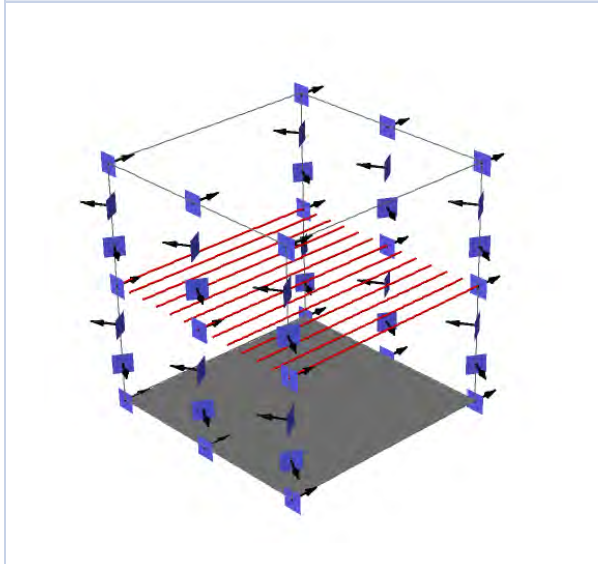
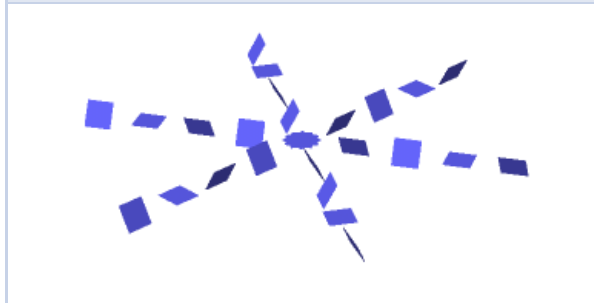


FIGURE 6 – Orbites de Reeb de pente rationnelle (à gauche) et irrationnelle (à droite) sur des tores T_z .



Pour conclure cette série d'exemples, la figure 7 décrit une autre structure de contact sur \mathbb{R}^3 de forme de contact $\alpha = \cos(r)dz + r\sin(r)d\theta$ en coordonnées polaires. Elle appartient à la classe des structures dite *vриллées*. Distinguer ce type de structure a été le premier pas fondamental vers l'étude des structures de contact en dimension 3. Les travaux de Bennequin et Eliashberg jouent ici un rôle déterminant. Trouver des équivalents en dimension supérieure est actuellement un sujet très actif.

FIGURE 7 – Une autre structure de contact sur \mathbb{R}^3 associée à $\alpha = \cos(r)dz + r\sin(r)d\theta$.



Revenons aux propriétés dynamiques des champs de Reeb. Tous les champs de Reeb ne proviennent pas de champs hamiltoniens mais la propriété dynamique remarquable des champs hamiltoniens sur les hypersurfaces de contact est préservée : tout champ de Reeb sur une variété compacte sans bord de dimension 3 admet une orbite périodique. Cette propriété a été formulée par Weinstein en 1979 dans le cadre hamiltonien. Elle a finalement été démontrée par Taubes [11] en 2007. Sa preuve, très délicate, repose sur des techniques analytiques nouvelles : la théorie de Seiberg-Witten. La conjecture de Weinstein est toujours ouverte en dimension supérieure. Les structures de contact sont alors moins bien comprises qu'en dimension 3 même s'il y a eu récemment de très grandes avancées concernant l'existence de telles structures.

L'étude de la conjecture de Weinstein a permis d'introduire des techniques fascinantes en topologie de contact. Ainsi Hofer [5] a développé l'utilisation des courbes holomorphes pour démontrer l'existence d'une orbite périodique de Reeb contractile pour les structures vrillées en s'inspirant des travaux de Gromov en géométrie symplectique.

Les orbites périodiques des champs de Reeb sont également à la base de nouveaux invariants définis dans l'esprit des homologies de Morse et Floer et introduits par Eliashberg, Givental et Hofer. Ces invariants jouent un rôle prépondérant dans l'étude actuelle de la topologie de contact.

Il reste encore beaucoup à apprendre sur les propriétés dynamiques des champs de Reeb. Par exemple, la conjecture de Weinstein garantit l'existence d'une orbite périodique de Reeb, peut-on obtenir une meilleure minoration en fonction de la topologie de la variété ? Que peut-on dire des classes d'homotopie des orbites périodiques ? Quel est le comportement asymptotique avec T du nombre d'orbites périodiques de période inférieure à T ? Comment peut-on relier les propriétés dynamiques

des champs de Reeb aux propriétés géométriques de la variété sous-jacente ?

4. Pour en savoir plus

Les articles de J. Buzzi [2] et P. Massot [9] sur le site *Image des mathématiques* permettent d'en apprendre plus sur Hadamard et les géodésiques fermées et sur la géométrie de contact. La page web de P. Massot contient également de belles illus-

trations et explications sur le sujet.

Le formalisme hamiltonien de la mécanique classique est expliqué en détail dans le livre de V.I. Arnold [1]. L'article de H. Geiges [3] présente la géométrie de contact d'un point de vue historique et l'ouvrage [4] d'un point de vue théorique. Les aspects historiques sont également présentés par R. Lutz dans l'article [8] (un petit peu difficile à trouver). On pourra consulter [7] pour plus d'informations sur les géodésiques fermées et [6] pour plus de détails sur la dynamique hamiltonienne.

Références

- [1] V. I. ARNOLD. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989.
- [2] J. BUZZI. *Hadamard et les systèmes dynamiques*. Images des Mathématiques, CNRS. 2013.
- [3] H. GEIGES. « A Brief History of Contact Geometry and Topology ». *Expo. Math.* **19** (2001), p. 25–53.
- [4] H. GEIGES. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge University Press, 2008.
- [5] H. HOFER. « Pseudoholomorphic curves in symplectisations with applications to the Weinstein conjecture in dimension 3 ». *Invent. Math.* **114** (1993), p. 515–565.
- [6] H. HOFER et E. ZEHNDER. *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*. Birkhäuser, 2012.
- [7] W. KLINGENBERG. *Lectures on Closed Geodesics*. Springer, 1978.
- [8] R. LUTZ. « Quelques remarques historiques et prospectives sur la géométrie de contact ». *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* **58** (1988). Conference on Differential Geometry and Topology, p. 361–393.
- [9] P. MASSOT. *Le théorème de Bennequin I et II*. Images des Mathématiques, CNRS. 2010.
- [10] G. REEB. « Sur certaines propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques ». *Acad. Roy. Belgique. Cl. Sci. Mém.* **27**, n° 9 (1952).
- [11] C. H. TAUBES. « The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture ». *Geom. Topol.* **11** (2007), p. 2117–2202.
- [12] C. VITERBO. « A proof of Weinstein conjecture in \mathbb{R}^{2n} ». *Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non linéaire* **4** (1987), p. 337–356.



Anne VAUGON

Laboratoire de mathématiques, UMR 8628, université Paris-Sud, Orsay
anne.vaugon@math.u-psud.fr

Anne Vaugon est maître de conférences. Elle travaille en géométrie symplectique et en dynamique et s'intéresse plus particulièrement à la géométrie de contact.



La loi sur le numérique concerne le monde de la recherche

L'élaboration d'une loi sur le numérique (loi pour une République numérique) fait en ce moment l'objet d'une consultation publique sur le site <http://www.republique-numerique.fr/> avant son envoi au conseil d'État.

Ses enjeux pour le monde de la recherche sont importants. Ce texte touche en effet à de nombreux aspects du numérique et nous concerne, vous et nous, chercheurs, dans notre manière même de travailler, par exemple, pour ce qui relève de la neutralité du net, de l'open-data, des activités d'exploration des données, de la protection des données et du droit sur les données scientifiques, du libre accès aux publications scientifiques, etc. Beaucoup d'entre vous ont sans doute fait l'expérience de la signature de contrats avec de grands éditeurs internationaux, qui imposent une cession exclusive des droits sur les textes, mais aussi sur tout ce qui peut les accompagner (données à l'appui, illustrations, etc.); et cela en échange d'une diffusion trop souvent limitée aux plus riches bibliothèques. Depuis quelques années, nombre de pays (Allemagne, Canada, États-Unis, Royaume-Uni, etc.) ont pris en réaction des dispositions qui permettent aux auteurs.e.s de conserver, au minimum, le droit de diffuser librement leurs textes en ligne après une période courte d'embargo. Une première version du projet de loi numérique incluait des dispositions de ce type. Au contraire, la version actuellement envisagée laisse planer un réel risque de captation des résultats (des publications, voire des données) de la recherche publique par quelques grandes plateformes privées. Le droit de publier en libre accès sans période d'embargo doit être instauré pour les recherches financées sur fonds publics : il faut encourager les pratiques de libre accès et de fouille de texte et de données des publications scientifiques.

Rappelons qu'en mathématiques, les bases de données relatives aux publications sont très importantes pour le travail individuel et communautaire. Une particularité de cette discipline est l'importance de l'accès facile aux publications

« anciennes » (plusieurs années, décennies voire siècles). En ce qui concerne les données numériques, il est nécessaire que pour des questions de reproductibilité, comparaison et interprétation de méthodes de simulation et calcul, elles soient librement accessibles et ceci concerne aussi bien les logiciels que les codes de calcul.

C'est pourquoi nous vous incitons à vous informer à ce sujet et, si vous souhaitez, comme nous, défendre un accès ouvert aux résultats de la recherche publique, à réagir publiquement.

Diverses initiatives ont été lancées. Vous trouverez ci-après une recommandation approuvée à l'unanimité par le Conseil scientifique du CNRS, le 25 septembre dernier. Une contribution plus longue du Conseil scientifique au livre blanc du CNRS sur le « projet de loi sur le numérique », qui détaille les enjeux, discipline par discipline, est disponible à cette adresse <http://preview.tinyurl.com/doc-cs-cnrs>. Voir aussi le site <http://www.cnrs.fr/dist/consultation-loi-numerique.html>.

Nous joignons également un extrait d'une tribune du Conseil national du numérique parue dans Le Monde du 10 septembre, titrée « Favoriser la libre diffusion de la culture et des savoirs », et qui a déjà été signée par 1700 personnes, dont un grand nombre de scientifiques de toutes les disciplines.

Valérie Berthé (informatique), François Bonnarel (astronomie), Peggy Cénac-Guesdon (mathématiques), Maria J. Esteban (mathématiques), Claire Lemerrier (histoire), Sophie Pochic (sociologie), membres du Conseil scientifique du CNRS.

Recommandation du conseil scientifique du CNRS

Le conseil scientifique du CNRS s'est tenu régulièrement informé des discussions entourant la préparation du projet de loi sur le numérique qui doit être soumis au Parlement à l'automne 2015. Il a produit sa propre contribution au livre blanc de l'organisme sur ces questions d'importance capitale pour les activités de recherche scientifique. Le conseil réaffirme deux principes essentiels :

- la science est un bien commun de l'humanité qui ne saurait souffrir de captation abusive par des intérêts privés,
- le libre accès aux résultats de l'activité scientifique (publications, données de la recherche, méta-données, services à valeur ajoutée) ne saurait être entravé sans remettre en cause le développement même de la science. Ce principe de libre accès est bénéfique autant pour les auteurs et la communauté scientifique, que pour les organismes de financement et plus largement l'enseignement supérieur.

Fort de ces principes, le conseil scientifique s'inquiète de possibles reculs en terme de durée d'embargo et de libre accès aux publications scientifiques qui pourraient intervenir dans le projet de loi. Il rappelle que d'autres pays, comme l'Allemagne, le Canada, les États-Unis, le Royaume-Uni, ont mieux su résister aux demandes des éditeurs privés en faisant adopter dans leurs législations le principe du libre accès.

Il rappelle son exigence de voir consolider par la loi les pratiques actuelles en matière d'accès aux données scientifiques, comme c'est déjà le cas dans ces pays :

- lorsque l'activité de recherche a été financée en majorité par des fonds publics, la cession à un éditeur des droits sur les données et les écrits issus de cette recherche ne saurait être exclusive ;
- les scientifiques doivent avoir le droit de mettre à disposition gratuitement, sous une forme numérique, les données et les résultats précités, a priori sans période d'embargo imposée par les éditeurs ;
- les services de « fouille de données » et assimilés jouent un rôle considérable dans la valorisation scientifique des données et écrits en libre accès. Ils ne doivent pas être entravés par les plateformes à finalité commerciale de diffusion de ces données et écrits.

Extrait de la tribune « Favoriser la diffusion de la culture et des savoirs »

L'open access, déjà adopté chez nos voisins, notamment allemands et anglais, consiste à inscrire dans la loi la possibilité, pour les chercheurs qui le souhaitent, de publier en accès libre des articles de recherche qui ont été financés par l'argent public, à l'issue d'une courte durée d'embargo. Cette mesure a pour objectif de limiter la dépendance des institutions de recherche publique aux grands éditeurs scientifiques : actuellement ceux-ci sont soumis à un système de double paiement, alors même que depuis 2012 la Commission européenne invite les États membres à consacrer l'open access dans leur législation.

En effet, les chercheurs, financés par l'argent public, sont pour la plupart dans l'obligation, pour des raisons de visibilité et de carrière, de publier dans les revues scientifiques prestigieuses. Ils se trouvent donc dans une situation de dépendance face à des revues scientifiques qui appartiennent aujourd'hui à des oligopoles détenus par quelques grands éditeurs (Elsevier, mais aussi Springer, Wiley, Nature). Afin de pouvoir publier dans ces revues, les auteurs sont obligés de céder leurs droits d'auteurs. Ils fournissent également leur expertise pour définir les choix éditoriaux des revues. À cet égard, l'augmentation des prix des abonnements des revues ne semble pas trouver de justification, d'autant plus que le passage au digital a diminué de manière importante les coûts de publication.

Parallèlement, les établissements d'enseignement supérieur et de recherche dépensent annuellement plus de 80 millions d'euros pour avoir accès aux ressources électroniques. Les prix d'accès ont d'ailleurs continuellement augmenté : de 7% par an depuis 10 ans. En 2011, la bibliothèque de l'ÉNS Ulm s'est par exemple acquitté de plus de 500 000 euros de dépenses pour des revues, sur les 2 millions d'euros qui constituent son budget. Cette situation limite donc fortement les avancées de la recherche tout en pesant sur les finances publiques. Mais l'open access n'a pas pour unique objectif de réduire les dépenses des établissements publics, l'open access a un impact bien réel sur l'avancée de la recherche, voire même dans certains cas de la préservation de la santé publique. L'équipe en charge de la réponse du Liberia face à la menace du virus Ebola n'a ainsi pas pu accéder à certains articles du fait de leurs coûts importants, alors qu'ils auraient été nécessaires afin d'identifier le virus plus tôt et ainsi adapter plus rapidement les mesures de prévention et de soin.

D'autres mesures sont nécessaires pour construire un environnement numérique ouvert et propice à la recherche, l'innovation et la création. L'exception pour la fouille automatique de données de texte (text et data mining) consiste à autoriser la recherche automatisée parmi un volume très important de textes ou de données : il est possible d'accéder à des résultats qui n'auraient pas pu être découverts par une autre méthode. Cela donnerait une force nouvelle à l'entrée de la recherche française à l'heure des mégadonnées (big data) et de réaliser des gains de productivité très importants, alors même que d'autres pays, comme le Royaume-Uni, le Japon et les États-Unis, ont pris une avance considérable dans ce domaine. Le text and data mining a d'ailleurs été qualifié par le MIT comme l'une des dix technologies émergentes qui « changeront le monde » au XXI^e siècle.

La véritable valorisation du patrimoine culturel passe par son usage ouvert au plus grand nombre. C'est d'ailleurs la mission historique des bibliothèques publiques, qui profiteront largement de ces dispositions. La circulation ouverte de la science nous aide à affronter les transitions auxquelles nous sommes confrontés. Une définition positive du domaine public et son inscription dans la loi serviront le rayonnement de la science et de la culture à l'heure du numérique. Les États-Unis, le Royaume-Uni et l'Allemagne l'ont déjà compris. Qu'attendons-nous pour profiter, nous aussi, de la nouvelle audience et de la notoriété apportées par cette plus grande diffusion ?



Quelques nouvelles de l'INSMI

1. Délégations CNRS 2015

La campagne des délégations 2015 s'est achevée pour l'Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions (INSMI) avec un bilan de 101 années de délégations sur un total de 480 années. À titre de comparaison, en 2014, le bilan était de 102,5 pour le même total. Ainsi, comme les années précédentes, bien qu'il soit le plus petit des dix instituts du CNRS, l'INSMI bénéficie d'un cinquième des délégations mises en jeu. En effet, la communauté mathématique est très universitaire et a donc davantage recours aux délégations que d'autres disciplines.

Ces 101 années se répartissent en 6 délégations d'un an à temps plein et 190 délégations d'un semestre ou d'un an à temps partiel (14 et 177 en 2014). Ce sont donc 196 collègues qui bénéficieront d'une délégation durant l'année universitaire 2015/2016 (191 en 2014/2015). Sachant que l'institut avait reçu 256 demandes, le pourcentage de satisfaction est de 77% (285 demandes), contre 67% de satisfaction en 2014.

Rappelons que depuis la campagne 2013, l'étape finale de l'attribution des délégations se fait au niveau des « sites » et est arbitrée par son délégué scientifique référent (DSR). Celui-ci recueille les avis élaborés par les sections du comité national puis dialogue avec les directions d'établissements et les instituts. Les dossiers sont évalués par les sections de l'institut dont relèvent les laboratoires d'affectation. En 2015, une seule demande a été examinée par une section d'un autre institut que l'INSMI. L'expertise scientifique des dossiers effectuée par la section 41 du comité national s'est basée sur la liste de critères élaborée conjointement par le comité national et l'INSMI, liste qui est publiée sur le site de la section. Comme toujours, le projet scientifique a été l'élément déterminant de l'évaluation du dossier. Rappelons aussi que la fiche synthétique demandée par l'INSMI doit être renseignée clairement. En particulier, les informations concernant les services faits lors des années précédentes, les décharges, les CRCT et les délégations

auprès d'autres organismes de recherche (INRIA par exemple) doivent y apparaître. Enfin, concernant les accueils en Unité Mixte Internationale (UMI), il faut penser à se signaler auprès du directeur adjoint scientifique en charge de l'international ; pour mémoire, un appel d'offre spécifique est envoyé aux laboratoires durant l'automne.

2. Postes de chercheurs associés 2015

Chaque année, lors des demandes effectuées par les unités dans le cadre du dialogue de gestion, il est possible de demander des postes de chercheurs associés (postes rouges). Ces postes permettent de faire venir dans nos unités (UMR, UMS, FR) des chercheurs venant de l'étranger qui sont embauchés sur un contrat à durée limitée d'une durée d'au moins 3 mois.

Dans ce cadre, à l'automne 2014, l'INSMI a reçu 53 demandes (62 en 2013). Comme les années précédentes, l'INSMI a affecté tous ses crédits de CDD chercheur pour les invitations de chercheurs étrangers confirmés. Les dossiers scientifiques ont été évalués par le comité national et 40 (30 en 2013) de ces demandes ont été acceptées, 32 DR et 8 CR. Ces postes de chercheurs associés correspondent annuellement à 9,25 emplois à temps plein (111 mois). Parmi ces demandes, 18 mois concernent l'organisation des semestres à l'IHP, et 27 mois des chercheurs issus de nos UMI/LIA. Le solde de 66 mois, soit 59% de ces postes de chercheurs invités, répondaient à des demandes des UMR et Fédérations de l'INSMI.

3. Programmes PEPS et assimilés pour 2015

Chaque année, l'INSMI s'associe à des appels d'offre du CNRS qui peuvent intéresser les mathématiciens. Ces appels d'offre, souvent interdisciplinaires, sont essentiellement de trois types :

1. ceux gérés directement par l'INSMI ou en collaboration avec d'autres instituts,
2. ceux pilotés par les missions du CNRS,
3. les Projets exploratoires premier soutien (PEPS) de site gérés et financés conjointement par la Mission pour l'Interdisciplinarité (MI) et le site.

Globalement, on observe une faible pression du côté des mathématiques et les collègues sont vivement encouragés à postuler. Les appels d'offre sont relayés dans la lettre de l'INSMI ou sur le site internet.

Le format le plus répandu est le PEPS qui vise à soutenir des recherches à haut risque, sur des sujets innovants peu subventionnés par les appels d'offre traditionnels. Les PEPS servent donc à lancer un sujet ou une nouvelle collaboration. Le dossier de candidature est extrêmement léger (4 à 6 pages) et nécessite un faible niveau de détails. Les projets portés par des jeunes chercheurs sont très appréciés par les évaluateurs. Typiquement, ces projets durent un ou deux ans, avec un budget annuel de 5 à 10 kEuros. Le budget peut être utilisé pour du fonctionnement et du matériel et ne permet donc pas de payer des salaires ou des subventions de stage (à l'exception des PEPS de site pour lesquels la contribution partielle du site permet éventuellement un financement de salaire). Les crédits sont versés directement dans les laboratoires et doivent être dépensés au cours de l'année civile. Pour les appels interdisciplinaires, les projets sont évalués par des experts de deux disciplines et il est donc important que la rédaction des projets soit faite en coordination avec tous les collègues impliqués dans le projet.

Détaillons les projets portés par des membres de laboratoires relevant de l'INSMI durant l'année universitaire 2014-2015. Notons que des mathématiciens sont également impliqués dans plusieurs autres projets portés par des membres de laboratoires relevant d'autres instituts.

1. Sous l'impulsion de l'INS2I, nous avons lancé le PEPS FASCIDO sur les sciences des données, pour lequel 4 projets ont bénéficié d'une subvention totale de 60 kEuros environ.
2. Dans le cadre de la Mission pour l'Interdisciplinarité, plusieurs projets sélectionnés sont portés par un membre d'un laboratoire relevant

de l'INSMI. Cette année, l'INSMI a été concerné par les projets suivants :

- le défi INFINITY en lien avec la physique théorique (4 projets portés par des mathématiciens parmi les 28 projets sélectionnés),
- le PEPS FAIDORA autour des problèmes liés aux faibles doses (1 projet sur 7),
- le PEPS MOMIS sur la modélisation en sciences sociales (2 projets sur 13),
- le défi Littoral sur les nouvelles approches pour le littoral (3 projets sur 9),
- un projet commun INSMI-INSB sur les signaux physiologiques.

L'enveloppe totale correspondant à ces projets est d'environ 140 kEuros.

Par ailleurs, un PEPS-égalité a été lancé en 2015 avec la Mission pour la place des femmes et l'égalité professionnelle. 15 des 18 projets présentés ont été financés pour un montant total de 55 kEuros environ. Ce PEPS était adossé sur un contrat européen obtenu par la Mission.

3. Les PEPS de site se gèrent au niveau des territoires, où les politiques de site conduisent à des regroupements d'établissements. En effet, l'interdisciplinarité est souvent utilisée comme source et force de structuration scientifique. Depuis 2012, la Mission pour l'Interdisciplinarité a mis en œuvre une dizaine d'actions de type PEPS de site qui ont été co-construits par le CNRS (avec la délégation régionale et le délégué scientifique référent du site) et les partenaires. En 2015, un appel d'offre PEPS de site a été lancé sur les sites de Bordeaux, Grenoble, Strasbourg, Lyon, Lille, Nice, Lorraine, Sorbonne Université, Paris Sciences et Lettres, Guyane, Toulouse, Marseille, Saclay, Paris-Est, Clermont-Ferrand, Montpellier. Les dossiers déposés reçoivent une évaluation externe puis une évaluation conjointe par le site et le CNRS. Dans ce cadre, une quinzaine de projets portés par des membres de laboratoire relevant de l'INSMI ont été sélectionnés pour un montant total de 146 kEuros.

Virginie Bonnaillie-Noël, Sinnou David, Clotilde Fermanian Kammerer, Mathieu Lewin.

À propos de la campagne d'attribution de la PEDR-2015 de l'INSMI

Le passage de la Prime d'Excellence Scientifique à la Prime d'Encadrement Doctoral et de Recherche (PEDR) s'est accompagné cette année d'une nouvelle orientation en faveur des jeunes chercheurs par le CNRS. En effet, à partir de 2015, les CR2 nouvellement recrutés se voient proposer automatiquement de postuler à la PEDR dès leur arrivée au CNRS. En conséquence, cette année, deux promotions de jeunes chercheurs (ceux recrutés en 2015 ainsi que ceux de 2014) ont déposé leur première candidature à la PEDR. Le comité pour la PEDR à l'Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions (INSMI) accorde toujours une attention

particulière aux dossiers des chercheurs CR2. De ce fait, le nouveau dispositif s'étant mis en place à budget constant, le changement de procédure a conduit à un manque flagrant de primes pour les autres candidats, en contraste manifeste avec le niveau remarquable des dossiers que le comité pour la PEDR a examinés.

Le comité PEDR - INSMI (CNRS) : Virginie Bonnaillie-Noël, Jean-Benoît Bost, Vincent Colin, Sinnou David, Clotilde Fermanian Kammerer, Nicolas Fournier, Sandrine Grellier, Michaël Heusener, Sandrine Péché, Christoph Sorger, Zoubeir Zadvat.

Les Unités Mixtes Internationales du CNRS

1. Le réseau des UMI

Une Unité Mixte Internationale (UMI) du CNRS est un laboratoire dont l'une des tutelles est le CNRS et une au moins des autres tutelles est une institution étrangère. Son statut en fait un laboratoire français à part entière (où les chercheurs français peuvent être en poste, éligible aux appels d'offres de l'ANR ou de l'Union Européenne), sans toutefois lui enlever le statut de laboratoire du pays hôte (éligible aux appels d'offres des agences de moyens etc.). Les UMI sont relativement récentes.

En dehors des questions de statut, le réseau des UMI rattachées à l'Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions (INSMI) s'est construit dans l'idée de nouer un ensemble de partenariats durables avec de grands centres internationaux permettant des échanges pérennes, le développement d'une recherche collaborative active ainsi que des échanges de jeunes chercheurs. Il s'agit du moyen principal de l'INSMI pour soutenir la mobilité internationale de notre communauté, à côté des dispositifs d'invitations personnelles dont disposent certaines institutions. À l'heure actuelle, le réseau comporte neuf UMI.

- Le *Centre de Modélisation Mathématiques (CMM)* de Santiago-Chili est la plus ancienne UMI du CNRS à laquelle nous sommes associés depuis la création du centre lui-même en 2000. Le CMM a plusieurs dizaines de chercheurs permanents. L'UMI-CMM est dirigée par Alejandro Jofre. Les recherches menées au CMM conduisent à un large spectre d'applications. Le CMM est en lien direct avec l'industrie du pays et, du fait de son positionnement, l'UMI-CMM accueille également de manière régulière des chercheurs français relevant de l'Institut des sciences de l'information et de leurs interactions (INS2I) du CNRS.
- L'*Instituto Nacional de Matemática Pura e aplicada (IMPA)*, à Rio de Janeiro-Brésil, premier laboratoire créé par le CNPQ brésilien au début des années 50, est associé au CNRS en qualité d'UMI depuis 2005. L'IMPA a plusieurs dizaines de chercheurs permanents. L'UMI-IMPA est dirigée par Cesar Camacho (directeur) et Claudio Landim (directeur adjoint). L'IMPA a été moteur dans la mise en place du réseau d'échanges France-Brésil qui permet des visites croisées de courte durée. Lieu d'excellence historique pour les systèmes dy-

- namiques, les thématiques de l'IMPA s'élargissent continuellement.
- Le *Centre de Recherches Mathématiques (CRM)* à Montréal-Canada, consortium de six universités de la région, regroupe les forces vives des mathématiques du Québec et de ses environs immédiats, soit plusieurs centaines de permanents. Il est associé au CNRS en qualité d'UMI depuis 2011. L'UMI-CRM est co-dirigée par Emmanuel Giroux et Luc Vinet. Organisant régulièrement des semestres thématiques, le CRM est également un lieu de rencontre international. En effet, le spectre scientifique du CRM est large, couvrant l'ensemble des mathématiques ainsi que l'informatique théorique et la physique mathématique.
 - Le *Pacific Institute for the Mathematical Sciences (PIMS)* est un consortium de neuf universités de l'ouest du Canada et du nord-ouest des USA. L'UMI-PIMS est dirigée par Martin Barlow. Il regroupe le potentiel scientifique du nord-ouest de l'Amérique et regroupe plusieurs centaines de permanents. Le PIMS dispose de locaux dans l'ensemble des universités partenaires. Organisant régulièrement des programmes thématiques, il est également un lieu de fort passage. Le spectre scientifique couvre l'ensemble des mathématiques et l'informatique théorique est très présente dans les échanges. Le PIMS est associé au CNRS en qualité d'UMI depuis 2007.
 - L'*Indo French Center for Applied Mathematics (IFCAM)* est basé à l'Indian Institute of Science à Bangalore-Inde. L'UMI a été créée en 2012 et a permis la mise en réseau de l'ensemble des chercheurs Indiens en mathématiques appliquées ainsi que ceux travaillant aux interfaces avec la physique et la biologie et souhaitant collaborer avec les chercheurs français. L'UMI est dirigée par Govindan Rangarajan (directeur) et Jean-Pierre Raymond (directeur adjoint). L'IFCAM organise régulièrement des appels à projets collaboratifs entre équipes.
 - Le *Laboratoire Poncelet* est basé à l'université indépendante de Moscou, Fédération de Russie, elle-même créée en pleine perestroïka. Il s'agit d'une petite structure légère, conçue pour être un point d'entrée vers l'école russe. Il est associé au CNRS en qualité d'UMI depuis 2005. L'UMI est dirigée par Sergei Nechaev. Son spectre est large et couvre l'ensemble des mathématiques ainsi que la physique théorique et l'informatique. Il organise des activités thématiques autour des chercheurs y séjournant.
 - L'*Institut CNRS-Pauli (ICP)*, basé au Wolfgang Pauli Institute (WPI) dans les locaux de l'université de Vienne-Autriche est une UMI depuis 2004. Structure légère, le WPI est principalement axé sur les mathématiques appliquées et leurs interactions. L'UMI-ICP est dirigée par Norbert Mauser. Les chercheurs séjournant à l'ICP se voient offrir la possibilité de participer à ou d'organiser un programme thématique du WPI.
 - Le *Laboratoire Fibonacci* est basé au Centro di Ricerca Matematica Ennio de Giorgi et adossé à l'École normale supérieure de Pise-Italie qui rassemble plusieurs dizaines de permanents. Il est associé au CNRS en qualité d'UMI depuis 2008. Le Centre de Giorgi héberge de très nombreuses rencontres. Il est à ce titre un lieu privilégié pour rencontrer les chercheurs internationaux travaillant dans les domaines d'excellence de l'école Italienne. L'UMI est dirigée par Stefano Marmi (directeur) et David Sauzin (directeur adjoint).
 - L'UMI *Eurandom*, basée à l'European Institute for Statistics, Probability, Stochastic Operations Research and their Applications à Eindhoven-Pays-Bas est une UMI depuis 2008. À la date de sa création, le centre était un Institut pour chercheurs post-doctorants. Le centre a évolué pour devenir un centre de conférences et d'accueils de visiteurs dans le domaine de l'aléatoire. Il connaît un flux important de visiteurs internationaux dans ce domaine. L'UMI-Eurandom est dirigée par R. W. van der Hofstad.
- À côté de ces UMI, plusieurs accords permettent aux collègues de faire des séjours de moyenne durée dans des institutions étrangères. À l'heure actuelle, les principaux partenaires sont le Mathematical Sciences Institute de Canberra et l'Université Nationale Autonome du Mexique qui abritent tous deux un Laboratoire International Associé (LIA) et d'autre part, l'Imperial College London, les universités de Pékin et de Tsinghua, à travers des accords ad hoc. Il faut noter que ces accords ne permettent néanmoins pas d'affecter un chercheur sur place du fait de l'absence d'UMI. Le succès de ces échanges pourrait permettre de proposer la mise en place d'une UMI en ces lieux.

2. Évaluation et renouvellement

Les UMI sont évaluées sur une base quadriennale, en fin de contrat. Elles soumettent à cet effet un dossier qui inclut un rapport d'activité et un projet pour les quatre années à venir. Cette évaluation a lieu en deux temps : une visite sur place par un comité de visite complétée par un avis émis par le Comité National du CNRS. Les conclusions de cette évaluation, conduite par la partie française sont partagées avec le partenaire qui mène sa propre évaluation suivant ses procédures et usages. Dans certains cas, il est convenu de conduire conjointement le comité de visite. Passée la phase d'évaluation, le CNRS conduit des discussions avec les partenaires concernés pour renouveler le laboratoire commun. Une UMI peut être renouvelée deux fois.

3. Séjours en UMI

Pour encourager la recherche collaborative, les séjours de moyenne durée en UMI sont facilités et soutenus avec des moyens propres permettant le financement d'invitations. Le séjour type est de six mois à un an.

D'un point de vue pratique, les collègues ayant un projet scientifique dans l'une des UMI peuvent répondre à l'appel d'offre lancé par l'INSMI au mois d'octobre. Cet appel d'offre se clôt en décembre et consiste en un dossier léger présentant le projet scientifique impliqué. Le projet porte sur l'année universitaire suivante voire, dans certains cas particuliers, la fin de l'année universitaire en cours (second semestre). En parallèle, les collègues intéressés doivent se mettre en relation avec l'équipe d'accueil qui souhaite les inviter et le directeur de l'UMI. L'INSMI se concerta avec chacun des laboratoires internationaux pour connaître leurs priorités et procède à un arbitrage en fonction des moyens disponibles.

L'INSMI dispose de plusieurs moyens d'accompagnement de ces mobilités. Il y a tout d'abord les moyens que le partenaire met dans le labora-

toire commun par le financement d'invitations qui suivent les règles de chaque laboratoire d'accueil et peuvent différer d'un laboratoire à l'autre. Il existe aussi un soutien forfaitaire sous la forme de frais de mission que l'INSMI verse au laboratoire d'origine du collègue. Pour les chercheurs CNRS, l'INSMI peut organiser la mobilité sous la forme de l'affectation directe, le chercheur est alors officiellement en poste dans l'UMI (et non pas en mission depuis son laboratoire d'origine) sous le régime de l'expatriation. Dans ce dernier cas, les collègues reçoivent une indemnité suivant des règles fixées par le ministère des affaires étrangères et du développement international. Le montant de l'indemnité dépend notamment du pays d'accueil et de la situation de famille. Dans tous les cas, les collègues conservent leur traitement d'origine, les moyens servant à compenser les surcoûts liés au déplacement, le plus souvent en famille.

Les collègues universitaires peuvent aussi être affectés en UMI dans le cadre de la délégation CNRS et sont donc encouragés à déposer une demande de délégation au CNRS. Le processus d'attribution des soutiens à la mobilité en UMI est donc contraint par le calendrier d'attribution des délégations.

Nous recevons actuellement une trentaine de demandes, souvent d'un semestre, et disposons des moyens permettant de financer environ une dizaine d'années d'affectation sous le régime de l'expatriation. Compte tenu des autres types de soutien, il est possible actuellement de satisfaire la majorité des demandes ; la pression est pour l'instant comparable à celle que l'on peut connaître sur les campagnes de délégations.

Les collègues dont le départ est prévu début septembre doivent prévoir une certaine disponibilité en été : outre les questions pratiques à régler sur place, l'obtention d'un titre de séjour peut être chronophage et les documents officiels à destination des ambassades ne peuvent être signés par les services du CNRS qu'une fois la notification de délégation parvenue (c'est-à-dire pas avant juin).

Virginie Bonnaillie-Noël, Sinnou David, Clotilde Fermanian Kammerer.

Calendrier Mathématique 2016

• A. RECHTMAN



Le calendrier mathématique est une publication des Presses Universitaires de Strasbourg (PUS); il est adapté du *Calendario Matemático un reto diario*, publié au Mexique depuis 2002. La troisième édition française sera en li-

brairie à partir du 1^{er} octobre 2015. Le calendrier, destiné au grand public, invite à approcher les mathématiques par deux chemins : un exercice ou problème mathématique, conçu comme un véritable défi quotidien, est proposé chaque jour de la semaine, à l'exception du samedi et du dimanche ; chaque mois de l'année est également l'occasion de découvrir un texte mathématique illustré. L'adaptation des défis et de leurs solutions a été assurée depuis deux ans par une petite équipe formée de Maxime Bourrigan, Pierre Dehornoy, Sylvain Porret-Blanc, Marion Senjean, Denis Staub et César Trujillo.

Pour l'édition 2016, j'ai choisi les images surprenantes de nœuds sauvages de Aubin Arroyo. Les images montrent une construction de nœuds sauvages proposée par Margareta Boegge, Gabriela Hinojosa et Alberto Verjovsky en 2009. Les textes qui accompagnent ces images, ont été écrits par Aubin Arroyo, Fabiola Manjarrez, chercheurs en mathématiques à l'Université Nationale Autonome du Mexique, et moi-même. Les images ont été publiées en 2015 au Mexique ; les textes sont inédits.

Cet automne la publication sera accompagnée de plusieurs événements, organisés par les PUS et quelques collègues. Des présentations en librairies auront lieu dans différentes villes de France (dont la librairie Kléber à Strasbourg). Un concours en forme de parcours dans le centre de ville de Strasbourg se tiendra le samedi 10 octobre, à l'occasion

de la fête de la science. Finalement, un weekend centré sur les nœuds sauvages aura lieu au Palais de la Découverte, les 21 et 22 novembre.

Au Mexique le calendrier avait été lancé en 2002 par trois mathématiciennes, Anne Alberro, Radmila Bulajich et moi-même. Il a servi et sert toujours à financer des stages d'entraînement pour les étudiants qui participent aux olympiades de mathématiques ; c'était la motivation originale du projet. Bien que très cher pour la plupart des mexicains, il connaît cependant un succès relatif qui a permis de l'éditer depuis 2002.

En France, grâce à l'expertise des PUS et au soutien de l'équipe de promotion de l'université de Strasbourg, le calendrier a eu dès la première année, un succès qui est allé bien au-delà de mes attentes. Ce succès, conjugué avec des pré-achats effectués par les institutions dont les logos décorent le calendrier, lui permet de s'autofinancer. À noter que pour cette troisième édition, quelques horizons s'ouvrent : le calendrier sera aussi distribué en Suisse et au Canada. Même après quinze ans d'expérience, il est difficile pour moi de savoir exactement quel public achète le calendrier au Mexique. Il est certainement encore trop tôt pour faire une enquête concernant le public du calendrier en France.

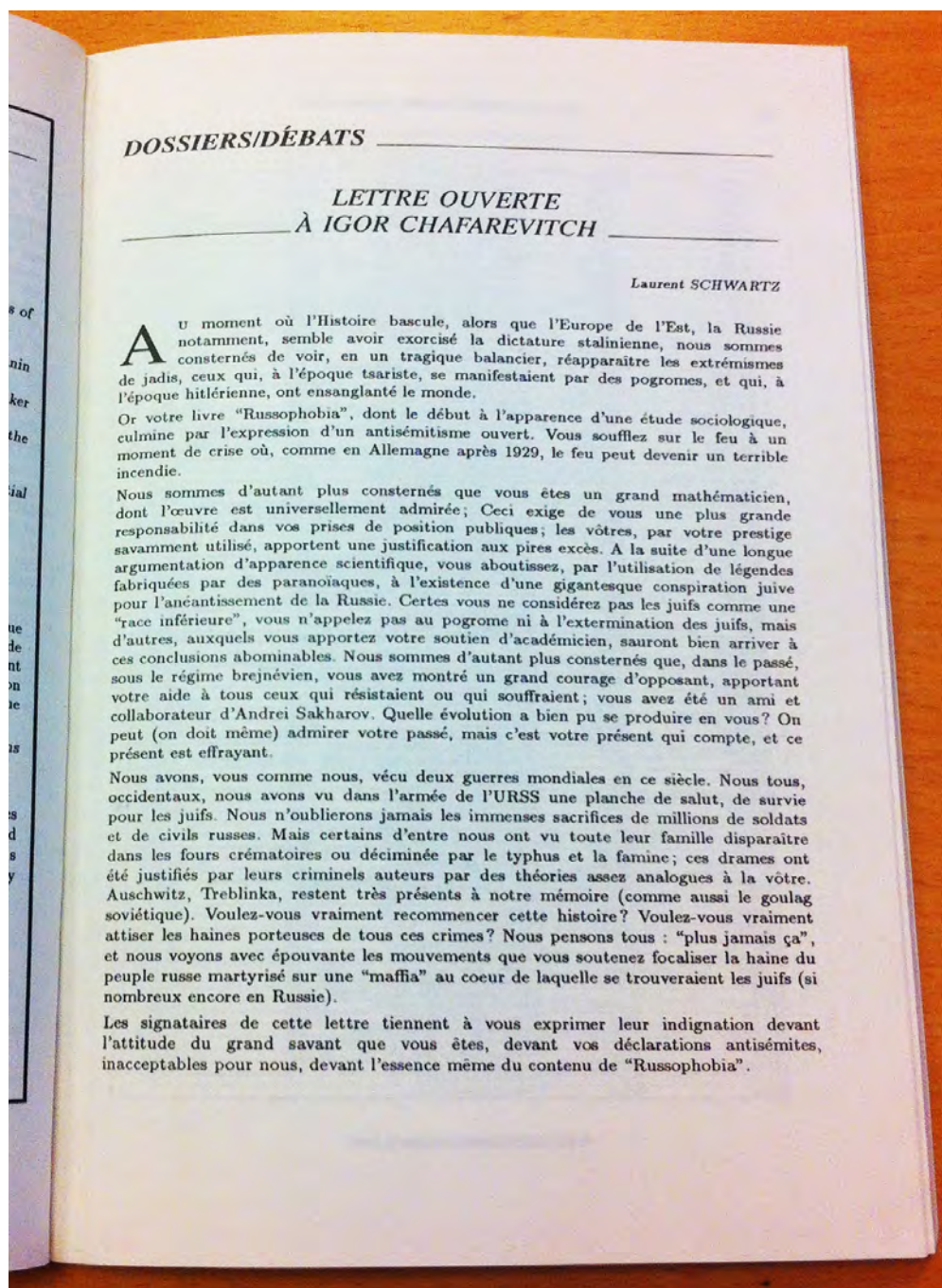
Je conclurai par une anecdote : au Mexique, certains médecins recommandent le calendrier à leurs patients pour faire travailler leur mémoire. J'en ai eu plusieurs échos, et notamment le suivant. Il y a quelques années, après un accident cérébral, mon père s'est vu suggérer par un médecin qui s'occupait de lui de s'entraîner avec le calendrier. Mon père, qui n'avait pas perdu toute sa mémoire, lui a répondu que ce calendrier lui était bien connu, car publié par sa fille.

Je vous laisse avec un petit défi tiré du Calendrier 2016 : combien de nombres à 6 chiffres sont multiples de 164 et se terminent par 164 ?



RÉTROVISEUR

Lorsque la morale prend le pas sur la science : en avril 1993, la Gazette publiait une lettre ouverte de Laurent Schwartz à Igor Shavarevich.



Au moment où Laurent Schwartz écrit cette lettre ouverte, en septembre 1992, Igor Shafarevich est un mathématicien russe internationalement re-

connu. Proche d'Andrei Sakharov, Shafarevich avait aussi été dans les années 1970 un intellectuel dissident du régime communiste et un actif défenseur

des droits de l'homme en URSS. Dans son ouvrage *Russophobia*, écrit en 1982 et publié en 1989, Shafarevich tient pourtant un discours d'un tout autre genre : entre autres méfaits, les Juifs, selon l'auteur, auraient été les instigateurs de la révolution de 1917, à l'origine de tous les maux de la Russie.

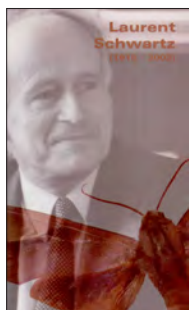
Ce discours antisémite a suscité de nombreuses réactions. L'ouvrage, dénoncé dans la presse écrite dès 1990, fait aussi rapidement scandale dans la communauté mathématique internationale. Une lettre ouverte, signée de plus de 300 mathématiciens, principalement américains, est publiée dans les *Notices of the American Mathematical Society* en mars 1992. En juillet de la même année, en raison de la « forte aversion » que suscite son point de vue, la *National Academy of Science of the United States* demande à Shafarevich de démissionner de sa place d'associé étranger – ce que l'intéressé refuse de faire. L'affaire, là encore, sera largement relayée par la presse, tant scientifique que généraliste. La lettre ouverte de Schwartz, publiée dans la *Gazette* en avril 1993, s'inscrit ainsi dans ce mouvement de dénonciation et d'indignation. Elle a été signée par plus de 200 collègues.

En dépit de l'ampleur de la protestation contre

Russophobia, le cas Shafarevich a aussi montré que les mathématiciens étaient en fait divisés sur la question de l'engagement politique et public. L'affaire, en effet, a fait débat. Henri Cartan et Jean-Pierre Serre, furent, notamment, de ceux qui s'opposèrent, sur le fond, à la réaction de la NAS, estimant que les considérations d'ordre moral n'avaient pas lieu d'être dans une institution scientifique. Serre écrivit également à Schwartz pour lui faire part de sa désapprobation¹. D'autres, comme Serge Lang – bien qu'ayant exprimé leur indignation vis-à-vis des écrits de Shafarevich – protestèrent sur la forme et la teneur de la lettre de la NAS.

In fine, au-delà de l'affaire Shafarevich elle-même, cette lettre ouverte de Schwartz pose des questions qui demeurent d'actualité. Une institution scientifique peut-elle prendre position sur des questions politiques ? Au-delà des travaux de recherche, les principes moraux doivent-ils être pris en compte lors des élections académiques ? Un mathématicien peut-il profiter de la reconnaissance scientifique dont il bénéficie pour promouvoir ses idées et ses opinions ? Le fait d'être « un grand mathématicien » exige-t-il, comme l'écrit Schwartz « une plus grande responsabilité dans [les] prises de positions publiques » ?

Numéro spécial de la Gazette des mathématiciens



Laurent Schwartz (1915-2002)

ISBN 2-85629-140-6

2003 - 212 pages

Public : 25 € - Membre : 18 €

Peu de mathématiciens gagnent leur place dans l'imaginaire collectif national. Laurent Schwartz est de ceux là. Toute sa vie il a appliqué la même rigueur et le même niveau d'engagement aux différentes facettes de son activité : il fut tout à la fois un grand mathématicien aux intérêts multiples, un professeur passionnant son auditoire, un militant des droits de l'Homme, un citoyen engagé, et un homme de cœur. Les témoignages rassemblés dans ce volume permettent de découvrir un homme hors du commun.

Disponible sur le site de la SMF : <http://smf.emath.fr>

*frais de port non compris



1. La lettre de Serre à Schwartz est citée dans Anne-Sandrine Paumier, « Laurent Schwartz, un mathématicien face aux guerres », in Durand, Antonin, Mazliak, Laurent et Tazzioli, Rossana (dir.), *Des mathématiciens et des guerres ; histoires de confrontations (xix^e siècle-xx^e siècle)*, Paris, CNRS, 2013, p. 95-110.



Pierre DOLBEAULT

1924-2015

• H. SKODA



Pierre Dolbeault, né le 10 octobre 1924, est décédé le 12 juin 2015. Pierre Dolbeault qui, depuis toujours, avait fait le choix de l'enseignement, fut admis à l'École normale supérieure en 1944 et fut reçu à l'agrégation de mathématiques en 1947. Il fut, à partir de 1954, successivement professeur dans les universités de Montpellier et de Bordeaux, puis élu en 1960, à l'université de Poitiers et enfin à celle de Pierre et Marie Curie, Paris 6, en 1972. Son œuvre scientifique a eu un impact décisif sur le développement de l'Analyse complexe à plusieurs variables, de la Géométrie Analytique et de la Géométrie Algébrique complexe. Pierre Dolbeault aborde la recherche mathématique dès 1948 avec un poste d'attaché de recherches au Centre National de la Recherche Scientifique, poste très rare, à l'époque. Il put suivre le séminaire Cartan, à l'École normale supérieure, dès son début en 1947 et obtint une bourse d'un an à l'université de Princeton pour l'année 1949-1950. Dans sa thèse, préparée sous la direction d'Henri Cartan, intitulée « Formes différentielles et cohomologie sur les variétés analytiques complexes », soutenue à Paris, en 1955, publiée dans les *Annals of Mathematics* ([1], [2]), il obtient des résultats exceptionnels qui vont marquer des domaines essentiels des mathématiques et lui assurer aussitôt une grande notoriété dans le monde scientifique. Il introduit en effet un nouvel outil mathématique : la $\bar{\partial}$ -cohomologie des formes différentielles sur une variété analytique complexe, analogue holomorphe de la cohomologie de de Rahm portant sur les variétés réelles. À l'aide d'un lemme devenu célèbre, appelé désormais « lemme de Dolbeault-Grothendieck », lemme qui résout localement l'équation $\bar{\partial}$, la thèse établit

l'isomorphisme, dit lui aussi de Dolbeault, entre le q -ème groupe de cohomologie de Čech à valeurs dans le faisceau des p -formes holomorphes et le groupe de $\bar{\partial}$ -cohomologie des formes différentielles de bidegré (p, q) et de classe C^∞ . Autrement dit, la résolution globale de tout problème, localement trivial, en géométrie analytique complexe, se ramène à la résolution d'une équation globale en l'opérateur différentiel $\bar{\partial}$ sur la variété. Ce résultat fait le lien entre l'Analyse complexe et les disciplines connexes que sont la Géométrie différentielle et la Théorie des équations aux dérivées partielles. Devenus rapidement incontournables dans les mathématiques actuelles, cet outil et ce même résultat vont ouvrir la voie à des progrès très profonds en particulier en Géométrie analytique, en Géométrie algébrique et en Théorie des équations aux dérivées partielles. Je citerai à titre d'exemples, les interactions très importantes avec la topologie des variétés de Stein (les groupes de de Rahm $H^r(X, \mathbb{C})$ sont nuls pour $r > \dim X$), avec la théorie de Hodge des variétés kählériennes ([5]), avec les théorèmes d'existence L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ ([3]) de Lars Hörmander (obtention de bornes pour la cohomologie à valeurs dans un faisceau holomorphe cohérent) eux-mêmes intimement liés au théorème d'annulation de Kodaira (nullité des groupes de Dolbeault $H^{n,q}(X, L)$ pour un fibré en droites positif L sur une variété compacte X , $q \geq 1$, $n = \dim X$).

Au cours de sa longue carrière, Pierre Dolbeault apporta aussi des contributions fondamentales à bien d'autres problèmes mathématiques, en particulier à la théorie des résidus à plusieurs variables et aux courants-résidus associés, puis au problème dit, de Plateau, de l'étude des chaînes holomorphes de bord donné et des chaînes maximale-ment complexes qui lui sont associées et enfin aux hypersurfaces réelles Lévi-plates de bord donné dans les variétés holomorphes.

Mais Pierre Dolbeault, homme de science certes, était avant tout un homme fondamentalement altruiste, discret, d'une grande courtoisie, attaché à la transmission du savoir et à la prise de responsabilités pour le bien de tous. Il a fortement participé à l'essor et au rayonnement de l'École française d'Analyse complexe à travers ses cours et ses nombreux élèves, d'abord à l'université de Poitiers. Il y a développé, en effet, une École d'Analyse complexe particulièrement active et brillante avec les thèses de Jean Louis Cathelineau, de Joseph Le Potier et de Jean-Baptiste Poly. Cette École se révéla féconde et accueillit, de nombreuses années après, de jeunes professeurs comme Guy Roos, élève de François Norguet et Jean-Pierre Vigué, élève d'Henri Cartan. Je rappellerai ici un souvenir personnel qui m'est précieux et auquel Pierre Dolbeault est étroitement associé. Il remonte à juin 1970. C'est à cette époque que j'ai rencontré Pierre Dolbeault, pour la première fois, invité par lui au colloque international qu'il organisait à Poitiers avec la présence d'Henri Cartan, de Jean Leray et d'André Martineau. J'y exposais, pour la première fois aussi, mon tout premier résultat. J'ai toujours en mémoire l'accueil amical de Pierre Dolbeault et de son épouse, Simone, également professeur à l'université de Poitiers, dans leur demeure personnelle.

Puis, à Paris, à partir de 1972, Pierre Dolbeault participa activement à l'organisation du séminaire d'Analyse complexe fondé initialement par Pierre Lelong à l'Institut Henri Poincaré dans les années 60 et qui, au cours d'une longue histoire, est devenu l'actuel séminaire de Géométrie et d'Analyse complexe de l'Institut. Beaucoup de jeunes chercheurs français ou étrangers purent tirer profit de son audience internationale et de la diffusion de leurs travaux publiés dans les Actes du séminaire. Parmi eux figuraient, à l'époque, Christine Laurent et Jean-Pierre Demailly. Je souhaite insister aussi sur l'importance du groupe d'études, animé par Pierre Dolbeault, à Paris 6, durant de nombreuses années. Il fut une source d'inspiration et le point de départ de nombreuses recherches.

Je voudrais maintenant évoquer le rôle essentiel que Pierre Dolbeault a joué, aux côtés de Pierre Lelong et de Paul Malliavin dans la création du laboratoire d'analyse complexe et géométrie en 1974. Ce laboratoire était destiné à fédérer plusieurs équipes : celle de Pierre Lelong pour l'Analyse en dimension infinie, celle de Paul Malliavin pour la Géométrie Riemannienne et celle de Pierre Dolbeault pour la Géométrie analytique réelle ou com-

plexe, qui constituait déjà le thème de son groupe de recherche. Pierre Dolbeault en fut le directeur jusqu'en 1982, puis ce fut le tour de Michel Hervé et de Christian Peskine qui rassembla les formations de recherche mathématique de Paris 6 et de Paris 7, associées au Centre National de la Recherche Scientifique, en ce qui est devenu l'Institut de Mathématiques de Jussieu.

J'ai souvenir de fréquents et fructueux échanges avec Pierre Dolbeault pour la prise de décisions scientifiques. Entre 1994 et 2002, notre collaboration a été particulièrement intense avec l'administration de deux réseaux européens successifs, appelés « Analyse complexe et Géométrie ». Pierre Dolbeault a eu la direction du premier réseau et moi-même celle du second, entre 1998 et 2002, avec la gestion d'un budget très important et de l'ensemble des postdoctorants du réseau, en liaison avec la Commission européenne de Bruxelles. La connaissance approfondie de l'administration qu'avait Pierre Dolbeault eut alors un rôle déterminant ainsi que la contribution de tous les collègues du réseau, Bo Berndtsson à Göteborg, Klas Diederich à Wuppertal, Jürgen Leiterer à Berlin, Giuseppe Tomassini et Paolo de Bartoloméis à Florence, Christine Laurent à Grenoble. Pierre Dolbeault est intervenu avec brio auprès des administrateurs de Bruxelles, lors du colloque à mi-parcours de Cortona en 2000. Grâce à ces deux réseaux, Pierre Dolbeault a considérablement contribué à la reconnaissance internationale de l'Équipe d'Analyse complexe et a pu apporter une aide très appréciable à la communauté scientifique.

Après son départ à la retraite en 1992, Pierre Dolbeault a poursuivi une activité scientifique intense jusqu'à ses derniers jours. Sa présence assidue, discrète, souriante et stimulante dans nos séminaires et nos réunions, a apporté le précieux témoignage d'une époque particulièrement constructive et féconde pour les mathématiques françaises ainsi que le meilleur des encouragements pour les nouvelles générations d'étudiants et de chercheurs. Un premier colloque, en 1992, a rendu hommage à l'œuvre de Pierre Dolbeault lors de son départ à la retraite ([4]). Nous avons eu l'honneur et la joie d'organiser encore un grand colloque international à l'occasion de son 90^e anniversaire, en juin 2014, qui a rassemblé, une dernière fois, autour de lui tous ses collaborateurs, collègues et amis de toujours. C'est avec émotion et reconnaissance que nous penserons à Pierre Dolbeault : il fut non seulement l'une des grandes figures mathématiques de

sa génération mais surtout il contribua de manière exceptionnelle et chaleureuse à la promotion des étudiants, à la vie universitaire et à la vie scienti-

fique internationale durant toute sa carrière. Je garderai en moi-même, le souvenir d'un maître, d'un collègue, d'un ami, en tout point exemplaire.

Références

- [1] P. DOLBEAULT. « Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe.I. » *Ann. Math. (2)* **64** (1956), p. 83–130. ISSN : 0003-486X; 1939-8980/e.
- [2] P. DOLBEAULT. « Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe.II. » *Ann. Math. (2)* **65** (1957), p. 282–330. ISSN : 0003-486X; 1939-8980/e.
- [3] L. HÖRMANDER. *An introduction to complex analysis in several variables. 3rd revised ed.* 3rd revised ed. Amsterdam etc.: North-Holland, 1990, p. xii + 254. ISBN : 0444884467.
- [4] H. SKODA et J.-M. TRÉPREAU, éd. *Contributions to complex analysis and analytic geometry. Based on a colloquium dedicated to Pierre Dolbeault, Paris, France, June 23-26, 1992.* Braunschweig: Vieweg, 1994, p. xi + 250. ISBN : 3528066334.
- [5] C. VOISIN. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe.* Paris: Société Mathématique de France, 2002, p. viii + 595. ISBN : 2856291295.

Henri SKODA

Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche

Daniel KASTLER

1926-2015



Daniel Kastler est décédé à Bandol le 4 juillet dernier dans sa quatre-vingt-neuvième année. Son père Alfred Kastler fut Prix Nobel de Physique en 1966. Normalien (1946-1949), D. Kastler prépare ensuite sa thèse en Chimie quantique (1953) à l'université de la Sarre. C'est en 1957 qu'il arrive à

l'université de Marseille et il y est nommé Professeur en 1959. Dès les années 50, il s'intéresse aux liens entre la seconde quantification et l'algèbre multilinéaire sur les espaces de Hilbert. Mais c'est pour son approche algébrique de la théorie quantique des champs qu'il développe en collaboration avec Rudolf Haag qu'il est le plus connu¹. Son œuvre culmine avec la formulation des « axiomes de Haag-Kastler » et de la notion d'observable locale (Haag-Kastler-Ruelle). Il engage alors de

fructueuses collaborations avec entre autres S. Doplicher, R. Kadison, D. Robinson, O. Bratelli, H. Araki, A. Guichardet... et à Marseille M. Sirugue, M. Mebkhout. D. Kastler et ses collaborateurs vont mettre en évidence l'importance de la théorie des C^* -algèbres dans les fondements de la mécanique statistique quantique (par exemple les états KMS (Kubo-Martin-Schwinger), les états invariants, ergodiques ...). Il s'enthousiasme à partir du milieu des années 80 pour la géométrie non-commutative développée par Alain Connes et ses applications à la physique. Il en devient un promoteur infatigable et lance de nombreux physiciens-mathématiciens dans le sujet parmi lesquels on relève pour ne citer que les plus connus de la communauté mathématique J. Bellissard, B. Iochum, D. Testard, R. Coquereaux... D. Kastler ne fut pas seulement un grand scientifique à la frontière entre mathématiques et physique. Il fut le cofondateur en 1968 avec J.-M. Souriau et A. Visconti du Centre de Physique Théorique de Marseille. Il a œuvré pour le développement d'un pôle Math-Physique sur le site de Luminy et il est aussi à l'origine de la création de l'équipe de physique mathématique de Toulon.

1. J. Math. Phys.5 :848-861,1964.

D. Kastler nous laisse aussi en héritage quelques livres dont le dernier est un roman intitulé *Ephémérides de Kashtlerus* (2005) dont ses proches ont extrait pour le faire part de son décès cette simple phrase « Je mourrai sans savoir si la mort est un crépuscule ou une aube ».

Nous renvoyons pour plus de témoignages au texte paru dans le bulletin de juillet de l'IAMP (International Association of Mathematical Physics) qui a inspiré cette notice et aux témoignages plus personnels d'Alain Guichardet² et d'Alain Connes³.

Jean-Claude DOUAI

1942-2015



Jean-Claude Douai nous a quittés en début d'année. Il a eu une carrière très riche. Après avoir soutenu son doctorat à l'université de Lille en 1976, il a enseigné dans plusieurs universités à l'étranger, notamment au Brésil, à Alger et à Tunis, avant d'obtenir un poste en France à l'université Paris 6 puis d'être finalement recruté comme professeur des universités à Lille en 1991. Jean-Claude était réputé pour sa très vaste culture, notamment dans ses domaines de prédilection : la géométrie algébrique et l'arithmétique, pour lesquelles

il avait été formé sous l'influence directe des idées d'Alexandre Grothendieck et de Jean Giraud. Jean-Claude aura été un pionnier de la cohomologie non abélienne et de la théorie des gerbes. Ses contributions sont multiples. On peut citer ses travaux sur la cohomologie des groupes semi-simples, ses extensions du fameux théorème de Tate-Poitou à des situations où le corps de base est le corps de fonctions d'une courbe, les applications arithmétiques à des questions locales-globales type « principe de Hasse » ou à l'étude du groupe de Tate-Shafarevich, son travail diophantien sur les champs algébriques et sa contribution à la théorie de la descente des revêtements et de leurs espaces de modules. Professeur émérite depuis 2011, Jean-Claude était resté très actif dans son travail de chercheur. Nous resterons marqués par son enthousiasme et sa générosité dans le partage de son savoir. Un texte d'hommage est consultable sur le site du laboratoire Painlevé¹ et sur le site de la SMF².

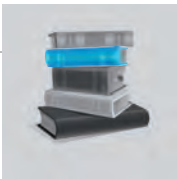
il avait été formé sous l'influence directe des idées d'Alexandre Grothendieck et de Jean Giraud. Jean-Claude aura été un pionnier de la cohomologie non abélienne et de la théorie des gerbes. Ses contributions sont multiples. On peut citer ses travaux sur la cohomologie des groupes semi-simples, ses extensions du fameux théorème de Tate-Poitou à des situations où le corps de base est le corps de fonctions d'une courbe, les applications arithmétiques à des questions locales-globales type « principe de Hasse » ou à l'étude du groupe de Tate-Shafarevich, son travail diophantien sur les champs algébriques et sa contribution à la théorie de la descente des revêtements et de leurs espaces de modules. Professeur émérite depuis 2011, Jean-Claude était resté très actif dans son travail de chercheur. Nous resterons marqués par son enthousiasme et sa générosité dans le partage de son savoir. Un texte d'hommage est consultable sur le site du laboratoire Painlevé¹ et sur le site de la SMF².

2. <http://smf.emath.fr/content/décès-de-daniel-kastler>

3. <http://noncommutativegeometry.blogspot.com/2015/07/daniel-kastler.html>

1. <http://math.univ-lille1.fr/d7/node/8468>

2. <http://smf.emath.fr/content/décès-de-jean-claude-douai>



LIVRES



Les rêveurs lunaires

BAUDOÏN et Cédric VILLANI

Gallimard/Grasset, 2015. 192 p. ISBN : 9782070665938

« Vous aimez les histoires juives ? Euh...

Ce sont deux enfants juifs, Leo et Ede. Ils se disputent, c'est violent. Ils demandent à voir le rabbin pour régler leur différend. Le rabbin est en train de dîner avec sa femme, mais il accepte de les recevoir.

- Je veux bien entendre ce qui vous oppose. Commençons par toi, Leo.
- Rabbin, nous avons construit cette bombe atomique dans notre jardin. Elle sera bien utile pour intimider nos ennemis. Mais elle peut aussi faire de gros dégâts, et nous ne parvenons pas à nous mettre d'accord sur son utilisation. Rabbin, c'est nous qui avons construit cette bombe, nous en avons donc la responsabilité, et en outre, nous connaissons son fonctionnement mieux que personne. Il est donc logique que nous puissions nous-mêmes décider de son usage.
- (*Le rabbin*) Tu as raison, bien sûr. Que voulais-tu dire, Ede ?
- Rabbin, si nous avons construit cette bombe, c'est avant tout pour l'amour de la curiosité et non pour être utile. Nous ne sommes pas plus doués que les autres membres de la famille pour les affaires sociales, peut-être moins ; son pouvoir affecte tout le monde, et c'est donc au chef de famille de décider ce que l'on en fera ; nous n'avons pas voix au chapitre.
- (*Le rabbin*) C'est clair, tu as raison.
- (*La femme du rabbin*) Mais ils défendent des points de vue contraires, tu ne peux pas dire au premier qu'il a raison et au second qu'il a raison !

Le rabbin marque une pause... Il réfléchit, tout le monde attend son verdict... Et il répond à sa femme.

– Toi aussi, tu as raison.

Et il reprend son repas. »

Les rêveurs lunaires, c'est une bande dessinée, ou plutôt un roman graphique, autour de quatre génies qui ont changé l'histoire. Les protagonistes : Werner Heisenberg, Alan Turing, Leo Szilard et Hugh Dowding. Autant dire : un incertain, un affranchi, un prophète errant et un chevalier du ciel. « Physiciens, mathématicien et militaire, ils ont été les acteurs cruciaux autant que discrets d'une aventure qui les dépassait : la Seconde Guerre Mondiale. Un jour, une nuit, en se promenant dans la rue ou en rêvant au clair de lune, ils ont eu un éclair de lucidité qui a changé la face du monde. »

Ce très bel ouvrage est le résultat d'une collaboration inhabituelle entre un mathématicien, fantastique conteur d'histoires, et un illustrateur tout aussi talentueux et non moins célèbre. L'aventure a démarré en 2012, à la suite des célébrations du centenaire de Turing, par une rencontre inattendue^a entre Cédric Villani et Edmond Baudoïn. Puis l'idée a germé de raconter l'histoire de ces quatre personnages, si différents *a priori*, mais qui éclaire sous divers angles le rôle des scientifiques et des militaires dans ce milieu de xx^e siècle, alors que les livres d'histoire ne retiennent bien souvent que les noms des grandes figures politiques. Cet ouvrage, c'est aussi et surtout l'occasion de réfléchir au problème de la responsabilité des scientifiques, et de se rappeler que la science est faite par des femmes et des hommes qui doutent et qui ont aussi conscience des implications potentielles de leurs travaux. Qui a raison ? Leo ou Ede ? Quelle est la meilleure attitude à avoir ? Peut-on balayer ces questions d'un simple mépris quand on connaît la formidable puissance destructrice de la bombe

atomique, fruit d'un immense travail pour mieux comprendre la structure intime de la matière ? Suffit-il de s'intéresser aux questions mathématiques les plus abstraites pour s'épargner ce genre de réflexion ? Pas si sûr... « Allons-nous continuer la recherche scientifique ? »^b se demandait lui aussi Alexander Grothendieck le 27 janvier 1972 dans l'amphithéâtre du CERN.

Science, technologie et politique sont chaque jour un peu plus intriquées encore, que l'on pense à l'intelligence artificielle, la confidentialité des échanges, l'ingénierie biologique... la liste des sujets est sans fin. « Les réflexions de la science ne sont pleinement accessibles qu'à un cercle restreint de scientifiques avertis. Mais la science a pour devoir de dissiper l'idée qui prétend que son travail se déroule à l'intérieur d'une sorte de société secrète. Elle doit gagner la confiance de l'opinion et publier pour ce faire un maximum de résultats et de réflexions. » Des mots, en forme de testament pourrait-on dire, livrés par Heisenberg en 1975.

Cette bande dessinée, c'est enfin l'opportunité de faire connaissance avec Hugh Dowding, qui a joué un rôle clé pendant la guerre, notamment pendant la bataille d'Angleterre, conscient de l'importance d'intégrer des technologies comme le radar dans les armements et extrêmement soucieux de la sécurité de ses pilotes. L'occasion aussi de voir comment Leo Szilard a « fait de son mieux »^c, en prenant à bras le corps le problème politique à l'échelle mondiale de l'arme nucléaire ; de retrouver Alan Turing l'esprit sans cesse bouillonnant, inventant le futur tout en subissant les intolérances de son temps, ainsi qu'Heisenberg pris dans une sorte d'inextricable contradiction que la bande dessinée nous donne à vivre à travers les dossiers de Farm Hall, ces retranscriptions des enregistrements secrets de dix scientifiques allemands détenus par les Anglais en 1945.

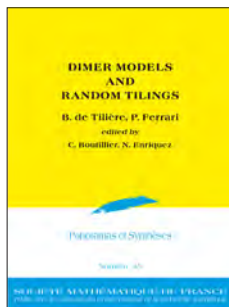
Les quatre héros de cette bande dessinée, des *rêveurs lunaires* ? « Espérer puiser de l'énergie dans la transformation des atomes, c'est se laisser aller à une rêverie lunaire », avait ainsi parlé Ernest Rutherford, l'un des pères de la physique nucléaire. En ce sens, on peut sûrement qualifier de rêveurs lunaires bon nombre de savants de l'époque. Mais il ne faut pas se laisser tromper par l'expression : les scientifiques embarqués dans le projet Manhattan par exemple avaient les pieds bien sur terre et étaient parfaitement conscients des implications dévastatrices de leurs travaux. L'explosion des connaissances scientifiques et des domaines de recherche fait qu'il y a sûrement aujourd'hui beaucoup plus de *vrais* rêveurs lunaires qu'à l'époque de von Neumann ! Et ce n'est pas forcément une bonne nouvelle.



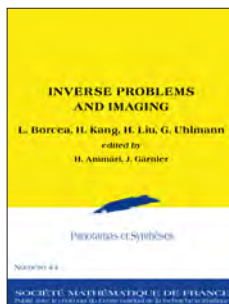
Aurélien ALVAREZ
Université d'Orléans

- a. Effet du petit monde, les deux futurs complices étaient sans le savoir à distance 3 l'un de l'autre...
b. <https://www.youtube.com/watch?v=Zw9JpZXwGXc>
c. Ce sera son épitaphe.

Panoramas et Synthèses - Nouveautés 2015

Vol. 45
Dimer Models and Random TilingB. DE TILIÈRE, P. FERRARI
C. BOUTILLIER, N. ENRIQUEZ, edsISBN 978-2-85629-815-2
2015 - 97 pages - Softcover. 17 x 24
Public: 28 € - Members: 20 €

This volume regroups notes of some lectures, giving two different points of view on the topic. One is focused on the Kasteleyn approach; the other uses techniques of orthogonal polynomials, with analogies with random matrix theory.

Vol. 44
Inverse Problems and ImagingL. BORCEA, H. KANG, H. LIU & G. UHLMANN
H. AMMARI, J. GARNIER, edsISBN 978-2-85629-793-3
2015 - 148 pages - Softcover. 17 x 24
Public: 38 € - Members: 27 €

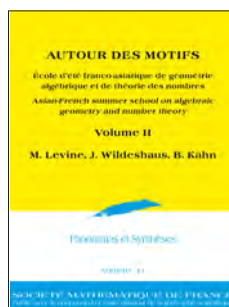
This volume contains the notes of the three lectures in the workshop "Etats de la Recherche" entitled "Inverse problems and imaging" that took place in Paris in 2013. Liliana Borcea addresses wave propagation and sensor array imaging in random waveguides. Hyeonbae Kang reviews recent progress on layer potential approaches to interface problems. Gunther Uhlmann (together with Hongyu Liu) considers transformation-optics based cloaking in acoustic and electromagnetic scattering.

Vol. 42-43
Autour des schémas en groupesÉcole d'été «Schémas en groupes», Group Schemes,
A celebration of SGA3, Volume I

S. BROCHARD, B. CONRAD, J. OESTERLÉ

ISBN 978-2-85629-794-0
2014 - 458 pages - Softcover. 17 x 24
Public: 80 € - Members: 56 €

Ce volume contient la première partie des notes de cours de l'École d'été Schémas en groupes, une introduction au séminaire SGA3 de Demazure-Grothendieck, qui s'est tenue au Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM) à Luminy en septembre 2011. Cette école était consacrée à la théorie des schémas en groupes en particulier réductifs. Cette première partie est constituée de versions développées des exposés sur les topologies de Grothendieck (S. Brochard), sur les schémas en groupes de type multiplicatif (J. Oesterlé) et sur les schémas en groupes réductifs (B. Conrad).

Vol. 41
Autour des motifs IIÉcole d'été franco-asiatique de géométrie algébrique
et de théorie des nombres

M. LÉVINE, J. WILDESHAUS, B. KAHN

ISBN 978-2-85629-784-1
2013 - 244 pages - Softcover. 17 x 24
Public: 56 € - Members: 39 €

Ce volume contient la seconde partie des notes de cours de l'École d'été franco-asiatique de géométrie algébrique et de théorie des nombres, qui s'est tenue à l'Institut des Hautes Études Scientifiques (Bures-sur-Yvette) et à l'université Paris-Sud XI en juillet 2006. Cette école était consacrée à la théorie des motifs et à ses récents développements, ainsi qu'à des sujets voisins, comme la théorie des variétés de Shimura et des représentations automorphes. Cette seconde partie est constituée de versions développées des cours de M. Levine consacrés aux catégories triangulées de motifs et à la théorie homotopique des schémas (Six lectures on motives) et des leçons de J. Wildeshaus sur les motifs bords et leurs applications (Boundary motives, relative motives and extensions of motives) et de B. Kahn sur une version triangulée des conjectures de Tate et Beilinson sur les cycles algébriques sur les corps finis (The full faithfulness conjectures in characteristic p).

Disponibles sur le site de la SMF : <http://smf.emath.fr>

*frais de port non compris



Société Mathématique de France

PRIX D'ALEMBERT

Il vise à encourager la diffusion de la connaissance des mathématiques vers un large public.

D'un montant de 2000 euros, il récompensera :

- une œuvre ou un parcours ayant intéressé le public aux développements des mathématiques ;
- un ouvrage d'enseignement, de vulgarisation ou de pédagogie des mathématiques.



candidatures à déposer avant le :
15 mars 2016

SMF - IHP - 11 rue Pierre et Marie Curie 75231 Paris cedex 05
<http://smf.emath.fr>



