SOMMAIRE DU Nº 132

SMF	
Mot du Président	3
MATHÉMATIQUES De combien de paramètres dépend l'équation générale de degré n? A. Beauville La cohérence dans tous ses états, D. Robert	
ENSEIGNEMENT Réflexions sur l'enseignement de l'intégration, <i>H. Queffélec</i>	47
PRIX ET DISTINCTIONS Les Lauréats du Prix Fermat de Recherches Mathématiques 2011, P. Raphaël, D. Rössler	
MATHÉMATIQUES ET GRAND PUBLIC « Un texte, un mathématicien » à Amiens, <i>JP. Chehab</i> Impression, dépaysement, <i>G. Octavia</i>	
CHERCHEURS,ÉDITEURS:LE DÉBAT	
Avant-propos, La Gazette La pétition concernant Springer La pétition concernant Elsevier Le coût du savoir L'Appel pour des négociations équilibrées B. Kloeckner La position de la SMF La réponse de Springer	74 74 75 83 85
CARNET Torsten Ekedahl : quelques souvenirs, <i>L. Illusie</i>	87
EN HOMMAGE À GÉRARD RAUZY Gérard Rauzy, <i>JC. Risset</i> Souvenirs de Rauzy, <i>Y. Meyer</i> Gérard Rauzy, <i>P. Liardet</i>	91
G. Poitou et le CIRM, <i>J. Cougnard</i> A. Aragnol et le CIRM, <i>B. Malgrange</i>	
IVDES	105

Mot du Président

Au moment où vous lirez cette *Gazette*, les élections présidentielles ne seront plus loin. Les circonstances n'ont pas permis de converger sur une position commune au sein du Forum des Sociétés Savantes pour constituer une liste de questions à poser aux candidats. Dans d'autres cadres, des textes ont été proposés qui, tout en soulevant beaucoup de vrais problèmes, ne pouvaient être signés tels quels par la SMF. C'est pourquoi le Conseil d'Administration a décidé de préparer un texte reprenant l'essentiel des positions que la SMF a prises ces dernières années et qui permettra de rappeler aux candidats et à leurs équipes certains des problèmes généraux ou spécifiques des mathématiques qui doivent être résolus dans le domaine de la recherche et de l'enseignement. Ce texte sera rendu public vers la mi-avril. Plusieurs points en particulier méritent la plus grande attention : la mise en route de la LRU avec les problèmes financiers rencontrés par certaines universités, les réformes concernant l'enseignement et la formation et au niveau de la recherche la politique des programmes d'excellence et ses effets dans le secteur des mathématiques.

Nous tentons maintenant de faire un premier bilan sur ce dernier point. Les derniers résultats sur les Idex sont sortis. Après les trois premiers Idex de la première vague : Strasbourg (UNISTRA), Paris-Sciences et Lettres et Bordeaux, cinq nouveaux idex : Aix-Marseille (AMIDEX), Toulouse, Idex Paris-Saclay, Idex Université-Paris-Sorbonne-Paris-Cité, Idex-Sorbonne-Universités viennent s'ajouter. Ainsi au final seulement quatre grandes villes en dehors de l'Île-de-France apparaissent. Le CIRM est impliqué dans l'idex marseillais AMIDEX (financement de la chaire Jean Morlet). Il est actuellement difficile de déterminer comment ces nouveaux idex avec leurs super-structures pourront au final être bénéfiques au développement des mathématiques. C'est en tout cas l'impression qui ressort des consultations menées auprès de plusieurs responsables. Si on ajoute le grand nombre de régions qui sont exclues de ce programme, un poids énorme retombe sur l'INSMI pour maintenir une politique de développement des mathématiques au niveau national dans un contexte de baisse de son budget global.

Plus récemment les résultats de la deuxième vague des labex sont également sortis : Archimède (Marseille), CEMPI (Lille), CIMI (Toulouse), IRMIA (Strasbourg), Lebesgue (Nantes-Rennes), LMH (Saclay), MME-DII (Cergy) et Persyval (Grenoble) qui s'ajoutent à ceux de la première vague (CARMIN, AMIES, FSMP, Bézout, Milyon,...). La liste n'est pas complète car des mathématiciens sont présents dans d'autres programmes à dominante non mathématique. Pour les deux labex nationaux que nous avions appelés de nos vœux, des politiques claires

SMF

ont été définies, même si les budgets tardent à être disponibles. Pour les autres Labex, il apparaît que les mathématiciens y sont impliqués de manière inégale. Il semble que des effets bénéfiques seront surtout observables sur le front des interfaces avec d'autres disciplines et dans le financement de programmes doctoraux et postdoctoraux, pas forcément coordonnés au niveau national. Le CIRM est impliqué dans son action locale dans les projets du labex Archimède. La couverture géographique est plus raisonnable que celle de la première vague. Le directeur de l'INSMI G. Métivier a estimé « à la louche » à six ou sept millions d'euros l'argent qui pourrait arriver aux mathématiques par les labex, chiffre qui semble du même ordre que celui arrivant aux maths via les ANR. Il n'en reste pas moins que des laboratoires de grande qualité sont en dehors de ces financements et de ceux des deux fondations Sciences Mathématiques de Paris et Hadamard, même si celles-ci se disent ouvertes à certaines missions nationales.

Dans les autres programmes d'excellence, si on excepte le succès de Cap'maths et d'autres projets dirigés vers la popularisation des mathématiques dans les écoles, les collèges et les lycées où les mathématiciens sont présents, l'échec majeur est celui du programme Priam dans le cadre du programme Equipex. Le seul espoir dans cette direction est un projet d'equipex déjà accepté ISTEX (basé à Nancy) qui pourrait financer certains aspects du projet PRIAM. Les bibliothèques sont les principales victimes de cet échec, dans une situation où le poids dans leur budget des bouquets négociés avec les grands éditeurs commerciaux devient insupportable. La *Gazette* présente dans ce numéro un dossier donnant plusieurs éclairages et plusieurs actions menées par des mathématiciens en France et à l'étranger.

Pour conclure sur cette brève analyse des programmes d'excellence, je ne peux que rappeler la position exprimée par la SMF concernant le budget de l'INSMI et son souhait que les laboratoires puissent avoir un financement régulier pour fonctionner. Cela passe par un équilibre entre le financement pérenne apporté par le CNRS et les universités et le financement par les appels à projet (ANR-programme d'excellence), le deuxième ne pouvant pas se substituer au premier.

Terminons par une information sur la prise de position des sociétés savantes sur la circulaire dite « Guéant » du 31 mai 2011 (modifiée en janvier 2012). Conjointement avec la SMAI et la SFdS, la SMF a dénoncé en janvier l'effet du premier texte qui a provoqué la mise en situation irrégulière de nombreux étudiants ou l'obligation pour eux de trouver des contournements de la circulaire au coup par coup. Elle a participé à une séance de parrainage organisée à l'IHP. La deuxième version de la circulaire n'a fondamentalement rien changé. S'ajoutant à des lois précédentes, son application est soumise à l'appréciation de fonctionnaires de la préfecture; le résultat pour chaque demande reste aléatoire. L'effet à moyen terme est la mise en extinction de la politique universitaire de coopération internationale dont la France sera la première perdante.

Le 27 mars 2012 Bernard Helffer

MATHÉMATIQUES

De combien de paramètres dépend l'équation générale de degré *n*?

Arnaud Beauville¹

Une équation du quarantième degré! Elle appartient à ce que les mathématiciens qui osèrent affronter les ténèbres de l'hypergéométrie appellent la quatrième dimension. [Ra]

L'équation générale de degré n s'écrit

$$x^{n} + a_{1}x^{n-1} + \ldots + a_{n} = 0$$
 (E_n)

où a_1, \ldots, a_n sont des paramètres indépendants; la réponse à la question posée dans le titre semble donc évidemment n. Cependant nous savons tous que le changement de variable $y = x + \frac{a_1}{n}$ conduit à une équation

$$y^n + b_2 y^{n-2} + \ldots + b_n = 0$$
,

où b_2,\ldots,b_n sont des polynômes en les a_i ; et la résolution de l'une ou l'autre de ces équations est complètement équivalente. De même, remplacer y par $(b_{n-1}/b_n)y$ permet de supposer $b_{n-1}=b_n$, de sorte que notre nouvelle équation, toujours équivalente à (E_n) , ne fait plus intervenir que n-2 paramètres indépendants. Peut-on aller plus loin? Après avoir été beaucoup étudiée aux 18^e et 19^e siècles, cette question est un peu tombée dans l'oubli. Elle en est sortie il y a 15 ans avec l'article de Buhler et Reichstein [BR], qui replacent le problème dans le cadre général de la dimension essentielle d'un groupe fini. Je vais essayer de décrire cette formulation, montrer sa relation avec la géométrie algébrique, et expliquer en particulier comment des résultats récents (et difficiles) sur les variétés de dimension 3 permettent de résoudre le cas de l'équation du septième degré.

¹ Laboratoire J.-A. Dieudonné, UMR 7351 du CNRS, université de Nice.

1. Un peu d'histoire

Dans le cas de l'équation $x^2 + a_1x + a_2 = 0$, le changement de variable $y = x + \frac{a_1}{2}$ (qui suffit bien sûr à la résoudre) était connu des babyloniens il y a quelques 4000 ans. Plus près de nous, Cardan consacre une bonne partie de l'*Ars Magna* ([C], chap. 14 à 23) à expliquer son utilisation pour les équations de degré 3. Descartes le décrit en toute généralité, et de façon détaillée, dans le livre III de sa Géométrie [De].

Quarante ans plus tard le mathématicien allemand Ehrenfried von Tschirnhaus a l'idée d'utiliser une transformation plus générale : $y=u_0+u_1x+\ldots+u_{n-1}x^{n-1}$. Il montre que y vérifie une équation

$$y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_n = 0$$
,

où b_p est un polynôme homogène de degré p en les u_i . Ainsi, en résolvant une équation quadratique, on peut choisir les u_i de façon que $b_1=b_2=0$; en degré 3, cela suffit à résoudre (E_3) . Tschirnhaus fait les calculs complètement et retrouve la formule de Cardan-Tartaglia. À ce point Tschirnhaus, dont la rigueur mathématique n'est pas la qualité dominante, pense avoir obtenu une méthode générale de résolution des équations algébriques; il l'écrit à Leibniz, qui lui répond assez sèchement qu'en degré supérieur ou égal à 5 sa méthode ne pourra résoudre que des cas particuliers ([L], lettre VIII de Leibniz à Tschirnhaus). Tschirnhaus n'est probablement pas convaincu : dans l'article [T], écrit quelques années plus tard, il semble encore affirmer que sa méthode permet d'éliminer tous les coefficients intermédiaires b_1, \ldots, b_{n-1} .



Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651-1708)

La méthode est reprise un siècle plus tard par le mathématicien suédois Erland Bring, qui réduit ainsi l'équation du cinquième degré à la forme $x^5+px+q=0$ [Br]; ce résultat est retrouvé et généralisé par un mathématicien anglais, George Jerrard (qui ignorait probablement le travail de Bring) – d'où le nom de Bring-Jerrard associé à cette réduction. Jerrard pense lui aussi pouvoir résoudre ainsi par radicaux l'équation de degré 5 (quelques années après la preuve par Abel de l'impossibilité d'une telle résolution...), et c'est Hamilton qui indique son erreur [H]. La forme de Bring-Jerrard est utilisée de façon essentielle par Hermite lorsqu'il prouve que

l'équation du cinquième degré peut être résolue à l'aide de fonctions elliptiques ([He], voir aussi [K]).

Il faut noter que cette réduction s'éloigne légèrement de la question initiale, dans la mesure où les nouveaux coefficients b_i sont des fonctions algébriques (i.e. solutions d'équations algébriques) et non plus polynomiales des a_i ; dans le langage de l'époque, on introduit des « irrationalités accessoires », qui sont considérées comme inessentielles puisqu'elles sont racines d'équations de degré plus petit que celle qu'on cherche à résoudre. Klein semble être le premier à s'en préoccuper : dans [K] il analyse soigneusement ces irrationalités accessoires pour l'équation du cinquième degré, et montre notamment qu'on ne peut réduire le nombre de paramètres à 1 sans les introduire (théorème de Kronecker, dernier paragraphe de [K]).

La théorie des équations, devenue théorie de Galois, se déplace ensuite vers des questions plus générales, telles que la théorie du corps de classes, et le problème du nombre de paramètres semble oublié – jusqu'à l'article [BR] dont nous allons essayer d'expliquer les idées essentielles.

2. De la méthode de Tschirnhaus à la dimension essentielle de \mathfrak{S}_n

2.1. La transformation de Tschirnhaus en termes modernes

Essayons maintenant de formuler rigoureusement la définition du « nombre minimum de paramètres » de l'équation (E_n) , nombre que nous noterons d(n). Il nous faut d'abord un corps de base : pour simplifier je prendrai le corps $\mathbb C$ – voir $\S 5$ pour quelques remarques sur le cas général. Il nous faut ensuite des indéterminées a_1,\ldots,a_n ; on va donc considérer le corps $K=\mathbb C(a_1,\ldots,a_n)$ des fractions rationnelles en ces n variables. L'étude de l'équation (E_n) revient à celle de l'extension $K\subset L:=K[x]/(x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n)$.

Que fait Tschirnhaus? Il prend un élément quelconque y de L et observe que L peut aussi s'écrire $K[y]/(y^n+b_1y^{n-1}+\ldots+b_n)$. Notons K_0 le sous-corps de K engendré par (b_1,\ldots,b_n) , et posons $L_0:=K_0[y]/(y^n+b_1y^{n-1}+\ldots+b_n)$; on a un diagramme²



qui est commutatif et même cartésien: techniquement, cela veut dire que L est le produit tensoriel $K \otimes_{K_0} L_0$, mais concrètement cela signifie précisément que L peut être défini par une équation à coefficients dans le corps plus petit K_0 (on dit que l'extension L/K est définie $sur\ K_0$). C'est donc exactement ce que nous cherchons à faire, avec un corps K_0 le plus petit possible. Comment mesurer cette petitesse? Il n'y a pas de raison de se borner au cas où K_0 est isomorphe à un corps de fractions rationnelles $\mathbb{C}(b_1,\ldots,b_p)$. Mais il est toujours vrai (et pas difficile) que K_0 contient un tel sous-corps de façon que K_0 soit une extension finie de $\mathbb{C}(b_1,\ldots,b_p)$ (en particulier, tout élément de K_0 vérifie une équation algébrique à coefficients dans ce sous-corps). Le nombre p est un invariant de K_0 qu'on appelle

Ne pas oublier que tout homomorphisme de corps est injectif, donc peut être vu comme une inclusion.

le degré de transcendance de K_0 (sur $\mathbb C$) et qu'on note deg. $tr(K_0)$. Il est donc raisonnable de le considérer comme le « nombre de paramètres » dont dépendent K_0 et L_0 , et de poser

$$d(n) := \min\{\deg. \operatorname{tr}(K_0) \mid K_0 \subset K \text{ et } L/K \text{ est définie sur } K_0\}.$$

2.2. Passage à l'extension galoisienne

Les algébristes préfèrent regarder l'extension galoisienne associée : au lieu d'adjoindre à K une racine x de l'équation (E_n) , on prend toutes ses racines x_1,\ldots,x_n . Le résultat est le corps des fractions rationnelles en n variables $M=\mathbb{C}(x_1,\ldots,x_n)$, le sous-corps $K=\mathbb{C}(a_1,\ldots,a_n)$ étant formé des fractions rationnelles symétriques $(a_i$ étant, au signe près, le i-ième polynôme symétrique élémentaire). Ce qu'on gagne dans cette situation c'est que le groupe symétrique \mathfrak{S}_n agit sur M (par permutation de x_1,\ldots,x_n), et que K est précisément le sous-corps des éléments de M invariants pour cette action. Si L/K est définie sur K_0 , il en est de même de M/K, d'où un diagramme



Le corps $M_0 \subset M$ est stable par l'action de \mathfrak{S}_n , et son sous-corps des invariants pour cette action est K_0 . Par conséquent la deuxième ligne est déterminée par la première, à savoir par le sous-corps M_0 de M stable par \mathfrak{S}_n . Le fait que l'extension M/K « provient » de M_0/K_0 se traduit par le fait que leurs degrés sont les mêmes (à savoir n!, l'ordre de \mathfrak{S}_n), et ceci est équivalent au fait que l'action de \mathfrak{S}_n sur M est fidèle. Comme le degré de transcendance ne change pas par extension finie, on peut réécrire notre définition de d(n):

$$d(n) := \min\{\deg.\operatorname{tr}(M_0) \mid M_0 \subset M \text{ stable par } \mathfrak{S}_n \ , \ \mathfrak{S}_n \subset \operatorname{Aut}(M_0)\}.$$

Nous allons maintenant reformuler cette définition en termes de géométrie algébrique. Pour cela nous devons d'abord rappeler la correspondance entre corps et variétés algébriques.

2.3. Des corps aux variétés algébriques

Dans ce qui suit les variétés algébriques sont supposées *irréductibles*, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas réunion de deux sous-variétés strictes, comme la courbe xy=0 dans \mathbb{C}^2 . Une *application rationnelle* $f:X \dashrightarrow Y$ entre deux variétés algébriques est une application algébrique de $X \setminus Z$ dans Y, où Z est une sous-variété stricte de X. Si $Y=\mathbb{C}$, on parle de *fonction rationnelle*; les fonctions rationnelles sur X forment un corps K_X , extension de type fini de \mathbb{C} (c'est-à-dire engendrée, en tant que corps, par un nombre fini d'éléments). Par exemple $K_{\mathbb{C}^n}$ est le corps des fractions rationnelles $\mathbb{C}(x_1,\ldots,x_n)$.

On dit qu'une application rationnelle $f:X\dashrightarrow Y$ est dominante si elle est « presque surjective », c'est-à-dire que le complémentaire de son image est contenu dans une sous-variété stricte de Y. Si c'est le cas, pour toute fonction rationnelle $\varphi\in K_Y$ la composée $\varphi\circ f$ est une fonction rationnelle $f^*\varphi$ sur X; l'application

 $f^*: K_Y \to K_X$ est un homomorphisme de corps. En termes savants, on a défini un foncteur

 $\{\text{variét\'es alg\'ebriques} + \text{appl. rat. dominantes}\} \longrightarrow \{\text{corps de type fini sur } \mathbb{C}\}$.

Il n'est pas difficile de voir que ce foncteur est une équivalence de catégories : toute extension de type fini est isomorphe au corps des fonctions rationnelles sur une variété, et tout homomorphisme $K_Y \to K_X$ provient d'une unique application rationnelle dominante $X \dashrightarrow Y$.

Par exemple, la définition du degré de transcendance du corps K_X se traduit par l'existence d'une application rationnelle dominante $f: X \longrightarrow \mathbb{C}^p$ qui est génériquement finie, c'est-à-dire que $f^{-1}(v)$ est fini pour v assez général dans \mathbb{C}^p . Cela entraîne $\dim(X) = p = \deg$. $\operatorname{tr}(K_X)$.

Dans ce qui suit, nous travaillerons toujours dans la catégorie des variétés algébriques et applications rationnelles dominantes. Il faut prendre garde que des variétés différentes deviennent isomorphes dans cette catégorie (on dit qu'elles sont birationnelles); ainsi on peut toujours enlever une sous-variété d'une variété donnée sans changer son type birationnel. Plus subtilement, on peut toujours choisir un modèle lisse (= sans singularités) et projectif dans un type birationnel donné.

2.4. Passage aux variétés algébriques

Appliquons ce dictionnaire à la dernière définition de d(n). Le corps M est le corps des fonctions rationnelles de \mathbb{C}^n , le sous-corps M_0 celui d'une variété X, munie d'une action fidèle de \mathfrak{S}_n ; de plus on a une application rationnelle dominante $\mathbb{C}^n \dashrightarrow X$ compatible avec l'action de \mathfrak{S}_n . Nous avons vu ci-dessus que deg. $\operatorname{tr}(M_0) = \dim(X)$. Donc

$$d(n) := \min \{ \dim(X) \mid \mathfrak{S}_n \subset \operatorname{Aut}(X) , \exists \mathbb{C}^n \longrightarrow X \text{ dominante } \mathfrak{S}_n \text{-\'equivariante} \}.$$

À ce point, pourquoi se borner au groupe symétrique? Étant donnés un groupe fini G et une représentation linéaire V de G, posons (provisoirement)

$$\operatorname{ed}(G,V) := \min\{\dim(X) \mid G \subset \operatorname{Aut}(X), \exists V \dashrightarrow X \text{ dominante } G\text{-\'equivariante}\}.$$

En fait, en comparant V à la représentation régulière, Buhler et Reichstein montrent que ce nombre est indépendant du choix de V: ils l'appellent dimension essentielle de G. Donnons une définition précise :

Définition. Soit G un groupe fini.

- 1) Une G-variété est une variété algébrique irréductible, munie d'une action fidèle de G.
- 2) Une G-variété X est linéarisable s'il existe une représentation linéaire V de G et une application rationnelle dominante G-équivariante $V \longrightarrow X$.
- 3) La dimension essentielle ed(G) de G est la dimension minimale d'une G-variété linéarisable.

Le nombre d(n) qui nous occupe est donc la dimension essentielle $\operatorname{ed}(\mathfrak{S}_n)$; nous allons essayer de le déterminer, ou au moins de l'encadrer. Notons que $\operatorname{ed}(G)$ a une interprétation analogue pour tout groupe fini G: c'est le plus petit nombre de paramètres nécessaire pour définir l'équation générale de groupe de Galois G, voir $[\mathsf{BR}]$.

3. Dimension essentielle

3.1. Premiers exemples

Voici quelques exemples de variétés G-linéarisables.

- 1) Soit V une représentation linéaire fidèle de G; l'application identique de V est bien évidemment une G-linéarisation. On a donc $\operatorname{ed}(G) \leqslant \dim(V)$. Par conséquent, si l'on note $\operatorname{rd}(G)$ la plus petite dimension d'une représentation fidèle de G (dimension de représentation de G), on a $\operatorname{ed}(G) \leqslant \operatorname{rd}(G)$.
- 2) Plaçons-nous dans la situation de 1). Le groupe G opère sur l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$, et l'application rationnelle $V \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$ est G-équivariante. L'action de G sur $\mathbb{P}(V)$ est fidèle si et seulement si $G \subset GL(V)$ ne contient pas d'homothétie non triviale. C'est le cas en particulier si le $centre\ Z(G)$ de G est trivial. On a donc dans ce cas $\operatorname{ed}(G) \leqslant \operatorname{rd}(G) 1$.
- 3) Donnons un exemple un peu plus élaboré. Partons de l'action de \mathfrak{S}_n sur \mathbb{C}^n par permutation. Elle s'étend à $(\mathbb{P}^1)^n$, où $\mathbb{P}^1=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ est la droite projective complexe (= sphère de Riemann). Le groupe $H=\operatorname{PGL}(2,\mathbb{C})$ des homographies de \mathbb{P}^1 opère sur $(\mathbb{P}^1)^n$; cette action se restreint à la sous-variété ouverte $(\mathbb{P}^1)^n_{\neq}$ formé des points dont les coordonnées sont toutes distinctes (complémentaire des sous-variétés d'équation $x_i=x_j$ dans $(\mathbb{P}^1)^n$). Dès que $n\geqslant 3$, H opère librement sur $(\mathbb{P}^1)^n_{\neq}$ une homographie qui fixe 3 points distincts est l'identité. On peut alors former le quotient $X_n=(\mathbb{P}^1)^n_{\neq}/H$, c'est une variété algébrique de dimension n-3. L'action de \mathfrak{S}_n sur $(\mathbb{P}^1)^n_{\neq}$ commute avec celle de H, elle passe donc au quotient et définit une action de \mathfrak{S}_n sur X_n . Cette action est fidèle pour $n\geqslant 5$: comme dans ce cas le seul sous-groupe distingué non trivial de \mathfrak{S}_n est \mathfrak{A}_n , il suffit de prouver que celui-ci n'opère pas trivialement sur X_n ; le lecteur vérifiera que la classe dans X_n de $(0,1,2,\ldots,n-1)$ n'est pas fixée par la permutation (123). Donc :

Proposition 1. Pour $n \ge 5$, on a ed $(\mathfrak{S}_n) \le n-3$.

Notons au passage que l'action de \mathfrak{S}_4 sur X_4 n'est pas fidèle. En effet le seul invariant projectif de 4 points est le birapport, qui fournit un isomorphisme $X_4 \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$. Or il est bien connu que le birapport est invariant par le sous-groupe distingué $(\mathbb{Z}/2)^2$ de \mathfrak{S}_4 (« groupe de Klein »), qui opère donc trivialement sur X_4 .

3.2. Propriétés élémentaires

Commençons par deux conséquences immédiates de la définition.

- 1) On a $ed(G) \ge 0$, et ed(G) = 0 si et seulement si $G = \{1\}$: seul le groupe trivial opère fidèlement sur un point.
- 2) Si H est un sous-groupe de G, on a $ed(H) \leq ed(G)$. En effet toute G-linéarisation $V \dashrightarrow X$ est aussi une H-linéarisation.

SMF - Gazette - 132, avril 2012

3.3. Groupes de dimension essentielle 1

Théorème 1. Les groupes de dimension essentielle 1 sont \mathbb{Z}/n et les groupes diédraux \mathbb{D}_n pour n impair.

Démonstration. Le groupe \mathbb{Z}/n opère fidèlement sur \mathbb{C} ; le groupe \mathbb{D}_n a une représentation fidèle de dimension 2, et pour n impair son centre est trivial. Ces groupes sont donc de dimension essentielle 1 par 3.1, exemples 1) et 2).

Soit G un groupe de dimension essentielle 1. Il existe alors une courbe C munie d'une action de G, et une application rationnelle dominante d'un espace vectoriel dans C. Un théorème célèbre (et facile) de Lüroth affirme alors que la courbe C est rationnelle, c'est-à-dire birationnelle à \mathbb{P}^1 – on peut donc prendre $C=\mathbb{P}^1$. Or les groupes finis d'automorphismes birationnels de \mathbb{P}^1 sont bien connus, ce sont les sous-groupes finis de $SO(3,\mathbb{R})$ (penser à la sphère de Riemann), à savoir \mathbb{Z}/n , \mathbb{D}_n , et les groupes polyédraux \mathfrak{A}_4 , \mathfrak{S}_4 et \mathfrak{A}_5 . On remarque alors que \mathbb{D}_n pour n pair et \mathfrak{A}_4 , \mathfrak{S}_4 et \mathfrak{A}_5 contiennent tous un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^2$. Compte tenu de 3.2.2, le théorème résulte du lemme suivant :

Lemme 1. On a ed $((\mathbb{Z}/2)^2) = 2$.

Démonstration. Posons $G=(\mathbb{Z}/2)^2$. On a $\operatorname{ed}(G)\leqslant 2$ puisque G admet une représentation fidèle de dimension 2; supposons $\operatorname{ed}(G)=1$. Il existe alors comme ci-dessus une application rationnelle dominante G-équivariante $f:V\dashrightarrow \mathbb{P}^1$, avec $V=\mathbb{C}^2$ muni de l'action de G donnée par les matrices $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$. Notons que f

est définie en dehors d'un nombre fini de points : en effet on a $f(x,y)=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, où P et Q sont des polynômes sans facteur commun ; les points d'indétermination de f sont ceux qui vérifient P(x,y)=Q(x,y)=0, ils sont en nombre fini.

La G-variété V possède un point très particulier, l'origine 0, qui est fixée par tout le groupe. Par contre G ne fixe aucun point de \mathbb{P}^1 (pour un choix convenable de la coordonnée z de \mathbb{P}^1 , G est engendré par les involutions $z\mapsto -z$ et $z\mapsto 1/z$, qui n'ont pas de point fixe commun). De deux choses l'une :

- ou bien f est définie en 0; alors le point f(0) de \mathbb{P}^1 est fixé par G, impossible;
- ou bien f n'est pas définie en 0. La géométrie algébrique possède une construction miraculeuse pour traiter ce cas, l'éclatement de 0 dans V; elle fournit une variété \hat{V} et une application birationnelle $\varepsilon:\hat{V}\to V$ qui est un isomorphisme au-dessus de $V\smallsetminus\{0\}$, mais remplace 0 par la droite projective $\mathbb{P}(V)$; elle est facile à décrire : \hat{V} est la sous-variété de $V\times\mathbb{P}^1$ formée des couples ((x,y);z) tels que x=yz, et ε est la première projection.

La composée $f \circ \varepsilon : \hat{V} \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ est de nouveau définie en dehors d'un nombre fini de points; elle induit donc une application rationnelle $f' : \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}^1$, qui est encore G-équivariante. Or l'élément g de G correspondant à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de GL(V) opère trivialement sur $\mathbb{P}(V)$, donc sur l'image de f', qui doit être un point de \mathbb{P}^1 fixé par g. Mais de nouveau ce point devrait être fixé par G tout entier : cette contradiction prouve le lemme, et donc le théorème.

La même idée, un peu plus développée, conduit au résultat général suivant, dû à Kollár et Szabó ([RY], Appendice) :

Théorème 2. Soit A un groupe abélien, et X une variété lisse projective A-linéarisable. Alors A fixe un point de X.

Corollaire. On a ed(A) = rd(A). En particulier, la dimension essentielle $de(\mathbb{Z}/n)^r$ est r.

Démonstration. Soit X une variété lisse projective A-linéarisable, x un point de X fixé par A. Le groupe A agit sur l'espace tangent $T_x(X)$, et cette action est localement isomorphe à celle de A sur X au voisinage de x. Par conséquent la représentation de A dans $T_x(X)$ est fidèle; on a donc $\mathrm{rd}(A) \leqslant \dim(X)$, et par suite $\mathrm{rd}(A) \leqslant \mathrm{ed}(A)$. L'inégalité opposée est triviale (exemple 3.1.1). Enfin l'égalité $\mathrm{rd}((\mathbb{Z}/n)^r) = r$ est laissée en exercice (facile!).

L'égalité ed(G) = rd(G) est encore vraie pour un p-groupe [KM]; la démonstration utilise des méthodes beaucoup plus sophistiquées.

4. Retour à Sn

4.1. $ed(\mathfrak{S}_n)$ pour $n \leq 6$

Revenons à notre problème de départ, le calcul de $d(n) = ed(\mathfrak{S}_n)$.

Proposition 2. On a $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leqslant \operatorname{ed}(\mathfrak{S}_n) \leqslant n-3$ pour $n \geqslant 5$.

Démonstration. Posons $p = \left[\frac{n}{2}\right]$. Le sous-groupe H_n de \mathfrak{S}_n engendré par les transpositions $(12), \ldots, (2p-1, 2p)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^p$, donc $\operatorname{ed}(\mathfrak{S}_n) \geqslant \operatorname{ed}(H_n) = p$ (corollaire du théorème 2). La seconde inégalité a déjà été démontrée (proposition 1).

Corollaire.

$$ed(\mathfrak{S}_2) = ed(\mathfrak{S}_3) = 1$$
 $ed(\mathfrak{S}_4) = ed(\mathfrak{S}_5) = 2$ $ed(\mathfrak{S}_6) = 3$.

Démonstration. Les deux premières égalités, et l'inégalité $\operatorname{ed}(\mathfrak{S}_4)\geqslant 2$, résultent du théorème 1 (noter que $\mathfrak{S}_3=\mathbb{D}_3$). \mathfrak{S}_4 admet une représentation de dimension 3 et son centre est trivial, donc $\operatorname{ed}(\mathfrak{S}_4)=2$ (3.1.2). Le cas de \mathfrak{S}_5 et \mathfrak{S}_6 résulte de la proposition.

Remarque 1. Les mêmes méthodes donnent $\operatorname{ed}(\mathfrak{A}_3)=1$ et $\operatorname{ed}(\mathfrak{A}_4)=\operatorname{ed}(\mathfrak{A}_5)=2$. L'égalité $\operatorname{ed}(\mathfrak{A}_6)=3$ est plus subtile, voir [S]. On a donc $\operatorname{ed}(\mathfrak{A}_n)=\operatorname{ed}(\mathfrak{S}_n)$ pour $3\leqslant n\leqslant 6$.

SMF - Gazette - 132, avril 2012

4.2. $ed(\mathfrak{S}_{7})$

À partir de n=7, la proposition ne fournit qu'un encadrement de d(n); on trouve par exemple $d(7) \in \{3,4\}$. Ce cas a été réglé récemment [D1] grâce à des travaux de Prokhorov [P] :

Théorème 3. $ed(\mathfrak{A}_7) = ed(\mathfrak{S}_7) = 4$.

Démonstration. Comme

$$3 = \mathsf{ed}(\mathfrak{A}_6) \leqslant \mathsf{ed}(\mathfrak{A}_7) \leqslant \mathsf{ed}(\mathfrak{S}_7) \leqslant 4$$

il suffit de prouver qu'on a $\operatorname{ed}(\mathfrak{A}_7) \neq 3$. Dans le cas contraire, il existe une \mathfrak{A}_7 -variété X lisse projective de dimension 3 et une application rationnelle dominante $f:\mathbb{C}^n \dashrightarrow X$. Cette dernière propriété entraîne que deux points généraux x,x' de X peuvent être joints par une courbe rationnelle (l'image de la droite dans \mathbb{C}^n passant par deux points v,v' tels que f(v)=x, f(v')=x') : on dit que X est rationnellement connexe. Le travail de Prokhorov mentionné ci-dessus classifie toutes les variétés rationnellement connexes de dimension 3 munies de l'action d'un groupe simple. Le groupe \mathfrak{A}_7 apparaît deux fois dans cette liste :

- \mathfrak{A}_7 opère par permutation des coordonnées sur la variété X d'équations $\sum X_i = \sum X_i^3 = 0$ dans \mathbb{P}^6 ;
 - \mathfrak{A}_7 admet un plongement dans PGL(4, \mathbb{C}), donc une action sur \mathbb{P}^3 .

Dans le premier cas, on vérifie que le sous-groupe $(\mathbb{Z}/2)^2 \times \mathbb{Z}/3 \subset \mathfrak{A}_4 \times \mathfrak{A}_3 \subset \mathfrak{A}_7$ n'a pas de point fixe dans X, de sorte que X n'est pas \mathfrak{A}_7 -linéarisable par le théorème 2.

Le second cas est plus amusant. On considère les revêtements doubles de groupes de Lie complexes

$$SL(4) \longrightarrow SO(6) \longrightarrow PGL(4)$$

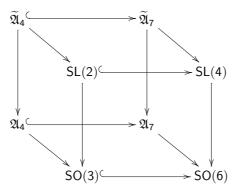
déduits de l'isomorphisme $\mathbb{C}^6\cong \wedge^2\mathbb{C}^4$. La représentation standard $\mathfrak{A}_7\subset SO(6)$, composée avec la deuxième flèche, fournit le plongement cherché.

L'image réciproque de \mathfrak{A}_7 dans $\mathsf{SL}(4)$ apparaît comme une extension centrale

$$1 \to \{\pm 1\} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{A}}_7 \longrightarrow \mathfrak{A}_7 \to 1 \ .$$

Lemme 2. L'élément central -1 de $\widetilde{\mathfrak{A}}_7$ est un commutateur.

Démonstration. Considérons le sous-groupe \mathfrak{A}_4 de \mathfrak{A}_7 qui laisse fixes les 3 dernières lettres. On a un diagramme commutatif



SMF - Gazette - 132, avril 2012

de sorte qu'il suffit de vérifier que -1 est un commutateur dans $\widetilde{\mathfrak{A}}_4$. Or comme SL(2) ne contient pas d'élément d'ordre 2 autre que -1, le groupe de Klein $(\mathbb{Z}/2)^2 \subset \mathfrak{A}_4$ se relève en le groupe quaternionien $\mathbb{Q}_8 \subset \widetilde{\mathfrak{A}}_4$, dans lequel le commutateur de deux éléments distincts différents de ± 1 est -1.

On a donc -1=(u,v) dans $\widetilde{\mathfrak{A}}_7$. Les éléments u,v de $\widetilde{\mathfrak{A}}_7\subset SL(4)$ ne peuvent laisser stable une même droite de \mathbb{C}^4 , puisqu'ils commuteraient sur cette droite. Par suite leurs images dans \mathfrak{A}_7 ne fixent pas un même point de \mathbb{P}^3 ; comme elles commutent, le théorème 2 montre que \mathbb{P}^3 n'est pas \mathfrak{A}_7 -linéarisable.

4.3. Peut-on aller plus loin?

Il est évidemment tentant de conjecturer qu'on a $\operatorname{ed}(\mathfrak{A}_n)=\operatorname{ed}(\mathfrak{S}_n)=n-3$ pour tout $n\geqslant 5$, mais je ne connais aucun argument en faveur de cette conjecture à part le fait qu'elle est vraie pour $n\leqslant 7$. Le résultat de Prokhorov est un véritable tour de force, qui utilise toute la puissance de la théorie de Mori en dimension 3; il semble tout à fait hors de portée d'obtenir une classification analogue en dimension plus grande. Si l'on veut progresser sur d(n), il faut chercher une autre approche — peut-être des variantes plus sophistiquées du théorème 2?

4.4. Autres groupes

Pour les autres groupes la situation n'est guère plus brillante. Les groupes de dimension essentielle 2 ont été classifiés par Duncan [D2]; comme la liste en est assez longue, je me bornerai à citer les deux groupes simples qui apparaissent, \mathfrak{A}_5 et PSL(2, \mathbb{F}_7). On peut déduire du théorème de Prokhorov que les groupes simples de dimension essentielle 3 sont \mathfrak{A}_6 et peut-être PSL(2, \mathbb{F}_{11}) [B] — on ignore si la dimension essentielle de ce dernier groupe est 3 ou 4. On a très peu d'informations sur les autres groupes simples.

5. Développements ultérieurs

Je n'ai touché qu'à l'aspect le plus élémentaire de la notion de dimension essentielle, celui qui concerne les groupes finis sur le corps des nombres complexes. Pour finir je vais évoquer très brièvement les développements importants que le sujet a connu depuis [BR].

D'abord je me suis placé sur $\mathbb C$, alors que la plupart des articles sur le sujet se placent sur un corps k quelconque. Si l'on suppose que k contient suffisamment de racines de l'unité, la situation est essentiellement la même; les choses deviennent beaucoup plus délicates si l'on affaiblit cette hypothèse. Le théorème déjà cité de $[\mathsf{KM}]$ traite le cas d'un p-groupe lorsque k contient les racines p-ièmes de l'unité (et $\mathsf{car}(k) \neq p$); sans cette hypothèse le résultat n'est pas connu, déjà dans le cas d'un groupe cyclique.

La définition de la dimension essentielle a été étendue au cas où G est un groupe algébrique [R]: on doit se borner aux représentations V qui sont « génériquement libres », c'est-à-dire où G opère librement sur un ouvert de V. On pose alors $\operatorname{ed}(G) := \min\{\dim(X) - \dim(G)\}$ pour X G-linéarisable. Sur $\mathbb C$, ce nombre est connu pour la plupart des groupes classiques mais pas pour $\operatorname{PGL}(n)$ par exemple.

La notion de dimension essentielle a été reformulée par Merkuriev dans le cadre très général des foncteurs sur la catégorie des extensions du corps de base [BF]. Cela s'applique notamment aux champs algébriques [BRV], dont la dimension essentielle a été calculée dans un certain nombre de cas. Nous voilà loin des essais malheureux de Tschirnhaus...

6. Références

- [B] A. Beauville : On finite simple groups of essential dimension 3. Preprint arXiv:1101.1372.
- [Br] E. Bring: Meletemata quaedam mathematematica circa transformationem aequationum algebraicarum. Lund (1786).
- [BF] G. Berhuy, G. Favi: Essential dimension: a functorial point of view (after A. Merkurjev). Doc. Math. 8 (2003), 279–330.
- [BR] J. Buhler, Z. Reichstein: On the essential dimension of a finite group. Compositio Math. 106 (1997), no. 2, 159–179.
- [BRV] P. Brosnan, Z. Reichstein, A. Vistoli: Essential dimension of moduli of curves and other algebraic stacks. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 13 (2011), no. 4, 1079–1112.
- [C] G. Cardano: Ars Magna or the rules of Algebra (traduction anglaise). Dover, New York (1993).
- [De] R. Descartes: La Géométrie. Jan Maire, Leyden (1637); disponible sur http:// fr.wikisource.org/wiki/La_Géométrie_(éd._1637).
- [D1] A. Duncan: Essential dimension of A₇ and S₇. Math. Res. Lett. 17 (2010), no. 2, 263–266.
- [D2] A. Duncan: Finite Groups of Essential Dimension 2. Comment. Math. Helvet., à paraître.
- [H] W.R. Hamilton: Inquiry into the Validity of a Method recently proposed by George B. Jerrard, Esq. for Transforming and Resolving Equations of Elevated Degrees. British Association Report, Bristol (1836), p. 295-348. Disponible sur http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/Jerrard/Jerrard.pdf
- [He] C. Hermite: Sur l'équation du cinquième degré. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LXI, 1865 (II), pp. 877, 965 et 1073; t. LXII, 1866 (I), pp. 65, 167, 245, 715, 919, 959, 1054, 1161 et 1213.
- [J] G. B. Jerrard: Mathematical Researches. A.B. Strong, Bristol (1832).
- [K] F. Klein: Lectures on the Icosahedron and the Solution of Equations of the Fifth Degree (traduction anglaise). Dover, New York (1956).
- [KM] N. Karpenko, A. Merkuriev: Essential dimension of finite p-groups. Invent. math. 172, 491–508 (2008).
- [L] G.W. Leibniz: Leibnizens mathematische schriften, IV. H.W. Schmidt, Halle (1859); disponible sur Google books.
- [P] Y. Prokhorov: Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3. J. Algebraic Geom., à paraitre.
- [Ra] J. Ray: Les mystérieuses études du docteur Drum (Les aventures de Harry Dickson). Librio no. 154 (1998), Librio, Paris.
- [R] Z. Reichstein: On the notion of essential dimension for algebraic groups. Transform. Groups 5 (2000), no. 3, 265–304.
- [RY] Z. Reichstein, B. Youssin: Essential dimensions of algebraic groups and a resolution theorem for G-varieties. With an appendix by J. Kollár and E. Szabó. Canad. J. Math. 52 (2000), no. 5, 1018–1056.
- [S] J.-P. Serre: Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis. Séminaire Bourbaki 2008–2009, Exp. 1000. Astérisque 332 (2010), 75–100.
- [T] E. Tschirnhaus: Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data æquatione. Acta eruditorum 2 (1683), 204–207. Traduction anglaise dans Bull. ACM SIGSAM 37 no. 1 (2003), 1–3.

La cohérence dans tous ses états

Didier Robert¹

1. Introduction

Les états cohérents ont été introduits en physique (mécanique quantique, optique quantique) pour représenter des paquets d'onde possédant de bonnes propriétés de « cohérence » recherchées par exemple dans les rayons laser. La terminologie a été introduite par R. Glauber en 1963 (prix Nobel de Physique 2005) qui a mis en évidence leur rôle fondamental dans sa théorie de l'optique quantique. On attribue la découverte des premiers états cohérents à Schrödinger (1926, prix Nobel de Physique 1933) où ils sont apparus comme les solutions de l'équation de l'oscillateur harmonique quantique les plus proches de l'oscillateur classique qui lui est associé (un oscillateur classique à la fréquence ω est régi par l'équation différentielle $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$, $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$).

Mathématiquement les états cohérents apparaissent comme des familles de fonctions, ou plus généralement des familles d'éléments $\{\varphi_z\}_{z\in\mathcal{Z}}$ d'un espace de Hilbert \mathcal{H} où \mathcal{Z} est un espace localement compact muni d'une mesure de Radon μ . Deux propriétés sont particulièrement recherchées :

(i) le système $\{\varphi_z\}_{z\in\mathcal{Z}}$ engendre \mathcal{H} et on a les formules de reconstruction

(1.1)
$$\psi = \int_{\mathcal{Z}} \tilde{\psi}(z) \varphi_z d\mu(z), \quad \|\psi\|^2 = \int_{\mathcal{Z}} |\tilde{\psi}(z)|^2 d\mu(z),$$

où $\tilde{\psi}(z) = \langle \varphi_z, \psi \rangle$ (« coefficient de Fourier »);

(ii) les φ_z se déduisent d'un état² fixé $\varphi \in \mathcal{H}$, de norme 1, par une transformation unitaire $\hat{T}(z)$, $\varphi_z = \hat{T}(z)\varphi$.

Les états cohérents ne constituent pas des bases au sens usuel, dans la formule (1.1) les coefficients $\tilde{\psi}(z)$ ne sont en général pas uniques. Une telle formule rappelle la transformation de Fourier lorsque $\mathcal{Z}=\mathbb{R}$, $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \psi, \eta \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)} \eta(x) dx$. On a alors la formule de Plancherel :

$$\tilde{\psi}(z) = \int_{\mathbb{D}} e^{-izx} \psi(x) dx, \quad \|\psi\|^2 = \int_{\mathbb{D}} |\tilde{\psi}(z)|^2 \frac{dz}{2\pi}.$$

Mais ici $\varphi_z(x)=\mathrm{e}^{izx}$ n'est pas dans l'espace $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R})$, la propriété (ii) n'est donc pas satisfaite. On peut la récupérer en modifiant la transformation de Fourier comme suit (transformée de Fourier à fenêtre glissante).

On se donne g dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $\int |g(x)|^2 dx = 1$, par exemple g est la gaussienne standard $g(x) = \pi^{-1/4} \mathrm{e}^{-x^2/2}$. On définit la famille de

¹ Laboratoire Jean Leray, université de Nantes.

² En mécanique quantique on appelle *état* tout élément d'un espace de Hilbert de référence dans lequel évolue un système quantique.

fonctions $\varphi_z(x) = g(x-q) e^{ipx}$, $z = (q,p) \in \mathbb{R}^2$. On a ici $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^2$. On déduit de la formule de Plancherel l'égalité :

$$\|\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{\psi}(q,p)|^2 \frac{dq \, dp}{2\pi}$$

avec

$$ilde{\psi}(q,p) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) ar{g}(x-q) \, \mathrm{e}^{-ipx} dx.$$

La propriété (ii) s'obtient ici à l'aide de la représentation standard du groupe de Heisenberg de dimension 3, dans $L^2(\mathbb{R})$.

On obtient ainsi des états cohérents (appelés états cohérents de Gabor³) introduits en théorie du signal.

Des états cohérents ont été introduits et étudiés dans bien d'autres cadres que nous ne discutons pas ici.

- Glauber les a d'abord introduits en théorie de champs de bosons, puis plus récemment pour des systèmes de fermions.
- Gilmore et Perelomov les ont introduits dans des espaces de représentations irréductibles de groupes de Lie semi-simples comme SU(2) ou SU(1,1) [25, 26].
- Les états cohérents jouent un rôle clé dans le domaine de la quantification géométrique [22].
- Les ondelettes sont un cas particulier d'états cohérents associées au groupe affine de $\mathbb{R}: x \mapsto ax + b, \ a > 0, b \in \mathbb{R}$. Leurs succès dans l'analyse mathématique et les applications numériques (traitement d'image, statistique) ont montré qu'il existe des alternatives à l'analyse de Fourier classique. On renvoie pour ces aspects à l'article de A. Cohen dans un numéro récent de la Gazette [4].
- Les états cohérents gaussiens sont apparus à plusieurs reprises dans l'étude d'équations aux dérivées partielles sous différentes terminologies : Gaussian beams (J. Ralston, V.M. Babic), Wave packets (A. Cordoba R. Fefferman, D. Tataru), opérateurs intégraux de Fourier à phases complexes (A. Mellin-J. Sjöstrand), opérateurs d'Hermite (L. Boutet de Monvel, V. Guillemin), pour ne citer que ces travaux parmi beaucoup d'autres.

Dans cet article j'essaierai de montrer comment les états cohérents permettent d'analyser le comportement des solutions de l'équation de Schrödinger (stationnaire ou dépendant du temps) dans le régime dit semi-classique. On nomme ainsi le régime dans lequel la constante de Planck \hbar devient négligeable (sans être nulle!) devant d'autres caractéristiques physiques du système de particules étudié, par exemple sa masse. La dynamique du système quantique devient alors proche d'une dynamique classique. Il se trouve que les états cohérents sont particulièrement bien adaptés pour éclairer cette zone de transition, qui demeure néanmoins étrange, entre le monde quantique microscopique et le monde classique macroscopique. Les états cohérents ont en effet des « microsupports » ponctuels dans l'espace des phases que l'on visualise sur leurs transformées de Wigner. On verra alors que l'on peut facilement mettre en évidence un phénomène purement quantique en considérant un état somme de deux états cohérents localisés en des points

³ D. Gabor est connu pour son invention de l'holographie qui lui valu le prix Nobel en 1971.

distincts; cet état illustre la fameuse expérience imaginée par Schrödinger du chat à la fois mort et vivant.

L'une des propriétés remarquables des états cohérents est qu'ils permettent d'obtenir des solutions approchées, au sens semi-classique, de l'équation de Schrödinger (qui deviennent exactes pour les hamiltoniens quadratiques). À partir de ce résultat on obtient des solutions semi-classiques pour des données initiales arbitraires. On en déduira en particulier la formule de Van Vleck, connue formellement depuis les débuts de la mécanique quantique (1928), ainsi qu'une approche de la formule semi-classique des traces de Gutzwiller. On discutera également le temps d'Ehrenfest, temps logarithmique en \hbar (pour les systèmes classique instables) à partir duquel l'approximation semi-classique cesse d'être pertinente. Enfin on explicitera ce qu'est le surprenant effet de Zenon quantique sur les états cohérents.

Je n'ai pas su éviter certains passages techniques (paragraphes 4.4, 4.5, 4.6). Le lecteur pressé pourra ne considérer que le cas des hamiltoniens quadratiques qui contient l'essentiel des idées présentées ici et pour lesquels on a des formules exactes (sans reste) ne dépendant que de la dynamique classique.

2. Les états cohérents de Schrödinger

Ils ont été introduits par Schrödinger (1926) pour résoudre l'équation de l'oscillateur harmonique quantique :

(2.2)
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_t = \hat{H}_{\rm osc} \psi_t, \ \psi_{t=0} = \psi_0,$$

 $\hat{H}_{\rm osc}:=rac{1}{2}\left(-\hbar^2rac{\partial^2}{\partial x^2}+x^2
ight)$ est un opérateur autoadjoint (non borné) sur $L^2(\mathbb{R})$, $\hbar>0$ est un petit paramètre, proportionnel à la constante de Planck.

En mécanique quantique on introduit les opérateurs $\hat{P}\psi=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi$ et $\hat{Q}\psi(x)=x\psi(x)^4$. \hat{P} est l'analogue quantique de l'impulsion classique $p=\dot{x}$ et \hat{Q} de la position, notée x ou q, dans l'espace de configuration. Le mouvement classique est décrit dans l'espace de phase $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}_q\times\mathbb{R}_p$. L'hamiltonien associé à l'oscillateur harmonique de fréquence 1 est donc $H(q,p)=\frac{1}{2}(p^2+q^2)$ ce qui redonne les équations hamiltoniennes du mouvement $\dot{q}=p$, $\dot{p}=-q$.

 $\hat{H}_{\rm osc}$ s'obtient par la substitution $q\mapsto\hat{Q}$ et $p\mapsto\hat{P}:\hat{H}_{\rm osc}=\frac{1}{2}(\hat{P}^2+\hat{Q}^2)$. Schrödinger énonce alors la propriété suivante : les solutions de (2.2) minimisant le principe d'incertitude de Heisenberg sont des gaussiennes.

2.1. Le principe d'incertitude de Heisenberg

En mécanique quantique l'état d'une particule (ou d'un système) est représenté par un point de la sphère unité d'un espace de Hilbert et les appareils de mesure sont modélisés par des opérateurs auto-adjoints dans cet espace de Hilbert appelés *observables*. Le principe d'incertitude de Heisenberg est une conséquence de la non commutativité des algèbres d'opérateurs.

⁴ Dans tout l'article les opérateurs seront munis d'un chapeau.

Considérons donc \hat{A} , \hat{B} des opérateurs autoadjoints (non bornés) dans un espace de Hilbert \mathcal{H} et un état quantique $\psi \in \mathcal{H}$, $\|\psi\|=1$. On définit pour $\psi \in D(\hat{A})$ (domaine de \hat{A}),

(2.3)
$$\langle \hat{A} \rangle_{\psi} := \langle \psi, \hat{A} \psi \rangle$$
, (moyenne de la mesure)

(2.4)
$$\triangle_{\psi}\hat{A} := \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle_{\psi} \mathbb{1})^2 \rangle_{\psi}, \text{ (variance de la mesure)}$$

On a alors l'inégalité de Heisenberg si $\psi \in D(\hat{A}) \cap D(\hat{B})$, $\|\psi\| = 1^5$

$$\boxed{ \triangle_{\psi} \hat{A} \triangle_{\psi} \hat{B} \geqslant \frac{1}{4} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \psi, \psi \rangle|,}$$

où $[\hat{A},\hat{B}]=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$. La preuve due à H. Weyl se fait comme pour démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Application : $\hat{A} = \hat{P}$, $\hat{B} = \hat{Q}$, alors

$$\triangle_{\psi}\hat{P}\triangle_{\psi}\hat{Q}\geqslantrac{\hbar}{4}.$$

Cette inégalité montre que le produit de l'incertitude sur la position par l'incertitude sur l'impulsion est minoré et donc qu'il est impossible de mesurer simultanément ces deux quantités avec une précision arbitraire puisque $\hbar>0$.

Les cas où on a l'égalité s'obtiennent également en procédant comme pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On obtient alors si $\psi \in D(\hat{Q}) \cap D(\hat{P})$, $\|\psi\| = 1$,

$$\triangle_{\psi}\hat{P}\triangle_{\psi}\hat{Q} = \frac{\hbar}{4}$$

si et seulement si il existe $q, p \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $C \in \mathbb{C}$, tels que

(2.6)
$$\psi(x) = C \exp\left(\frac{ip \cdot x}{\hbar} - \frac{\lambda(x-q)^2}{2\hbar}\right).$$

Autrement dit les seuls états quantiques minimisant le produit des incertitudes (2.5) sont les états gaussiens normalisés, de moyenne et de variance arbitraires.

Notons que l'état ψ donné par (2.6) est clairement concentré près de q. Sa transformée de Fourier : $\tilde{\psi}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}x\cdot\xi}dx$ est concentrée près de p. C'est une conséquence de la propriété remarquable suivante des gaussiennes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\cdot\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

⁵ Si $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R}^d)$, et $\|\psi\|^2=\int_{\mathbb{R}^d}|\psi(x)|^2dx=1$ alors $|\psi(x)|^2$ s'interprète comme la densité de probabilité de présence de la particule en x. Pour la distribution de l'impulsion on remplace ψ par sa transformée de Fourier unitaire.

2.2. Des états cohérents

Revenons à l'oscillateur harmonique $\hat{H}_{\rm osc}$. Partant de la gaussienne centrée au point z=(q,p) de l'espace de phase : $\varphi_z(x)=(\pi\hbar)^{-1/4}\exp\left(-\frac{iq\cdot p}{2\hbar}+\frac{ip\cdot x}{\hbar}-\frac{(x-q)^2}{2\hbar}\right)$, Schrödinger résout l'équation (2.2) à l'aide de l'ansatz

$$\psi_t(x) = C_t \exp\left(\frac{ip_t \cdot x}{\hbar} - \frac{(x - q_t)^2}{2\hbar}\right), \psi_0 = \varphi_z.$$

Pour que ψ_t soit solution de (2.2) il trouve $\dot{q}_t = p_t$, $\dot{p}_t = -q_t$ et reconnaît les équations du mouvement d'un oscillateur classique dans l'espace de phase \mathbb{R}^2 (mouvement périodique sur des cercles). Un calcul élémentaire montre que C_t dépend de la donnée initiale et de l'action classique entre 0 et t:

$$C_t = (\pi \hbar)^{-1/4} e^{-it/(2\hbar) - iq_t \cdot p_t/(2\hbar)}.$$

Notons que le fait d'avoir obtenu une famille de gaussiennes dépendant du temps dont la variance est constante égale à 1 (en unité \hbar) est un miracle de l'oscillateur harmonique.

La famille $\{\varphi_z\}_{z\in\mathbb{R}^2}$ porte le nom d'états cohérents standards ou canoniques. On pourrait aussi les appeler états cohérents de l'oscillateur harmonique ou états cohérents de Schrödinger.

Cette définition s'interprète également par le groupe de Heisenberg. On pose $\hat{T}(z) = e^{\frac{i}{\hbar}(p\hat{Q}-q\hat{P})}$, quantification de la translation (q,p) dans \mathbb{R}^2 . On a en effet :

$$\varphi_z = \hat{T}(z)\varphi_0 \ .$$

L'opérateur unitaire $\hat{T}(z)$ est l'analogue quantique de la translation de z dans l'espace de phase :

(2.7)
$$\hat{T}(z) \begin{pmatrix} \hat{Q} \\ \hat{P} \end{pmatrix} \hat{T}(z)^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{Q} - q \\ \hat{P} - p \end{pmatrix}.$$

La famille d'opérateurs unitaires $\hat{T}(z)$ est reliée au groupe de Heisenberg $\mathbf{H_1}$. Le groupe $\mathbf{H_1}$ se réalise sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_z^2$ muni de la loi de groupe (de Lie) $(t,z) \cdot (t',z') = (t+t'+\sigma(z,z'),z+z')$, $\sigma(z,z')=q\cdot p'-q'\cdot p$ (forme symplectique). $(t,z)\mapsto \rho(t,z)=\mathrm{e}^{-it/2\hbar}\hat{T}(z)$ est une représentation unitaire, irréductible de $\mathbf{H_1}^6$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et c'est la seule à équivalence unitaire près (à l'exception de représentations triviales de degré 1). On en déduit la propriété suivante.

Formule de reconstruction. Pour tout $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ on a

$$\boxed{\psi = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2} \langle \varphi_z, \psi \rangle \varphi_z dz}.$$

⁶ ρ est un morphisme du groupe \mathbf{H}_1 dans le groupe des transformations unitaires de $L^2(\mathbb{R})$ et les seuls sous-espaces fermés et invariants par ρ sont $\{0\}$ et $L^2(\mathbb{R})$.

Le défaut d'orthogonalité est mesuré par la formule :

$$\langle \varphi_z, \varphi_{z'} \rangle = \exp\left(\frac{i}{2\hbar}\sigma(z, z') - \frac{|z - z'|^2}{4\hbar}\right).$$

Preuve de la formule de reconstruction. Une première preuve consiste à utiliser la formule d'inversion de Fourier. En voici une autre, issue de la représentation des groupes. Posons :

$$\hat{A}\psi=\int_{\mathbb{R}^2}\langle arphi_{\mathsf{z}},\psi
angle arphi_{\mathsf{z}} dz.$$

 \hat{A} est borné sur $L^2(\mathbb{R})$ et commute avec $\hat{T}(z)$.

Il résulte du Lemme de Schur que \hat{A} est un opérateur scalaire : $\hat{A}=C1$. On calcule C via $\langle \varphi_z, \hat{A}\varphi_z \rangle$.

Ainsi à chaque point z=(q,p) de l'espace des phases classique $T^*(\mathbb{R}^d)$ est associé un état quantique $\varphi_z\in L^2(\mathbb{R}^d)$, de norme 1, localisé en z en un sens qui sera précisé plus loin via sa fonction de Wigner.

2.3. Transformation de Fourier-Bargmann

La transformation dite de Fourier-Bargmann (ou de Bargmann) est naturellement associée aux états cohérents φ_z de la même manière que la transformation de Fourier (et de Laplace) est associée aux caractères $e_\xi(x) = \mathrm{e}^{ix\cdot\xi}$. On obtient ainsi un outil supplémentaire pour l'analyse fine des fonctions et des opérateurs. Par analogie avec la transformation de Fourier on définit donc :

$$\psi^{\sharp}(z) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \langle \varphi_z, \psi \rangle.^7$$

On vérifie que $\psi \mapsto \psi^{\sharp}$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Il est souvent intéressant d'avoir des propriétés d'holomorphie (comme pour la transformation de Laplace). On identifie alors \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} pour obtenir de l'holomorphie dans la variable $\zeta = \frac{q-ip}{\sqrt{2}}$ et on introduit la transformation suivante :

$$\mathcal{B}\psi(\zeta) = \psi_{\mathsf{hol}}^\sharp(\zeta) = \psi^\sharp(z) \mathrm{e}^{rac{|z|^2}{4\hbar}}.$$

La transformation $\psi\mapsto\psi^\sharp_{\mathrm{hol}}$ est une isométrie, notée \mathcal{B} , de $L^2(\mathbb{R})$ sur l'espace de Bargmann $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbb{C})$ des fonctions entières f telles que

$$\int_{\mathbb{C}} |f(\zeta)|^2 e^{-\frac{|\zeta|^2}{\hbar}} |d\zeta \wedge d\overline{\zeta}| < +\infty.$$

Dans l'espace de Bargmann les opérateurs d'annihilation et de création $\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}$ de la mécanique quantique (et de la théorie de champs) ont une représentation très simple que l'on va expliciter maintenant. Ils sont définis par les expressions :

(2.8)
$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{Q} + i\hat{P}), \quad \hat{a}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{Q} - i\hat{P})$$

 \hat{a} et \hat{a}^{\dagger} sont adjoints l'un de l'autre et vérifient la relation de commutation

(2.9)
$$[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] = 1$$
.

⁷ Le produit scalaire est antilinéaire dans le premier argument.

On a également

(2.10)
$$\hat{H}_{os} = \frac{1}{2}(\hat{P}^2 + \hat{Q}^2) = \hbar(\hat{a}^{\dagger} \cdot \hat{a} + \frac{1}{2}).$$

L'opérateur $\hat{N}=\hat{a}\hat{a}^{\dagger}$ s'interprète en théorie des champs comme étant l'opérateur nombre (de particules). Son spectre est simple et coı̈ncide avec l'ensemble $\mathbb N$ des entiers. Son vecteur propre normalisé de valeur propre k est la $k^{\rm e}$ fonction d'Hermite $[10]:\mathfrak{H}_k=\frac{1}{\sqrt{k!}}(\hat{a}^{\dagger})^k\varphi_0$. C'est l'état d'un système à k particules, φ_0 étant l'état du vide.

Les états cohérents φ_z sont vecteurs propres de l'opérateur \hat{a} :

(2.11)
$$\hat{a}\varphi_z = \alpha\varphi_z$$
, avec $\alpha = \frac{q+ip}{\sqrt{2\hbar}}$, $z = (q,p)$.

C'est une conséquence de cette propriété, dans le cadre plus général de la théorie des champs, qui a amené Glauber à utiliser le terme « état cohérent » introduit dans ces travaux sur l'optique quantique.

Il est instructif de transporter les propriétés précédentes en conjuguant par la transformation de Bargmann \mathcal{B} . Les opérateurs $\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}, \hat{H}_{osc}$ deviennent des opérateurs sur $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbb{C})$ (en conservant les mêmes notations pour les opérateurs conjugués) :

$$\begin{split} \hat{\mathbf{a}}^{\dagger} \boldsymbol{\psi}_{\mathsf{hol}}^{\sharp}(\zeta) &= \zeta \boldsymbol{\psi}_{\mathsf{hol}}^{\sharp}(\zeta), \quad \boldsymbol{a} \boldsymbol{\psi}_{\mathsf{hol}}^{\sharp}(\zeta) = \partial_{\zeta} \boldsymbol{\psi}_{\mathsf{hol}}^{\sharp}(\zeta) \\ \hat{H}_{\mathsf{osc}} &= \hbar \zeta \partial_{\zeta} + \frac{\hbar}{2}. \end{split}$$

L'oscillateur harmonique devient donc un opérateur d'ordre 1, très commode pour certains calculs. Commençons par diagonaliser $\hat{H}_{\rm osc}$. Il est clair que $\{\zeta^k\}_{k\geqslant 0}$ est un système orthogonal de vecteurs propres de $\hat{H}_{\rm osc}$ associés aux valeurs propres $(k+\frac{1}{2})\hbar$. Ce système est complet. On obtient une base orthonormée de vecteurs propres de $\hat{H}_{\rm osc}$ en posant

$$\mathfrak{H}_{k}^{\sharp}(\zeta) = (2\pi\hbar k!)^{-1/2} \zeta^{k}.$$

On a ainsi obtenu les transformées de Bargmann des fonctions d'Hermite évoquées précédemment.

On peut également en déduire une preuve de la formule de Mehler ($\hbar=1$) : Pour tout $w\in\mathbb{C}$ tel que |w|<1 on a

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}} \mathfrak{H}_k(x) \mathfrak{H}_k(y) w^k = \pi^{-1/2} (1 - w^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1 + w^2}{2(1 - w^2)} (x^2 + y^2) + \frac{2w}{1 - w^2} x \cdot y\right)$$

Le principe de la preuve consiste à remarquer que si $w=\mathrm{e}^{-t/2},\ t>0$, le membre de gauche est une expression du noyau intégral de la chaleur pour \hat{H}_{osc} , puis à calculer ce noyau dans l'espace $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\mathbb{C})$ et à conclure par prolongement analytique. Notons que les états cohérents standards ont également une expression agréable du côté Bargmann :

$$\varphi_{q,p}^{\sharp}(\zeta)=(2\pi\hbar)^{-1/2}\mathrm{e}^{\frac{\bar{\eta}}{\hbar}(\zeta-\frac{\eta}{2})},\ \ \eta=\frac{q-ip}{\sqrt{2}}.$$

Enfin il n'est pas difficile d'étendre les formules précédentes au cas multidimensionnel (systèmes à plusieurs degrés de liberté). On y reviendra dans les paragraphes suivants.

2.4. Interprétation de Fock

On a vu que les fonctions d'Hermite \mathfrak{H}_k constituent une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Elle est engendrée par l'opérateur de création de particules (photons) :

$$\mathfrak{H}_{k} = (k!)^{-1/2} (\hat{a}^{\dagger})^{k} \varphi_{0},$$

 $\mathfrak{H}_0 = \varphi_0$ est l'état du vide (0 particule).

L'expression de l'état cohérent φ_z dans cette base donne :

(2.13)
$$\varphi_z = \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}} \mathfrak{H}_k$$

où
$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(q + ip)$$
, $z = (q, p)$.

L'interprétation est la suivante : la probabilité d'avoir k particules dans l'état φ_z est donnée par

$$|\langle \varphi_z, \mathfrak{H}_k \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2k}}{k!}.$$

On reconnaît la loi de Poisson de moyenne $|\alpha|^2$.

Il s'agit ici d'un modèle simplifié des espaces de Fock : $L^2(\mathbb{R})$ doit être remplacé par un espace de Fock de la seconde quantification (les états à une particule sont dans un espace de Hilbert de dimension infinie et non de dimension 1 comme ici).

3. États cohérents et hamiltoniens quadratiques

Il y a un lien très étroit entre les états cohérents et les hamiltoniens quadratiques qui va au delà du lien avec l'oscillateur harmonique (mentionné dans la section 2.2) dont le hamiltonien est $H(q,p)=\frac{q^2+p^2}{2}$. On verra que pour tout hamiltonien quadratique, dépendant éventuellement du temps, H(t,q,p), l'équation de Schrödinger pour $\hat{H}(t)$ propage n'importe quelle gaussienne en une gaussienne dont les caractéristiques sont déterminées par le mouvement classique associé à l'hamiltonien H(t). On verra dans le paragraphe suivant que ce résultat exact (i.e sans terme d'erreur) est le point de départ pour des résultats asymptotiques (suivant le petit paramètre \hbar) concernant des hamiltoniens plus généraux.

3.1. Hamiltoniens quadratiques

Soit H une forme quadratique sur \mathbb{R}^{2d} dépendant du temps t.

(3.14)
$$H(t,z) = \frac{1}{2}z \cdot S(t)z$$
, $S(t)$ matrice symétrique $2d \times 2d$.

On utilise la notation suivante : $z \cdot z' = \sum_{1 \le k \le m} z_k z'_k$, si $z, z' \in \mathbb{C}^m$.

Dynamique associée à l'hamiltonien H(t).

Elle est déterminée par le flot classique F(t) engendré par H(t):

(3.15)
$$\dot{F}(t) = JS(t)F(t), F(0) = 1,$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_d \\ -\mathbb{1}_d & 0 \end{pmatrix}$$
 est la matrice de la forme symplectique canonique.

Analogue quantique. On remplace les nombres z=(q,p) par les opérateurs \hat{Q},\hat{P} pour obtenir l'hamiltonien quantique (opérateur auto-adjoint) :

(3.16)
$$\widehat{H}(t) = \frac{1}{2}(\widehat{Q}, \widehat{P}) \cdot S(t) \begin{pmatrix} \widehat{Q} \\ \widehat{P} \end{pmatrix}.$$

Le flot F(t) est remplacé par l'opérateur d'évolution quantique : $\widehat{U}(t)$, opérateur unitaire de $L^2(\mathbb{R}^d)$ solution de l'équation de Schrödinger

(3.17)
$$i\hbar \frac{d}{dt}\widehat{U}(t) = \widehat{H}(t)\widehat{U}(t), \quad \widehat{U}(0) = 1.$$

La correspondance classique - quantique est explicite et très simple si l'on prend le point de vue de Heisenberg. Pour toute forme linéaire L sur \mathbb{R}^{2d} on a

(3.18)
$$\widehat{U}(t)^* L(\widehat{Q}, \widehat{P}) \widehat{U}(t) = L \circ F(t)(\widehat{Q}, \widehat{P}).$$

L'inconvénient du point de vue de Heisenberg est qu'il ne donne pas d'information sur les phases des états propagés par l'équation de Schrödinger; or ces phases sont à l'origine de phénomènes d'interférences que l'on rencontre par exemple dans la phase géométrique de Berry et l'effet Ahronov-Bohm [2]. On va donc maintenant revenir à l'équation de Schrödinger.

3.2. Évolution quadratique des états cohérents

Les états cohérents standards ont une variance constante. Or si l'on considère un oscillateur à fréquence variable on constate que la gaussienne standard évolue suivant une gaussienne dont le centre et la variance sont modifiés au cours du temps.

Commençons par introduire des états cohérents généralisés (dits « comprimés ») définis de la manière suivante.

(3.19)
$$\varphi^{\Gamma}(x) = a_{\Gamma} \exp\left(\frac{i}{2\hbar} \Gamma x \cdot x\right)$$

 Γ est une matrice complexe, symétrique dont la partie imaginaire $\Im m(\Gamma)$ est définie-positive et $a_{\Gamma} \in \mathbb{C}$ tel que $\|\varphi^{\Gamma}\| = 1$ (norme dans $L^{2}(\mathbb{R}^{d})$.

SMF - Gazette - 132, avril 2012

L'ensemble des matrices Γ comme ci-dessus est connu sous le nom d'espace de Siegel, nous le noterons $\Sigma^+(d)$. Il existe une action naturelle, notée \mathfrak{S} , du groupe symplectique réel $\operatorname{Sp}(d)$ dans $\Sigma^+(d)$ définie de la manière suivante. Soient $F=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$ une transformation symplectique linéaire (sous forme de blocs $d\times d$) et $\Gamma\in\Sigma^+(d)$, alors $A+B\Gamma$ est inversible et $(C+D\Gamma)(A+B\Gamma)^{-1}\in\Sigma^+(d)$, on définit alors

$$\mathfrak{S}_F(\Gamma) = (C + D\Gamma)(A + B\Gamma)^{-1}.$$

Cette action est transitive et $\mathfrak{S}_F(i1) = i1$ si et seulement si F est symplectique et orthogonal.

Définition 3.1. On appellera état comprimé de centre $z \in \mathbb{R}^{2d}$ et de matrice $\Gamma \in \Sigma^+(d)$ la fonction gaussienne $\varphi_z^\Gamma = \hat{T}(z)\varphi^\Gamma$ où $\hat{T}(z)$ est l'opérateur de translation de Weyl-Heisenberg.

Rappelons que $\hat{T}(z)$ a été défini dans le sous-paragraphe 2.2 pour d=1. En dimension $d\geqslant 2$ on a $q,p\in\mathbb{R}^d$, les opérateurs \hat{Q} et \hat{P} ont d composantes respectivement \hat{Q}_j et \hat{P}_j opérant dans la variable réelle x_j , $1\leqslant j\leqslant d$.

L'application $z\mapsto \hat{T}(z)$ définit une représentation unitaire projective (restriction d'une vraie représentation du groupe de Heisenberg $\mathbf{H}_d=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2d}$). La loi de groupe sur \mathbf{H}_d est définie comme dans le paragraphe 2.2 avec la forme symplectique canonique $\sigma(z,z')=q\cdot p'-p\cdot q',\quad z=(q,p),\ z'=(q',p').$ On a également la propriété de translation (2.7).

Voici maintenant comment évolue un état cohérent (comprimé) :

Théorème 3.2. Soit $\hat{H}(t)$ un hamiltonien quadratique (3.16), $\hat{U}(t)$ l'évolution associée et $\Gamma \in \Sigma^+(d)$. On a alors :

(3.20)
$$\widehat{U}(t)\varphi_z^{\Gamma}(x) = \widehat{T}(z_t)\varphi^{\Gamma_t}(x)$$

où $z_t = F(t)z$, $\Gamma_t = (C_t + D_t\Gamma)(A_t + B_t\Gamma)^{-1}$ et $a_{\Gamma_t} = a_{\Gamma} \left(\det(A_t + B_t\Gamma) \right)^{-1/2}$, l'argument de $\det(A_t + B_t\Gamma)$ est déterminé par continuité en temps t.

Un état cohérent évolue donc au cours du temps sous la forme d'un état comprimé centré au point z_t de la trajectoire classique, de matrice Γ_t déterminée par l'action de la transformation symplectique F(t) sur Γ_0 dans l'espace de Siegel $\Sigma^+(d)$. Par exemple pour l'hamiltonien libre $H(q,p)=p^2$ si $\Gamma_0=i$ on trouve $\Gamma_t=\frac{t+i}{1+t^2}$. L'état est comprimé en espace et dilaté en impulsion pour t>0. Le théorème se démontre en suivant le même ansatz que celui suivi par Schrödinger

Le theoreme se demontre en suivant le meme ansatz que celui suivi par Schrödinger pour l'oscillateur harmonique avec des complications supplémentaires que l'on surmonte en utilisant les propriétés du groupe symplectique. En particulier Γ_t s'obtient en résolvant une équation matricielle de Ricatti (voir par exemple [8] pour les détails). Soulignons le fait remarquable que la formule (3.20) est exacte et que cela a des conséquences pour les hamiltoniens généraux comme on le verra plus loin.

Remarque. Un état cohérent centré en (0,0) reste centré en (0,0) car (0,0) est un point critique de l'hamiltonien.

Pour un hamiltonien quadratique quelconque partant d'un état cohérent standard il évoluera sous la forme d'un état comprimé qui sauf exception n'est plus un état

cohérent standard. Les gaussiennes sont déformées sous l'action du flot linéaire F_t ; cela se voit clairement sur les transformées de Wigner introduites plus loin.

Le principe d'incertitude position-impulsion n'est plus minimal pour l'état transporté mais cela reste vrai si l'on transporte la géométrie par la transformation symplectique $F_t = \begin{pmatrix} A_t & B_t \\ C_t & D_t \end{pmatrix}$.

3.3. La représentation métaplectique

Il s'agit de construire une représentation unitaire $F \mapsto \hat{R}(F)$ du groupe symplectique Sp(d) dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant, pour toute forme linéaire L sur \mathbb{R}^{2d} ,

$$\widehat{R}(F)^*L(\widehat{Q},\widehat{P})\widehat{R}(F) = L \circ F(\widehat{Q},\widehat{P}).$$

On a déjà vu que cette propriété est satisfaite par les transformations symplectiques provenant d'un flot hamiltonien linéaire. On obtient alors une construction de $\hat{R}(F)$ en remarquant qu'il existe une courbe C^1 dans $\operatorname{Sp}(d), \ t \mapsto F_t$, telle que $F_0 = 1$ and $F_1 = F$, F_t étant le flot d'un hamiltonien quadratique H_t dépendant du temps. Soit U_t le propagateur associé par la construction précédente. On pose $\hat{R}(F) = U_{t=1}$. On obtient alors (3.21) comme conséquence de (3.18). De plus cette construction détermine $\hat{R}(F)$ à un signe près donné par un indice de Maslov (la représentation métaplectique est une représentation projective, irréductible du groupe symplectique). On trouvera plus de détails pour cette approche dans [9] et dans [17] une approche plus traditionnelle.

4. Quantification, états cohérents et propagateurs

4.1. Quantification de Weyl

Maintenant il s'agit d'étendre le résultat précédent sur l'évolution des états cohérents à des hamiltoniens plus généraux, en particulier aux hamiltoniens de Schrödinger $\hat{H}=\hat{P}^2+V(\hat{Q}),\;\hat{P}^2=-\frac{\hbar^2}{2}\Delta,\;\Delta$ étant le laplacien et le potentiel V une fonction régulière sur \mathbb{R}^d .

En mécanique quantique il est commode de considérer la quantification de Weyl en raison de ses propriétés de symétrie. Elle est invariante par le groupe linéaire symplectique et le quantifié d'un symbole réel est un opérateur hermitien.

Soit L une fonction régulière (ou une distribution) sur l'espace de phase \mathbb{R}^{2d} . On lui associe un opérateur linéaire \hat{L} de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. La correspondance $L \mapsto \hat{L}$ est uniquement déterminée par les propriétés suivantes.

- (0) Pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $L \mapsto \langle \psi, \hat{L}\psi \rangle$ est continue sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$.
- (1) $A \mapsto \hat{A}$ est linéaire, \hat{A} est symétrique si A est réel et $\hat{1} = \mathbb{1}_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.
- (2) observables position : $x_j \mapsto \hat{x}_j := \hat{Q}_j$ (opérateur de multiplication par x_j)
- (3) observables impulsion : $\xi_j \mapsto \hat{\xi}_j := \hat{P}_j := \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$.

(4) Pour tout $z \in \mathbb{R}^{2d}$ on a

$$\hat{T}(z) = \widehat{e^{-i\sigma(z,X)}}.$$

Autrement dit le symbole de Weyl de l'opérateur de translation $\hat{T}(z)$ est $X\mapsto \mathrm{e}^{-i\sigma(z,X)}$

Notons que si $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et z=(q,p) on a $\hat{T}(z)\psi(x)=\mathrm{e}^{-\frac{i}{2\hbar}q\cdot p}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}x\cdot p}\psi(x-q)$. Il résulte de sa construction que la quantification de Weyl est invariante sous l'action du groupe symplectique, cette action étant donnée par la représentation métaplectique (3.21).

La correspondance de Weyl $A \mapsto \hat{A} := \operatorname{Op}_{\hbar}^w(A)$ associe un opérateur (observable quantique) à toute fonction « raisonnable » sur l'espace des phases (observable classique). L'une de ses propriétés remarquables est l'existence d'un calcul symbolique : si \hat{A} , \hat{B} sont des observables alors $\hat{A} \cdot \hat{B} = \hat{C}$. On note $C = A \circledast B$ appelé produit de Moyal de A et B. Le produit de Moyal est une multiplication non commutative sur des espaces d'observables classiques⁸. Une conséquence du calcul symbolique est la relation suivante entre commutateurs des opérateurs et crochet de Poisson de leurs symboles :

(4.22)
$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{A},\hat{B}] = \widehat{\{A,B\}} + \mathcal{O}(\hbar),$$

où
$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$
 et $\{A, B\} = \partial_x A \cdot \partial_{\xi} B - \partial_x B \cdot \partial_{\xi} A$.

Les propriétés du calcul symbolique se déduisent de celles de la transformation de Fourier symplectique ([17, 27]). Ceci est le point de départ de nombreux travaux d'analyse microlocale qui dépassent le cadre de cette présentation.

4.2. Fonctions de Wigner

Ces fonctions sont très utilisées en mécanique quantique en raison de leur interprétation physique.

Soient L une observable (classique), $\psi, \eta \in L^2(\mathbb{R}^d)$ deux états; on veut calculer (ou analyser) le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^d)$: $\langle \psi, \hat{L}\eta \rangle$. Pour cela on introduit l'opérateur de projection oblique $\Pi_{\psi,\eta}(\varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle \eta$.

On appelle fonction de Wigner du couple (ψ,η) le symbole de Weyl noté $\mathcal{W}_{\psi,\eta}$ de l'opérator $\Pi_{\psi,\eta}$. Si $\psi=\eta$ on note $\mathcal{W}_{\psi}=\mathcal{W}_{\psi,\psi}$ la fonction de Wigner de ψ (à valeurs réelles car $\Pi_{\psi,\psi}$ est auto-adjoint). Pour les calculs on dispose de la formule intégrale :

$$(4.23) W_{\varphi,\psi}(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i}{\hbar}u\cdot\xi} \varphi\left(x + \frac{u}{2}\right) \bar{\psi}\left(x - \frac{u}{2}\right) du.$$

Or si les observables L, M vérifient des conditions convenables on a

$$\operatorname{Tr}(\hat{L}\hat{M}) = (2\pi\hbar)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} L(X)M(X)dX$$

⁸ Des hypothèses techniques sont nécessaires pour donner un sens à cet énoncé.

d'où la formule :

$$\langle \psi, \hat{L}\eta \rangle = (2\pi\hbar)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} L(X) \mathcal{W}_{\psi,\eta}(X) dX.$$

En particulier si $\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(x)|^2 dx = 1$ on peut être tenté d'interpréter $(2\pi\hbar)^{-d} \mathcal{W}_\psi(X)$ comme une densité de probabilité sur l'espace de phase \mathbb{R}^{2d} . Malheureusement cette fonction peut prendre des valeurs négatives, à l'exception des états cohérents comprimés. La fonction de Wigner $\mathcal{W}_{z,z'}$ d'un couple $(\varphi_z,\varphi_{z'})$ d'états cohérents standards est donnée par la formule suivante : (4.24)

$$\mathcal{W}_{z,z'}(X) = 2^d \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \left| X - \frac{z+z'}{2} \right|^2 - \frac{i}{\hbar} \sigma(X - \frac{1}{2}z', z-z')\right), \ X \in \mathbb{R}^{2d}.$$

Il en résulte que $\mathcal{W}_z(X):=\mathcal{W}_{z,z}(X)\geqslant 0$. Or par invariance symplectique du symbole de Weyl on a $\mathcal{W}_{\varphi_z^\Gamma}(X)=\mathcal{W}_z(F^{-1}X)$ si $\Gamma=(C+iD)(A+iB)^{-1}$, d'où $\mathcal{W}_{\varphi_z^\Gamma}(X)\geqslant 0$ pour tout $X,z\in\mathbb{R}^{2d}$ et tout $\Gamma\in\Sigma^+(d)$.

La fonction de Wigner des états cohérents (comprimés) est donc une densité de probabilité sur \mathbb{R}^{2d} . Ce sont les seuls états quantiques possédant cette propriété.

Théorème 4.1. [Hudson[18], [30]] $\mathcal{W}_{\psi}(X) \geqslant 0$ sur \mathbb{R}^{2d} si et seulement si $\psi = C\varphi_z^{\Gamma}$ où $C \in \mathbb{C}$, $\Gamma \in \Sigma^+(d)$, $z \in \mathbb{R}^{2d}$.

On démontre que si la fonction de Wigner est positive alors ψ est un état cohérent comprimé par un argument d'analyse complexe sur sa transformée de Bargmann (voir [9]).

L'expression de la fonction de Wigner de φ_z^Γ montre que cet état est localisé dans des domaines de l'espace de phase qui sont des boules euclidiennes déformées par l'action de la transformation symplectique F associée à Γ :

$$\mathcal{W}_{\omega_{z}^{\Gamma}}(X) = 2^{d} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar}|F^{-1}X - z|^{2}}.$$

L'état est ainsi comprimé dans certaines directions et dilaté dans d'autres. Cela se voit clairement sur les représentations graphiques des fonctions de Wigner.

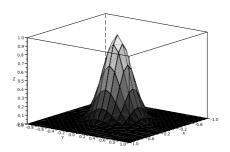
4.3. Fonctions de Husimi

Pour corriger le défaut de positivité des fonctions de Wigner les physiciens ont introduit les fonctions de Husimi. Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on définit $\mathcal{H}_{\psi}(z)$ sur l'espace de phase \mathbb{R}^{2d} par

(4.25)
$$\mathcal{H}_{\psi}(z) = (2\pi\hbar)^{-d} |\langle \psi, \varphi_z \rangle|^2, \quad z \in \mathbb{R}^{2d}.$$

La propriété remarquable est que \mathcal{H}_{ψ} est une régularisée gaussienne de la fonction de Wigner : $\mathcal{H}_{\varphi} = \mathcal{W}_{\varphi} * G_0$, G_0 étant la gaussienne $G_0(z) = (\pi \hbar)^{-d} e^{-|z|^2/\hbar}$. La différence entre \mathcal{H}_{ψ} et \mathcal{W}_{ψ} est $O(\hbar)$ ce qui traduit le fait (attendu) que la non positivité de \mathcal{W}_{ψ} est un effet purement quantique.

On a vu que les fonctions de Wigner sont liées au calcul symbolique de Weyl. Il existe de même un calcul symbolique naturellement associé aux fonctions de Husimi appelé calcul de Wick. Cette quantification est directement reliée aux états



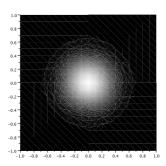


FIG. 1: État cohérent de Schrödinger

cohérents. Notons Π_z le projecteur orthogonal sur état cohérent φ_z . Pour toute fonction A bornée sur \mathbb{R}^{2d} on définit l'opérateur

(4.26)
$$\operatorname{Op}_{\hbar}^{aw}(A) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} A(z) \Pi_{z} dz.$$

Il y a une relation très simple entre les quantifications de Weyl et de Husimi :

$$\mathsf{Op}_{\hbar}^{\mathsf{aw}}(A) = \mathsf{Op}_{\hbar}^{\mathsf{w}}(A * G_0).$$

Le symbole de Weyl de $\operatorname{Op}^{aw}_{\hbar}(A)$ est donc une régularisée gaussienne de A.

Une conséquence immédiate de (4.26) est que si $A\geqslant 0$ alors $\operatorname{Op}_{\hbar}^{\operatorname{aw}}(A)\geqslant 0$ (propriété fausse pour la quantification de Weyl). Cependant, en utilisant (4.26) et (4.27), on obtient facilement l'inégalité de Gärding :

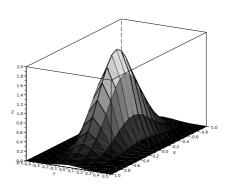
$$\langle \psi, \mathsf{Op}_{\hbar}^{\mathsf{w}}(A)\psi \rangle \geqslant C\hbar \|\psi\|^2, \ \forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^d), \ \ \hbar > 0,$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante ne dépendant que de A.

Le lien entre les quantifications de Weyl et de Wick prend également la forme suivante

$$\langle \psi, \operatorname{Op}_{\hbar}^{\operatorname{aw}}(A)\psi \rangle = (2\pi\hbar)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} A(X) \mathcal{H}_{\psi}(X) dX.$$

SMF - Gazette - 132, avril 2012



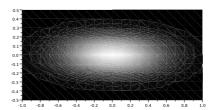


FIG. 2: État comprimé

Alors $(2\pi\hbar)^{-d}\mathcal{H}_{\psi}(X)$ est bien une densité de probabilité sur l'espace de phase \mathbb{R}^{2d} . L'une des applications de cette propriété est qu'elle permet d'introduire les mesures semi-classiques, outil qui a connu un grand succès ces dernières années (voir par exemple [1]).

Considérons une famille ψ_\hbar d'états normalisés, « essentiellement localisés » dans un compact K de \mathbb{R}^{2d} (indépendant de \hbar) et les mesures de probabilité μ_\hbar définies par $\mu_\hbar(A) = \langle \psi_\hbar, \operatorname{Op}_\hbar^{aw}(A)\psi_\hbar \rangle$. D'après le théorème de compacité de Prohkorov, de toute suite de valeurs de \hbar tendant vers 0 on peut extraire une sous-suite \hbar_k telle qu'il existe une probabilité μ sur \mathbb{R}^{2d} de sorte que $\mu_{\hbar_k}(A)$ converge vers $\mu(A)$ pour toute fonction A continue et bornée.

On appelle mesure semi-classique associée à la famille ψ_\hbar toute mesure μ obtenue de cette manière.

Pour les états cohérents φ_z il y a une seule mesure semi-classique : la masse de Dirac en z.

Un exemple moins trivial : considérons l'oscillateur harmonique avec d=1. On fixe une énergie E>0 et on considère les fonctions propres ψ_\hbar de valeur propre $(j+1/2)\hbar$ pour une suite d'entiers j (dépendant de \hbar) telle que $\lim_{\hbar\to 0} E_j=E$. Alors cette famille d'états propres a pour mesure semi-classique la loi uniforme sur le cercle de rayon $\sqrt{2E}$.

4.4. Les états du chat de Schrödinger

Dans le but de mettre en évidence une faille dans l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde (associée à tout système quantique) formulée par l'école de Copenhague (N. Bohr), E. Schrödinger a imaginé en 1935 une expérience mettant en présence, dans une boîte isolée, un chat et un atome radioactif. À partir d'un seuil fixé de radiations le chat meurt. L'atome est caractérisé par deux états χ_- (atome désintégré), χ_+ (atome non-désintégré) et le chat par les états ψ_- (« chat mort »), ψ_+ (« chat vivant »). Suivant les principes de la mécanique quantique, le système « chat+atome » est caractérisé par l'état « mixte » (ou intriqué)

$$\psi_{\mathsf{cat+at}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_{-} \otimes \chi_{-} + \psi_{+} \otimes \chi_{+} \right).$$

Le paradoxe mis en évidence par cette expérience imaginaire réside dans l'interprétation de (4.29): l'état du chat est un mélange d'état de « chat vivant » et d'état de « chat mort ». Or si l'expérimentateur ouvre la boîte il trouvera le chat soit mort soit vivant et non un état « intermédiaire ».

Le chat de Schrödinger, et ses états, ont connu depuis une grande célébrité et contribuent encore maintenant à alimenter une intense réflexion sur les fondements de la mécanique quantique.

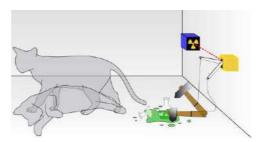


FIG. 3: L'expérience sur le chat imaginée par Schrödinger (dessin de Dhatfield, Wikipedia)

Des expériences assez récentes en optique quantique (voir l'article de S. Haroche [16]) ont mis en évidence une situation analogue à celle du chat de Schrödinger dans laquelle le chat est remplacé par un système de photons⁹. Les physiciens ont pu observer un « chat » constitué de quelques photons et maintenu

 $^{^9}$ Les amis des chats seront heureux d'apprendre que jusqu'à maintenant les physiciens n'ont pas (encore?) réussi à observer un chat dans une superposition d'états « mort-vivant ». Voir cependant la note (12).

dans une superposition de deux états.

Les états cohérents sont bien adaptés pour modéliser ce type de situation. Fixons z dans l'espace de phases \mathbb{R}^2 , $z \neq (0,0)$. On convient que φ_z est l'état « chat vivant », φ_{-z} est l'état « chat mort » et les états atomiques χ_\pm constituent une base orthonormée de \mathbb{C}^2 . On obtient l'état du système « chat+atome » dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^2$:

(4.30)
$$\psi_{cat+at} = \frac{1}{N(z)} \left(\varphi_z \otimes \chi_+ + \varphi_{-z} \otimes \chi_- \right)$$

où N(z) est une constante de normalisation. On notera que φ_z et φ_{-z} sont asymptotiquement orthogonaux et que $N(z) \approx \sqrt{2} \ (\hbar \to 0)$.

Si l'expérimentateur effectue une série de mesures \hat{A} sur le « chat » seulement il obtient comme résultat le produit scalaire

$$\mu(\hat{A}) = \langle \psi_{cat+at}, (\hat{A} \otimes \mathbb{1}_{\mathbb{C}^2}) \psi_{cat+at} \rangle.$$

 $\hat{A}\mapsto \mu(\hat{A})$ étant une forme linéaire continue sur l'espace des opérateurs bornés de $L^2(\mathbb{R})$, il existe un unique opérateur à trace ρ_{cat} , positif, de trace 1, tel que $\mu(\hat{A})=\mathrm{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}_{cat})$. L'opérateur $\hat{\rho}_{cat}$, appelé opérateur densité, contient toute l'information disponible sur le « chat ». Or un calcul élémentaire donne ici $\hat{\rho}_{cat}=\frac{1}{N(z)}\left(\Pi_z+\Pi_{-z}\right),\ \Pi_{\pm z}$ étant la projection orthogonale sur $\varphi_{\pm z}$. On retrouve bien le constat fait par Schrödinger :

$$\mu(<\textit{chatvivant}>) = \text{Tr}(\hat{\rho}_\textit{cat}\Pi_\textit{z}) \approx \frac{1}{2} \;\; \text{et} \quad \mu(<\textit{chatmort}>) = \text{Tr}(\hat{\rho}_\textit{cat}\Pi_{-\textit{z}}) \approx \frac{1}{2}$$

Ceci traduit le fait que l'état du chat est un état mixte au sens où il ne peut pas être représenté par un vecteur unitaire de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ mais par un opérateur positif de trace 1 admettant deux vecteurs propres distincts. On dit alors que l'état est intrigué.

Pour analyser plus finement cet état mystérieux ψ_{cat+at} on détermine sa fonction de Wigner. Pour cela on introduit des états cohérents naturels dans l'espace hermitien \mathbb{C}^2 (appelés états cohérents de spin 1/2, voir [26, 9] pour les détails). Ils sont obtenus comme décrivant une orbite par l'action naturelle de SU(2) dans \mathbb{C}^2 . Ces états cohérents sont paramétrés par la sphère \mathbb{S}^2 et on convient d'associer χ_+ au pôle nord de \mathbb{S}^2 et χ_- au pôle sud. On introduit sur la sphère les coordonnées sphériques d'un point $\mathbf{n}=(n_1,n_2,n_3):n_3=\cos\theta,\ n_2=\sin\theta\cos\varphi,\ n_1=\sin\theta\sin\varphi.$ Au point \mathbf{n} est associé l'état cohérent $\psi_{\mathbf{n}}=\sin(\theta/2)\mathrm{e}^{i\varphi}\chi_-+\cos(\theta/2)\chi_+.$ À tout état $\chi\in\mathbb{C}^2$ (de norme 1, vu comme état de spin) on peut ainsi lui associer sa fonction de Wigner (ou d'Husimi): $\mathcal{W}_\chi(\mathbf{n})=|\langle\chi,\psi_{\mathbf{n}}\rangle|^2.$ On peut maintenant calculer la fonction de Wigner \mathcal{W}_{cat+at} de ψ_{cat+at}

$$\frac{N^{2}(z)}{2}W_{cat+at}(X, \mathbf{n}) = \cos^{2}(\theta/2)W_{\varphi_{z}}(X) + \sin^{2}(\theta/2)W_{\varphi_{-z}}(X) + \sin(\theta)\cos\left(\frac{2\sigma(X, z)}{\hbar} - \varphi\right)W_{\varphi_{0}}(X)$$
(4.31)

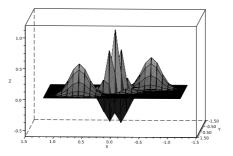
où $X \in \mathbb{R}^2$ et \mathbf{n} est le point de \mathbb{S}^2 de coordonnées (θ, φ) . On notera que $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$ est l'espace de phase du système « chat+atome ».

Si ${\bf n}$ est placé au pôle nord ou au pôle sud l'état du chat est bien déterminé. D'autre part si on prend la moyenne sur la sphère de ${\mathcal W}_{cat+at}(X,{\bf n})$ on trouve évidemment la fonction de Wigner de l'état mixte $\hat{\rho}_{cat}$ à savoir $\frac{1}{N^2(z)}({\mathcal W}_{\varphi_z}+{\mathcal W}_{\varphi_{-z}})$. Par contre si ${\bf n}$ est sur l'équateur, choisissant $\varphi=0$ on trouve que la fonction de Wigner du chat est

$$(4.32) \qquad \frac{N^2(z)}{2} \mathcal{W}_{\psi_z^{cat}}(X) = \mathrm{e}^{-\frac{|X-z|^2}{\hbar}} + \mathrm{e}^{-\frac{|X+z|^2}{\hbar}} + 2\mathrm{e}^{-\frac{|X|^2}{\hbar}} \cos\left(\frac{2\sigma(X,z)}{\hbar}\right),$$

correspondant à l'état $\psi_z^{cat}=\frac{1}{N(z)}(\varphi_z+\varphi_{-z})$. Cette superposition de deux états cohérents est souvent appelée « état du chat de Schrödinger » [31] . Rappelons que $\sigma(X,z)$ est l'aire (orientée) du parallélogramme de sommet O et de côtés adjacents X,z.

Le dernier terme du membre de droite de (4.32) est un terme oscillant qui mesure l'interaction des 2 états φ_z et φ_{-z} . Ces oscillations deviennent importantes lorsque X est proche de 0 et alors $\mathcal{W}_{\psi_z^{cat}}(X)$ oscille entre des valeurs positives et négatives. L'interprétation physique de cette observation est que l'état ψ_z^{cat} exhibe des propriétés purement quantiques qui n'apparaissent pas dans les états de départ $\varphi_{\pm z}$ qui séparément sont très proches d'états classiques.



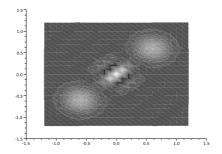


FIG. 4: Les états du chat

Aux extrémités de la figure du dessus on reconnaît les deux gaussiennes φ_z et φ_{-z} . La figure du dessous est la projection plane de la figure du dessus. La partie centrale représente la zone d'incertitude quantique dans laquelle la fonction de Wigner prend des valeurs négatives et les états du chat oscillent entre la vie et et la mort.

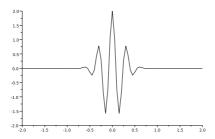


FIG. 5: coupe verticale transverse de la zone centrale

4.5. Évolution des états cohérents dans le régime semi-classique

Contrairement au cas quadratique où l'évolution quantique d'un état cohérent est complètement déterminée par le mouvement classique, pour des hamiltoniens plus généraux on ne peut espérer qu'un résultat asymptotique. Nous considérons maintenant le régime semi-classique ce qui veut dire que \hbar est une constante de Planck effective très petite dans les unités du système quantique étudié (certains auteurs préfèrent alors l'appeler ε). Nous conservons ici l'usage en vigueur en mécanique quantique où \hbar désigne un (petit) paramètre semi-classique. Par exemple \hbar peut représenter l'inverse d'une fréquence et alors le régime semi-classique est un régime haute fréquence (voir par exemple l'article de Anantharaman-Nonnenmacher dans la Gazette [1]).

On considère un hamiltonien classique H(t,X), continu en $t \in \mathbb{R}$, C^{∞} en $X \in \mathbb{R}^{2d}$ dont les dérivées vérifient des conditions de croissance modérée du type :

$$(4.33) |\partial_X^{\gamma} H(t,X)| \leqslant C_{\gamma} (1+|X|)^m, |\gamma| \geqslant 2.$$

On veut alors résoudre modulo un terme d'erreur en $O(\hbar^N)$, N arbitraire,

(4.34)
$$i\hbar \frac{\partial \psi_z(t)}{\partial t} = \widehat{H}(t)\psi_z(t), \quad \psi(0) = \varphi_z.$$

Le modèle est $H(t, x, \xi) = |\xi|^2 + V(t, x)$ avec V(t, x) vérifiant (4.33).

On ne discute pas ici la question de l'existence et de l'unicité des solutions de (4.34) pour lesquelles nous renvoyons à la littérature et qui sont vérifiées sous des hypothèses assez larges. En particulier la solution peut s'écrire sous la forme $\psi_z(t) = U(t)\varphi_z$, U(t) étant un groupe d'opérateurs unitaires.

Lorsque $\hbar \to 0$ le problème (4.34) est un problème de perturbation singulière. On

C'est un groupe si H ne dépend pas de t sinon il faut étendre la propriété de groupe.

va alors le transformer, à l'aide de transformations unitaires, en un problème de perturbation régulière pour le petit paramètre \hbar .

Soit $\psi_z(t,x)$ la solution exacte de (4.34) et $\hat{U}(t)$ l'opérateur d'évolution associé : $\psi_z(t,x) = \hat{U}(t)\varphi_z$.

L'objectif est de montrer que $\psi_z(t,x)$ admet un développement asymptotique en \hbar en exhibant sa proximité avec la trajectoire classique $z_t=(q_t,p_t)$ $(z_0=z)$ associée à l'hamiltonien H(t,z).

On commence par ramener le problème à l'échelle 1 en \hbar à l'aide de l'homothétie $\Lambda_\hbar f(x)=\hbar^{-d/4}f(\hbar^{-1/2}x).$

Ensuite on se déplace sur la trajectoire z_t par la translation $\hat{T}(z_t)$. Cela conduit au changement de fonction inconnue, $f_z(t)$, définie par l'égalité :

$$\psi_z(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\delta_z(t)} \hat{T}(z_t) \Lambda_\hbar f_z(t),$$

 $\delta_z(t)$ est une phase réelle à déterminer, ne dépendant que de t et z. Un choix judicieux conduit à l'équation suivante pour $f_z(t)$:

(4.35)
$$i\partial_t f_z(t) = Op_1^w [K_2(t)] f_z(t) + \hbar^{-1} Op_1^w [R_z^{(3)}(t)] f_z(t),$$

avec la condition initiale $f_z(t=0)=g$, $g(x)=\pi^{-d/4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|x|^2}$. Op_1^wL désigne le quantifié de Weyl du symbole (observable classique) L pour $\hbar=1$. La phase $\delta_z(t)$ dépendant de l'action classique :

$$\delta_z(t) = \int_0^t (p_s \cdot \dot{q_s} - H(s, z_s)) ds - \frac{q_t p_t - qp}{2}.$$

Le membre de droite de (4.35) dépend du développement de Taylor de H(t,X) autour de z_t . On note

$$K_j(t;X) = \sum_{|\gamma|=j} \frac{1}{\gamma!} \partial_X^{\gamma} H(t;z_t) X^{\gamma}, \quad X = (x,\xi).$$

(4.36)
$$R_z^{(k)}(t;X) = \left(H(t,z_t + \sqrt{\hbar}X) - \sum_{j < k} \hbar^{j/2} K_j(t;X)\right)$$

est le reste de Taylor d'ordre k. Notons que ce terme est d'ordre $\hbar^{k/2}$.

Le problème (4.35) est maintenant un problème de perturbation régulière en $\sqrt{\hbar}$. En particulier pour $\hbar=0$ il se réduit au cas quadratique traité précédemment. Utilisant l'invariance symplectique il est naturel de chercher $f_z(t)$ sous la forme $f_z(t)=\hat{R}[F_t]b(t)g$ où $\hat{R}[F_t]$ est le propagateur quantique associé à l'hamiltonien quadratique $K_2(t)$ (pour $\hbar=1$). (voir la section précédente). On obtient alors pour b(t,x) l'équation différentielle

(4.37)
$$i\partial_t b(t,x)g(x) = Op_1^w[R_z^{(3)}(t,F_t(x,\xi)](b(t)g)(x)$$
$$b(0,x) = 1$$

 $\hbar^{-1}R_{\rm z}^{(3)}(t)$ ayant un développement en $\sqrt{\hbar}$ on cherche b(t,x) sous la forme

$$b(t,x) = \sum_{j\geqslant 0} \hbar^{j/2} b_j(t,x).$$

Les $b_i(t,x)$ sont alors bien déterminés par les formules de récurrence suivantes

$$(4.38) \qquad i\partial_t b_j(t,x)g(x) = \sum_{k+\ell=j+2, \ \ell\geqslant 3} Op_1^w[K_\ell^\diamond(t)](b_k(t,\cdot)g)(x)$$

$$(4.39) b_0(t,x) = 1, \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

$$(4.40) b_j(0,x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall j \geqslant 1.$$

On a noté $K_j^{\diamond}(t,X) = K_j(t,F_t(X))$. Remarquons que $Op_1^w[K_\ell^{\diamond}(t)]$ est un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux de degré ℓ . On en déduit que $b_j(t,x)$ est polynomial en x de degré inférieur ou égal à 3j.

Revenant au problème de départ on a obtenu le résultat suivant (avec une estimation d'erreur que l'on ne peut pas détailler ici).

Théorème 4.2. Sous le hypothèses et les notations précédentes on a

(4.41)
$$i\hbar \partial_t \psi_z^{(N)}(t) = \widehat{H}(t)\psi_z^{(N)}(t) + O(\hbar^{(N+3)/2})$$

οù

$$(4.42) \psi_z^{(N)}(t) = e^{i\delta_t/\hbar} \hat{T}(z_t) \Lambda_\hbar \hat{R}[F_t] \left(\sum_{0 \leqslant j \leqslant N} \hbar^{j/2} b_j(t) g \right).$$

L'estimation de l'erreur (en norme $L^2(\mathbb{R}^d)$ étant uniforme sur tout intervalle de temps borné).

La preuve esquissée fournit un algorithme pour construire des solutions asymptotiques globales d'équations du type Schrödinger que l'on peut comparer aux méthodes BKW et aux techniques utilisant les opérateurs intégraux de Fourier à phases réelles ou complexes.

Sous une forme différente les premiers résultats mathématiques sur l'évolution semi-classique des états cohérents sont dûs à Hagedorn [15]. L'approche présentée ici suit les travaux [7, 28].

La formule (4.41) montre que l'évolution quantique d'un état cohérent, dans le régime semi-classique ($\hbar \to 0$), est gouvernée par l'évolution classique autour de laquelle la particule oscille selon une loi gaussienne, dont la « matrice de covariance » (qui peut être complexe) est donnée par la matrice de stabilité du système classique. On remarquera le rôle essentiel joué par la partie quadratique du développement de Taylor de l'hamiltonien H(t) autour de la trajectoire classique.

Il résulte des formules précédentes que les hamiltoniens quadratiques sont les seuls qui propagent exactement un état comprimé dans un état comprimé. On remarque en effet que les résultats (4.41) (4.42) sont valides si on remplace l'état φ_z par φ_z^Γ avec $\Gamma \in \Sigma^+(d)$. Dans ce cas g est remplacé par g^Γ dont la définition est évidente. On en déduit le résultat suivant :

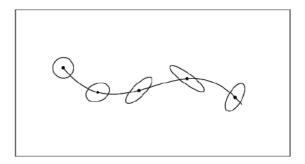


Fig. 6: Propagation d'un état cohérent le long de la trajectoire classique

Proposition 4.3. Si pour tout $\Gamma \in \Sigma^+(d)$ et pour tout $z \in \mathbb{R}^{2d}$ on a $\hat{U}(t)\varphi_z^{\Gamma} = \varphi_{zt}^{\Gamma_t 11}$, pour $0 \leqslant t < t_0$, $t_0 > 0$, alors H(t,X) est un polynôme en X de degré inférieur ou égal à 2 pour $0 \leqslant t < t_0$.

Esquisse de preuve

On se ramène facilement au cas où t=0. Il résulte de l'hypothèse que $b_1(t,x)\equiv 0$. En utilisant l'expression de $b_1(t,x)$ et les propriétés des fonctions de Wigner (en particulier l'expression explicite pour les gaussiennes) on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} \left(\sum_{|\gamma|=3} \partial_z^{\gamma} H(t,z) X^{\gamma} \right) \mathcal{W}_{\varphi^{\Gamma},\varphi^{\Gamma}_{Y}}(X) dX = 0$$

pour tout $\Gamma \in \Sigma^+(d)$ et tout $Y \in \mathbb{R}^{2d}$; φ est ici calculé pour $\hbar = 1$. À l'aide de changements de variables et d'intégrations par parties on obtient que $\partial_z^\gamma H(0,z) = 0$ pour tout γ , $|\gamma| = 3$. Donc H(0,z) est un polynôme de degré au plus 2.

Remarque 4.4. La Proposition 4.3 est à rapprocher du Théorème de Groenewold-Van Hove [13] : les seuls hamiltoniens « réguliers » pour lesquels les dynamiques quantiques et classiques coïncident sont les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

En d'autres termes si H est un hamiltonien sur l'espace de phase \mathbb{R}^{2d} tel que pour toute observable « raisonnable » A on a

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{A},\hat{H}] = \widehat{\{A,H\}}$$

alors H est un polynôme de degré au plus 2.

On peut déduire ce résultat du théorème de Hudson et de la Proposition 4.3.

¹¹ U(t) est le groupe unitaire engendré par $\hat{H}(t)$ voir note 10.

38 D. ROBERT

4.6. Le temps d'Ehrenfest

Dans le régime semi-classique les états cohérents se déforment mais restent cohérents pour des temps limités ou pas trop grands par rapport à \hbar ($|t| \leqslant \lambda |\log \hbar|$, $\lambda > 0$ dépend de la stabilité classique). Sur des intervalles de temps bornés [-T,T] on obtient assez facilement une estimation de l'erreur en $O(\hbar^{(N+3)/2})$ dans (4.41). Mais lorsque le temps croît cette estimation se détériore. L'examen minutieux de $\psi_z^{(N)}(t)$ (4.42) montre qu'il y a une compétition entre la croissance de la matrice de stabilité dans certaines directions lorsque $t \to +\infty$ et $\hbar \to 0$. On démontre l'estimation suivante [7,28]:

 $\|\psi_z(t) - \psi_z^{(N)}(t)\| \leqslant C(z, N) \hbar^{(N+1)/2} (1+t)^{N+2+m} \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |F_s|^{3(N+1)}, \ t \geqslant 0$

 $| \bullet |$ désigne une norme sur les matrices $2d \times 2d$ et C(z, N) est une constante que l'on peut essayer de contrôler en z et N (sous des hypothèses analytiques ou Gevrey voir [28] pour des résultats plus précis).

Supposons pour simplifier la discussion que la trajectoire est bornée et qu'elle a un plus grand exposant de Lyapounov $\gamma>0$:

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|F_s|\leqslant C\mathrm{e}^{\gamma t},\ t\geqslant 0.$$

On en déduit alors que pour tout $\varepsilon\in]0,1]$ existe $C_{\varepsilon}>0$ tel que pour tout $0\leqslant t\leqslant \frac{1-\varepsilon}{6\gamma}|\log\hbar|$ on a l'estimation

$$\|\psi_{\mathsf{z}}(t) - \psi_{\mathsf{z}}^{(N)}(t)\| \leqslant C_{\varepsilon}(\mathsf{z}, \mathsf{N}) \hbar^{(\mathsf{N}+1)\varepsilon} |\log \hbar|^{\mathsf{N}+2+m}.$$

Le temps $T_E = \frac{1-\varepsilon}{6\gamma} |\log \hbar|$ est appelé temps d'Ehrenfest.

Le coefficient devant le logarithme peut être différent suivant le problème étudié. Si au lieu de propager des états cohérents on propage des observables on obtient une constante plus grande (voir [3, 1, 11]) et donc un temps de Ehrenfest plus grand.

Lorsque le point de départ z est dans un ouvert borné de l'espace de phase, invariant par le flot hamiltonien de H, dans lequel celui-ci est intégrable (au sens de Liouville) alors le temps d'Ehrenfest est remplacé par $T_I=c\hbar^{-1/8+\varepsilon},$ $\varepsilon>0$, beaucoup plus grand que le temps T_E lorsque $\hbar\to0$. En deçà du temps d'Ehrenfest $\psi_z(t)$ reste localisé proche de $\psi_z^{(N)}(t)$ et donc près de la trajectoire classique. Au delà du temps d'Ehrenfest l'état $\psi_z(t)$ se délocalise, comme on peut l'observer au voisinage d'un point d'équilibre instable [11].

Dans des cas particuliers il est possible de décrire la délocalisation pour des temps de l'ordre de \hbar^{-1} , c'est le cas pour les Hamiltoniens de Kerr.

4.7. L'effet Kerr quantique

Cet effet permet de fabriquer des états intriqués du type chat de Schrödinger. Si pour les physiciens expérimentateurs c'est un challenge redoutable¹²,

 $^{^{12}}$ Récemment une équipe de physiciens a réussi à mettre deux diamants de plusieurs millimètres dans un état intriqué (K. C. Lee et al, Science 334, p. 1253, 2011).

SMF - Gazette - 132, avril 2012

mathématiquement cela semble assez facile comme on va le voir maintenant. L'effet Kerr¹³ apparaît en optique non linéaire (propagation de la lumière dans un milieu d'indice de réfraction variable). L'analogue quantique de l'effet Kerr est modélisé par l'hamiltonien (de Kerr) : $\hat{H}_K = \omega \hat{N} + \chi(\hat{N})^2$, χ est un couplage non linéaire 14 et \hat{N} est l'opérateur nombre de particules. Par commodité on introduit \hbar et l'oscillateur harmonique : $\hbar \hat{N} = \hat{H}_{osc} - \frac{\hbar}{2}$ et on suppose $\omega = 0, \chi = 1$. Étudions la propagation d'un état cohérent.

$$\psi_z^{(K)}(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}\hat{H}_K}\varphi_z.$$

Le calcul pour t quelconque fait apparaître une somme de série difficile à expliciter. Par contre si $\frac{t\hbar}{\pi}$ est rationnel on peut expliciter $\psi_z^{(K)}(t)$ (Yurke-Stoler, 1986). Supposons $t=\frac{m}{N\hbar}\pi,\ m,N$ premiers entre eux. Alors

$$\psi_{z}^{(K)}(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{0 \leqslant n \leqslant N-1} \mathrm{e}^{i\theta_{k}} \varphi_{z(\frac{2k\pi}{N})}$$

où $z(\frac{2k\pi}{N})=\operatorname{Rot}(\frac{2k\pi}{N})z$ (Rot (θ) est la rotation d'angle θ)

$$\mathrm{e}^{i\theta_k} = \frac{1}{N} \sum_{0 \leqslant n \leqslant N-1} (-1)^n \mathrm{e}^{i\frac{2kn\pi}{N} - i\pi\frac{n^2}{N}}.$$

Cela résulte de la formule (2.13) et de calculs classiques sur les sommes de Gauss. Noter que l'échelle de temps en \hbar est d'ordre $\frac{1}{\hbar}$ bien plus grande que le temps d'Ehrenfest. Le système classique étant intégrable le temps d'Ehrenfest est ici d'ordre $\hbar^{-1/2}$; en deça de ce temps un état cohérent reste cohérent. La transition est un phénomène complexe encore mal élucidé.

Les figures suivantes représentent des coupes de la fonction de Husimi de $\psi_z^{(K)}(t)$:

$$\mathcal{H}_K(t,X) = |\langle \varphi_X, \psi_z^{(K)}(t) \rangle|^2.$$

Pour certaines valeurs de t vérifiant une condition de rationalité l'état cohérent initial se délocalise sur des sites répartis sur un cercle. Entre ces instants son comportement reste mystérieux.

4.8. Le propagateur en régime semi-classique

Voici une application des états cohérents à l'équation de Schrödinger dépendant du temps.

Il résulte du caractère surcomplet des états cohérents que l'on peut obtenir une expression du noyau distribution (de Schwartz) du propagateur U(t) de l'équation de Schrödinger.

Considérons en effet une famille opérateurs unitaires $\hat{U}(t)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. $\hat{U}(t)$ a un noyau de Schwartz noté $K_t(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$.

¹³ John Kerr, physicien écossais (1824-1907).

¹⁴ Le terme non linéaire s'applique au système classique correspondant.

40 D. ROBERT

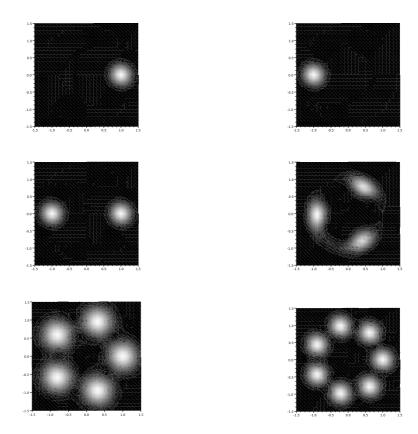


FIG. 7: Fonction de Husimi de $\psi_z^{(K)}(t)$ lorsque $\frac{t\hbar}{2\pi}=\frac{m}{N}$, pour des valeurs de N et m que le lecteur trouvera

On a alors l'expression suivante, à comprendre au sens des distributions,

$$K_t(x,y) = (2\pi\hbar)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \overline{\varphi_z(y)} (\hat{U}(t)\varphi_z)(x) dz.$$

Pour simplifier les hypothèses on suppose que H(t) est sous-quadratique (m=2 dans (4.33)). Dans ce cas les estimations d'erreur sur l'asymptotique de $U(t)\varphi_z$ sont uniformes en z. Modulo un terme d'erreur en $O(\hbar)^{15}$, $K_t(x,y)$ est approché par le propagateur de Van Vleck :

$$\mathcal{K}^{cl}_t(x,y) = (2\pi\hbar)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \overline{\varphi_z(y)} \varphi_{z_t}^{\Gamma_t}(x) dz.$$

Sous certaines conditions on peut estimer l'intégrale de droite par la phase stationnaire. Le résultat est connu depuis 1927 sous le nom de formule de Van Vleck, au moins heuristiquement. Les physiciens la justifient habituellement par l'intégrale

¹⁵ L'erreur est ici mesurée en norme d'opérateurs dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

de Feynman, ce qui est mathématiquement délicat.

On peut donner un sens rigoureux à cette approximation sous l'hypothèse suivante.

<u>Hypothèse (NC)</u>. Il existe au plus un nombre fini J de trajectoires classiques joignant x à y et x, y ne sont pas conjugués, ce qui signifie :

l'équation en p, $q_t(y,p)=x$, a J solutions $p^j(x,y)$, $1\leqslant j\leqslant J$ et $\frac{\partial q_t(y,p^j)}{\partial p}$ est inversible.

La formule de Van Vleck s'écrit alors

$$\text{(4.44)} \quad \textit{K}^{\textit{cl}}_t(x,y) = (2i\pi\hbar)^{-d/2} \sum_{1 \leqslant j \leqslant J} \mathrm{e}^{-i\sigma_j\pi/2} |\det \partial^2_{x,y} \textit{S}(t,y,p^j)|^{1/2} \mathrm{e}^{\textit{S}(t,y,p^j)}.$$

 $S(t, y, p^j)$ désigne l'action classique le long de la trajectoire, σ_j est un entier (indice de Maslov). Sans l'hypothèse (NC), $K_t^{cl}(x, y)$ a seulement une expression intégrale.

5. Utilisation des états cohérents dans les formules de trace

Ce paragraphe présente une application des états cohérents à l'étude du spectre discret de l'équation de Schrödinger stationnaire $\hat{H}\psi=E\psi$.

On trouvera dans [20] une introduction à l'analyse semi-classique du spectre de l'opérateur de Schrödinger.

On utilise à nouveau la propriété de sur-complétude sous la forme suivante.

Si \hat{L} est un opérateur à trace dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ on a alors, comme conséquence de la formule de reconstruction,

$$\mathsf{Tr}\hat{\mathsf{L}} = (2\pi\hbar)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \langle \varphi_{\mathsf{z}}, \hat{\mathsf{L}} \varphi_{\mathsf{z}} \rangle d\mathsf{z}.$$

Supposons H indépendant du temps. On veut étudier le spectre de \hat{H} au voisinage d'une énergie $E \in \mathbb{R}$ fixée. On suppose que $E \in]\lambda_1, \lambda_2[$ et $H^{-1}[\lambda_1, \lambda_2]$ est compact, ce qui assure que le spectre de \hat{H} au voisinage de E est discret. On localise la situation en temps et en énergie à l'aide de fonctions C^{∞} , g, χ ; la transformée de Fourier \tilde{g} de g étant à support compact (arbitraire) et χ a son support dans $]\lambda_1, \lambda_2[$.

On considère la « trace ponctuelle » suivante

$$\rho(E,z) = \sum_{j} g\left(\frac{E - E_{j}(\hbar)}{\hbar}\right) \chi(E_{j}(\hbar)) \left|\left\langle \varphi_{z}, \psi_{j}^{\hbar} \right\rangle\right|^{2}$$

 ψ_j^\hbar sont les fonctions propres normalisées de \hat{H} , $\hat{H}\psi_j^\hbar=E_j(\hbar)\psi_j^\hbar$, $E_j(\hbar)\in]\lambda_1,\lambda_2[$. On obtient alors facilement

(5.45)
$$\rho(E,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{g}}(t) \mathrm{e}^{i\frac{t}{\hbar}E} \langle \varphi_z, U(t)\chi(\hat{H})\varphi_z \rangle dt.$$

42 D. ROBERT

Un argument de phase stationnaire utilisant le développement de $U(t)\varphi_z$ donné dans (4.41) permet de montrer que l'on a

(5.46)
$$\rho(E,z) \equiv \sum_{k \in \mathbb{N}} \ell_k(g,z) \hbar^{\frac{1}{2}+k}.$$

Les coefficients $\ell_k(g,z)$ sont réguliers en z et des distributions en \tilde{g} ; leur expression dépend du flot de H, selon que $t\mapsto z_t$ est périodique ou non. Ce résultat est dû à Paul-Uribe [24].

L'intégration en z sur l'espace de phase \mathbb{R}^{2d} de $\rho(E,z)$ fournit des informations statistiques sur le spectre de \hat{H} au voisinage de E via la densité spectrale régularisée :

$$\rho(E) = \operatorname{Tr}\left(g\left(\frac{E-\hat{H}}{\hbar}\right)\chi(\hat{H})\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \rho(E,z)dz.$$

Le résultat le plus frappant est la formule des traces semi-classique de Gutz-willer [(14]) établissant un lien entre le spectre de \hat{H} et les trajectoires classiques périodiques de H sous des hypothèses assez générales (les formules de quantification du spectre de Bohr-Sommerfeld établissent un tel lien mais exigent des condition d'intégrabilité sur la dynamique classique).

Nous ne donnons pas ici l'énoncé précis de la formule de Gutzwiller pour laquelle nous renvoyons à [6]. Naturellement, cette relation *ne s'obtient pas* en intégrant terme à terme en z dans (5.46).

Plusieurs démonstrations sont maintenant connues dans divers contextes géométriques (consulter par exemple [29] et sa bibliographie), dont une via les états cohérents [6]. L'avantage de cette approche est de fournir une phase globale en temps, explicite, évitant les problèmes de caustiques. L'inconvénient est que l'on a restreint le cadre géométrique.

Donnons maintenant une idée de la manière dont les états cohérents sont utilisés pour étudier la densité spectrale $\rho(E)$ définie en (5.47).

Modulo un terme d'erreur en $O(\hbar^N)$ seules les trajectoires périodiques d'énergie E contribuent à l'intégrale (5.47). Cela se voit immédiatement en calculant le produit scalaire dans l'expression (5.45).

(5.48)
$$e^{i\frac{t}{\hbar}E}\langle \varphi_z, U(t)\chi(\hat{H})\varphi_z\rangle = a(t,z,\hbar)e^{\frac{i}{\hbar}\Psi_E(t,z)}$$

où la phase Ψ_{E} a pour expression :

$$\Psi_{E}(t,z) = t(E - H(z)) + \frac{1}{2} \int_{0}^{t} \sigma(z_{s} - z, \dot{z}_{s}) ds + \frac{i}{4} (\mathbb{1} - W_{t}) (\breve{z} - \breve{z}_{t}) \cdot \overline{(\breve{z} - \breve{z}_{t})},$$
(5.49)

 $\bar{z} = q + ip, z = (q, p)$ est telle que $W_t^* W_t < 1$. Donc la partie imaginaire de la phase (qui est positive) s'annule si et seulement si $z_t = z$. Le lieu critique de la phase est déterminé par les équations $H(z) = E, z_t = z$. Il résulte du théorème de la phase non stationnaire que seules les trajectoires périodiques d'énergie E contribuent. Le point délicat dans la preuve de la formule des traces de Gutzwiller est d'expliciter les quantités géométriques qui apparaissent dans l'application du théorème de la phase stationnaire pour calculer la contribution des trajectoires périodiques [14, 5, 23, 12, 29].

6. Évolution des états cohérents et effet Zenon quantique

Revenons à l'équation de Schrödinger dépendant du temps (4.34) et à l'une de ses conséquences, surprenante dans son interprétation.

Le paradoxe de Zenon¹⁷ avait pour but de démontrer l'impossibilité du mouvement en discrétisant le temps : « la flèche reste immobile » (en termes actuels : « une somme d'infiniment petits tend vers 0 »). Ce paradoxe est redevenu actuel lorsqu'en 1977 Misra et Sudarshan [21] ont suggéré qu'en mécanique quantique le paradoxe de Zenon pouvait se réaliser. Plus tard, un groupe de physiciens [19] a mis au point un dispositif expérimental confirmant effectivement l'existence d'un effet Zenon quantique. Bien sûr derrière cette question il y a le délicat sujet de l'interprétation des mesures quantiques dans lequel nous ne rentrerons pas. Nous allons simplement ici expliciter mathématiquement en quoi consiste l'effet Zenon quantique pour l'évolution d'un état cohérent φ_z . L'idée physique derrière cet effet est la suivante : « si sur un intervalle de temps donné on parvient à effectuer, à intervalles réguliers de plus en plus rapprochés, des séries de mesures sur un système quantique en évolution dans un état initial fixé alors le système est maintenu dans son état initial ».

Rappelons que si ψ, ψ' sont deux états normalisés dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R}^d)$ alors $|\langle \psi, \psi' \rangle|^2$ s'interprète comme la probabilité de transition de l'état ψ vers l'état ψ' ou encore comme la probabilité « de mesurer » l'état ψ' dans l'état ψ . On a donc

Proba
$$[\psi'|\psi] = |\langle \psi, \psi' \rangle|^2$$
.

Considérons alors un système quantique en évolution $\psi(t)=U(t)\psi$ où U(t) est le groupe unitaire engendré par un hamiltonien \hat{H} , vérifiant (4.33) et (4.34). Soit un temps T>0 fixé. On a donc :

$$\mathsf{Proba}[\psi(T)|\psi(0)] = |\langle \psi(0), \psi(T) \rangle|^2.$$

Calculons cette probabilité lorsque $\psi(0) = \varphi_z$. En utilisant les calculs évoqués pour les formules de trace (5.48) (5.49), on obtient :

$$\text{(6.50)} \ \operatorname{Proba}[\varphi_{\mathbf{Z}}(T)|\varphi_{\mathbf{Z}}] = \exp\left(\frac{2}{\hbar}\Re(W_{T} - 1\!\!\!1)(\breve{\mathbf{z}}_{T} - \breve{\mathbf{z}}) \cdot \overline{(\breve{\mathbf{z}}_{T} - \breve{\mathbf{z}})}\right) + O(T\sqrt{\hbar}).$$

Le terme d'erreur disparaît si H est quadratique. D'autre part l'exponentielle tend vers 0 (exponentiellement vite) lorsque $\hbar \to 0$ sauf si $z_T = z$ (trajectoire

¹⁶ La matrice W_t est une matrice complexe reliée à Γ_t par la formule $1 + W_t = 2i(\Gamma_t + i 1)^{-1}$.

¹⁷ Zenon d'Elée est un philosophe grecque (480-420) avant J-C.

44 D. ROBERT

périodique) car $W_T^*W_T < 1$.

Maintenant on effectue N mesures à intervalles de temps réguliers entre 0 et T. On pose $\delta T = \frac{T}{N}$, $T_j = j\delta T$ et ProbaN désigne la probabilité de transition après N mesures¹⁸. On a alors

$$\mathsf{Proba}_{\textit{N}}[\varphi_{\textit{z}}(\textit{T})|\varphi_{\textit{z}}] = \prod_{0 \leqslant j \leqslant \textit{N}-1} \mathsf{Proba}[\varphi_{\textit{z}}(\textit{T}_{j+1})|\varphi_{\textit{z}}(\textit{T}_{j})]$$

Or U(t) est unitaire, d'où

$$\begin{aligned} \operatorname{Proba}_{N}[\varphi_{z}(T)|\varphi_{z}] &= (\operatorname{Proba}[\varphi_{z}(\delta T)|\varphi_{z}])^{N} \\ &= \exp\left(\frac{2T}{\hbar \delta T}\Re(W_{\delta T} - \mathbb{1})(\breve{z}_{\delta T} - \breve{z}) \cdot \overline{(\breve{z}_{\delta T} - \breve{z})}\right) + O(\delta T \sqrt{\hbar}). \end{aligned}$$

Ce qui donne une estimation uniforme en δT et \hbar avec des constantes $c_i > 0$, $C_i > 0$,

$$(6.52) e^{-c_1 \frac{|z-z_{\delta T}|}{\hbar}} - C_1 \delta(T) \sqrt{\hbar} \leqslant \operatorname{Proba}_{N}[\varphi_z(T)|\varphi_z] \leqslant e^{-c_2 \frac{|z-z_{\delta T}|}{\hbar}} + C_2 \delta(T) \sqrt{\hbar}.$$

Faisons alors tendre N vers l'infini, ce qui revient à faire tendre δT vers 0, on obtient

(6.53)
$$\lim_{N \to +\infty} \mathsf{Proba}_{N}[\varphi_{z}(T)|\varphi_{z}] = 1.$$

Lorsque *N* devient grand, avec une probabilité proche de 1, pour l'expérimentateur, l'état du système n'a pas évolué; son évolution semble avoir été freinée (brutalement!) par les corrélations quantiques, c'est ce que les physiciens appellent *l'effet Zenon quantique*.

Notons que les estimations (6.52) montrent que pour que cet effet soit non négligeable il paraît nécessaire que le nombre de mesures soit très grand, au moins égal à \hbar^{-1} , qui est d'ordre 10^{34} . D'autre part le résultat limite (6.53) peut se démontrer dans un contexte beaucoup plus général, l'intérêt ici des états cohérents est d'obtenir un résultat quantitatif (6.52).

Je remercie les collègues du laboratoire Jean Leray, et d'ailleurs, pour leurs nombreuses critiques constructives et leur aide.

7. Références

- [1] N. Anantharaman and S. Nonnenmacher. Vibrations chaotiques et grosses balafres. *Gazette des mathématiciens*, 119 :16–32, 2009.
- [2] M. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. Proc. R. Soc. London, Ser. A 292:47–57, 1984.
- [3] A. Bouzouina and D. Robert. Uniform semiclassical estimates for the propagation of quantum observables. *Duke Mathematical Journal*, 111:223–252, 2002.
- [4] A. Cohen. Sur la route des ondelettes. Gazette des mathématiciens, 130 :19–36, 2011.
- [5] Y. Colin de Verdière. Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I. Comm. Math. Helvetici, 27:83–106, 1973.
- [6] M. Combescure, J. Ralston, and D. Robert. A proof of the Gutzwiller semi-classical formula using coherent states decomposition. Commun. Math. Phys., 202 :463–480, 1999.

¹⁸ Il faut rappeler ici qu'en mécanique quantique une mesure modifie l'état du système.

- [7] M. Combescure and D. Robert. Semiclassical spreading of quantum wavepackets an applications near unstable fixed points of the classical flow. Asymptotic Analysis, 14:377–404, 1997
- [8] M. Combescure and D. Robert. Quadratic quantum hamiltonians revisited. Cubo, A Mathematical Journal, 8 No 1:61–86, 2006.
- [9] M. Combescure and D. Robert. Coherent States and Applications in Mathematical Physics. Theoretical and Mathematical Physics. Springer-Verlag, Berlin, New-York, 2012.
- [10] R. Courant and D. Hilbert. Methods of Mathematical Physics. Wiley, New York, 1966.
- [11] S. De Bièvre and D. Robert. Semi-classical propagation on —Inħ—-time scales,. *I.M.R.N.*, 12 :668–696. 2003.
- [12] S. Dozias. Opérateurs h-pseudodifférentiels à flot périodique. PhD thesis, université de Paris-Nord, 1994.
- [13] M. J. Gotay. On the Groenewold-Van Hove problem for \mathbb{R}^{2n} . Journal of Mathematical Physics, 40:2107–2116, 1999.
- [14] M. Gutzwiller. Periodic orbits and classical quantization conditions. J. Math. Phys., 12:343–358, 1971.
- [15] G. Hagedorn. Semiclassical quantum mechanics. I. Commun. Math. Phys., 71:77-93, 1980.
- [16] S. Haroche. Entanglement, Decoherence and the Quantum/Classical Boundary. Physics Today, July :36–42, 1998.
- [17] L. Hörmander. The Analysis of Linear Partial Differential Operators. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 256. Springer-Verlag, 1983.
- [18] R.L Hudson. When is the Wigner quasi-probability non negative? Rep. Math. Phys., 6:249–252, 1974.
- [19] W.M. Itano, D.J. Heinzen, J.J. Bollinger, and D.J. Wineland. Quantum Zeno effect. Phys. Rev. A, 41:2295–2310, 1990.
- [20] O. Lablée. Spectre du laplacien et de l'opérateur de Schrödinger sur un variété : de la géométrie spectrale à l'analyse semi-classique. Gazette des mathématiciens, 116 :11–27, 2008
- [21] B. Misra and E.C.G Sudarshan. The Zeno's paradox in quantum mechanics. *J. Math. Phys.*, 18:756–763, 1977.
- [22] E. Onofri. A note on coherent state representations of Lie groups. J. Math. Phys., 16:1087–1089, 1975.
- [23] T. Paul and A. Uribe. Sur la formule semi-classique des traces. *Note CRAS, Paris*, 313 (1):217-222, 1991.
- [24] T. Paul and A. Uribe. On the pointwise behavior of semiclassical measures. Commun. in Math. Phys., 175:229–256, 1996.
- [25] A. M. Perelomov. Coherent states for arbitrary Lie group. Commun. Math. Phys., 26:222–236, 1972.
- [26] A.M. Perelomov. Generalized coherent states and their applications. Texts and monographs in physics. Springer-Verlag, 1986.
- [27] D. Robert. Autour de l'approximation semi-classique. PM 68. Birkhäuser, 1987.
- [28] D. Robert. Propagation of coherent states in quantum mechanics and applications. Wang, Xue Ping (ed.) et al., Partial differential equations and applications. Paris : Société Mathématique de France. Séminaires et Congrès 15, 181-252, 2007.
- [29] J. Sjöstrand and M. Zworski. Quantum monodromy and semi-classical trace formulae. J. Math. Pures Appl, 81:1–33, 2002.
- [30] F. Soto and P. Claverie. When are the Wigner function of multidimensional system non negative? J. Math. Physics, 24:197–100, 1983.
- [31] K. Wódkiewicz. Nonlocality of the Schrödinger cat. New Journal of Physics, 2:21.1–21.8, 2000.



Astérisque 342

Phase-space analysis and pseudodifferential calculus on the Heisenberg group

H. Bahouri, C. Fermanian-Kammerer, I. Gallagher

Nous définissons une classe d'opérateurs pseudo-différentiels sur le groupe de Heisenberg. Comme il se doit, cette classe constitue une algèbre contenant les opérateurs différentiels. De plus, ces opérateurs pseudo-différentiels sont continus sur les espaces de Sobolev et l'on peut contrôler la perte de dérivée par leur ordre. Si un grand nombre de travaux ont été déjà consacrés à la construction et à l'étude d'algèbres d'opérateurs à coefficients variables, y compris des travaux très intéressants sur le groupe de Heisenberg, notre approche est différente et en particulier elle conduit à la notion de direction microlocale, et complète l'élaboration d'une analyse microlocale sur le groupe de Heisenberg commencée par Bahouri, Gérard et Xu en 2000 par le développement d'une théorie de Littlewood-Paley.

A class of pseudodifferential operators on the Heisenberg group is defined. As it should be, this class is an algebra containing the class of differential operators. Furthermore, those pseudodifferential operators act continuously on Sobolev spaces and the loss of derivatives may be controlled by the order of the operator. Although a large number of works have been devoted in the past to the construction and the study of algebras of variable-coefficient operators, including some very interesting works on the Heisenberg group, our approach is different, and in particular puts into light microlocal directions and completes, with the Littlewood-Paley theory initiated in 2000 by Bahouri, Gérard and Xu, a microlocal analysis of the Heisenberg group.

ISBN: 978-2-85629-334-8

Prix public* : 35 € - prix membre* : 24 €

* frais de port non compris





Institut Henri Poincaré 11 rue Pierre et Marie Curie F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

ENSEIGNEMENT

Réflexions sur l'enseignement de l'intégration

Hervé Queffélec

1. Tempête sous un crâne

Quelle théorie de l'intégration enseigner à nos chers étudiants en voie de disparition, et qui bâillent discrètement, mais uniformément continûment, à chacune de nos explications ou démonstrations? Riemann, Lebesgue, les deux? Ou bien Henstock, Daniell, Denjoy-Perron? Le texte qui suit ne prétend pas répondre à la plus vieille question du monde, il est juste une contribution à cette question, et ne s'attardera que sur les intégrales de Riemann et Lebesgue (la lecture à ce sujet du numéro spécial [10] de la Gazette est vivement recommandée), pour lesquelles trois démonstrations détaillées seront données. Nous connaissons mal les autres intégrales. Celle de Henstock (équivalente à celle de Denjoy-Perron) est séduisante car la formule fondamentale du calcul intégral y est toujours vraie, mais cette validité élargie se fait au prix d'un artifice (le δ assorti au ε n'est plus un nombre, mais une fonction), et nous semble la seule portée réelle de cette nouvelle théorie, fragile par certains côtés : le module d'une fonction Henstock-intégrable n'est pas toujours Henstock-intégrable ([14]). Cependant, nous citerons un exemple (un peu ad hoc il est vrai) de théorie des fonctions qui échappe à l'intégrale de Lebesgue et se traite avec l'intégrale de Henstock! ([1]). Et le lecteur trouvera dans ([4], [8], [14]) une étude et des commentaires détaillés sur cette intégrale.

2. Intégrale de Riemann

2.1. Une théorie avec beaucoup d'applications

Nous ne partageons pas l'opinion un peu méprisante de certains sur cette intégrale, qui serait devenue « un exercice tout au plus moyennement intéressant ». Il n'y a pas une, mais plusieurs théories de l'intégration, tout dépend de ce qu'on veut faire de cet outil, et si l'outil a beaucoup d'applications, il est respectable. Or justement, l'intégrale de Riemann a BEAUCOUP d'applications, tout en étant d'exposition assez simple. Par exemple :

- (1) Toute fonction continue admet une primitive (même si on peut faire semblant de se passer d'intégration pour ce résultat).
- (2) Plus généralement, on a le théorème fondamental de Cauchy-Lipschitz. Rappelons que la première étape de la preuve consiste à se ramener à une équation intégrale!

- (3) On a la formule de Cauchy et la théorie de l'indice pour les fonctions holomorphes d'une variable. Chaque analyste sait qu'on « traite toutes les fonctions holomorphes » avec cette formule.
- (4) On a la preuve à la Landau (ou à la Weierstrass, avec des gaussiennes!) du théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass.
- (5) On a le critère exponentiel d'équidistribution modulo un de H. Weyl pour une suite (u_n) de réels, qui implique

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(u_n)\to\int_0^1f(t)dt$$

précisément pour les fonctions f Riemann-intégrables, et pas mieux!

- (6) On peut prouver la transcendance de e à la Hermite, et l'irrationalité de π^2 à la Niven ou à la Beukers, avec des intégrales d'exponentielles ou de polynômes de Legendre.
- (7) On a les formules de Fourier pour les coefficients d'une fonction 1-périodique f:

$$c_n = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi nt}dt,$$

sans parler des noyaux de Dirichlet et de Fejèr, et des théorèmes de convergence associés. Une des retombées de ces formules est le célèbre théorème d'unicité de Riemann-Cantor :

- si $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (avec convergence simple), alors $a_n = 0$ et $b_n = 0$ pour tout n. Même si la formule de Fourier n'est qu'un élément de la preuve, elle y joue un rôle important, et surtout la théorie de Lebesgue ne peut rien de plus ici : le résultat devient faux si on suppose seulement que la convergence a lieu presque partout. Il faut d'abord savoir que les coefficients tendent vers 0 et donc sont bornés, mais cela sera donné par la version « Riemann » du théorème de convergence dominée à venir.
- (8) Les sommes de Riemann interviennent naturellement, comme dans le comportement des sommes partielles de ζ sur la droite $\Re s=0$:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}n^{it}\sim N^{it}\int_{0}^{1}x^{it}dx=\frac{N^{it}}{1+it}, t \text{ r\'eel } \neq 0.$$

Ajoutons que nos étudiants ne reconnaissent plus une somme de Riemann et que des exercices simples comme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(\prod_{k=1}^n(n+k)\Big)^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{e}$$

sont devenus des barrières infranchissables ...

- (9) Des convolutions répétées (sur un segment) donnent la partie « facile » du théorème de Denjoy-Carleman pour les classes quasi-analytiques, comme l'a montré S. Mandelbroit.
- (10) On a la formule de Taylor avec reste-intégrale, avec comme corollaire des théorèmes de division dans les fonctions C^{∞} et le théorème d'analyticité de Bernstein quand les dérivées sont positives.

(11) L'intégration à valeurs vectorielles, dans un espace de Banach X, se fait sans aucun effort. Si $f:[0,1]\to X$ est continue, ses sommes de Riemann, pointées ou non, forment un filtre de Cauchy quand le pas des subdivisions tend vers zéro, donc ont une limite $\int_0^1 f(t)dt$. Cette généralisation n'est pas académique. On l'utilise couramment pour le calcul fonctionnel holomorphe dans une algèbre de Banach (théorèmes de type Wiener-Lévy) ou pour moyenner certaines projections. Par exemple, si $\Lambda\subset\mathbb{Z}$, on montre par intégration vectorielle de Riemann (méthode de moyenne de Rudin, qu'on pourrait artificiellement rendre scalaire...) que l'espace C_Λ des fonctions continues 2π -périodiques à spectre dans Λ est complémenté dans l'espace C de toutes les fonctions continues 2π -périodiques si et seulement si il l'est par la projection candidate évidente qui consiste à tuer les fréquences hors de Λ . Cela revient à dire qu'il existe une mesure dont la transformée de Fourier est l'indicatrice de Λ , une mesure idempotente donc. Ces mesures sont décrites par un théorème de P. Cohen... L'intégrale de Riemann fait voyager!

Il convient de mentionner à part les intégrales de Riemann généralisées (ou impropres), qui sont aux intégrales de Lebesgue ce que les séries semi-convergentes sont aux séries, mais va-t-on s'abstenir de parler de la fonction zeta alternée

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s} = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s) ?$$

Voici quelques applications tout aussi impressionnantes de ces dernières :

- (1) la transformation de Laplace sur une demi-droite;
- (2) l'équiconvergence série-intégrale pour une fonction complexe f de classe C^1 avec |f'| improprement intégrable, sans parler du cas classique des fonctions décroissantes positives;
 - (3) la formule de Stirling via la représentation intégrale

$$n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt;$$

(4) plus généralement la fonction Gamma, ou la fonction sinus intégral, la fonction d'Airy, ...

Quelques faits généraux montrent aussi que la théorie de Riemann est assez solide.

2.2. Une théorie assez robuste

(1) L'ensemble $\mathcal R$ des fonctions Riemann-intégrables sur [0,1] est une algèbre, stable par limite uniforme. En conséquence :

$$f \in \mathcal{R}$$
 et g continue sur l'image de $f \Longrightarrow g \circ f \in \mathcal{R}$.

(Une telle propriété est loin d'avoir lieu pour l'intégrale de Henstock par exemple). On dit que les fonctions continues opèrent sur les fonctions Riemann-intégrables. Et ce sont *les seules*, en un sens bien précis :

Si $g:[0,1]\to\mathbb{C}$ vérifie $g\circ f\in\mathcal{R}$ pour toute $f\in\mathcal{R}$ telle que $f([0,1])\subset[0,1]$, alors g est continue.

- (2) On a une condition nécessaire et suffisante d'appartenance à \mathcal{R} pour une fonction bornée : l'ensemble D de ses points de discontinuité peut être recouvert par une suite (I_n) d'intervalles dont la somme des longueurs est arbitrairement petite (D est négligeable, en langage d'intégrale de Lebesgue, mais on peut formuler la condition sans mentionner Lebesgue, ce que faisait (et pour cause!) Riemann).
- (3) On a la formule d'intégration par parties dont il est intellectuellement scandaleux, même en Terminale, de dire qu'elle est trop technique (sic!), alors que c'est une identité remarquable au même titre que $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (cette dernière ne peut paraître technique qu'en prenant en otage la nullité présupposée des lycéens) puisque, D désignant la dérivation, elle se lit (en ignorant les effets de bord)

$$\langle Df, g \rangle = -\langle f, Dg \rangle.$$

Rappelons que cette dernière identité est l'un des fondements de la théorie des distributions de L. Schwartz. C'est aussi la clé pour les inégalités de van der Corput, qui jouent un rôle très important en théorie des nombres ou pour l'étude des intégrales oscillantes en analyse harmonique (méthodes de phase stationnaire).

- (4) On a la formule de changement de variable, elle aussi d'une importance cardinale, pas seulement pour les calculs de primitives, et qui fait toute la supériorité des intégrales sur les séries : par exemple, si l'on cherche un équivalent de $f(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \varepsilon}$ quand $\varepsilon \to 0^+$, rien n'est clair (si l'on se refuse à utiliser la formule de Poisson!) alors que si l'on compare $f(\varepsilon)$ à l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-t^2 \varepsilon} dt$ le changement de variable (une bête homothétie) $\sqrt{\varepsilon}t = x$ donne immédiatement $f(\varepsilon) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\varepsilon}}$.
- (5) L'intégrale de Riemann préfigure l'intégrale de Stieltjes des théoriciens des nombres et l'intégrale stochastique des probabilistes (Stratonovich ou Itô), puisqu'en se limitant à Itô, l'intégrale $\int_0^t X_{\rm s} dY_{\rm s}$ est définie comme la limite (dans L^2 par exemple) des sommes de Riemann-Stieltjes ([11] page 38)

$$\sum_{i=1}^{N} X(t_{i-1}) [(Y(t_i) - Y(t_{i-1}))], \ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t.$$

Ces intégrales stochastiques sont d'une grande actualité. Or, l'intégrale de Lebesgue n'y prépare guère!

L'objectivité nous oblige quand même à signaler quelques faiblesses de l'intégrale de Riemann.

2.3. Des faiblesses, mais un théorème de convergence dominée

On peut faire deux ou trois reproches importants à l'intégrale de Riemann.

- (1) Cette intégrale est « aveugle » à autre chose que des intervalles. Par exemple, le théorème d'Egoroff dit que toute convergence simple est presque uniforme (uniforme en dehors d'un ensemble E de mesure arbitrairement petite). Ce théorème simple et naturel dans la théorie de Lebesgue redonne le théorème de convergence dominée, et munit d'une bonne intuition. Mais E est souvent très loin d'être un intervalle, et le théorème d'Egoroff est hors de portée chez Riemann.
- (2) Cette intégrale passe mal, voire très mal, à plusieurs variables, et il n'y a pas d'énoncé satisfaisant de Fubini, ni de critère simple pour la Riemann-intégrabilité d'une fonction bornée de plusieurs variables.

(3) Cette intégrale demande trop de régularité aux fonctions, et la classe \mathcal{R} n'est pas stable par limite simple, même uniformément bornée. Supposons par exemple que nous voulions étendre le résultat fondamental selon lequel toute fonction continue admet une primitive. Dans le cadre Lebesgue, cela se fait très bien sous la forme suivante :

Théorème 2.1. Toute fonction mesurable localement bornée et approximativement continue f admet une primitive, qui est

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

La fonction f est dite approximativement continue en $a \in \mathbb{R}$ si, étant donné un intervalle I contenant a, la proportion (au sens de la mesure de Lebesgue m sur \mathbb{R}) des points $x \in I$ en lesquels f(x) dévie de f(a) tend vers zéro quand la longueur de I tend vers zéro avec la déviation.

Avec des symboles, en posant $E_{\varepsilon} = \{x; |f(x) - f(a)| > \varepsilon\}$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall I \supset a): m(I) \leqslant \delta \Longrightarrow m(I \cap E_{\varepsilon}) \leqslant \varepsilon m(I).$$

J. Saint-Raymond ([12]) nous a signalé une jolie application du théorème 2.1 :

Théorème 2.2. Soit $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ un ensemble dénombrable de \mathbb{R} . Alors, il existe une fonction F dérivable, strictement croissante et à dérivée f, nulle sur A.

La preuve consiste à construire d'abord f. Par exemple, $f=\inf_{n\geqslant 0}f_n$ avec $f_0(x)=\frac{1}{2}$ et $f_n(x)=|x-a_n|^{\frac{1}{n}}$ si $n\geqslant 1$. Cette fonction est borélienne bornée, positive et nulle sur A, on montre qu'elle est approximativement continue et ne s'annule identiquement sur aucun intervalle. Sa primitive F nulle en zéro, qui existe d'après le théorème 2.1, répond à la question. Mais si par exemple A est dense, la fonction f est hautement non Riemann-intégrable, sinon comme elle s'annule sur A, son intégrale serait identiquement nulle! Cette façon de prouver le théorème 2.2 échappe donc à l'intégrale de Riemann.

Un autre reproche fait à cette l'intégrale est la faiblesse de ses théorèmes de convergence, en particulier l'absence d'un théorème de convergence dominée. Ce reproche est un peu injuste, comme le montre le théorème ci-dessous, dont la preuve figure dans le cours de mathématiques MP-MP* de J. Voedts ([13]) :

Théorème 2.3. Soit (f_n) une suite de fonctions continues positives sur [0,1], convergeant simplement vers 0, avec $0 \leqslant f_n \leqslant \varphi$, où φ est une fonction improprement intégrable-Riemann sur [0,1], par exemple $\varphi(t)=t^{-r}$, r<1. Alors, $\int_0^1 f_n(t)dt \to 0$.

Preuve. On va tout faire pour se ramener à une convergence *décroissante* et on appliquera le lemme de Dini. Doit-on s'en plaindre? Non, car voici l'emploi de ce lemme magnifiquement réhabilité ici! On suppose la conclusion en défaut. Alors, quitte à prendre une sous-suite, on peut trouver un $\alpha>0$ tel que $I_n=\int_0^1 f_n(t)dt\geqslant \alpha$. Si on pose $f_n^p=\max(f_n,...,f_{n+p})$ et $I_n^p=\int_0^1 f_n^p(t)dt$, la suite (I_n^p) est croissante en p à n fixé, et majorée par $I=\int_0^1 \varphi(t)dt$ puisque $f_n^p\leqslant \varphi$.

Elle converge donc vers une limite I_n et on peut trouver une suite croissante (p_n) d'entiers positifs telle que

$$(2.1) I_n - \varepsilon_n \leqslant \int_0^1 \max(f_n, ..., f_{n+p})(t) dt \leqslant I_n \text{ pour tout } p \geqslant p_n,$$

où (ε_n) est une série convergente de réels strictement supérieur à 0 telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \leqslant \frac{\alpha}{2}$ (on fait tout pour faire *stationner* les intégrales). On se ramène maintenant à de la convergence décroissante en posant :

(2.2)
$$g_n = \max(f_n, ..., f_{n+p_n}) \text{ et } h_n = \min(g_1, ..., g_n).$$

On a $h_n \leqslant g_n$ et $g_n \to 0$, donc h_n décroît vers 0, cette convergence est uniforme par le lemme de Dini, et cette fois la théorie de Riemann suffit à nous donner $\lim \int_0^1 h_n(t) dt = 0$. Or nous avons $\int_0^1 g_n(t) dt \geqslant \int_0^1 f_n(t) dt \geqslant \alpha$ et il s'agit de voir que le passage à la monotonie (le passage de g_n à h_n) ne coûte pas trop cher, puisque l'on va prouver

(2.3)
$$\int_0^1 [g_n(t) - h_n(t)] dt \leqslant \frac{\alpha}{2}.$$

On aura alors la contradiction $\int_0^1 h_n(t)dt \geqslant \frac{\alpha}{2}$. Tout est donc dans (2.3). Or, il est clair que :

$$\begin{split} g_n - h_n &= \max_{1 \leqslant k \leqslant n} (g_n - g_k) \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left[\max(f_k, ..., f_{n+p_n}) - \max(f_k, ..., f_{k+p_k}) \right] \\ &=: \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \Delta_k, \ \text{avec } \Delta_k \geqslant 0 \text{ puisque } p_n \text{ croît.} \end{split}$$

Nous sommes confrontés à l'intégrale d'une fonction « maximale » $\max \Delta_k$ de fonctions positives, ce qui est une chose redoutable, et en même temps cruciale, dans la théorie de Lebesgue aussi. Souvent, on ne sait guère faire mieux que $\max \Delta_k \leqslant \sum \Delta_k$ (puisque $\Delta_k \geqslant 0$). Ici, cette majoration du désespoir ne sera pas pénalisante grâce à la stationnarité (2.1). On note d'abord que, si $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $n+p_n=k+q$ avec $q=n-k+p_n\geqslant 0$, si bien que, d'après (2.1) :

$$\int_0^1 \Delta_k(t) dt = \int_0^1 [f_k^q(t) - f_k^{p_k}(t)] dt \leqslant I_k - (I_k - \varepsilon_k) = \varepsilon_k.$$

Cela donne, comme on l'a déjà annoncé :

$$\int_0^1 [g_n(t) - h_n(t)] dt \leqslant \sum_{k=1}^n \int_0^1 \Delta_k(t) dt \leqslant \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \leqslant \frac{\alpha}{2},$$

ce qui n'est autre que (2.3) et achève la preuve du théorème.

Remarque. Une forme beaucoup plus générale, et qui s'applique à des fonctions avec des discontinuités, nous a été signalée par notre collègue J.-F. Burnol, qui l'a détaillée sur son site internet [3].

Le lemme suivant de Cantor, déjà mentionné, découle du théorème 2.3, même si, comme le faisait initialement Cantor, on peut se passer d'intégration pour la preuve.

Lemme 2.4. Si $\rho_n \ge 0$ et $\rho_n \cos(nt + \theta_n) \to 0$ simplement, alors $\rho_n \to 0$.

En effet, $f_n(t) = \min(1, \rho_n) \cos^2(nt + \theta_n)$ converge simplement vers 0 en étant dominée par 1, donc $I_n = \int_0^{2\pi} f_n(t) dt \to 0$. Or, $I_n \sim \pi \min(1, \rho_n)$, d'où le résultat.

3. Intégrale de Lebesgue

3.1. Un paradoxe historique

La notion de nombre s'est développée assez régulièrement semble-t-il. Il y eut d'abord les entiers partant de un (cf. le joli livre « un, deux, trois... l'infini » de G. Gamow ([7])), puis le zéro, les entiers relatifs, les nombres rationnels, le passage délicat aux nombres réels (le statisticien Le Cam disait que les réels ... n'avaient pas de réalité, c'était une extrapolation de l'esprit), enfin le passage plutôt moins délicat aux nombres complexes. Paradoxalement (est-ce intrinsèquement plus dur ?) la notion de mesure des figures (longueur, surface, volume, ...) s'est développée de façon beaucoup plus chaotique, malgré les contributions grecques à la valeur approchée du nombre π avec des polygones, ou de la surface d'une région sous une parabole, etc. et ce chaos relatif se sent aussi dans notre enseignement : les réels sont (étaient?) enseignés avec les précautions les plus sophistiquées (coupures, espaces de suites de Cauchy quotientés, ...) alors que la mesure est traitée de manière beaucoup plus floue et désinvolte : domaines quarrables, domaines géométriquement simples, ... Certains proposent par exemple de définir l'intégrale (un nombre réel positif, donc) d'une fonction positive comme l'aire sous la courbe, dont on a une idée intuitive (on se demande bien laquelle a priori), allant même jusqu'à dire qu'il suffit de hachurer finement le plan, et de compter le nombre de petits carreaux consommés! Cette approche me paraissait au premier abord d'un flou artistique achevé et me laissait perplexe : si ce nombre est π , transcendant, mais dont on ignore tout (développement en fraction continue, en base 2 ou 10), comment l'appréhender finement en comptant des carreaux? Et pourtant... on peut la développer et la rendre aussi rigoureuse qu'une construction de \mathbb{R} , ce sera l'objet du paragraphe suivant.

3.2. Une approche géométrique naturelle

Attardons-nous sur le cas de la dimension deux. La seule chose qui paraisse claire, dans le plan \mathbb{R}^2 , est la notion de rectangle R et celle de surface de R. La surface d'un rectangle (un produit d'intervalles) est *par définition* la longueur multipliée par la largeur, c'est-à-dire, en notant cette surface comme un module :

$$|R| = (b-a)(d-c) = |I||J|$$
 si $R = I \times J =: (a,b) \times (c,d)$.

À partir des rectangles, ayant vaguement en tête ce qu'on attend de la surface (monotonie, additivité, ...) et puisqu'on peut tout recouvrir par des rectangles, on va revenir sur la pointe des pieds aux petits carreaux! C'est, dans un cadre de généralité bien plus considérable, le point de vue développé par H. Federer ([6]). Mais ce livre n'est pas à mettre entre toutes les mains (suivez mon regard intérieur) et, tout en étant un chaud défenseur et un utilisateur occasionnel des

probabilités, nous ne voulons à aucun prix nous lancer dans la présentation axiomatique et pédagogiquement dissuasive à coups de tribus. Nous adopterons ici un point de vue beaucoup plus particulier (on devrait commencer par la dimension un...), qui est celui du cours de Princeton de Stein et Shakarchi ([5] chapitre 1). Cette présentation géométrique nous paraît naturelle, elle privilégie les rectangles (ou les pavés!) et il nous semble que beaucoup d'expositions pourraient s'en inspirer. Nous suivrons donc ce cours, ne nous en écartant que lorsque plus simple paraît possible.

Pour alléger, on se limitera à \mathbb{R}^d avec d=2, la généralisation à $d\geqslant 3$ ne présentant que des problèmes de notations. Soit A une partie quelconque de \mathbb{R}^2 . On peut toujours recouvrir A par une suite R_j de rectangles <u>fermés</u>, et on <u>aimerait définir</u> la surface m(A) de A par

$$m(A) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |R_i|; A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i\}.$$

Deux remarques viennent aussitôt à l'esprit.

- (1) On ne fait les choses qu'à moitié en approchant A par l'extérieur par des objets connus (les rectangles R_i), et il faudrait en faire autant en approchant A de l'intérieur. Mais A peut être d'intérieur topologique vide et ne contenir aucun rectangle. Cette difficulté a été résolue par Carathéodory. Nous y reviendrons plus tard.
- (2) Si A est un rectangle, on a déjà défini m(A) par |A|! Il aurait été décent que les deux définitions coïncidassent! C'est le cas, mais cela demande un théorème de preuve délicate (toute théorie de l'intégration a sa pierre d'achoppement : c'est le théorème de Heine pour Riemann, le lemme de Cousin pour Henstock, ici la construction de la mesure pour Lebesgue, ...).

Voici le théorème en question, dont nous donnons deux preuves. Le résultat serait à vrai dire considéré comme une simple question de bon-sens par un non-mathématicien!

Théorème 3.1. Soit $R, R_1, ..., R_N$ des rectangles fermés tels que $R \subset \bigcup_{i=1}^N R_i$. Alors :

$$|R|\leqslant \sum_{i=1}^N |R_i|.$$

1. Première preuve, d'après Stein-Shakarchi.

L'idée est de raffiner le recouvrement.

Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ et $R_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$. On réordonne de façon croissante les 2N abscisses (distinctes ou non) $a_1, ..., a_N, b_1, ..., b_N$, obtenant des points

$$u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_{2N}$$
 avec $u_1 = \min a_i \leqslant a$, $u_{2N} = \max b_i \geqslant b$.

C'est la version analytique du « by extending indefinitely the sides of all rectangles » de [5], page 5. On réordonne de même les 2N ordonnées $c_1,...,c_N,\ d_1,...,d_N$, obtenant des points

$$v_1 \leqslant v_2 \leqslant \cdots \leqslant v_{2N}$$
 avec $v_1 = \min c_i \leqslant c$, $v_{2N} = \max d_i \geqslant d$.

Pour $\alpha=(j,k)\in[1,2N-1]\times[1,2N-1]$, on pose $\tilde{R_{\alpha}}=[u_j,u_{j+1}]\times[v_k,v_{k+1}]$. Les $\tilde{R_{\alpha}}$ sont presque disjoints (ils ne peuvent se toucher que par les côtés) et on peut écrire $R_i=\cup_{\alpha\in J_i}\tilde{R_{\alpha}}$. En effet, si $a_i=u_p,b_i=u_q,c_i=v_r,d_i=v_s$, il n'y a qu'à prendre

$$J_i = \{(j, k); p \leqslant j < q \text{ et } r \leqslant k < s\}.$$

Nous avons alors les trois faits suivants, qui mis bout à bout donneront clairement le théorème 3.1. Posons

$$J = \bigcup_{i=1}^{N} J_i = [1, 2N - 1] \times [1, 2N - 1].$$
 Alors

(1) $|R| \leqslant \sum_{\alpha \in J} |\tilde{R_{\alpha}}|$. En effet,

$$\sum_{\alpha \in J} |\tilde{R_{\alpha}}| = \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant 2N-1} (u_{j+1} - u_j)(v_{k+1} - v_k)$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{2N-1} (u_{j+1} - u_j)\right] \left[\sum_{k=1}^{2N-1} (v_{k+1} - v_k)\right] = (u_{2N} - u_1)(v_{2N} - v_1)$$

$$\geqslant (b-a)(d-c) = |R|.$$

- (2) $\sum_{\alpha \in J} |\tilde{R_{\alpha}}| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{\alpha \in J_{i}} |\tilde{R_{\alpha}}|\right)$. C'est évident.
- (3) $\sum_{\alpha \in J_i} |\tilde{R_\alpha}| = |R_i|$ pour tout i. Il s'agit du cas d'égalité dans 1. On trouve cette fois

$$\sum_{\alpha \in J_i} |\tilde{R_\alpha}| = (u_q - u_p)(v_s - v_r) = (b_i - a_i)(d_i - c_i) = |R_i|.$$

Aux problèmes de notation près, la preuve vaut pour \mathbb{R}^d et pour les pavés. En dimension un, il y a une preuve plus simple par récurrence (encore faut-il la faire, cf. [2] page 89), mais cette preuve ne se prête pas à une généralisation en plusieurs dimensions.

2. Deuxième preuve, d'après J.-F. Burnol.

Cette preuve (voir le site de [3]) est le triomphe des petits carreaux, qui vont être associés à un quadrillage très fin $\frac{1}{\rho}\mathbb{Z}^2$ du plan! C'est aussi le triomphe du point de vue probabiliste

En effet, tout repose sur le lemme suivant, qui serait valable en toute dimension, dans lequel p désigne un entier et | | la cardinalité, notée comme la surface.

Lemme 3.2. Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle. Alors :

$$|R| = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p^2} \left| R \cap \frac{1}{p} \mathbb{Z}^2 \right|.$$

En effet, si *m* et *n* sont entiers :

$$(\frac{m}{p}, \frac{n}{p}) \in R \iff ap \leqslant m \leqslant bp \text{ et } cp \leqslant n \leqslant dp.$$

Cela représente p(b-a)+O(1) possibilités pour m et p(d-c)+O(1) possibilités pour n, soit $p^2|R|+O(p)$ possibilités pour $(\frac{m}{p},\frac{n}{p})$. En divisant par p^2 (le nombre de cas possibles) et en faisant tendre p vers l'infini, on a le résultat. Et le lemme implique instantanément le théorème 3.1, si l'on utilise (c'est la matrice du théorème!) le fait que la cardinalité d'une réunion est moindre que la somme des cardinalités. On a alors

$$\left|R \cap \frac{1}{\rho}\mathbb{Z}^2\right| \leqslant \sum_{i=1}^N \left|R_i \cap \frac{1}{\rho}\mathbb{Z}^2\right|.$$

On divise par p^2 , on fait tendre $p \to \infty$ et on applique le lemme pour conclure. Il est utile de noter que le résultat s'étend à un recouvrement infini $R \subset \cup_{i=1}^{\infty} R_i$.

Soit en effet $S_i = (1 + \varepsilon) \stackrel{\circ}{R_i}$ le rectangle ouvert de même centre que R_i , dilaté d'un facteur $1 + \varepsilon$. Par Borel-Lebesgue, on peut recouvrir R par un nombre fini de S_i , on applique ce qui précède et on fait tendre ε vers zéro.

Une fois cela dit, il devient raisonnable, pour une partie quelconque A de \mathbb{R}^2 , de <u>définir</u>:

(3.1)
$$m(A) = \inf \{ \sum_{j=1}^{\infty} |R_j|; A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \} \leqslant \infty,$$

où les R_j sont une suite de rectangles fermés recouvrant A. On sait, par le théorème 3.1, que m(A) = |A| si A est un rectangle. À ce stade, Stein et Shakarchi ([5], page 7) divergent un peu de la présentation « mesure extérieure métrique » qui nous tend les bras, et qui certes comporte une difficulté (mesurabilité des ouverts), mais cette difficulté est presque moindre que leur description à la Whitney ([5], page 7 et aussi 17) des ouverts de \mathbb{R}^d . C'est donc la présentation de Carathéodory que nous suivons ci-dessous ([6]) : la fonctionnelle m, définie sur toutes les parties de \mathbb{R}^2 a des propriétés sympathiques de sigma-sous-additivité et de monotonie prouvées dans [5], qui la font baptiser « mesure extérieure ». Elle a de plus la propriété suivante, qui la fait baptiser « mesure extérieure métrique » (cf. [5], page 14), à savoir que son action devient additive sur des parties A, B fortement disjointes.

Théorème 3.3. Soit | | Ia norme euclidienne sur \mathbb{R}^d . Si A, B sont fortement disjointes au sens où $d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} |x - y| > 0$, alors

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B).$$

Une vraie difficulté apparaît maintenant : sans l'hypothèse forte d(A,B)>0, l'additivité du théorème 3.3 n'a plus lieu. On paie le fait de n'avoir fait que la moitié du travail quand on a approché A par l'extérieur. Ici se place une idée simple et brillante de Carathéodory : approcher A par l'intérieur, c'est approcher le complémentaire A^c par l'extérieur! Mais si les deux approches cernent bien A, une partie quelconque T devrait être partagée équitablement par A et A^c , c'est-à-dire qu'on devrait avoir :

(3.2)
$$m(T \cap A) + m(T \cap A^c) = m(T)$$
 pour tout $T \subset \mathbb{R}^2$.

Une partie A vérifiant l'équation (3.2) sera dite *mesurable*, voilà le gros mot lâché! Ce sera le seul... Le fait sympathique est le suivant :

Théorème 3.4. Nous avons les trois propriétés suivantes :

- (1) un ouvert quelconque de \mathbb{R}^2 est mesurable;
- (2) si A est mesurable, son complémentaire A^c l'est aussi;
- (3) la réunion d'une suite de parties mesurables est encore mesurable.

Nous voyons donc qu'il y a beaucoup de parties mesurables (il y a beaucoup d'ouverts) et que la mesurabilité est une notion robuste (elle se préserve par union dénombrable et passage au complémentaire). De plus ([5], page 19) m se comporte de façon sigma-additive sur les parties mesurables, et on a construit à relativement peu de frais la « mesure de Lebesgue » sur \mathbb{R}^d .

Nous nous contenterons ici de prouver le point 1, non traité dans ([5]), caché quelque part dans [6], et qui n'utilise que le caractère métrique de m. Supposons donc A ouvert. Nous devons montrer :

$$m(T \cap A) + m(T \cap A^c) \leqslant m(T)$$
 si $m(T) < \infty$.

L'idée est de se ramener à des ensembles fortement disjoints, en posant :

$$E_n = \{x \in A; d(x, A^c) \geqslant \frac{1}{n}\}, F_n = E_n \setminus E_{n-1} \text{ si } n \geqslant 2.$$

Les ensembles $T \cap A^c$ et $T \cap E_n$ sont fortement disjoints : $d(T \cap A^c, T \cap E_n) \geqslant \frac{1}{n}$. On a donc déjà :

$$m(T \cap E_n) + m(T \cap A^c) = m[T \cap (E_n \cup A^c)] \leqslant m(T).$$

Pour conclure, il nous suffit de montrer que $m(T \cap E_n) \uparrow m(T \cap A)$. Or, la série de terme général $m(T \cap F_n)$ converge (c'est le point clé), car les F_n sont fortement disjoints de deux en deux et même :

$$d(E_n, \cup_{k \geqslant n+2} F_k) \geqslant \frac{1}{n(n+1)}.$$

En effet, si $x \in E_n$ et $y \in \bigcup_{k \geqslant n+2} F_k$, on a :

$$|x - y| \ge d(x, A^c) - d(y, A^c) \ge \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Cela nous donne par récurrence (noter que $E_p \cup F_{p+2} \subset E_{p+2}$) :

$$\sum_{n=1}^{N} m(T \cap F_{2n}) \leqslant m(T \cap E_{2N}) \leqslant m(T)$$

$$\sum_{n=1}^{N} m(T \cap F_{2n+1}) \leqslant m(T \cap E_{2N+1}) \leqslant m(T)$$

d'où

(3.3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} m(T \cap F_n) \leqslant 2m(T).$$

Ensuite, A étant ouvert (enfin l'hypothèse vibre), on a pour tout $n \ge 1$:

$$(3.4) T \cap A \subset (T \cap E_n) \bigcup (\cup_{k>n} (T \cap F_k)).$$

En effet, si $x \in T \cap A$, on a $d(x, A^c) > 0$. Si donc $x \notin E_n$, il existe k > n tel que $\frac{1}{k} \leqslant d(x, A^c) < \frac{1}{k-1}$, d'où (3.4). Ensuite, (3.4) et la sigma-sous-additivité de m entraînent :

$$m(T \cap A) \leqslant m(T \cap E_n) + \sum_{k>n} m(T \cap F_k)$$

puis (3.3) et un passage à la limite donnent

$$m(T \cap A) \leqslant \liminf_{n \to \infty} m(T \cap E_n)$$

ce qui achève la démonstration.

4. Intégrale de Henstock quand même

Disons d'abord qu'une excellente comparaison des intégrales de Lebesgue, Henstock, et Denjoy-Perron se trouve dans l'ouvrage [8], qui par ailleurs ignore Riemann... Ensuite, J.-F. Burnol (encore lui) m'a signalé l'intéressant article suivant ([1]) : un théorème classique de Dirichlet et Fatou dit qu'étant donné une fonction f intégrable-Lebesgue sur le cercle-unité, on peut l'étendre par la formule intégrale (dans laquelle P_z est le noyau de Poisson)

$$F(z) = \int_0^{2\pi} f(t) P_z(t) \frac{dt}{2\pi}$$

en une fonction harmonique dans le disque unité, et qui va converger en un certain sens vers la fonction initiale f quand on se rapproche d'un point du bord. Que faire quand la donnée f n'est plus Lebesgue-intégrable (certains parlent à ce sujet d'intégrale de Lebesgue impropre)? Dans l'article [1], les auteurs indiquent une solution partielle et donnent des exemples, peut-être un peu artificiels, mais des exemples quand même, dans lesquels le théorème de Dirichlet et Fatou ne s'applique plus, et où l'intégrale de Henstock vient utilement prendre le relais de celle de Lebesgue... Le lecteur désireux d'en savoir plus trouvera largement son bonheur dans les ouvrages [4], [8], et [14].

5. Conclusions... provisoires

(1) On peut faire des mathématiques hautement non-triviales avec l'intégrale de Riemann, dont l'enseignement devrait être réhabilité en classes préparatoires et dans les <u>trois</u> premières années d'université. Il serait sans doute suffisant pour la préparation au CAPES. L'aspect « sommes de Riemann » pointées (le pointage est tellement important dans l'intégrale stochastique!) ou sommes de Darboux devrait aussi être réhabilité. Il y a plus : si K est un espace compact et L une forme linéaire continue sur C(K), L qui au départ est continue pour la convergence uniforme l'est aussi pour la convergence ponctuelle bornée. Cela résulte mot pour mot de la preuve donnée ici du théorème de convergence dominée, une fois qu'on sait que L est différence de deux formes linéaires positives ([9], page 76). Cette preuve

« topologique » paraît naturelle dans ce contexte, a priori aucune notion de mesure ne s'impose sur K (on peut regretter que seul l'aspect « forme linéaire positive » subsiste de la définition spécifique de l'intégrale de Riemann, mais telle est la réalité). On peut ainsi prouver des résultats assez élaborés d'analyse fonctionnelle, comme le théorème de Mazur qui fait passer de la convergence simple bornée à la convergence uniforme de combinaisons convexes.

(2) A un niveau un peu plus avancé, l'intégrale de Lebesgue est incontestablement plus adaptée, par exemple pour l'étude des probabilités, où l'hypothèse de convergence presque partout est *naturelle*, alors qu'elle est complètement artificielle (d'un point de vue mathématique, pas pédagogique) dans des exercices comme

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f(t)e^{-n\sin^2t}dt,$$

ou encore pour l'étude de la transformation de Fourier. Son triomphe est la simplicité de ses théorèmes de type Fubini (tellement importants en probabilités avec les questions d'indépendance et de symétrisation) et son aspect géométrique (lemme de Frostman, points de densité, lemme de Vitali...), plus sans doute que le théorème de convergence dominée! La vérification des hypothèses de ce théorème, à savoir que la fonction maximale

$$f^*(x) = \sup_{n} |f_n(x)|$$

est intégrable, est à peu près aussi coûteuse que celle de la théorie de Riemann classique :

$$M_n = \sup_{x} |f_n(x)| \to 0.$$

Demandez donc aux agrégatifs de trouver par convergence dominée l'équivalent de l'intégrale de Wallis de seconde espèce :

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}.$$

(3) Nous pourrions être tentés de dire, en présentant l'intégrale de Lebesgue, que

Ce n'est pas tout à fait exact. Mais c'est ce que faisait J.-M. Bony dans son cours de l'X, c'est aussi ce que disait J. Deny : « la non-mesurabilité est un luxe de mathématicien ».

Ajoutons qu'il y a tellement de choses dix fois plus intéressantes en intégration que l'existence d'ensembles non-mesurables pathologiques! Une introduction à cette intégrale qui ignore les difficultés de mesurabilité paraît donc tout à fait possible.

- (4) Dès qu'on parle d'espérance conditionnelle, de martingales, de processus... la notion de tribu devient essentielle, mais pas avant! Il ne faut pas décourager trop vite les étudiants avec ces concepts élaborés.
- (5) Une fois qu'on a construit la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d , et c'est l'ambition de ce qui précède, on a fait le plus dur, la définition de l'intégrale et les trois théorèmes de convergence (Beppo Levi, Fatou, Lebesgue) viennent sans grand effort (tous les enseignants savent cela, et c'est parfaitement détaillé dans [5]). Fubini, c'est un peu autre chose...

(6) Chaque mathématicien a un avis fort sur l'intégration et la façon idéale de l'enseigner! Nous espérons que ce texte encouragera d'autres collègues à donner leur avis, fût-il contradictoire, sur la question...

6. Références

- [1] M. Benedicks, W. Pfeffer, The Dirichlet problem with Denjoy-Perron integrable boundary conditions, *Canad.Math.Bull.* **28** (1), 113-119, 1985.
- [2] K. Berberian, Fundamentals of Real Analysis Springer 1999.
- [3] J.-F. Burnol, Le théorème de la convergence dominée pour les fonctions intégrables au sens de Riemann, http://jf.burnol.free/convergencedominee\$v2\$.pdf, 2012.
- [4] J.-P. Demailly, Théorie élémentaire de l'intégration : l'intégrale de Kurzweil-Henstock, http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/demailly/books.html, 2011.
- [5] E. Stein, R. Shakarchi, Real Analysis, Princeton Lectures in Analysis Tome III, 2005.
- [6] H. Federer, Geometric Measure Theory, Springer, 1969.
- [7] G. Gamow, Un, Deux, Trois... l'infini, Dunod Paris, 1963.
- [8] R.A. Gordon, The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock, *Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society*, Volume 4, 1994.
- [9] F. Hirsch, G. Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle, Masson, 1997.
- [10] J.-P. Kahane, Naissance et postérité de l'intégrale de Lebesgue, http://smf4.fr/ Publications/Gazette/2011, 2005.
- [11] H.H. Kuo, Introduction to Stochastic Integration, Springer Universitext, 2006.
- [12] J. Saint-Raymond, Annulation des fonctions dérivées, Communication Personnelle, février 2012.
- [13] J. Voedts, Cours de Mathématiques MP-MP*, Ellipses, 2002.
- [14] L.T. Yeong, Henstock-Kurzweil Integration on Euclidean Spaces, World Scientific, 2011.

PRIX ET DISTINCTIONS

Les Lauréats du Prix Fermat de Recherches Mathématiques 2011¹

Pierre Raphaël, Damien Rössler

Le Prix Fermat de Recherches Mathématiques, financé par la Région Midi Pyrénées et décerné par un jury international sous l'égide de l'Institut de Mathématiques de Toulouse, récompense tous les deux ans les travaux de recherche d'un ou plusieurs mathématiciens (de moins de 45 ans) dans l'une des thématiques suivantes :

- principes variationnels ou plus généralement équations aux dérivées partielles ;
- probabilités;
- théorie des nombres.

Le lecteur trouvera le règlement intégral du Prix et la liste des lauréats depuis 1989 sur la page http://www.math.univ-toulouse.fr/PrixFermat.

Le Prix Fermat de recherches Mathématiques 2011 est décerné à :

Manjul Bhargava (Princeton) pour ses divers travaux sur les généralisations des estimées de Davenport-Heilbronn et pour ses résultats remarquables récents (en collaboration avec A. Shankar) sur le rang moyen des courbes elliptiques,

et

IGOR RODNIANSKI (MIT et Princeton) pour ses contributions fondamentales à l'étude des équations de la Relativité générale et de la propagation de la lumière sur les espaces temps courbes (en collaboration avec M. Dafermos, S. Klainerman, H. Lindblad).

La remise des prix aura lieu le 22 mai 2012 à l'Institut de mathématiques de Toulouse.

Présentation des travaux de M. Bhargava

Le domaine de recherches de M. Bhargava est la combinatoire et la théorie algébrique et analytique des nombres, l'accent étant mis sur les arguments de comptage de points entiers dans des domaines fondamentaux de groupes arithmétiques agissant sur des espaces vectoriels. Ses contributions les plus importantes concernent trois grandes problématiques, qui s'enchevêtrent de plusieurs

¹ Présentation rédigée par D. Rössler et P. Raphaël pour la Gazette des Mathématiciens à l'occasion de l'attribution du prix Fermat 2011.

manières. Nous les présentons plus bas dans l'ordre chronologique des articles qu'il leur a consacrés.

M. Bhargava s'est d'abord intéressé à la généralisation à des degrés supérieurs de l'approche de Gauss aux groupes de classe des extensions quadratiques de ${\bf Q}$. C.-F. Gauss introduit dans son traité *Disquisitiones Arithmeticae* une méthode très effective, dans laquelle on représente les idéaux fractionnaires d'une extension quadratique de ${\bf Q}$ par des formes quadratiques à coefficients entiers, les classes d'équivalences d'idéaux correspondant alors à des orbites sous une action naturelle du groupe $SL_2({\bf Z})$. On peut alors écrire explicitement en termes de formes quadratiques une formule pour la loi de composition du groupe de classe mais cette dernière est d'une grande complexité combinatoire. M. Bhargava parvient à dégager des lois de compositions supérieures (cf. [7], [10], [11], [12] et aussi [8] pour un survol) qui permettent d'approcher effectivement les groupes de classes d'extensions de degrés inférieur ou égal à 5. Ces lois de composition entretiennent des relations mystérieuses avec les groupes de Lie exceptionnels.

M. Bhargava s'est ensuite tourné vers la généralisation des estimées de Davenport-Heilbronn (cf. [15]) à des degrés supérieurs à 3 et a aussi cherché à calculer des termes sous-dominants dans ces estimées (cf. [4], [3], [6] et [5]). À titre d'exemple, un des résultats de Davenport-Heilbronn est le suivant. Soit $N_3(0,X)$ le nombre d'extensions cubiques de ${\bf Q}$ de discriminant positif et inférieur ou égal à X. Alors

$$\lim_{X\to\infty} N_3(0,X)/X = (12\cdot\zeta_{\mathbf{Q}}(3))^{-1}.$$

M. Bhargava parvient à généraliser ce type de résultat à des extensions de degré inférieur ou égal à 5. Pour formuler l'un de ses résultats, notons $N_4^{(0)}(0,X)$ le nombre d'extensions de degré 4 totalement réelles de ${\bf Q}$ dont la clôture de Galois est de groupe de Galois S_4 . Il démontre que

$$\lim_{X \to \infty} N_4^{(0)}(0,X)/X = \frac{1}{48} \prod_{p \text{ premier}} (1 + p^{-2} - p^{-3} - p^{-4})$$

Sa démonstration de ce résultat part du même principe que celui de l'article de Davenport-Heilbronn, à savoir un comptage à la Minkowski du nombre de points d'un réseau dans le domaine fondamental du quotient d'un espace vectoriel réel par l'action des points entiers d'un groupe algébrique. Ce point de départ lui est fourni par la description explicite de corps de nombres de degré 4 obtenue dans les travaux décrits dans le deuxième paragraphe. Il doit ensuite faire face au difficile problème de la non-compacité de ce domaine fondamental. Il parvient à conclure en montrant par des arguments de moyennage subtil que la contribution des parties non bornées du domaine fondamental est négligeable.

M. Bhargava s'est enfin intéressé avec A. Shankar aux analogues elliptiques des estimées de Davenport-Heilbronn et de leurs généralisations. On se reportera aux prépublications [1] et [2] pour ces résultats, qui sont tout récents. Il s'agit probablement là de la contribution la plus spectaculaire de M. Bhargava. Le problème considéré ici est le suivant. Considérons l'ensemble des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques sur ${\bf Q}$ et préordonnons cet ensemble au moyen de la hauteur de Faltings (appelée aussi hauteur modulaire). Quel est alors le rang moyen du groupe

de Mordell-Weil d'une courbe elliptique sur Q pour ce préordre? Ce type de question est d'abord apparu dans les travaux des mathématiciens D. Goldfeld, N. Katz et P. Sarnak et l'un des premiers à donner une solution partielle au problème du rang moyen est A. Brumer, qui a montré dans [14] que le rang moyen est fini et inférieur ou égal à 2.3, si l'on suppose l'hypothèse de Riemann généralisée ainsi que la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer vérifiée. Dans [2], M. Bhargava et A. Shankar montrent que les techniques de comptage évoquées plus haut permettent de démontrer ce résultat sans supposer de grandes conjectures connues. Ils montrent de plus que la moyenne en question est inférieur ou égal à 1.5, ce qui améliore toutes les bornes conjecturales obtenues à la suite des travaux de A. Brumer. Ils démontrent aussi des résultats de même farine pour les groupes de Selmer. Enfin ils combinent leurs techniques avec des résultats récents de E. Urban et C. Skinner sur la conjecture d'Iwasawa-Greenberg pour les courbes elliptiques pour démontrer (cf. [1]) qu'un pourcentage positif des courbes elliptiques sur Q vérifie la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer.

Présentation des travaux de I. Rodnianski

Le domaine de prédilection d'I. Rodnianski est les équations de la Relativité Générale. Fermat concevait la question de la propagation des rayons lumineux comme un problème variationnel². Einstein la repense au travers de la structure de l'espace-temps dont la géométrie est dictée par les équations de la Relativité Générale. Ces dernières sont un exemple canonique d'équation aux dérivées partielles nonlinéaires avec une forte composante géométrique et une spécificité fondamentale : l'équation est quasilinéaire, c'est-à-dire que la métrique de l'espace-temps en évolution est solution d'une équation des ondes liée à sa propre géométrie. Cette difficulté intrinsèque requiert le développement de méthodes robustes aux confins des techniques variationnelles, des systèmes dynamiques et de l'analyse harmonique, dans le but de comprendre qualitativement le flot de ces équations.

On peut distinguer trois grands axes de recherche dans les travaux de Rodnianski afférant à la Relativité Générale. Après les travaux fondateurs de Choquet-Bruhat qui ont jeté les bases de l'étude mathématique des équations d'Einstein, Christodoulou et Klainerman [19] ont ouvert il y a vingt ans une brèche spectaculaire en démontrant la stabilité de l'espace de Minkowski qui est la solution « triviale ». La preuve a été considérablement simplifiée par Lindblad et Rodnianski, et dans [26] est exhibé un fait structurel nouveau dans les équations : le concept de « weak null condition ». Un programme connexe lancé par Klainerman, Rodnianski et Szeftel concerne la dérivation de critères géométriques de formation de singularités pour les équations d'Einstein. Ce problème est directement relié à la résolution des équations en régularité minimale qui est un domaine des EDP dispersives particulièrement actif. Dans la lignée de la percée de Bahouri et Chemin [16], Klainerman et Rodnianksi parviennent dans [20] à un résultat de régularité presque optimal pour H^s , s > 2. Mais le cas s = 2 est considérablement plus difficile et critique par de nombreux aspects, et met en œuvre une hypothèse géométrique naturelle de borne L^2 de la courbure. Ce programme ambitieux est maintenant quasiment achevé.

 $^{^2~}$ « La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit extrémale »

En collaboration avec Dafermos, Rodnianski s'attaque à l'une des conjectures majeures de Relativité : la stabilité des espaces-temps de Kerr qui sont la classe naturelle de solutions particulières après Minkowski, en connexion directe avec la question de la stabilité des trous noirs et l'émission d'ondes gravitationnelles. La tâche est monumentale, et l'analyse se concentre pour l'instant sur l'étude du problème linéarisé et la compréhension de la propagation de la lumière sur les espaces-temps de Kerr. Dans leur article de référence [21], Dafermos et Rodninanski obtiennent la première preuve quantitative de décroissance des solutions, et sont capables dans [22], [23] de traiter le cas de large moment de rotation angulaire. Ces travaux, ainsi que d'autres contributions importantes notamment de Blue-Sterbenz [17], Tataru-Tohaneanu [27] sont les fers de lance pour l'étude des espaces-temps en rotation de Kerr.

Un troisième axe de recherche concerne la question fascinante de la formation de singularités, et donc de trous noirs, pour les équations de la relativité générale. Christodoulou démontre dans son ouvrage monumental [18] l'existence d'espacestemps initialement parfaitement réguliers pour lesquels le flot d'Einstein amène en temps fini à la formation d'une « surface piégée », ce qui est une indication très forte de la possible présence d'un trou noir. L'enjeu va ici très au-delà des seules équations de la relativité générale et concerne les équations des ondes quasilinéaires en général. Dans les travaux de référence [24], [25], Klainerman et Rodnianksi proposent une simplification substantielle de la preuve de Christodoulou qui permet d'élargir la classe de données initiales et montre une généricité beaucoup plus forte du mécanisme de formation de surface piégée, et ouvre la voie vers une description plus approfondie de la singularité.

Références

- [1] Bhargava, Manjul, Shankar, Arul, Ternary cubic forms having bounded invariants, and the existence of a positive proportion of elliptic curves having rank 0., arXiv:1007.0052.
- [2] Bhargava, Manjul, Shankar, Arul, Binary quartic forms having bounded invariants, and the boundedness of the average rank of elliptic curves., arXiv:1006.1002.
- [3] Bhargava, Manjul, *The density of discriminants of quintic rings and fields*, Ann. of Math. (2), 172, 2010, 3, 1559-1591, 0003-486X, 10.4007/annals.2010.172.1559.
- [4] Belabas, Karim, Bhargava, Manjul, Pomerance, Carl, Error estimates for the Davenport-Heilbronn theorems, Duke Math. J., 153, 2010, 1, 173-210, 0012-7094, 10.1215/00127094-2010-007.
- [5] Bhargava, Manjul, Ghate, Eknath, On the average number of octahedral newforms of prime level, Math. Ann., 344, 2009, 4, 749-768, 0025-5831, 10.1007/s00208-008-0322-4.
- [6] Bhargava, Manjul, Wood, Melanie Matchett, *The density of discriminants of S_3-sextic number fields*, Proc. Amer. Math. Soc., 136, 2008, 5, 1581-1587, 0002-9939, 10.1090/S0002-9939-07-09171-X.
- [7] Bhargava, Manjul, Higher composition laws. IV. The parametrization of quintic rings, Ann. of Math. (2), 167, 2008, 1, 53-94, 0003-486X, 10.4007/annals.2008.167.53.
- [8] Bhargava, Manjul, *Higher composition laws and applications*, International Congress of Mathematicians. Vol. II, Eur. Math. Soc., Zürich, , 2006, 271-294.
- [9] Bhargava, Manjul, The density of discriminants of quartic rings and fields, Ann. of Math. (2), 162, 2005, 2, 1031-1063, 0003-486X, 10.4007/annals.2005.162.1031.
- [10] Bhargava, Manjul, Higher composition laws. III. The parametrization of quartic rings, Ann. of Math. (2), 159, 2004, 3, 1329-1360, 0003-486X, 10.4007/annals.2004.159.1329.
- [11] Bhargava, Manjul, Higher composition laws. II. On cubic analogues of Gauss composition, Ann. of Math. (2), 159, 2004, 2, 865-886, 0003-486X, 10.4007/annals.2004.159.865.

- [12] Bhargava, Manjul, Higher composition laws. I. A new view on Gauss composition, and quadratic generalizations, Ann. of Math. (2), 159, 2004, 1, 217-250, 0003-486X, 10.4007/annals.2004.159.217.
- [13] Bhargava, Manjul, P-orderings and polynomial functions on arbitrary subsets of Dedekind rings, J. Reine Angew. Math., 490, 1997, 101-127, 0075-4102, 10.1515/crll.1997.490.101.
- [14] Brumer, Armand, The average rank of elliptic curves. I, Invent. Math., 109, 1992, 3, 445-472, 0020-9910, 10.1007/BF01232033.
- [15] Davenport, H., Heilbronn, H., On the density of discriminants of cubic fields. II, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 322, 1971, 1551, 405-420, 0962-8444.
- [16] Bahouri, H., Chemin, J.Y Equations d'ondes quasilinéaires et estimations de Strichartz., Amer. J. Math., 121, 1999, 6, 1337-1377.
- [17] Blue, P., Strebenz, J. *Uniform decay of local energy and the semi-linear wave equation on Schwarzschild space.*, Comm. Math.Phys. , 268, 2006, 2, 481-504.
- [18] Christodoulou, D., *The formation of black holes in general relativity*, EMS Monographs in Mathematics., 2009, 589 p, 978-3-03719-068-5 .
- [19] Christodoulou, D., Klainerman, S., The global nonlinear stability of the Minkowski space, Princeton Mathematical Series, 41, 1993, 514p, 0-691-08777-6.
- [20] Klainerman, S., Rodnianski, I., Rough solutions of the Einstein-vacuum equations, Ann. of Math (2), 161, 2005, 3, 1143-1193.
- [21] Dafermos, M., Rodnianski, I., A proof of the uniform boundedness of solutions to the wave equation on slowly rotating Kerr backgrounds, Invent. Math, 185, 2011, 3, 467-559.
- [22] Dafermos, M., Rodnianski, I., *Decay for solutions of the wave equation on Kerr exterior spacetimes I-II: The cases —a— jj M or axisymmetry*, arXiv:1010.5132, 2010.
- [23] Dafermos, M., Rodnianski, I., The black hole stability problem for linear scalar perturbations, arXiv:1010.5137, 2010.
- [24] Klainerman, S., Rodnianski, I., On emerging scarred surfaces for the Einstein vacuum equations, Discrete Contin. Dyn. Syst., 28, 2010, 3, 1007-1031.
- [25] Klainerman, S., Rodnianski, I., On the formation of trapped surfaces, to appear in Acta Math., 2012.
- [26] Linblad, H., Rodnianski, I., The global stability of Minkowski space-time in harmonic gauge., Ann. Math (2), 171, 2010, 3, 1401-1477.
- [27] Tataru, D., Tohaneanu, M., A local energy estimate on Kerr black hole backgrounds., Int. Math. Res. Not., 2011, 2, 248-292.

Appel à projets Cap'Maths

La convention liant Animath à l'État (représenté par l'Agence nationale de rénovation urbaine) pour la création de Cap'Maths a été signée début mars 2012. Ceci a permis la publication d'un premier appel à projets, clos le 19 mars.

Une deuxième date de dépôt de projets est fixé au 14 mai 2012.

Il concerne toutes les actions de **popularisation des mathématiques**, en particulier toutes les activités mathématiques périscolaires; il concerne également **les disciplines qui mènent ou se nourrissent des mathématiques** (par exemple, l'informatique et les sciences du numérique) ainsi que les actions de formation à la vulgarisation des mathématiques.

Tous renseignements sont disponible sur :

http://www.capmaths.fr

MATHÉMATIQUES ET GRAND PUBLIC

« Un texte, un mathématicien » à Amiens

Jean-Paul Chehab

C'est sur proposition de la Société Mathématique de France et de l'association Animath qu'une session du cycle « Un texte, un mathématicien » a été organisée à l'université de Picardie Jules Verne (UPJV) à Amiens le 8 février 2012. Jean-Christophe Yoccoz y a présenté sa conférence « Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré »; ce n'était évidemment pas prémédité, mais rappelons que 2012 est l'année du centenaire de la mort d'Henri Poincaré. Cette manifestation a réuni près de 800 personnes (d'après les organisateurs) parmi lesquelles, au bas mot, 550 lycéens et étudiants de classes préparatoires qui avaient rempli le double amphithéâtre de Droit se situant en contrebas de la cathédrale d'Amiens. Ce public jeune s'était rendu à cette conférence par cars scolaires depuis les quatre coins de la Picardie (Abbeville, Compiègne, Laon, Noyon) ou bien plus simplement à pied depuis les lycées Thuillier et Michelis d'Amiens. Des étudiants de l'UPJV (du L1 au doctorat), des collègues et thésards de toutes disciplines scientifiques étaient également venus assister à l'exposé. Bernard Helffer représentait la SMF.

Le Laboratoire Amiénois de Mathématiques Fondamentales et Appliquées (LAMFA, UMR 7352) a piloté la mise sur pied de cette rencontre en partenariat avec le Rectorat d'Amiens et avec le concours de différents services de l'université (Communication, Direction de la recherche et de l'innovation, services techniques logistiques). La direction de l'université s'est impliquée dans la préparation comme dans le déroulement de cette rencontre, elle a facilité l'obtention de tous les moyens demandés à cette occasion et a été représentée par son Président ainsi que par les vice-Présidents à la Recherche et les différentes présidents de conseils, de l'École Doctorale. Il est remarquable qu'une université généraliste comme l'UPJV se soit toute entière mobilisée pour accueillir cet événement et ait contribué à lui donner cet écho.

Pour initier le jeune public au contenu de l'exposé de J.-C. Yoccoz, des préconférences avaient été organisée au préalable dans divers lycées picards : F. Durand, V. Martin, S. Petite, E. Sebert-Cuvillier, B. Schapira et G. Vigny ont mis au point un exposé introductif; cette équipe, augmentée de L. Legry (IPR) et de J. Boulanger (enseignants au lycée et membres associés du LAMFA), a produit des cahiers pédagogiques (recueils d'exercices et de compléments de cours autour de la conférence). L'exposé a été filmé avec l'accord du conférencier, il sera donc possible de le visionner en classe en complément de séances préparatoires. Ce matériel est voué à être mutualisé.

J.-P. CHEHAB

68

Le dispositif scénique était tout à fait inédit puisque les deux amphis communiquaient par la scène (la paroi les séparant usuellement ayant été retirée) et le conférencier s'est par conséquent retrouvé d'une certaine manière au centre d'une arène. Qu'à cela ne tienne! Jean-Christophe Yoccoz a d'emblée captivé l'auditoire en distribuant ses explications à tous, utilisant avec une facilité déconcertante les deux écrans simultanément, dirigés chacun vers l'un des amphis.

Après un tel exposé, la séance des questions a démarré timidement sur la stabilité du système solaire. Un lycéen s'est ensuite élancé en demandant au conférencier :

- « À quoi reconnaît-on un bon mathématicien? »
- « Je ne connais pas de mathématicien qui n'aime pas faire des maths, même lorsqu'il sèche, ce qui est le cas la plupart du temps »

Ce plaisir très communicatif à parler de mathématiques a d'évidence touché ce jeune public et, à l'issue de son exposé, Jean-Christophe Yoccoz s'est prêté aux questions plus directes des lycéens et a posé pour des photos de groupes, qui du reste se sont retrouvées rapidement sur les sites des lycées.

Cet après-midi formidable s'est achevé par un cocktail en l'honneur de Jean-Christophe Yoccoz.

Ces conférences grand public semblent devenir un outil important de diffusion, de promotion et d'émulation scientifique auprès d'un jeune public à une époque où les vocations sont de moins en moins nombreuses alors que les besoins en personnes bien formées scientifiquement sont cruciaux, ne serait-ce qu'économiquement, ce qui n'enlève d'ailleurs rien aux dimensions culturelles de ces rencontres. Dans le cas d'universités comme celle de Picardie, ces manifestations participent en outre au rayonnement régional de ces établissements et permettent de créer ou de consolider des liens avec les collègues du secondaire, souvent d'anciens étudiants, créant ainsi une dynamique vertueuse.



Impression, dépaysement

Gaël Octavia

« Mathématiques, un dépaysement soudain » plie bagages. Installée à la Fondation Cartier depuis octobre 2011, l'exposition a suscité beaucoup de commentaires de mathématiciens, parfois enthousiastes, parfois exprimant un désagréable sentiment de dépossession (de leur culture, de leur cœur de réflexion) et la crainte de voir leur discipline – avec laquelle eux-mêmes se montrent si prudents, si scrupuleux – réduite à des aspects superficiels ou détournée au service de l'« art contemporain » tant décrié pour ses codes insaisissables, son fonctionnement tellement à l'opposé des mathématiques, justement.

En contrechamp, il semblait intéressant d'essayer de savoir ce qu'en pensait le grand public, de comprendre ce qu'il avait tiré de la manifestation en termes de connaissances, d'intérêt ou d'émotion. Après tout, c'est pour lui que tout cela avait été conçu (si on lit la phrase de Grothendieck¹ à laquelle l'exposition doit son titre, on note que les mathématiciens ne sont pas concernés par le fameux « dépaysement soudain » ²). C'était peut-être aussi l'occasion de glaner quelques enseignements utiles quant à la manière de rapprocher les mathématiques du profane.

Ce qu'il ne fallait pas y chercher

« Je ne savais pas trop ce que je venais voir. » Le propos revient souvent chez les visiteurs. Et il est vrai que le meilleur moyen de ne pas apprécier l'exposition était de s'y rendre avec une idée préconçue. Une entreprise de vulgarisation des mathématiques? Pas vraiment. Une expérience ludique? Non plus. Une ultime tentative de séduction en direction des grands allergiques aux maths? Encore moins, si j'en crois Caroline – le hasard veut qu'elle soit la première visiteuse que j'interroge –, étudiante en art visiblement déçue. Il faut dire qu'elle n'a pas, a priori, d'affinités avec les mathématiques. Familière de l'avant-garde artistique, habituée des lieux, elle affirme, tranchante : « Je ne vois rien d'innovant ici. » La sculpture de Sugimoto, tout de même, pourrait lui plaire - « C'est très pur, très fin! »contrairement au Ciel mathématique de Jean-Michel Alberola (cartographie de la pensée d'Henri Poincaré) qui, selon elle, « n'est pas de l'art ». Caroline est surtout frustrée de ne rien saisir (surface de révolution à courbure négative constante? du chinois; pseudo-sphère? de l'hébreu!), faute d'explications et de guides vraiment compétents, mais aussi d'intérêt personnel. Elle avoue : « Je n'ai pas du tout envie de comprendre les maths et une exposition de ce genre n'y changera rien. » Et de conclure : « Ce n'est pas une exposition d'art contemporain » (ce qui ne manquera pas de rassurer certains mathématiciens).

^{1 «} Certes, des changements profonds ont eu lieu dans la façon dont le mathématicien ou le "philosophe de la nature" concevait "l'espace". Mais ces changements me semblent tous dans la nature d'une "continuité" essentielle – ils n'ont jamais placé le mathématicien, attaché (comme tout un chacun) aux images mentales familières, devant un dépaysement soudain. » Alexander Grothendieck, *Récoltes et semailles*.

² Merci à Stella Baruk de me l'avoir fait remarquer.

70 G. OCTAVIA

En finir avec les clichés

Les autres visiteurs sondés s'avéreront plus sensibles au charme de ces installations. Le seul fait que l'ensemble résulte des efforts conjoints de grands noms du monde artistique (voire de stars adulées comme David Lynch ou Patti Smith!) et de pointures du monde mathématique est une agréable surprise : « cela prouve que les mathématiciens sont ouverts, qu'ils ne vivent pas dans un monde à part », s'exclame une visiteuse.

S'il s'agissait de casser les clichés, alors la plus grande réussite de l'exposition est le film *Au bonheur des maths* de Raymond Depardon et Claudine Nougaret, où neuf mathématiciens, de Nicole El Karoui à Don Zagier en passant par Michael Atiyah, parlent librement face à la caméra. Premier choc : un mathématicien, ça ne ressemble pas forcément à Misha Gromov, c'est aussi la jeune et brune Carolina Canales Gonzales, le sosie de Frédéric Chopin, ou d'autres à l'élégance plus sobre. Deuxième choc : ces gens-là ne sont pas des machines à résoudre des équations mais des êtres éclectiques aux parcours divers et variés, aux styles très différents, animés par la passion, connaissant le doute, l'échec, le désespoir, le plaisir...

« C'est sûr qu'au lycée, aucun professeur ne nous a jamais dit simplement pourquoi il aimait les maths », remarque un jeune homme. Pour Martine, la quarantaine, « pas du tout matheuse mais un peu sensibilisée par un frère scientifique », entendre des mathématiciens parler de chemins de traverses ou dire des choses comme « le réel est une superposition de possibles imaginaires » ou « la plupart des énoncés vrais sont indémontrables », c'est inattendu parce que « philosophique, plein de poésie, tellement loin de la vision que l'on a des maths ».

Joëlle, cadre trentenaire venue grâce à son comité d'entreprise, s'arrête longuement devant le *Ciel mathématique* d'Alberola et commente : « C'est comme une démonstration. On voit ici qu'une œuvre fait sens dans son ensemble. On ne comprend pas tout l'impact d'une pensée comme celle de Poincaré si on regarde seulement du côté des maths. Avec cette sorte de diagramme, ces flèches, je vois que les maths, ce n'est pas seulement une personne qui travaille dans son coin, ça relie les hommes, les disciplines. Comme si tout ça faisait partie d'une grande famille... » Henri, retraité, semble éprouver quelque chose de similaire face à la *Bibliothèque des mystères* et ses extraits de textes choisis par Misha Gromov, des Grecs à nos jours : « une belle façon de retracer l'histoire des mathématiques et de les resituer dans la pensée humaine en général; on voit bien les liens avec la philosophie par exemple », avec un seul bémol : « c'est un peu euro-centré ».

Fascination et nostalgie

« Une espèce de Guernica mathématique », dit encore Henri, en souriant, face à l'écran arrêté sur un tableau noirci par les formules. À la question de savoir si c'est beau, il répond sans hésiter par l'affirmative. Le petit film reprend et on voit la main de Cédric Villani courir sur le tableau : « On est un peu dans la caricature du matheux qui écrit des équations à toute vitesse mais en même temps, au bout d'un moment, on oublie ce que c'est, c'est comme une chorégraphie. »

Stefano, ingénieur « venu pour les maths » et « pas du tout branché art contemporain », est hypnotisé par les démonstrations géométriques, les pavages de Penrose, la spirale d'Ulam projetés sur la coupole. « Ça va un peu vite mais l'idée

générale n'est pas d'apprendre tout de suite. Ça me donne envie de lire, de relire des maths chez moi... Mais je sais bien que je n'aurai jamais le temps de le faire » avoue-t-il dans un éclat de rire.

Henri, Joëlle et Stefano ont pour point commun de se définir comme aimant les mathématiques, bien que les ayant perdues de vue depuis longtemps. L'exposition, entre lot de consolation et madeleine de Proust, semble pour eux l'occasion de renouer brièvement avec elles, de retrouver une émotion perdue, presque oubliée. Et aussi d'« expérimenter un nouveau regard », selon Henri, « plus surprenant que beau », d'ailleurs. Qu'une équation permette de fabriquer un bel objet les intéresse moyennement – ils sont déjà convaincus que les mathématiques sont partout et servent à tout faire – et ils s'attacheront plus longtemps à regarder l'équation elle-même que la sculpture de Sugimoto (qui leur plaît cependant en tant que concrétisation d'une abstraction).

Ainsi, aussi étrange que cela paraisse, il existe un public qui apprécie de voir des mathématiques (ou des mathématiciens à l'œuvre), quitte à ne pas y comprendre grand chose, simplement touché par la beauté qui s'en dégage, dans une fascination mêlée de nostalgie.



Vue de l'exposition « Mathématiques, un dépaysement soudain » présentée du 21 octobre 2011 au 18 mars 2012 à la Fondation Cartier pour l'art contemporain, Paris.



THE TREE COST OF KNOWLEDGE

CHERCHEURS, ÉDITEURS: LE DÉBAT

Avant-propos

La Gazette

Depuis quelques années, les bibliothèques de mathématiques souffrent. Elles sont mises à mal par l'augmentation régulière des prix des abonnements aux revues dans tous les pays. En France, où elles doivent en outre faire face aux difficultés créées par l'autonomie des universités et l'échec des projets d'Equipex PurMath/Priam, elles voient leur avenir s'assombrir.

Parallèlement à ce constat, les chercheurs s'interrogent sur le bien-fondé de la gestion actuelle par les éditeurs du processus de publication d'un article scientifique. Depuis sa genèse dans les laboratoires jusqu'à son apparition sur les rayons de la bibliothèque, les étapes sont très majoritairement financées par de l'argent public qui, en fin de compte, semble englouti par les éditeurs privés.

- Il n'est donc pas étonnant que les universitaires (et en particulier les mathématiciens) se soient décidés à réagir contre la pression financière des grands éditeurs multinationaux via deux pétitions en ligne :
- l'une, concernant Springer, initiée par l'Institut Fourier à Grenoble, et appuyée en particulier par la SMF, la SMAI et la SFdS.
- http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/petitions/index.php?petition=3
- l'autre, concernant Elsevier, portée par Tim Gowers à Cambridge.

http://www.thecostofknowledge.com/

La Gazette partage ces préoccupations et a souhaité donner un plus large écho à ce mouvement en publiant dans ce numéro les textes de ces pétitions accompagnés par les commentaires de leurs initiateurs. Vous trouverez ainsi la traduction française du texte « The Cost of Knowledge » qui décrit très clairement le problème et les enjeux, ainsi qu'un article de B. Kloeckner sur les détails des revendications à l'adresse de Springer. Nous avons également demandé aux éditeurs concernés s'ils souhaitaient faire valoir leur point de vue par un texte en français dans ce numéro. Vous pourrez ainsi lire le communiqué de Springer; quant à Elsevier, il nous a indiqué qu'il préférait renvoyer le lecteur sur le site http://www.journals.elsevier.com/discrete-applied-mathematics/letter-to-the-mathematics-community/

À l'heure où nous publions, le succès du mouvement semble prometteur : devant la mobilisation rapide de nombreux collègues, les éditeurs ont déjà été amenés à réagir et même à revoir leurs positions sur certains aspects de la protestation. Pour autant, les universitaires sont loin de crier victoire. La *Gazette* ne manquera pas de vous informer dès que les résultats des négociations seront disponibles.

La pétition concernant Springer

Appel pour des négociations équilibrées avec les éditeurs de revues scientifiques

En ce moment sont finalisées des négociations sur l'accès aux revues scientifiques éditées par Springer, menées par le CNRS, l'INRIA, le consortium Couperin et le RNBM/CNRS.

Les signataires¹ du présent appel considèrent que les clauses suivantes imposées par Springer sont inacceptables :

- impossibilité de réduire le montant engagé en sélectionnant les revues auxquelles les bibliothèques s'abonnent;
 - augmentation contractuelle des prix chaque année, très supérieure à l'inflation.

En conséquence, ils demandent aux partenaires de la négociation de refuser de signer tout contrat contenant de telles clauses. Les signataires sont prêts à se passer de l'accès aux revues Springer prévu par le contrat en discussion le temps nécessaire pour convaincre cet éditeur de mener des négociations équilibrées et, en particulier, pour obtenir gain de cause sur les clauses mentionnées.

Les signataires appellent l'ensemble de leurs collègues et des laboratoires de recherche publics à prendre position en signant ce texte et en le diffusant, afin de créer une dynamique collective du monde académique visant à empêcher les pratiques commerciales abusives et les tarifs excessifs de certaines maisons d'édition.

La pétition concernant Elsevier

The Cost of Knowledge

Academics have protested against Elsevier's business practices for years with little effect. These are some of their objections.

- (1) They charge exorbitantly high prices for subscriptions to individual journals.
- (2) In the light of these high prices, the only realistic option for many libraries is to agree to buy very large "bundles", which will include many journals that those libraries do not actually want. Elsevier thus makes huge profits by exploiting the fact that some of their journals are essential.
- (3) They support measures such as SOPA, PIPA and the Research Works Act, that aim to restrict the free exchange of information.

The key to all these issues is the right of authors to achieve easily-accessible distribution of their work. If you would like to declare publicly that you will not support any Elsevier journal unless they radically change how they operate, then you can do so by filling in your details on the page¹.

http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/petitions/index.php?petition=3

http://www.thecostofknowledge.com/

Le coût du savoir

Le texte qui suit tente de décrire la genèse du boycott d'Elsevier en cours lancé par de nombreux mathématiciens (et universitaires d'autres disciplines) sur le site http://thecostofknowledge.com, et de présenter quelques-uns des problèmes que celui-ci dénonce. Bien que le mouvement soit tout sauf monolithique, nous espérons que les arguments que nous avançons ici sont en résonance avec ceux de nombre de signataires de ce boycott.

Le rôle des revues : la diffusion de la recherche

Le rôle des revues dans les mathématiques professionnelles est débattu depuis déjà un certain temps (voir par exemple [11], [4], [12], [13], [1], [10], [14], [2]).

Dans le passé, si les revues remplissaient plusieurs fonctions, la première d'entre elles était la diffusion des articles de recherche. Les éditeurs commerciaux facturaient la composition (travail généralement délicat avant l'avènement de la composition électronique, particulièrement en mathématiques), l'impression des exemplaires de la revue et la distribution auprès des abonnés (principalement des bibliothèques universitaires).

Le comité de rédaction d'une revue est un groupe de mathématiciens professionnels dont le travail de rédaction fait partie des tâches en tant que chercheurs, qui est donc payé par leur employeur, en général une université. Ainsi les rédacteurs travaillent-ils bénévolement pour l'éditeur¹. Quand un article est soumis à la revue par un auteur qui est un mathématicien, le plus souvent employé lui aussi par une université, les rédacteurs choisissent le ou les rapporteurs de l'article, prennent en compte leurs évaluations, décident d'accepter ou non l'article et organisent l'ensemble des articles reçus en volumes. Ceux-ci sont transmis à l'éditeur qui se charge alors du travail de publication proprement dit. L'éditeur fournit un peu d'assistance administrative pour traiter les articles et un peu d'assistance technique, souvent mineure mais parfois substantielle, pour la relecture. Les rapporteurs travaillent aussi bénévolement pour l'éditeur : tout comme le travail de rédacteur, celui de rapporteur fait partie intégrante du métier de mathématicien. Les auteurs ne sont pas payés par les éditeurs pour les articles qu'ils publient, bien qu'on leur demande en général de céder leurs droits d'auteur² à l'éditeur.

Ce système avait un sens quand publier et diffuser des articles était une tâche difficile et coûteuse. Les éditeurs fournissaient alors une aide précieuse qui était rétribuée par leurs abonnés, essentiellement des bibliothèques universitaires. Les institutions académiques dont les bibliothèques s'abonnent aux revues mathématiques sont en général les mêmes que celles employant les mathématiciens qui écrivent les articles, les rapports d'évaluation et assurant la tâche de rédacteur. Par conséquent le coût de l'ensemble de la reproduction des articles de recherche

 $^{^{1}}$ Le rédacteur en chef d'une revue reçoit parfois une compensation modeste de la part de l'éditeur.

² On a traduit « copyright » par « droits d'auteur » mais les deux terminologies ne correspondent pas exactement entre elles, voir [8] pour les différences entre les cadres juridiques français et américain.

est à la charge des ces institutions (ainsi que d'autres sources extérieures qui les financent en partie, telle la National Science Foundation aux États-Unis) : elles paient les mathématiciens qu'elles emploient pour qu'ils fassent leur recherche et organisent la publication de leurs résultats dans les revues ; puis (par l'intermédiaire de leurs bibliothèques) elles paient les éditeurs pour diffuser ces résultats auprès des mathématiciens dans le monde entier. Étant donné que ces institutions emploient les chercheurs pour développer la recherche, il était certainement logique pour elles de financer également la diffusion de leurs résultats. Après tout, partager les idées et les résultats de la recherche est sans nul doute une composante essentielle du progrès scientifique.

Cependant, le monde a aujourd'hui considérablement changé. Les auteurs composent eux-mêmes leurs articles grâce à la mise en page électronique. Les coûts de publication et de distribution ne sont plus aussi élevés qu'ils ne l'étaient auparavant. Et, ce qui est plus important encore, la diffusion des idées scientifiques ne passe plus par la distribution matérielle des volumes de revues, mais se fait surtout électroniquement. Même si ce mode de diffusion n'est pas gratuit, il est beaucoup moins cher et fonctionne pour une grande part indépendamment des revues mathématiques.

En conclusion, le coût de publication des revues a baissé parce que celui de mise en page est passé des éditeurs aux auteurs, tandis-que les coûts de publication et de diffusion sont devenus bien inférieurs à ce qu'ils étaient. Par contre, les sommes que les bibliothèques universitaires dépensent pour les abonnements ne cessent d'augmenter sans que l'on puisse entrevoir de limite à cela. Pourquoi les mathématiciens fournissent-ils tout ce travail bénévolement, pourquoi leurs employeurs dépensent-ils tant pour un service dont la valeur ne justifie plus le coût?

Le rôle des revues : l'évaluation par les pairs et l'évaluation professionnelle

Il y a des raisons importantes pour lesquelles les mathématiciens n'ont pas tout simplement abandonné la publication dans les revues. En particulier, le travail des rapporteurs joue un rôle essentiel pour garantir l'exactitude et la lisibilité des articles mathématiques. De plus, la publication d'articles dans des revues spécialisées est le meilleur moyen d'être reconnu professionnellement. En outre, les revues ne se valent pas toutes à cet égard : elles font l'objet d'un classement (assez approximatif) et les publications dans les revues les mieux cotées comptent souvent davantage que les publications dans des revues moins bien classées. Les mathématiciens professionnels ont en général une bonne connaissance du prestige relatif des revues publiant les articles de leur domaine, et le plus souvent, ils soumettent leur article à la revue la mieux classée qu'ils estiment susceptible de l'accepter pour publication.

De par le rôle d'évaluation professionnelle que jouent les revues scientifiques, changer de système de publication est plus difficile qu'il n'y paraît à première vue. Par exemple, il n'est pas facile de créer une nouvelle revue (même électronique, qui évite les difficultés d'impression et de distribution), car les mathématiciens ne voudront peut-être pas publier dans celle-ci et préféreront soumettre leurs articles à des revues dont la réputation est bien établie. De plus, bien que la réputation des différentes revues se soit construite grâce aux efforts des auteurs, des rapporteurs,

des rédacteurs (ceci sans être payés par les éditeurs), dans la plupart des cas le *nom* de la revue reste la propriété de l'éditeur, ce qui rend difficile aux mathématiciens de reprendre à l'éditeur le bien précieux qu'ils ont ainsi construit tout au long des années.

Le rôle d'Elsevier

Elsevier, Springer et un certain nombre d'autres éditeurs (beaucoup parmi eux sont de grands groupes éditoriaux mais dont les publications mathématiques sont moins importantes, par exemple Wiley) tirent des profits considérables de notre travail bénévole, ceci aux dépens de la communauté académique. Ils apportent une certaine plus value mais elle est sans commune mesure avec les prix qu'ils pratiquent.

Parmi ces maisons d'édition Elsevier n'est peut-être pas la plus chère, mais d'autres facteurs, tels que les scandales, l'usage du lobbying, etc. (comme on l'explique ci-dessous) justifient que nous la visions en premier pour exprimer notre mécontentement. Un boycott doit être assez consistant pour avoir un sens, mais ne doit pas être trop large pour éviter que le choix des cibles ne suscite des controverses et que le boycott ne devienne trop lourd à gérer. Refuser de soumettre des articles à tous les éditeurs trop chers est une prochaine étape raisonnable, que plusieurs d'entre nous ont déjà entreprise, mais ce boycott se concentre sur les éditions Elsevier à cause du sentiment partagé par les mathématiciens que ce sont celles qui contreviennent le plus gravement.

Commençons par aborder le problème du coût des revues mathématiques. Malheureusement, il est difficile de faire des comparaisons : les revues diffèrent beaucoup en qualité, en nombre de pages par volume et même en densité de texte par page. Quand on considère le prix à l'unité, les revues mathématiques d'Elsevier sont parmi les plus chères; par exemple, dans le rapport de l'AMS (American Mathematical Society) sur les prix des revues mathématiques (cf. le site http://www.ams.org/membership/mem-journal-survey), sept des dix revues les plus chères (sur la base des prix par volume en 2007³) étaient éditées par Elsevier. Toutefois, comme Elsevier édite les plus gros volumes, le prix par page est une meilleure mesure qui peut être facilement calculée. De ce point de vue, Elsevier n'est certainement pas l'éditeur commercial le plus cher, quoique ses prix apparaissent à l'évidence très élevés. *Annals of Mathematics* est une revue mathématique de tout premier plan qui est publiée par Princeton University Press et dont le prix est très abordable : 13 cents la page en 2007.

À l'opposé, dix revues d'Elsevier⁴ coûtent 1,30 dollar la page ou plus; ces revues, ainsi que trois d'autres éditeurs, coûtent plus par page que n'importe quelle revue publiée par une université ou par une société savante. En comparaison, trois autres revues mathématiques comparables aux *Annals* sont *Acta Mathematica*, éditée par l'Institut Mittag-Leffler pour 65 cents la page, *Journal of the American Society*, éditée par l'AMS pour 24 cents la page, et *Inventiones Mathematicae*, publiée par Springer pour 1,21 dollar la page. Notons qu'aucune des revues mathématiques

Nous avons choisi les chiffres de 2007 car les prix et les nombres de pages pour cette année se trouvent facilement sur internet.

⁴ Sans compter une revue qui depuis a cessé de paraître.

d'Elsevier n'est généralement considérée comme étant d'une qualité comparable à celles-ci.

Cependant, il y a un aspect supplémentaire qui rend difficile l'évaluation du coût véritable des revues mathématiques. C'est la pratique largement répandue parmi les grands éditeurs commerciaux de la vente par bouquets de revues (le « bundling »), qui permet aux bibliothèques de s'abonner à un grand nombre de revues afin d'éviter de payer les prix exorbitants qu'on leur demande pour acheter à l'unité les revues dont elles ont besoin. Bien que le prix moyen que les bibliothèques payent ainsi pour chaque revue soit inférieur à celui annoncé sur le catalogue, ce qui compte en fait est le prix moyen qu'elles paient par revue (ou par page de revue), ceci pour les revues dont elles ont vraiment besoin. Nous souhaiterions être en mesure de pouvoir chiffrer ce que payent les bibliothèques pour les revues d'Elsevier en comparaison avec celles de Springer ou d'autres éditeurs; malheureusement cela est difficile, car les éditeurs exigent souvent dans les contrats que leurs clients institutionnels n'en dévoilent pas les clauses financières. Par exemple, Elsevier a fait un procès à l'université de l'État de Washington pour empêcher la divulgation de cette information [3]. Une conséquence habituelle de ces contrats est qu'une université ne peut pas se désabonner de quelques revues afin de faire des économies : au mieux sera-t-elle parfois autorisée à échanger quelques abonnements mais sans pouvoir réduire le montant total.

Une raison de cibler Elsevier plutôt que, par exemple, Springer provient du fait que ce dernier a eu par le passé une relation riche et productive avec la communauté mathématique. Outre les revues, Springer publie des séries de cours, de monographies, et de « Lecture Notes » qui sont importantes ; on pourrait peut-être considérer que le prix de ces revues sert à subventionner ces autres publications, moins profitables. Bien que tous ces types de publications soient devenus moins importants avec l'arrivée d'internet et de leur diffusion électronique, la présence ancienne et continue de Springer dans le monde mathématique y a créé une réserve de bonne volonté à son égard. Cependant celle-ci s'épuise rapidement⁵ mais n'a pas encore entièrement disparu.

Elsevier n'a pas de tradition comparable d'engagement dans l'édition mathématique. Nombre de revues publiées par Elsevier ont été acquises relativement récemment suite au rachat d'autres éditeurs plus petits. De plus, ces dernières années Elsevier a été impliqué dans plusieurs scandales à propos du contenu scientifique de ses revues (plus précisément du manque de contenu scientifique). Un de ces scandales concerna la revue *Chaos, Solitons, & Fractals* qui, au moment où il éclata en 2008-2009, avait un des facteurs d'impact⁶ les plus élevés parmi les revues mathématiques éditées par Elsevier. Il s'avéra que celui-ci provenait en partie du fait que cette revue publiait de nombreux articles se citant mutuellement entre eux ⁷. De plus, *Chaos, Solitons, & Fractals* a publié de nombreux articles qui, selon notre jugement professionnel, n'ont que peu ou

⁵ Voir par exemple la pétition récente adressée à Springer par un groupe de mathématiciens et de laboratoires français sur http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/petitions/index.php? petition=3.

 $^{^6}$ Elsevier évalue le facteur d'impact sur 5 ans de cette revue actuellement à 1,729. À titre de comparaison, celui de *Advances in Mathematics*, aussi publié par Elsevier, est de 1,575.

Voir [1] pour plus d'information et pour d'autres exemples troublants qui montrent les limites des mesures bibliométriques de la qualité scientifique.

pas de valeur scientifique et n'auraient jamais dû être publiés dans quelque revue réputée que ce soit.

Lors d'un autre scandale notoire, cette fois-ci en médecine, pendant au moins cinq ans Elsevier a « publié une série de compilations d'articles pour le compte de clients appartenant à l'industrie pharmaceutique, en les faisant passer pour des articles scientifiques, ceci sans en mentionner l'origine véritable » [9].

Récemment, Elsevier a fait du lobbying en faveur du « Research Works Act » [6], projet de loi qui a été présenté au Congrès des États-Unis pour supprimer la règle du « National Institute of Health » (NIH) qui garantit le libre accès au public des articles de recherche ayant bénéficié du soutien du NIH, ceci dans les douze mois suivant la publication (laissant ainsi le temps aux éditeurs d'en tirer profit). Bien que la plus grande partie du lobbying soit tenue secrète, le soutien affiché d'Elsevier vis-à-vis de cette loi montre son opposition à toute politique efficace et à grande échelle de publication en accès libre.

Ces scandales, s'ajoutant à la pratique des bouquets de revues, des prix exorbitants et des activités de lobbying, donnent d'Elsevier l'image d'un éditeur dont la seule motivation est le profit, sans intérêt réel ni engagement à l'égard du savoir mathématique et de la communauté des mathématiciens qui le produit. Bien sûr, beaucoup d'employés d'Elsevier sont des personnes raisonnables qui travaillent de leur mieux pour contribuer à l'édition scientifique et nous ne leur prêtons aucune mauvaise intention. Cependant l'entreprise en tant que telle ne semble pas porter dans son cœur les intérêts de la communauté mathématique.

Le boycott

Il n'est donc pas surprenant que depuis quelques années de nombreux mathématiciens aient perdu patience à force d'être entraînés dans un système où les éditeurs commerciaux exploitent leur travail bénévole, tout en tirant profit des abonnements payés par les bibliothèques de leurs institutions, ceci en échange d'un service devenu quasiment superflu⁸. Il est apparu à beaucoup que le comportement d'Elsevier, parmi celui de tous les éditeurs commerciaux, est l'exemple le plus flagrant de mauvaises pratiques, si bien qu'un certain nombre de mathématiciens se sont, à titre personnel, engagés à ne plus participer aux revues d'Elsevier⁹.

L'un d'entre nous (Timothy Gowers) a jugé utile de rendre public son boycott d'Elsevier et grâce à cela, d'autres ont été encouragés à faire de même. Cela a donné lieu au mouvement actuel de boycott, proposé sur le site http://thecostofknowledge.com, dont le succès a largement dépassé les attentes initiales.

Chaque participant(e) au boycott peut choisir les activités auxquelles il (ou elle) a l'intention de renoncer vis-à-vis des revues d'Elsevier, à savoir : soumettre des articles, évaluer ces articles, ou participer à un comité de rédaction. Naturellement, soumettre un article ou être rédacteur sont des activités purement volontaires,

⁸ Voir http://www.scottaaronson.com/writings/journal.pdf où le modèle commercial des éditeurs est décrit avec un humour grinçant mais malheureusement par trop vrai.

⁹ Certaines revues mathématiques ont également migré avec succès d'Elsevier vers d'autres éditeurs; par exemple les Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, qui étaient publiées par Elsevier jusqu'à ces dernières années, le sont maintenant par la Société Mathématique de France.

alors qu'évaluer un article est une affaire plus subtile. En effet, tout le système d'évaluation par les pairs dépend de la disponibilité de personnes capables de faire ces évaluations, ce qui constitue une des grandes traditions sur lesquelles repose la science : le fait d'être évaluateur est perçu à la fois comme une charge et comme un honneur, auquel chaque membre de la communauté prend part volontiers. Cependant, même si nous respectons cette tradition et estimons beaucoup sa valeur, nombre d'entre nous ne souhaitent plus voir notre travail mis au service du modèle commercial d'Elsevier.

Quelle suite à donner?

Comme cela a été suggéré tout au début, les participants du boycott ont des buts divers et variés, que ce soit à court ou à long terme. Certains voudraient que le système des revues soit éliminé et remplacé par quelque chose d'autre, plus adapté à internet et aux possibilités de diffusion électronique. D'autres envisagent que les revues continuent à jouer un rôle, mais que l'édition commerciale soit remplacée par des modèles de publication en accès libre. D'autres encore imaginent un changement plus modeste, où les éditeurs commerciaux seraient remplacés par des instances à but non lucratif, telles les sociétés savantes (par exemple l'American Mathematical Society, la London Mathematical Society, ou la Société Mathématique de France, qui toutes publient déjà un certain nombre de revues), ou les presses universitaires; de cette façon, la valeur créée par le travail des auteurs, des rapporteurs et des rédacteurs reviendrait à la communauté académique et scientifique. Ces buts ne s'excluent pas nécessairement : le monde des revues mathématiques, comme le monde des mathématiques lui-même, est vaste et les revues en accès libre peuvent coexister avec les revues traditionnelles, tout comme avec d'autres moyens plus innovants de diffusion et d'évaluation.

En revanche, les signataires s'accordent tous sur le fait qu'Elsevier est l'exemple même de tout ce qui pêche actuellement en ce qui concerne la publication à des fins commerciales des revues mathématiques et nous n'accepterons plus qu'Elsevier récolte les fruits de notre travail et de celui de nos collègues.

Quel futur envisageons-nous pour tous les articles qui sans notre boycott auraient été publiés dans des revues d'Elsevier? Il y a beaucoup de revues publiées ailleurs, qui peuvent peut-être déjà en absorber au moins une partie. De nombreuses revues de qualité ont également vu le jour ces dernières années, dont plusieurs existent sous forme électronique (éliminant ainsi complètement les coûts d'impression et de distribution), et il ne fait aucun doute que d'autres suivront. Enfin, nous espérons que la communauté mathématique sera capable de récupérer pour elle-même une part de la valeur qu'elle a donnée aux revues d'Elsevier, en faisant migrer certaines d'entre elles d'Elsevier vers d'autres éditeurs (en gardant si possible leur nom et en tous cas leur esprit¹⁰).

Aucun de ces changements n'est facile; être rédacteur d'une revue est un travail difficile et créer une revue nouvelle ou faire migrer puis relancer ailleurs une revue existante l'est encore plus. Mais si on ne le fait pas on maintient le statu quo actuel,

¹⁰ Un exemple notoire est la démission, le 10 août 2006, de l'ensemble du comité de rédaction de la revue d'Elsevier *Topology* et la création par les membres de ce comité du *Journal of Topology*, qui appartient à la London Mathematical Society.

où Elsevier récolte des profits toujours plus importants en exploitant notre travail et de celui de nos collègues. Ceci est à la fois intolérable et inadmissible.

Signé par :

Scott Aaronson (Massachusetts Institute of Technology), Douglas N. Arnold (University of Minnesota), Artur AVILA (IMPA and Institut de Mathématiques de Jussieu), John BAEZ (University of California, Riverside), Folkmar BORNEMANN (Technische Universität München), Danny CALEGARI, (Caltech/Cambridge University), Henry COHN (Microsoft Research New England), Ingrid DAUBECHIES (Duke University), Jordan ELLENBERG (University of Wisconsin, Madison), Matthew EMERTON (University of Chicago), Marie FARGE (École Normale Supérieure Paris), David GABAI (Princeton University), Timothy GOWERS (Cambridge University), Ben Green (Cambridge University), Martin Grötschel (Technische Universität Berlin), Michael HARRIS (Université Paris-Diderot Paris 7), Frédéric HÉLEIN (Institut de Mathématiques de Jussieu), Rob KIRBY (University of California, Berkeley), Vincent LAFFORGUE (CNRS et Université d'Orléans), Gregory F. LAWLER (University of Chicago), Randall J. LEVEQUE (University of Washington), László Lovász (Eötvös Lorand University), Peter J. OLVER (University of Minnesota), Olof Sisask (Queen Mary, University of London), Terence Tao (University of California, Los Angeles), Richard TAYLOR (Institute for Advanced Study), Bernard Teissier (Institut de Mathématiques de Jussieu), Burt Totaro (Cambridge University), Lloyd N. TREFETHEN (Oxford University), Takashi Tsu-BOI (University of Tokyo), Marie-France VIGNÉRAS (Institut de Mathématiques de Jussieu), Wendelin WERNER (Université Paris-Sud), Amie WILKINSON (University of Chicago), Günter M. ZIEGLER (Freie Universität Berlin).

Annexe : recommandations pour les mathématiciens

Tous les mathématiciens doivent décider pour eux-mêmes s'ils souhaitent participer au boycott et selon quelles modalités. Les signataires bien établis professionnellement ont une responsabilité envers leurs collègues plus jeunes qui renoncent à publier dans les revues d'Elsevier. Ils doivent veiller à ce que la carrière de ces derniers en soit le moins possible affectée.

Il y a deux actions simples que chacun peut accomplir, quelle que soit sa position vis-à-vis du boycott, et qui ne nous semblent pas prêter à controverse :

- 1. Vérifier que les versions finales de ses articles, et en particulier celles de ses nouveaux articles, soient librement accessibles en ligne et idéalement soient disponibles à la fois sur arXiv¹¹ et sur sa page web personnelle.
- 2. Quand vous soumettez un article vous avez le choix entre une revue onéreuse et une autre bon marché (ou gratuite) de même niveau, optez toujours pour la seconde.

Les règles d'Elsevier en matière de prépublications électroniques [7] sont inacceptables, car elles interdisent explicitement aux auteurs de mettre à jour leurs articles déposés sur arXiv en incorporant les modifications apportées lors de l'évaluation de l'article. Voir par exemple [5]. Nous recommandons aux auteurs de modifier (si nécessaire) les formulaires de cession de droits d'auteurs, pour en se réservant le droit de déposer la version finale de leur texte en accès libre sur des serveurs tel arXiv.

Références

- [1] D. N. Arnold, Integrity Under Attack: The State of Scholarly Publishing, SIAM News 42 (2009), 2-3, http://www.siam.org/news/news.php?id=1663
- [2] D. N. Arnold, More reasons to support the Elsevier boycott, International Mathematical Union Blog on Mathematical Journals, 5 February 2012, http://blog.mathunion.org/journals/?tx_t3blog_pi1[blogList][showUid]=30
- [3] T. Bergstrom, Big Deal Contract Project, http://www.econ.ucsb.edu/~tedb/Journals/BundleContracts.html
- [4] J. Birman, Scientific Publishing: A Mathematician's Viewpoint, Notices of the American Mathematical Society 47 (2000), 770–774.
- [5] Confederation of Open Access Repositories, Maximizing the visibility of research outputs: COAR call for action, 6 February 2012, http://www.coar-repositories.org/news/coar-writes-open-letter-as-reaction-to-elseviers-practices/
- [6] M. Eisen, Plagiarist or Puppet? US Rep. Carolyn Maloney's reprehensible defense of Elsevier's Research Works Act, 13 January 2012, http://www.michaeleisen.org/blog/?p=846
- [7] Elsevier, Electronic Preprints, accessed 2 February 2012, http://www.elsevier.com/wps/find/authorsview.authors/preprints
- [8] M. Farge, Avis pour le Comité d'Éthique du CNRS sur les relations entre les chercheurs et les maisons d'édition scientifique, COMETS-CNRS, 27 Juin 2011, 1-28, http://wavelets. ens.fr/PUBLICATIONS/ARTICLES/PDF/316.pdf
- [9] M. Hansen, Statement From Michael Hansen, CEO Of Elsevier's Health Sciences Division, Regarding Australia Based Sponsored Journal Practices Between 2000 And 2005, 7 May 2009, http://www.elsevier.com/wps/find/authored_newsitem.cws_home/companynews05_01203
- [10] C. Hutchins, What might be done about high prices of journals?, International Mathematical Union Blog on Mathematical Journals, 12 July 2011, http://blog.mathunion.org/journals/?tx_t3blog_pi1[blogList][showUid]=17
- [11] R. Kirby, Comparative Prices of Math Journals, 1997, http://math.berkeley.edu/~kirby/journals.html
- [12] R. Kirby, Fleeced?, Notices of the American Mathematical Society 51 (2004), 181.
- [13] W. Neumann, What we can do about journal pricing, 2005, http://www.math.columbia.edu/~neumann/journal.html
- [14] P. Olver, Journals in flux, Notices of the American Mathematical Society 58 (2011), 1124-1126

Remerciements. La traduction française du texte « The cost of knowledge » a été faite collectivement par Corinne Blondel, Marc Chardin, Marie Farge, Vincent Lafforgue, Bernard Teissier et Marie-France Vignéras.

L'Appel pour des négociations équilibrées avec les éditeurs de revues scientifiques

Benoît Kloeckner¹

Ce texte est un témoignage personnel concernant l'« Appel pour des négociations équilibrées avec les éditeurs de revues scientifiques » (que je nommerai pour simplifier l'Appel) lancé en janvier; j'aimerais expliquer à la fois ce qui m'a amené à participer à cette action, quelles conséquences elle me semble avoir eu, et ce que nous pouvons faire de plus à présent.

Fin 2011, en tant que coresponsable scientifique de la bibliothèque de mathématiques de l'Institut Fourier, j'ai été amené à choisir des titres Springer dont nous pourrions nous désabonner. L'objectif était de réduire au maximum notre budget auprès de cet éditeur, au moment où le RNBM (réseau national des bibliothèques de mathématiques) négociait aux côtés du CNRS, de l'INRIA et du consortium Couperin le renouvellement du contrat nous liant à lui.

L'exercice était très contraint, puisque la majorité de nos titres Springer sont « gagés », c'est-à-dire que suivant les termes du contrat qui s'achevait, nous ne pouvions nous en désabonner que si nous compensions par de nouveaux abonnements d'un montant au moins égal. En sélectionnant les titres non gagés qui me semblaient dispensables, je me suis rendu compte que nous aurions eu une grande marge d'économie si nous avions pu nous désabonner librement. Avec Francesca Leinardi, directrice de la bibliothèque, nous avons même réalisé que sans cette marge de manœuvre nous étions extrêmement dépendants du financement que nous octroie notre université en continuation de l'ancien PPF, et qui est menacé chaque année. Si ce financement venait à disparaître, et si le nouveau contrat avec Springer était semblable au précédent, alors nous serions contraints de nous désabonner de presque tous les abonnements en dehors des revues Springer. Les échos que nous avions des négociations confirmaient que nous risquions de rester engagés auprès de Springer pour un montant qui nous semblait, et nous semble toujours, excessif. À ce moment, il nous est apparu clairement qu'il fallait faire quelque chose pour reprendre la main sur notre politique d'abonnement.

Avec le soutien actif de Gérard Besson, directeur du laboratoire, nous avons lancé une discussion sur ce sujet sur différentes listes de diffusion. Les avis étaient relativement unanimes, mais le besoin d'une action ciblée et concrète pour canaliser ce consensus est vite devenu évident. C'est ainsi que nous avons été amenés à proposer en conseil de laboratoire que l'institut Fourier initie l'Appel. On trouvera plus haut dans ce numéro de la *Gazette*, le texte qui a été retenu après de nombreux amendements au sein du laboratoire comme à l'extérieur.

La décision de cibler Springer était avant tout une question d'opportunité : bien d'autres éditeurs commerciaux pratiquent les mêmes abus, mais notre espoir était d'influer concrètement sur les négociations en cours.

Lancé début janvier, l'Appel a assez vite rassemblé un nombre de signatures important relativement à la taille de la communauté mathématique. Il a diffusé un peu au-delà (en particulier en informatique et en physique), mais nous n'avions

¹ Université Grenoble 1, UMR 5582, Saint Martin d'Hères, France.

pas vraiment les moyens d'assurer une diffusion réellement large sur l'ensemble des disciplines académiques. Aujourd'hui, il a été signé par plus de 1700 personnes, une trentaine de laboratoires, et les trois sociétés savantes françaises de mathématiques (SMAI, SFdS, SMF).

Springer s'est ému de cette initiative, et une rencontre entre des représentants de la maison d'éditions, Bernard Teissier pour le RNBM et Gérard Besson pour l'Institut Fourier a eu lieu afin de clarifier le contentieux. Il s'en est suivi une lettre de réponse de Springer, et d'autres réunions semblables devraient suivre. Au niveau de la négociation elle-même, des progrès ont été consentis par Springer sur le montant de l'augmentation annuelle mais le principe du renouvellement du chiffre d'affaire avec impossibilité de réduire les abonnements et les coûts est toujours d'actualité. Ainsi la bibliothèque de l'Institut Fourier sera probablement tenue par la signature de ses tutelles à verser à Springer plus de 50000 euros par an pour les trois prochaines années, sachant qu'au prix publique, en se restreignant mais sans perdre de revues essentielles, nous pourrions facilement économiser 30% de cette somme.

Toutefois, je ne pense pas qu'on puisse déjà dire que l'Appel est un échec. Il a permis de mesurer la colère accumulée contre un système que nous faisons nousmême vivre en soumettant nos articles, en rapportant ceux de nos collègues, et en participant aux comités de rédaction. L'histoire a montré qu'un comité éditorial en désaccord avec la politique commerciale de sa maison d'édition peut décider de transférer sa revue chez un éditeur académique, aux pratiques compatibles avec les budgets des bibliothèques. Si quelques revues clé suivaient l'exemple de Topology, le paysage commencerait déjà à changer.

On peut même aller plus loin, comme le prouvent les nombreuses initiatives qui voient le jour, souvent dans d'autres disciplines : la physique des hautes énergies est en train de se munir d'une plate-forme de publication en accès ouvert, financée par l'argent des bibliothèques libéré par l'arrêt des abonnements (SCOAP3); en biologie et médecine notamment, des revues payées par les financements de recherche des auteurs se sont développées à une vitesse impressionnante (Public Library of Science); des débats sur des modes alternatifs de publication et d'évaluation des articles fleurissent (math2.0 http://publishing.mathforge.org/); des platesformes de publication à moindre coût commencent à être envisagées.

On peut ne pas être convaincu par l'une ou l'autre de ces initiatives, et l'avenir nous dira lesquelles emporteront l'adhésion de la communauté scientifique. Mais on ne peut pas continuer à blâmer des maisons d'édition commerciales qui font leur travail, à savoir du commerce, et prétendre que nous ne pouvons rien faire. L'avenir de la publication scientifique est entre nos mains, et entre l'investissement personnel dans la question – j'en profite pour rappeler que le RNBM cherche des mathématiciens et mathématiciennes pour participer à son bureau – et le simple choix des revues où l'on soumet et pour lesquelles on travaille, chacun peut participer à forger cet avenir.

La position de la SMF

Le RNBM, le CNRS, Couperin et l'INRIA participent à des discussions difficiles avec Springer. Le Conseil d'Administration de la SMF a délibéré le 21 janvier 2012 sur ces questions. Une pétition « Appel pour des négociations équilibrées avec les éditeurs de revues scientifiques » a été lancée par le Laboratoire Fourier de Grenoble qui a recueilli déjà plus de mille signatures¹.

Le Conseil d'Administration de la SMF a mandaté son président pour signer la pétition au nom de la SMF. Il a invité aussi tous les adhérents à signer cette pétition individuellement. Un grand nombre de signatures renforcera sûrement la position des négociateurs.

Le texte ci-dessous a été voté par le Conseil d'Administration de la SMF du 21 janvier 2012.

« La SMF s'est associée par la voix de son bureau le 16 décembre 2011 aux inquiétudes soulevées au sein des laboratoires, des bibliothèques et des UMS de mathématiques par le processus actuellement en cours de renégociation avec les éditeurs commerciaux de contrats de documentation, en demandant de privilégier une ligne de décision collective sous l'égide de l'INSMI. Le CA de la SMF a depuis débattu plus généralement lors de sa réunion du 21 janvier 2012 des questions de publication et de documentation primordiales pour les mathématiciens.

Le passage des publications scientifiques à un système purement électronique (dit e-only) est en soi un changement structurel radical, qui, s'il paraît peu évitable à moyen terme, ne doit pas se faire à marche forcée. La communauté mathématique ne dispose pas actuellement des infrastructures de conservation ni de récupération des données électroniques. S'il s'accompagne de la part des éditeurs commerciaux de politiques d'augmentation contractuelle automatique des prix bien supérieure à l'inflation, incluant des achats de bouquets de revues groupées et instituant un chiffre d'affaires prédéterminé, ce système constituera un danger d'une exceptionnelle gravité pour le développement des mathématiques. L'importance de garantir aux bibliothèques le financement d'ouvrages et de documentation à destination des étudiants doit être soulignée. En l'état, le nouveau système envisagé ne permet pas sa pérennité, repose sur un archivage incertain et ne propose pas de politique d'accès facile aux archives électroniques. La structuration de ces archives, basée sur une entraide entre bibliothèques doit préalablement être mise en place par le RNBM, en accord avec les bibliothécaires et les responsables scientifiques des bibliothèques.

De plus, la SMF s'inquiète de la mise en place de classements de revues. Leur utilisation engendre des confusions multiples, entre le nombre de citations d'un article et son intérêt propre, le nombre moyen de citations des articles d'une revue et le nombre de citations d'un article précis, etc. Les classements en catégories ou par rangs sont également dangereux. S'y ajoute le risque d'augmentation exagérée du prix d'une revue bien classée dans un but purement lucratif. Les deux tendances qui

Voir plus haut dans ce numéro, le texte de la pétition.

voient le jour pour combattre cette notion de classement, à savoir la multiplication des classements pour en diluer l'effet, ou l'établissement d'un classement qui serait officiel dans un sens à déterminer, ne rassurent pas. Enfin, la SMF réaffirme son hostilité au système auteur-payeur.

La Société Mathématique de France demande :

- au CNRS et au MESR de se saisir du problème de l'archivage;
- à la communauté mathématique de privilégier la publication dans des revues académiques. »

La réponse de Springer

Communiqué à l'attention de la communauté mathématique française

« Springer est tout à fait sensible à la pétition de la communauté mathématique française. Ainsi nous avons intensifié notre dialogue, à travers une série de réunions, avec les représentants du RNBM, de la SMF et de la SMAI. Ces entretiens ont porté essentiellement sur les problèmes budgétaires actuels des bibliothèques françaises et leur contexte plus général, et nous nous sommes engagés à poursuivre et à approfondir ces échanges dans les mois à venir.

Nous avons également décidé d'un commun accord que Springer envisagera d'autres modèles pour le sous-regroupement des publications et contenus destinés à la communauté mathématique française. À cette fin, nous prévoyons de mettre sur pied un petit groupe de réflexion, comprenant des membres de chacune des parties concernées. Springer a assuré les mathématiciens que, indépendamment de l'aboutissement de notre contrat, l'accès à tous les contenus archivés jusque fin 2011 sera maintenu. Nous avons bon espoir que ce nouveau dialogue contribuera, à l'avenir, à une meilleure compréhension entre nous, et que nos négociations actuelles avec le consortium se concluront d'une manière mutuellement bénéfique. »

Heinz Weinheimer - Executive Vice-President, Mathematics/Business & Economics/Human Sciences

Syed HASAN - President, Global Academic and Government Sales

Joachim Heinze - Executive Vice-President, Mathematical Sciences

Catriona Byrne - Editorial Director, Mathematics

Dagmar LAGING -Vice-President, Library Sales Southern Europe

CARNET

Torsten Ekedahl, mathématicien suédois né en 1955, est décédé soudainement le 23 novembre 2011 à Stockholm. Professeur à l'université de Stockholm depuis 1988, il était également membre de l'Académie suédoise des sciences depuis 1990. Son domaine de prédilection était la géométrie algébrique, et il était connu pour posséder une grande culture générale qui dépassait largement la frontière des

La Gazette a souhaité lui rendre hommage en publiant ce texte de Luc Illusie, dont la traduction en suédois (par Per-Anders Ivert) est parue dans le numéro de décembre 2011 du SMS (Svenska Matematikersamfundet) Bulletinen. Nous remercions Per-Anders Ivert pour nous avoir donné l'autorisation de publier ce texte dans sa version originale.

Torsten Ekedahl: quelques souvenirs

Luc Illusie

Vers la fin de l'été 1980, je reçus une lettre étonnante. Son auteur, un certain Torsten Ekedahl, m'écrivait : « I have obtained some results on the slope spectral sequence, some of which are perhaps unknown to you (...) ». À l'époque, je travaillais à la rédaction d'un article en collaboration avec Michel Raynaud sur le complexe de de Rham-Witt¹. Certains des résultats présentés par Ekedahl m'étaient connus, mais démontrés d'une façon plus courte et plus élégante. D'autres, que j'espérais, mais qui avaient résisté à toutes mes tentatives, étaient prouvés avec la même aisance. Peu de temps après, dans une nouvelle lettre, Ekedahl m'expliquait la



solution d'un problème dont la formulation même me paraissait inextricable : la dualité dans la cohomologie du complexe de de Rham-Witt. Là encore, la méthode était très naturelle, et la démonstration qu'il esquissait, très convaincante. Ce fut le début d'une correspondance passionnante. Ce n'est que plus tard, lorsqu'Ekedahl vint à Orsay pour y finir la préparation de sa thèse, que j'appris comment ce jeune étudiant - il avait 25 ans - s'était pris d'intérêt pour cette théorie sophistiquée et

L. Illusie et M. Raynaud, Les suites spectrales associées au complexe de de Rham-Witt, Publ. math. IHÉS 57 (1983), 73-212.

88 L. ILLUSIE

bien mystérieuse alors (et qui l'est d'ailleurs restée aujourd'hui). En juillet 1978, il était en vacances en Bretagne. Il entend parler d'une conférence, qui se tenait à Rennes, les *Journées de géométrie algébrique*². Par curiosité, il entre dans la salle, et écoute l'exposé : j'y parlais du complexe de de Rham-Witt et de ses relations avec la cohomologie cristalline. Emballé, il décide de travailler sur ce sujet. Mais il ne prit pas contact avec moi, et je n'en sus rien.

L'année de son séjour à Orsay, 1981-82, a été l'une des plus enrichissantes de ma carrière. Je l'aidais dans la rédaction de sa thèse, et lui posais des questions. Nous nous voyions pratiquement tous les jours. Il résolvait mes questions au fur et à mesure, et lançait constamment de nouvelles idées. J'étais en principe son patron, en réalité, j'avais plutôt l'impression d'être son élève. Les formules de Künneth, dans la théorie de de Rham-Witt, semblaient encore plus inaccessibles que la dualité. Un jeu d'enfant pour lui. À l'automne 1982 se tenait une conférence de géométrie algébrique au Japon³. J'y fis un exposé de deux heures sur ses travaux. Et puis, ce fut cette mémorable soutenance de thèse, à Göteborg, en 1983. J'y jouais le rôle de l'opponent. Pour tenter de l'embarrasser, je l'interrogeais sur des questions de signes et compatibilités de diagrammes. Peine perdue. Le soir, chez lui, dans sa famille, nous arrosâmes dignement l'événement, avec un tord-boyaux maison.

Nous nous sommes revus souvent depuis, surtout dans les années 80 et 90. Il s'était rapidement tourné vers d'autres sujets : surfaces, feuilletages, espaces de modules, y apportant chaque fois l'étincelle de son génie. De ses qualités, je retiendrais sa gentillesse, sa modestie, sa générosité, la façon directe, décantée, digne de Bourbaki, d'aborder les problèmes, et en même temps, le don de voir les choses d'une autre façon, de « penser à côté », comme disait Hadamard. Combien de fois nous sommes-nous téléphoné! J'entends encore sa voix, lorsqu'il décrochait : « Torsten! ». Commençait alors, en français, langue qu'il maîtrisait parfaitement, une riche et stimulante conversation.

Adieu, Torsten.

² Journées de Géométrie Algébrique de Rennes, I, II, III, éds. P. Berthelot, L. Breen, Astérisque 63, 64, 65, SMF, 1979.

³ Algebraic Geometry, Proceedings Tokyo/Kyoto 1982, Eds. M. Raynaud, T. Shioda, Lecture Notes in Mathematics 1016, Springer-Verlag, 1983.

EN HOMMAGE À GÉRARD RAUZY

Il y a tout juste un an Gérard Rauzy nous quittait. La Gazette publie ci-dessous trois textes qui lui sont consacrés. Le premier a été prononcé à ses obsèques par J.-C. Risset, le deuxième est une page de souvenirs personnels par Y. Meyer, et le dernier, par P. Liardet, est la traduction d'un texte à paraître dans la revue Uniform Distribution Theory.

Gérard Rauzy

Jean-Claude Risset¹

Je voudrais évoquer Gérard Rauzy, unanimement regretté. Quelques amis proches qui ne peuvent être ici aujourd'hui m'ont témoigné de leur admiration à son œuvre scientifique, mais aussi de leur attachement à sa personnalité riche et passionnée.

Gérard était un mathématicien de haute volée, qui avait son propre cheminement, avec parfois des raccourcis saisissants. Les mathématiques étaient pour lui un défi et un plaisir. Son domaine de prédilection était la théorie des nombres, un domaine qui peut paraître théorique, spéculatif et éloigné de la réalité : mais, comme le dit son collègue et ami Yves Meyer, ses recherches ont explosé lorsqu'il a relié ses travaux à l'étude des systèmes dynamiques – tout ce qui évolue est un système dynamique, depuis le devenir des étoiles et des planètes jusqu'au temps qu'il fait. Pour son $60^{\rm e}$ anniversaire, ses collègues lui ont dédié une conférence au joli titre : « Systèmes dynamiques – du cristal au chaos ».

Gérard était friand d'une mathématique sensible, s'appliquant avec pertinence dans notre monde quotidien. Il voyait dans l'informatique une nouvelle frontière des mathématiques. Il a été un des grands promoteurs des mathématiques « discrètes » – terme distingué pour qualifier ce qui est discontinu : ce sont ces mathématiques discrètes qui sont à l'œuvre dans les disques compacts, sur lesquels les sons sont enregistrés sous forme d'une suite de nombres. Et Gérard avait des idées de structures mathématiques susceptibles de s'appliquer à toutes sortes de circonstances, depuis des automates, auxquels Tom Johnson et Jean-Paul Allouche ont fait composer de la musique, jusqu'à des idées d'emboîtement pouvant, qui sait, renouveler mosaïques et tomettes : sur Internet, on trouve de nombreuses références aux fractals de Rauzy, qui permettent de réaliser d'extraordinaires pavages, lesquels peuvent même occuper l'espace.

Mathématicien éminent, Gérard a été le directeur du premier Institut CNRS de mathématiques, créé à Luminy en 1992. Il est l'auteur d'une liste impressionnante

¹ Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS, Marseille.

90 J.-C. RISSET

d'articles scientifiques, et ses contributions sont remarquables. Le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, les graphes de Rauzy, l'induction de Rauzy sont utilisés dans le monde entier. Gérard a été invité à enseigner au Japon et aux États-Unis, et il a inspiré de nombreux chercheurs en leur faisant aimer sa discipline.

Comme Yves Meyer et Yves Hellegouarch, j'ai connu et apprécié Gérard à l'École normale de la rue d'Ulm. Gérard ne se livrait pas tout de suite et pouvait paraître taciturne, mais il s'animait remarquablement suivant les circonstances. Lors d'un des premiers cours, Jean-Pierre Serre, mathématicien connu qui faisait son cours sans notes, a eu un trou lors d'une démonstration mathématique. Gérard est intervenu de sa voix posée pour proposer une démarche complètement originale vers la démonstration : Serre a été vivement impressionné, comme chacun d'entre nous.

Mais l'univers de Gérard n'était nullement limité aux mathématiques. Yves Meyer rappelle que dès 1957 il aimait à porter un blouson noir : il a peut-être inspiré les « rockers » mauvais garçons de Bandol! Il pratiquait lui-même la pelote basque, mais il venait parfois en supporter enthousiaste aux matches de rugby des copains. À l'occasion, il était joyeux et plein d'humour.

Gérard avait une conscience politique personnelle, exigeante et généreuse. À l'École normale il prenait parti pour l'unité syndicale, pour le trotskysme et contre le stalinisme : il insistait qu'une révolution ou un système social ne pouvait aller jusqu'à la perfection du bonheur. Au moment de la guerre d'Algérie, il a contribué à protéger les scientifiques engagés pour la paix qui étaient menacés par l'OAS. Il a été proche de Cornelius Castoriadis, fondateur avec Claude Lefort du mouvement Socialisme et barbarie. Mai 1968 a compté pour lui – mais de cette période je ne puis témoigner, étant alors à l'étranger.

Gérard a grandi au vallon des Auffes. Homme libre, il a bien sûr chéri la mer. La cybernétique est l'art du timonier : avec Claire, Gérard a fait des croisières en Méditerranée sur un beau voilier.

Gérard faisait tout de manière généreuse, voire excessive. Il avait le goût des bonnes choses, de la cuisine ayant un accent – comme était celle du restaurant Arnoult. À ma première venue à Marseille, il m'a convié à déjeuner dans son jardin sous les pins du Roy d'Espagne : j'y habite depuis. Gérard était convivial, préparant parfois lui-même des plats comme les supions à l'encre pour des réunions amicales chaleureuses. Il a accueilli beaucoup d'amis : en ont témoigné notamment Yves Hellegouarch et Yves Meyer, lequel narre une anecdote :

« Anne et moi avons fait avec lui de merveilleuses promenades. Une fois, Claire, Gérard, Antoine, Stéphane, Anne et moi étions partis à l'aventure dans les calanques, sans emporter de quoi manger. Nous avions commencé cette excursion à midi. Nous nous perdîmes. À deux heures de l'après-midi tout le monde mourait de faim et nous étions toujours là-haut, dans un désert de pierre inondé de lumière. Nous avions à nos pieds du thym à profusion et nous rêvions d'une côtelette de mouton grillée avec ce thym. Et soudain, tout en bas, minuscule, presque invisible, dans le fond d'une sorte de gorge, une fumée, un restaurant. La seule façon de descendre était un éboulis. Qu'à cela ne tienne! Nous avons dévalé avec les pierres et, une demi-heure plus tard, nous étions attablés et commencions le repas par un pastis. Aujourd'hui je soupçonne Gérard d'avoir tout réglé à l'avance. »

Depuis deux ans, Gérard était atteint d'un mal implacable auquel se sont ajoutées de malencontreuses fractures. Geneviève et Evelyne l'ont aidé et accompagné jusqu'au bout dans cette période difficile, mais pendant laquelle, heureusement, Gérard n'a pas paru souffrir ni perdre le moral.

À ses fils, Antoine et Stéphane, qui ont tous deux accompli de brillants travaux scientifiques (Antoine en mathématique et informatique, Stéphane en astrophysique – il travaille aujourd'hui en informatique), à Geneviève, à Evelyne, j'exprime toute la sympathie des amis de Gérard, dont bien sûr celle de Rozenn et la mienne, et je tiens à dire que nous garderons de lui le vif souvenir d'une personne intense, créative et cordiale.

Souvenirs de Rauzy

Yves Meyer

Rauzy et moi étions déjà des bons camarades à l'École. Il portait alors un blouson noir : il aimait ainsi avoir l'air d'un mauvais garçon. À l'époque les voyous parisiens portaient des blousons noirs et s'appelaient, pour cette raison, « les blousons noirs ». Un jour, dans l'un de ces restaurants bon marché que nous aimions, Rauzy interpella le serveur et, lui montrant le pot de moutarde, lui dit : « Garçon, votre yaourt n'est pas frais ». J'étais bon public et j'admirais sans réserve l'humour de Rauzy. Nous sommes devenus de vrais amis dans les années qui suivirent. Nous faisions tous les deux de la théorie des nombres. À cette époque mes travaux de recherche s'orientaient vers ce qui deviendrait la théorie des quasi-cristaux. Chemin faisant j'avais réussi à démontrer l'existence d'une suite croissante d'entiers n_k telle que pour tout nombre réel α , la suite αn_k soit équirépartie modulo 1 si et seulement si α est transcendant. En 1970 Rauzy pulvérisa ce résultat en caractérisant les ensembles normaux. J'étais émerveillé. J'ai ensuite abandonné mes recherches sur la répartition modulo 1 alors que les découvertes de Rauzy explosèrent quand il relia ses travaux en théorie des nombres à l'étude des systèmes dynamiques (suites automatiques, itérations). Rauzy avait épousé Claire qui était merveilleusement frondeuse, anarchique et généreuse. Claire et Gérard aimaient séduire, vivre follement et intensément; ils étaient libres et irrespectueux. J'étais subjugué. Gérard et Claire eurent deux garçons, Antoine et Stéphane. Rauzy s'était installé à Marseille. Je l'y ai souvent revu. Anne et moi avons fait avec lui de merveilleuses promenades. Une fois, Claire, Gérard, Antoine, Stéphane, Anne et moi étions partis à l'aventure dans les calanques, sans emporter de quoi manger. Nous avions commencé cette excursion à midi. Nous nous perdîmes. À deux heures de l'après-midi tout le monde mourait de faim et nous étions toujours là-haut, dans un désert de pierre inondé de lumière. Nous avions à nos pieds du thym à profusion et nous rêvions d'une côtelette de mouton grillée avec ce thym. Et soudain, tout en bas, minuscule, presque invisible, dans le fond d'une sorte de gorge, une fumée, un restaurant. La seule façon de descendre était un éboulis. Qu'à cela ne tienne! Nous avons dévalé, dégringolant avec les pierres et, une demi-heure plus tard, nous étions attablés et commencions le repas par un pastis. Aujourd'hui je soupçonne Gérard d'avoir tout 92 P. LIARDET

réglé à l'avance. Un autre souvenir merveilleux m'a été raconté par Yvette Amice qui fut une grande amie de Rauzy. Elle était invitée chez eux, au Roy d'Espagne, une belle résidence dans les pins, tout près des calanques. Rauzy avait bien bu au dîner et s'était lancé dans un long discours politique. Mais Yvette, Claire et les enfants épuisés étaient allés se coucher. Rauzy qui avait besoin d'un interlocuteur s'est alors adressé au cochon d'Inde des enfants et a continué devant ce public, réduit à un hamster, sa démonstration des bienfaits du trotskisme. J'ai gardé une lettre de Rauzy qu'il termina en s'amusant à faire une traduction automatique de l'anglais au français, ce qui donnait : « mes meilleurs regards sur ta femme ». Rauzy faisait tout de façon généreuse et excessive. Il buvait avec passion. Il fumait sans cesse. Rauzy et Claire avaient acheté un beau voilier et faisaient des croisières en Méditerranée. Claire est morte en 1996 d'un arrêt cardiaque à bord de ce voilier, en pleine traversée. J'ai tant aimé Claire et Gérard. Ils vivent en moi.

Gérard Rauzy

(1938 - 2010)

Pierre Liardet¹

Gérard Rauzy est né le 29 mai 1938 à Paris. Professeur émérite de l'université Aix-Marseille II, il est décédé à Marseille le 4 mai 2010. Mathématicien inventif et subtil, connu pour ses travaux en équirépartition modulo un et en théorie ergodique des nombres, notamment sur les systèmes dynamiques associés à des substitutions ou encore à des numérations généralisées, les unes issues de certains nombres algébriques et d'échange de morceaux (structures fractales dites de Rauzy), les autres provenant de substitutions



ou de systèmes induits. La photo ci-contre a été prise par C. Radoux au colloque *Nombres et suites.* . . organisé par l'équipe de théorie des nombres de Saint-Étienne (22-24 avril 2001). Le texte qui suit est la traduction de celui qui accompagne le volume spécial édité par le journal *Uniform Distribution Theory*² (Vol. 7, fasc. 1 et 2 (2012)) en hommage à G. Rauzy. Il évoque sa jeunesse et retrace son œuvre.

Gérard débute ses études primaires à Paris, puis sa famille se déplace à Marseille. Le jeune garçon est alors admis en cinquième avec deux ans d'avance dans le célèbre Lycée Thiers de la cité phocéenne. Il est brillant en mathématiques,

Université d'Aix-Marseille.

Journal en accès libre à l'url http://udt.mat.savba.sk/

en physique, en sciences naturelles, enfin dans toutes les matières à l'exception de l'histoire et la géographie avec des notes catastrophiques. Il a tout juste 16 ans lorsqu'il passe son Baccalauréat Math'élem. Après ses classes préparatoires à Thiers, il réussit le concours d'entrée à l'École Normale Supérieure de Paris, rue d'Ulm (promotion 1957). Le jeune normalien consacre sa troisième année à préparer et passer l'agrégation de mathématiques (1960). Il obtient dans la foulée son diplôme de mathématiques approfondies en théorie des nombres, avec un remarquable mémoire sur les approximations diophantiennes [1], sous la direction de C. Pisot et R. Salem. Dans le même temps, il participe au *Séminaire de théorie des nombres* de Paris, créé en 1959 par Charles Pisot, Hubert Delange et Georges Poitou. Son premier exposé [2] de séminaire prépare le terrain pour un second, consacré aux séries *L* et le théorème de Dirichlet sur la densité des nombres premiers en progressions arithmétiques [3]. Il fréquente activement les séminaires parisiens avec des exposés sur l'approximation diophantienne [4], les équations diophantiennes exponentielles [5] et la transcendence [6].

En 1963, G. Rauzy s'intéresse aux suites d'entiers satisfaisant à des récurrences linéaires dont il étudie la périodicité modulo un entier [7]. Il concentre ensuite son attention sur le problème général suivant : lorsqu'une propriété P(n) vérifiée par tous les nombres entiers naturels implique une autre propriété, cette dernière estelle encore vraie si P(n) n'est vérifiée que pour les entiers n d'un sous-ensemble strict, mais relativement conséquent, de l'ensemble $\mathbf N$ des entiers naturels? Pour aborder ce programme, G. Rauzy introduit la notion de $fréquence \ \alpha(J)$ pour toute partie J de $\mathbf N$. Par définition, $\alpha(J)$ est la borne supérieure (éventuellement infinie) de l'ensemble des nombres réels $A \ge 1$ tels que, pour tout $x_0 > 0$, il existe un entier $x, x > x_0$, pour lequel tous les entiers de l'intervalle [x, Ax[appartiennent à J. Il obtient un nombre impressionnant de résultats liés à cette définition [8, 9, 10, 11] et rassemblés dans sa thèse d'État [12] écrite sous la direction de Charles Pisot et soutenue en 1965. Donnons deux retombées significatives de ce travail.

- Généralisation d'un résultat classique de G. Pólya : supposons que f soit une fonction entière telle que $\sup_{0\leq \theta<2\pi}\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{r}\log|f(re^{i\theta})|<\log 2$. Si $f(J)\subset \mathbf{N}$ pour un sous-ensemble J de \mathbf{N} tel que $\alpha(J)=\infty$, alors f est un polynôme.
- Généralisation de résultats de C. Pisot et de R. Salem : soit θ un nombre algébrique réel strictement plus grand que 1. Il existe un sous-ensemble J de ${\bf N}$ avec $\alpha(J)=\infty$ et un nombre réel $\lambda\neq 0$ tels que

$$\overline{\lim}_{n\in J} \|\lambda \theta^n\| = 0$$

(où $||x|| = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - k|$) si, et seulement si, θ est un nombre de Pisot ou de Salem. Le cas où $\alpha(J) > 1$ mais avec λ algébrique implique que θ est un nombre de Pisot et $\lambda \in \mathbb{Q}(\theta)$.

De 1965 à 1967, G. Rauzy occupe un poste de « Maître de Conférences » (cette dénomination était à l'époque l'équivalent de la notion actuelle de Professeur de deuxième classe) à la Faculté des Sciences de Lille. Il est ensuite recruté comme Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille puis rejoint, à partir de 1971, l'université Aix-Marseille II qui vient tout juste d'être créée. Par la suite il jouera un rôle important dans le processus de création du *Centre International de Rencontres Mathématiques* (1981) et un peu plus tard dans la mise en place de l'unité propre

94 P. LIARDET

du CNRS en mathématiques discrètes (1992) dont il sera le premier directeur. Après 1995, cette unité élargira considérablement ses domaines de recherche pour devenir l'*Institut de Mathématiques de Luminy*.

Arrivé à Marseille en 1967, G. Rauzy donne immédiatement une forte impulsion à la recherche par l'intermédiaire du Séminaire de Théorie des Nombres local, créé par André et Christiane Blanchard. C'est à cette époque qu'il s'intéresse plus particulièrement à deux nouveaux sujets de recherche. Le premier concerne une classe de fonctions méromorphes stables sur certains ensembles de nombres algébriques [14, 15, 18]. Plus précisément, il s'agit de déterminer des ensembles de nombres algébriques E tels que, si une fonction f méromorphe à l'infini est telle que f(n) soit dans E pour tout entier n assez grand alors elle est algébrique et même mieux, appartient à une classe pré-désignée de fonctions algébriques. Lorsque f est déjà algébrique, un exemple typique de résultat³ est le suivant : si P(X, Y) est un polynôme en deux variables à coefficients rationnels tel que pour tout nombre de Pisot α une des racines du polynôme $P(\alpha, Y)$ est aussi un nombre de Pisot alors, soit $P(X, \theta) = 0$ pour un nombre de Pisot θ , soit il existe un entier $m \ge 1$ tel que $X^m - Y$ divise P(X, Y). Le second sujet de recherche porte sur l'équirépartition, un domaine de recherche où les contributions de G. Rauzy sont particulièrement originales et profondes, mettant en œuvre des constructions ingénieuses ainsi que des outils mathématiques variés, ouvrant de nouveaux champs d'investigations. Voyons quelques-uns de ses résultats. Pour cela, nous ferons usage de définitions et théorèmes classiques en équirépartition modulo un. Le lecteur intéressé, mais peu familiarisé avec cette théorie, est invité à consulter les trois principales monographies sur le sujet⁴. Nous recommandons aussi la lecture du petit livre de G. Rauzy, tout aussi original que fascinant [29], publié en 1976, qui expose les résultats classiques sur l'équirépartition modulo un et dresse un cadre général pour de futurs développements.

En 1968, Michel Mendès France introduit la notion d'ensemble normal 5 et pose le problème de caractériser naturellement ces ensembles. Rappelons qu'un ensemble E de nombres réels est dit normal s'il existe une suite de nombres réels $\Lambda=(\lambda_k)_k$ telle que x appartient à E si, et seulement si, la suite $x\Lambda$ est équirépartie modulo un. Le cas où E est un sous-ensemble de $\mathbf Z$ est rapidement résolu par E. Dress et E M. Mendès France E. En introduisant une construction ingénieuse par blocs, E G. Rauzy montre tout d'abord que E0 est normal E1 et presque en même temps (voir [16]) montre qu'un ensemble normal E2 est caractérisé par les deux conditions suivantes :

```
(i) 0 \notin E et qE \subset E pour tout entier rationnel q non nul;

(ii) il existe une suite d'applications continues f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R} telle que E = \{x \in \mathbf{R} : \lim_n f_n(x) = 0\}.
```

Exposé au Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux, 1968-69, non publié.

⁴ Uniform Distribution of Sequences par L. Kuipers and H. Niederreiter, John Wiley and Sons Inc. (1974); Sequences, Discrepancies and Applications par M. Drmota et R. Tichy, Springer-Verlag Berlin (1997); Distribution of Sequences: A Sampler par O. Strauch et S. Porubsky, Peter Lang Pub. Inc. (2005).

⁵ Séminaire DPP, Théorie des Nombres, t. 9, N° 2 (1967–1968), exp. N° 16, p. 1–4.

⁶ Séminaire DPP, Théorie des Nombres, t. 10, N° 2 (1968–1969), exp. N° 17 p. 1–5.

La méthode de construction de suites par blocs est aussi la pierre angulaire utilisée dans [27] pour construire une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels, complètement équirépartie modulo un avec la surprenante propriété d'être de basse discrépance. Plus précisément

$$\limsup_{N} ND_{N}^{*}(u)/\log N \leq 1/\log 2$$

où $D_N^*(u) := \sup_{0 \le a < 1} \left| \frac{1}{N} \operatorname{card} \{ 0 \le n < N \; ; \; 0 \le u_n < a \} - a \right|$ est la discrépance à l'origine au rang N de la suite u.

Revenons aux ensembles normaux. Il est facile de démontrer que \mathbf{R}^* est normal, par exemple avec une suite $(k^c)_k$ (c>0 distinct d'un entier). Un problème intéressant est alors de considérer des suites *naturelles* qui croissent plus vite que tout polynôme mais plus lentement que toute exponentielle. Dans [19, 20, 21, 23, 24], G. Rauzy étudie les suites de type $(f(n))_n$ où f est une fonction entière de croissance lente. Par exemple, il prouve dans [21] que si f n'est pas un polynôme et si $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$ avec

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log \log r} < 5/4$$

où $M(r):=\sup_{|z|\leq r}|f(z)|$, alors les suites $(\lambda f(k))_k$ $(\lambda\in\mathbf{R}^*)$ sont complètement équiréparties modulo un. La démonstration met en jeu les méthodes de Vinogradov pour estimer des sommes de Weyl rattachées à certaines approximations polynomiales de f.

Avec l'organisation à Marseille d'une conférence internationale sur la répartition uniforme [24], G. Rauzy commence l'étude de problèmes de stabilité en relation avec la distribution des suites et la notion d'indépendance statistique [22, 25, 26, 28]. Rappelons que deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ dans un espace métrisable compact X sont dites (statistiquement) *indépendantes* si pour toutes applications continues $f: X \to \mathbf{R}$ et $g: X \to \mathbf{R}$, on a

$$\lim_N \left(\frac{1}{N} \sum_{n < N} f(u_n) g(u_n) - \left(\frac{1}{N} \sum_{n < N} f(u_n) \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{n < N} g(u_n) \right) \right) = 0.$$

Nous sommes maintenant prêts pour énoncer un joli résultat qui met en évidence l'esprit créatif de G. Rauzy pour résoudre une question de M. Mendès France. Soit un entier r supérieur ou égal à 2 et soit B(r) l'ensemble des nombres réels normaux en base r. Après l'introduction de la notion de bruit supérieur d'un nombre réel $x=\sum_{n=0}^{\infty} c_n/r^{n+1}$ en base r comme étant la quantité

$$\beta(\mathbf{x}) = \limsup_{s \to \infty} \Big(\limsup_{N \to \infty} \Big(\inf_{Q \in E_{\mathbf{S}}} \frac{1}{N} \sum_{n < N} \inf\{1, |c_n - \varphi(c_{n+1}, \cdots, c_{n+s})|\} \Big) \Big)$$

où E_s désigne l'ensemble des applications de \mathbf{R}^s dans \mathbf{R} , \mathbf{G} . Rauzy montre dans [28] que $\gamma \in \mathbf{R}$ vérifie $\gamma + B(r) \subset B(r)$ si, et seulement si, le bruit supérieur de γ est nul. Un tel γ est aussi caractérisé en termes de systèmes dynamiques. Plus en détails, soit K_c la fermeture de l'orbite de $c := (c_0, c_1, c_n, \dots)$ suivant le décalage défini sur l'ensemble $\{0, 1, \dots, r-1\}^{\mathbf{N}}$ muni de la topologie produit. Alors, $\beta(\gamma) = 0$ signifie que l'entropie de toute mesure invariante par le décalage et de support dans K_c est nulle. En bref, c est déterministe pour le décalage. La notion de *bruit inférieur* est aussi introduite et les nombres normaux en base c sont alors exactement ceux

⁷ Séminaire DPP, Théorie des nombres (1973–74), exp. N° 7, 6 p.

96 P. LIARDET

ayant un bruit inférieur maximal (dans ce cas, bruit inférieur et bruit supérieur sont égaux à (r-1)/r).

Partant d'une substitution particulière π sur quatre lettres (explicitement $\pi(1)=142,\ \pi(2)=1422,\ \pi(3)=143342$ et $\pi(4)=14342$), G. Rauzy met en place dans un exposé au séminaire DPP [30], les idées et les principaux outils pour étudier les suites symboliques provenant de substitutions convenables σ sur un alphabet fini, ou de systèmes dynamiques en théorie des nombres. Cette approche implique des interactions entre : l'analyse combinatoire du langage d'un point fixe $u=u_0u_1u_2\cdots$ de σ ; la distribution des fréquences des lettres apparaissant dans u; l'ergodicité stricte du système dynamique construit à partir de u et le décalage; l'identification d'un tel système à un échange d'intervalles T ou à une transformation géométrique semblable; la reconstruction de u par le codage symbolique d'une orbite suivant T et une partition appropriée; le processus de renormalisation issu de transformations induites, etc.

Ce programme de recherche, stimulé par les travaux de J.-P. Conze, T. Kamae, M. Keane, M. Mendès France et W. Veech, conduit G. Rauzy à produire une série d'articles et de documents en rapport avec la théorie ergodique [27, 30, 31, 33, 35, 36, 44, 48, 52] ou impliquant des suites symboliques substitutives et leur complexité [37, 38, 40, 41, 43, 45, 50, 51, 52]. Voir aussi [47].

Une partie A d'un espace compact métrisable X est dite un ensemble à reste borné pour une suite donnée $(u_n)_{n\geq 0}$ de X si $\sup_N (card\{0\leq n< N; u_n\in A\}-aN)<+\infty$ pour un certain a. Le problème de trouver des ensembles à reste borné pour une suite telle que $n\mapsto n\alpha$ dans \mathbf{T}^d ($d\geq 2$) est étudié dans [44], mais l'idée maîtresse de ce travail était déjà en germe dans un article fondateur [40] qui met en évidence une relation essentielle entre le point fixe ω de la substitution $1\to 12,\ 2\to 13$ et $3\to 1$ et la distribution de suites $(n\eta)_n$ modulo \mathbf{Z}^2 où $\eta=(\eta_1,\eta_2)$ est un vecteur dans \mathbf{R}^2 tel que $\{1,\eta_1,\eta_2\}$ forme une base du \mathbf{Z} -module des entiers algébriques du corps cubique engendré par le nombre tribonacci θ (nombre de Pisot racine du polynôme X^3-X^2-X-1).

Les fractals de Rauzy apparaissent pour la première fois dans cet article. Ils sont constitués de trois ensembles, Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 , formant un morcellement $\mathcal M$ de \mathbb{R}^2 modulo \mathbb{Z}^2 , c'est-à-dire qu'ils vérifient les propriétés suivantes : (i) chaque Ω_i est ouvert, borné et connexe; (ii) les ensembles $\Omega_i + \mathbf{Z}^2$ sont mutuellement disjoints et leur union est dense dans \mathbb{R}^2 ; (iii) chaque Ω_i est disjoint de toute translation $\Omega_i + g$ par un vecteur $g \neq 0$ à coefficients entiers. Le principal résultat de [40] affirme l'existence d'un tel morcellement. Celui-ci permet d'identifier la translation $T: x \to x + \xi \pmod{\mathbf{Z}^2}$ (avec $\xi = (1/\theta, 1/\theta^2)$) à un échange de morceaux construit à partir des Ω_i (voir la figure 1, extraite de [40]). De plus, par construction, les Ω_i sont des ensembles à reste borné pour la suite $(T^n(0))_n$ et $\omega_n=k$ si, et seulement si, $T^n(0)\in\Omega_k$. En outre, le nombre de mots de longueur n apparaissant dans le point fixe ω est égal à p(n) = 2n + 1. Ce type de complexité du langage d'une suite symbolique ayant une dynamique associée minimale est exploré dans [41, 52]. Prévoyant des développements ultérieurs, G. Rauzy écrit dans l'introduction de [40] : le lecteur pourra constater que beaucoup de raisonnements s'étendent à des situations plus générales. Remarque qui pourrait s'appliquer à bien d'autres de ses résultats.

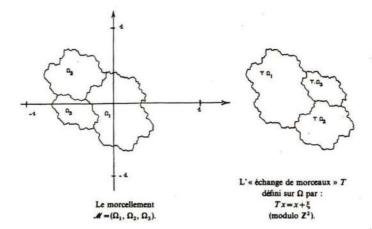


FIG. 1: Morcellement associé au nombre tribonacci θ et la translation T par $\xi = (1/\theta, 1/\theta^2)$ modulo ${\bf Z}^2$ qui réalise un échange de trois morceaux Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 aux frontières près.

G. Rauzy était attiré par les problèmes dans l'esprit de P. Erdős. L'article [54] traite d'ensembles de nombres entiers positifs qui ne contiennent pas trois termes en progression arithmétique. À l'opposé, l'article [55] construit une large famille de suites croissantes $(a_n)_{n\geq 1}$ d'entiers positifs pour chacune desquelles l'ensemble des sommes finies $\sum_{n\in F} \varepsilon_n a_n$, avec $\varepsilon_n\in\{0,1\}$, contient une progression arithmétique infinie.

Nous terminons ce court survol par la liste, en suivant l'ordre chronologique, des étudiants de Rauzy qui ont soutenu leur thèse sous sa direction : P. Liardet, A. Thomas, A. Cissé, E. Pouspourikas, C. Mauduit, Th. Tapsoba, P. Martinez, S. Fabre, P. Gonzalez, M.-L. Santini, P. Alessandri, L. Vuillon, N. Tchekhovaya, A. Messaoudi, and V. Canterini. Tous ont contribué à prolonger les travaux de leur Directeur dans diverses directions.

Nous remercions chaudement Evelyne Rauzy pour nous avoir communiqué des informations sur la vie privée de son frère, Jean-Paul Allouche pour ses encouragements et Jeffrey Shallit pour son aimable assistance dans la rédaction de la version anglaise.

Références

- RAUZY, G.: Approximation diophantienne des nombres algébriques, Faculté des Sciences de l'Université de Paris. Mathématiques approfondies. Théorie des nombres. 1960/61 Secrétariat mathématique, Paris, 60 p., 1961.
- [2] RAUZY, G.: Caractères sur les groupes abéliens finis. Caractères sur les classes de restes. Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, 2 (1960-1961), Exposé N° 3, 7 p.
- [3] RAUZY, G.: Les séries L et le théorème de Dirichlet. Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, 2 (1960-1961), Exposé N° 4, 9 p.
- [4] RAUZY, G.: Approximations diophantiennes linéaires homogènes. Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, 3 (1961-1962), Exposé N° 1, 18 p.

98 P. LIARDET

- [5] RAUZY, G. : Équations de la forme $\lambda \alpha^x \mu \beta^y = \nu$ aux inconnues x, y (entiers \geq 0). Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, **4** (1962-1963), Exposé N° 9, 13 p.
- [6] RAUZY, G.: Points transcendants sur les variétés de groupe. Séminaire Bourbaki, 16 (1963-1964), Exposé Nº 276, 8 p.
- [7] RAUZY, G.: Relations de récurrence modulo m. Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, 5 (1963-1964), Exposé N° 2, 10 p.
- [8] RAUZY, G.: Fonctions entières prenant des valeurs entières. Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, 6 n° 1 (1964-1965), Exposé N° 8, 10 p.
- [9] RAUZY, G.: Répartition modulo 1 pour des suites partielles d'entiers. Développements en série de Taylor donnés sur des suites partielles. C. R. Acad. Sci. Paris 258 (1964), 4881–4884.
- [10] RAUZY, G.: Fonctions entières prenant des valeurs entières sur des ensembles partiels d'entiers. C. R. Acad. Sci. Paris, 259 (1964), 19–21.
- [11] RAUZY, G.: Suites partiellement récurrentes. Ensembles partiels d'entiers. Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, 18 n° 1 (1964-1965), Exposé N° 13, 11 p.
- [12] RAUZY, G.: Suites partiellement récurrentes (applications à la répartition modulo 1 et aux propriétés arithmétiques des fonctions analytiques). Annales de l'institut Fourier, 16 n° 1 (1966), 159-234
- [13] RAUZY, G.: Ensembles arithmétiquement denses. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 265 (1967), A37–A38.
- [14] RAUZY, G.: Algébricité des fonctions méromorphes prenant certaines valeurs algébriques. Bull. Soc. Math. France, 96 (1968), 197-208.
- [15] RAUZY, G.: Transformations rationnelles pour lesquelles l'ensemble des nombres de Pisot-Vijayaraghavan est stable. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 268 (1969), A305–A307.
- [16] RAUZY, G.: Caractérisation des ensembles normaux. Bull. Soc. Math. France, 98 (1970), 401-414.
- [17] RAUZY, G.: Normalité de Q*. Acta Arith. 19 (1971), 43-47.
- [18] RAUZY, G.: Ensembles de nombres algébriques et transformations rationnelles. Colloque de Th. Nombres (1969, Bordeaux), Bull. Soc. math. France, Mémoire 25 (1971), 165–168.
- [19] RAUZY, G.: Croissance et répartition modulo 1. Séminaire de Théorie des Nombres 1971–1972, Univ. Bordeaux I, Talence (1972), Exp. N° 28, 9 p.
- [20] RAUZY, G.: Fonctions entières et répartition modulo 1. Bull. Soc. Math. France, 100 (1972), 409-415.
- [21] RAUZY, G.: Fonctions entières et répartition modulo un. II. Bull. Soc. Math. France, 101 (1973), 185-192.
- [22] RAUZY, G.: Étude de quelques ensembles de fonctions définis par des propriétés de moyenne. Séminaire de Théorie des Nombres, 1972–1973, Univ. Bordeaux I, Talence (1973), Exp. N° 20, 18 p.
- [23] RAUZY, G.: Fonctions entières et répartition modulo 1. Journées arithmétiques (1973, Grenoble), Bull. Soc. math. France, Mémoires 37 (1974), 137-138.
- [24] RAUZY, G.: Répartition modulo 1. Actes du Colloque de Marseille-Luminy, 4–7 Juin, 1974, G. Rauzy Edit. in Lecture Notes in Mathematics, Vol. 475. Springer-Verlag, Berlin-New York, iv+258 p. (1975).
- [25] RAUZY, G.: Équirépartition et entropie, in [24], 155-175.
- [26] RAUZY, G.: Nombres normaux et processus déterministes. Journées Arithmétiques de Bordeaux (1974, Bordeaux), Soc. math. France, Astérique, 24-25 (1975), 263–265.
- [27] RAUZY, G. : Sur une suite liée à la discrépance de la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **282** (1976), A1323–A1325.
- [28] RAUZY, G.: Nombres normaux et processus déterministes. Acta Arith. 29, n° 3 (1976), 211–225.
- [29] RAUZY, G.: Propriétés statistiques de suites arithmétiques. Le Mathématicien, N° 15. Collection SUP. Presses Universitaires de France, Paris (1976),133 p.
- [30] RAUZY, G.: Une généralisation du développement en fraction continue. Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, 18 n° 1 (1976-1977), Exposé N° 15, 16 p.
- [31] RAUZY, G.: Répartition modulo 1. Journées Arithmétiques de Caen (Univ. Caen, Caen, 1976), in Astérisque 41–42, Soc. Math. France, Paris (1977), 81–101.
- [32] RAUZY, G.: Les zéros entiers des fonctions entières de type exponentiel. Séminaire de Théorie des Nombres 1976–1977, Univ. Bordeaux 1, Talence (1977), Exp. N° 6, 10 p.

- [33] RAUZY, G.: Répartition de suites et équations fonctionnelles associées. Monatsh. Math. 83 (1977), n° 4, 315–329.
- [34] PARENT, D. P. (coauteurs: BARSKY, D. BERTRANDIAS, F. CHRISTOL, G. DECOMPS, A. DELANGE, H. DESHOUILLERS, J.-M. LAMÈCHE-GÉRARDIN, K. LAGRANGE, J. NICOLAS, J.-L. PATHIAUX, M. RAUZY, G. WALDSCHMIDT, M., avec une préface de Ch. Pisot et des remarques préliminaires de J.-L. Nicolas). Exercices de théorie des nombres. Gauthier-Villars, Paris, (1978) v+307 p.
- [35] RAUZY, G.: Échanges d'intervalles et transformations induites. Acta Arith. 34 (1979), nº 4, 315–328.
- [36] KEANE, M. S. RAUZY, G. : Stricte ergodicité des échanges d'intervalles. Math. Z. 174 (1980), nº 3, 203–212.
- [37] CHRISTOL, G. KAMAE, T. MENDÉS FRANCE, M. RAUZY, G. : Suites algébriques, automates et substitutions. Bull. Soc. Math. France, 108 (1980), 401–419.
- [38] RAUZY, G.: Mots circulaires et réseaux électriques. Primaths, 4 (1981), 35-42.
- [39] RAUZY, G.: Discrépance d'une suite complètement équirépartie. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math, 5^e série, 3, n° 2 (1981), 105–112.
- [40] RAUZY, G.: Nombres algébriques et substitutions. Bull. Soc. Math. France, 110 (1982), 147-178.
- [41] RAUZY, G.: Suites à termes dans un alphabet fini. Séminaire de Théorie des Nombres, 1982–1983, Univ. Bordeaux I, Talence (1983), Exp. N° 25, 16 p.
- [42] DABOUSSI, H. LIARDET, P. RAUZY, G. éditeurs : Colloque de théorie analytique et élémentaire des nombres, Marseille, 30 mai 3 juin (1983) in Publications Mathématiques d'Orsay **86**-1. Université de Paris-Sud, Département de Mathématique, Orsay (1986).
- [43] RAUZY, G.: Des mots en arithmétique. Avignon Conference on language theory and algorithmic complexity (Avignon, 1983) in Publ. Dép. Math. Nouvelle Sér. B, 84-6 (1984), Univ. Claude-Bernard, Lyon, 103–113.
- [44] RAUZY, G. : *Ensembles à restes bornés.* Séminaire de Théorie des Nombres, 1983–1984, Univ. Bordeaux I, Talence (1984), Exp. N° 24, 12 p.
- [45] RAUZY, G.: Mots infinis en arithmétique. Automata on infinite words (Le Mont-Dore, 1984), Lecture Notes in Comput. Sci., 194, Springer, Berlin, (1985), 165–171.
- [46] KANEMITSU, S. NAGASAKA, K. RAUZY, G. SHIUE, J.-S.: On Benford's law: the first digit problem. Probability theory and mathematical statistics (Kyoto, 1986), in Lecture Notes in Math., 1299 (1988), Springer, Berlin-New York, 158–169.
- [47] LIARDET, P. RAUZY, G. (Guest-Editors): Conference on Arithmetics and Coding Systems, Marseille Luminy, France, 9-13 June 1987, in Theoretical Comp. Sci., Fundamental Studies, Vol. 65, n° 2 (1989), ii + 150 p.
- [48] RAUZY, G.: Rotations sur les groupes, nombres algébriques, et substitutions. Séminaire de Théorie des Nombres 1987–1988, Univ. Bordeaux I, Talence (1988), Exp. N° 21, 12 p.
- [49] AMICE, Y. BERTIN, M.-J. BERTRANDIAS, F. DECOMPS, A. DRESS, F. GRAN-DET, M. – MENDÈS FRANCE, M. – RAUZY, G. : Charles Pisot. Acta Arith. 51 (1988), n° 1, 1–4.
- [50] RAUZY, G.: Numbers and automata. Formal properties of finite automata and applications (Ramatuelle, 1988) in Lecture Notes in Comput. Sci., 386, Springer, Berlin (1989), 176–185.
- [51] RAUZY, G.: Sequences defined by iterated morphisms. Sequences (Naples/Positano, 1988), Springer, New York (1990), 275–286.
- [52] ARNOUX, P. RAUZY, G. : Représentation géométrique de suites de complexité 2n + 1. Bull. Soc. Math. France, 119 nº 2 (1991), 199-215.
- [53] RAUZY, G.: Low complexity and geometry. Dynamics of complex interacting systems (Santiago, 1994), 147–177 in Nonlinear Phenom. Complex Systems, 2, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1996).
- [54] ERDÖS, P. LEV, V. RAUZY, G. SÁNDOR, C. SÁRKÖZY, A. : Greedy algorithm, arithmetic progressions, subset sums and divisibility. Paul Erdös memorial collection. Discrete Math. 200, n° 1-3 (1999), 119–135.
- [55] HEGYVÁRI, N. RAUZY, G.: On the completeness of certain sequences. Publ. Math. Debrecen 55 (1999), no 3-4, 245–252.



Mémoire 125-126

Champs de Hurwitz

J. Bertin, M. Romagny

Dans ce travail, nous effectuons une étude détaillée des champs de Hurwitz et de leurs espaces de modules, tant dans le cas galoisien que dans le cas non galoisien, avec une attention particulière portée aux correspondances entre ces espaces de modules. Nous comparons notre construction à celles proposées par Abramovich-Corti-Vistoli, Harris-Mumford, et Mochizuki-Wewers. Nous mettons en application nos résultats pour revisiter des exemples classiques, notamment les champs de courbes stables munies d'une structure de niveau arbitraire, et les champs de revêtements cycliques modérément ramifiés. Dans une deuxième partie, nous mettons en évidence des fibrés tautologiques et des classes de cohomologie qui vivent naturellement sur les champs de Hurwitz, et nous donnons des relations universelles, dont un analogue supérieur de la formule de Riemann-Hurwitz, entre ces classes. Nous donnons des applications au champ des revêtements cycliques de la droite projective, avec un intérêt particulier pour des relations du type de la relation de Cornalba-Harris et pour les intégrales de Hodge cycliques, notamment hyperelliptiques.

In this work, we give a thorough study of Hurwitz stacks and associated Hurwitz moduli spaces, both in the Galois and the non Galois case, with particular attention to correspondances between these moduli spaces. We compare our construction to those proposed by Abramovich-Corti-Vistoli, Harris-Mumford, and Mochizuki-Wewers. We apply our results to revisit some classical examples, particularly the stacks of stable curves equipped with an arbitrary level structure, and the stacks of tamely ramified cyclic covers. In a second part we exhibit some tautological bundles and cohomology classes naturally living on Hurwitz stacks, and give some universal relations, in particular a higher analogue of the Riemann-Hurwitz formula, between these classes. Applications are given to the stack of cyclic covers of the projective line, with special attention to Cornalba-Harris type relations and to cyclic, in particular hyperelliptic, Hodge integrals.

> prix public* : 50 € - prix membre* : 35 € * frais de port non compris









Institut Henri Poincaré 11 rue Pierre et Marie Curie F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

COURRIER DES LECTEURS

G. Poitou et le CIRM

J'ai lu avec intérêt les « souvenirs et réflexions sur 30 ans d'existence du CIRM » dans la livraison de janvier 2012 de la Gazette des Mathématiciens.

Puis-je vous faire part de ma tristesse de ne pas y avoir vu cité le nom de Georges Poitou. Il me semble qu'il fut un acteur important de la création du centre. Plutôt que de faire appel à mes souvenirs, je préfère vous recopier quelques lignes de Jean-Pierre Kahane dans le numéro spécial du Bulletin de la Société des Amis de l'École Normale Supérieure paru en octobre 1990 (page 15) après le décès de G. Poitou : « En 1974 il fut président de la Société Mathématique de France. Ce fut lui qui remit sur les rails le projet du CIRM (Centre International de Rencontres Mathématiques) de Marseille-Luminy.

Jean-Louis Koszul et Jean-Pierre Labesse m'ont communiqué un texte de sa main, faisant l'histoire de la chose jusqu'en 1981. Si le CIRM a vu le jour, c'est bien à Georges Poitou que nous le devons. À l'occasion de ses démarches ininterrompues auprès des institutions les plus diverses, il a éprouvé, dit-il, une « consolation inattendue » à savoir que « les mathématiciens français bénéficient, sans le savoir, d'un capital latent de sympathie. » Rendre hommage à un mathématicien qui a beaucoup œuvré pour que le CIRM voie le jour n'aurait diminué en rien le mérite de ceux qui l'ont fait vivre et grandir.

Je te prie d'agréer, cher collègue, l'expression de mes sentiments les meilleurs,

Jean Cougnard

A. Aragnol et le CIRM

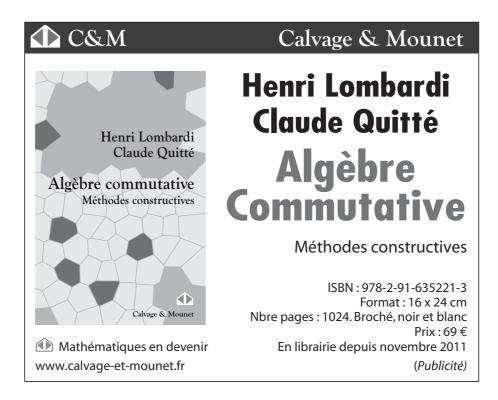
qui m'est venue à la lecture de la dernière Gazette et des souvenirs sur Luminy. Je regrette très vivement que était vice-président de l'université de

Je souhaite faire part d'une remarque nulle part le rôle de A. Aragnol dans la création de ce centre n'ait été mentionné. Ce rôle date du temps où il

Luminy, et avait eu l'idée d'utiliser le bâtiment ex-Favre pour faire un centre de rencontres mathématiques. Aragnol est mort en 2006, il y a maintenant plus de cinq ans. J'ai souvent signalé aux rédacteurs en chef de la *Gazette*, et aux directeurs du centre son rôle dans cette affaire, en suggérant que la *Gazette* y fasse mention, mais sans succès. Bien

sûr, il n'est pas le seul à avoir contribué à la création de ce centre (il faut notamment citer le rôle de G. Poitou qui avait fait débloquer les crédits du côté de la direction du budget). Mais il reste que, sans Aragnol, ce centre n'existerait pas.

Bernard Malgrange



– Publicité – 103



Annales de l'ÉNS

Tome 44 - fascicules 4, 5, 6

2011

Fascicule 4

- T. Chinburg, R. Guralnick, D. Harbater The local lifting problem for actions of finite groups on curves
- A. Neeman Explicit cogenerators for the homotopy category of projective modules over a ring
- C. Perin Elementary embeddings in torsion-free hyperbolic groups
- S. Blachère, P. Haïssinsky, P. Mathieu Harmonic measures versus quasiconformal measures for hyperbolic groups

Fascicule 5

- S. Hofmann, S. Mayboroda, A. McIntosh Second order elliptic operators with complex bounded measurable coefficients in L^p , Sobolev and Hardy spaces
- K. Niederkrüger, C. Wendl Weak symplectic fillings and holomorphic curves
- T. Alazard, N. Burq, C. Zuily Strichartz estimates for water waves

Fascicule 6

- L. Fargues La filtration canonique des points de torsion des groupes p-divisibles
- G. Chenevier On the infinite fern of Galois representations of unitary type

prix par fascicule * : 70 € * frais de port non compris

Revue disponible par abonnement : Europe : 320 €- hors Europe : 350 €



Institut Henri Poincaré 11 rue Pierre et Marie Curie F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

104 – Publicité –



Astérisque 341
A quasi-linear Birkhoff
Normal Forms method.
Application to the Quasi-linear
Klein-Gordon Equation on S¹
Jean-Marc Delort

Abstract. — Consider a nonlinear Klein-Gordon equation on the unit circle, with smooth data of size $\epsilon \to 0$. A solution u which, for any $\kappa \in \mathbb{N}$, may be extended as a smooth solution on a time-interval $]-c_\kappa\epsilon^{-\kappa},c_\kappa\epsilon^{-\kappa}[$ for some $c_\kappa>0$ and for $0<\epsilon<\epsilon<\epsilon_\kappa$, is called an almost global solution. It is known that when the nonlinearity is a polynomial depending only on u, and vanishing at order at least 2 at the origin, any smooth small Cauchy data generate, as soon as the mass parameter in the equation stays outside a subset of zero measure of \mathbb{R}_+^* , an almost global solution, whose Sobolev norms of higher order stay uniformly bounded. The goal of this paper is to extend this result to general Hamiltonian quasi-linear nonlinearities. These are the only Hamiltonian non linearities that depend not only on u, but also on its space derivative. To prove the main theorem, we develop a Birkhoff normal form method for quasi-linear equations.

Résumé (Une méthode de formes normales de Birkhoff quasi-linéaire. Application à l'équation quasi-linéaire de Klein-Gordon sur \mathbb{S}^1). — Considérons une équation de Klein-Gordon non-linéaire sur le cercle unité, à données régulières de taille $\epsilon \to 0$. Appelons solution presque globale toute solution u, qui se prolonge pour tout $\kappa \in \mathbb{N}$ sur un intervalle de temps $] - c_\kappa \epsilon^{-\kappa}, c_\kappa \epsilon^{-\kappa}[$, pour un certain $c_\kappa > 0$ et $0 < \epsilon < \epsilon_\kappa$. Il est connu que de telles solutions existent, et restent uniformément bornées dans des espaces de Sobolev d'ordre élevé, lorsque la non-linéarité de l'équation est un polynôme en u nul à l'ordre 2 à l'origine, et lorsque le paramètre de masse de l'équation reste en dehors d'un sous-ensemble de mesure nulle de \mathbb{R}_+^* . Le but de cet article est d'étendre ce résultat à des non-linéarités quasi-linéaires Hamiltoniennes générales. Il s'agit en effet des seules non-linéarités Hamiltoniennes qui puissent dépendre non seulement de u, mais aussi de sa dérivée en espace. Nous devons, pour obtenir le théorème principal, développer une méthode de formes normales de Birkhoff pour des équations quasi-linéaires.

Prix public* : 30 € - prix membre* : 21 €

* frais de port non compris



Institut Henri Poincaré 11 rue Pierre et Marie Curie F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

Unitary reflection groups

G.I. Lehrer et D.E. Taylor

Australian Mathematical Society Lecture Series 20, Cambridge University Press 2009, 302 p., ISBN 978-0-521-74989-3, 46,90 €

Les groupes de réflexions complexes finis (ou, de façon équivalente, « unitaires », suivant la terminologie du titre) sont les sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{C})$ qui sont engendrés par des pseudo-réflexions, c'est-à-dire des endomorphismes inversibles qui fixent un hyperplan. Cette classe de groupes comprend entre autres les groupes de Coxeter finis, dont les groupes diédraux, le groupe symétrique, le groupe de l'hypercube, mais aussi les groupes de symétries des polytopes complexes réguliers, les groupes de symétrie des familles de 27 droites sur des surfaces cubiques, ou encore (à un sous-groupe d'indice 2 près) le groupe du Rubik's cube. À bien des égards, c'est une classe naturelle de groupes finis qui contient la plupart des groupes de symétries finies fondamentaux.

Cette classe naturelle est souvent étouffée par le succès de ces cas particuliers : la classe des groupes réels (sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$) est celle des groupes des Coxeter finis, et celle des groupes rationnels (sous-groupes de $GL_n(\mathbb{Q})$) celle des groupes de Weyl des algèbres de Lie semi-simples. Restreinte à ce cadre, la théorie des groupes de réflexions peut prendre un tour majestueux, avec variantes axiomatiques et géométriques (« chambres, murs, facettes »), englobant BN paires et groupes simples, tel que décrit dans le best-seller de Bourbaki (Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4,5,6).

En conséquence, un livre de taille raisonnable consacré à ces groupes de réflexions complexes généraux doit presque nécessairement laisser de côté les spécificités de la théorie « réelle », bien balisée, et peu adaptable au cadre général. La théorie classique a dès lors deux aspects apparemment antithétiques. Le premier est la présence de quelques résultats théoriques frappants, comme un célèbre théorème de Chevalley-Shephard-Todd qui caractérise les groupes de réflexions comme les seuls sous-groupes de $GL_n(\mathbb{C})$ dont l'anneau des invariants (i.e. des fonctions polynomiales sur \mathbb{C}^n invariantes sous l'action du groupe) est un anneau de polynômes – dans le cas du groupe symétrique, on retrouve le théorème fondamental des fonctions symétriques. Le deuxième est le théorème fondamental de classification de ces groupes de réflexions, que l'on peut supposer agir sans sous-espace stable (irréductiblement) dans \mathbb{C}^n : ces groupes « irréductibles » se répartissent en une série infinie à trois paramètres G(r, p, n) avec p divisant r, de groupes de matrices monomiales (un coefficient non nul par ligne et par colonne), ainsi qu'un bestiaire fascinant de 34 groupes (« exceptionnels ») liés à des phénomènes remarquables en petite dimension.

C'est une des grandes réussites du livre de Lehrer et Taylor d'avoir su mélanger

ces deux aspects, le théorique et le zoologique. Entreprise périlleuse, que l'on a souvent du mal à accomplir sans que l'un empiète sur l'autre, et pourtant nécessaire, du fait du très grand nombre de résultats qui découlent de la classification. Le livre commence (chapitre 1) par un exposé remarquable et original, parce que d'emblée dans le cadre « complexe », des quelques propriétés élémentaires partagées par tous ces groupes (réalisation sur le « corps de définition », graphe d'irréductibilité de Steinberg, existence de sous-groupes paraboliques maximaux irréductibles); il continue (chapitre 2) par une description des groupes de matrices monomiales, de leurs invariants et leur anneau de définition. Les chapitres 3 et 4 présentent un digest de la théorie des invariants des groupes finis suivi d'une démonstration du théorème de Chevalley-Shephard-Todd, décrivent l'action du groupe sur l'algèbre des polynômes en n variables, et introduisent les données numériques naturellement associées à ces groupes (« degrés » et « exposants »).

C'est là une partie moins originale du livre (il y a un certain nombre d'ouvrages bien faits sur la théorie des invariants, dont un livre de Benson), dont on pourra néanmoins apprécier l'économie de présentation.

Les chapitres 5 à 8, longs d'une centaine de pages, forment le cœur du livre, et démontrent le théorème de classification. C'est un des grands mérites de ce livre de n'avoir pas reculé devant la difficulté qu'il y a à présenter la démonstration de ce théorème, qui implique notamment de présenter chacune des 34 exceptions. L'exposition est claire et précise. Parmi ces 34 exceptions, la moitié environ est en dimension 2, et n'est qu'une variante de la classification des sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$ ou de SU_2 . Les chapitres 5 et 6 sont consacrés à ces cas, et prennent le soin de présenter plusieurs variantes de cette étude classique, en utilisant les quaternions pour établir les correspondances entre la dimension 3 réelle et la dimension 2 complexe. Ils constituent donc une bonne référence pour ce thème, indépendamment de l'étude des groupes de réflexions en eux-mêmes. Le chapitre 7 est plus inégal, et présente succinctement les configurations exotiques que l'on rencontre en dimension plus grande, les classifiant sous des hypothèses très restrictives. On peut notamment regretter dans ce chapitre l'absence totale de figures ; à cet égard, les ouvrages illustrés de Coxeter forment un bon complément à ce chapitre.

Enfin, le chapitre 8 s'attaque à la classification proprement dite. Elle procède comme suit. Une fois restreint au cas irréductible, non monomial, et en dimension (rang) au moins 3, la démonstration s'appuie sur un théorème de Blichtfeld qui dit que si notre groupe G (supposé unitaire) contient un élément g dont toutes les valeurs propres sont à distance au plus 1 de l'une d'entre elles, alors cet élément g est central. Parmi ses conséquences inattendues, on obtient que les pseudo-réflexions de G sont d'ordre 2 ou 3, et que le sous-groupe engendré par deux de ces pseudoréflexions appartient nécessairement à une liste de seulement 5 groupes de rang 2 : outre les groupes du triangle, du carré et du pentagone, qui interviennent dans le cadre réel et les solides platoniciens, on trouve les groupes monomiaux G(3,1,2), G(4,2,2) et le groupe exceptionnel G_4 . On est dans une situation très similaire au cadre réel, où les groupes diédraux et les polygones réguliers à nombre arbitraire de côtés n'ont pas d'équivalent en rang plus grand, et n'interviennent pas non plus comme sous-groupes « de réflexions » (rappelons la plaisanterie attribuée à H. Cartan, après avoir présenté la méthode d'exhaustion pour calculer l'aire du disque : la généralisation en dimension plus grande est facile et laissée au lecteur). Ces restrictions permettent enfin d'utiliser le chapitre 7 et de terminer la démonstration.

Le chapitre 8 se termine lui-même par une intéressante application de ces groupes exceptionnels. Par les opérations arithmétiques habituelles de réduction de l'anneau de définition, ces groupes linéaires expliquent en effet (ou incarnent) les isomorphismes exotiques les plus remarquables dans la classification des groupes simples finis : $\mathfrak{A}_5 \simeq \mathsf{SL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathsf{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$, $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{F}_9) \simeq \mathfrak{A}_6$, $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{F}_7) \simeq \mathsf{SL}_3(\mathbb{F}_2)$ et $\mathsf{PSP}_4(\mathbb{F}_3) \simeq \mathsf{PSU}_4(\mathbb{F}_4)$. À cette fin, certains énoncés sur les groupes classiques sur un corps fini sont reportés en appendice (B).

Les chapitres 9 et 10 quittent les problématiques de classification, et retrouvent les thématiques des chapitres 3 et 4. Il s'agit des raffinements successifs, désormais bien établis, de l'action du groupe de réflexions complexes $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ sur l'algèbre des fonctions polynomiales sur \mathbb{C}^n : expression du « lieu singulier » (réunion des hyperplans de réflexions) comme polynôme en les invariants, action sur les opérateurs différentiels, anti-invariants. On en déduit une preuve purement algébrique d'un théorème fondamental de Steinberg : G agit sans point fixe sur le complémentaire des hyperplans de réflexions (« lieu régulier »). Ce résultat est à la base d'un des aspects importants de la théorie des groupes de réflexions complexes : la possibilité de leur associer un « groupe de tresses », groupe fondamental de l'espace des orbites, qui généralise le groupe de tresses usuel et est l'objet de nombreuses recherches depuis une quinzaine d'années. Ces deux chapitres, parce qu'il s'agit de l'action de G sur des algèbres de fonctions, ont évidemment d'autres interprétations géométriques. Il est plus que dommage qu'elles ne soient pas mentionnées. Par exemple, après ce livre, il faudra toujours retourner voir l'article original pour comprendre que le théorème de Gutkin, présenté ici (comme dans d'autres endroits, hélas) comme un théorème d'identités polynomiales, est en fait un théorème de trivialisation de fibrés vectoriels! C'est d'autant plus étonnant que le chapitre 11 commence par un résumé de géométrie algébrique dans le cadre affine, mais ne s'en sert pas pour expliquer, même brièvement, les interprétations géométriques du chapitre précédent. Ce chapitre 11 est en fait dédié à l'exposé d'un autre aspect important de la théorie, celle des éléments dits « réguliers au sens de Springer » ; le chapitre 12 est d'un intérêt plus spécialisé, s'intéressant aux « invariants tordus » du groupe de réflexions.

Outre l'appendice B déjà mentionné, le livre s'orne de deux autres appendices, plus décevants. L'appendice A est un résumé de quelques propriétés d'algèbre commutative. L'appendice C invite le lecteur à « aller plus loin ». On y trouve justement une définition du groupe de tresses associé à G, et on s'y intéresse à la topologie du complémentaire des hyperplans de réflexions, présentant certains résultats de Lehrer sur l'action de G sur sa cohomologie rationnelle. On y aborde aussi la problématique de l'extension de la théorie réelle, c'est-à-dire du cas où G est un groupe de Coxeter, au cas général. Dans le cas réel, il s'agit de la théorie des groupes d'Artin (présentations et propriétés agréables du groupe de tresses) et des algèbres de Hecke. L'idée d'une possible généralisation de ces objets date d'un article fondateur de Broué, Malle et Rouquier il y a une quinzaine d'année. Cette partie n'est malheureusement pas très à jour et pèche par des imprécisions gênantes qui l'empêche d'être une référence sérieuse sur le sujet, ou même un bon guide de la littérature. Elle reprend notamment l'expression malheureuse de 'théorème-conjecture' de l'article originel, qui rend difficile de distinguer ce qui est démontré de ce qui reste conjectural. On regrettera aussi que les opérateurs de

Dunkl-Opdam, ou encore le lien entre les équations KZ et l'algèbre de cohomologie du complémentaire des hyperplans, ne soient pas du tout évoqués. Enfin, le livre se termine par une table des groupes de réflexions, dans laquelle on ne trouve malheureusement pas les présentations désormais classiques de ces groupes.

Malgré ces défauts, ce livre est une très bonne introduction, utilisable dès le niveau M1, à ces objets classiques et à leur théorie – théorie qui, toujours incomplète après sa renaissance dans les années 50-60, connaît un regain d'intérêt ces dernières années (en lien avec leurs groupes de tresses et certaines problématiques de « théorie des représentations »). Son style, très (trop ?) algébrique, est plutôt clair, et ses références assez nombreuses ; le lecteur féru d'histoire des mathématiques y trouvera notamment les références aux articles d'origine (la plupart du $19^{\rm e}$, de Maschke, Klein, etc.) qui ont introduit les groupes exceptionnels.

Ivan Marin, Université Paris-Diderot