Bull. Soc. Math. France
146 (4), 2018, p. 633-647

UN ISOMORPHISME DE SUSLIN

par Shane Kelly

Résumé. — Dans cette note on constate qu'on peut enlever l'hypothèse de la résolution des singularités de l'isomorphisme construit par Suslin entre la cohomologie étale à supports compacts et les groupes de Chow supérieurs de Bloch. On démontre de plus que l'on peut obtenir cet isomorphisme à partir de la réalisation étale d'Ivorra.

Abstract (*An isomorphism by Suslin*). — In this note we observe that we can remove the resolution of singularities hypothesis from the isomorphism constructed by Suslin between étale cohomology with compact supports and Bloch's higher Chow groups. Moreover, we show that this isomorphism can be obtained from Ivorra's étale realisation functor.

1. Introduction

Un premier but de cette note est d'observer qu'en remplaçant le théorème [19, Theorem 4.1.2] de Voevodsky avec le résultat principal ([8, Theorem 5.3.1], [9, Theorem 4.0.1]) de la thèse de l'auteur, on peut enlever l'hypothèse de la résolution des singularités dans le résultat principal de [17].

Texte reçu le 20 juin 2016, modifié le 3 avril 2017, accepté le 14 avril 2017.

Shane Kelly, Tokyo Institute of Technology, Department of Mathematics, 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8551, Japan • *E-mail :* shanekelly@math.titech.ac.jp

Classification mathématique par sujets (2010). — 14F20, 19E15, 14C15.

Mots clefs. — Cohomologie étale, cycles algébriques, cohomologie motivique, groups de Chow supérieurs.

doi:10.24033/bsmf2768

Théorème 1.1 ([8, Theorem 5.6.1], cf. [17, Introduction]). — *Soit k un corps algébriquement clos, m un entier inversible dans k, $\pi_X : X \to k$ un morphisme séparé de type fini et soit $j \leq 0$. Alors il existe un isomorphisme naturel*

$$\Phi_{Sus} : H_c^{n+2j}(X, \mathbb{Z}/m(j)) \cong CH_j(X, n; \mathbb{Z}/m)^{\#}$$

où H_c est la cohomologie étale à support compact, la notation CH désigne les groupes de Chow supérieurs, et on utilise $(-)^{\#}$ pour indiquer $\hom_{Ab}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Suslin définit cet isomorphisme à partir d'un isomorphisme $CH_0(X, n; \mathbb{Z}/m) \cong H_n^{sing}(X, \mathbb{Z}/m)$ (démontré dans [17]), un isomorphisme $H_c^n(X, \mathbb{Z}/m) \cong H^n_{sing}(X, \mathbb{Z}/m)$ (démontré dans [14]), et l'isomorphisme canonique

$$H^n_{sing}(X, \mathbb{Z}/m) \cong H_n^{sing}(X, \mathbb{Z}/m)^{\#}. \tag{1}$$

D'un autre côté, on peut définir un deuxième morphisme

$$\Phi_R : H_c^{n+2j}(X, \mathbb{Z}/m(j)) \to CH_j(X, n; \mathbb{Z}/m)^{\#}$$

à partir du morphisme canonique

$$\hom(\mathbb{Z}/m, R\pi_{X!}(\mathbb{Z}/m)_X(p)[q]) \to \hom(R\pi_{X!}(\mathbb{Z}/m)_X(p)[q], \mathbb{Z}/m)^{\#} \tag{2}$$

où les morphismes sont dans la catégorie dérivée $D_{et}(k, \mathbb{Z}/m)$ des faisceaux de $\mathbb{Z}/m$-modules sur le petit site étale de k (cf. Définition 3.4).

La deuxième but de cette note est de démontrer que Φ_{Sus} est égal à Φ_R.

Proposition (Proposition 4.3, Proposition 4.5). — *Sous les hypothèses du Théorème 1.1, l'isomorphisme*

$$H^n_{sing}(X, \mathbb{Z}/m) \cong \hom(\mathbb{Z}/m, R\pi_{X!}(\mathbb{Z}/m)_X[n])$$

défini dans [14], *et le morphisme*

$$H_n^{sing}(X, \mathbb{Z}/m) \to \hom(R\pi_{X!}(\mathbb{Z}/m)_X[n], \mathbb{Z}/m)$$

de la Définition 3.4 (défini à partir du foncteur de réalisation d'Ivorra, cf. Section A), sont compatibles avec les accouplements canoniques (1) et (2). Par conséquence, Φ_{Sus} est égal à Φ_R.

Conventions. Pour un groupe abélien A, les éléments de $A^{\#}$ seront induits en général par un morphisme $A \to \mathbb{Z}/m$ et un choix d'injection $\mathbb{Z}/m \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Donc, on choisit une fois pour tout une telle injection.

2. L'isomorphisme de Suslin

2.1. Les groupes de Chow supérieurs et l'homologie singulière. — Le but de cette sous-section est de permettre au lecteur d'observer que l'hypothèse de la résolution des singularités de [17, Theorem 3.2] (reproduit en dessous comme le Théorème 2.3) n'est pas nécessaire, si l'on remplace [19, Theorem 4.1.2] avec [8, Theorem 5.1.3], [9, Theorem 4.0.1] (reproduit en dessous comme le

Théorème 2.2). À cette fin, on rappelle la notation de [17, Section 2], son résultat principal, et son extension au cas non-affine. On constate aussi que l'extension de Levine ([11, Theorem 1.7]) du théorème de localisation de Bloch nous permet de travailler avec les schémas séparé de type fini, au lieu des schémas quasi-projectifs.

Soit k un corps et soit X un k-schéma[1] séparé de type fini. Soit $z_j(X,n)$ le groupe abélien libre engendré par les sous-variétés de Δ^n_X de dimension $j+n$ telles que l'intersection avec chaque coface $\Delta^m_X \subset \Delta^n_X$ est de dimension $\leq j+m$ dans Δ^m_X (où Δ^n_S est le sous-schéma linéaire de $\mathbb{A}^{n+1}_S$ défini par $t_0+\cdots+t_n=1$ et les cofaces sont les sous-variéties définies par $t_{j_1}=0,\dots,t_{j_{n-m}}=0$). Par définition ([1], [11]), les groupes $CH_j(X,n)$ sont les groupes d'homologie du complexe $\cdots \to z_j(X,2) \to z_j(X,1) \to z_j(X,0) \to 0 \to \dots$ où les différentielles sont $\sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i^*$ et le morphisme ∂_i^* est l'intersection avec la coface $t_i=0$. Le complexe $z_j(X,*)$ possède un sous-complexe $z_j^{equi}(X,*)$ où $z_j^{equi}(X,n)$ est le sous-groupe libre engendré par les sous-variétés $V \subset \Delta^n_X$ tels que la projection vers Δ^n_k est un morphisme équidimensionel[2] de dimension relative j. Le théorème technique principal de [17] est le suivant. Il est vrai sans aucune hypothèse sur le corps de base k !

Théorème 2.1 ([17, Theorem 2.1]). — *Soit X un k-schéma affine équidimensionnel et $j \geq 0$. Alors, l'inclusion de complexes $z_j^{equi}(X,*) \hookrightarrow z_j(X,*)$ est un quasi-isomorphisme.*

Écrivons Sch/k pour la catégorie des k-schémas séparés de type fini et Sm/k pour la sous-catégorie pleine des k-schémas lisses. Pour $X \in \mathsf{Sch}/k$ et $t \geq 0$, Suslin écrit $z_t(X)$ pour le préfaiscau $z_{equi}(X/k,t) \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ de [16].[3]

Les groupes de (co)homologie singulière d'un préfaisceau F sur Sch/k sont définis comme $H_n^{sing}(F) = H_n(C_*F)$ (où C_*F est le complexe avec $C_nF = F(\Delta^n_k)$) et pour un groupe abélien Λ comme

$$H_n^{sing}(F,\Lambda) = H_n(C_*F \overset{L}{\otimes} \Lambda), \quad H^n_{sing}(F,\Lambda) = H^n(\mathrm{RHom}(C_*F,\Lambda)).$$

1. Suslin et Bloch travaillent avec un X équidimensionnel mais cette hypothèse n'est pas nécessaire, cf. [11, Introduction].

2. Quand on écrit équidimensionnel de dimension relative t on veut dire un morphisme de schémas $f : W \to V$ qui est de type fini, dominant, est pour lequel le fonction $\dim p^{-1}p(-)$ sur W est constant et égal à t.

3. Le préfaisceau $z_{equi}(X/k,t) \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ est un *qfh*-faisceau d'après [16, Proposition 4.2.5]. Puis le préfaiseau $Cycl_{equi}(X/k,t) \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ est égal à $z_t(X)$ sur les schémas normaux d'après [16, Proposition 3.4.3]. Enfin, l'inclusion canonique $z_{equi}(X/k,t) \subseteq Cycl_{equi}(X/k,t)$ devient un isomorphisme après $- \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$, pourtant il n'y a pas de référence clair. Le mieux serait [16, Lemma 3.3.2, Lemma 3.3.9(2)]. Puisque chaque schéma admet un *qfh*-recouvrement par des schémas normaux, cela implique l'identification $z_{equi}(X/k,t) \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] = z_t(X)$.

Le foncteur C_* : $\mathsf{PreShv}(\mathsf{Sch}/k) \to \mathsf{Comp}(\mathsf{Ab})$ admet une généralisation $\underline{C}_*$: $\mathsf{PreShv}(\mathsf{Sch}/k) \to \mathsf{Comp}(\mathsf{PreShv}(\mathsf{Sch}/k))$ dont C_* n'est que le complexe des sections globales. Elle est définie par $(\underline{C}_n F)(Y) = F(\Delta^n_Y)$.

On remplace le théorème [19, Theorem 4.1.2] de Voevodsky (qui apparait comme [17, Theorem 3.1] dans l'article de Suslin) avec la version suivante qui ne suppose pas que la résolution des singularités soit vraie.

Théorème 2.2 ([8, Theorem 5.1.3], [9, Theorem 4.0.1], cf. [19, Theorem 4.1.2]). — *Soit k un corps parfait de caractéristique exponentielle p. Soit F un préfaisceau de $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$-modules avec transferts tels que*[4] *$F_{cdh} = 0$. Alors, l'image de $\underline{C}_* F$ dans la catégorie des complexes de faisceaux de Nisnevich sur Sm/k est acyclique.*

Ce théorème implique tout de suite l'extension suivante.

Théorème 2.3 (cf. [17, Theorem 3.2]). — *Soit k un corps parfait de caractéristique exponentielle p. Alors, pour tout k-schéma séparé de type fini X et tout $j \geq 0$, l'inclusion canonique de complexes*

$$C_*(z_j(X))\left[\frac{1}{p}\right] = z_j^{equi}(X,*)\left[\frac{1}{p}\right] \to z_j(X,*)\left[\frac{1}{p}\right]$$

est un quasi-isomorphisme. Par conséquence, cette inclusion induit des isomorphismes

$$\Phi_s^{CH} : H_n^{sing}(z_j(X), \mathbb{Z}/m) \xrightarrow{\sim} CH_j(X, n; \mathbb{Z}/m) \tag{3}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout m premier à p.

Démonstration. — On reproduit la démonstration de [17, Theorem 3.2] qui marche sans problème une fois que [17, Theorem 3.1] (i.e., [19, Theorem 4.1.2]) est remplacé par Théorème 2.2.

On travaille par récurrence sur $d = \dim X$. Si $d = 0$, les deux complexes sont égaux, donc considérons le cas $d > 0$, et assumons que le résultat est connu pour les schémas de dimension inférieure à d. Soit $Y \subset X$ un sous-schéma fermé de dimension $< d$ tel que $U = X - Y$ est affine équidimensionnel de dimension d. La suite de préfaisceaux $0 \to z_j(Y) \to z_j(X) \to z_j(U)$ est exacte, et la faisceau cdh associé à $z_j(U)/z_j(X)$ est zéro ([15, Theorem 4.2.9, Theorem 4.3.1]). D'où, d'après le Théorème 2.2, l'application de $(\underline{C}_*(-))_{Nis}(k) = C_*(-)$ donne un triangle distingué dans la catégorie dérivée des groupes abéliens. De l'autre côté, la

4. La cdh-topology sur Sch/k est engendrée par la topologie de Nisnevich, est les morphismes $Y \to X$ propres complètement décomposés. Par *complètement décomposé* on veut dire que le morphisme induit $Y(K) \to X(K)$ est surjectif pour toute extension de corps K/k (les corps de fonctions y compris). On renvoie le lecteur qui ne connait pas la cdh topologie au très accessible [15, Section 5].

suite $z_j(Y,*) \to z_j(X,*) \to z_j(U,*)$ est aussi un triangle distingué ([11, Theorem 1.7], [1, Theorem 3.3]). L'inclusion à gauche $C_* z_j(Y)\left[\frac{1}{p}\right] \subseteq z_j(Y,*)\left[\frac{1}{p}\right]$ est un quasi-isomorphisme par l'hypothèse de récurrence et l'inclusion à droite $C_* z_j(U)\left[\frac{1}{p}\right] \subseteq z_j(U,*)\left[\frac{1}{p}\right]$ est un quasi-isomorphisme par le Théorème 2.1. Donc l'inclusion au milieu $C_* z_j(X)\left[\frac{1}{p}\right] \subseteq z_j(X,*)\left[\frac{1}{p}\right]$ est aussi un quasi-isomorphisme. □

2.2. La cohomologie étale, la cohomologie singulière, et les groupes de Chow supérieurs. — Désormais on fixe un m premier à p et on écrit $\Lambda = \mathbb{Z}/m$.

Dans cette sous-section on rappelle les résultats de [17, Section 4] et [14] pour arriver à l'isomorphisme $CH_j(X,n;\Lambda)^\# \cong H_c^{n+2j}(X,\Lambda(j))$. Cet isomorphisme est donné par la composition de la suite d'isomorphismes décrite dans la Définition 2.8.

En regardant les définitions, on voit qu'il y a un accouplement canonique entre $H^n_{sing}(-,\Lambda)$ et $H_n^{sing}(-,\Lambda)$. Soit

$$\mathcal{D}_s : H^n_{sing}(-,\Lambda) \to H_n^{sing}(-,\Lambda)^\# \tag{4}$$

le morphisme induit. Pour passer au cas $j < 0$ on utilisera les isomorphismes canoniques

$$Tr^{CH} : CH_j(X,n;\Lambda) \xrightarrow{\sim} CH_j(\mathbb{A}_X^{-j},n;\Lambda) \tag{5}$$

$$Tr^{et} : H_c^n(\mathbb{A}_X^{-j},\Lambda) \xrightarrow{\sim} H_c^{n+2j}(X,\Lambda(j)) \tag{6}$$

de [1, Theorem 2.1] et [18, XVIII.2.8.1] respectivement. Le choix de la notation Tr^{CH} sera justifié plus tard.

Choisissons une immersion ouverte $X \to \overline{X}$ de X dans un schéma $\overline{X}$ propre sur k ([13]). Soit $i : Y \to \overline{X}$ l'immersion fermée complémentaire. Définissons le complexe[5]

$$[X^c] = \big([Y] \to [\overline{X}]\big) \tag{7}$$

dans $\mathsf{Comp}(\mathsf{PreShv}(\mathsf{Cor}/k))$ concentré en degrés -1 et 0.

Remarque 2.4. — On travaille avec la catégorie Cor/k, des correspondances *non*-lisse. Ses objets sont les k-schémas séparés de type fini, et $\hom_{\mathsf{Cor}/k}([X],[Y]) = c_{equi}(X \times Y/Y, 0)$ dans la notation de [16]. La composition est définie avec les morphismes de correspondance développés dans [16, Sections 3.6 et 3.7]. Le lecteur peut consulter aussi [6, Chapitres 1 et 2], [12, Appendix 1A], [2, Section 3.8], et [8, Chapter 2]. Le diagramme [6, Diagramme 43] est particulièrement utile pour comprendre la composition.

5. On utilisera souvent la même notation pour un objet, et le préfaisceau qu'il represente.

Théorème 2.5 (Suslin-Voevodsky). — *Soit $\Lambda \to \mathcal{I}^*$ une résolution injective dans*[6] $\mathsf{Shv}_h(\mathsf{Cor}/k, \Lambda)$ *(où $\Lambda = \mathbb{Z}/m$ avec m premier à la caractéristique exponentielle du corps algébriquement clos k).*[7] *Alors, le complexe $\mathcal{I}^*$ est acyclique en tant que complexe de faisceaux étales, et aussi en tant que complexe de qfh-faisceaux. En plus, les deux morphismes*

$$\underbrace{\hom(\underline{C}_* z_j X, \mathcal{I}^*[n])}_{=Ext^n_{qfh}(\underline{C}_* z_j X, \Lambda)} \to \underbrace{\hom_{K(\mathsf{Ab})}(C_* z_0 X, \mathcal{I}^*(k)[n])}_{=H^n_{sing}(z_0 X, \Lambda)}$$

$$\underbrace{\hom(\underline{C}_* z_0 X, \mathcal{I}^*[n])}_{=Ext^n_{qfh}(\underline{C}_* z_0 X, \Lambda)} \to \underbrace{\hom([X^c], \mathcal{I}^*[n])}_{=H^n_c(X, \Lambda)}$$

sont des isomorphismes, où le premier est le foncteur induit par l'évaluation en k, le deuxième est la composition avec le morphisme canonique $[X^c] = ([Y] \to [\overline{X}]) \to (z_0 Y \to z_0 \overline{X}) \to z_0(X) \to \underline{C}_* z_0 X$. Les trois hom-groupes non-identifiés sont dans $K(\mathsf{PreShv}(\mathsf{Cor}/k))$.

Corollaire 2.6. — *Le morphisme canonique $\Lambda \to \mathcal{I}^*(\Delta^*)$ est un quasi-isomorphisme.*

Remarque 2.7. — Les assertions d'acyclicité sont [14, Corollary 10.7] et [14, Corollary 10.9], qui sont vrais pour n'importe quel schéma de base excellent. L'assertion que l'isomorphisme induit par $\Gamma(k, -)$ est un isomorphisme est [14, Theorem 7.6], qui dit aussi que la composition avec $z_0(X) \to \underline{C}_* z_0 X$ induit un isomorphisme. Ces résultats sont énoncés pour un corps k algébriquement clos de caractéristique zéro, mais ils sont vrais pour n'importe quel corps algébriquement clos grace au théorème de de Jong sur les altérations, cf. [5]. La composition avec $(z_0 Y \to z_0 \overline{X}) \to z_0 X$ induit un isomorphisme puisque ce dernier est un quasi-isomorphisme après h-faisceautisation [15, Theorem 4.2.9, Theorem 4.3.1]. La composition avec $[X^c] = ([Y] \to [\overline{X}]) \to (z_0 Y \to z_0 \overline{X})$ induit un isomorphisme parce que pour W propre $[W] \to z_0 W$ est un isomorphisme après h-faisceautisation [15, Proposition 4.2.14] ($c_{equi}(W/S, 0) = z_{equi}(W/S, 0)$ quand $W \to S$ est propre). Ces résultats tirés de [15] sont vrais pour n'importe quel schéma de base noethérien séparé. Pour le corollaire, on utilise l'invariance par homotopie de la cohomologie étale.

Donnons un nom à l'isomorphisme du Théorème 2.5 :

$$\Phi_{s,et} : H^n_{sing}(z_0 X, \Lambda) \overset{\sim}{\leftarrow} \overset{\sim}{\rightarrow} H^n_c(X, \Lambda) \tag{8}$$

6. La h-topologie (sur Sch/k) est engendrée par la topology de Zariski et les morphismes propres surjectifs. On rencontrera aussi la *qfh*-topology (sur Sch/k) qui est engendrée par la topologie de Zariski, et les morphismes finis surjectifs. On utilisera le même symbole pour un groupe abélien et son faisceau constant associé (le faisceau Zariski associé est déjà un h-faisceau).

7. Le choix de $\mathbb{Z}/m$-coéfficients pour $\mathcal{I}^*$ n'est pas nécessaire maintenant, mais ça rendra les choses plus facile plus tard cf. la Remarque 3.2.

Définition 2.8. — L'isomorphisme Φ_{Sus} de Suslin est la composition

$$\begin{array}{ccccc} H_c^{n+2j}(X,\Lambda(j)) & & & & \\ \wr\| \, Tr^{et} & & & & \\ H_c^n(\mathbb{A}_X^{-j},\Lambda) & \overset{\Phi_{s,et}}{\cong} & H^n_{sing}(z_0(\mathbb{A}_X^{-j}),\Lambda) & & \\ & & \wr\| \, \mathcal{D}_s & & \\ & & H_n^{sing}(z_0(\mathbb{A}_X^{-j}),\Lambda)^{\#} & \overset{\Phi_s^{CH}}{\cong} & CH_j(\mathbb{A}_X^{-j},n;\Lambda)^{\#} \\ & & & & \wr\| \, Tr^{CH} \\ & & & & CH_j(X,n;\Lambda)^{\#} \end{array}$$

où le morphisme Tr^{et} (resp. $\Phi_{s,et}$, $\mathcal{D}_s$, Φ_s^{CH}, Tr^{CH}) est celui de l'Equation (6) (resp. (8), (4), (3), (5)).

3. Le morphisme induit par la réalisation étale

Dans cette section on explicite le morphisme Φ_R. On se rappelle que dans la section précédente, on avait fixé un m premier à p et on écrit $\Lambda = \mathbb{Z}/m$.

Rappelons-nous qu'il y a une identification canonique entre le groupe $H_n^{sing}(z_0X,\Lambda)$ et le group $\hom(\mathbb{Z}[n],\underline{C}_*z_0X\otimes\Lambda)$ de morphismes dans $K(\mathsf{PreShv}(\mathsf{Cor}/k))$. Par définition, le motif $M(k)$ (resp. $M^c(X)\otimes\Lambda$) est l'image de $\mathbb{Z}$ (resp. $\underline{C}_*z_0X\otimes\Lambda$) sous la projection canonique $K(\mathsf{PreShv}(\mathsf{Cor}/k))\to DM^{\mathit{eff}}(k)$. Donc il y a un morphisme induit.

$$\Phi_M^s : H_n^{sing}(z_0X,\Lambda)\xrightarrow{\sim}\hom_{DM^{\mathit{eff}}(k)}(M(k),M^c(X)[-n]\otimes\Lambda). \tag{9}$$

C'est un isomorphisme d'après [4, Theorem 8.1] (ou [8, Theorem 5.4.19], [9, Theorem 5.2.20] pour la version sans supposer que la résolution des singularités soit vraie). Puis, il y a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Tr}^M : M^c(\mathbb{A}_X^{-j})\xrightarrow{\sim} M^c(X)(-j)[-2j] \tag{10}$$

de [19, Corollary 4.1.8] (et [8, Corollary 5.5.9], [9, Corollary 5.3.9]). Pour $j\le 0$, l'isomorphisme Φ_M^{CH} de [19, Proposition 4.2.9] est par définition la composition

(11)
$$\begin{aligned}\Phi_M^{CH} : CH_j(X,n,\Lambda) &\underset{Tr^{CH}}{\xrightarrow{\sim}} CH_j(\mathbb{A}_X^{-j},n,\Lambda)\\ &\underset{\Phi_s^{CH}}{\xleftarrow{\sim}} H_n^{sing}(\mathbb{A}_X^{-j},\Lambda)\\ &\underset{\Phi_M^s}{\xrightarrow{\sim}} \hom_{DM^{\mathit{eff}}\left(k,\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right)}(M(k),M^c(\mathbb{A}_X^{-j})[n]\otimes\Lambda)\\ &\underset{Tr^M}{\xrightarrow{\sim}} \hom_{DM^{\mathit{eff}}\left(k,\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right)}(M(k),M^c(X)(-j)[n-2j]\otimes\Lambda).\end{aligned}$$

Si $j=0$, les morphismes Tr^{CH} et Tr^M sont des égalités, d'où $\Phi_M^{CH}=\Phi_M^s\Phi_s^{CH}$.

On continue avec le $X\to\overline{X}$ et $Y\to\overline{X}$ choisis avant l'équation (7).

Définition 3.1. — On rappelle qu'on avait défini dans (7) le complexe $[X^c]$ de $\mathsf{Comp}(\mathsf{PreShv}(\mathsf{Cor}/k))$. On définit aussi

$$[X^c/m] = (\underset{-2}{[Y]} \xrightarrow{i - m\cdot id_Y} \underset{-1}{[\overline{X}] \oplus [Y]} \xrightarrow{m\cdot id_{\overline{X}} + i} \underset{0}{[\overline{X}]})$$

où les degrés sont indiqués en bas.

Remarque 3.2. — Constatons que si F^* est un complexe de préfaisceau de Λ-modules avec transferts, alors[8] $F^*([X^c/m])$ devient égal à $F^*([X^c]) \oplus F^*([X^c])[1]$. D'où le morphisme canonique admet une section canonique

$$\sigma : F^*([X^c]) \to F^*([X^c/m]). \tag{12}$$

Théorème 3.3. — *Le morphisme évident*

$$\hom([\Delta^*][n], [X^c/m]) \xrightarrow{\sim} \hom([\Delta^*][n], z_0 X \otimes \Lambda[n])$$

des groupes de morphismes dans $K(\mathsf{PreShv}(\mathsf{Cor}/k))$ est un isomorphisme.

Démonstration. — Vu l'isomorphisme de l'équation (9), il suffit de demontrer que le morphisme $\hom([\Delta^*][n], [X^c/m]) \to \hom(\mathbb{Z}, M^c(X) \otimes \Lambda[n])$ est un isomorphisme. Pour X propre, le morphisme $\hom([\Delta^*][n], [X]) \to \hom(M(k), M(X)[n])$ analogue est un isomorphisme par [4, Theorem 8.1] (ou [8, Theorem 5.4.19], [9, Theorem 5.2.20]). Ce cas implique le cas où X n'est pas propre par le morphisme évident entre l'image du triangle distingué $[Y] \to [\overline{X}] \to [X^c] \to [Y][1]$ et le triangle distingué $M^c(Y) \to M^c(\overline{X}) \to M^c(X) \to M^c(Y)[1]$ (le dernier est distingué par [19, Proposition 4.1.5] ou [8, Proposition 5.5.5], [9, Proposition 5.3.5]). Puis le passage à $[X^c/m]$ et $M^c(X) \otimes \Lambda$ vient des triangles distingués $[X^c] \xrightarrow{m} [X^c] \to [X^c/m]$ et $M^c(X) \xrightarrow{m} M^c(X) \to M^c(X) \otimes \Lambda$. □

Définition 3.4. — Définissons Φ_R comme la composition

$$\begin{aligned}
&\hom_{D(k,\Lambda)}(\Lambda, R\pi_{X!}\Lambda_X(j)[n+2j]) \\
&\xrightarrow{\mathcal{D}_{et}} \hom_{D(k,\Lambda)}(R\pi_{X!}\Lambda_X(j)[n+2j], \Lambda)^{\#} \\
&\xrightarrow{\Phi^M_{et}} \hom_{DM^{eff}\left(k,\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right)}(M(k), M^c(X)(-j)[n-2j] \otimes \Lambda)^{\#} \\
&\xrightarrow{\Phi^{CH}_M} CH_j(X, n; \Lambda)^{\#}
\end{aligned}$$

où Φ^M_{et} est le morphisme induit par R_Λ défini dans la Section A, les identifications canoniques (16) et (17), et la section $\sigma : R\pi_{X!}\Lambda_X \to R_\Lambda(M^c(X) \otimes \Lambda)$ de l'Equation 12.

8. Pour un complexe de préfaisceau F^* et un complexe d'objets W^*, par $F^*(W^*)$, on veut dire le complexe total $\mathrm{Tot}(F^q(W^p))$.

4. Demonstration de la compatibilité

Dans cette section on montre les compatibilités affirmées dans l'introduction.

Constatons tout d'abord que le foncteur $\underline{C}_*$: $\mathsf{PreShv} \to \mathsf{Comp}(\mathsf{PreShv})$ s'étend à $\mathsf{Comp}(\mathsf{PreShv})$ en posant $(\underline{C}_* F^*)^n = \prod_{p+q=n} F^q(\Delta^{-p} \times -)$. Si l'on choisit correctement le signe des différentielles[9] il y a une inclusion canonique

$$\epsilon : F^* \to \underline{C}_* F^*$$

du complexe F^* dans le bicomplexe $\underline{C}_* F^*$ comme le colonne $p = 0$, qui est naturelle en F^*. La composition de $\underline{C}_*$ avec soi-même est donc munie de deux transformations naturelles canoniques

$$\underline{C}_* \epsilon, \epsilon_{\underline{C}_*} : \underline{C}_* \rightrightarrows \underline{C}_* \underline{C}_* \tag{13}$$

Lemme 4.1. — *Soit F un préfaisceau avec transferts. Alors, il existe une homotopie entre les deux inclusions $\underline{C}_* F \rightrightarrows \underline{C}_* \underline{C}_* F$.*

Remarque 4.2. — Cette propriété semble légèrement plus forte du fait que les deux inclusions sont des quasi-isomorphismes. Le style de la démonstration est bien connu en topologie algébrique sous le nom “Acyclic models”, cf. [3, Ch. VI, §12].

Démonstration. — Ce lemma est essentiellement dû au fait que les $[\Delta^m]$ sont $\mathbb{A}^1$-contractiles. Ajoutons quelques détails. Puisque $\underline{C}_*(-) = \underline{\mathrm{hom}}([\Delta^*], -)$ (hom interne dans $\mathsf{Comp}(\mathsf{PreShv}(\mathsf{Cor}/k))$) il suffit de montrer que la différence des deux projections canonique[10] $pr_1, pr_2 : [\Delta^* \times \Delta^*] \rightrightarrows [\Delta^*]$ est homotope à zéro.[11] Puisque pr_1 et pr_2 sont égaux on degré zéro, on peut construire un homotopie par récurrence une fois qu'on sait que $H^n C_* \underline{C}_* [\Delta^n] = 0$ pour $n > 0$. Pour tout F, l'inclusion $C_*(\epsilon) : C_* F \to C_* \underline{C}_* F$ est toujours un quasi-isomorphisme [14, Corollary 7.5], et il nous suffit de voir que $H^n C_* [\Delta^n] = 0$. Cela est vrai pour n'importe quel schéma contractile[12] pour les raisons classiques ([14, Lemma 7.4]), et c'est facile de voir que Δ^n est contractile.[13] □

---

9. Par exemple, le choix suivant marche. Pour $q - p = n$ on choisit la (p, q)-terme du différentiel $d^{n-1} : (\underline{C}_* F^*)^{n-1} \to (\underline{C}_* F^*)^n$ d'être $(-1)^p d^{q-1}_{\Delta^{-p}} + \sum_{j=0}^{1-p} (-1)^j F^q(\partial_j)$ où $\partial_j : \Delta^{-p} \to \Delta^{1-p}$ sont les cofaces de Δ^* et $d^{q-1}_Y : F^{q-1}(Y) \to F^q(Y)$ les différentielles de F^* en l'objet Y. Du point de vu du bicomplexe, nous avons inversé les différentielles verticales sur les colonnes impaires.

10. Par projections canoniques on veut dire les morphismes définis par les projections $\oplus_{p+q=n} [\Delta^p \times \Delta^q] \to [\Delta^n]$ vers les termes $p = 0$ ou $q = 0$.

11. Le complexe $[\Delta^*]$ (resp. $[\Delta^* \times \Delta^*]$) est celui induit par Yoneda et le schéma simplicial Δ^* (resp. bisimplicial $\Delta^* \times \Delta^*$).

12. C'est-à-dire, pour les schèmas $\pi_Y : Y \to k$ tel qu'il existe un morphisme $\gamma : k \to Y$ et un morphisme $H : \mathbb{A}^1_Y \to Y$ tel que $Hi_0 = \mathrm{id}_Y$ et $Hi_1 = \gamma \pi_Y$ où $i_0 : Y \to \mathbb{A}^1_Y$ est la section à zéro et $i_1 : Y \to \mathbb{A}^1_Y$ la section à 1.

13. Pour $H : \mathbb{A}^1_{\Delta^n} \to \Delta^n$ on peut choisir, par exemple, le morphisme induit par $t_i \mapsto s t_i$ pour $i > 0$ et $t_0 \mapsto 1 - s + s t_0$ où les t_i sont des coordonnées de Δ^n et s une coordonnée de $\mathbb{A}^1$.

Proposition 4.3. — *Les morphismes*

$$\Phi^M_{et} \circ \Phi^s_M : H_n^{sing}(X, \Lambda) \to \hom(R\pi_{X!}\Lambda_X, \Lambda[n]) \quad et$$
$$\Phi_{s,et} : H^n_{sing}(X, \Lambda) \cong \hom(\Lambda[n], R\pi_{X!}\Lambda_X)$$

sont compatibles avec les accouplements canoniques

$$H_n^{sing}(X, \Lambda) \times H^n_{sing}(X, \Lambda) \to \Lambda \quad et \tag{1}$$
$$\hom(\Lambda, R\pi_{X!}\Lambda_X) \times \hom(R\pi_{X!}\Lambda_X, \Lambda) \to \Lambda. \tag{2}$$

Remarque 4.4. — On espère que le lecteur ne se perd pas dans les détails de la preuve. Tout simplement, il s'agit de représenter un élément de $H_n^{sing}(X, \Lambda)$ (resp. $H^n_{sing}(X, \Lambda)$) par un morphisme $\Delta^*[n] \overset{\alpha}{\to} \mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{X} \overset{\phi}{\to} \mathcal{I}^*[n]$) pour des interprétations de $\mathfrak{X}$ bien choisies dans une catégorie convenable, et constater que les deux accouplements ne sont que la composition. Les parties les plus difficiles sont de se frayer un chemin à travers tous les modèles de $\mathfrak{X}$, et d'avoir le Lemme 4.1 sous la main.

Démonstration. — On utilise le Théorème 2.5 et l'Equation 9 pour représenter des éléments de $H_n^{sing}(X, \Lambda)$ et $H^n_{sing}(X, \Lambda)$ par des morphismes

$$\mathbb{Z}[n] \xrightarrow{\alpha} \underline{C}_* z_0 X \otimes \Lambda \quad \text{et} \quad \underline{C}_* z_0 X \xrightarrow{\phi} \mathcal{I}^*[n]$$

dans $K(\mathsf{PreShv}(\mathsf{Cor}/k))$ où $\Lambda \to \mathcal{I}^*$ est une résolution injective dans $\mathsf{Shv}_h(\mathsf{Cor}/k, \Lambda)$. Comme on avait imposé à $\mathcal{I}^*$ d'être Λ-linéaire, il y a une factorisation canonique $\underline{C}_* z_0 X \otimes \Lambda \xrightarrow{\psi} \mathcal{I}^*[n]$ et l'accouplement (1) n'est que l'image de la composition $\psi\alpha$ sous l'isomorphisme canonique $\Lambda \overset{\sim}{\to} \hom(\mathbb{Z}, \mathcal{I}^*)$. Pour la comparaison on compose avec $\epsilon : \mathcal{I}^* \to \underline{C}_* \mathcal{I}^*$ et on définit

$$(\alpha, \phi)_{sing} \overset{def}{=} \epsilon\, \psi\, \alpha \qquad \in \hom_{K(\mathsf{PreShv}(\mathsf{Cor}/k))}(\mathbb{Z}, \underline{C}_* \mathcal{I}^*)$$

On construit maintenant le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
 & {[X^c]} \arrow[r] \arrow[d] & z_0X \arrow[r] \arrow[d] & \underline{C}_* z_0 X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathcal{I}^* \\
{[\Delta^*]} \arrow[r, "\beta^\dagger"] \arrow[rr, bend right, "\alpha^\dagger"'] & {[X^c/m]} \arrow[r] \arrow[urrr, "\chi"] & z_0 X \otimes \Lambda \arrow[r] & \underline{C}_* z_0 X \otimes \Lambda \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd} \tag{14}$$

L'image de ϕ dans H^n_c est la composition avec le morphisme canonique $[X^c] \to \underline{C}_* z_0 X$ (Théorème 2.5). Via les isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}\hom([X^c/m], \mathcal{I}^*) \cong Z^0\mathcal{I}^*([X^c/m]) &\cong Z^0\mathcal{I}^*([X^c]) \oplus Z^1\mathcal{I}^*([X^c]) \\ &\cong \hom([X^c], \mathcal{I}^*) \oplus \hom([X^c], \mathcal{I}^*[1]),\end{aligned}$$

(cf. Remarque 3.2), le morphisme ϕ admet une factorisation canonique χ. Sous l'adjonction $(-)^\dagger : \hom([\Delta^*], -) \cong \hom(\mathbb{Z}, \underline{C}_*(-))$ l'élément α correspond à un morphisme $[\Delta^*] \stackrel{\alpha^\dagger}{\to} z_0X \otimes \Lambda$. Grace à l'isomorphisme du Théorème 3.3 ce dernier se relève en un morphisme canonique $\beta^\dagger$, et via la section canonique $\mathcal{I}^*([X^c]) \stackrel{\sigma}{\to} \mathcal{I}^*([X^c/m])$ de l'Equation 12 un élément

$$\mathcal{I}^*(\beta^\dagger)\sigma \in \hom(\mathcal{I}^*([X^c]), \mathcal{I}^*([\Delta^*])) \cong \hom(R\pi_{X!}\Lambda_X, \Lambda).$$

Pour calculer l'accouplement (2) de $\mathcal{I}^*(\beta^\dagger)\sigma$ et $[X^c] \to \mathcal{I}^*$, on compose $\beta^\dagger$ avec χ et on utilise l'isomorphisme canonique $\Lambda \stackrel{\sim}{\to} \hom([\Delta^*], \mathcal{I}^*)$ (Corollaire 2.6). Le morphisme adjoint $\underline{C}_*(\chi)\beta \in \hom_{K(\mathsf{PreShv}(\mathsf{Cor}/k))}(\mathbb{Z}, \underline{C}_*\mathcal{I}^*) \cong \Lambda$ du morphisme $\chi\beta^\dagger \in \hom([\Delta^*], \mathcal{I}^*) \cong \Lambda$ fournit le même élément de Λ, donc définissons

$$(\alpha, \phi)_{et} \stackrel{def}{=} \underline{C}_*(\chi)\beta \qquad \in \hom_{K(\mathsf{PreShv}(\mathsf{Cor}/k))}(\mathbb{Z}, \underline{C}_*\mathcal{I}^*).$$

L'égalité de $(\alpha, \phi)_{sing}$ et $(\alpha, \phi)_{et}$ découlera du diagramme suivant.

(15)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\eta"'] \arrow[rr, bend left, "\beta"] \arrow[rrr, bend left=40, "\alpha"] & \underline{C}_*[\Delta^*] \arrow[r, "\underline{C}_*(\beta^\dagger)"'] & \underline{C}_*[X^c/m] \arrow[r] \arrow[drr, bend right=10, "\underline{C}_*\chi"'] & \underline{C}_*z_0X \otimes \Lambda \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\triangle!"] & \mathcal{I}^* \arrow[d, "\epsilon"] \\
& & & \underline{C}_*\underline{C}_*z_0X \otimes \Lambda \arrow[r, "\underline{C}_*(\psi)"'] & \underline{C}_*\mathcal{I}^*
\end{tikzcd}$$

Rapellons-nous qu'il y a deux choix canoniques (Équation 13) pour le morphisme marqué avec $\triangle!$. Pour que le carré commute (dans $\mathsf{Comp}(\mathsf{PreShv}(\mathsf{Cor}/k))$), il faut choisir $\epsilon_{\underline{C}_*}$. Par contre, si on veut que le chemin de bas soit égal à la flèche $\underline{C}_*\chi$ (dans $\mathsf{Comp}(\mathsf{PreShv}(\mathsf{Cor}/k))$), il faut choisir $\underline{C}_*(\epsilon)$. Heureusement, ces deux choix sont égaux dans la catégorie d'homotopie (Lemme 4.1). D'où, dans $K(\mathsf{PreShv}(\mathsf{Cor}/k))$ nous avons $(\alpha, \phi)_{sing} = (\alpha, \phi)_{et}$. □

Proposition 4.5. — *Les morphismes Φ_{Sus} et Φ_R sont égaux.*

Démonstration. — C'est immédiat après la Proposition 4.3 et la Proposition A.1 :

Dans le cas $j = 0$, par définition, Φ_{Sus} est la composition du chemin supérieur dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\hom(\Lambda, R\pi_{X!}\Lambda_X[n]) \arrow[r, dash, "\Phi_{s,et}", "\cong"'] \arrow[d] & H^n_{sing}(z_0X, \Lambda) \arrow[d, "\wr|"] & \\
\hom(R\pi_{X!}\Lambda_X[n], \Lambda)^\# \arrow[r, "\Phi^M_{et}\circ\Phi^s_M"'] & H_n^{sing}(z_0X, \Lambda)^\# & CH^d(X, n; \Lambda)^\# \arrow[l, "\cong", "\Phi^{CH}_s"']
\end{tikzcd}$$

et Φ_R est la composition du chemin inférieur dans ce diagramme. Le cas $j = 0$ n'est que la Proposition 4.3 qui dit que le carré est commutatif.

Pour le cas $j < 0$, par définition nous avons $\Phi_{Sus,X} = Tr^{CH}\Phi_{Sus,\mathbb{A}^{-j}}Tr^{et}$. Puisque le cas $j = 0$ montre que $\Phi_{Sus,\mathbb{A}^{-j}_X} = \Phi_{R,\mathbb{A}^{-j}_X}$ il suffit de montrer que $\Phi_{R,X} = Tr^{CH}\Phi_{R,\mathbb{A}^{-j}_X}Tr^{et}$. Cela découle du diagramme suivant, dans lequel la composition des colonnes sont les morphismes Φ_R, par définition.

$$\begin{tikzcd}
\hom(\Lambda, R\pi_{X!}\Lambda_X(j)[n+2j]) \arrow[d, "\mathcal{D}_{et}"'] & \hom(\Lambda, R\pi_{\mathbb{A}^{-j}_X!}\Lambda_X[n]) \arrow[l, "Tr^{et}"'] \arrow[d, "\mathcal{D}_{et}"] \\
\hom(R\pi_{X!}\Lambda_X(j)[n+2j], \Lambda)^{\#} \arrow[r, "(Tr^{et})^{\#}"] \arrow[d, "\Phi^M_{et}"'] & \hom(R\pi_{\mathbb{A}^{-j}_X!}\Lambda_{\mathbb{A}^{-j}_X}[n], \Lambda)^{\#} \arrow[d, "\Phi^M_{et}"] \\
\hom(\mathbb{Z}[n], M^c(X)(-j)[-2j] \otimes \Lambda)^{\#} \arrow[d, "\Phi^{CH}_M"', "\text{(def.)}"] & \hom(\mathbb{Z}[n], M^c(\mathbb{A}^{-j}_X) \otimes \Lambda)^{\#} \arrow[l, "Tr^M"'] \arrow[d, "\Phi^{CH}_M"] \\
CH_j(X, n; \Lambda)^{\#} & CH_j(\mathbb{A}^{-j}_X, n; \Lambda)^{\#} \arrow[l, "Tr^{CH}"']
\end{tikzcd}$$

La commutativité du carré en bas est tautologique (c'est la définition de Φ^{CH}_M donné dans l'Equation 11). La commutativité du carré en haut n'est que l'associativité de la composition, et la commutativité du carré au centre est le sujet de la Proposition A.1. $\square$

Remarque 4.6. — Avec les travaux d Ayoub et Cisinski-Déglise sur la réalisation étale, et en particulier la preuve de sa compatibilité avec les six opérations, on obtient bien une compatibilité de la réalisation étale avec la dualité de Grothendieck-Verdier.

Il découle facilement de cette compatibilité avec la dualité et la Proposition 4.5 que quand X est lisse et équidimensionnel de dimension $d = \dim X$, l'isomorphisme de Suslin Φ_{Sus} est le morphisme Φ_{BL} de la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum sous les identifications canoniques fournis par la dualité, i.e., le carré suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^{n+2j}_c(X, \Lambda(j)) \arrow[r, phantom, "\overset{\Phi_{Sus}}{\cong}"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & CH_j(X, n; \mathbb{Z}/m)^{\#} \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \\
H^{2(d-j)-n}_{et}(X, \Lambda(d-j))^{\#} \arrow[r, "\Phi_{BL}"'] & H^{2(d-j)-n}_{\mathcal{M}}(X, \Lambda(d-j))^{\#}
\end{tikzcd}$$

Annexe A. La realisation étale

Dans [7], Ivorra définit un foncteur monoïdal symétrique (dont la cible est la catégorie dérivée des faisceaux de $\mathbb{Z}/m$-modules sur le petit site étale de k, avec m premier à la caractéristique de k)

$$R_\Lambda : DM^{\mathit{eff}}_{gm}(k)^{op} \to D(k, \mathbb{Z}/m).$$

On rappelle que ce foncteur admet la description suivante. On choisit un complexe acyclique $\mathbb{Z}/m \to J^*$ dans $\mathsf{Shv}_{et}(\mathsf{Cor}/k, \mathbb{Z}/m)$ tel que $H^p_{et}(Y, J^n) = 0$ pour tout $Y \in \mathsf{Sch}/k$, $p > 0$, et $n \geq 0$. Ivorra choisit la résolution de Godement mais on peut utiliser aussi le $\mathcal{I}^*$ choisi au-dessus (Théorème 2.5). Ce complexe induit alors un foncteur

$$\mathsf{Comp}(\mathsf{Cor}/k)^{op} \to D(k, \Lambda); \quad (\cdots \to Y_{-1} \to Y_0 \to Y_1 \to \dots) \mapsto \operatorname{Tot} J^*(Y_*)$$

qui se factorise par $DM^{\mathit{eff}}(k)$. Le lecteur peut consulter [10, Appendix A] pour plus de détails. En particulier, puisque $J^*(Y)$ calcule la cohomologie étale pour chaque $Y \in \mathsf{Sch}/k$, le complexe $J^*([X^c])$ calcule la cohomologie à support compact (cf. Equation 7).

Or, le morphisme canonique $[X^c] \to z_0 X$ devient un isomorphisme dans $DM^{\mathit{eff}}(k)$ ([19, Proposition 4.1.5] ou [8, Proposition 5.5.5]). Par conséquent, il y a des identifications canoniques et naturelles

(16)
$$R_\Lambda(M^c(X)) = R\pi_{X!}\Lambda_X, \qquad R_\Lambda(M^c(X) \otimes \Lambda) = R\pi_{X!}\Lambda_X \oplus R\pi_{X!}\Lambda_X[1]$$

où on écrit $\pi_S : S \to k$ pour le morphisme structural de $S \in \mathsf{Sch}/k$ (cf. la Remarque 3.2 pour la deuxième).

Par définition, $\mathbb{Z}(1)[2]$ dans $DM^{\mathit{eff}}(k)$ est l'image du complexe $([\mathbb{P}^1] \xrightarrow{\pi_{\mathbb{P}^1}} [k])$ concentré en degré 0 et 1. Puisque le groupe $H^n_{et}(\mathbb{P}^1, \Lambda)$ est nul pour $n \neq 0, 2$, et $H^0_{et}(k, \Lambda) \to H^0_{et}(\mathbb{P}^1, \Lambda)$ est un isomorphisme, l'image de $\mathbb{Z}(1)[2]$ sous R_Λ est $H^2_{et}(\mathbb{P}^1, \Lambda)$. Alors, l'isomorphisme $H^2_{et}(\mathbb{P}^1, \Lambda) \cong \Lambda(-1)$ induit une identification canonique

$$R_\Lambda(\mathbb{Z}(1)[2]) = \Lambda(-1)[-2]. \tag{17}$$

Proposition A.1. — *Avec les identifications canoniques (16) et (17) l'image du morphisme $Tr^M : M^c(X)(-j)[-2j] \to M^c(\mathbb{A}^{-j}_X)$ de* [19, Corollary 4.2.4] *sous la réalisation étale est le foncteur $(-)(j)[2j]$ appliqué au morphisme Tr^{et} : $R\pi_{\mathbb{A}^{-j}_X!}\Lambda_{\mathbb{A}^{-j}_X}(-j)[-2j] \to R\pi_{X!}\Lambda_{X!}$ de* [18, XVIII.2.8.1].

Démonstration. — Le premier morphisme s'identifie de façon canonique avec

$$M^c(X) \otimes \left(\Lambda(-1)[-2] \to M^c(\mathbb{A}^1)\right)^{\otimes(-j)}.$$

De façon similaire, la deuxième morphisme, s'identifie de façon canonique avec

$$R\pi_{X!}\Lambda_X \otimes (\Lambda(-1)[-2] \to R\pi_{\mathbb{A}^1!}\Lambda_{\mathbb{A}^1})^{\otimes(-j)},$$

cf. [18, XVIII.2.8, Thm. 2.9, Prop. 2.12]. Puisque la réalisation est un foncteur monoïdal, il suffit de traiter le cas $j=-1, X=k$.

Pour le morphisme Tr^M, considérons les morphismes de $\mathsf{Comp}(\mathsf{PreShv}(\mathsf{Cor}/k))$ suivants.

$$\left(\underset{0}{[\mathbb{P}^1]}\to\underset{1}{[k]}\right) \xrightarrow{a} [\mathbb{P}^1] \xrightarrow{b} \left(\underset{-1}{[k]}\to\underset{0}{[\mathbb{P}^1]}\right) \xrightarrow{c} z_0\mathbb{A}^1.$$

Par définition, l'image du premier objet dans $DM^{eff}(k)$ est $\mathbb{Z}(1)$, l'image du dernier est $M^c(\mathbb{A}^1)$, et l'image de la composition est Tr^M. Le morphisme c est le morphisme qui induit l'identification (16).

Le morphisme $Tr^{et}(-1)[-2]$ est par définition la composition

$$R\pi_{\mathbb{A}^1!}\Lambda \xrightarrow{d} R\pi_{\mathbb{P}^1!}\Lambda \xrightarrow{e} \underline{H}^2 R\pi_{\mathbb{P}^1!}\Lambda[-2] \overset{f}{\cong} \Lambda(-1)[-2].$$

Le morphisme f est $(-1)[-2]$ du morphisme qui induit l'identification (17).

La réalisation de a (resp. b) est e (resp. d). D'où, sous les identifications canoniques, l'image de Tr^M et $Tr^{et}(-1)[-2]$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Bloch – "Algebraic cycles and higher K-theory", *Adv. in Math.* **61** (1986), 3, p. 267–304.

[2] D. Cisinski & F. Déglise – "Triangulated categories of mixed motives, preprint", Arxiv preprint arXiv:0912.2110v3 (2012).

[3] A. Dold – *Lectures on algebraic topology*, Springer, 1972.

[4] E. M. Friedlander & V. Voevodsky – "Bivariant cycle cohomology", in *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, 2000, p. 138–187.

[5] T. Geisser – "Applications of de Jong's theorem on alterations", in *Resolution of singularities (Obergurgl, 1997)*, Progr. Math., vol. 181, Birkhäuser, 2000, p. 299–314.

[6] F. Ivorra – "Réalisation l-adique des motifs mixtes", Thèse, Université Paris 6, 2005, `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0762`.

[7] ______, "Réalisation l-adique des motifs triangulés géométriques. I", *Doc. Math.* **12** (2007), p. 607–671.

[8] S. Kelly – "Triangulated categories of motives in positive characteristic", Thèse, Université Paris 13, Australian National University, 2012.

[9] ______ – "Voevodsky motives and $l$dh-descent", *Astérisque* (2017), no. 391, p. iv+125.

[10] S. Kelly & S. Saito – "Weight homology of motives", *International Mathematics Research Notices* (2016), p. rnw111.

[11] M. Levine – "Techniques of localization in the theory of algebraic cycles", *Journal of Algebraic Geometry* **10** (2001), 4, p. 299–364.

[12] C. Mazza, V. Voevodsky & C. Weibel – *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Mathematics Monographs, vol. 2, American Mathematical Society, 2006.

[13] M. Nagata – "Imbedding of an abstract variety in a complete variety", *J. Math. Kyoto Univ.* **2** (1962), p. 1–10.

[14] A. Suslin & V. Voevodsky – "Singular homology of abstract algebraic varieties", *Invent. Math.* **123** (1996), 1, p. 61–94.

[15] ———, "Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients", in *The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998)*, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 548, Kluwer Acad. Publ., 2000, p. 117–189.

[16] ———, "Relative cycles and Chow sheaves", in *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, 2000, p. 10–86.

[17] A. A. Suslin – "Higher Chow groups and etale cohomology", in *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, 2000, p. 239–254.

[18] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3* – Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305, Springer, Berlin, 1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat.

[19] V. Voevodsky – "Triangulated categories of motives over a field", in *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, 2000, p. 188–238.