SOMMAIRE DU N° 126

SMF

Mot du Président 3

MATHÉMATIQUES

Un siècle et demi de recherches sur l'hypothèse de Riemann, *M. Balazard* 7

Les travaux de Iooss et Plotnikov sur les vagues tri-dimensionnelles, *T. Alazard* 24

JEUX MATHÉMATIQUES

2000 ans d'énigmes mathématiques, *M.-J. Pestel* 47

ENSEIGNEMENT

La « masterisation » à l'épreuve des textes officiels – deuxième année, *V. Girardin* .. 59

ACTUALITÉ

Travaux de Elon Lindenstrauss, *Ph. Michel* 69

Yves Meyer reçoit le prix Gauss à l'ICM, *S. Jaffard, F. Planchon* 76

Qui est Ngô Bao Châu ? *M. Andler* 80

Ngô Bao Châu reçoit la Médaille Fields 2010, *G. Laumon* 82

Cédric Villani reçoit la médaille Fields, *C. Mouhot* 85

Les travaux de Stanislav Smirnov, *W. Werner* 88

La rentrée 2010 après l'ICM, *G. Métivier* 93

INFORMATIONS

Quelques données chiffrées sur l'attribution des PES 2009, *B. Helffer* 97

L'institut Africain des Sciences Mathématiques AIMS-Sénégal, *V. Rivasseau* 100

Prix Fermat 2009 105

Le Prix André Lichnerowicz pour la géométrie de Poisson, *Y. Kosmann-Schwarzbach* .. 105

Clubs universitaires et stages d'été pour lycéens, *M. Andler* 107

CARNET

Malliavin et moi, *M. Vergne* 111

Paul Malliavin (1925 - 2010) et son calcul (1976 - ...) *M. Yor* 114

Malliavin et l'analyse de Fourier, *J.-P. Kahane* 116

Naoufel Ben Abdallah, *P. Degond* 121

LIVRES 123

SMF

Mot du Président

Les annonces du 19 août ont un peu occulté d'autres nouvelles importantes de l'été qui les ont précédées et qui concernent la représentation de la communauté mathématique au niveau européen et mondial. La première est l'élection comme future présidente de la Société mathématique européenne (SME-EMS) de Marta Sanz Solé lors de la réunion de Sofia, avec Mireille Martin-Deschamps réélue au bureau de la SME, puis l'élection à Bangalore comme future présidente de l'IMU de Ingrid Daubechies. Dans le deuxième cas, cette élection marque aussi un signe d'ouverture de l'Union mathématique internationale (UMI-IMU) vers des mathématiques peu représentées jusqu'à présent. Il faudra voir si cela se traduit au niveau du congrès mondial d'une redéfinition des sections plus en phase avec l'évolution des mathématiques. Notons aussi que l'IMU aura désormais un siège permanent (pour au moins 8 ans) à Berlin. La position défendue par les cinq délégués français qu'il valait mieux en rester à une structure légère est apparue très minoritaire. On notera enfin avec plaisir l'entrée de W. Werner dans les instances de l'IMU.

Mais revenons maintenant vers les autres bonnes nouvelles de l'été : deux médailles Fields attribuées à des français Ngo Bao Chau et Cédric Villani, le prix Gauss attribué à Yves Meyer et l'occasion qui est donnée aux lauréats et à la communauté des mathématiciens de parler de mathématiques, même si les journalistes se sont plus focalisés sur la question : « Pourquoi l'école mathématique est-elle excellente ? » que sur la question « À quoi servent les mathématiques ».

Si l'écho dans la presse des attributions des médailles Fields a été amplifié par la personnalité de Cédric Villani, il ne faut pas sous-estimer le travail préliminaire mené auprès des journalistes par la cellule de communication constituée de M. Andler, M. Esteban (SMAI), B. Helffer (SMF), J. Jammes (IHÉS) et E. Janvresse (CNRS) qui a annoncé autant qu'elle pouvait le faire l'importance de l'événement et préparé la mise à disposition des journalistes de toute l'information sur toute la délégation française. La plupart des journaux ont transmis l'information très rapidement (19 août ou 20 août) en particulier l'Agence France Presse, puis certains (*Le Monde*, *Le Figaro*, *Libération*, *Les Échos*,...) ont publié un deuxième article plus

substantiel. La télévision et des hebdomadaires (dont *Le Point*, *Télérama* et *Paris-Match*) ont aussi rendu compte de l'événement. Certes le message qui ressort des articles, des interviews ou des interventions donne une image un peu brouillée sur la communauté mathématique – en particulier le rôle des universités y apparaît masqué par celui des classes préparatoires et des grandes écoles – mais il y a longtemps que nous n'avions pas obtenu un tel écho.

Il me semble que les deux sociétés savantes SMAI et SMF qui se sont impliquées à fond et ensemble dans cette action (et également à Hyderabad dans l'organisation d'une réception rassemblant tous les lauréats présents et la plupart des dirigeants des grandes sociétés et tous les participants de l'école française) ont par là même montré l'importance de leur rôle de représentants des mathématiques, indépendamment des établissements dans lesquels travaillent les mathématiciens.

La SMF a aussi été présente à Hyderabad par l'intermédiaire d'un stand tenu par O. Ramaré, stand qui a joué un rôle de lieu de discussion avec en particulier beaucoup de visiteurs indiens.

Ce vent favorable pour les mathématiques françaises au niveau médiatique ne doit pas nous faire oublier les inquiétudes qui pèsent sur l'avenir. Le passage à la LRU conduit à s'interroger sur la pérennité des financements donnés par le ministère de la recherche pour les institutions auxquelles nous sommes attachés (comme le CIRM, dont la SMF est coresponsable avec le CNRS). Le mot magique du grand emprunt est devenu le seul espoir dans une situation compliquée et nous avons donc appuyé dans la mesure de nos moyens le développement de projets où le CIRM et les autres grands instituts à vocation nationale pourraient assurer leur financement et leur développement pour les années qui viennent. La réussite de ces demandes dépend fortement de notre capacité à les formuler en présentant un front uni et en insistant sur leur fonction nationale.

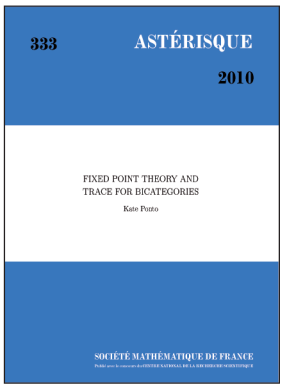
Cette implication de la SMF dans des demandes à l'intérieur du grand emprunt pour les grands instruments des mathématiques ne doit pas occulter les inquiétudes que nous devons en même temps exprimer sur le grand nombre de laboratoires de qualité qui risquent d'être exclus de la distribution des prix d'excellence et dont le développement risque d'être étouffé faute de crédits récurrents suffisants. Le texte de G. Métivier publié par la *Gazette* dans ce numéro montre que cette inquiétude est partagée par l'INSMI qui devient pour les mathématiques la seule grande institution ayant explicitement dans ses missions le développement d'une politique scientifique pour les mathématiques au niveau national. Nous avons relayé cette inquiétude lors de la table ronde organisée par la ministre Valérie Pécresse le 27 septembre. Elle s'est voulue rassurante sur les budgets pour les universités de l'année prochaine en indiquant une annonce ministérielle prochaine.

La SMF reste vigilante sur les questions d'enseignement. Outre la poursuite de sa réflexion, en particulier enrichie par des tables rondes comme celles de juin, elle essaye d'éviter sur la question des programmes des lycées l'isolement des mathématiciens et multiplie les contacts entre disciplines. Dans cet esprit, elle s'implique dans des structures rassemblant toutes les sociétés savantes comme le forum des sociétés savantes ou au niveau des sciences : *Action Sciences*.

Enfin la SMF poursuit ses actions vers le grand public et sous la conduite de sa nouvelle vice-présidente Nalini Anantharaman va essayer de développer des actions en province. Nous espérons par exemple que certains conférenciers à la BnF puissent refaire leur conférence (Avignon et Grenoble sont pressentis). Le premier événement de cette année, principalement à destination des élèves des classes préparatoires et de Licence sera la conférence le 12 novembre prochain d'Alain Connes à l'IHP.

Une remarque pour finir sur notre désir d'informer au mieux les adhérents de la SMF et au-delà toute la communauté mathématique. Nous essayons de donner indépendamment de la *Gazette* un certain nombre d'informations en temps réel sur notre page web. L'agenda vous donne également une idée assez précise de l'action des membres du bureau et du président et de toutes leurs interventions.

Le 1er octobre 2010
Bernard Helffer



Astérisque 333

Fixed Point Theory and Trace for Bicategories

Kate Ponto

Le théorème du point fixe de Lefschetz découle facilement de l'identification du nombre de Lefschetz avec l'indice de point fixe. Cette identification est une conséquence de la fonctorialité de la trace dans les catégories symétriques monoïdales. Ce sont des raffinements du nombre de Lefschetz et de l'indice de point fixe qui fournissent la réciproque du théorème du point fixe de Lefschetz. Une partie importante de ce théorème est l'identification de ces invariants. Nous définissons une généralisation de la trace dans les catégories symétriques monoïdales, en une trace dans les bicatégories avec ombres. Nous montrons que les invariants utilisés dans la réciproque du théorème du point fixe de Lefschetz sont des exemples de cette trace, et que la fonctorialité de la trace fournit certaines identifications nécessaires. Les méthodes présentées ici n'utilisent pas de technique simpliciale et peuvent donc être généralisées facilement dans d'autres contextes.

The Lefschetz fixed point theorem follows easily from the identification of the Lefschetz number with the fixed point index. This identification is a consequence of the functoriality of the trace in symmetric monoidal categories. There are refinements of the Lefschetz number and the fixed point index that give a converse to the Lefschetz fixed point theorem. An important part of this theorem is the identification of these different invariants. We define a generalization of the trace in symmetric monoidal categories to a trace in bicategories with shadows. We show the invariants used in the converse of the Lefschetz fixed point theorem are examples of this trace and that the functoriality of the trace provides some of the necessary identifications. The methods used here do not use simplicial techniques and so generalize readily to other contexts.

Prix public* : 30 € - prix membre* : 21 €
* frais de port non compris

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

MATHÉMATIQUES

Un siècle et demi de recherches sur l'hypothèse de Riemann

Michel Balazard[1]

1. L'article de Riemann

L'hypothèse[2] de Riemann est contenue dans une phrase de l'article *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, publié par Riemann en 1860 à l'occasion de son admission comme membre correspondant à l'académie de Berlin[3] :

> *« Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr warscheinlich, das alle Wurzeln reell sind.*[4] *»*

Cette phrase concerne les racines de la fonction

$$\Xi(z) = \xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) \quad (s = \frac{1}{2} + iz), \tag{1}$$

où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler, et où

$$\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}\,. \tag{2}$$

La fonction ζ n'est pas une nouvelle venue en 1859. Le premier résultat la concernant est la divergence de la série harmonique

$$\zeta(1) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} = \infty,$$

démontrée par Oresme vers 1350 dans ses *Quaestiones super geometriam Euclidis*. Au XVIII[e] siècle, Euler découvre les propriétés fondamentales de ζ. Il résout d'abord

[1] UMR 2615, CNRS, Université Indépendante de Moscou, Russie.

[2] On dirait aujourd'hui « conjecture » au lieu d'« hypothèse » qui a plutôt le sens de *prémisse* ou de *condition* d'un énoncé mathématique.

[3] L'article fut présenté en 1859 à l'académie. Les références de la plupart des travaux originaux cités dans cet article sont regroupées dans la bibliographie qui le termine.

[4] « On trouve en effet entre ces limites un nombre à peu près égal à celui-ci de racines réelles, et il est très probable que toutes les racines sont réelles. » *Traduction de L. Laugel.*

le « problème de Bâle » (présentation en 1735, publication en 1740) sur le calcul de $\zeta(2)$ et trouve, plus généralement, l'expression de $\zeta(2k)$ pour k entier positif :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1}\frac{B_{2k}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} \quad (k\in\mathbb{N}^*), \tag{3}$$

où les B_j sont les nombres de Bernoulli, définis par l'identité formelle

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{j\geqslant 0} B_j\frac{t^j}{j!}.$$

Il donne ensuite l'identité (dite du « produit eulérien »)

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}, \tag{4}$$

où le produit porte sur les nombres premiers (présentation en 1737, publication en 1744). C'est une formulation analytique du théorème fondamental de l'arithmétique, et Euler en déduit la divergence de la série des inverses des nombres premiers puisque, pour $s=1$, le produit est infini. Enfin il découvre l'équation fonctionnelle de ζ :

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos(\pi s/2)\Gamma(s)\zeta(s), \tag{5}$$

la démontrant quand s est entier, et la considérant comme très plausible pour tout s réel (présentation en 1749, publication en 1768).[5]

On doit à Riemann une avancée capitale : l'étude de $\zeta(s)$ comme fonction de variable complexe. La série (2) définit d'abord une fonction analytique de la variable s dans le demi-plan $\sigma>1$ (en posant, ici et dans toute la suite, $\sigma=\Re s$ et $\tau=\Im s$). Elle y vérifie l'identité eulérienne (4), qui prouve notamment que $\zeta(s)$ ne s'annule pas dans ce demi-plan. En utilisant des techniques alors très récentes d'analyse complexe (théorème des résidus) et harmonique (inversion de Fourier)[6], Riemann obtient un ensemble impressionnant de résultats :

• le prolongement méromorphe au plan tout entier, avec un seul pôle, simple, en $s=1$, et de résidu 1 ;

• deux démonstrations de l'équation fonctionnelle (5), qui montre notamment que les seuls zéros de ζ dans le demi-plan $\sigma<0$ sont les nombres entiers strictement négatifs pairs (dits zéros « triviaux » de ζ) ;

• l'approximation

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} \tag{6}$$

pour le nombre $N(T)$ de zéros $\rho=\beta+i\gamma$ de ζ dans la « bande critique » $0\leqslant\beta\leqslant 1$ (dits zéros « non triviaux » de ζ) tels que $0<\gamma\leqslant T$;

[5] En fait, Euler étudie la série alternée $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}n^{-s} = (1-2^{1-s})\zeta(s)$ et la définit par le procédé de sommation d'Abel quand s est un nombre entier négatif ou nul.

[6] Riemann a d'ailleurs contribué de façon essentielle à ces deux théories ; dans sa thèse pour l'analyse complexe, et dans son mémoire d'habilitation sur les séries trigonométriques pour l'analyse harmonique.

• l'identité remarquable suivante

$$\pi(x)+\frac{1}{2}\pi(x^{1/2})+\frac{1}{3}\pi(x^{1/3})+\ldots \;=\; \mathrm{li}(x)-\sum_{\rho}\mathrm{li}(x^{\rho})-\log 2 + \int_x^{\infty}\frac{dt}{t(t^2-1)\log t}\quad (x>1,\ x\neq p^{\nu}), \tag{7}$$

où

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1$$

est la fonction de comptage des nombres premiers,

$$\mathrm{li}(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_0^{1-\varepsilon}+\int_{1+\varepsilon}^{x}\Big)\frac{dt}{\log t}$$

est la fonction « logarithme intégral »,[7] et où la somme $\sum_\rho$ porte sur les zéros non triviaux de ζ et doit être calculée en groupant ρ et $1-\rho$.

Insistons : la relation (7) n'est pas une formule asymptotique ou approchée, mais une identité parfaite. En particulier, le second membre de (7) est une fonction à valeurs *rationnelles*, constante dans chaque intervalle sans puissance de nombre premier.

En termes de la fonction Ξ définie par (1), le prolongement méromorphe et l'équation fonctionnelle s'expriment simplement ainsi : Ξ est une fonction entière paire. Ses zéros $\alpha=(\rho-1/2)/i$ (où ρ désigne un zéro non trivial de ζ) sont situés dans la bande horizontale $|\Im z|\leqslant 1/2$. L'hypothèse de Riemann est que ces zéros α sont réels, autrement dit que les zéros non triviaux ρ de ζ sont tous situés sur la « droite critique » d'équation $\sigma=\frac{1}{2}$.

Riemann évalue le nombre des α dont la partie réelle se trouve entre 0 et T par la formule (6), puis en déduit la décomposition en produit infini

$$\Xi(z)=\Xi(0)\prod_{\alpha}\Big(1-\frac{z^2}{\alpha^2}\Big), \tag{8}$$

où le produit porte sur les α de partie réelle positive.

Revenons maintenant à la phrase de Riemann citée ci-dessus : elle contient une affirmation (man findet) et une conjecture (es ist sehr warscheinlich). L'affirmation concerne le nombre $N_0(T)$ des zéros *critiques* de ζ : ceux qui se trouvent sur la droite critique $\Re s=1/2$ (et qui correspondent à des α réels). On peut interpréter cette affirmation comme une équivalence asymptotique :

$$N_0(T)\sim N(T)\quad (T\to\infty) \tag{9}$$

et l'hypothèse de Riemann est simplement l'égalité $N_0(T)=N(T)$ valable pour tout T (ou, ce qui revient au même, pour une suite de valeurs de T tendant vers l'infini).

Jusqu'à présent, même la version faible (9) est une question non résolue (voir §2.3 ci-dessous) et il est possible que Riemann se soit un peu avancé à ce sujet. Cependant, cette affirmation s'appuyait sur des recherches approfondies concernant

[7] On a $\mathrm{li}(x)\sim x/\log x$ $(x\to\infty)$.

un développement de la fonction Ξ ; quand les brouillons de Riemann furent étudiés et magistralement présentés par Siegel en 1932, on s'aperçut à quel point Riemann était en avance sur son époque.

N'étant pas un exposé totalement détaillé, l'article de Riemann a fourni à ses lecteurs les plus attentifs un programme de travail, avec des indications remarquablement précises pour sa réalisation.[8] Les décennies suivantes ont vu la réalisation partielle de ce programme, grâce notamment aux efforts de Weierstrass, von Mangoldt, Hadamard et la Vallée-Poussin ; l'évènement central étant la démonstration en 1896 par ces deux derniers du théorème des nombres premiers :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \to \infty). \tag{10}$$

Insistons encore sur un aspect important de l'article de Riemann : le rôle de l'analyse de Fourier. D'une part l'inversion de Fourier permet d'obtenir la formule explicite (7) à partir de la factorisation (8). D'autre part, la fonction Ξ est elle-même une transformée de Fourier :

$$\Xi(z) = 4\int_1^\infty \frac{d\big(x^{3/2}\psi'(x)\big)}{dx} x^{-1/4}\cos\big(\frac{1}{4}z\log x\big)\,dx, \tag{11}$$

où

$$\psi(x) = \sum_{n\geqslant 1} e^{-n^2\pi x} \tag{12}$$

est « la moitié » de la fonction thêta de Jacobi (qui correspond à une sommation pour $n \in \mathbb{Z}$ dans (12)). La formule (11) découle de la seconde démonstration de Riemann de l'équation fonctionnelle et fait apparaître celle-ci immédiatement sous forme symétrique.

2. Approximations de l'hypothèse de Riemann

L'hypothèse de Riemann n'est toujours pas confirmée, ni infirmée. Cependant de nombreux résultats positifs ont été établis dans sa direction, versions affaiblies ou variantes de l'énoncé de Riemann. S'ils n'ont pas permis de résoudre cette énigme, ces travaux ont néanmoins considérablement développé les techniques de la théorie analytique des nombres. Une fois démontrée, l'hypothèse de Riemann rendrait caducs les résultats mentionnés dans ce paragraphe. Les techniques, elles, resteront.

[8] Par exemple, pour la formule du produit (8), Riemann donne quelques brèves indications relatives au comportement de fonctions analytiques, qui seront reprises et développées plus tard par Hadamard.

2.1. Régions sans zéros

Compte tenu de la symétrie des zéros non triviaux de ζ par rapport à la droite $\sigma = 1/2$, l'hypothèse de Riemann équivaut au fait que le demi-plan $\sigma > 1/2$ ne contienne aucun zéro de ζ. Il est intéressant de décrire des régions de ce demi-plan aussi grandes que possible, sans zéro de ζ. Voici les résultats les plus importants.

• On peut chercher des valeurs de T_0 aussi grandes que possible telles que la demi-bande $\{\sigma > 1/2, |\tau| \leqslant T_0\}$ soit une région sans zéro. L'une des premières valeurs fut publiée par Gram (1903) ($T_0 \approx 65$)[9] et le meilleur résultat actuellement disponible est celui de Gourdon et Demichel ($T_0 \approx 2 \cdot 10^{12}$).[10] Cette branche de la théorie de la fonction ζ est évidemment liée au calcul scientifique et à l'évolution de l'algorithmique et des technologies informatiques. Quant aux idées mises en jeu, il faut mentionner essentiellement l'apport de Turing (1953), qui donna une méthode de détermination de T_0 ne nécessitant des calculs de $\zeta(s)$ que sur la droite critique $\sigma = 1/2$, où l'on dispose de la très précise formule de Riemann-Siegel.

• En 1899, la Vallée Poussin montra que la région

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_1}{\log|\tau|}, \quad |\tau| \geqslant T_1 \tag{13}$$

est sans zéros de ζ, pour des valeurs positives explicites[1] de c_1 et T_1. L'obtention de valeurs de c_1 (aussi grande que possible) et T_1 (aussi petite que possible) est cruciale pour l'obtention de certains résultats numériquement explicites en théorie des nombres premiers. Les meilleures constantes connues sont dues à Kadiri (2005 : $c_1 = (5,6969)^{-1}$, $T_1 = 2$).

La région (13) de la Vallée Poussin constitue une limite infranchissable dans certaines situations rencontrées dans la théorie des nombres premiers et entiers généralisés de Beurling. Dans cette théorie, les « nombres premiers généralisés » sont simplement des nombres $\beta_n > 1$, formant une suite B croissante et tendant vers l'infini avec n ; les « nombres entiers généralisés » sont les éléments du semi-groupe multiplicatif engendré par les β_n. Dans un article devenu classique (1937), Beurling a étudié quelles variations de la fonction de comptage des nombres entiers généralisés (autour de la fonction « partie entière », fonction de comptage des nombres entiers ordinaires) laissent stable le théorème des nombres premiers. L'outil analytique essentiel est naturellement la fonction zêta généralisée

$$\zeta_B(s) = \prod_n \frac{1}{1-\beta_n^{-s}}.$$

Diamond, Montgomery et Vorhauer (2006) ont démontré pour tout $\theta > 1/2$ l'existence d'une suite B de nombres premiers généralisés telle que la fonction ζ_B

[9] Riemann lui-même avait effectué des calculs numériques assez précis dont on a retrouvé la trace dans ses brouillons.

[10] Cependant, Demichel et Saouter (2010) attirent l'attention sur le fait que « The official status of these verifications is not clear : Gourdon and Demichel's work has never been independently verified ».

[1] La région sans zéro de la Vallée Poussin est $\sigma \geqslant 1 - \frac{0{,}0328214}{\log\left(\max(|\tau|,574)\right) - 3{,}806}$.

se prolonge méromorphiquement au demi-plan $\sigma > \theta$, avec un unique pôle en $s = 1$, une infinité de zéros sur la courbe $\sigma = 1 - a/\log|\tau|$, et aucun zéro à droite de cette courbe[2].

• Après des avancées significatives de Littlewood (1922) et Tchudakoff (1938) entre autres, Korobov et Vinogradov obtinrent indépendamment en 1958 la meilleure région sans zéro actuellement connue :

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_2}{(\log|\tau|)^{2/3}(\log\log|\tau|)^{1/3}}, \quad |\tau| \geqslant T_2. \tag{14}$$

Le cœur de la démonstration est une analyse approfondie des sommes exponentielles $\sum_{N<n\leqslant 2N} n^{i\tau}$. L'exposé le plus complet de la théorie de Korobov et Vinogradov est celui de Ford (2002), qui donne également les meilleures valeurs numériques actuellement disponibles : $c_2 = (57,54)^{-1}$, $T_2 = 3$.

2.2. Théorèmes de densité

Plutôt que de chercher des régions sans zéro, on peut se contenter de régions contenant peu de zéros de la fonction ζ. Cette problématique conduit à l'étude de la fonction de deux variables

$$N(\sigma, T) = \mathrm{card}\{\rho, \quad \Re\rho > \sigma, |\Im\rho| \leqslant T, \zeta(\rho) = 0\}.$$

Il s'agit alors de majorer au mieux la quantité $N(\sigma, T)$, l'hypothèse de Riemann apparaissant comme l'égalité $N(\sigma, T) = 0$ ($\sigma > 1/2$, $T > 0$).

Le premier résultat est

$$N(\sigma, T) = O_\sigma(T) \quad (T \to \infty, \sigma > 1/2),$$

obtenu par Bohr et Landau (1914), et amélioré par Carlson (1921) sous la forme

$$N(\sigma, T) = O_\varepsilon(T^{c(\sigma)(1-\sigma)+\varepsilon}) \quad (T \geqslant 1, \sigma > 1/2, \varepsilon > 0), \tag{15}$$

avec $c(\sigma) = 4\sigma$. Une conjecture plus faible que l'hypothèse de Riemann, et toujours ouverte, est *l'hypothèse de densité* affirmant qu'on peut prendre $c(\sigma) = 2$ dans (15). L'hypothèse de densité conduit au résultat

$$p_{n+1} - p_n = O_\varepsilon(p_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

pour les différences entre nombres premiers consécutifs, et l'hypothèse de Riemann ne permet pas d'améliorer cette estimation.[3]

La meilleure fonction $c(\sigma)$, constante et dont on sait qu'elle est admissible dans (15), est $12/5$ (Huxley, 1972). L'hypothèse de densité est connue pour $\sigma > 25/32$ (Bourgain, 2000).

---

[2] On peut prendre par exemple $a = 2(1-\theta)$.

[3] En particulier, on ne sait pas démontrer qu'il existe toujours un nombre premier entre deux carrés consécutifs, même en admettant l'hypothèse de Riemann.

2.3. Zéros critiques

Une autre façon d'approcher l'hypothèse de Riemann est d'étudier le nombre $N_0(T)$ de zéros de ζ sur le segment $[1/2, 1/2+iT]$. Le premier résultat non trivial fut obtenu par Hardy (1914) : il existe une infinité de zéros critiques. Par la suite, Hardy et Littlewood (1921) obtinrent l'estimation $N_0(T) \gg T$, et Selberg (1942) la borne inférieure $N_0(T) \gg T \log T$. Au vu de (6), cela signifie qu'il existe une proportion strictement positive de zéros critiques parmi les zéros non triviaux de ζ.

Obtenir des minorations explicites de cette proportion est une tâche difficile. Le meilleur résultat actuellement connu (40%) est dû à Conrey (1989).

On peut considérer que ces résultats sont des théorèmes de densité : il s'agit d'obtenir une majoration du type $N(1/2, T) \leqslant cT \log T$, avec la constante c la plus petite possible. De fait, les méthodes dans les deux cas sont assez similaires et font notamment appel à une technique de « mollification » : on multiplie $\zeta(s)$ par une fonction $M(s)$ convenable de sorte que les oscillations de $\zeta(s)M(s)$ soient suffisammment contrôlées.

3. Fonctions entières à zéros réels

Les travaux décrits au paragraphe précédent ressortissent à une approche « interne » de l'hypothèse de Riemann. On peut également envisager une approche « externe » comme suit : considérer l'ensemble $\mathcal{R}$ des fonctions entières (ou méromorphes) dont tous les zéros sont réels (ou sur la droite critique) ; étudier les propriétés de stabilité (algébriques, topologiques, etc.) de cet ensemble ou de sous-ensembles définis par certaines contraintes ; donner de nombreux exemples de telles fonctions ; tout cela dans l'espoir de « forcer » la fonction Ξ (ou ζ) à appartenir à $\mathcal{R}$...

Nous allons donner quelques-uns des résultats les plus frappants obtenus dans cet esprit.

3.1. Le théorème du lieutenant Taylor

> *« Flight-Lieutenant P.R. Taylor was missing, believed killed, on active service in November 1943. »*

Ainsi commence une remarquable contribution à la théorie de la fonction ζ, préparée pour publication en 1944 par Rees et Titchmarsh à partir des manuscrits laissés par Taylor. Le §1 contient une démonstration du théorème suivant : les zéros de la fonction $\xi_1(s+1/2) - \xi_1(s-1/2)$ sont tous sur la droite $\sigma = 1/2$, où l'on a posé

$$\xi_1(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

La démonstration, classique et élégante, repose sur le principe de l'argument et un théorème de Littlewood que Turing utilisera également dans son article de 1953. Velasquez Castañon (2010) a étendu la méthode de Taylor à un cadre très général, et montré que de nombreux résultats récents découlent naturellement de cette approche.

3.2. Transformées de Fourier à zéros réels

La théorie des transformées de Fourier à zéros réels est un avatar moderne d'une des branches de la vénérable « théorie des équations » : celle, associée aux noms de Descartes, Budan, Fourier, Sturm, Hermite, Biehler, Laguerre, Jensen, Pólya, Schur entre autres, qui traite de la séparation des racines réelles d'un polynôme ou plus généralement d'une fonction entière, et de la stabilité par diverses opérations de classes de fonctions qui n'ont que des zéros réels. Citons les principaux résultats se rapportant à notre sujet.

3.2.1. Approximations de la fonction Ξ

On peut récrire (11) sous la forme

$$\Xi(z) = 2\int_0^\infty \Phi(u)\cos zu\,du,$$

avec

$$\Phi(u) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(2n^4\pi^2 e^{\frac{9}{2}u} - 3n^2\pi e^{\frac{5}{2}u})e^{-n^2\pi e^{2u}}.$$

La fonction Φ est paire (d'après l'équation fonctionnelle de la fonction thêta de Jacobi) et il est intéressant d'en considérer des approximations, paires elles aussi, par exemple :

$$\Phi_N(u) = \sum_{n=1}^{N} e^{-2n^2\pi\cosh 2u}\big(8\pi^2 n^4\cosh(9u/2) - 12\pi n^2\cosh(5u/2)\big).$$

On pose naturellement ensuite

$$\Xi_N(z) = 2\int_0^\infty \Phi_N(u)\cos zu\,du.$$

Pólya (1926) a démontré que les zéros de Ξ_1 sont réels, et Hejhal (1990) que la proportion de zéros réels de toute fonction Ξ_N est asymptotiquement 100%.

3.2.2. La constante de de Bruijn-Newman

Newman (1976) a démontré l'existence d'une constante Λ telle que la fonction

$$\Xi_\lambda(z) = 2\int_0^\infty e^{\lambda u^2}\Phi(u)\cos zu\,du$$

n'a que des zéros réels si, et seulement si $4\lambda \geqslant \Lambda$. On appelle Λ la constante de de Bruijn-Newman, car de Bruijn (1950) avait démontré la réalité des zéros de Ξ_λ pour $\lambda \geqslant 1/8$. L'hypothèse de Riemann équivaut donc à l'inégalité $\Lambda \leqslant 0$. Le meilleur encadrement connu de Λ est

$$-2,7\cdot 10^{-9} < \Lambda < 1/2.$$

La minoration est due à Odlyzko (2000) et la majoration (qui améliore l'inégalité de de Bruijn $\Lambda \leqslant 1/2$) est due à Ki, Kim et Lee (2009).

4. Formes équivalentes

L'un des charmes particuliers de l'étude de l'hypothèse de Riemann est la grande diversité de ses formulations équivalentes.[4] En fait, presque chaque mathématicien peut travailler sur ce problème sans quitter sa spécialité préférée... Je donne ci-dessous une sélection de quelques formes équivalentes, mais il y en a bien d'autres.

4.1. En termes de la fonction ζ

Forme équivalente 1 (Speiser, 1934)**.** *La dérivée de la fonction ζ n'a pas de zéros dans la bande $0 < \sigma < 1/2$.*

Forme équivalente 2 (Li, 1997)**.** *Pour tout entier naturel n,*

$$\frac{d^n}{ds^n}\big(s^n \log \xi(s)\big)\big|_{s=1} \geqslant 0.$$

Forme équivalente 3 (Balazard, Saias, Yor, 1999)**.** *On a*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log \left|\zeta\big(\frac{1}{2} + i\tau\big)\right| \frac{d\tau}{\frac{1}{4} + \tau^2} = 0.$$

4.2. Fonctions arithmétiques

4.2.1. Fonction de comptage des nombres premiers

La forme équivalente la plus classique, qui résulte des travaux de Riemann, est la suivante.

Forme équivalente 4 (von Koch, 1901)**.** *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que*

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \leqslant C_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad (x \geqslant 1).$$

En termes du n-ieme nombre premier p_n, cela équivaut à

$$p_n = \mathrm{li}^{-1}(n) + O_\varepsilon(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \quad (n \geqslant 1),$$

où li^{-1} est la fonction réciproque du logarithme intégral li.[5] Cela fournit la formulation de l'hypothèse de Riemann sans doute la plus accessible[6] au « grand public » :

> *on a une formule pour la moitié gauche des chiffres du n-ieme nombre premier.*

Il faut remarquer que des énoncés ineffectifs comme la forme équivalente 4 sont en fait équivalents à des énoncés numériquement explicites comme le suivant.

---

[4] Comparez, par exemple, les formes équivalentes 9 et 17 ci-dessous.

[5] On a $\mathrm{li}^{-1}(n) \sim n \log n$ $(n \to \infty)$. Le théorème des nombres premiers équivaut à $p_n \sim n \log n$ $(n \to \infty)$.

[6] Mais imprécise...

Forme équivalente 5 (Schoenfeld, 1976)**.** *Pour $x \geqslant 2657$, on a*

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \leqslant \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\log x.$$

Notons une variation sur ce thème, utilisant une autre inégalité de Schoenfeld et un théorème d'oscillation de Schmidt (1903).

Forme équivalente 6. *Pour $N \geqslant 74$, le plus petit commun multiple des entiers $1, 2, \dots, N$ est inférieur à*

$$e^{N+\frac{1}{8\pi}\sqrt{N}\log^2 N}.$$

4.2.2. Somme des diviseurs d'un entier

Après des travaux de Nicolas (1983) sur la fonction d'Euler $\varphi(n)$, Robin a obtenu l'énoncé suivant.

Forme équivalente 7 (Robin, 1984)**.** *Pour tout entier $n > 5040$, la somme des diviseurs de n est inférieure à $e^{\gamma} n \log\log n$ (où γ désigne la constante d'Euler).*

Le critère de Robin a été reformulé de façon très élégante par Lagarias.

Forme équivalente 8 (Lagarias, 2002)**.** *Pour tout $n \geqslant 1$, la somme des diviseurs de n est inférieure à*

$$H_n + e^{H_n}\log H_n,$$

où $H_n = \sum_{j\leqslant n} 1/j$ est le n-ieme nombre harmonique.

4.2.3. Groupe symétrique

Forme équivalente 9 (Massias, Nicolas, Robin, 1988)**.** *Pour n assez grand, l'ordre maximal d'un élément du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est inférieur à* $\exp\sqrt{\mathrm{li}^{-1}(n)}$.

4.2.4. Fonction de Möbius

La fonction de Möbius $\mu(n)$, définie formellement par

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu(n)}{n^s},$$

est à valeurs ± 1, sur les nombres sans facteur carré et nulle sur les nombres ayant un facteur carré. Son comportement moyen est régi par les singularités de $1/\zeta$, c'est-à-dire par les zéros de ζ. On pose

$$M(x) = \sum_{n\leqslant x}\mu(n).$$

Forme équivalente 10 (Littlewood, 1912)**.** *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que*

$$|M(x)| \leqslant C_\varepsilon x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad (x \geqslant 1).$$

L'obtention de versions effectives de ce critère est techniquement plus difficile que dans le cas de la forme équivalente 4. Le meilleur résultat connu est le suivant.[7]

Forme équivalente 11 (Soundararajan, 2009)**.** *On a*

$$M(x) = O\Big(\sqrt{x}\exp\big((\log x)^{1/2}(\log\log x)^{14}\big)\Big) \quad (x \geqslant 3).$$

On peut aussi pondérer la fonction de Möbius par une autre quantité que $[n \leqslant x]$,[8] par exemple $(x/n)^2 e^{-(x/n)^2}$. En utilisant (3), cela conduit au critère suivant.

Forme équivalente 12 (Riesz, 1916)**.** *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{(2k)!}{B_{2k}(k-1)!} x^{2k} = O_\varepsilon(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \quad (x \geqslant 1),$$

où les B_{2k} sont les nombres de Bernoulli.

4.2.5. Distribution des fractions de Farey

Comme $\mu(n)$ est la somme des racines primitives n-iemes de l'unité, la moyenne de la fonction de Möbius est reliée à la distribution des fractions de Farey :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_N &= \{\frac{h}{k},\ 0 < h \leqslant k \leqslant N,\ (h,k) = 1\}\\ &= \{1/N = b_1 < \cdots < b_A = 1\},\end{aligned}$$

avec

$$A = \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(N),$$

où φ désigne la fonction d'Euler. Le critère suivant exprime directement l'équivalence entre l'hypothèse de Riemann et la distribution des fractions de Farey.

Forme équivalente 13 (Franel, 1924)**.** *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant A} (b_j - j/A)^2 = O_\varepsilon(N^{-1+\varepsilon}) \quad (N \geqslant 1).$$

4.2.6. Valeurs propres de la matrice de Redheffer

La matrice de Redheffer d'ordre N est

$$R_N = ([(j = 1) \text{ ou } (i|j)])_{1\leqslant i,j\leqslant N}.$$

Son déterminant est $M(N) = \sum_{n\leqslant N} \mu(n)$, d'où le critère suivant.

Forme équivalente 14. *Pour tout $\varepsilon > 0$, le produit des valeurs propres de R_N est $O_\varepsilon(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$.*

---

[7] Dans un travail commun avec Anne de Roton, nous montrons que l'exposant 14 de cette estimation peut être remplacé par n'importe quel nombre $> 5/2$ (cf. `hal-00331871`).

[8] Rappelons la notation d'Iverson : $[A] = 1$ si la propriété A est vérifiée, $[A] = 0$ sinon.

4.3. Le critère de positivité de Weil

On l'a vu, beaucoup de formes équivalentes de l'hypothèse de Riemann sont des inégalités, autrement dit expriment la positivité d'une certaine quantité. Le critère suivant est une version très générale de ce phénomène.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions complexes indéfiniment dérivables et à support compact sur $(0,\infty)$. Posons

$$T(f)=\int_0^\infty f(x)dx+\int_0^\infty \tilde f(x)dx-\sum_{n\geqslant 1}\Lambda(n)\big(f(n)+\tilde f(n)\big)+ \\ -(\log(4\pi)+\gamma)f(1)-\int_1^\infty \big(f(x)+\tilde f(x)-\frac{2}{x}f(1)\big)\frac{xdx}{x^2-1},$$

où $\tilde f(x)=x^{-1}f(x^{-1})$.

Pour $f,g\in\mathcal{D}$, posons

$$f*g(x)=\int_0^\infty f(t)g(x/t)\frac{dt}{t}.$$

Forme équivalente 15 (Weil, 1952)**.** *Pour tout $f\in\mathcal{D}$, on a $T(f*\tilde{\tilde f})\geqslant 0$.*

Le critère résulte assez simplement d'une formule explicite due à Guinand et Weil, provenant de la formule (7) de Riemann, et exprimant $T(f)$ sous la forme

$$\sum_\rho Mf(\rho),$$

où

$$Mf(s)=\int_0^\infty f(t)t^{s-1}dt$$

est la transformée de Mellin de f, la somme portant sur les zéros non triviaux de ζ. La formule explicite de Guinand-Weil peut être considérée comme une relation de dualité entre deux ensembles de nombres : les nombres premiers d'une part, et les zéros de la fonction ζ d'autre part. On doit à Bombieri (2000) une étude approfondie de cette formule et du critère de Weil.

4.4. Systèmes dynamiques

Le critère suivant est dans la ligne des travaux d'Harald Bohr, frère de Niels et grand mathématicien dont la théorie des fonctions presque périodiques a été motivée par le désir de comprendre plus profondément le comportement des séries de Dirichlet, et notamment l'hypothèse de Riemann.

Forme équivalente 16 (Bagchi, 1982)**.** *Pour tout ε positif et tout compact K inclus dans la bande $1/2<\sigma<1$, l'ensemble des réels t tels que*

$$\max_{s\in K}|\zeta(s)-\zeta(s+it)|<\varepsilon$$

a une densité inférieure positive.

4.5. Analyse fonctionnelle

Dans sa thèse de doctorat, préparée sous la direction de Beurling, Nyman a obtenu le critère suivant.

Forme équivalente 17 (Nyman, 1950)**.** *L'espace vectoriel engendré par les fonctions*

$$f_\alpha \,:\, x \mapsto \{1/\alpha x\} - \{1/x\}/\alpha$$

(où $\{t\}$ désigne la partie fractionnaire de t, et où α est un nombre réel $\geqslant 1$) est dense dans $L^2(0,1)$.

Ce résultat s'inscrit dans un courant de pensée dont la source est la théorie taubérienne de Wiener des années 1930. Le critère de Nyman a donné lieu à une importante activité, notamment dans les quinze dernières années. En particulier, le lien entre ce critère et l'identité d'inversion de Möbius

$$\sum_{n\geqslant 1} \mu(n) f_n(x) = -1 \quad (0 < x < 1)$$

a été élucidé par Báez-Duarte.

Forme équivalente 18 (Báez-Duarte, 2003)**.** *La constante* 1 *appartient à l'adhérence dans $L^2(0,1)$ de l'espace vectoriel engendré par les fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}^*$.*

Le critère de Báez-Duarte peut être reformulé en termes des suites

$$r_n(k) = k \bmod n \,(\in \{0,1,\ldots,n-1\}) \quad (k,n \in \mathbb{N}^*).$$

Chacune des suites r_n appartient à l'espace de Hilbert H des suites réelles $(a_k)_{k\geqslant 1}$ telles que la série $\sum_{k\geqslant 1} a_k^2/k^2$ converge.

Forme équivalente 19 (Bagchi, 2006)**.** *La famille $(r_n)_{n\geqslant 2}$ est totale dans H.*

5. Idées générales

5.1. Un phénomène général

La première idée générale sur l'hypothèse de Riemann est qu'il s'agirait d'un phénomène ... général ! Cette propriété des entiers naturels se propagerait à de nombreuses structures analogues ou, à l'inverse, serait le reflet d'une loi mathématique plus fondamentale, qui nous est pour l'instant inconnue.

Piltz (1884) a ainsi énoncé une généralisation de l'hypothèse de Riemann à toutes les séries L de Dirichlet :

$$L(s,\chi) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

où χ est un caractère de Dirichlet, c'est-à-dire une fonction arithmétique non nulle, périodique et complètement multiplicative ($\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$).

Selberg (1989) a fourni un cadre axiomatique intéressant dans ce contexte. Il définit une classe de fonctions (qui porte maintenant son nom) par des propriétés similaires à celles de la fonction ζ de Riemann : série de Dirichlet (avec majoration

des coefficients), produit eulérien, équation fonctionnelle, pôle éventuel en $s = 1$. Il est tentant de conjecturer que toutes les fonctions de la classe de Selberg vérifient l'hypothèse de Riemann. L'étude de la classe de Selberg est également susceptible de mener à des problématiques très actuelles : fonctions L automorphes, programme de Langlands...

Pour la recherche d'un principe fondamental qui entraînerait l'hypothèse de Riemann généralisée, on ne dispose pour l'instant que d'un résultat positif : la démonstration par Weil (1948) et Deligne (1974) de l'« hypothèse de Riemann » pour les fonctions ζ des variétés algébriques sur les corps finis. D'un point de vue analytique, ce sont des fonctions beaucoup plus simples que la fonction ζ de Riemann (des fractions rationnelles en p^{-s}, où p est la caractéristique du corps) ; néanmoins les idées de Weil et Deligne inspirent certaines approches de l'hypothèse de Riemann généralisée.

5.2. Un phénomène stochastique

La forme équivalente 10 évoque irrésistiblement l'estimation

$$\sum_{n\leqslant x} u_n = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \quad (x \geqslant 1) \quad \text{p.p.},$$

où les u_n sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs ± 1 (et probabilités $\frac{1}{2}$). Cela indique un lien entre l'hypothèse de Riemann et le calcul des probabilités.

Il en existe d'autres, plus sophistiqués. Ainsi, Biane, Pitman et Yor (2001) ont observé que la quantité

$$\frac{d^n}{ds^n}\big(s^n \log \xi(s)\big)\big|_{s=1},$$

objet du critère de Li (forme équivalente 2) est le n-ieme cumulant[9] d'une variable aléatoire liée au mouvement brownien.

5.3. Liens avec la physique

En dehors du lien de parenté entre les frères Bohr, existe-t-il une relation plus profonde entre l'hypothèse de Riemann et la physique ? Ce questionnement a été récemment à l'origine d'une intense activité, bénéfique pour les mathématiques et pour la physique. Le projet sous-jacent, appelé « philosophie de Hilbert-Pólya » est d'obtenir une interprétation spectrale des zéros de la fonction ζ (ou des nombres t définis par $\rho = \frac{1}{2} + it$) en termes d'un certain système dynamique. Cette quête est encouragée par l'accord numérique frappant entre les statistiques d'espacement des zéros de ζ et celles des valeurs propres de matrices hermitiennes aléatoires intervenant en mécanique quantique.

[9] Les cumulants κ_n de la variable aléatoire X sont définis par la relation $\log\big(\mathbb{E}(e^{tX})\big) = \sum_{n\geqslant 1} \kappa_n t^n/n!$.

6. Conclusion

Le théorème suivant de Burnol (2004) montre que nous sommes encore loin de comprendre toute la richesse structurelle d'un objet mathématique familier : la transformation de Fourier sur la droite réelle.

Pour chaque zéro non trivial ρ de la fonction ζ, posons

$$\varphi_\rho(t) = \frac{\{t\}}{t} + \rho t^{\rho-1} \int_0^t \{u\} u^{-\rho-1} du \quad (t > 0).$$

Si ρ est de multiplicité $\mathrm{m}(\rho) > 1$, posons également pour $1 < k \leqslant \mathrm{m}(\rho)$

$$\varphi_{\rho,k}(t) = t^{\rho-1} \int_0^t \{u\} u^{-\rho-1} \big(\rho \log^{k-1}(t/u) + (k-1)\log^{k-2}(t/u)\big) du \quad (t > 0).$$

Alors

- les fonctions $\varphi_{\rho,k}$ sont dans $L^2(0,\infty)$ et sont constantes sur $(0,1)$;
- les transformées de Fourier « en cosinus »

$$\mathfrak{C}\varphi_{\rho,k}(x) = 2\int_0^\infty \varphi_{\rho,k}(t)\cos 2\pi x t \, dt$$

sont également constantes sur $(0,1)$ (en fait $\mathfrak{C}\varphi_{\rho,k} = (-1)^k \varphi_{1-\rho,k}$) ;

- l'espace K des fonctions de $L^2(0,\infty)$ constantes sur $(0,1)$ ainsi que leurs transformées de Fourier est engendré (au sens hilbertien) par les fonctions $\varphi_{\rho,k}$: l'espace vectoriel qu'elles engendrent est dense dans K. De plus, le sous-espace engendré en omettant une seule de ces fonctions n'est plus dense dans K. En d'autres termes, la famille des $\varphi_{\rho,k}$ est une *base topologique* de K.

Ce résultat affirme que l'ensemble des zéros non triviaux de ζ « encode » l'espace fonctionnel K, dont la définition en termes de transformation de Fourier est très simple, et qui semble n'avoir aucun rapport avec la fonction ζ ou les nombres premiers. Cela nous incite à tenter de mieux comprendre la transformation de Fourier sur la droite réelle.

Plus largement, l'hypothèse de Riemann nous force à questionner les fondements mêmes de notre univers mathématique. Que sont les nombres entiers, les nombres réels ? Comment passer du discret au continu ? Une authentique réflexion mène à revisiter des sentiers qui ne sont battus qu'en apparence.

L'hypothèse de Riemann a une place centrale dans la recherche mathématique contemporaine. Cela tient sans doute à ce qu'on ignore sa vraie nature ; nous avons vu qu'elle a des connexions avec l'analyse (complexe, fonctionnelle, harmonique, hilbertienne...), la théorie des nombres, la géométrie algébrique, les probabilités, les systèmes dynamiques, la mécanique quantique...

Il y en a pour tous les goûts et toutes les compétences : au travail !

Remerciements

Je remercie Christian Retoré, qui m'a incité à écrire cet article, les universités de Caen et Strasbourg qui m'ont invité à en exposer la teneur, et tous les collègues qui m'ont proposé des corrections et modifications.

7. Références

[1] L. Báez-Duarte – « A strengthening of the Nyman-Beurling criterion for the Riemann hypothesis », *Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **14** (2003), p. 5–11.

[2] B. Bagchi – « A joint universality theorem for Dirichlet L-functions », *Math. Z.* **181** (1982), p. 319–334.

[3] ———, « On Nyman, Beurling and Baez-Duarte's Hilbert space reformulation of the Riemann hypothesis », *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* **116** (2006), p. 137–146.

[4] M. Balazard, E. Saias & M. Yor – « Notes sur la fonction ζ de Riemann. II », *Adv. Math.* **143** (1999), p. 284–287.

[5] A. Beurling – « Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés. », *Acta Math.* **68** (1937), p. 255–291.

[6] P. Biane, J. Pitman & M. Yor – « Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **38** (2001), p. 435–465.

[7] H. Bohr & E. Landau – « Ein Satz über Dirichletsche Reihen mit Anwendung auf die ζ-Funktion und die L-Funktionen. », *Rend. Circ. Mat. Palermo* **37** (1914), p. 269–272.

[8] E. Bombieri – « Remarks on Weil's quadratic functional in the theory of prime numbers. I », *Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **11** (2000), p. 183–233.

[9] J. Bourgain – « On large values estimates for Dirichlet polynomials and the density hypothesis for the Riemann zeta function », *Internat. Math. Res. Notices* (2000), no. 3, p. 133–146.

[10] N. G. de Bruijn – « The roots of trigonometric integrals », *Duke Math. J.* **17** (1950), p. 197–226.

[11] J.-F. Burnol – « Two complete and minimal systems associated with the zeros of the Riemann zeta function », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **16** (2004), p. 65–94.

[12] F. Carlson – « Über die Nullstellen der Dirichletschen Reihen und der Riemannschen ζ-Funktion. », *Ark. för Mat., Astron. och Fys.* **15** (1921), no. 20.

[13] J. B. Conrey – « More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line », *J. Reine Angew. Math.* **399** (1989), p. 1–26.

[14] P. Deligne – « La conjecture de Weil. I », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **43** (1974), p. 273–307.

[15] P. Demichel & Y. Saouter – « A sharp region where $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ is positive », *Math. Comp.* **79** (2010), p. 2395–2405.

[16] H. G. Diamond, H. L. Montgomery & U. M. A. Vorhauer – « Beurling primes with large oscillation », *Math. Ann.* **334** (2006), p. 1–36.

[17] L. Euler – « De summis serierum reciprocarum », *Comment. Acad. Sci. Petrop.* **7** (1740), p. 123–134.

[18] ———, « Variae observationes circa series infinitas », *Comment. Acad. Sci. Petrop.* **9** (1744), p. 160–188.

[19] ———, « Remarques sur un beau rapport entre les séries de puissances tant directes que réciproques », *Mem. Acad. Sci. Berlin* **17** (1768), p. 83–106.

[20] K. Ford – « Vinogradov's integral and bounds for the Riemann zeta function », *Proc. London Math. Soc. (3)* **85** (2002), p. 565–633.

[21] J. Franel – « Les suites de Farey et le problème des nombres premiers. », *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* (1924), p. 198–201.

[22] J. P. Gram – « Note sur les zéros de la fonction $\xi(s)$ de Riemann », *Acta Math.* **27** (1903), p. 289–304.

[23] J., Hadamard – « Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques », *Bull. Soc. Math. France* **24** (1896), p. 199–220.

[24] G. H. Hardy – « Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann », *C. R. A. S.* **158** (1914), p. 1012–1014.

[25] G. H. Hardy & J. E. Littlewood – « The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line. », *Math. Zeitschr.* **10** (1921), p. 283–317.

[26] D. A. Hejhal – « On a result of G. Pólya concerning the Riemann ξ-function », *J. Analyse Math.* **55** (1990), p. 59–95.

[27] M. N. Huxley – « On the difference between consecutive primes », *Invent. Math.* **15** (1972), p. 164–170.
[28] H. Kadiri – « Une région explicite sans zéros pour la fonction ζ de Riemann », *Acta Arith.* **117** (2005), p. 303–339.
[29] H. Ki, Y.-O. Kim & J. Lee – « On the de Bruijn-Newman constant », *Adv. Math.* **222** (2009), p. 281–306.
[30] N. M. Korobov – « Estimations de sommes trigonométriques et applications », *Uspehi Mat. Nauk* **13** (1958), p. 185–192 (en russe).
[31] J. C. Lagarias – « An elementary problem equivalent to the Riemann hypothesis », *Amer. Math. Monthly* **109** (2002), p. 534–543.
[32] J. E. Littlewood – « Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de *Riemann* n'a pas de zéros dans le demiplan $\Re s > 1/2$. », *C. R. A. S.* **154** (1912), p. 263–266.
[33] ———, « Researches in the theory of Riemann's zeta-function. », *Proc. London Math. Soc.* **20** (1922), p. xxii–xxviii.
[34] J.-P. Massias, J.-L. Nicolas & G. Robin – « Évaluation asymptotique de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique », *Acta Arith.* **50** (1988), p. 221–242.
[35] C. M. Newman – « Fourier transforms with only real zeros », *Proc. Amer. Math. Soc.* **61** (1976), p. 245–251 (1977).
[36] J.-L. Nicolas – « Petites valeurs de la fonction d'Euler », *J. Number Theory* **17** (1983), p. 375–388.
[37] B. Nyman – *On the One-Dimensional Translation Group and Semi-Group in Certain Function Spaces*, Thèse, Université d'Uppsala, 1950.
[38] A. M. Odlyzko – « An improved bound for the de Bruijn-Newman constant », *Numer. Algorithms* **25** (2000), p. 293–303.
[39] N. Oresme – *Quaestiones super geometriam Euclidis*, Edited by H. L. L. Busard. Janus, suppléments, Vol. III, E. J. Brill, Leiden, 1961.
[40] A. Piltz – *Ueber die Häufigkeit der Primzahlen in arithmetischen Progressionen und ueber verwandte Gesetze*, Habilitationsschrift, Université d'Iena, 1884.
[41] G. Pólya – « Bemerkung Über die Integraldarstellung der Riemannschen ζ-Funktion », *Acta Math.* **48** (1926), p. 305–317.
[42] B. Riemann – « Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebener Grösse », *Monatsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* **17** (1860), p. 671–680.
[43] M. Riesz – « Sur l'hypothèse de Riemann », *Acta Math.* **40** (1916), p. 185–190.
[44] G. Robin – « Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann », *J. Math. Pures Appl. (9)* **63** (1984), p. 187–213.
[45] E. Schmidt – « Über die Anzahl der Primzahlen unter gegebener Grenze », *Math. Ann.* **57** (1903), p. 195–204.
[46] A. Selberg – « On the zeros of Riemann's zeta-function », *Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I.* (1942), no. 10, p. 59.
[47] ———, « Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series », in *Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (Maiori, 1989)* (Salerno), Univ. Salerno, 1992, p. 367–385.
[48] C. L. Siegel – « Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie. », *Quell. Stud. Gesch. Math. B* **2** (1932), p. 45–80.
[49] K. Soundararajan – « Partial sums of the Möbius function », *J. Reine Angew. Math.* **631** (2009), p. 141–152.
[50] A. Speiser – « Geometrisches zur Riemannschen Zetafunktion », *Math. Ann.* **110** (1935), p. 514–521.
[51] P. R. Taylor – « On the Riemann zeta function », *Quart. J. Math., Oxford Ser.* **16** (1945), p. 1–21.
[52] N. Tchudakoff – « On the functions $\zeta(s)$ and $\pi(x)$. », *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, n. Ser.* **21** (1938), p. 421–422.
[53] A. M. Turing – « Some calculations of the Riemann zeta-function », *Proc. London Math. Soc. (3)* **3** (1953), p. 99–117.
[54] C.-J. d. la Vallée-Poussin – « Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres

premiers inférieurs à une limite donnée », *Mem. Couronnés de l'Acad. Roy. Sci. Bruxelles* **59** (1899).

[55] C.-J. D. LA VALLÉE POUSSIN – « Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, 1 », *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* **20** (1896), p. 183–256.

[56] O. VELÁSQUEZ CASTAÑÓN – « Majoration du nombre de zéros d'une fonction méromorphe en dehors d'une droite verticale et applications », *J. Analyse Math.* **110** (2010), p. 67–127.

[57] I. M. VINOGRADOV – « Une nouvelle estimation de la fonction $\zeta(1+it)$ », *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* **22** (1958), p. 161–164 (en russe).

[58] A. WEIL – *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Actualités Sci. Ind., no. 1041 = Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg **7** (1945), Hermann et Cie., Paris, 1948.

[59] ———, « Sur les "formules explicites" de la théorie des nombres premiers », *Comm. Sém. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.]* (1952), n° . Tome Supplementaire, p. 252–265.

Les travaux de Iooss et Plotnikov sur les vagues tri-dimensionnelles

Thomas Alazard[1]

1. Introduction

Considérons un océan de profondeur infinie au repos. Pour visualiser ceci, assimilons le domaine spatial à l'espace $\mathbf{R}^3$, que l'on suppose décomposé en deux parties distinctes : le demi-espace inférieur occupé par l'eau,

$$\big\{\,(x,y)\in\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}\,:\,y<0\,\big\},$$

et le demi-espace supérieur occupé par l'air,

$$\big\{\,(x,y)\in\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}\,:\,y>0\,\big\}.$$

Dans toute la suite on notera $x=(x_1,x_2)$ la variable horizontale et y la variable verticale. La gravité est orientée suivant l'axe (Oy).

Imaginons que le vent souffle au dessus de cet océan. Sous certaines conditions, ce vent va générer des vagues, appelées vagues de vent. On observe qu'elles peuvent se propager sur des distances immenses, jusqu'à atteindre le rivage. Nous allons nous intéresser à la propagation de ces vagues loin de la zone de vent et loin du rivage. On parle alors de houle ou encore d'ondes de gravité, car les vagues doivent être vues comme des ondes qui se propagent sous l'action de la gravité. Quant à la forme des vagues, il faut imaginer une surface lisse tracée au dessus du plan horizontal d'équation $y=0$.

Pour décrire une vague, nous avons besoin d'introduire plusieurs quantités dont bien sûr une fonction, notée Σ, pour mesurer l'élévation de la mer par rapport à son niveau au repos. L'inconnue Σ dépend du temps t et de la variable $x\in\mathbf{R}^2$. Le graphe de la fonction Σ est ce que l'on appelle la surface libre. Le domaine occupé par l'eau à l'instant t est le demi-espace situé sous la surface libre :

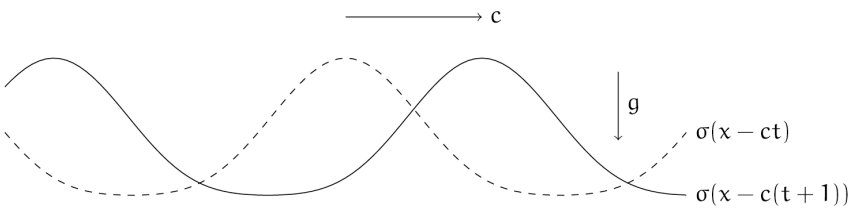
$$\big\{\,(x,y)\in\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}\,:\,y<\Sigma(t,x)\,\big\}\,.$$

[1] CNRS & Département de Mathématiques d'Orsay.

On va s'intéresser aux ondes périodiques permanentes. C'est un problème très ancien qui consiste à chercher des ondes se propageant sans altération de forme, telles que

$$\Sigma(t,x) = \sigma(x - ct),$$

où σ est une fonction périodique et où $c \in \mathbf{R}^2$ est un vecteur constant indépendant de t et de x. On parle d'onde progressive.



Les équations régissant la propagation des ondes de gravité posent de nombreuses questions qui demeurent mal comprises. Un océanographe ne cherche pas à les résoudre. Il cherche au contraire des modèles simples qui permettent de bien décrire en première approximation la dynamique de ces ondes. Pour des solutions d'amplitude $\varepsilon \in [0,1]$ petite, il négligera dans les équations les termes d'ordre deux ou plus en ε. Cela correspond à une théorie linéaire des ondes de gravité qui a été très étudiée aux dix-huitième et dix-neuvième siècles (notamment par Laplace, Lagrange, Cauchy et Poisson, voir [5]). Dans cette théorie linéaire Σ est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^4 \Sigma}{\partial t^4} + g^2 \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x_2^2} \right) = 0,$$

où g désigne l'accélération de la gravité. On calcule aisément que si

$$\Sigma(t,x) = \varepsilon \cos(k \cdot x - \omega t) \qquad \text{où } (k,\omega) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$$

est solution de cette équation, alors

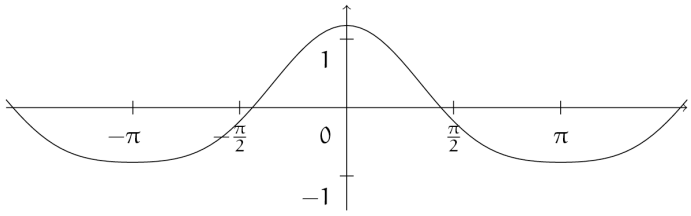
$$\omega^2 = g\,|k| \quad \text{où } |k| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}.$$

Notons que $\varepsilon \cos(k \cdot x - \omega t)$ peut s'écrire sous la forme $\sigma(x - ct)$ avec $\sigma(X) = \varepsilon \cos(k \cdot X)$ et $c = \frac{\omega}{|k|^2} k$. La relation précédente implique que

$$|c| = \frac{|\omega|}{|k|} = \sqrt{\frac{g}{|k|}}.$$

Comme $|c|$ correspond à la vitesse de l'onde, cela signifie que des harmoniques de longueurs d'onde différentes se propagent à des vitesses différentes et ainsi elles tendent à se séparer. Cela explique qu'en un certain endroit au dessus de l'océan, loin de la zone de vent, la surface de l'océan soit très régulière car représentable

essentiellement à l'aide d'une seule harmonique[2]. Néanmoins, l'océanographe constate que si la surface de l'océan a une forme sinueuse, elle n'est pas le graphe d'une sinusoïde. Il y a des arrêtes et des arrondis légèrement marqués qui suggèrent la présence de plusieurs harmoniques. Ce que l'on observe sur le graphe de la fonction $\cos(x) + 0,2\cos(2x)$ dessiné ci-dessous.



Or nous venons de voir que la théorie linéaire de la houle prédit que deux harmoniques de longueurs d'onde différentes se déplacent à des vitesses différentes. Par conséquent leur somme ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fonction de $x-ct$. C'est Stokes qui a résolu ce problème. Pour expliquer la forme des vagues, il a tenu compte des termes négligés dans la théorie linéaire. Cela nécessite beaucoup de calculs difficiles à expliquer et une idée très simple à énoncer. L'idée fondamentale de Stokes est que la relation de dispersion $\omega^2 = g\,|k|$ ne peut pas être exacte et qu'elle doit dépendre de l'amplitude ε. Les solutions approchées trouvées par Stokes sont de la forme

$$\Sigma_\varepsilon(t,x) = \varepsilon\cos\theta + \frac{\varepsilon^2\,|k_0|}{2}\cos(2\theta) + \frac{3\varepsilon^3\,|k_0|^2}{8}\cos(3\theta) + O(\varepsilon^4),$$

où $|k_0|$ est la norme euclidienne de k_0 et où la phase θ et la pulsation ω sont données par

$$\theta = k_0\cdot x - \omega t, \quad \omega = \sqrt{g\,|k_0|}(1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\,|k_0|^2 + O(\varepsilon^4))$$

Le travail de Stokes est un travail formel (son résultat est que si une solution existe, alors elle admet le développement précédent). C'est Levi-Civita qui a beaucoup plus tard réussi a montrer l'existence de solutions ayant ce développement ([10]). Les travaux de Levi-Civita ont connus de très nombreux prolongements (voir [11] pour de nombreuses références). Jusqu'aux travaux récents de Iooss et Plotnikov, tous les prolongements concernaient des solutions ayant la même structure particulière que les solutions de Stokes. Il y a en effet une remarque élémentaire que nous n'avons pas encore faite : les solutions de Stokes sont des ondes bi-dimensionnelles – on parle d'ondes bi-dimensionnelles lorsqu'on peut décrire le domaine du fluide à l'aide de deux variables seulement, par exemple x_1 et y. Iooss et Plotnikov ont

[2] C'est l'une des grandes conséquences du mémoire ([4]) de Cauchy : « Quant à l'état du fluide au bout d'un temps déterminé, il sera lui-même très-irrégulier dans les différents points de la masse fluide primitivement soumis à l'influence immédiate des causes qui ont produit le mouvement. Mais, si l'on s'éloigne de ces mêmes points à des distances de plus en plus grandes, on verra le mouvement devenir de plus en plus régulier. » Nous renvoyons à la page 83 de son mémoire pour une description précise de son résultat (qui est relié à ce que l'on appelle aujourd'hui les inégalités de dispersion).

démontré le premier résultat d'existence de solutions périodiques permanentes tri-dimensionnelles. C'est le résultat principal de leur mémoire à l'American Mathematical Society ([8]). Nous nous proposons de le décrire.

Disons le tout de suite, les solutions dont nous allons parler sont les solutions tri-dimensionnelles les plus simples que l'on puisse imaginer : elles résultent de l'interaction de deux ondes bi-dimensionnelles de même amplitude, qui font un certain angle entre elles. On appelle ces solutions des ondes en losange (diamond waves) à cause de leur symétrie. Comme nous le verrons c'est une question très naturelle, qui était ouverte depuis 80 ans. Toute la difficulté consiste à superposer des solutions d'un problème non linéaire. En revanche, ceci ne pose évidemment aucun problème pour la théorie linéaire. En effet, si

$$\Sigma_1(t,x) = \varepsilon \cos(x_1 - \tau x_2 - \omega t), \quad \Sigma_2(t,x) = \varepsilon \cos(x_1 + \tau x_2 - \omega t),$$

avec $\omega^2 = g\sqrt{1+\tau^2}$ alors Σ_1 et Σ_2 sont solutions de

$$\frac{\partial^4 \Sigma_j}{\partial t^4} + g^2 \left(\frac{\partial^2 \Sigma_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Sigma_j}{\partial x_2^2} \right) = 0 \qquad j = 1, 2.$$

Trivialement, la somme $\Sigma_0 = \Sigma_1 + \Sigma_2$ est solution de

$$\frac{\partial^4 \Sigma_0}{\partial t^4} + g^2 \left(\frac{\partial^2 \Sigma_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Sigma_0}{\partial x_2^2} \right) = 0.$$

Observons maintenant que $\Sigma_j(t,x) = \cos(k_j \cdot x - \omega t)$ où

$$k_1 = (1, -\tau), \quad k_2 = (1, \tau).$$

Ainsi Σ_1 et Σ_2 sont deux solutions bi-dimensionnelles. Cependant, leur somme n'est certainement pas bi-dimensionnelle : on a

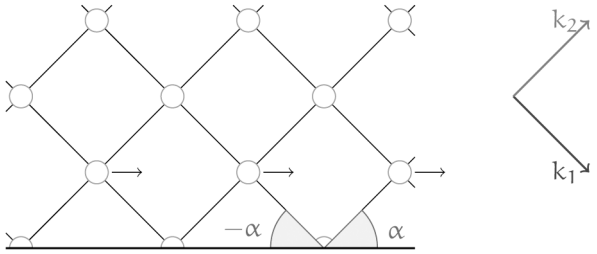
$$\Sigma_0(t,x) = 2\varepsilon \cos(x_1 - \omega t) \cos(\tau x_2),$$

que l'on peut écrire sous la forme $\sigma_0(x - ct)$ en prenant

$$\sigma_0(X_1, X_2) = 2\varepsilon \cos(X_1) \cos(\tau X_2), \quad c = (\omega, 0).$$

Ainsi en sommant deux solutions bi-dimensionnelles simples, on trouve une solution qui est tri-dimensionnelle. Iooss et Plotnikov ont démontré l'existence d'une solution (périodique et permanente) des équations des ondes de gravité au voisinage de la fonction Σ_0 (au moins pour certaines valeurs des paramètres ε et τ, comme nous le verrons à la section suivante). Ils ont démontré l'existence de ce que l'on appelle des « vagues à courtes crêtes » (short crested waves). Cela correspond à la réflexion non orthogonale d'une onde de Stokes sur un mur (la réflexion orthogonale correspondant au « clapotis », où les ondes sont stationnaires et restent bi-dimensionnelles). Illustrons les observations précédentes dans le cas $\tau = 1$. Noter que les crêtes (maxima locaux) sont à l'intersection des crêtes de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. Elles sont représentées par des cercles. Ces crêtes forment une structure en losange qui se déplace vers la droite en restant parallèle au bord.

Même si je n'en parlerai pas dans ce texte, j'aimerais mentionner un second théorème de Iooss et Plotnikov qui prouve l'existence d'ondes progressives non symétriques ([9]). Ce résultat restera longtemps une référence. Autant pour



l'admiration devant certains calculs intrinsèquement durs dans la démonstration, que pour avoir réussi l'exploit rarissime de prouver l'existence d'ondes qu'aucun expérimentateur n'a réussi à reproduire dans un bassin, la difficulté technique étant beaucoup plus grande que pour produire un train de vagues symétrique par rapport à la direction de propagation.

Le résultat principal de Iooss et Plotnikov est énoncé à la section 5.

2. Petits diviseurs

Revenons sur l'équation de la théorie linéaire

$$\frac{\partial^4\Sigma}{\partial t^4} + g^2\left(\frac{\partial^2\Sigma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial x_2^2}\right) = 0. \tag{1}$$

C'est ainsi que Cauchy la formule dans son mémoire [4], mais ce n'est plus comme cela qu'on l'écrirait aujourd'hui. Avec des outils modernes d'analyse de Fourier (que l'on doit en partie à Cauchy d'ailleurs) on préférera utiliser la racine carrée de l'opposé du Laplacien. C'est l'opérateur, noté $|D_x|$, qui est défini par la formule

$$|D_x|\, e^{i\xi\cdot x} = |\xi|\, e^{i\xi\cdot x},$$

où $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$ est la norme euclidienne de $\xi \in \mathbf{R}^2$. Notons que

$$|D_x|^2\, e^{i\xi\cdot x} = |\xi|^2\, e^{i\xi\cdot x} = -(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)e^{i\xi\cdot x}.$$

Avec cet opérateur, (1) est une conséquence du fait que Σ vérifie en fait

$$\partial_t^2\Sigma + g\,|D_x|\,\Sigma = 0.$$

Nous expliquerons d'où vient cette équation plus tard.

Considérons une solution de la forme $\Sigma(t,x) = \sigma(x-ct)$ où $c = (v,0)$ et où σ est bi-périodique, au sens où

$$\sigma(x) = \sigma(x_1+2\pi, x_2) = \sigma\big(x_1, x_2 + \frac{2\pi}{\tau}\big), \tag{2}$$

pour un certain paramètre $\tau > 0$. Puisque $\partial_t\Sigma(t,x) = -v(\partial_{x_1}\sigma)(x-ct)$, l'équation précédente entraîne que σ est dans le noyau de l'opérateur

$$v^2\partial_{x_1}^2 + g\,|D_x|\,. \tag{3}$$

Introduisons le paramètre $\nu_0 = v^2/g > 0$ de sorte que l'opérateur (3) soit égal à une constante multiplicative près à

$$L_{\nu_0}(\partial_x) = |D_x| + \nu_0 \partial_{x_1}^2.$$

Introduisons aussi le symbole $L_{\nu_0} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ défini par

$$L_{\nu_0}(\xi) = |\xi| - \nu_0 \xi_1^2,$$

de sorte que

$$L_{\nu_0}(\partial_x) e^{i\xi\cdot x} = L_{\nu_0}(\xi) e^{i\xi\cdot x}.$$

Maintenant, il est très simple de trouver une fonction bi-périodique (non triviale) dans le noyau de l'opérateur $L_{\nu_0}(\partial_x)$. Il suffit de trouver un couple $k = (k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^* \times \mathbf{Z}^*$ tel que

$$L_{\nu_0}(k_1, \tau k_2) = \sqrt{k_1^2 + \tau^2 k_2^2} - \nu_0 k_1^2 = 0.$$

Ici ν_0 est un paramètre qui n'est pas prescrit. Dans la suite nous allons étudier ce qu'il se passe pour la valeur particulière

$$\nu_c = (1 + \tau^2)^{1/2}$$

du paramètre ν_0. C'est une valeur très particulière car dans ce cas on a une solution évidente $k = (1, 1)$. Mais on veut éviter le cas (rare) où cette équation aurait trop de solutions. Dans toute la suite, nous supposerons que pour $\nu_c = (1 + \tau^2)^{1/2}$ l'équation

$$\sqrt{k_1^2 + \tau^2 k_2^2} - \nu_c k_1^2 = 0, \tag{4}$$

n'admet dans $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ que la solution $(k_1, k_2) = (1, 1)$. C'est une hypothèse sur τ qui n'est pas toujours vérifiée (par exemple si τ est l'inverse d'un entier). Notons alors $\mathcal{K}$ l'ensemble des solutions $(k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^2$ de (4). On a

$$\mathcal{K} = \big\{ (0,0), (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1) \big\}.$$

Cela nous donne la structure du noyau de L_{ν_c}. Une étude précise de l'opérateur L_{ν_c} exige aussi d'avoir une estimation de l'inverse (dans l'orthogonal du noyau dans un certain espace). Faire agir l'opérateur $L_{\nu_c}(\partial_x)$ c'est multiplier en Fourier par le symbole $L_{\nu_c}(\xi)$. Il est donc naturel que pour "inverser" $L_{\nu_c}(\partial_x)$ on divise par le symbole. Ainsi, estimer la norme d'opérateur (entre deux certains espaces) de l'inverse de $L_{\nu_c}(\partial_x)$ revient à trouver une estimation de

$$\left(\sqrt{k_1^2 + \tau^2 k_2^2} - \nu_c k_1^2 \right)^{-1},$$

pour $(k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \mathcal{K}$.

On ne peut pas espérer avoir facilement une telle estimation car le symbole $L_{\nu_c}(\xi)$ s'annule sur un ensemble non borné de $\mathbf{R}^2$. C'est un problème qui apparaît dans des contextes variés. On parle de problèmes de petits diviseurs. Cependant on

peut montrer par des arguments classiques[3] que ce problème concerne « peu » de valeurs du paramètre τ. Plus précisément, on peut montrer que pour tout $\alpha \in]0,1]$, il existe une constante C_α et un ensemble $N_\alpha \subset [1,+\infty[$ dont le complémentaire est de mesure nulle, tel que si $\nu_c = \sqrt{1+\tau^2} \in N_\alpha$, alors

$$\forall k = (k_1,k_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \mathcal{K}, \quad \left| \sqrt{k_1^2 + \tau^2 k_2^2} - \nu_c k_1^2 \right| \geq c\,|k|^{-(1+\alpha)/2}. \tag{5}$$

Mais ce résultat ne peut pas suffire. En effet, l'estimation précédente intervient pour estimer l'inverse du linéarisé autour de la solution triviale. Pour démontrer l'existence de solutions nous avons besoin d'estimer l'inverse dans un voisinage de cette solution. Ce dont nous avons besoin c'est de vérifier que l'estimation précédente est « stable » par perturbation. Perturbation de ν_c et aussi perturbation d'une autre constante qui était invisible jusqu'ici car égale à 0. Considérons deux fonctions $\nu(\varepsilon)$ et $\kappa(\varepsilon)$ du paramètre $\varepsilon \in [0,1]$, telles que

$$\nu(\varepsilon) = \nu_c - \varepsilon^2 \nu_1 + \varepsilon^3 \widetilde{\nu}(\varepsilon), \quad \kappa(\varepsilon) = \varepsilon^2 \widetilde{\kappa}(\varepsilon),$$

avec l'hypothèse que $\widetilde{\nu}$ et $\widetilde{\kappa}$ sont lipschitziennes par rapport à ε. On considère alors le symbole

$$L_\varepsilon(k) = \sqrt{k_1^2 + \tau^2 k_2^2} - \nu(\varepsilon) k_1^2 - \kappa(\varepsilon),$$

de sorte que $L_{\varepsilon=0}(k) = \sqrt{k_1^2 + \tau^2 k_2^2} - \nu_c k_1^2$. Iooss et Plotnikov démontrent le résultat suivant.

Théorème 1. *Dans le développement de la fonction $\nu(\varepsilon)$, supposons de plus que $\nu_c \in \mathcal{N}_\alpha$ pour un certain $\alpha \in]0,1/78[$ (où $\mathcal{N}_\alpha$ est l'ensemble des paramètres ν_c tels que* (5) *est vérifiée) et que*

$$\nu_1 \neq 0.$$

Alors il existe une constante $c > 0$ et un ensemble $\mathcal{E}$ vérifiant

$$\lim_{r \to 0} \frac{2}{r^2} \int_{\mathcal{E} \cap [0,r]} t\,dt = 1,$$

tels que si $\varepsilon \in \mathcal{E}$ et $k = (k_1,k_2) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \mathcal{K}$, alors

$$|L_\varepsilon(k)| \geq \frac{c}{|k|}. \tag{6}$$

[3] On dit qu'un irrationnel $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ est un nombre diophantien s'il existe deux constantes $\gamma > 0$ et $\alpha > 0$ telles que, pour tout $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$ avec $q > 0$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \gamma q^{-2-\alpha}.$$

Le complémentaire de l'ensemble des nombres diophantiens est un ensemble de mesure nulle. Au sens de la mesure, il y a donc « peu » de nombres qui ne sont pas diophantiens. Cependant cet ensemble complémentaire est un G_δ-dense. Nous renvoyons le lecteur au texte d'Étienne Ghys [6] pour une introduction aux problèmes de petits diviseurs dans le contexte de la mécanique céleste.

Il s'agit maintenant de comprendre ce que cela implique pour l'opérateur $L_\varepsilon(\partial_x)$ défini par

$$L_\varepsilon(\partial_x)\sigma = |D_x|\,\sigma + \nu(\varepsilon)\partial_{x_1}^2\sigma - \kappa(\varepsilon)\sigma.$$

Si σ est bi-périodique (cf (2)) on peut la représenter comme une somme d'harmoniques

$$\sigma = \sum_{\xi\in\Gamma'} \widehat{\sigma}(\xi)e^{i\xi\cdot x},$$

où Γ' est le réseau engendré par les vecteurs $(1,0)$ et $(0,\tau)$ et où

$$\widehat{\sigma}(\xi) = \frac{\sqrt{\tau}}{2\pi}\int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi/\tau]} e^{-i\xi\cdot x}\sigma(x)\,dx.$$

Pour $\xi\in\Gamma'$ on a $\xi = (k_1, \tau k_2)$ pour un certain couple d'entiers $k = (k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^2$ et alors

$$\widehat{L_\varepsilon(\partial_x)\sigma}(\xi) = L_\varepsilon(k)\widehat{\sigma}(\xi).$$

L'estimation (6) implique alors qu'il existe une constante C telle que pour tout $\xi\in\Gamma'$ avec $\xi\notin\{(0,0),(\pm1,\pm\tau)\}$, on ait

$$|\widehat{\sigma}(\xi)| \leqslant C\,|\xi|\,|\widehat{L_\varepsilon(\partial_x)\sigma}(\xi)|.$$

Comme

$$|\xi|\,|\widehat{L_\varepsilon(\partial_x)\sigma}(\xi)| = |\partial_x\widehat{L_\varepsilon(\partial_x)\sigma}(\xi)|,$$

cela implique que les coefficients de Fourier de σ sont estimés par ceux des dérivées de la fonction $L_\varepsilon(\partial_x)\sigma$. Or un fait bien connu est que la régularité d'une fonction se lit sur la décroissance de ses coefficients de Fourier.

Cet argument heuristique suggère que l'on va pouvoir inverser $L_\varepsilon(\partial_x)$ au prix de la perte d'une dérivée. Le problème est que pour résoudre une équation non linéaire, les méthodes standards reposent sur la construction d'une suite de solutions approchées, la solution étant obtenue par passage à la limite (exactement comme dans la méthode de Picard pour résoudre une équation différentielle ordinaire). Le problème est alors clair, si à chaque étape on perd une dérivée, en un nombre fini d'étapes les objets ne seront tout simplement plus définis. Il y a des stratégies qui permettent de contourner cet obstacle, mais elles sont toujours assez difficiles à mettre en place (Iooss et Plotnikov utilisent un schéma de Nash-Moser).

Notons que ces problèmes n'apparaissent pas dans l'étude des ondes bi-dimensionnelles. En effet, dans le cas où σ est indépendant de x_2, si $L_\varepsilon(\partial_x)\sigma$ est C^k alors σ est (presque) C^{k+1}. Ce qui est beaucoup plus favorable. Cela permet de montrer en particulier que si la solution a un certain niveau minimal de régularité pour que les termes soient bien définis, alors elle est automatiquement très régulière. Ainsi, il a été démontré dans les années 1950 par Hans Lewy et indépendamment par Robert Gerber que si la surface libre est une courbe C^1 alors elle est analytique. Ce résultat étant optimal car on peut construire des solutions qui sont Lipschitziennes et pas mieux (voir les notes de cours de John F. Toland [11]).

3. L'opérateur de Dirichlet–Neumann

Pour décrire une vague, nous avons besoin d'introduire deux quantités : l'élévation de la mer, notée Σ, par rapport à son niveau au repos et le potentiel des vitesses des particules du fluide, noté Φ, qui lui aussi est mesuré par rapport à l'état au repos. L'état au repos correspond donc par notation au cas où $\Sigma = 0$ et $\Phi = 0$.

L'inconnue Σ dépend du temps t et de la variable spatiale $x = (x_1, x_2)$. Le graphe de la fonction Σ est ce que l'on a appelé la surface libre. Le domaine occupé par l'eau à l'instant t est le demi-espace, noté Ω_t, qui est situé sous la surface libre :

$$\Omega_t = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \,|\, y < \Sigma(t, x) \right\}.$$

L'inconnue Φ dépend de t, x et aussi de y. À l'instant t, Φ est définie dans tout le domaine Ω_t. Nous ne considérerons que des écoulements incompressibles, de sorte que Φ est une fonction harmonique, vérifiant l'équation

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega_t.$$

Dès lors, pour déterminer Φ, il suffit de connaître sa trace au bord du domaine, qui est la fonction, notée Ψ dans la suite, définie par

$$\Psi(t, x) = \Phi(t, x, \Sigma(t, x)).$$

Un intérêt de cette notation est que maintenant le problème ne dépend que de deux inconnues qui sont des fonctions du temps t et de la variable $x \in \mathbf{R}^2$.

Pour énoncer les équations qui régissent la propagation d'ondes de gravité, nous avons besoin d'introduire l'opérateur de Dirichlet–Neumann. Cet opérateur intervient dans de nombreuses situations en analyse. Il joue un rôle central dans l'étude des vagues depuis les travaux de Walter Craig et de ses collaborateurs.

Par définition c'est l'opérateur qui à une fonction f définie sur le bord d'un domaine $\partial\Omega$ associe la dérivée normale de son extension harmonique. Ici, il est plus commode d'introduire un coefficient dans la définition. Dans la suite, étant données deux fonctions σ et ψ de la variable $x \in \mathbf{R}^d$ ($d \geq 1$), $G(\sigma)$ désignera l'opérateur de Dirichlet-Neumann, qui est défini par

$$\begin{aligned} G(\sigma)\psi(x) &= \sqrt{1 + |\nabla\sigma|^2}\, \partial_n \varphi|_{y=\sigma(x)} \\ &= (\partial_y \varphi)(x, \sigma(x)) - \nabla\sigma(x) \cdot (\nabla\varphi)(x, \sigma(x)), \end{aligned}$$

où $\varphi = \varphi(x, y)$ est la solution de l'équation de Laplace

$$\Delta_{x,y} \varphi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega := \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \,|\, y < \sigma(x) \right\}, \tag{7}$$

avec comme conditions aux limites

$$\varphi(x, \sigma(x)) = \psi(x), \quad \nabla_{x,y} \varphi(x, y) \to 0 \text{ pour } y \to -\infty. \tag{8}$$

Cet opérateur est bien défini sous des hypothèses qui sont toujours vérifiées dans notre contexte (si σ est une fonction lipschitzienne et si ψ appartient à l'espace de Sobolev H^1, alors on peut montrer que $G(\sigma)\psi$ appartient à l'espace de Lebesgue L^2).

Nous allons voir que

$$G(0) = |D_x|\,,$$

où $|D_x|$ est le multiplicateur de Fourier de symbole $|\xi|$ qui a déjà été introduit. En effet, supposons que

$$\Delta_{x,y}\varphi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega := \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \,|\, y < 0\,\}, \tag{9}$$

et introduisons la transformée de Fourier de φ par rapport à x :

$$u(\xi, y) = \int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x,y)\,dx.$$

Alors u vérifie l'équation

$$\partial_y^2 u - |\xi|^2 u = 0.$$

La solution $e^{-y|\xi|}$ étant à exclure car ici $y < 0$, on trouve que

$$u = e^{y|\xi|}u(\xi, 0)$$

ce qui entraine $(\partial_y\varphi)(x,0) = (|D_x|\,\varphi)(x,0)$ et donc le résultat voulu.

Bien sûr $G(\sigma)\psi$ dépend linéairement de ψ. Quant à sa dépendance en σ on peut montrer qu'elle est analytique en utilisant des résultats de Ronald R. Coifman et Yves Meyer. On a également une formule due à David Lannes qui donne la première dérivée de $G(\sigma)\psi$ par rapport à σ. En notant

$$d_\sigma G(\sigma)\psi \cdot \dot\sigma = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(G(\sigma + \varepsilon\dot\sigma)\psi - G(\sigma)\psi\right)$$

on a

$$d_\sigma G(\sigma)\psi \cdot \dot\sigma = -G(\sigma)(B\dot\sigma) - div(V\dot\sigma) \tag{10}$$

avec

$$B = (\partial_y\varphi)(x, \sigma(x)), \quad V = (\partial_x\varphi)(x, \sigma(x)),$$

où φ désigne l'extension harmonique de ψ.

4. Le problème de Cauchy

Les équations qui régissent la propagation des ondes de gravité sont données par une condition cinématique (non décollement des particules de la surface) et une condition dynamique (équilibre des forces à la surface). Avec les notations précédentes, les équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t\Sigma - G(\Sigma)\Psi = 0, \\ \partial_t\Psi + g\Sigma + \dfrac{1}{2}|\nabla\Psi|^2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(\nabla\Sigma\cdot\nabla\Psi + G(\Sigma)\Psi\right)^2}{1+|\nabla\Sigma|^2} = 0, \end{cases} \tag{11}$$

où les inconnues sont $\Sigma = \Sigma(t,x)$, $\Psi = \Psi(t,x)$ ($x \in \mathbf{R}^d$, $d \in \{1,2\}$), $G(\Sigma)$ est l'opérateur de Dirichlet–Neumann que nous avons introduit au paragraphe précédent et $g > 0$ est l'accélération de la gravité.

On peut maintenant expliquer d'où vient l'équation (1). Si on néglige les termes qui sont quadratiques par rapport aux inconnues, on obtient le système suivant

$$\partial_t\Sigma = G(0)\Psi, \quad \partial_t\Psi + g\Sigma = 0.$$

En utilisant que $G(0) = |D_x|$ et en dérivant en temps on obtient

$$\partial_t^2 \Sigma + g\,|D_x|\,\Sigma = 0,$$

et donc l'équation de Cauchy (1).

Mais ce n'est pas ce petit calcul qui explique le titre de cette section. On appelle problème de Cauchy la résolution d'une équation d'évolution pour laquelle on se donne des données initiales. Nous imposerons dans la suite que

$$\Sigma(0,x) = \Sigma_0(x), \quad \Psi(0,x) = \Psi_0(x) \tag{12}$$

où Σ_0 et Ψ_0 sont des fonctions données. On rajoute aussi une condition au bord du domaine, ce que l'on appelle une condition aux limites. Il est important pour la suite de comprendre la distinction entre deux cas bien différents : a) le cas de données initiales décroissant à l'infini au sens où Σ_0 et Ψ_0 sont de carré intégrable ainsi que toutes leurs dérivées (cela contient les fonctions C^∞ à support compact). b) le cas de données initiales C^∞ et bi-périodiques, ce qui signifiera dans la suite qu'il existe un nombre $\tau > 0$ tel que

$$\Sigma_0(x) = \Sigma_0(x_1 + 2\pi, x_2) = \Sigma_0\left(x_1, x_2 + \frac{2\pi}{\tau}\right),$$
$$\Psi(x) = \Psi_0(x_1 + 2\pi, x_2) = \Psi_0\left(x_1, x_2 + \frac{2\pi}{\tau}\right).$$

On notera $C^k(\mathbf{T}^2_\tau)$ l'espace des fonctions de classe C^k qui sont bi-périodiques.

Il y a bien sûr une autre dichotomie fondamentale : solutions analytiques versus solutions C^∞. Nous n'en parlerons pas car l'analyticité est pour l'étude de ce problème de Cauchy une hypothèse simplificatrice.

Venons en aux résultats sur le problème de Cauchy. Les premiers résultats sans hypothèse de petitesse sont dus à Klauss Beyer et Matthias Günther ainsi qu'à Sijue Wu.

Théorème 2. *Pour $(\Sigma_0, \Psi_0) \in C^\infty(\mathbf{R}^2)^2$ bi-périodique, il existe un temps $T > 0$ tel que le problème de Cauchy pour (11) avec donnée initiale (Σ_0, Ψ_0) a une unique solution $(\Sigma, \Psi) \in C^\infty([0,T] \times \mathbf{T}^2_\tau)^2$ bi-périodique en x.*

Théorème 3. *Pour tout $(\Sigma_0, \Psi_0) \in C^\infty(\mathbf{R}^2)^2$ à support compact, il existe un temps $T > 0$ tel que le problème de Cauchy pour (11) avec donnée initiale (Σ_0, Ψ_0) a une unique solution (Σ, Ψ) dans $C^\infty([0,T] \times \mathbf{R}^2)^2$ vérifiant*

$$\int_{\mathbf{R}^2} |\partial_x^\alpha \Sigma(t,x)|^2 \, dx < +\infty, \quad \int_{\mathbf{R}^2} |\partial_x^\alpha \Psi(t,x)|^2 \, dx < +\infty$$

pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^2$ et pour tout $t \in [0,T]$.

Ces deux théorèmes se démontrent exactement de la même manière.

Afin de simplifier le plus possible les énoncés de ces résultats, nous n'avons considéré que des données C^∞. Les résultats de Beyer-Günther et Wu sont en fait vrais sous des hypothèses plus générales, qui ne demandent qu'une régularité limitée sur les données initiales. Naturellement, une question est de déterminer la régularité minimale à imposer aux données initiales pour pouvoir résoudre le problème de Cauchy. Dans une série de travaux avec Nicolas Burq et Claude Zuily,

nous montrons que l'on peut résoudre le problème de Cauchy sous des hypothèses qui autorisent la vitesse à être un peu moins régulière que C^1.

Dans une autre direction, il a été démontré très récemment par Sijue Wu et aussi par Pierre Germain, Jallal Shatah et Nader Masmoudi que l'on a existence globale à donnée petite.

Théorème 4. *Considérons* $(\Sigma_0, \Psi_0) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)^2$. *Il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que pour tout* $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$, *le problème de Cauchy pour* (11) *avec donnée initiale* $(\varepsilon\Sigma_0, \varepsilon\Psi_0)$ *a une unique solution* $(\Sigma, \Psi) \in C^\infty([0, +\infty[\times\mathbf{R}^2)^2$ *vérifiant*

$$\int_{\mathbf{R}^2} |\partial_x^\alpha \Sigma(t,x)|^2 \, dx < +\infty, \quad \int_{\mathbf{R}^2} |\partial_x^\alpha \Psi(t,x)|^2 \, dx < +\infty$$

pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^2$ *et pour tout* $t \in [0, +\infty[$.

Un résultat d'existence globale à donnée petite pour le cas où $\mathbf{R}^2$ serait remplacé par $\mathbf{R}$ serait spectaculaire (toutefois Wu a démontré un résultat d'existence presque globale en temps). On a *aucun analogue* de ce résultat pour des solutions bi-périodiques. (La dispersion entraîne un phénomène de décroissance de la norme L^∞ dans le cas de l'espace entier, mais pas dans le cas de solutions périodiques.)

5. Le résultat de Iooss et Plotnikov

Le résultat de Iooss et Plotnikov est énoncé dans cette section.

5.1. Les équations

On va chercher des ondes de gravité bi-périodiques et permanentes. C'est-à -dire des solutions du système (11) de la forme

$$\Sigma(t,x) = \sigma(x - ct), \quad \Psi(t,x) = \psi(x - ct),$$

où σ et ψ sont des fonctions bi-périodiques et où $c \in \mathbf{R}^2$.

En utilisant l'opérateur de Dirichlet-Neumann $G(\sigma)$ (défini à la section 3), un calcul direct donne que nous sommes amenés à étudier un système de deux équations scalaires, qui s'écrit

$$\begin{cases} G(\sigma)\psi - c \cdot \nabla\sigma = 0, \\ g\sigma + c \cdot \nabla\psi + \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{2}\frac{\left(\nabla\sigma\cdot\nabla\psi + c\cdot\nabla\sigma\right)^2}{1+|\nabla\sigma|^2} = 0. \end{cases}$$

Quitte à faire une rotation des axes et à remplacer g par $\mu := g/|c|^2$, on peut supposer que $c = (1, 0)$, ce qui donne le système suivant

$$\begin{cases} G(\sigma)\psi - \partial_{x_1}\sigma = 0, \\ \mu\sigma + \partial_{x_1}\psi + \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{2}\frac{\left(\nabla\sigma\cdot\nabla\psi + \partial_{x_1}\sigma\right)^2}{1+|\nabla\sigma|^2} = 0, \end{cases} \tag{13}$$

où les inconnues sont $\sigma, \psi \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ et où μ est un paramètre positif. Notons le système précédent sous la forme compacte

$$\mathcal{E}(\mu, \sigma, \psi) = 0.$$

5.2. La forme voulue des solutions

On cherche des triplets (μ, σ, ψ) tels que $\mathcal{E}(\mu, \sigma, \psi) = 0$. Par définition, les « diamond waves » sont des solutions (σ, ψ) du système (13) qui sont périodiques en x_1 et en x_2, et qui de plus vérifient des conditions de symétrie par rapport à la direction de propagation. A savoir : σ est paire en x_1 et paire en x_2 ; ψ est impaire en x_1 et paire en x_2. De plus ces fonctions sont bi-périodiques :

$$\sigma(x) = \sigma(x_1 + 2\pi, x_2) = \sigma\big(x_1, x_2 + \frac{2\pi}{\tau}\big),$$
$$\psi(x) = \psi(x_1 + 2\pi, x_2) = \psi\big(x_1, x_2 + \frac{2\pi}{\tau}\big),$$

pour un certain paramètre $\tau > 0$.

Pour construire des solutions à un problème non linéaire, une remarque banale est d'en chercher sous la forme de très petites perturbations de solutions de petite amplitude du système linéarisé autour d'une solution triviale (ici la solution nulle $(\sigma, \psi) = (0, 0)$). Les solutions de Iooss et Plotnikov sont justement cherchées sous la forme

$$\begin{aligned} \sigma^\varepsilon(x) &= \varepsilon\sigma_1(x) + \varepsilon^2\sigma_2(x) + \varepsilon^3\sigma_3(x) + O(\varepsilon^4), \\ \psi^\varepsilon(x) &= \varepsilon\psi_1(x) + \varepsilon^2\psi_2(x) + \varepsilon^3\psi_3(x) + O(\varepsilon^4), \\ \mu^\varepsilon &= \mu_c + \varepsilon^2\mu_1 + O(\varepsilon^4), \end{aligned} \tag{14}$$

où $\varepsilon \in [0, 1]$ est un petit paramètre et

$$\mu_c := \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}},\ \sigma_1(x) := -\frac{1}{\mu_c}\cos x_1 \cos(\tau x_2)\,,\ \psi_1(x) := \sin x_1 \cos(\tau x_2)\,.$$

Noter que (σ_1, ψ_1) est une solution du linéarisé autour de la solution triviale $(0, 0)$, qui de plus vérifie les conditions énoncées précédemment. Le fait que l'on fasse dépendre μ du petit paramètre ε ne va pas de soi. C'est l'idée fondamentale due à Stokes.

5.3. Une contrainte sur l'amplitude

La difficulté principale est que le système (13) n'est pas elliptique. En effet, on calcule facilement que le déterminant du symbole du linéarisé autour de la solution triviale $(\sigma, \psi) = (0, 0)$ est égal à

$$\mu\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} - \xi_1^2,$$

qui s'annule sur un ensemble non borné de $\mathbf{R}^2$. Cette observation suggère la présence de petits diviseurs. La contribution essentielle de Iooss et Plotnikov a été précisément d'obtenir une majoration de l'inverse du symbole du linéarisé autour d'un état non trivial sous une condition diophantienne. Cela nécessite de considérer des valeurs des paramètres τ et ε telles que l'estimation du théorème 1 est vérifiée.

5.4. Le résultat

Rappelons que $C^k(\mathbf{T}^2_\tau)$ désigne l'espace des fonction f de classe C^k et telles que

$$f(x) = f(x_1 + 2\pi, x_2) = f\left(x_1, x_2 + \frac{2\pi}{\tau}\right).$$

Théorème 5. *Soit $\tau \in]0, +\infty[$, $k \in \mathbf{N}, k \geqslant 23$ et $\mu_c = (1+\tau^2)^{-1/2}$. Il existe un ensemble $A \subset [0,1]$ de mesure de Lebesgue égale à 1 tel que, pour tout $\mu_c \in A$, il existe un ensemble $\mathcal{E} = \mathcal{E}(k, \mu_c)$ vérifiant*

$$\lim_{r\to 0} \frac{2}{r^2} \int_{\mathcal{E}\cap[0,r]} t\, dt = 1, \tag{15}$$

et une famille $\{(\mu^\varepsilon, \sigma^\varepsilon, \psi^\varepsilon) \,|\, \varepsilon \in \mathcal{E}\}$ de solutions de

$$\begin{cases} G(\sigma^\varepsilon)\psi^\varepsilon - \partial_{x_1}\sigma^\varepsilon = 0, \\ \mu^\varepsilon\sigma^\varepsilon + \partial_{x_1}\psi^\varepsilon + \dfrac{1}{2}|\nabla\psi^\varepsilon|^2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(\nabla\sigma^\varepsilon\cdot\nabla\psi^\varepsilon + \partial_{x_1}\sigma^\varepsilon\right)^2}{1+|\nabla\sigma^\varepsilon|^2} = 0, \end{cases}$$

telle que

$$\begin{aligned} \sigma^\varepsilon(x) &= \varepsilon\sigma_1(x) + \varepsilon^2\sigma_2(x) + \varepsilon^3\sigma_3(x) + \varepsilon^4\Sigma^\varepsilon(x), \\ \psi^\varepsilon(x) &= \varepsilon\psi_1(x) + \varepsilon^2\psi_2(x) + \varepsilon^3\psi_3(x) + \varepsilon^4\Psi^\varepsilon(x), \\ \mu^\varepsilon &= \mu_c + \varepsilon^2\mu_1 + O(\varepsilon^4), \end{aligned}$$

où $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3 \in C^\infty(\mathbf{T}^2_\tau)$ avec

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= -\frac{1}{\mu_c}\cos(x_1)\cos(\tau x_2), \\ \psi_1(x) &= \sin(x_1)\cos(\tau x_2), \\ \mu_1 &= \frac{1}{4\mu_c^3} - \frac{1}{2\mu_c^2} - \frac{3}{4\mu_c} + 2 + \frac{\mu_c}{2} - \frac{9}{4(2-\mu_c)}, \end{aligned}$$

et où les restes $\Sigma^\varepsilon, \Psi^\varepsilon$ sont uniformément bornés dans $C^k(\mathbf{T}^2_\tau)$.

Avec Guy Métivier, nous avons démontré un résultat de régularité *a priori* pour des diamond waves sous une hypothèse diophantienne plus faible que celle qui assure l'existence des solutions de Iooss et Plotnikov (voir [1]). En particulier, notre résultat démontre l'infinie régularité de ces solutions. On peut conjecturer que les solutions de Iooss et Plotnikov sont en fait analytiques.

6. Espaces de Sobolev

Jusqu'ici nous n'avons utilisé que les espaces usuels de fonctions de classe C^k avec $k \in \mathbf{N}$. Pour étudier une EDP il y a de nombreux espaces qui sont utiles : les espaces de Lebesgue L^p, les espaces de Hölder $C^{k,\alpha}$ et les espaces de Sobolev H^s. Pour diverses raisons il sera plus commode de travailler avec les espaces de Sobolev.

Définition. *Étant donné un indice $s \geq 0$ et $\tau > 0$, l'espace de Sobolev $H^s(\mathbf{T}^2_\tau)$ est l'espace des fonctions $f \in L^2(\mathbf{T}^2_\tau)$ telles que*

$$\|f\|_{H^s} = \left(\sum_{\xi \in \Gamma'} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 \right)^{1/2} < +\infty,$$

où $\Gamma' = \{ (n_1, n_2\tau) : (n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2 \}$ et

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sqrt{\tau}}{2\pi} \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi/\tau]} e^{-i\xi\cdot x} f(x)\, dx.$$

On vérifie facilement que $H^1(\mathbf{T}^2_\tau)$ est l'espace des fonctions $f \in L^2(\mathbf{T}^2_\tau)$ dont la dérivée au sens des distributions est dans $L^2(\mathbf{T}^2_\tau)$. Plus généralement, pour $k \in \mathbf{N}^*$, on vérifie que $H^k(\mathbf{T}^2_\tau)$ est l'espace des fonctions $f \in L^2(\mathbf{T}^2_\tau)$ dont la dérivée au sens des distributions appartient à $H^{k-1}(\mathbf{T}^2_\tau)$.

Si $s > 1$ alors $H^s(\mathbf{T}^2_\tau)$ est inclus dans l'espace $C^0(\mathbf{T}^2_\tau)$. Plus généralement si $s > 1 + k$ avec $k \in \mathbf{N}$ alors $H^s(\mathbf{T}^2_\tau)$ est inclus dans $C^k(\mathbf{T}^2_\tau)$.

7. Le calcul paradifférentiel de Bony

Le but de cette partie est d'introduire aussi simplement que possible les opérateurs paradifférentiels et la notion de paralinéarisation d'une équation non linéaire.

Rappelons la définition du support singulier d'une fonction : c'est le complémentaire des points au voisinage desquels u est de classe C^∞ (cette définition est valable plus généralement pour une distribution). On note *sing suppu* le support singulier de u. Cet ensemble est vide si la fonction est de classe C^∞. Le support singulier de la fonction valeur absolue ($x \mapsto |x|$) est le singleton $\{0\}$. Il y a un objet plus fin et qui est fondamental dans l'étude des singularités. C'est le front d'onde dont on va rappeler la définition. Cet outil sert à comprendre la propagation des singularités.

Le front d'onde d'une distribution tempérée f, noté $WF(f)$, est l'ensemble des singularités microlocales de f. Cet ensemble est défini par son complémentaire.

Définition. *Soit $(x_0, \xi_0) \in \mathbf{R}^d \times (\mathbf{R}^d \setminus \{0\})$. On dit que $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$ si il existe $\varphi \in C^\infty_0(\mathbf{R}^d)$ non nulle en x_0 et un voisinage W de ξ_0 tels que la transformée de Fourier $\widehat{\varphi f}$ soit à décroissance rapide dans les directions voisines de ξ_0 i.e.*

$$\forall N \in \mathbf{N},\ \exists C_N > 0 : \forall \xi \in W, \quad \left|\widehat{\varphi f}(\lambda\xi)\right| \leqslant C_N \lambda^{-N}.$$

Si P est un opérateur différentiel d'ordre m à coefficients C^∞,

$$P = \sum_{|\alpha| \leqslant m} p_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad (D_x = \frac{1}{i}\partial_x)$$

une question importante en EDP est de déterminer le front d'onde des solutions distributions de l'équation

$$Pf = 0. \tag{16}$$

Un objet géométrique important est constitué par la variété caractéristique de P que l'on note $Car(P)$ et qui est le fermé (homogène en ξ) défini par

$$Car(P) = \left\{ (x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^d ;\ p_m(x,\xi) = 0 \right\} \quad \text{où} \quad p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} p_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Le premier résultat important de la théorie est le suivant : les singularités des solutions de (16) sont contenues dans la variété caractéristique i.e.

$$WF(f) \subset Car(P). \tag{17}$$

La démonstration de (17) commence par une remarque. En notant

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} p_\alpha(x)\xi^\alpha$$

nous avons

$$P(f)(\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi)\widehat{f}(\xi)\, d\xi.$$

La remarque en question est que le membre de droite peut être défini, au sens des intégrales oscillantes, si au lieu de demander que p soit un polynôme en ξ on demande juste qu'il vérifie certaines estimations de décroissance lorsqu'on le dérive. Commençons par donner un sens à cette affirmation.

Définition. *Soit $m \in \mathbf{R}$. La classe des symboles d'ordre m, notée $S^m(\mathbf{R}^d)$, est l'ensemble des fonctions $a \in C^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ à valeurs complexes telles que, pour tout α et β dans $\mathbf{N}^d$, il existe une constante $C_{\alpha,\beta}$ telle que*

$$\forall (x,\xi) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d, \qquad \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)\right| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}.$$

Pour tout $a \in S^m(\mathbf{R}^d)$, toute fonction u dans la classe de Schwartz $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ et tout $x \in \mathbf{R}^d$, la fonction $\xi \mapsto a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d_\xi)$. A fortiori elle est intégrable et on peut définir

$$Op(a)u(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\, d\xi.$$

De plus on peut vérifier que la formule précédente définit une fonction $Op(a)u$ de $\mathcal{S}$ et que $Op(a)$ est continu de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$. On peut alors par dualité étendre $Op(a)$ à l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'$.

Bien sûr $p \in S^m$. Le point important est que si p ne s'annule pas alors $1/p \in S^{-m}$. Le point central pour démontrer (17) est que par des localisations on peut se ramener au cas où p ne s'annule pas.

Le calcul paradifférentiel a été introduit par Jean-Michel Bony pour étudier les singularités des équations aux dérivées partielles non linéaires, de la forme

$$F((\partial_x^\alpha f)_{|\alpha|\leqslant m}) = 0.$$

On ne sait pas décrire pour une équation aussi générale l'ensemble des points où la fonction n'est pas microlocalement C^∞. En particulier on ne connait pas d'analogue du résultat (17) précédent. En revanche, grâce au calcul paradifférentiel, on peut dire des choses si l'on remplace C^∞ par un espace de fonctions à régularité limitée (par exemple H^r avec $r < +\infty$). Pour cela nous utiliserons la définition suivante.

On dit que u est microlocalement H^r en (x_0,ξ_0) si il existe un symbole $\varphi=\varphi(x,\xi)$ homogène d'ordre 0 en ξ, vérifiant $\varphi(x_0,\xi_0)\neq 0$, tel que $Op(\varphi)u\in H^r$.

Théorème 6. *Soit $d,m\geq 1$ et $s_0=d/2+m$. Considérons une solution $f\in H^s$ avec $s>s_0$ de*

$$F((\partial_x^\alpha f)_{|\alpha|\leqslant m})=0. \tag{18}$$

Introduisons le symbole

$$p_m(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=m}\frac{\partial F}{\partial f_\alpha}((\partial_x^\alpha f(x))_{|\alpha|\leqslant m})(i\xi)^\alpha.$$

En tout point $(x_0,\xi_0)\in\mathbf{R}^d\times(\mathbf{R}^d\setminus\{0\})$ tel que $p_m(x_0,\xi_0)\neq 0$, f est microlocalement deux fois plus régulière : elle est microlocalement de classe H^t pour tout $t<2s-s_0$.

Dans l'énoncé précédent, le symbole p_m dépend de l'inconnue f et on est amené à travailler avec des symboles de régularité limitée.

Définition. *Soit $m\in\mathbf{R}$ et $k\in\mathbf{N}$. La classe des symboles d'ordre m et de régularité C^k en x, notée $\Gamma^m_k(\mathbf{R}^d)$, est l'ensemble des fonctions $a=a(x,\xi)$ telles que, pour tout multi-indice β dans $\mathbf{N}^d$, il existe une constante C_β telle que*

$$\left\|\partial_\xi^\beta a(\cdot,\xi)\right\|_{C^k}\leqslant C_\beta(1+|\xi|)^{m-|\beta|}.$$

La quantification paradifférentielle de Bony associe à un symbole a l'opérateur T_a défini par

$$\widehat{T_a u}(\xi)=(2\pi)^{-d}\int\chi(\xi-\eta,\eta)\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)\psi(\eta)\widehat{u}(\eta)\,d\eta,$$

où $\widehat{a}(\theta,\xi)=\int e^{-ix\cdot\theta}a(x,\xi)\,dx$, et les fonctions de troncature ψ et χ vérifient

$$\psi(\eta)=0\quad\text{pour }\ |\eta|\leqslant 1,\quad \psi(\eta)=1\quad\text{pour }\ |\eta|\geqslant 2,$$

et, pour $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ assez petits,

$$\chi(\theta,\eta)=1\quad\text{si }\ |\theta|\leqslant\varepsilon_1|\eta|,\quad \chi(\theta,\eta)=0\quad\text{si }\ |\theta|\geqslant\varepsilon_2|\eta|.$$

Le point central dans la démonstration du théorème précédent est de montrer que si f vérifie l'équation (18) alors

$$T_p f\in H^{t-m},$$

qui est une équation paradifférentielle. On dit que l'on a paralinéarisé (18).

8. Paralinéarisation de l'opérateur de Dirichlet–Neumann

Nous avons introduit la notion de paralinéarisation à la fin du paragraphe précédent. Avec Guy Métivier, notre approche a consisté à paralinéariser les équations des ondes de gravité. Pour cela le seul point difficile est de paralinéariser l'opérateur de Dirichlet–Neumann.

L'analyse microlocale de l'opérateur de Dirichlet–Neumann n'est pas nouvelle. On sait au moins depuis les travaux de Calderón que si σ est une fonction C^∞, alors $G(\sigma)$ est un opérateur pseudo-différentiel classique, elliptique d'ordre 1. Dans ce cas, on calcule aisément que le symbole de $G(\sigma)$, noté λ_σ, a un développement (asymptotique) de la forme

$$\lambda_\sigma(x,\xi) \sim \lambda^1_\sigma(x,\xi) + \lambda^0_\sigma(x,\xi) + \lambda^{-1}_\sigma(x,\xi) + \cdots \tag{19}$$

où λ^k_σ est homogène d'ordre k en ξ, et

$$\lambda^1_\sigma(x,\xi) = \sqrt{(1+|\nabla\sigma(x)|^2)\,|\xi|^2 - (\nabla\sigma(x)\cdot\xi)^2}.$$

De plus, les symboles $\lambda^0_\sigma, \lambda^{-1}_\sigma, \ldots$ sont définis par récurrence, de sorte que λ^k_σ ne dépend que des dérivées d'ordre $\leqslant |k|+2$ de σ. Cette observation permet de définir λ_σ pour $\sigma \notin C^\infty$ de façon évidente, en ne considérant dans le développement (19) que les termes qui ont un sens. Plus précisément, pour $\sigma \in C^{k+2} \setminus C^{k+3}$ avec $k \in \mathbf{N}$, nous poserons

$$\lambda_\sigma = \lambda^1_\sigma + \lambda^0_\sigma + \cdots + \lambda^{-k}_\sigma.$$

Un tel symbole appartient naturellement aux classes de symboles du calcul paradifférentiel de Bony.

Pour l'étude des problèmes avec surface libre qui nous intéressent, les fonctions ψ et σ ont la même régularité. Il faut donc comprendre toute la structure de $G(\sigma)$ en fonction de σ. C'est ce que donne le théorème suivant démontré dans [1].

Théorème 7. *Considérons un indice s assez grand. Si $\sigma \in H^s(\mathbf{T}^2_\tau)$ et $\psi \in H^s(\mathbf{T}^2_\tau)$, alors*

$$G(\sigma)\psi = T_{\lambda_\sigma}\big(\psi - T_B\sigma\big) - T_V\cdot\nabla\sigma - T_{divV}\sigma + R(\sigma,\psi), \tag{20}$$

où le reste $R(\sigma,\psi)$ est deux fois plus régulier que les inconnues :

$$R(\sigma,\psi) \in H^{2s-K}(\mathbf{T}^2_\tau),$$

où K est un nombre qui ne dépend que de la dimension, et les coefficients B et V sont ceux qui interviennent dans la formule de Lannes (10).

L'approche paradifférentielle est inspirée par les travaux de Serge Alinhac sur les chocs et par ceux de David Lannes sur le problème de Cauchy pour les ondes de gravité. Un point clé de la démonstration consiste à faire apparaître l'inconnue $\psi - T_B\eta$ qui est appelée la bonne inconnue d'Alinhac dans la littérature.

9. Sous-ellipticité sous une hypothèse diophantienne

La contribution essentielle de Iooss et Plotnikov a été d'obtenir une majoration de l'inverse du symbole du linéarisé autour d'un état non trivial sous une condition diophantienne. Ce qui est l'étape cruciale pour prouver l'existence de diamond waves au moyen d'un schéma de Nash-Moser.

Les estimations de Iooss et Plotnikov sont des estimations avec perte d'une dérivée. Nous allons dans cette partie esquisser un raffinement de leur méthode qui permet d'avoir des estimations sans perte et donc de démontrer que leurs solutions sont en fait C^∞ (cf [1]). Un point intéressant est que nous ne ferons aucune hypothèse de petitesse sur les solutions.

Définition. *Fixons $\tau > 0$ et notons par $\mathbf{T}^2_\tau$ le tore $\mathbf{T}^2_\tau = (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}) \times (\mathbf{R}/\frac{2\pi}{\tau}\mathbf{Z})$.*

i) Étant donnés $\mu > 0$ et $s > 3$, $D^s_\mu(\mathbf{T}^2_\tau)$ désigne l'ensemble des solutions (σ, ψ) du système (13) *qui appartiennent à $H^s(\mathbf{T}^2_\tau)$ et qui sont telles que, pour tout $x \in \mathbf{R}^2$,*

$$\sigma(x) = \sigma(-x_1, x_2) = \sigma(x_1, -x_2),$$
$$\psi(x) = -\psi(-x_1, x_2) = \psi(x_1, -x_2),$$

et

$$1 + (\partial_{x_1}\varphi)(x, \sigma(x)) \neq 0, \tag{21}$$

où φ est l'extension harmonique de ψ définie par (7)–(8).

ii) L'ensemble $D^s(\mathbf{T}^2_\tau)$ des diamond waves de régularité H^s est l'ensemble de tous les triplets $\omega = (\mu, \sigma, \psi)$ tels que $(\sigma, \psi) \in D^s_\mu(\mathbf{T}^2_\tau)$.

Remarque. *La condition* (21) *est une hypothèse naturelle qui signifie juste qu'une certaine vitesse ne s'annule pas. Notons qu'elle est automatiquement satisfaite pour des ondes de petite amplitude.*

Nous allons construire deux fonctions ν, κ définies sur $D^{12}(\mathbf{T}^2_\tau)$ et à valeurs réelles telles que, pour tout $s \geq 12$, si $\omega = (\mu, \sigma, \psi) \in D^s(\mathbf{T}^2_\tau)$ vérifie

$$\left|k_2 - \left(\nu(\omega)k_1^2 - \kappa(\omega)\right)\right| \geqslant \frac{1}{k_1^2}, \tag{22}$$

pour tout $(k_1, k_2) \in \mathbf{N}^2$ avec k_1 assez grand, alors

$$(\sigma, \psi) \in H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{T}^2_\tau).$$

Pour cela nous allons faire une réduction des équations à une équation scalaire à coefficients constants plus un reste arbitrairement régularisant.

Nous avons déjà paralinéarisé la première condition aux limites. Puisque la seconde est une expression non linéaire simple, il est beaucoup plus aisé de la paralinéariser. Le résultat intéressant est que ce calcul fait aussi intervenir la bonne inconnue $u = \psi - T_B\sigma$ qui apparaît dans la formule (20). On obtient ainsi un système de deux équations. Il sera plus commode pour la suite de travailler à partir de l'équation du second ordre que l'on obtient à partir de ce système. Au final on obtient le résultat suivant.

Proposition. *Introduisons* $V := c + \nabla\psi - B\nabla\sigma$, $\mathfrak{a} := \mu + V \cdot \nabla B$, *et posons*

$$\mathcal{V}(x,\xi) := -\mathfrak{a}(x)^{-1}(V(x)\cdot\xi)^2 + \mathit{idiv}\left(\mathfrak{a}(x)^{-1}(V(x)\cdot\xi)V(x)\right). \tag{23}$$

Alors,

$$u = \psi - T_B\eta$$

vérifie

$$T_{\lambda_\sigma+\mathcal{V}}\, u \in H^{2s-5}(\mathbf{T}^2_\tau).$$

La notation $\mathfrak{a}$ est classique. Ce coefficient est appelé coefficient de Taylor dans la littérature. Le sens physique de $\mathfrak{a}$ est donné par l'identité suivante $\mathfrak{a}(x) = -(\partial_y P)(x,\sigma(x))$, où $P = P(x,y)$ est la pression du fluide. Il y a alors une propriété physique, dont le sens est clair, et qui se démontre aisément. Cette propriété est que la dérivée normale de la pression dans le fluide évaluée sur la surface libre est strictement négative. Cela implique que

$$\mathfrak{a} > 0.$$

(Cette propriété est due à Sijue Wu.) En particulier $\mathfrak{a}(x)^{-1}$ est bien défini.

On a donc déjà trouvé le symbole du paralinéarisé. Introduisons le symbole

$$p(x,\xi) = \lambda^1_\sigma(x,\xi) + \mathcal{V}(x,\xi).$$

Nous cherchons un changement de variables qui conjugue l'équation à une équation plus simple. Cela revient à trouver un difféomorphisme χ tel que $p\big(x, {}^t\chi'(x)\xi\big)$ a une expression simple. Bien sûr nous devons trouver un difféomorphisme qui respecte la structure périodique. Etant donné un indice $r > 1$, nous dirons qu'un difféomorphisme $\chi\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ est un $C^r(\mathbf{T}^2_\tau)$-difféomorphisme si $\chi(x) - x \in C^r(\mathbf{T}^2_\tau)$.

Le point clé est que l'on peut redresser le champ de vecteurs tout en respectant la périodicité.

Proposition. *Il existe un* $C^{s-3}(\mathbf{T}^2_\tau)$*-difféomorphisme* χ_1 *de la forme*

$$\chi_1(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ d(x_1,x_2)\end{pmatrix},$$

tel que d *est solution de l'équation de transport*

$$V_1\partial_{x_1} d + V_2\partial_{x_2} d = 0,$$

avec donnée initiale $d(0,x_2) = x_2$, *et tel que,*

$$d(x_1,x_2) = d(x_1+2\pi,x_2) = d\left(x_1,x_2+2\pi/\tau\right) - 2\pi/\tau.$$

En utilisant ensuite le fait que le symbole principal du Dirichlet–Neumann est la racine carrée d'un polynôme du second degré, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire. *Il existe*

- *un difféomorphisme* $\chi\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *tel que* $\chi - \mathrm{id} \in C^{s-4}(\mathbf{T}^2_\tau)$,
- *une constante* $\nu \geqslant 0$,
- *une fonction strictement positive* $\gamma \in C^{s-4}(\mathbf{T}^2_\tau)$,
- *un symbole* $\alpha \in \Gamma^0_{s-4}(\mathbf{T}^2_\tau)$ *homogène de degré* 0 *en* ξ,

tels que, pour tout $(x,\xi)\in \mathbf{T}^2_\tau\times\mathbf{R}^2$,

$$p\big(x,{}^t\chi'(x)\xi\big)=\gamma(x)\big(|\xi|-\nu\xi_1^2\big)+i\alpha(x,\xi)\xi_1.$$

Pour calculer l'action de ce changement de variables, on va utiliser les opérateurs de paracomposition d'Alinhac. Cela permet d'associer au $C^r(\mathbf{T}^2_\tau)$-difféomorphisme χ^{-1} un opérateur $\big(\chi^{-1}\big)^*$ tel que

$$\forall\alpha\in\mathbf{R},\quad u\in H^\alpha(\mathbf{T}^2_\tau)\Leftrightarrow\big(\chi^{-1}\big)^*u\in H^\alpha(\mathbf{T}^2_\tau).$$

Une propriété fondamentale de ces opérateurs est que l'on dispose d'un lemme de calcul symbolique pour calculer le commutateur d'un tel opérateur avec un opérateur paradifférentiel. Ce calcul symbolique entraîne que $U=\big(\chi^{-1}\big)^*u$ vérifie :

$$\Big(|D_x|+\nu\partial_{x_1}^2+T_A\partial_{x_1}+T_B\Big)U=f\in H^{s+2}(\mathbf{T}^2_\tau),\tag{24}$$

où $A,B\in\Gamma^0_{s-6}(\mathbf{T}^2_\tau)$ sont tels que A est homogène de degré 0 en ξ ; $B=B_0+B_{-1}$ avec B_ℓ homogène de degré ℓ en ξ.

On peut maintenant éliminer les termes d'ordres inférieurs par une méthode de commutateurs. Le résultat est qu'il existe un opérateur Z de degré 0 (elliptique et à coefficients bi-périodiques) ainsi que deux constantes $\kappa,\kappa'\in\mathbf{R}$ tels que

$$Z\Big(|D_x|+\nu\partial_{x_1}^2+T_A\partial_{x_1}+T_B\Big)U=\Big(|D_x|+\nu\partial_{x_1}^2+\kappa+\kappa'\partial_{x_1}^{-2}\Big)ZU+f,$$

avec $f\in H^{s+2}(\mathbf{T}^2_\tau)$.

Nous avons donc démontré qu'il existe deux constantes $\kappa,\kappa'\in\mathbf{R}$ et un opérateur elliptique de degré 0 préservant la périodicité, tels que

$$\big(|D_x|+\nu\partial_{x_1}^2+\kappa+\kappa'\partial_{x_1}^{-2}\big)\,ZU\in H^{s+2}(\mathbf{T}^2_\tau).\tag{25}$$

Sur ce qui joue le rôle de la variété caractéristique de l'équation, $|\xi|$ est approximativement égal à $\nu\xi_1^2$. Donc, si

$$\left|\sqrt{k_1^2+\tau k_2^2}-\nu k_1^2+\kappa\right|\geqslant\frac{1}{k_1^2},$$

pour tout $k\in\mathbf{N}^2$ avec k_1 assez grand, on obtient

$$ZU\in H^{s+1}(\mathbf{T}^2_\tau),\quad\partial_{x_1}ZU\in H^{s+\frac12}(\mathbf{T}^2_\tau).$$

Si l'on revient à l'inconnue u, cela implique que $u\in H^{s+1}(\mathbf{T}^2_\tau)$ et $T_V\cdot\nabla u\in H^{s+\frac12}(\mathbf{T}^2_\tau)$, et ensuite que

$$\psi,\sigma\in H^{s+\frac12}(\mathbf{T}^2_\tau).$$

Ainsi toute solution $(\psi,\sigma)\in H^s(\mathbf{T}^2_\tau)^2$ qui vérifie une certaine estimation diophantienne est en fait plus régulière. Comme la condition diophantienne ne dépend que d'un nombre fini de dérivées, par une récurrence immédiate on obtient que $(\psi,\sigma)\in H^{s+\frac{N}{2}}(\mathbf{T}^2_\tau)^2$ pour tout $N\in\mathbf{N}$. Ce qui prouve que $(\psi,\sigma)\in C^\infty(\mathbf{T}^2_\tau)^2$ en utilisant l'injection $H^{k+\rho}(\mathbf{T}^2_\tau)\subset C^k(\mathbf{T}^2_\tau)$ pour $\rho>1$.

Il reste ensuite beaucoup de travail pour en déduire l'existence des solutions. Il faut en particulier construire des solutions approchées, calculer la valeur de ν pour ces solutions et vérifier que ν peut s'écrire sous la forme $\nu=\nu_c-\nu_1\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)$ avec $\nu_1\neq0$.

10. Références

[1] Thomas Alazard et Guy Métivier. Paralinearization of the Dirichlet to Neumann operator, and regularity of three-dimensional water waves. *Comm. Partial Differential Equations*, 34(10-12) :1632–1704, 2009.

[2] Klaus Beyer et Matthias Günther. On the Cauchy problem for a capillary drop. I. Irrotational motion. *Math. Methods Appl. Sci.*, 21(12) :1149–1183, 1998.

[3] Jean-Michel Bony. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 14(2) :209–246, 1981.

[4] Augustin Louis Cauchy. Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie p.5-318. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. Sciences mathématiques et physiques. Tome I, imprimé par autorisation du Roi à l'Imprimerie royale ; 1827. Disponible sur le site http ://mathdoc.emath.fr/

[5] Alex D. D. Craik. The origins of water wave theory. In *Annual review of fluid mechanics. Vol. 36*, volume 36 of *Annu. Rev. Fluid Mech.*, pages 1–28. Annual Reviews, Palo Alto, CA, 2004.

[6] Étienne Ghys. Resonances and small divisors. In *Kolmogorov's heritage in mathematics*, pages 187–213. Springer, Berlin, 2007. Voir aussi une version en français sur la page internet d'Étienne Ghys.

[7] Gérard Iooss. J. Boussinesq and the standing water waves problem. *C. R. Mécanique*, 335, 9-10, 584-589, 2007.

[8] Gérard Iooss et Pavel I. Plotnikov. Small divisor problem in the theory of three-dimensional water gravity waves. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 200(940) :viii+128, 2009.

[9] Gérard Iooss et Pavel I. Plotnikov. Asymmetrical tridimensional travelling gravity waves. Preprint 2009 (87p.)

[10] Tullio Levi-Civita. Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie. *Math. Ann.*, 93(1) :264–314, 1925.

[11] John F. Toland. Stokes waves. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 7(1) :1–48, 1996.

[12] Sijue Wu. Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 3-D. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(2) :445–495, 1999.

JEUX MATHÉMATIQUES

2000 ans d'énigmes mathématiques

Marie-José Pestel[1]

De l'histoire antique à nos jours, les hommes se sont affrontés armes à la main, mais, heureusement pour l'honneur de l'esprit humain, ils ont aussi cherché à se mesurer par énigmes et jeux mathématiques interposés.

Au fil des temps, des liens étroits entre mathématiques et jeux se sont tissés, les uns nourrissant les autres. Leibniz le disait déjà, en 1716, dans une lettre à Rémond de Montfort : *« Les hommes ne sont jamais plus ingénieux que dans l'invention des jeux ; l'esprit s'y trouve à son aise. »* En effet, la capacité d'analyse du cerveau humain est source de merveilleux prodiges comme trier les nombres, calculer une surface, déceler des fausses pièces en les pesant, coder des messages et bien d'autres opérations. Tous ces exploits de l'intelligence accroissent notre compréhension du monde, créant parfois de nouveaux jeux et de nouveaux questionnements.

Cet article propose une rapide rétrospective de l'histoire des jeux mathématiques et rend hommage à ceux qui, à travers les siècles, nous ont transmis ces textes, énigmes et jeux mathématiques qui permettent de faire rimer plaisir avec mathématiques. Remarquons cependant avant de partir dans cette promenade que nous n'allons en découvrir qu'une facette, celle qui s'est construite essentiellement autour du bassin méditerranéen. Étudier des activités ludiques en mathématiques sous d'autres cultures, d'autres continents, les comparer pour en voir les différences et les ressemblances seraient l'objet sans aucun doute d'articles passionnants.

Nous avons choisi huit grands noms à travers les siècles : Archimède, Abou Wafa, Bachet de Méziriac, Fibonacci, Euler, Henry Dudeney, Samuel Loyd, Édouard Lucas et enfin Martin Gardner. C'est en leur compagnie que nous allons découvrir un peu de l'histoire des jeux mathématiques.

À tout seigneur, tout honneur, commençons notre voyage avec un des plus grands mathématiciens de tous les temps : Archimède.

Archimède est né vers 287 av. J.-C. à Syracuse en Sicile et est mort en 212 av. J.-C. toujours à Syracuse. Il aurait été l'élève d'Euclide. Génie universel, le nom d'Archimède est lié à d'innombrables inventions. Parmi ses domaines d'étude en physique, on peut citer l'hydrostatique, la mécanique statique et l'explication du principe du levier. Il est crédité de la conception de plusieurs outils innovants. Archimède est généralement considéré comme le plus grand mathématicien de

[1] Présidente du Comité International des Jeux Mathématiques.

l'Antiquité et l'un des plus grands de tous les temps. Parmi ses travaux, citons la méthode d'exhaustion pour calculer l'aire sous un arc de parabole avec la somme d'une série infinie, un encadrement de Pi d'une remarquable précision, des formules pour calculer les volumes des surfaces de révolution et un système ingénieux pour l'expression de très grands nombres.

Archimède développe un goût très sûr pour les énigmes de tous genres. Écoutez d'ailleurs ce qu'il disait à propos du plaisir de chercher des énigmes *« Quand tu auras trouvé, ami, et embrassé dans ton esprit la solution de toutes ces questions, en indiquant toutes les mesures de ces multitudes, rentre chez toi, te glorifiant de ta victoire, et sache qu'on te juge arrivé à la perfection dans cette science. »* Il échange autour de nombreux textes avec des mathématiciens de l'École d'Alexandrie. Un des plus connus est celui des « Bœufs d'Hélios » qu'il aurait envoyé à Erathostène de Cyène :

Les bœufs d'Hélios

« Le soleil (c'était alors un dieu) possédait un troupeau de taureaux et de vaches, dont une partie était blanche, une partie noire, une partie tachetée, et la quatrième brune. Parmi les taureaux, le nombre de ceux qui étaient blancs dépassait le nombre des bruns de la moitié plus un tiers du nombre des taureaux noirs. Le nombre des taureaux noirs dépassait le nombre des taureaux bruns d'un quart plus un cinquième du nombre des taureaux tachetés. Enfin le nombre des taureaux tachetés dépassait celui des bruns d'un sixième plus un septième du nombre des taureaux blancs.
Parmi les vaches, le nombre des blanches était égal au tiers augmenté du quart du nombre total des bovins noirs. Le nombre des vaches noires, au quart augmenté du cinquième du nombre total des bovins tachetés. Le nombre des vaches tachetées, au cinquième augmenté du sixième du nombre total des bovins bruns. Enfin le nombre des vaches brunes était égal à un sixième plus un septième du nombre total des bovins blancs. Quelle était la composition du troupeau ? »

Un renseignement supplémentaire : il est possible de mettre les taureaux blancs et les taureaux noirs ensemble en carré et de mettre les taureaux bruns et les taureaux tachetés en triangle.

Ce célèbre problème a été découvert dans un manuscrit grec conservé dans une bibliothèque du nord de l'Allemagne en 1773. Le texte propose de compter les troupeaux du Dieu du Soleil.

Il nécessite la résolution d'un système de 7 équations à 8 inconnues et 2 contraintes. Sa solution minimale est un nombre extrêmement grand, trop grand pour un troupeau sensé paître dans une prairie sicilienne ! ! Elle constitue sans aucun doute une prouesse à trouver sans l'aide de la machine !

Une douzaine de livres d'Archimède nous sont parvenus, parfois incomplets, mais il en aurait écrit beaucoup plus. Plusieurs auteurs latins, dont Victorinus, Fortunatianus et Magnus Ausonius (310-395), ont cité un livre d'Archimède intitulé « Stomachion » (on trouve parfois « ostomachion » ou « syntemachion » ou encore la forme latinisée « loculus ») et qui traitait de l'analyse géométrique d'un puzzle composé de 14 pièces assemblées en carré. Ce livre d'Archimède est resté totalement inconnu jusqu'à la fin du XIX^{e} siècle. En 1899, l'orientaliste Heinrich Suter découvre un fragment d'une traduction en langue arabe, qu'il traduit en allemand et publie. Dans ce fragment, Archimède étudie les rapports d'aires des différentes pièces du puzzle ainsi que leurs angles dont l'étude permet de limiter

les assemblages possibles. On pense qu'Archimède est parti d'un puzzle existant, peut-être un jeu pour enfant, qu'il aurait modifié afin que les rapports des aires des morceaux soient tous rationnels. On a longtemps cru que ce livre d'Archimède était une œuvre mineure du savant. Certains pensent aujourd'hui, à la lumière du déchiffrement du palimpseste, qu'il s'agit d'un premier traité de combinatoire. Archimède aurait voulu déterminer toutes les façons possibles d'assembler les 14 pièces en un carré. En 2003, un américain passionné de puzzles, Bill Cutler, a donné, à l'aide d'un programme informatique, les 536 solutions (rotations et réflexions non comprises) du puzzle d'Archimède.

L'histoire du palimpseste d'Archimède[1]

Une aventure rocambolesque magnifiquement racontée dans l'ouvrage Le Codex d'Archimède de William Noel publié chez JC Lattès.

En 1899 également, un paléologue grec, Papadhópoulos Kerameus, décrit un palimpseste (un palimpseste est un parchemin qui a été utilisé une première fois, puis gratté et réutilisé) qu'il a consulté dans un monastère de Constantinople et qui appartiendrait au patriarche orthodoxe de Jérusalem. Ce n'est qu'en 1906 que l'historien des mathématiques Heiberg révélera que ce palimpseste contient, entre autres textes, des fragments de trois livres d'Archimède (*Des corps flottants, Stomachion* et *De la méthode*). On savait qu'en 1846, un collectionneur nommé Konstantin von Tischendorf avait signalé avoir vu « un palimpseste traitant de mathématiques ». Il faut noter qu'en 1983, on découvrira dans la bibliothèque universitaire de Cambridge une page isolée du palimpseste, dans un lot de documents provenant de la succession de von Tischendorf. Il faudra attendre 1906 pour qu'un historien des mathématiques danois, Johan Heiberg, révèle que ce palimpseste contient des fragments de trois livres d'Archimède, dont le début du Stomachion. Heiberg prend des notes et quelques photographies en se promettant de revenir l'étudier plus complètement. Mais le manuscrit disparaît au début de la première guerre mondiale, sans doute volé. Il ne réapparaîtra qu'en 1998, lorsqu'une famille française le mettra en vente chez Christie's, et le vendra deux millions de dollars à un collectionneur américain (qui conserve l'anonymat). Cette famille affirmait le posséder depuis 1930, année où elle l'avait acheté à un bouquiniste d'Istanbul. L'acheteur américain a confié le manuscrit à William Noel, du musée d'art Walters de Baltimore. Le manuscrit est très abîmé, par des moisissures, de la colle, de fausses gravures médiévales qui ont été ajoutées sur certaines pages, dans l'espoir d'augmenter sa valeur,... Depuis le manuscrit est étudié et déchiffré page après page à l'université de Stanford. La publication intégrale du texte du palimpseste a pu être achevée en octobre 2008. On pense que la copie des œuvres d'Archimède a été réalisée dans la seconde moitié du X^{e} siècle par des élèves de Leo le Geomètre. Certaines pages du manuscrit (et d'autres parchemins) ont été grattées et réutilisées pour réaliser un livre de prières au cours du 13^{e} siècle.

Après Archimède, les mathématiciens du monde arabe du IX^{e} au XIV^{e} siècle vont faire des énigmes et jeux mathématiques bien plus qu'un divertissement : un véritable art. Chacun sait qu'utilisant avec éclat l'héritage géométrique grec et les apports des mathématiques indiennes, les mathématiciens arabes, non contents d'être de grands passeurs de savoir, furent particulièrement novateurs en algèbre et en trigonométrie.

Dans ce monde de lettrés et de riches princes, chacun a à cœur de participer au débat scientifique et apprécie de se lancer des défis sous forme ludique ou poétique.

Dans un article passionnant du numéro exceptionnel de la Recherche de mai-juin 2000, Ahmed Djebbar analyse les facteurs qui ont favorisé la conception et la publication de problèmes récréatifs dans ce siècle d'or des sciences arabes. Il retient

une demande des milieux instruits de lettrés, marchands et princes pour tout ce qui est culturel, ludique et merveilleux. Il nous parle de ces salons privés fréquentés par de grands scientifiques. C'est dans ces milieux privilégiés que, vers 997, Abou l-Wafa traite le problème du très beau découpage de trois carrés pour en refaire un, problème que l'on retrouve dans un ouvrage intitulé *Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques*.

En proposant un découpage reposant sur des propriétés de symétrie et non sur le calcul, Abou l-Wafa s'interroge non seulement sur les méthodes de résolution, mais entre dans un débat devenu classique aujourd'hui entre mathématiques pures et mathématiques appliquées. Il dit préférer son découpage reposant sur des propriétés géométriques jugées plus harmonieuses que d'austères calculs.

Un second facteur, selon A. Djebbar, tient au développement interne des mathématiques, aux progrès accomplis en théorie des nombres, comme avec la parité ou la divisibilité qui débouchent, par exemple, sur des problèmes de restes déterminés. Le caractère ludique apparaissant alors surtout dans la forme de leur énoncé, transformant parfois un simple exercice arithmétique en un objet culturel comme ce poème d'Ibn al-Bannâ écrit vers 1310 comme une déclaration d'amour.

« Les trois septièmes du cœur pour son regard
Un septième est offert pour le rose de (ses) deux joues
Un septième et la moitié d'un septième et le quart
Pour le refus d'un désir inassouvi
Un septième et un sixième d'un quart sont la part de seins bien arrondis
Qui se sont refusés au péché de mon étreinte et qui m'ont repoussé
Le reste, qui est cinq parts, est pour des paroles d'elle
Qui étancheraient ma soif si elles étaient entendues
Car me voilà, entre ses mains, une proie de l'amour et de la jeunesse
Le cœur tout entier largement ouvert. »

(Ibn al-Bannâ, mort en 1321)

Au-delà de leur intérêt culturel, les problèmes récréatifs de la tradition arabe s'avèrent des instruments précieux pour l'étude de la circulation des idées et des pratiques mathématiques, non seulement à l'intérieur du monde musulman, mais aussi et surtout d'une culture à une autre, d'une époque à une autre.

Nous allons ainsi retrouver ces textes dans les foyers scientifiques de l'Europe médiévale, tout d'abord dans le Liber Abacci de Fibonacci puis, beaucoup plus tard, chez Bachet de Mériziac.

Fibonacci est ce voyageur de commerce mathématicien célébré ainsi au XIV^{e} siècle par Antonio de Mazzinghi *« O Léonard de Pise, tu fus un grand scientifique, toi qui a éclairé l'Italie sur les pratiques d'arithmétique. »* Il est né autour de 1170 à Pise. Il devait avoir 12 ans quand il suivit son père, riche commerçant, à Bougie en Algérie et s'initia aux mathématiques. Il voyage à travers le bassin méditerranéen en Syrie, Sicile, Égypte, Grèce, Provence et est sans aucun doute en contact avec les sciences arabes, ce qui lui permet d'approfondir ses connaissances en mathématiques. De retour à Pise, il est appelé à la cour de Frédéric II, grand ami des sciences, participe à de nombreuses joutes mathématiques et essaie de propager ses découvertes en théorie des nombres. Il décède à Pise vers 1250. Son Liber Abacci est bien plus qu'un recueil de problèmes récréatifs directement empruntés

à la tradition arabe, c'est aussi et surtout un ouvrage de nature pédagogique qui essaie de rendre plus accessibles et attrayantes les notions qu'il veut traiter. Un des problèmes les plus connus est celui des lapins, dont la résolution fait apparaître ce que plus tard Lucas appellera la suite de Fibonacci.

Combien de couples de lapins sont engendrés en une année par un seul couple ?
Quot paria cunuculorum in uno anno ex uno pario germinentur

« Quelqu'un plaça un couple de lapins dans un lieu clos de murs de tous côtés pour savoir combien de bêtes seraient engendrées par ce couple en une seule année. La nature de ces animaux veut qu'un couple engendre un autre couple, chaque mois. Les petits sont, à leur tour, capables de se reproduire le second mois qui suit leur naissance ».

Citons un texte un peu moins connu *« De duobus hominibus habentibus panes »* soit *« De deux hommes ayant des pains »* , qui est un exemple d'habillage fort intéressant pour présenter un problème de fractions. *« Un jour, deux hommes avaient l'un trois pains et l'autre deux. Ils allèrent se promener auprès d'une source. Lorsqu'ils furent arrivés en ce lieu, ils s'assirent pour manger. Un soldat passa. Ils l'invitèrent. Il prit place à côté d'eux et il mangea avec eux, chaque convive ayant part égale. Lorsque tous les pains furent mangés, le soldat partit en leur laissant cinq pièces pour prix de son repas. De cet argent, le premier prit 3 pièces, comme il avait apporté trois pains ; l'autre, de son côté, prit les 2 pièces qui restaient pour prix de ses deux pains. On demande si le partage a été bien fait. »*

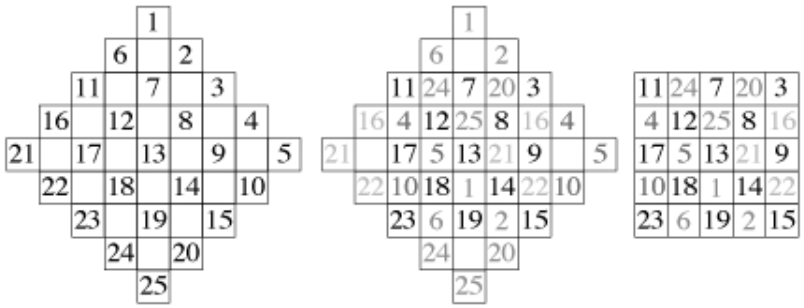
Cinq siècles plus tard Claude Gaspar Bachet, sieur de Meziriac, a été le premier à publier, en français, un livre exclusivement consacré aux récréations mathématiques. Il s'agit des *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*. La première édition de ce livre remonte à 1612 et de très nombreuses éditions ont suivi jusqu'à nos jours.

Bachet n'est pas seulement un mathématicien. Il est d'abord un grammairien, spécialiste des langues anciennes : latin, hébreu, grec. Il a aussi écrit des poésies et des chansons. Sa qualité d'expert en langues anciennes l'amène à traduire du grec au latin les *Arithmétiques* de Diophante. Il ne se contentera d'ailleurs pas de les traduire, mais il y ajoutera de nombreux commentaires. C'est dans la marge d'un exemplaire de cette traduction que Fermat notera l'énoncé de son fameux grand théorème.

Le livre de Bachet contient une cinquantaine de problèmes qui sont tous de grands classiques des récréations mathématiques. Plusieurs de ces problèmes consistent à deviner un ou plusieurs nombres pensés en demandant au joueur d'effectuer certaines opérations et en lui posant une ou des questions. Des variantes de ce type de problème sont exposées à partir des cartes d'un jeu de cartes qu'un joueur doit choisir mentalement. On trouve également des problèmes de transvasement, de traversées, de poids et de monnaie. Tous ces problèmes n'étaient pas originaux lorsque Bachet les a publiés, pourtant Bachet ne cite jamais ses sources. Beaucoup d'entre eux trouvent leur origine chez les mathématiciens arabes et certains, comme les carrés magiques, sont encore plus anciens. La nouveauté des *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* est que les récréations mathématiques y constituent le cœur de l'ouvrage, alors qu'habituellement elles étaient reléguées en annexe de matières réputées plus

sérieuses. L'autre intérêt est que Bachet explique de façon détaillée ses propres méthodes de résolution qui sont souvent originales, contrairement aux énoncés des problèmes eux-mêmes. Habituellement, des problèmes amusants viennent illustrer des théorèmes sérieux. Chez Bachet, on part de problèmes récréatifs et on va chercher des mathématiques utiles pour les résoudre. Bachet consacre plusieurs de ses récréations aux carrés magiques et semble être le premier à exposer une méthode de construction pour les carrés magiques d'ordre impair.

La « méthode de Bachet »
Cette méthode, applicable à tous les carrés d'ordre impair, est illustrée par la figure ci-après.



Quittons à peine les problèmes de carrés magiques de Bachet de Mériziac pour parler d'un grand parmi les grands : *Leonhard EULER*. Il est né, il y a trois cents ans, à Bâle, en Suisse. Euler fut probablement le premier mathématicien européen. Il a traversé le Siècle des Lumières, rencontrant les plus grands, Voltaire peut-être, à la cour de Frédéric II en Prusse puis auprès de Catherine de Russie. Il brilla non seulement en mathématiques mais aussi en physique, en astronomie, etc. Son œuvre en mathématiques est immense et on ne compte plus les formules, constantes, théorèmes, résultats auxquels il a donné son nom. Il s'est passionné pour les domaines les plus variés sans jamais négliger la composante ludique. Citons deux exemples incontournables, sans parler de tous les problèmes liés à la marche des pièces sur un échiquier.

Tout d'abord, le *problème des 36 officiers* qu'il proposa, dit-on, à la cour de Russie, est sans doute un très bel exemple d'énigme ludique qui permet de passer d'une conjecture à des résultats mathématiques forts sérieux et difficiles. Rappelons le texte :

« Comment disposer en formation carrée de 6 par 6, 36 officiers de 6 régiments différents et de 6 grades différents afin que, par ligne et par colonne, il n'y ait qu'un seul régiment et qu'un seul grade ? »

Il s'agit d'un carré gréco-latin d'ordre 6 (un carré latin pour les régiments, un carré latin pour les grades), problème dont la résolution est impossible. Euler l'avait déjà pressenti à l'époque sans toutefois donner une démonstration formelle à sa conjecture. Il dira : *« Or, après toutes les peines qu'on s'est données pour résoudre ce problème, on a été obligé de reconnaître qu'un tel arrangement est absolument impossible, quoiqu'on ne puisse pas en donner de démonstration rigoureuse. »* Or contrairement à ce que pensait Euler, il existe des carrés gréco-latins

d'ordre quelconque sauf pour deux et six. La non-existence de carrés gréco-latins d'ordre six a été définitivement confirmée en 1901 par le mathématicien français Gaston Tarry qui fit l'énumération exhaustive de tous les arrangements possibles de symboles. Cinquante-huit ans plus tard, en 1959, avec l'aide d'ordinateurs, deux mathématiciens américains, Bose et Shrikhande trouvèrent des contre-exemples à la conjecture d'Euler. La même année, Parker trouva un contre-exemple d'ordre dix. Puis, en 1960, Parker, Bose et Shrikhande démontrèrent que la conjecture d'Euler était fausse pour tous les $n > 10$.

Les carrés gréco latins ouvrent la porte sur le monde des jeux de grille à solution unique. Le sudoku est au goût du jour, mais il ne couvre qu'une toute petite partie de ce type de jeux et il est loin de résumer tous les trésors des jeux de grille à solution unique.

Enfin, l'emblématique *problème des ponts de Königsberg* mérite le détour. Ce texte, *(Comment organiser votre promenade pour franchir une fois et une seule les sept ponts de la ville de Königsberg ?)*, mais surtout la résolution qu'Euler en propose, ouvrent la voie à la théorie des graphes, dont on ne rappelle plus l'importance aujourd'hui.

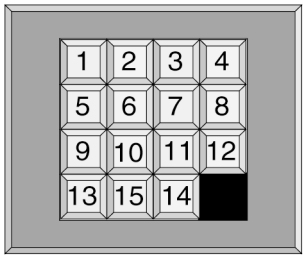
Succéder au grand Euler dans le monde des récréations mathématiques est certes difficile tant l'héritage est lourd. Pourtant, dès la fin du XIX^{e} siècle puis durant le XX^{e} siècle, nous allons rencontrer quelques grands noms, pas toujours de grands mathématiciens, mais toujours des hommes de culture, qui ont la volonté de diffuser le savoir mathématique sous forme ludique et une volonté pédagogique de présenter les notions sous la forme la plus attrayante possible.

Il est temps d'évoquer deux grands noms de créateurs d'énigmes que l'histoire a rapprochés bien qu'une certaine rivalité les ait opposés, même si on sait qu'ils s'appréciaient mutuellement : Sam Loyd et Henri Ernest Dudeney. L'un est américain et l'autre anglais. Le premier est l'aîné du second d'une quinzaine d'années. Tous deux ont abandonné leurs études assez vite, mais ont continué à étudier les mathématiques en autodidactes, et tous deux ont pratiqué avec passion le jeu d'échecs.

Samuel Loyd, l'aîné, est né à Philadelphie en 1841. Joueur d'échecs depuis son plus jeune âge, il publie son premier problème d'échecs à l'âge de 14 ans. Le jeu d'échecs et la composition de problèmes l'occupent à tel point qu'il finit par quitter les bancs de l'école à l'âge de dix-sept ans. Contraint de gagner sa vie, il se lance dans le journalisme en proposant à divers journaux des rubriques et des problèmes d'échecs. Bien qu'étant un joueur d'échecs moyen, Sam Loyd a composé des centaines de problèmes d'échecs, certains avec une bonne dose d'humour et de fantaisie.

À partir de 1870, Sam Loyd se désintéresse des échecs et se lance dans l'invention de casse-tête mathématiques, qu'il diffuse dans les journaux et magazines ainsi que par la publicité. Sam Loyd a fait breveter plusieurs de ses trouvailles comme par exemple le jeu « Teddy et les lions » où, selon la position du disque central, on peut voir sept chasseurs et sept lions ou bien six chasseurs et huit lions.

Mais le jeu le plus célèbre, popularisé par Loyd, est sans conteste le Taquin (14-15 puzzle) commercialisé en 1873.



Ce casse-tête est constitué de quinze petits carrés pouvant coulisser dans un cadre de 4 cases sur 4, la case vide permettant les mouvements. Il est encore aujourd'hui dans toutes les ludothèques et un beau sujet d'étude pour tout étudiant. Après la mort de son père, Samuel Loyd Junior publiera *Cyclopedia of puzzles*[2], recueil de plus de 5000 casse-tête créés par son père.

Plus jeune que Loyd de seize ans, Henri Ernest Dudeney nourrit la même passion que son aîné pour le jeu d'échecs et pour les énigmes à ressort mathématique. Il commence très tôt à proposer ses créations à plusieurs magazines anglais. À partir de 1890, Dudeney collabore avec Sam Loyd pour le magazine anglais Tit-Bits. Par la suite, Dudeney et Sam Loyd décident d'échanger leurs énigmes qu'ils proposaient à des journaux différents, ce qui explique que l'on retrouve parfois des énigmes identiques chez les deux auteurs sans savoir qui en est le véritable créateur. Mais Dudeney finit par s'offusquer du fait que Sam Loyd ne le cite pas toujours comme étant l'inventeur de certains jeux dans les livres qu'il publie.

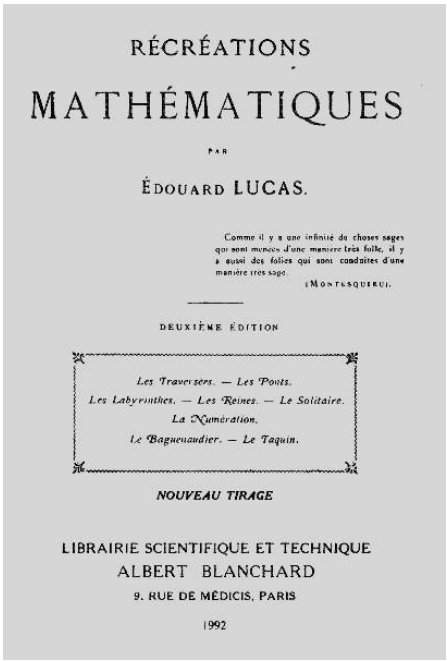
Si Sam Loyd possède d'incontestables dons de mise en scène des énigmes qu'il crée, Dudeney est davantage mathématicien. Parmi les énigmes créées par Dudeney,

[2] Le texte intégral de *Cyclopedia of puzzles* peut être téléchargé au format pdf sur `http://www.mathpuzzle.com/downloads/`

on peut citer le premier cryptarithme : $SEND + MORE = MONEY$, message adressé à son éditeur et opération codée où chaque lettre remplace un chiffre (deux lettres différentes remplaçant toujours deux chiffres différents et deux chiffres différents étant toujours remplacés par deux lettres différentes).

Une autre invention de Dudeney est un « puzzle articulé » où un triangle équilatéral formé de quatre morceaux articulés entre eux peut se réarranger en un carré. Dudeney présenta ce découpage de son invention à la Royal Society de Londres en 1905. Les recueils de problèmes publiés par Dudeney sont : *The Canterbury Puzzles* (1907), *Amusements in Mathematics* (1917), *Modern Puzzles* (1926) et *Puzzles and Curious Problems* (1931), publié après sa mort.

Quittons le monde anglophone, pour évoquer Édouard Lucas (1842 - 1991), grand mathématicien français de la fin du XIX^{e} siècle dont l'apport aux mathématiques se situe principalement en théorie des nombres, notamment dans l'étude des nombres premiers. Un test de primalité porte le nom de « test de Lucas-Lehmer » parce qu'il n'a été complètement justifié qu'en 1930 par Derrick Lehmer. Mais Lucas est aussi un pionnier de la popularisation des mathématiques par le jeu ; les quatre tomes de ses *Récréations Mathématiques* et son *Arithmétique Amusante* constituent une véritable encyclopédie des récréations mathématiques, mine inépuisable pour tout amateur de jeux et énigmes, bible pour tous les créateurs de championnat, rallye ou tournoi mathématique. Si aujourd'hui Lucas fait figure de précurseur c'est parce qu'il pensait que chaque notion mathématique peut être présentée aux jeunes et au grand public sous la forme d'un jeu ou d'une énigme. De ses livres, il dit : *« si ces pages inspirent à quelques jeunes intelligences le goût du raisonnement et le désir des jouissances abstraites, alors je serai satisfait »*.


RÉCRÉATIONS

MATHÉMATIQUES

PAR

ÉDOUARD LUCAS.

Comme il y a une infinité de choses sages qui sont mises d'une manière très folle, il y a aussi des folies qui sont conduites d'une manière très sage.

(MONTESQUIEU.)

DEUXIÈME ÉDITION

Les Traversées. — Les Ponts.
Les Labyrinthes. — Les Reines. — Le Solitaire.
La Numération.
Le Baguenaudier. — Le Taquin.

NOUVEAU TIRAGE

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
ALBERT BLANCHARD
9, RUE DE MÉDICIS, PARIS
1992

Seuls les deux premiers tomes des Récréations de Lucas ont paru de son vivant. Décédé prématurément en 1891 à la suite d'une infection, Édouard Lucas ne verra pas la publication des deux derniers tomes, réalisée par ses amis à partir des notes qu'il a laissées. Il en est de même pour *L'Arithmétique Amusante*, éditée à partir d'un projet de livre retrouvé chez Lucas.

Les jeux étudiés par Lucas sont pour la plupart des jeux connus, pour lesquels il existe des raisonnements susceptibles de conduire à une résolution complète. On peut citer les labyrinthes, les taquins, le jeu de caméléon, le baguenaudier,... Mais le plus célèbre des jeux popularisés par Edouard Lucas reste *Les Tours de Hanoï*, dont il est par ailleurs l'inventeur. Ce jeu conçu pour expliquer la numération binaire est présenté par Lucas, lui-même, ainsi : *« Un de nos amis, le professeur N. Claus (de Siam) mandarin du collège de Li-Sou-Stian, a publié, à la fin de l'année dernière, un jeu inédit qu'il a appelé la Tour d'Hanoï, véritable casse-tête annamite qu'il n'a pas rapporté du Tonkin, quoi qu'en dise le prospectus. Cette tour se compose d'étages superposés et décroissants, en nombre variable, représentés par huit pions en bois percés à leur centre, enfilés dans l'un des trois clous fixés sur une tablette. Le jeu consiste à déplacer la tour en enfilant les pions sur un des deux autres clous et en ne déplaçant qu'un seul étage à la fois, mais avec défense expresse de poser un étage sur un étage plus petit. Le jeu est toujours possible et demande deux fois plus de temps chaque fois que l'on ajoute un étage à la tour ... »* .

Le nom prétendu de l'inventeur du jeu, *N. Claus de Siam*, mandarin de *Li-Sou-Stian* est tout simplement l'anagramme de *« Lucas d'Amiens*, professeur au lycée *Saint-Louis »*. Lucas aimait agrémenter ses récréations de pointes d'humour. Selon Lucas, N. Claus de Siam préparait la publication des écrits du mandarin *Fer-Fer Tam-Tam* (Lucas avait fondé le projet de publier les œuvres de *Fermat*). Il rapporte également la légende d'une tour de Hanoï située à Bénarès et comportant soixante-quatre disques. Lorsque les $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ mouvements nécessaires au transport des soixante-quatre disques auront été effectués, *« les brahmes tomberont et ce sera la fin du monde ! »* .

Enfin puisqu'il fallait que cette promenade à travers les siècles s'achève, nous avons choisi de vous parler de Martin Gardner. Gardner est né le 21 octobre 1914 à Tulsa en Oklahoma aux USA et est décédé tout récemment en mai dernier. Il suit les cours de l'université de Chicago où il obtient une licence de philosophie, mais pas sa maîtrise. Sa prodigieuse culture générale est le résultat de ses innombrables lectures et de ses infatigables recherches en bibliothèque. Martin Gardner adulte sera le champion des jeux mathématiques et des mathématiques amusantes. En un sens, il a popularisé ce genre en lui donnant ses lettres de noblesse. Il faut dire qu'à l'époque de sa jeunesse, il y avait bien eu les précurseurs que nous venons de quitter le génial Lucas, Loyd, Dudeney... mais les livres sur le sujet étaient rares. La popularité de Martin Gardner est essentiellement due à sa rubrique Mathematical Games du *Scientific American* qui commença en 1956 et s'arrêta en 1982 et fut publiée par *Pour la Science*, à partir de 1977 dans son édition française. En 1983, Gardner fut désigné *écrivain scientifique de l'année* par l'institut Américain de Physique.

Il popularisera de nombreux sujets. On ne peut que faire un choix difficile pour en citer quelques-uns. Les Polyominos sont des figures obtenues en collant des carrés par leurs côtés. Les cubes de Soma lui ont été confiés par le danois Piet Hein, également inventeur du jeu de Hex. Le célèbre jeu de la vie de John Conway

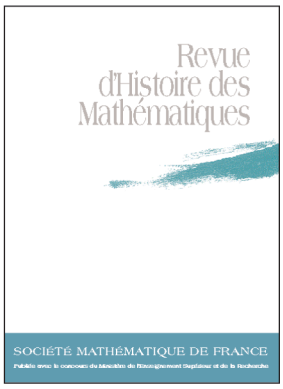
est un jeu de simulation qui devint si populaire qu'à l'époque les rares ordinateurs furent paralysés pendant des semaines, occupés par ce jeu. Les pavages de Roger Penrose, pavages du plan apériodique à partir de deux pièces de base ont trouvé des applications inattendues en cristallographie. N'oublions pas que c'est aussi Martin Gardner qui a fait connaître au grand public l'œuvre du grand artiste Maurits Escher.

Les pavages de Penrose

Roger Penrose est un physicien et mathématicien diplômé de l'université de Cambridge en géométrie algébrique.
Il est né en Angleterre le 8 août 1931, à Colchester (Essex). Professeur à Oxford, il reçoit en 1998 le prix Wolf pour la physique.
Roger Penrose s'est intéressé aux pavages non périodiques du plan. Son intention n'était pas alors d'ouvrir un nouveau champ aux mathématiques ou à la physique mais... de créer un divertissement mathématique ! De fait, ces pavages n'auraient pu rester qu'un joli divertissement si, entre-temps, des chimistes n'avaient étudié des cristaux possédant une quasi-symétrie d'ordre 5 et pour lesquels les pavages de Penrose fournissaient un très bon modèle. Comme quoi, Penrose avait raison quand il disait à propos de ses recherches : « *On ne sait jamais quand on perd son temps* » ! !
Ces pavages ne sont ni périodiques ni symétriques. Citons une de leurs propriétés : *Si en un point quelconque du pavage, on trace un cercle de centre ce point et de rayon r, il existe une translation de vecteur u dont la norme est inférieure ou égale à* $4r$ *telles que l'image du cercle C dans cette translation soit un cercle aux motifs superposables au cercle de départ.*
Signalons que le CIJM a créé avec des triangles d'or et d'argent un jeu de pavages du plan – je me souviens de l'intérêt que Don Zagier, mathématicien prodige, a montré pour ce jeu quand il l'a découvert aux 20 ans de Tangente en septembre 2007 !

Tous ces jeux et bien d'autres mériteraient illustrations, prolongements..., il y a donc de quoi alimenter bien des articles !

Puisque, en mathématique, lorsqu'une question est résolue, dix surgissent, le sujet n'est pas épuisé. Puisque les mathématiques se construisent, nous pouvons aider à leur construction dans l'esprit et... le cœur de nos élèves en parlant de la longue histoire des énigmes mathématiques et en proposant devinettes, questions, problèmes et jeux mathématiques. Puisqu'enfin ces textes contribuent à faire changer l'image de mathématiques austères auprès d'un large public, donnons largement rendez-vous aux jeux mathématiques pour susciter étonnement, curiosité, envie de chercher !



Revue d'histoire des mathématiques

Tome 16, Fascicule 1

Sommaire

Samuel Gessner
Savoir manier les instruments : la géométrie dans les écrits italiens d'architecture (1545-1570)

Jean-Pierre Lubet
Calcul symbolique et calcul intégral de Lagrange à Cauchy

prix public* : 38 € - prix membre* : 27 €
* frais de port non compris

Catalogue disponible à l'adresse :
http://smf.emath.fr/

Information
Maison de la SMF
avenue de Luminy, BP 67, F-13274 Marseille cedex 9, France
Tél : 33 4 91 83 30 25 • Fax : 33 4 91 41 17 51 • email : smf@smf.univ-mrs.fr

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

ENSEIGNEMENT

La « masterisation » à l'épreuve des textes officiels – deuxième année

Valérie Girardin

Le processus de réforme dit de « masterisation », lancé le 2 juillet 2008 par un communiqué de presse [2] du conseil des ministres, prévoit le recrutement au niveau master de tous les enseignants du primaire et du secondaire. La première session des nouveaux concours devait avoir lieu en 2010 et les masters correspondants ouvrir dès la rentrée 2009. Depuis deux ans, une trentaine de textes « officiels » (communiqués de presse, décrets, arrêtés, notes et circulaires) ont été rendus publics, précisant ou modifiant notablement la réforme envisagée, par exemple sur le calendrier d'application, le cadrage des masters, le service et la formation des fonctionnaires stagiaires ou la place de l'agrégation. Les décrets [6] du 28 juillet 2009 ont institué la masterisation proprement dite, les candidats devant justifier d'un master complet pour être recrutés comme fonctionnaires stagiaires ; des mesures de transition ayant finalement été mises en œuvre pour 2010, la session 2011 sera la première session des nouveaux concours. Pour autant, les textes ont continué à se succéder, et parfois à se contredire.

Les textes officiels parus en 2008-2009 et leurs conséquences ont été détaillés dans [9]. Un point est fait ici sur les textes parus en 2009-2010 et sur la situation mi-septembre 2010 ; des explications plus détaillées peuvent être trouvées dans les différents textes publiés par la SMF durant les deux années écoulées, dont le plus récent est le compte-rendu de la réunion de responsables de masters du 25 juin 2010. Les documents cités sont disponibles sur le site de la SMF dans le dossier « masterisation » [1].

Les textes parus depuis septembre 2009

Le communiqué [8] MEN[2] du 4 septembre 2009 indiquait que les arrêtés définissant les modalités des concours paraîtraient début mars 2010, le cadrage national des maquettes de master devant faire l'objet d'une discussion au CNESER[3] en décembre 2009. Les universités pourraient transmettre jusqu'à mi-avril 2010 leurs maquettes de formation, qui seraient étudiées lors d'une autre séance du CNESER en juin 2010. Les quatre groupes techniques, dont la composition et la lettre de mission ont été données dans le même communiqué [8] se sont réunis jusqu'à mi-octobre 2009 sur les thèmes : « maquettes des concours et des

[1] http://www.smf.emath.fr/Enseignement/Masterisation

[2] Ministère de l'Éducation Nationale.

[3] Conseil National de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche.

masters ; dates des épreuves des concours durant le M2 ; conditions, organisation et contenus des stages préparatoires aux concours et du temps de formation consécutif à la prise de fonction ». Leurs propositions n'ayant pas été rendues publiques, les seuls échos officiels en ont été donnés dans la « présentation des décisions des ministres sur la base des conclusions du groupe de synthèse » [10] fixant des principes généraux, puis dans la lettre [11] des directeurs de cabinet des ministres au secrétaire général de la FSU, » précisant certains points de la présentation du 13 novembre 2009 », et enfin dans la réponse [25] du MESR[4] du 29 juillet 2010 à la question écrite de la Sénatrice Christiane Demontès du 18 mars 2010 demandant à Valérie Pécresse « quelles dispositions elle compte prendre afin de répondre » aux « inquiétudes très vives et parfaitement justifiées » soulevées par la réforme.

Une circulaire [12] de la DGESIP[5] paraît fin décembre 2009 pour la mise en place des diplômes de master « ouverts aux étudiants se destinant aux métiers de l'enseignement dès la rentrée universitaire 2010 ». Les arrêtés [13] du 28 décembre 2009 fixant les modalités d'organisation des concours de recrutement du primaire et du secondaire paraissent en janvier 2010, ainsi qu'un arrêté [14] précisant les diplômes et titres équivalents au master permettant de se présenter aux concours.

Les sujets « zéro » [15] de la session 2011 du CRPE[6] sont rendus publics en février 2010, ceux [16] du CAPES fin mars 2010. La circulaire [21] parue en mai 2010 fixe les modalités d'organisation et les dates des épreuves écrites des concours pour la session 2011 : celles du CRPE se dérouleront en septembre 2010 et celles du CAPES en novembre 2010 (les épreuves orales ayant lieu en mai ou juin 2011 d'après la présentation [10]), les dates de l'agrégation étant inchangées. Les inscriptions ont été ouvertes de début juin à mi-juillet 2010 pour la session 2011 des concours.

Le décret [22] du 28 mai 2010 modifie notablement d'une part les dates d'appréciation des conditions de diplôme, avec des conséquences importantes pour l'agrégation, et d'autre part les compétences requises en langues étrangères et en informatique pour tous les concours, obligeant les universités à revoir en urgence leur offre de masters pour la rentrée 2010. Finalement, les dispositions concernant ces compétences sont reportées à la session 2012 par le décret [27] paru fin août 2010.

Les concours

« Agir en fonctionnaire de l'état et de manière éthique et responsable »

Les principes directeurs de la réforme [3] prévoyaient en 2008 que les épreuves orales d'admission de tous les concours (sauf l'agrégation dont il n'était pas question alors) comporteraient un « entretien avec le jury » sur la « connaissance du système éducatif » qui compterait pour 30% de la note[7]. Il ressortait au printemps 2009 que la part de cette épreuve, si elle était maintenue, serait revue à la baisse. L'arrêté [13] de décembre 2009 diminue effectivement sa part à moins de 10% dans

[4] Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche.
[5] Direction Générale pour l'Enseignement Supérieur et l'Insertion Professionnelle.
[6] Concours de Recrutement des Professeurs des Ecoles.
[7] tous les pourcentages donnés font référence à un pourcentage de la note finale du concours.

les concours où elle était prévue, mais l'introduit à l'agrégation. Cette épreuve est maintenant présente sous la même forme et le même intitulé « Agir en fonctionnaire de l'état et de manière éthique et responsable » dans tous les concours de recrutement des enseignants du primaire et du secondaire, pour un pourcentage très variable de la note finale selon le concours et la discipline, de 2,5% à 10% environ.

Matériellement, elle sera ajoutée à l'une des épreuves orales d'admission, dont la durée de préparation et d'interrogation devant le même jury disciplinaire sera allongée d'autant. Le candidat aura dix minutes pour répondre à une question, à partir d'un document remis au début de la préparation. La question et le document portent sur les thématiques regroupées autour « des connaissances, des capacités et des attitudes » définies dans l'annexe de l'arrêté [1] du 19 décembre 2006, mise à jour en juillet 2010 par l'arrêté [24] ; l'exposé se poursuivra par un entretien de dix minutes avec le jury. Des exemples [19] de sujets (« les enfants victimes d'infractions pénales », « règlement intérieur », « communauté éducative », « conduite déviante », « les instruments de l'ouverture », « exercice de la liberté pédagogique », « handicap et EPS ») accompagnés de « pistes de réponses » en ont été rendus publics en mai 2010.

Les certificats en langues et en informatique

La circulaire [12] dit que les masters doivent prévoir « l'ouverture internationale (maîtrise et certification d'une langue étrangère, notamment par le biais du CLES, dispositifs de mobilité incluant notamment la possibilité d'effectuer des stages à l'étranger) ». Ceci se traduit fin mai 2010 par le décret [22], précisé par l'arrêté [23], selon lesquels, « pour être nommés fonctionnaires stagiaires, les candidats ayant subi avec succès les épreuves du concours externe doivent justifier d'un certificat de compétences en langues de l'enseignement supérieur et d'un certificat de compétences en informatique et internet ». Sauf cas particuliers, il s'agira de valider le CLES2, certificat attestant d'un niveau élevé de compréhension et d'expression écrite et orale dans une langue étrangère, et le C2i2e, certificat attestant de compétences d'enseignement en informatique et internet, effectué pour partie devant des élèves. Ces certificats devaient être exigés des lauréats dès la rentrée 2011 d'après le décret [23], mais l'annonce que « cette disposition est reportée à la session 2012 » est mise en ligne le 19 août 2010 dans le guide SIAC [26] du MEN, avant d'être officialisée le 31 août 2010 par le décret [27].

Le CRPE

Les principes directeurs [3] de la réforme prévoyaient en 2008 que le CRPE comporterait pour l'admissibilité une épreuve de « français et culture humaniste » et une épreuve de « mathématiques et culture scientifique et technologique » comptant chacune pour 20%. Les épreuves d'admission comporteraient deux épreuves orales comptant chacune pour 30% : une épreuve « prenant la forme d'un exercice pédagogique » sur le programme de l'école primaire et l'épreuve sur la connaissance du système éducatif.

D'après l'arrêté [13] de décembre 2009, deux épreuves d'admissibilité (« français et histoire, géographie et instruction civique et morale » et « mathématiques et

sciences expérimentales et technologie ») et deux épreuves d'admission compteront chacune pour 25%. La partie de mathématiques des épreuves écrites, comptant pour 15%, visera à évaluer par la résolution de deux ou trois problèmes ou exercices « la maîtrise des savoirs disciplinaires nécessaires à l'enseignement des mathématiques, en référence aux programmes de l'école primaire, ainsi que la capacité à raisonner logiquement dans les domaines numérique et géométrique et à communiquer dans un langage précis et rigoureux ».

La première épreuve d'admission orale consistera en la présentation d'une séquence d'enseignement en mathématiques et en une interrogation, au choix du candidat, sur les arts visuels, la musique ou l'éducation physique et sportive. Elle visera à évaluer « les connaissances et compétences du candidat et son aptitude à les mobiliser pour concevoir et organiser une séquence d'enseignement s'inscrivant dans les programmes d'une classe de l'école maternelle ou élémentaire ; la capacité du candidat à expliquer et justifier ses choix didactiques et pédagogiques ». La partie de mathématiques, comptant pour 15%, consistera, à partir d'un sujet tiré au sort, en la préparation en trois heures avec accès à une documentation d'une séquence d'enseignement sur une notion ou un contenu inscrit dans les programmes de l'école primaire, accompagnée de la présentation des raisons qui ont présidé aux choix pédagogiques retenus ; l'exposé durera vingt minutes et se poursuivra par un entretien avec le jury de vingt minutes. La deuxième épreuve consistera en la présentation d'une séquence d'enseignement en français suivie de l'interrogation sur « Agir en fonctionnaire... » qui comptera pour 10%.

Le CAPES de mathématiques

Les décrets [6] instituent qu'à partir de la session 2011, les candidats devront être titulaires d'un M1 pour se présenter au CAPES comme au CRPE, et, en cas de réussite au concours, justifier d'un master pour être nommés fonctionnaires stagiaires (le bénéfice du concours leur étant garanti pendant un an en cas d'échec au master).

Les principes directeurs [3] de la réforme prévoyaient en 2008 que les épreuves d'admissibilité du CAPES comporteraient deux épreuves disciplinaires comptant chacune pour 20%, « l'épistémologie et l'histoire de la discipline pouvant faire l'objet d'une question spécifique dans l'une des deux épreuves ». Deux épreuves orales d'admission comptant chacune pour 30% étaient prévues, une épreuve « prenant la forme d'un exercice pédagogique » et l'épreuve sur la connaissance du système éducatif. Le programme disciplinaire devait être celui des « collèges, lycées, classes post-bac du lycée » sans autres précisions.

D'après l'arrêté [13] de décembre 2009, le programme sera constitué des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des classes post-baccalauréat du lycée, incluant les programmes des CPGE[8] (pour l'écrit) et STS[9], l'épistémologie et l'histoire des mathématiques n'étant plus évoquées. Deux épreuves écrites d'admissibilité de cinq heures compteront chacune pour 20%, et deux épreuves orales précédées de deux heures et demie de préparation compteront chacune pour 30%. Pour ces épreuves d'admission, le candidat aura maintenant accès aux manuels du collège, du lycée et des STS. Le site du jury du concours précise en septembre 2010

[8] Classes Préparatoires aux Grandes Écoles.

[9] Sections de Technicien Supérieur, conduisant aux BTS, incluant des mathématiques appliquées.

que « des ordinateurs se substitueront aux calculatrices utilisées antérieurement », la liste des logiciels fournis restant à définir. Pour la première épreuve de leçon, le candidat choisira comme dans le concours actuel un thème parmi deux tirés au sort. Par contre, les vingt-cinq minutes d'exposé suivies d'un entretien de vingt minutes avec le jury seront remplacées par un plan d'étude de quinze minutes suivi du développement pendant quinze minutes d'une partie de ce plan choisie par le jury puis d'un entretien d'une demi-heure. La première partie de la deuxième épreuve est une épreuve d'exercices de quarante minutes devant permettre au candidat de montrer « sa culture mathématique et professionnelle, sa connaissance des contenus d'enseignement et des programmes, sa réflexion sur l'histoire et les finalités des mathématiques et leurs relations avec les autres disciplines » ; elle s'appuiera sur un dossier fourni par le jury, et se rapproche de la deuxième épreuve (dite de dossier) pré-existante. La seconde partie portant sur « Agir en fonctionnaire... » comptera pour 9%.

L'agrégation de mathématiques

Le communiqué [2] de juillet 2008 parlait indifféremment des « futurs enseignants », tout en soulignant le maintien de la distinction entre CAPES et agrégation. Il n'a pas été question de réforme de l'agrégation dans les textes officiels avant parution des décrets [6] du 28 juillet 2009 instituant que dès la session 2011 « peuvent se présenter au concours externe les candidats justifiant de la détention d'un master » (a priori au cours de la sixième année universitaire). La session 2010 restait inchangée, et aucune transition n'était prévue.

Les épreuves orales d'admission (algèbre-géométrie, analyse-probabilités, modélisation) étaient toutes affectées d'un coefficient 1 avant l'arrêté [13] du 28 décembre 2009 qui ajoute l'entretien sur « Agir en fonctionnaire... » à l'épreuve algèbre-géométrie. Après quatre heures de préparation et une heure d'interrogation de mathématiques, l'épreuve sera prolongée de vingt minutes par la question non disciplinaire affectée d'un coefficient 0.5 (soit 8,33% de la note finale). La partie algèbre-géométrie passera à un coefficient 1.5, l'épreuve analyse-probabilités conservant étrangement un coefficient 1. Notons que pour la session 2011 des notions sur les distributions et la représentation des groupes sont ajoutées au programme [20].

Le décret [22] de mai 2010 modifie nettement pour l'agrégation les dispositions du décret [6] de juillet 2009. Il institue que les conditions de diplôme requises des candidats aux concours s'apprécient à « la date de publication des résultats d'admissibilité » et non, comme précédemment fixé par un arrêté de juillet 1972, à « la date de clôture des registres d'inscription ». La publication des résultats d'admissibilité de l'agrégation étant prévue début juin d'après la présentation[10], cela ouvre la possibilité de valider un M2 et de préparer l'agrégation simultanément (au cours de la cinquième année universitaire) si le jury de master se réunit fin mai.

Le cadrage des masters

Dans le communiqué [2] de juillet 2008, les universités étaient appelées à mettre en place des « parcours de master ambitieux ». Le dépôt de projets à l'AERES[10] était initialement prévu en décembre 2008. Moins de dix maquettes de

[10] Agence d'Evaluation de la Recherche et de l'Enseignement Supérieur.

masters concernant les métiers de l'enseignement et de la formation (toutes disciplines confondues) provenant d'universités publiques étant finalement parvenues à l'AERES fin mars 2009, celle-ci avait décidé le 9 avril 2009 de n'en évaluer aucune.

D'après la circulaire [12] du 23 décembre 2009, les formations proposées devront permettre la « progressivité dans la spécialisation », l'acquisition d'une « culture scientifique » avec « un adossement à une ou des équipes de recherche reconnues et un apprentissage de la démarche scientifique, de sa méthodologie et des formes de son transfert », intégrer « une composante forte de formation professionnelle », « des stages d'observation et de pratique accompagnée, puis des stages en responsabilité », « des apports en pédagogie, une connaissance du système éducatif », « une analyse des situations professionnelles », tout en veillant « à proposer aux étudiants ayant échoué aux épreuves d'admissibilité, des formations offrant des débouchés divers » [11]. « Plusieurs architectures de formation sont possibles » : « masters disciplinaires aménagés avec spécialités et/ou parcours orientés vers l'enseignement, masters disciplinaires ou pluridisciplinaires poursuivant une finalité professionnelle large, masters spécialisés mais permettant, grâce à une diversification des cursus, des débouchés variés et des possibilités de réorientation en cours de cursus ».

« Pour les nouveaux projets de formation, les dossiers seront étudiés au cours d'un CNESER du mois de juin 2010 ». Leur évaluation sera faite par l'AERES « au rythme normal des vagues de contractualisation ». Lors de ses séances de décembre 2009 et juin 2010, le CNESER « exige la remise à plat de la réforme impliquant le retrait des décrets concernant la formation des enseignants et des textes d'application déjà publiés », par des motions votées à une large majorité.

Les stages

Les stages de master

D'après le communiqué [2] de lancement de la réforme, « la formation devra comporter une prise de contact progressive et cohérente avec les métiers de l'enseignement qui pourra être amorcée au cours des études de licence et comporter des stages d'observation et de pratique accompagnée. » Dans le communiqué [4] MEN-MESR de janvier 2009 des stages d'observation « pourront » être offerts en M1, et les candidats au concours « pourront » effectuer deux types de stage en M2 ; d'une part, « 3h par semaine ou 2 à 3 semaines de stages d'observation et de pratique accompagnée non rémunérés » ; et d'autre part, des stages en responsabilité donnant lieu à une « gratification », un étudiant effectuant une centaine d'heures se verrait « indemnisé à hauteur d'environ 3000 Euros ». Il était annoncé 50.000 lieux de stages de pratique accompagnée pour les étudiants de M1 et 40.000 stages en responsabilité pour les étudiants de M2.

La circulaire [7] aux recteurs du 27 août 2009 est plus vague : à partir de 2010-2011, des « stages d'observation et de pratique accompagnée seront destinés aux étudiants de M1 et M2 ». « La proportion entre observation et pratique accompagnée résultera du projet de formation concerté entre l'académie, l'université et l'étudiant concerné », « pour une durée inférieure à 40 jours et dans la limite de 108 heures ». Les « stages rémunérés en responsabilité seront destinés aux étudiants de

[11] Citations en gras dans le texte original.

M2 ». La circulaire [12] de décembre 2009 ajoute que « le stage en responsabilité sera offert essentiellement aux candidats déclarés admissibles ».

L'année de fonctionnaire stagiaire 2010-2011

Dans le communiqué [2] de juillet 2008, les lauréats devant enseigner à temps plein dès leur première année d'exercice, le stage en responsabilité se trouvait supprimé, des actions de formation spécifiques n'étant envisagées qu'en dehors du temps scolaire. Les décrets [6] de juillet 2009 prévoient que « les professeurs stagiaires bénéficient d'une formation dispensée sous la forme d'actions organisées à l'université et d'un accompagnement. » Rien n'y est dit sur la proportion de cette formation ni sur son positionnement dans l'année, bien que le ministre de l'Éducation Nationale Xavier Darcos ait annoncé le 20 mars 2009 [5] que : « une partie des obligations de service, de l'ordre d'un tiers, sera consacrée à une formation continuée renforcée permettant la mise en place d'un tutorat et de retours réguliers en formation universitaire à visée disciplinaire ou professionnelle ».

Le dispositif [17] d'accueil, d'accompagnement et de formation des enseignants stagiaires de l'année 2010-2011 (reçus aux concours en 2010) paraît début avril 2010, complété par une note de service [18] aux recteurs d'académie fin avril 2010, ambiguë sur bien des points. Beaucoup y est sujet à interprétation et laissé à l'appréciation, voire aux possibilités, des rectorats.

Entre autres, il y est dit que les lauréats de la session 2010 du CAPES peuvent solliciter un report de stage pour préparer l'agrégation à condition d'être « le 1er septembre 2010, en possession d'un Master 2 ou diplôme équivalent » ; le décret [22], postérieur à cette note [18], pourrait permettre que cette condition ne soit vérifiée qu'à l'admissibilité de l'agrégation en juin 2011. Par ailleurs, « les lauréats des seuls concours de l'agrégation peuvent demander le report de leur nomination pour effectuer des études doctorales », celles-ci semblant pouvoir s'interpréter comme incluant l'inscription en M2 recherche.

Les actions de la SMF

En mars et avril 2009, les deux lettres ouvertes à Xavier Darcos à l'initiative de la CCL[12] et de la SMF sur les dangers de la réforme avaient été co-signées par une cinquantaine de sociétés savantes et associations d'enseignants de tous niveaux et toutes disciplines. Les sociétés signataires se sont constituées en Forum des Sociétés Savantes le 17 octobre 2009 afin de mener une réflexion commune sur le fonctionnement de l'Éducation Nationale, l'avenir de la recherche et des universités ; le Forum a vocation a être un lieu de rencontre, d'échanges, d'information mutuelle, ainsi qu'une organisation destinée à exprimer les positions communes de la totalité ou d'une partie de ses membres. Après son communiqué de création, le F2S[13] s'est exprimé à plusieurs reprises sur la « masterisation », en novembre 2009, février et juin 2010, dans les textes : « Réformons la réforme », « Masterisation : de mal en pis » et « Menaces persistantes sur les concours de recrutement des enseignants ».

Le 20 novembre 2009, le texte de la SMF « Masterisation : quelques aspects plus spécifiques aux mathématiques », complémentaire du texte du F2S « Réformons la réforme », précise les craintes soulevées par la réforme sur les concours et les

[12] Coordination Concours Lettres, groupement de sept sociétés savantes de lettres.
[13] Forum des Sociétés Savantes.

masters (programmes et liens), et l'attractivité des études scientifiques. Le 8 mai 2010, le conseil d'administration de la SMF prend position plus spécifiquement sur l'agrégation, pour exprimer son désaccord et ses plus vives inquiétudes concernant l'épreuve « Agir en fonctionnaire... », l'absence de mesures transitoires pour 2010-2011, l'impossibilité de commuter l'année de M2 et la préparation à l'agrégation, et les conséquences négatives de l'évolution actuelle sur la formation des enseignants de l'enseignement supérieur.

Une réunion organisée par la SMF et réunissant responsables de préparations aux concours et de masters a eu lieu à l'IHP le 26 septembre 2009 pour débattre « À propos du contenu de la réforme dans ses aspects généraux et ses aspects spécifiques aux mathématiques ». Une attention particulière y a été portée à la mise en place de l'année de transition pour le CAPES, après une enquête relayée par les correspondants locaux de la SMF. Une autre réunion a été organisée à l'occasion des Journées Annuelles de la SMF à l'IHP le 25 juin 2010 pour faire le point sur la situation en général et plus particulièrement sur la façon dont les préparations et masters dirigés vers les concours de recrutement du secondaire prévoient de fonctionner en 2010-2011, après la parution des textes officiels de mai et juin 2010.

Références

[1] Point 3 « les compétences professionnelles des maîtres » de l'annexe de l'arrêté du 19 décembre 2006.
[2] Communiqué de presse du conseil des ministres du 2 juillet 2008.
[3] « Les nouveaux concours de recrutement de professeurs » présentation du 13 octobre 2008 de François Perret, Doyen de l'IGEN.
[4] Communiqué de presse MEN-MESR du 15 janvier 2009 sur la nouvelle formation des maîtres.
[5] Lettre du 20 mars 2009 de Xavier Darcos au secrétaire national de la FSU sur la formation des enseignants.
[6] Décrets du 28 juillet 2009 (instituant la « masterisation » et précisant les conditions de transition) – 29 juillet 2009.
[7] Circulaire du 27 août 2009 aux recteurs d'académie sur l'organisation de stages.
[8] Communiqué du MEN du 4 septembre 2009 : Thèmes - Calendrier - Composition des groupes de proposition.
[9] « La « masterisation » à l'épreuve des textes officiels » V. Girardin, *Gazette des mathématiciens* octobre 2009.
[10] Présentation du 13 novembre 2009 des décisions des ministres sur la base des conclusion du groupe de synthèse MEN - MESR .
[11] Lettre du 19 novembre 2009 des directeurs de cabinet des ministres au secrétaire général de la FSU, précisant certains points de la présentation du 13 novembre 2009.
[12] Circulaire de la DGESIP du 23 décembre 2009 pour la mise en place des diplômes de master ouverts aux étudiants se destinant aux métiers de l'enseignement dès la rentrée universitaire 2010 – 1er janvier 2010.
[13] Arrêtés du 28 décembre 2009 fixant les modalités d'organisation des concours de l'Agrégation, du CAPES, du CRPE et CAPLP – 6 janvier 2010.
[14] Arrêté du 31 décembre 2009 fixant les diplômes et les titres permettant de se présenter aux concours externes et internes de recrutement des personnels enseignants des premier et second degrés et des personnels d'éducation relevant du ministre chargé de l'Education Nationale – 20 janvier 2010.
[15] Exemples de sujets « zéro » des épreuves écrites d'admissibilité du CRPE. – 18 février 2010.
[16] Exemples de sujets « zéro » des épreuves écrites d'admissibilité du CAPES de la session 2011 – 29 mars 2010.

[17] Circulaire du 25 février 2010 aux recteurs d'académie relative au dispositif d'accueil, d'accompagnement et de formation des enseignants stagiaires – 1er avril 2010.
[18] Note de service du 2 avril 2010 aux recteurs d'académie sur l'affectation en qualité de fonctionnaire stagiaire des lauréats des concours du second degré – 29 avril 2010.
[19] Exemples de sujets des concours du second degré – 10 mai 2010.
[20] Programmes des concours du second degré - Agrégation, CAPES, CAPEPS, CPE. , CAPET, CAPLP session 2011 – 21 mai 2010.
[21] Circulaire du 5 mai 2010 du Ministère de l'Éducation Nationale fixant les modalités d'organisation et les dates des concours pour la session 2011 – 28 mai 2010.
[22] Décret du 28 mai 2010 portant diverses dispositions statutaires applicables à certains personnels enseignants et d'éducation relevant du Ministre de l'Éducation Nationale – 30 mai 2010.
[23] Arrêté du 31 mai 2010 fixant les titres, diplômes, certificats, attestations ou qualifications équivalentes attestant des compétences en langues de l'enseignement supérieur et en informatique et internet exigés de candidats ayant subi avec succès les épreuves des concours de recrutement de personnels enseignants des premier et second degrés et de personnels d'éducation relevant du ministre chargé de l'éducation nationale – 18 juin 2010.
[24] Arrêté du 12 mai 2010 portant définition des compétences à acquérir par les professeurs, documentalistes et conseillers principaux d'éducation pour l'exercice de leur métier - 18 juillet 2010.
[25] Réponse du MESR du 29 juillet 2010 à la Question écrite du 18 mars 2010 de Christiane Demontès, *Journal Officiel du Sénat* .
[26] Guide SIAC Concours des personnels enseignants d'éducation et d'orientation (pour le secondaire `http://www.guide-concours-enseignants-college-lycee.education.gouv.fr/`).
[27] Décret du 26 août 2010 portant diverses dispositions statutaires applicables à certains personnels enseignants et d'éducation relevant du ministre de l'éducation nationale – 31 août 2010[14].

[14] Les dates indiquées sont les dates de publication des textes postérieures à leur date officielle.

Astérisque
Dernières parutions

Astérisque 326
Séminaire Bourbaki Volume 2007/2008 - Exposés 982-996
Prix public* : 80 € - prix membre* : 56 €

Astérisque 327/328
From Probability to Geometry (I) et (II). Volume in honor of the 60th birthday of Jean-Michel Bismut - X. Dai, R. Léandre, X. Ma, W. Zhang, éditors
Prix public* : 150 € - prix membre* : 105 €

Astérisque 329
Two-Dimensional Markovian Holonomy Fields - Thierry Lévy
Prix public* : 35 € - prix membre* : 25 €

Astérisque 330
Représentations p-adiques de groupes p-adiques II : Représentations de $GL_2(Q_p)$ et (φ,Γ)-modules - L. Berger, C. Breuil, P. Colmez, éditeurs
Prix public* : 70 € - prix membre* : 49 €

Astérisque 331
Représentations p-adiques de groupes p-adiques II : Représentations de $GL_2(Q_p)$ et (φ,Γ)-modules - L. Berger, C. Breuil, P. Colmez, éditeurs
Prix public* : 60 € - prix membre* : 42 €

Astérisque 332
Séminaire Bourbaki, volume 2008/2009 - Exposés 997-1011
Prix public* : 90 € - prix membre* : 63 €

* frais de port non compris

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

ACTUALITÉ

Travaux de Elon Lindenstrauss

Philippe Michel

Lors du Congrès International des Mathématiciens 2010 à Hyderabad, une des quatre médailles Fields a été décernée à Elon Lindenstrauss, faisant de lui le premier citoyen israélien à recevoir cette haute distinction. Né en 1970, Elon Lindenstrauss est un pur produit de la « Hebrew University of Jerusalem » où il a effectué l'ensemble de sa formation de mathématicien, jusqu'au PhD, en 1999, sous la direction de Benjamin Weiss. Elon Lindenstrauss a été notamment Szegö Assistant Professor à Stanford de 2001 à 2003 et est professeur à Princeton depuis 2004 ; depuis 2008, il est également professeur à Hebrew University of Jerusalem. Parmi les nombreux prix qui jalonnent sa carrière, on peut citer, le prix Salem 2003, le prix de l'European Mathematical Society 2004 ainsi que le prix Fermat 2010 (partagé avec Cédric Villani).

L'espace des réseaux

La médaille Fields a été attribuée à Elon avec la citation suivante : « for his results on measure rigidity in ergodic theory, and their applications to number theory. » Le pont entre théorie des nombres et théorie ergodique vient principalement de l'étude des propriétés dynamiques des espaces homogènes arithmétiques. L'archétype d'un tel espace – et sans doute, son représentant le plus important – est l'espace des réseaux de $\mathbf{R}^n$, X_n : ie. l'ensemble des sous-groupes engendrés par les diverses bases de $\mathbf{R}^n$. C'est un espace homogène sous l'action naturelle de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ sur l'ensemble des bases et on a une identification naturelle

$$X_n \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}).$$

Étant donné $H < \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ un sous-groupe fermé pris dans une classe convenable (par exemple le groupe des points réels d'un sous-groupe algébrique définis sur $\mathbf{Q}$), on souhaite classifier et étudier la structure des H-orbites $\Lambda.H \subset X_n$, ainsi que les mesures H-invariantes.

Pour mettre les travaux de Lindenstrauss en perspective, il sera utile de rappeler les travaux d'un autre médaillé Fields, Gregory Margulis (1978), sur *la conjecture d'Oppenheim*. La conjecture d'Oppenheim – prouvée par Margulis à la fin des années 80 – concerne les valeurs prises par une forme quadratique, q, en $n \geqslant 3$ variables sur le réseau $\mathbf{Z}^n$. Elle prédit que, *si q est indéfinie et n'est pas proportionnelle à une forme quadratique à coefficients rationnels, on a*

$$(*) \qquad \inf_{\mathbf{x}\in\mathbf{Z}^n-\{0\}} |q(\mathbf{x})| = 0,$$

(en fait, $q(\mathbf{Z}^n)$ est même dense dans $\mathbf{R}$). Le cas crucial est celui de 3 variables auquel on se limitera dorénavant. Le lien entre ce problème et la dynamique des espaces de réseaux est le suivant. Soit q_0 la forme quadratique $(x,y,z) \mapsto x^2+y^2-z^2$ dont le groupe orthogonal est $\mathrm{SO}(2,1)$; comme q est indéfinie, il existe un réseau $\Lambda_q \subset \mathbf{R}^3$ et un isomorphisme d'espace quadratique $(\mathbf{Z}^3, q) \simeq (\Lambda, \pm q_0)$ et en particulier $|q(\mathbf{Z}^n)| = |q_0(\Lambda)|$. On voit alors facilement à l'aide du critère de compacité de Mahler que $(*)$ équivaut au fait suivant démontré par Margulis

$(*')$ *l'orbite* $\Lambda_q.\mathrm{SO}(2,1)(\mathbf{R}) \subset X_3$ *n'est pas bornée* ;

inversement il est facile de voir que si q est proportionnelle à une forme à coefficients rationnelle alors la $\mathrm{SO}(2,1)(\mathbf{R})$-orbite correspondante est bornée.

La conjecture de Littlewood

Les travaux de Lindenstrauss sont liés à une autre grande conjecture (non démontrée à ce jour) due à Littlewood sur l'approximation simultanée de deux réels par des rationnels de même dénominateur : *pour* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *qui ne sont pas tous deux rationnels, on a*

$$(**) \qquad \liminf_{l>0} l\|l\alpha\|.\|l\beta\| = 0,$$

($\|.\|$ désignant la distance à l'entier le plus proche). Cet énoncé est équivalent à

$$\inf_{(l,m,n)\in\mathbf{Z}^3,\ l\neq 0} |f_{\alpha,\beta}(l,m,n)| = 0,$$

avec $f_{\alpha,\beta}(x,y,z)$ la forme homogène de degré 3, $(x,y,z) \mapsto x(\alpha x - y)(\beta x - z)$. Tout comme la conjecture d'Oppenheim, cette conjecture se traduit en terme d'orbites dans l'espace des réseaux X_3 : soit $A_3 < \mathrm{SL}_3(\mathbf{R})$ le groupe des matrices diagonales, de coordonnées positives et de déterminant 1 – ce groupe stabilise la forme homogène de degré 3, $f_0 : (x,y,z) \mapsto xyz$ – et soit le réseau

$$\Lambda_{\alpha,\beta} := \mathbf{Z}(1,\alpha,\beta) + \mathbf{Z}(0,1,0) + \mathbf{Z}(0,0,1),$$

l'énoncé $(**)$ est alors « presque » équivalent à l'énoncé suivant : *pour* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *qui ne sont pas tous deux rationnels, on a*

$(**')$ *l'orbite* $\Lambda_{\alpha,\beta}.A_3 \subset X_3$ *n'est pas bornée.*

Quoique d'apparence semblable, $(*')$ et $(**')$ sont de natures fondamentalement différentes : le groupe $\mathrm{SO}(2,1)$ est engendré par des unipotents ce qui n'est évidement pas le cas du tore diagonal A_3. Le résultat de Margulis $(*')$ est, en fait, un cas particulier d'un vaste ensemble de conjectures formulées par Raghunathan dans les années 70, démontrées dans le courant des années 90 par Ratner puis raffinées et généralisées par Ratner, Margulis, Dani et d'autres. L'étude des actions de tores s'avère beaucoup plus difficile ; pour s'en convaincre, il suffit de considérer la vitesse de croissance des coordonnées des puissances $(g^k)_{k\in\mathbf{Z}}$ d'une matrice $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$: si g est unipotente, la croissance est au plus polynomiale en k, alors que si elle est diagonale (d'ordre infini) la croissance est exponentielle. Ainsi il est beaucoup plus difficile de contrôler le comportement relatif de deux orbites $\{\Lambda.g^k,\ k \in \mathbf{Z}\},\ \{\Lambda'.g^k,\ k \in \mathbf{Z}\} \subset X_n$ même si les points initiaux Λ, Λ' sont proches l'un de l'autre.

Un autre indice de cette difficulté est que dans le cas $n = 2$, (l'action de A_2 correspond alors essentiellement à celle du flot géodésique sur le fibré tangent unitaire de la surface modulaire) un continuum de comportements distincts pour les orbites de A_2 est possible (d'ailleurs les analogues des conjectures de Oppenheim et de Littlewood sont fausses). La raison de cette flexibilité est bien comprise et due au fait que le tore A_2 est de rang 1 ; en particulier, en rang supérieur, comme c'est le cas de A_3, on attend plutôt une forme de rigidité, formalisée dans les années 90, par Margulis, dans une série de conjectures sur la classification des orbites et des mesures invariantes sous les actions de tores (maximaux) sur les espaces homogènes de rang > 1. Ces conjectures sont inspirées, en partie, par le fameux théorème de Furstenberg :

Théorème (Furstenberg)**.** *Dans l'intervalle* $[0,1[$*, muni des deux transformations (qui commutent entre elles)* $T_2 : x \mapsto \{2x\}$*,* $T_3 : x \mapsto \{3x\}$ *, l'orbite* $\{T_2^m T_3^n(x),\ m,n \geqslant 0\}$ *est soit finie (si* x *est rationnel), soit dense (si* x *ne l'est pas).*

En d'autres termes, on a une dichotomie concernant les orbites du semi-groupe à deux paramètres $T_2^{\mathbf{N}} T_3^{\mathbf{N}}$ qui sont soit finies soit denses. En revanche, il est facile de voir (en considérant le développement de x en base 2) que les orbites du semi-groupe $T_2^{\mathbf{N}}$ exhibent une infinité de comportements distincts. Elon Lindenstrauss, en collaboration avec Manfred Einsiedler et Anatole Katok a réalisé des progrès considérables en direction des conjectures de Margulis, moyennant une hypothèse supplémentaire dite *d'entropie positive*. Ils obtiennent en particulier le résultat suivant

Théorème (Einsiedler, Katok, Lindenstrauss)**.** *Soit* $n \geqslant 3$ *un nombre premier et* μ *une mesure de probabilité sur* $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})\backslash\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ *(ie. sur l'espace des réseaux de volume* 1*),* A_n*-invariante et ergodique telle qu'il existe un élément de* A_n *agissant sur ce quotient avec une* μ*-entropie positive, alors* μ *est la mesure de Haar.*

L'hypothèse d'entropie[1] positive est à mettre en regard du théorème de Rudolph suivant qui raffine le théorème de Furstenberg, sous une hypothèse supplémentaire :

Théorème (Rudolph)**.** *Soit* μ *une mesure de probabilité* μ *sur* $[0,1[$*, invariante et ergodique sous l'action du semi-groupe* $T_2^{\mathbf{N}} T_3^{\mathbf{N}}$ *et pour laquelle* T_2 *(ou* T_3*) agit avec entropie positive, alors* μ *est la mesure de Haar.*

Il est conjecturé dans ces deux cas (Margulis et Furstenberg respectivement) que l'hypothèse d'entropie positive est superflue. Quoi qu'il en soit, le théorème de Einsiedler, Katok et Lindenstrauss implique que la conjecture de Littlewood est vraie pour toute paire (α,β) en dehors d'un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ *de dimension de Hausdorff nulle*. Notons qu'il est facile de vérifier que la conjecture de Littlewood est vraie hors d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle ce qui est évidemment beaucoup plus faible.

[1] Il s'agit ici de l'entropie de Kolmogorov-Sinai.

Les méthodes de haute et de basse entropie

La preuve du théorème de Einsiedler, Katok et Lindenstrauss passe par l'étude de certaines mesures conditionnelles, associées à μ, dont le support est transverse à l'action du tore (plus précisément, le long d'orbites de sous-groupes unipotents à un paramètre, normalisés par le tore). L'hypothèse d'entropie positive assure que *certaines* de ces mesures conditionnelles ne sont pas atomiques. L'idée de base est d'en déduire l'invariance supplémentaire de μ sous l'action de sous-groupes *unipotents* ce qui ramène aux résultats de classification de Ratner. Cette idée est implémentée grâce à deux techniques complémentaires. Dans le cas où « beaucoup » des mesures conditionnelles précédentes sont non-atomiques les auteurs emploient une méthode dite de « haute entropie » due à Einsiedler et Katok. Dans le cas inverse (où « peu » de ces mesures sont non-atomiques, les autres étant atomiques) la méthode de haute entropie (reposant sur le fait que certains sous-groupes unipotents à un paramètre ne commutent pas entre eux) ne s'applique pas et les auteurs lui substituent la méthode dite de « basse entropie » qui avait été inventée par Lindenstrauss à l'occasion de ses travaux sur la *conjecture d'Unique Ergodicité Quantique* de Rudnick-Sarnak décrits ci-dessous. Cette dernière technique est sensiblement plus délicate que la méthode de haute entropie et fait appel, entre autres, à certains aspects profonds de la preuve de Ratner des conjectures de Raghunathan (le « H-principle »).

Mentionnons pour conclure cette section que le théorème de Einsiedler, Katok et Lindenstrauss ci-dessus se généralise aux espaces homogènes de rang supérieur ainsi que dans le contexte S-arithmétique [5, 6].

Remarque. La notion d'entropie est un concept central en théorie ergodique ; dans le contexte des espaces homogènes, elle a notamment permis de simplifier considérablement la preuve de certains résultats de Ratner concernant la rigidité des mesures invariantes sous des flots unipotents[2] (Margulis-Tomanov). En ce qui concerne les actions de tores, la nécessité d'une hypothèse de type « entropie positive » est naturelle. Rappelons par exemple que, dans le cas des espaces homogènes de rang 1 (et pour des systèmes dynamiques plus généraux), la mesure de Haar est caractérisée comme l'unique mesure *d'entropie maximale*. Il y a de nombreux exemples où cette caractérisation s'est montrée utile : on pense, bien sûr, au théorème de Bowen-Margulis sur l'équirépartition des géodésiques fermées d'une surface hyperbolique compacte de la fin des années 60, et, une dizaine d'années avant, au théorème de Linnik (démontré par la « méthode ergodique ») sur l'équirépartition des représentations des entiers comme somme de trois carrés. Il est remarquable que, en rang supérieur, seule la positivité de l'entropie suffise.

La conjecture d'unique ergodicité quantique de Rudnick-Sarnak

Étant donné (X, g) une variété Riemannienne compacte (sans bord), un problème fondamental est de comprendre le comportement des fonctions propres du Laplacien

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 \text{ quand } \lambda \to \infty.$$

[2] même si les flots unipotents agissent avec une entropie nulle

Cette question est fortement liée au comportement du flot géodésique sur (le fibré cotangent unitaire de) X (Δ apparaît comme la quantification de l'Hamiltonien engendrant le flot) et est particulièrement intéressante quand ce dernier est *ergodique*. Inspirés par les travaux fameux de Schnirelman, Colin de Verdière et Zelditch sur l'ergodicité quantique, Rudnick et Sarnak ont proposé la conjecture suivante

Conjecture d'Unique Ergodicité Quantique. *Supposons que (X, g) est de courbure strictement négative, alors quand $\lambda \to \infty$, la suite de mesures de probabilité μ_φ de densité*

$$d\mu_\varphi(x) := |\varphi(x)|^2 d\mu_g(x)$$

(avec la normalisation $\|\varphi\|_g^2 = 1$) converge faiblement vers la mesure de probabilité (induite par la métrique g) μ_g.

Cette conjecture prédit donc, dans ces conditions, que la « masse » d'une fonction propre de Δ tend à se répartir uniformément quand la valeur propre tend vers l'infini. Cette conjecture est étayée par des résultats partiels de Rudnick et Sarnak (non-accumulation de la masse le long de géodésiques fermées) dans le cas particulier des surfaces hyperboliques « arithmétiques » (par exemple, une surface $X = \Gamma\backslash\mathbf{H}$ dont le groupe fondamental, Γ, est le groupe des unités – modulo $\{\pm 1\}$ – d'un ordre d'une algèbre de quaternions définie sur $\mathbf{Q}$ et décomposée sur $\mathbf{R}$) et pour des fonctions propres du Laplacien particulières (dite « de Hecke ») qui sont également fonctions propres des « opérateurs de Hecke » $\{T_p\}_p$: ces opérateurs, dont l'existence est garantie par l'arithméticité de la surface, indexés par les nombres premiers, sont autoadjoints, commutent avec Δ.

Théorème (Lindenstrauss)**.** *La conjecture d'unique ergodicité quantique est vraie pour les fonctions de Hecke sur une surface arithmétique compacte.*

Le lien entre cette question et le flot géodésique provient de l'existence du *relèvement microlocal* : étant donné φ, il existe sur le fibré cotangent unitaire $S^*(X)$ une mesure de probabilité ν_φ qui relève la mesure μ_φ sur X et telle que toute limite faible ν de la suite des $\{\nu_\varphi\}_{\varphi,\lambda\to\infty}$ est invariante sous l'action du flot géodésique ; la conjecture d'unique ergodicité quantique revient alors à montrer que ν est la mesure de Liouville.

Dans le cas d'une surface hyperbolique $\Gamma\backslash\mathbf{H}$, l'action du flot géodésique sur $S^*(X)$ s'identifie naturellement à l'action du tore A_2 sur le quotient $\Gamma\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbf{R})$; on cherche donc à montrer qu'une certaine mesure A_2-invariante est la mesure de Haar. Comme A_2 est de rang 1, une possibilité serait de montrer que A_2 agit avec une entropie *maximale*. Cela paraît difficile dans ce contexte ; la meilleure minoration de l'entropie connue à ce jour est due à N. Anantharaman et S. Nonenmacher [1] et arrive à mi-chemin du but... ce qui est déjà tout à fait remarquable. Dans le cas d'une surface arithmétique, on dispose heureusement de symétries supplémentaires : pour p en dehors d'un ensemble fini de nombres premiers dépendant de X, $S^*(X)$ est un revêtement (à fibres compactes) qu'un quotient S-arithmétique,

$$S^*(X) \simeq \Gamma\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbf{R}) \leftarrow \Gamma_p\backslash\mathrm{PGL}_2(\mathbf{R}) \times \mathrm{PGL}_2(\mathbf{Q}_p) = Y_p$$

avec $\Gamma_p < \mathrm{PGL}_2(\mathbf{R}) \times \mathrm{PGL}_2(\mathbf{Q}_p)$ un sous-groupe discret cocompact irréductible. On dispose donc d'une action supplémentaire du groupe p-adique $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Q}_p)$: d'une certaine manière cette action compense le fait que A_2 n'est que de rang

1. On a néanmoins besoin d'une hypothèse supplémentaire sur la nature de cette action : la *récurrence*; une mesure ν sur Y_p est $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Q}_p)$-*récurrente* si pour tout $B \subset Y_p$ ν-mesurable de mesure positive, et presque tout $x \in Y_p$, l'ensemble

$$\{g_p \in \mathrm{PGL}_2(\mathbf{Q}_p),\ x.g_p \in B\} \subset \mathrm{PGL}_2(\mathbf{Q}_p)$$

n'est pas borné. Le point central du théorème UEQA est le théorème de classification suivant :

Théorème (Lindenstrauss)**.** *Soit ν une mesure sur Y_p, A_2-invariante et A_2-ergodique,* $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{Q}_p)$*-récurrente et d'entropie positive pour l'action de A_2, alors ν est la mesure de Haar.*

Remarque. Rappelons que la technique inventée par Lindenstrauss pour démontrer ce théorème a été un ingrédient majeur de la preuve du Théorème de Einsiedler, Katok, Lindenstrauss sur la conjecture de Littlewood.

La propriété de récurrence de la mesure ν_∞ est une conséquence du fait que les φ sont fonctions propres de l'opérateur de Hecke T_p ; le fait qu'elle soit d'entropie positive sous l'action de A_2 (plus précisément, que toutes ses composantes ergodiques soient d'entropie positive) a été démontré par Bourgain et Lindenstrauss [2] en utilisant le fait que les φ sont propres de *tous* les autres opérateurs de Hecke $\{T_q\}_q$ premier.

Remarque. La restriction à une suite de fonctions propres de Hecke peut sembler particulière mais est tout à fait naturelle dans ce contexte ; d'ailleurs toute fonction propre du Laplacien est combinaison linéaire de fonctions propres de Hecke avec la même valeur propre. De plus, on conjecture que pour les surfaces hyperboliques arithmétiques, les multiplicités des valeurs propres du Laplacien sont *bornées* absolument en fonction de Γ ; cette conjecture (apparemment difficile) impliquerait que dans le cas arithmétique la conjecture de Rudnick-Sarnak et le théorème de Lindenstrauss sont équivalents. Enfin, dans un travail tout récent et spectaculaire [3], Brooks et Lindenstrauss ont démontré la conjecture de Rudnick-Sarnak pour les fonctions propres du Laplacien qui sont propres pour *un seul opérateur* de Hecke T_p, (p fixé en dehors d'un ensemble fini qui ne dépend que de Γ) : plus précisément, ils ont montré que sous cette hypothèse, l'hypothèse d'entropie positive continue d'être satisfaite.

Entropie et Théorie des Nombres

Comme on le voit la notion d'entropie joue un rôle majeur dans les travaux de Lindenstrauss et de ses collaborateurs et notamment l'hypothèse d'entropie positive constamment présente dans les résultats que nous venons de citer. On espère bien sûr que celle-ci est superflue : cela impliquerait la conjecture de Littlewood sans exceptions ou la conjecture de Furstenberg dans le problème du $(\times 2 \times 3)$.

Du fait de cette hypothèse, du point de vue d'un théoricien des nombres « consommateur » de théorie ergodique, les résultats de Lindenstrauss et de ses collaborateurs peuvent sembler beaucoup moins commodes à utiliser que ceux concernant les flots unipotents.

Il ne faut pas désespérer cependant ! Dans de nombreux cas, le problème possède naturellement des actions additionnelles qui peuvent être exploitées pour

vérifier l'hypothèse d'entropie positive : ainsi, l'espace des réseaux X_n admet un revêtement, à fibres compactes, par un quotient adélique

$$X_n \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \twoheadleftarrow \mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbf{A_Q}).$$

Cette vérification n'est pas forcément facile et peut nécessiter des méthodes sophistiquées issues de la théorie analytique des nombres, de combinatoire sur les immeubles ou d'analyse harmonique (représentations automorphes, fonctions L, etc...). Par exemple, on a déjà évoqué la preuve de la conjecture de Rudnick-Sarnak pour les fonctions propres de Hecke. Celle-ci a été étendue à des variétés arithmétiques de rang supérieur [10] ; un autre exemple est l'étude des orbites *compactes* de tores maximaux dans des quotients arithmétiques [8] : on pourra consulter pour cela l'exposé Bourbaki de Emmanuel Breuillard [4]. Quoi qu'il en soit, il me semble évident que – comme c'est le cas en ce moment pour la théorie des flots unipotents – les méthodes développées actuellement par Lindenstrauss et ses collaborateurs auront un impact profond sur la théorie des nombres et qu'il faut s'attendre à d'autres applications spectaculaires.

Références

[1] Anantharaman Nalini, Nonnenmacher Stéphane, *Half-delocalization of eigenfunctions for the Laplacian on an Anosov manifold*, (English, with English and French summaries), Festival Yves Colin de Verdière, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 57, (2007), n° 7, 2465–2523.

[2] Bourgain Jean, Lindenstrauss Elon, *Entropy of quantum limits*, Comm. Math. Phys., 233, (2003), n° 1, 153–171,

[3] Brooks Shimon, Lindenstrauss Elon, *Graph Eigenfunctions and Quantum Unique Ergodicity*, `arXiv :1006.3583`, (2010).

[4] Breuillard Emmanuel, *Equidistribution des orbites toriques sur les espaces homogènes*, Séminaire Bourbaki, 1008 (16 juin 2009).

[5] Einsiedler Manfred, Katok Anatole, Lindenstrauss, Elon, *Invariant measures and the set of exceptions to Littlewood's conjecture*, Ann. of Math. (2), 164, (2006), n° 2, 513–560.

[6] Einsiedler Manfred, Lindenstrauss Elon, *On measures invariant under diagonalizable actions : the rank-one case and the general low-entropy method*, J. Mod. Dyn., 2, (2008), n° 1, 83–128.

[7] Einsiedler Manfred, Lindenstrauss Elon, *Joinings of higher-rank diagonalizable actions on locally homogeneous spaces*, Duke Math. J., 138, (2007), n° 2, 203–232.

[8] Einsiedler Manfred, Lindenstrauss Elon, Michel Philippe, Venkatesh A., *The distribution of periodic torus orbits on homogeneous spaces : Duke's theorem for cubic fields* , (à paraître), (2007) `arXiv :0708.1113`.

[9] Lindenstrauss Elon, *Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity*, Ann. of Math. (2), 163, (2006), n° 1, 165–219.

[10] Silberman Lior, Venkatesh Akshay, *Entropy bounds for Hecke eigenfunctions on division algebras*, Geom. Funct. Anal., à paraître.

Yves Meyer reçoit le prix Gauss à l'ICM

Stéphane Jaffard, Fabrice Planchon

Le prix Gauss a été attribué cet été à Yves Meyer lors de la séance inaugurale du Congrès International des Mathématiques (ICM) à Hyderabad. Ce prix, très récent (Yves Meyer en est le second lauréat), récompense une personne pour ses contributions exceptionnelles, ayant des répercussions dans les domaines d'applications des mathématiques.

Yves Meyer est né en 1939 et a passé sa jeunesse en Tunisie. Ancien élève de l'École Normale Supérieure, il commencera une thèse en étant enseignant dans l'enseignement secondaire.

Durant ces années, il sera scientifiquement influencé par Jean-Pierre Kahane, grande figure de l'analyse harmonique. Ce domaine des mathématiques, généralisation de l'étude des séries de Fourier, est motivé par l'étude des fonctions à partir de leur décomposition en fréquences. Sa proximité avec J.-P. Kahane conduit Yves Meyer à rester à l'écart des courants dominants de l'époque en France, guidés par le groupe Bourbaki ; il en gardera toute sa vie un certain style, préférant souvent la résolution de problèmes précis, l'étude d'objets mathématiques remarquables, plutôt que la construction de théories générales.

Ultérieurement, Jacques-Louis Lions, fondateur de l'école de mathématiques appliquées française, aura aussi sur lui une influence importante, le sensibilisant notamment à la richesse du lien entre les mathématiques et leurs applications.

L'une des caractéristiques d'Yves Meyer est son éclectisme dans le choix de ses thèmes de recherche. Jeune, il s'intéresse à l'interface entre l'analyse harmonique et la théorie des nombres. Ce sujet l'amènera à proposer les premiers exemples de quasi-cristaux [2], avant les travaux qui rendront R. Penrose célèbre. Il s'agit de pavages de l'espace par des objets réguliers, mais pour lesquels les pavages périodiques sont impossibles. Ainsi, on ne peut paver le plan par des pentagones réguliers, mais un pavage « quasi-périodique » contenant des pentagones et des losanges le permet, et un tel pavage aura des propriétés de symétrie d'ordre 5 remarquables. Ces travaux d'Yves Meyer ont trouvé ultérieurement des applications inattendues en chimie.

En 1974, lors d'une visite à « Washington University », à Saint Louis, aux États-Unis, Yves Meyer rencontre R. Coifman. Celui-ci lui décrit le « programme de Calderon », vaste chantier scientifique sur l'étude des opérateurs d'intégrale singulière ; ces opérateurs jouent un rôle central dans de nombreux problèmes issus de la physique (électrostatique ou électromagnétisme par exemple), dans des situations où la géométrie est peu régulière. Captivé par ce nouveau sujet, Yves Meyer entame une longue collaboration avec R. Coifman, qui les conduira (en collaboration avec A. MacIntosh) à résoudre la première conjecture centrale de la théorie, concernant l'intégrale de Cauchy sur les courbes lipschitziennes [1]. Ces travaux de pionnier ouvriront la voie aux travaux de G. David et J.-L Journé (théorème T(1)), X. Tolsa (conjecture de Painlevé), P. Auscher, S. Hofmann, M. Lacey, A. McIntosh et P. Tchamitchian (conjecture de Kato),... une liste où l'on retrouve de nombreux élèves d'Yves Meyer.

En 1984, à travers des discussions avec le physicien A. Grossmann, Yves Meyer découvre les ondelettes, alors simples outils d'analyse de signaux géophysiques, introduites par J. Morlet, ingénieur chez Elf-Aquitaine et motivé par la détection pétrolière. Étudiant les signaux obtenus en « sismique par réflexion » (une vibration, émise vers l'intérieur de la terre, est réfléchie par les différentes couches du sous-sol, et l'on cherche à reconstituer la nature du sous-sol à partir de l'étude du signal reçu), il propose de décomposer les signaux qu'il étudie en des composantes élémentaires simples, ayant toutes la même forme à travers les échelles. Yves Meyer perçoit immédiatement le lien avec les théories mathématiques qu'il avait précédemment explorées ; il va être la cheville ouvrière de cette aventure qui, initiée par une poignée de scientifiques, va progressivement révolutionner le traitement du signal, et avoir une influence profonde sur l'ensemble de l'analyse harmonique vue comme un outil au service de problèmes appliqués, et tout particulièrement la statistique mathématique.

En effet, si les décompositions multi-échelles étaient familières aux spécialistes du traitement du signal et de l'image, correspondant à l'idée naturelle d'une image observée simultanément à plusieurs résolutions, la formalisation mathématique qu'en donnent les bases d'ondelettes leurs donne une puissance incomparable ; une base d'ondelettes a une structure algorithmique particulièrement simple : ses éléments ont tous la même forme, et se déduisent les uns des autres par translations et dilatations. Certaines bases d'ondelettes existaient déjà : la première construction remonte à A. Haar en 1909, mais était composée de fonctions constantes par morceaux ; la construction de telles bases avec des fonctions régulières semblait même impossible. Un apport fondamental d'Yves Meyer va être de comprendre la pertinence de ces outils dans de multiples problèmes mathématiques et leurs nombreuses applications, permettant, à travers l'introduction d'un formalisme adéquat [3], à de nombreuses communautés scientifiques qui s'ignoraient des échanges fructueux. Parmi les proches collaborateurs d'Yves Meyer, et qui, à ses côtés, feront le succès des ondelettes, on retrouve R. Coifman, S. Mallat, qui introduira les algorithmes de décomposition rapide, outil indispensable pour transformer une belle théorie mathématique en un outil utilisable pour effectuer le traitement des signaux et des images en temps réel, I. Daubechies, qui construira les premières ondelettes à support compact, effectivement utilisées dans les applications, ou D. Donoho, qui percevra l'énorme potentiel des méthodes d'ondelettes en statistique. En particulier, elles fournissent un outil universel, c'est-à-dire parfaitement adaptable à toute situation : aucune hypothèse n'est à faire a priori sur un signal pour effectuer sa décomposition en ondelettes ; ces bases sont adaptées à n'importe quel cadre fonctionnel, et fournissent dans chaque cas une décomposition numériquement stable (on dit que ce sont des « bases inconditionnelles »). En adéquation parfaite avec les travaux antérieurs d'Yves Meyer, les ondelettes fournissent également une décomposition remarquablement simple des opérateurs d'intégrale singulière de type Calderon-Zygmund. Les décompositions en ondelettes (et leurs généralisations) sont maintenant devenues un outil incontournable dans toutes les opérations liées au traitement du signal de l'image et de la vidéo (codage, transmission, débruitage, reconstruction d'images floues,...) ; ainsi, le standard JPEG, utilisé comme norme en compression d'image, repose, depuis l'an 2000, sur les décompositions en ondelettes.

En collaboration avec R. Coifman, Yves Meyer sera aussi l'initiateur des « paquets d'ondelettes » puis des « bases trigonométriques locales ». Ces nouveaux systèmes sont des familles de bases : un critère (de minimisation d'entropie par exemple) permet de trouver au sein de cette famille, la base la mieux adaptée au signal, c'est-à-dire celle qui offre la représentation la plus économique, nécessitant le moins de coefficients. Ces deux systèmes ont ouvert la voie à un domaine en plein développement aujourd'hui : l'utilisation des « dictionnaires » de fonctions, ensembles extrêmement redondants, au sein desquels on cherche une sous-famille composée d'un très petit nombre d'éléments, qui permet de représenter le signal très économiquement, et avec une très haute précision.

Yves Meyer s'intéressera ensuite aux équations de la mécanique des fluides (équations de Navier-Stokes), dont on espérait que les ondelettes fourniraient un outil d'étude privilégié, en particulier pour la turbulence (en lien éventuel avec son caractère fractal ou multifractal). Si les ondelettes ne vont pas s'avérer décisives d'un point de vue théorique, les travaux d'Yves Meyer et de ses étudiants conduiront à mettre en valeur l'importance des oscillations comme condition suffisante pour l'obtention de solutions régulières. Plus généralement, Yves Meyer s'est intéressé à divers problèmes d'analyse non linéaires (lemme « div-curl », injections de Sobolev précisées,...), où il illustrera la pertinences de méthodes d'analyse harmonique sur quelques questions très techniques, mais d'importance cruciale pour la résolution des équations aux dérivées partielles issues de la physique [4].

Plus récemment, il s'intéresse au « compressed sensing », nouvelle technique de traitement du signal, qui a apporté des résultats spectaculaires en débruitage d'image ; utilisant ses résultats anciens sur les quasi-cristaux, il a montré, en collaboration avec B. Matei, que ces derniers sont d'excellents candidats pour effectuer de façon déterministe le sous-échantillonnage de signaux creux.

Durant toute sa carrière, Yves Meyer a montré sa passion pour l'enseignement (il a d'ailleurs toujours été enseignant, si l'on excepte de très brefs passages au CNRS) et son immense générosité, partageant sans compter ses idées et ses intuitions avec tout ceux qui l'ont approché. Il a ainsi été un directeur de thèse prolifique (une cinquantaine d'étudiants), et qui a fortement marqué ses anciens élèves.

Au-delà de la profondeur des nombreuses idées qu'il a introduites, Yves Meyer est aussi admiré pour avoir été le centre d'un réseau où intervenaient des scientifiques issus de très nombreuses disciplines. La science est aujourd'hui de moins en moins cloisonnée, et de grandes percées sont obtenues par mises en contact de communautés très différentes qui réfléchissaient, chacunes de leur côté, sur des problèmes qui se révèlent similaires. Le grand succès des ondelettes, dont Yves Meyer a été la cheville ouvrière, en est un exemple éclatant. Son parcours illustre aussi l'un des paradigmes les plus importants de la science actuelle : la frontière que certains ont voulu voir entre science « fondamentale » et « appliquée », n'existe pas. Yves Meyer a donné à de multiples occasions la preuve que des idées profondes, qui ont montré leur pertinence sur des problèmes mathématiques extrêmement théoriques, peuvent s'avérer être la clé qui ouvre la porte à des applications spectaculaires, comme en atteste, par exemple, le titre provocateur qu'il avait donné à l'un de ses exposés : « De la recherche pétrolière à la géométrie des espaces de Banach ».

Chacun de ses anciens élèves peut attester de l'importance qu'il a toujours attaché à la transmission de la science et aux valeurs d'humanisme et de tolérance

qui y sont liées. À une époque qui attache de plus en plus de poids aux seules valeurs matérielles, l'exemple qu'il donne n'en est que plus remarquable.

Yves Meyer est actuellement professeur émérite à l'École Normale Supérieure de Cachan. Il est marié et père de deux enfants. L'un d'entre eux, François, professeur aux États-Unis, travaille à l'interface entre mathématiques et informatique, également dans le domaine des ondelettes.

Références

[1] R. R. Coifman, A. McIntosh, and Y. Meyer. L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes. *Ann. of Math. (2)*, 116(2) :361–387, 1982.

[2] Yves Meyer. *Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 117. Springer-Verlag, Berlin, 1970. Cours Peccot donné au Collège de France en avril-mai 1969.

[3] Yves Meyer. *Ondelettes et opérateurs. I*. Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics]. Hermann, Paris, 1990. Ondelettes. [Wavelets].

[4] Yves Meyer. *Oscillating patterns in image processing and nonlinear evolution equations*, volume 22 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. The fifteenth Dean Jacqueline B. Lewis memorial lectures.

Qui est Ngô Bao Châu ?

Martin Andler[1]

Ngô Bao Châu[2] (nom de famille : Ngô) est né en 1972 à Hanoi au Viet-Nam. Il est marié, père de trois enfants. D'origine vietnamienne, il est devenu français par naturalisation au début de l'année 2010. Il garde avec le Vietnam des liens très forts ; lors d'une cérémonie en son honneur dimanche 29 août 2010 au Centre national des conférences de My Dinh à Hanoi, le premier ministre Nguyên Tân Dung a déclaré *« Je souhaite que la jeune génération du pays suive son exemple pour s'engager dans les sciences. La fierté nommée Ngô Bao Châu doit se multiplier ».* Selon le chef du gouvernement, *« le prix Fields a fait honneur à lui-même, à sa famille, à ses enseignants mais aussi à tout le Vietnam. (...) Afin de ne pas reculer par rapport au reste du monde, le Vietnam nécessite plus de "Ngô Bao Châu" ainsi qu'une société studieuse de même que des politiques d'assistance aux talentueux »* ajoutant que *« le gouvernement créerait des conditions favorables au professeur Ngô Bao Châu pour qu'il puisse contribuer au développement des mathématiques dans le pays* [3]*. »*

Études

Il fait sa scolarité à Hanoi, obtenant le diplôme de fin d'études secondaires en 1989. En 1988 et 1989, il obtient une médaille d'or aux olympiades internationales de mathématiques, avec un « perfect score » à sa première participation (les connaisseurs apprécieront [4]). Après une année d'études au Viêt-Nam, il obtient une bourse pour étudier en France à l'université Pierre et Marie Curie grâce à l'intervention de Jacques Vauthier. En quelques mois, il valide son DEUG ; en 1991, il est admis au magistère de l'ÉNS et semble hésiter entre mathématiques et informatique. En 1992, il est reçu premier au concours d'entrée à l'École normale supérieure (Ulm) ; il s'agit du concours « parallèle », pour étudiants français et étrangers. Il poursuit ses études par un diplôme d'études approfondies, puis une thèse soutenue en 1997 à l'université Paris-Sud, sous la direction de Gérard Laumon. Chargé de Recherche au CNRS au laboratoire de mathématiques de l'université Paris-Nord, LAGA, il y obtient son habilitation à diriger les recherches en 2003.

Carrière

1998-2004 : Chargé de recherche au CNRS au laboratoire de mathématiques de l'université Paris-Nord (LAGA)
2004 : Professeur à l'université Paris-Sud
2005 : Nommé Professeur de mathématiques au Vietnam à titre exceptionnel
2007-2010 : Membre de l'Institute for Advanced Study, Princeton (États-Unis)
À partir de septembre 2010, il sera professeur à l'université de Chicago.

[1] Université de Versailles Saint-Quentin.
[2] `http://www.math.u-psud.fr/~ngo/`
[3] Agence vietnamienne d'information, 29.8.2010.
[4] `http://www.imo-official.org/participant_r.aspx?id=1573`

Distinctions

2004 : Prix de recherche Clay (avec Gérard Laumon)
2006 : Conférencier invité, Congrès international des mathématiciens, Madrid 2006
2007 : Prix Oberwolfach
2010 : Conférencier plénier, Congrès international des mathématiciens, Hyderabad

Domaine de recherche

Ngô Bao Châu est spécialiste de théorie des représentations et formes automorphes. Son travail s'inscrit dans le cadre de ce qu'on appelle le « programme de Langlands », du nom du mathématicien américain d'origine canadienne Robert Langlands. Pour situer ce domaine, on peut mentionner le fameux « théorème de Fermat », énoncé par le mathématicien Fermat en 1637 et démontré par Andrew Wiles en 1994. Ngô a donné, au début de l'année 2008, une démonstration du « Lemme fondamental », qui était une conjecture formulée par Langlands-Shelstad dans un article paru en 1987, et dont un cas particulier avait été démontré par Labesse-Langlands dans les années 1970.

Description des travaux de Ngô Bao Châu

À partir de la fin du XIX^{e} siècle, l'étude des fonctions « modulaires » ou « automorphes », par Henri Poincaré et d'autres, s'est imposée comme un domaine majeur des mathématiques. Des généralisations successives ont abouti, dans les années 1950 et 1960 à une théorie générale des fonctions automorphes sur les groupes « semi-simples » grâce notamment aux travaux des mathématiciens Israël Gelfand (mathématicien russe récemment disparu) et Harish Chandra (mathématicien indien).

À la fin des années 1960, le mathématicien canadien Robert Langlands formula un vaste programme de recherche unifiant théorie des nombres, fonctions automorphes et théorie des représentations. Un des aspects de ce programme était l'existence d'un lien conjectural entre fonctions automorphes associées à des groupes différents – ce qu'on appelle fonctorialité. Dans un article de Langlands avec le mathématicien français Jean-Pierre Labesse paru en 1979, un cas particulier de la fonctorialité fut démontré. Puis les idées de Langlands se précisèrent, aboutissant à une conjecture précise dénommée « Lemme fondamental », formulée avec la mathématicienne d'origine australienne Diana Shelstad dans un article paru en 1987.

C'est ce Lemme fondamental que Ngô a démontré en toute généralité en 2008, après en avoir démontré un cas particulier (pour les groupes unitaires), en collaboration avec Gérard Laumon, dans un article annoncé en 2004 et publié en 2008.

La démonstration de Ngô dans l'article de 2008 est un véritable tour de force, l'aboutissement de plus d'une dizaine d'années de travail. Dès sa thèse, soutenue en 1997 sous la direction de Gérard Laumon, il avait travaillé sur une variante du Lemme fondamental, conjecturé par Jacquet-Ye. C'est notamment en utilisant la fibration de Hitchin et en appliquant des méthodes globales qu'il est parvenu à surmonter les difficultés sur lesquelles bien d'autres avaient échoué.

Ngô Bao Châu reçoit la Médaille Fields 2010

Gérard Laumon

Ngô Bao Châu a reçu la Médaille Fields à Hyderâbâd le 19 août 2010 pour la démonstration du « Lemme fondamental » de Langlands-Shelstad.

Un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle un nombre premier p est soit une extension finie du corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques, soit le corps $\mathbb{F}_q((t))$ des séries de Laurent en une variable à coefficient dans un corps fini $\mathbb{F}_q$ à $q = p^r$ éléments pour un entier $r \geqslant 1$. Un tel corps F est le corps des fractions de son anneau des entiers $\mathcal{O}$; par exemple, si $F = \mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$ est l'anneau des entiers p-adiques, et si $F = \mathbb{F}_q((t))$, $\mathcal{O} = \mathbb{F}_q[[t]]$ est l'anneau des séries formelles en une variable à coefficients dans $\mathbb{F}_q$.

Un vaste domaine de l'analyse harmonique, développé principalement par Harish-Chandra, a pour objet l'étude des distributions invariantes sur les groupes semi-simples G sur un corps local non archimédien F. Les groupes spéciaux linéaires $\mathrm{SL}(n)$, les groupes classiques orthogonaux $\mathrm{O}(n)$ ou symplectiques $\mathrm{Sp}(2n)$ sont les exemples les plus importants de groupes semi-simples. Il y a essentiellement deux types de distributions invariantes : les intégrales orbitales et les caractères de représentations, ces deux types de distributions étant en dualité de Frobenius.

Pour $\gamma \in G(F)$, l'intégrale orbitale en γ est la distribution qui associe à toute fonction convenable f sur $G(F)$ le nombre complexe

$$\mathrm{O}_\gamma^G(f) = \int_{G_\gamma(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\gamma g)dg$$

où $G_\gamma(F)$ est le centralisateur de γ dans $G(F)$ et dg est une mesure invariante sur l'espace homogène $G_\gamma(F)\backslash G(F)$.

Le Lemme fondamental est une collection d'identités

$$\sum_\gamma c_\gamma^G \mathrm{O}_\gamma^G(f^G) = \sum_\delta c_\delta^H \mathrm{O}_\delta^H(f^H),$$

faisant intervenir un groupe réductif G sur F et un autre groupe réductif H sur F « endoscopique » pour G, et dont les membres de gauche et de droite sont tous les deux des combinaisons linéaires d'intégrales orbitales appliquées à des fonctions particulières f^G sur $G(F)$ et f^H sur $H(F)$. Ces intégrales orbitales comptent en fait des $\mathcal{O}$-réseaux dans des F-espaces vectoriels de dimensions finies soumis à certaines conditions imposées par les groupes G (ou H) et les éléments γ (ou δ) ; elles sont donc de nature combinatoire.

Pour plus de détails sur l'énoncé et les conséquences du Lemme fondamental, le lecteur pourra consulter l'article de Chaudouard, Harris et moi-même publié dans la Newsletter of the European Mathematical Society du mois de septembre 2010.

Le Lemme fondamental est apparu la première fois en 1979 dans un travail de Langlands-Labesse, sous la forme d'un petit lemme que les auteurs démontrent de manière directe et élémentaire, mais qui joue un rôle crucial dans l'article dont le but est d'étudier le spectre discret de $\mathrm{SL}(2)$ sur un corps de nombres.

Peu à peu, il est apparu nécessaire de disposer d'énoncés de même nature pour établir les cas dits endoscopiques du monumental programme de Langlands. En 1987, Langlands et Shelstad ont formulé une conjecture très précise regroupant tous ces énoncés, conjecture qui a pris le nom de Lemme fondamental, tant les spécialistes étaient à l'époque persuadés de son importance, mais aussi de la possibilité d'une démonstration rapide une fois l'énoncé général bien posé.

Plusieurs cas de cette conjecture ont été établis par des méthodes directes d'analyse harmonique. Outre le cas de SL(2) dont on a déjà parlé, Kottwitz et Rogawski ont démontré le Lemme fondamental pour les groupes unitaires en 3 variables, Hales, Schröder et Weissauer l'ont démontré pour le groupe symplectique en 4 variables et Waldspurger l'a établi pour le groupe spécial linéaire SL(n) quel que soit n.

Mais le cas général résistait toujours à ces approches directes, malgré de nombreuses tentatives.

La voie d'une approche géométrique a été ouverte par Waldspurger. Il a montré d'une part qu'il suffisait de traiter le cas d'égales caractéristiques, c'est-à-dire le cas où $F = \mathbb{F}_q((t))$ (un résultat de ce type a aussi été obtenu par Cluckers et Loeser), et d'autre part que le Lemme fondamental de Langlands-Shelstad pouvait se déduire d'une variante pour les algèbres de Lie qui, d'après un travail de Kottwitz en 1999, est beaucoup plus simple à formuler. Waldspurger a aussi montré que le Lemme fondamental impliquait une autre conjecture, dite « de transfert », qui est nécessaire pour pouvoir utiliser la formule des traces d'Arthur-Selberg pour établir les fonctorialités de Langlands endoscopiques.

En 1988, par analogie avec les fibres de Springer classiques, Kazhdan et Lusztig avaient associé à un groupe réductif G sur $F = \mathbb{F}_q((t))$ et à un élément $\gamma \in G(F)$, une variété X_γ sur le corps fini $\mathbb{F}_q$, la « fibre de Springer affine » en γ. Par la définition même de ces variétés, chaque intégrale orbitale intervenant dans le Lemme fondamental est le nombre des points d'une fibre de Springer affine à valeurs dans $\mathbb{F}_q$. Il était donc tentant d'utiliser la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz et toute la puissance de la cohomologie ℓ-adique pour essayer de démontrer le Lemme fondamental.

Une tentative en ce sens a été faite par Goresky, Kottwitz et MacPherson, dans les cas où les fibres de Springer affines sont munies d'actions assez fortes de tores algébriques T. En utilisant la cohomologie T-équivariante ℓ-adique de ces fibres de Springer affines, ils ont réussi à démontrer le Lemme fondamental pour un groupe réductif général mais avec des restrictions très sérieuses sur les γ qui y interviennent.

Un problème majeur posé par l'approche de Goresky, Kottwitz et MacPherson est que les fibres de Springer affines sont beaucoup plus rigides que les fibres de Springer usuelles, au sens où on ne peut pas en général mettre en famille les X_γ quand γ varie.

C'est en étudiant une de mes tentatives pour contourner ce problème (dans le cas des groupes unitaires) que Ngô Bao Châu a eu l'idée lumineuse de remplacer les fibres de Springer affines par les fibres d'une fibration que Hitchin avait introduite en 1987 en étudiant des équations de la physique intervenant dans la théorie des bosons de Higgs. Cette idée a été décisive pour le cas des groupes unitaires que

Ngô Bao Châu et moi-même avons résolu en 2004, en utilisant la méthode de cohomologie équivariante inventée par Goresky, Kottwitz et MacPherson.

Ngô Bao Châu s'est alors attaqué au cas général où la méthode de cohomologie équivariante est inopérante. Le défi était formidable mais sa conviction qu'il devait y avoir un lien étroit entre la fibration de Hitchin et la stabilisation par Kottwitz de la formule des traces l'a conduit à étudier plus à fond la cohomologie ℓ-adique de la fibration de Hitchin. Il a finalement démontré un énoncé de décomposition pour cette cohomologie, qui peut être vu comme un analogue cohomologique du Lemme fondamental de Langlands-Shelstad, et qui implique ce dernier grâce à la formule des points fixes de Lefschetz-Grothendieck. Les détails de la démonstration viennent de paraître dans un article de 169 pages aux Publications de l'IHÉS.

Cédric Villani reçoit la médaille Fields

Clément Mouhot[1]

Cédric Villani a reçu la médaille Fields lors du 26e congrès mondial des mathématiques à Hyderabad en Inde le 19 août 2010 pour « *ses preuves de l'amortissement Landau non-linéaire et de la convergence vers l'équilibre pour l'équation de Boltzmann* ».

C. Villani a 37 ans, il est actuellement directeur de l'Institut Henri Poincaré (depuis juillet 2009), après avoir occupé le poste de professeur à l'ENS Lyon durant près de 9 ans. Il est membre de l'Institut Universitaire de France (junior) depuis 2006. Il a été auparavant lauréat des prix Fermat et Henri Poincaré en 2009, ainsi que du prix de la Société Mathématique Européenne en 2008.

Les travaux de C. Villani montrent une grande diversité dans les outils et les concepts utilisés, provenant de l'analyse, des probabilités et de la géométrie. Ils sont cependant unis par le fil rouge de la notion d'entropie et (son corollaire) de retour à l'équilibre pour les systèmes de particules.

Commençons par le deuxième résultat de la citation (mais le premier chronologiquement) sur la « *convergence vers l'équilibre pour l'équation de Boltzmann* », en collaboration avec L. Desvillettes. Il concerne la vitesse à laquelle se produit ce retour à l'équilibre. Plus précisément le point de départ est la théorie fondée par les physiciens Maxwell et Boltzmann : étudier l'évolution de la *répartition* des particules selon leurs positions et leurs vitesses au lieu de suivre les trajectoires de chaque particule. Ils proposent alors l'équation intégro-différentielle dite « de Boltzmann » suivante

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f,f), \quad 0 \leq f = f(t,x,v),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3,\ v \in \mathbb{R}^3$$

où Ω est le domaine où évoluent les particules (avec des conditions aux bords appropriées) et $Q(f,f)$ est un opérateur intégral bilinéaire en la variable de vitesse qui décrit de façon statistique le processus de collision.

Ce point de vue *statistique* est bien plus abordable que le système dynamique constitué des milliards de milliards de particules soumises aux lois de Newton, et, à l'inverse de la dynamique microscopique qui est réversible, l'équation de Boltzmann possède une « flèche du temps » : elle est irréversible et, comme l'a découvert Boltzmann, elle montre une décroissance de la fonction $H = \int f \log f$ (opposé de l'entropie)[2]. Cette découverte fait entrer le second principe de la thermodynamique dans le champ de l'investigation mathématique à travers l'étude des solutions de son équation.

La première découverte de C. Villani, en collaboration avec G. Toscani, est la possibilité surprenante et très élégante d'utiliser le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck pour relier les fonctionnelles de production d'entropie des équations de Boltzmann

[1] Université de Cambridge.

[2] Nous ne pouvons détailler ici l'une des idées les plus importantes de la physique du XIXe siècle introduite par Boltzmann pour expliquer le passage du microscopique réversible au macroscopique irréversible, le « chaos moléculaire », dont la théorie mathématique rigoureuse reste un important problème ouvert.

et Landau. Utilisant ses précédents résultats en collaboration avec L. Desvillettes pour l'équation de Landau, C. Villani a pu ainsi démontrer en 2003 des inégalités « presque » linéaires (où l'on peut choisir une puissance aussi proche de un que voulu) entre la production d'entropie et l'entropie relative dans le cas spatialement homogène, donnant ainsi une réponse « presque vraie » à la conjecture de 1982 du physicien-mathématicien Cercignani récemment décédé.

La deuxième découverte de C. Villani, en collaboration avec L. Desvillettes (publié en 2005 à *Inventiones Mathematicae*), concerne le cas spatialement inhomogène intégrant les fluctuations en espace du gaz. Bien que la fonctionnelle de production d'entropie s'annule sur l'ensemble de tous les équilibres locaux, qui est bien plus grand que l'état d'équilibre final attendu, les dérivées en temps successives de cette production d'entropie (ou encore de fonctionnelles modifiées, relativement à des sous-espaces des équilibres locaux) permettent de saisir et de quantifier la façon dont l'opérateur de transport se combine aux mécanismes collisionnels pour empêcher l'« arrêt » sur un équilibre local mais non global. Cette intuition physique et géométrique fondamentale du problème suscitera de nouveaux résultats d'analyse fonctionnelle et marquera également la naissance de la théorie de l'*hypocoercivité* à laquelle C. Villani a consacré un long mémoire par la suite.

L'autre résultat mentionné dans la citation est un travail concernant « *l'amortissement Landau non-linéaire* », en collaboration avec l'auteur de cette notice. L'objet d'étude est le phénomène de relaxation *non collisionnel*, connu en physique sous le nom célèbre d'*amortissement Landau*. Découvert par Landau en 1946 dans le cadre des plasmas, c'est-à-dire des gaz d'électrons séparés des noyaux atomiques, il consiste en le retour à un équilibre homogène (et donc à la neutralité électrique) dans un plasma que l'on perturbe, et ceci à une échelle de temps rapide qui n'est pas explicable par les collisions au demeurant très faibles dans un plasma. Ce même phénomène a également été proposé en physique pour les « gaz d'étoiles » constituant les galaxies, et interagissant à travers les forces gravitationnelles.

Ces deux situations sont décrites mathématiquement par l'équation cinétique de Vlasov-Poisson :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + F[f] \cdot \nabla_v f = 0, \quad 0 \leq f = f(t,x,v),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3,\ v \in \mathbb{R}^3$$

où la force $F[f]$ (terme de champ moyen) est définie de façon auto-consistante par une convolution $F = \varphi \star \rho$ avec la densité spatiale $\rho(t,x) = \int f\, dv$ de la distribution. Le mystère et la difficulté de ce phénomène (ce qui explique les 60 ans de controverses entre physiciens depuis la découverte de Landau) sont le fait que l'équation de Vlasov-Poisson est *réversible* (c'est une équation aux dérivées partielles hamiltonienne), ce qui semble interdire un tel phénomène de relaxation vers un équilibre.

Dans une prépublication de 2009, nous établissons l'effet d'*amortissement Landau* au niveau non-linéaire, et en temps infini, pour les interactions électrostatique (plasmas) et gravitationnelle (galaxies), pour des perturbations petites en topologie analytique (ou Gevrey) d'un équilibre homogène analytique (le confinement est assuré par des conditions périodiques en espace). La distribution f converge vers un équilibre homogène *au sens faible* (ce qui ne contredit pas ainsi le théorème de Liouville pour ce système dynamique de dimension infinie) tandis que sa densité spatiale $\int f\, dv$ converge fortement vers une constante. Le théorème construit un

ensemble de solutions hétéroclines pour la topologie faible et constitue le premier résultat de relaxation à entropie constante pour un système confiné. La preuve fait apparaître des liens surprenants entre la théorie KAM en système dynamique, le mélange de phase, et le phénomène d'*écho plasma* découvert expérimentalement en 1967.

Le troisième axe important des recherches de C. Villani concerne le transport optimal. Le problème de départ de cette théorie étudiée par Monge en 1781 et redécouverte par Kantorovich en 1938 est le suivant : *transporter de la matière au moindre coût, les distributions initiale (« déblais ») et finale (« remblais ») étant données*. Ce problème de minimisation associe (en fonction du coût choisi) une distance entre ces distributions. Les travaux de R. Jordan, D. Kinderlehrer et F. Otto avaient introduit l'idée nouvelle d'interpréter les équations dissipatives (comme l'équation de la chaleur ou de Fokker-Planck) comme des flots gradients pour ces structures métriques abstraites. Les premières découvertes de C. Villani dans ce domaine, en collaboration avec F. Otto, D. Cordero-Erausquin et B. Nazaret, sont l'idée d'introduire la courbure de Ricci dans le formalisme d'Otto, et la possibilité d'utiliser ce point de vue pour étudier les inégalités de type Sobolev (en particulier les inégalités de Sobolev logarithmiques) et la convergence vers l'équilibre de certaines équations de diffusion.

La troisième découverte, en collaboration avec J. Lott, est publiée en 2009 aux *Annals of Mathematics* et a été obtenue au même moment indépendamment par K.-T. Sturm. En réexprimant les bornes sur la courbure de Ricci en terme de certaines inégalités fonctionnelles de convexité sur l'espace des mesures de probabilité, ces auteurs peuvent ainsi développer une théorie purement *métrique* des espaces à courbure de Ricci minorée (ce qui rappelle la notion de courbure-dimension de Bakry-Emery). Cette notion est d'une part assez robuste pour être stable sous la notion de convergence de Gromov-Hausdorff, et d'autre part assez forte pour permettre de démontrer des résultats non-triviaux, comme par exemple des inégalités de Sobolev, le théorème de Bishop-Gromov et aussi une version faible du théorème de Bonnet-Myers.

Enfin, ajoutons que C. Villani a écrit plusieurs livres et articles de revue enthousiasmants, notamment par leur qualité de synthèse entre des outils ou des branches des mathématiques qui auraient semblé sans connexion. L'ensemble de ses travaux démontre une puissance de travail exceptionnelle. Cette dernière n'aurait pourtant pas suffi à produire ces résultats, si elle n'était pas combinée à une profonde intuition physique et géométrique, ainsi qu'à un grand recul scientifique dans le choix des problèmes étudiés.

Les travaux de Stanislav Smirnov

Wendelin Werner[1]

La médaille Fields a été attribuée en août dernier à Stanislav Smirnov (« Stas » étant le diminutif couramment employé de son prénom) pour ses preuves de l'invariance conforme de deux des modèles probabilistes les plus fameux issus de la mécanique statistique, la percolation et le modèle d'Ising. Ceci n'a aucunement surpris les spécialistes de ces thématiques, tant ces deux résultats ont eu un retentissement et une influence considérables.

La formation de Stanislav Smirnov porte le sceau de l'extraordinaire école d'analyse de St-Petersbourg : il a grandi dans cette ville (alors Leningrad), y est allé dans une des fameuses classes d'élites au lycée, et y a poursuivi ses études à l'université, où il a effectué ses premiers pas en recherche sous la direction de Victor Havin dont le séminaire a joué un rôle extrêmement stimulant pour de nombreux étudiants. Il a ensuite effectué sa thèse aux États-Unis (à Caltech) sous la direction de Nikolai Makarov (lui-même ancien étudiant de Nikolskii, qui avait été formé par ... Havin) sur l'analyse spectrale des ensembles de Julia. Après un post-doctorat à Yale (où il a collaboré avec Peter Jones) il a pris un poste permanent au KTH de Stockholm en 1998, où il avait aussi de nombreux interlocuteurs naturels. Il y a par exemple initié une importante série d'articles en collaboration avec Jacek Graczyk. Tous ces remarquables premiers travaux portaient sur des questions d'analyse et de dynamique complexe, et mériteraient une description plus détaillée. C'est aussi à Stockholm qu'il a sérieusement commencé à s'attaquer à des problèmes de nature probabiliste. Il est, depuis maintenant sept ans, professeur à l'université de Genève.

Invariance conforme de la percolation critique

Vers le début des années 1990, le physicien théoricien britannique John Cardy, en utilisant des arguments reposant sur idées de Belavin, Polyakov et Zamolodchikov, et plus précisément sur les symétries conformes des théories des champs supposées être reliées à ces modèles particuliers, a pu proposer une formule explicite pour décrire la limite de la probabilité de croisement d'un domaine pour la percolation critique. Essayons de tout de suite décrire concrètement ce dont il s'agit, sans expliquer en quoi c'est une question centrale pour la thématique.

Considérons le réseau en nid d'abeille dans le plan. Pour chaque cellule hexagonale, on tire à pile ou face pour choisir sa couleur. Avec probabilité $1/2$ elle est bleue, et sinon (et donc aussi avec probabilité $1/2$) elle est jaune (ce sont les deux couleurs utilisées par Stanislav dans son article, sans doute pour rendre hommage à la Suède et à Lennart Carleson avec lequel il avait discuté de ces questions). On s'intéresse à l'existence de longs chemins monocolores (constitués par exemple uniquement de cellules bleues).

Commençons par le cas où le domaine du plan que l'on considère est le rectangle $R_L = (0, L) \times (0, 1)$. Choisissons dans le réseau en nid d'abeille de maille ε une approximation du rectangle, et définissons la probabilité $p_\varepsilon(L)$ pour qu'il y existe un

[1] Université Paris-Sud.

chemin bleu reliant le bord gauche et le bord droit du rectangle, si l'on y effectue une percolation critique. La question est alors d'identifier la limite de $p_\varepsilon(L)$ lorsque $\varepsilon \to 0$ (et avant cela, de montrer que cette limite existe...).

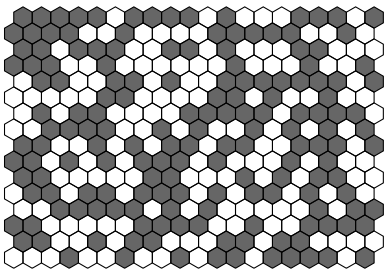


FIG. 1. Un croisement horizontal de R_L

Plus généralement, lorsque D est un domaine simplement connexe plan, dont le bord est lisse sur lequel on choisit deux arcs disjoints d_1 et d_2, on peut s'intéresser au comportement limite lorsque $\varepsilon \to 0$ de la probabilité $p_\varepsilon(d_1 \leftrightarrow d_2; D)$ pour qu'il existe un croisement bleu de d_1 à d_2 pour une percolation dans une approximation de D sur le réseau de maille ε.

En 2001, Stanislav Smirnov a démontré les prédictions de Cardy : les quantités $p_\varepsilon(\cdot)$ ont bien des limites lorsque $\varepsilon \to 0$, dont les valeurs peuvent être explicitement décrites, et en outre, ces limites sont invariantes conformes. Ceci signifie que s'il existe une transformation conforme Φ qui envoie D sur le rectangle $(0, L) \times (0, 1)$ de sorte que d_1 et d_2 soient envoyés sur les bords verticaux du rectangle, alors les limites de $p_\varepsilon(d_1 \leftrightarrow d_2; D)$ et $p_\varepsilon(L)$ sont égales.

Le plus remarquable dans ce résultat n'est pas la formule explicite elle-même, mais plutôt le fait que ces limites de probabilités de croisement sont bien des fonctionnelles invariantes conformes. La preuve utilise une simple propriété de nature combinatoire, que Smirnov arrive à transformer en une (presque)-analyticité discrète des probabilités de croisement convenablement généralisées (pour obtenir une fonction complexe d'une variable elle-même complexe – on peut noter que contrairement au cas du modèle d'Ising que nous allons décrire ci-après, les objets discrets ne sont pas exactement analytiques dans le cas de la percolation), de sorte que l'invariance conforme fait elle-même déjà partie intégrante de la preuve.

La preuve est essentiellement contenue dans une note aux comptes-rendus de l'Académie des Sciences, en moins de six pages d'une grande pureté et élégance. Ce petit bijou avait valu à Smirnov plusieurs prix dont le Clay Research Award en 2001.

Invariance conforme du modèle d'Ising

Le modèle d'Ising est sans doute le plus fameux des modèles de physique statistique sur réseau. Il s'agit là encore de colorier au hasard une portion d'un réseau plan, en choisissant pour chaque site du réseau, une couleur parmi deux possibles (cette couleur est plus communément appelée « spin » dans ce contexte), mais

cette fois-ci, les couleurs des différents sites ne sont plus choisies indépendamment les unes des autres. Prenons pour fixer les idées le réseau carré $\mathbb{Z}^2$, où chaque site a quatre voisins (mais les résultats démontrés par Dmitry Chelkak et Smirnov sont valables pour une classe large de réseaux réguliers, voir [2], contrairement au cas de la percolation critique où pour l'instant la formule de Cardy reste une conjecture pour les réseaux autres que celui que nous avons décrit plus haut). Le modèle d'Ising a été introduit pour modéliser le ferro-magnétisme : intuitivement, on peut le décrire en disant que deux sites voisins n'aiment pas être en désaccord. La probabilité d'une configuration (i.e., d'un coloriage) dans un domaine donné sera d'autant plus grande que le nombre N de voisins (dans l'ensemble des paires de voisins) qui sont en désaccord est petite. Les configurations les plus probables sont ainsi celles où tous les spins sont alignés (« tout le monde est d'accord »). Le modèle est décrit par un paramètre x dans $(0,1)$ qui mesure cette pénalisation donnée aux désaccords (essentiellement, la probabilité d'un coloriage sera x^N, modulo une constante de renormalisation pour qu'il s'agisse bien d'une loi de probabilité). Ainsi, la probabilité d'une configuration avec 6 paires de voisins en désaccord sera égal à x^6 fois la probabilité d'une configuration où tout le monde est d'accord. Il se trouve qu'une valeur x_c de x (appelée la valeur critique) joue un rôle tout à fait particulier. Lorsque $x < x_c$, le système est essentiellement ordonné à grande échelle, et choisira une opinion clairement majoritaire (car on pénalise beaucoup les désaccords) alors que lorsque $x > x_c$, le système sera désordonné et devrait de loin ressembler à la percolation précédemment décrite. On s'intéresse alors au comportement du système lorsque $x = x_c$.

Dans le contexte du modèle d'Ising, les quantités les plus intéressantes du point de vue physique ne sont pas de type « probabilités d'existence de chemins », mais plutôt du type « corrélation entre spins » : dans une approximation sur réseau d'un domaine D, quel est le comportement asymptotique de la probabilité pour que deux sites (éloignés) y et z aient le même spin ? Ce type de question peut souvent cependant être reformulé en termes d'existence de connexions entre y et z pour des modèles reliés, et s'avère finalement être assez proche de celui dont nous venons de parler pour la percolation. En fait, le modèle de la percolation précédemment décrit est aussi un modèle critique (le paramètre p que l'on pourrait faire varier est la probabilité pour qu'une cellule soit bleue, et la valeur $p = 1/2$ s'avère alors critique).

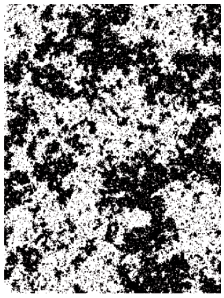


FIG. 2. Une configuration du modèle d'Ising critique

Smirnov (en partie avec Chelkak) a montré [8, 3] que dans le cas du modèle d'Ising critique, il est possible de construire des quantités (en fait des moyennes d'observables à valeurs dans $\mathbb{C}$) dont la dépendance en un site est exactement analytique discrète (ce qui relie ces questions aux systèmes intégrables). Ceci permet ensuite de contrôler le passage à la limite continue (lorsque la maille du réseau tend vers 0), et de démontrer ainsi l'invariance conforme asymptotique de ces observables. Ils en déduisent des réponses complètes, limpides et précises à des questions étudiées par les physiciens (on pense bien sûr entre autres à Lars Onsager, mais il y a une abondante littérature de premier plan sur ces sujets) depuis maintenant plus de soixante ans (voir aussi [4]).

Travaux reliés

Les processus SLE introduits par Oded Schramm en 1999 permettent d'effectuer directement des calculs pour certaines courbes aléatoires définies dans le plan complexe (et non sur des réseaux), dont il avait conjecturé qu'elles étaient les limites (lorsque la maille du réseau tend vers 0) des interfaces pour de nombreux modèles issus de la physique statistique. Les travaux de Smirnov prouvent ces conjectures dans les deux cas ci-dessus (voir aussi [5]). Ceci permet alors d'utiliser les calculs effectués dans le cadre des processus SLE pour en déduire des résultats sur ces deux modèles discrets. On peut en fait dire que la combinaison de l'invariance conforme prouvée par Smirnov et l'utilisation des processus de Schramm donne une description complète de la percolation et du modèle d'Ising. Le cas de la limite de la percolation critique est par exemple traité dans le preprint de Schramm et Smirnov [6].

La percolation (sur le réseau décrit ci-dessus) et le modèle d'Ising, avec les arbres couvrants (qui avaient été étudiés en particulier par Richard Kenyon) jouent un rôle singulier. À ce jour, ce sont quasiment les seuls pour lesquels l'invariance conforme asymptotique du modèle discret a pu être prouvée. Néanmoins, les idées développées par Smirnov permettent de démontrer d'autres résultats étonnants pour certains autres modèles naturels. Par exemple, avec Hugo Duminil-Copin, Smirnov a récemment pu prouver (voir [1]) une conjecture fameuse de Bernhard Nienhuis sur le comportement asymptotique du nombre de longs chemins auto-évitants que l'on peut tracer sur le réseau hexagonal (le résultat stipule que si l'on fixe le point de départ, le nombre de chemins auto-évitants de longueur n croît comme $\lambda^{n+o(n)}$, où $\lambda = \sqrt{2+\sqrt{2}}$).

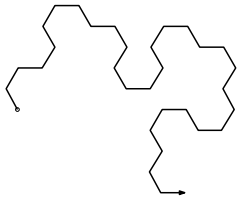


FIG. 3. Un chemin auto-évitant de longueur 31 sur le réseau hexagonal

Une excellente introduction aux travaux que nous venons de brièvement décrire est sans doute le papier [9] que Smirnov a lui-même écrit pour l'ICM d'Hyderabad. Son titre *Discrete complex analysis and probability* résume le coœur de ses travaux : identifier dans les modèles probabilistes sur réseau issus de la physique, des structures d'analyse complexe discrète, qui permettent de contrôler en profondeur le si mystérieux passage à la limite du discret au continu dans ces cas.

Références

[1] H. Duminil-Copin, S. Smirnov, The connective constant of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, 2010, preprint.
[2] D. Chelkak, S. Smirnov, Universality in the 2D Ising model and conformal invariance of fermionic observables, Inv. Math., à paraître.
[3] D. Chelkak, S. Smirnov (2010), Conformal invariance of the 2D Ising model at criticality, preprint.
[4] C. Hongler, S. Smirnov (2010), Energy density in the 2D Ising model, preprint.
[5] A. Kemppainen, S. Smirnov (2010), Random curves, scaling limits and Loewner evolutions, preprint.
[6] O. Schramm, S. Smirnov (2010), On the scaling limits of planar percolation, preprint.
[7] S. Smirnov (2001), Critical percolation in the plane : conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **333**, 239-244.
[8] S. Smirnov (2010), Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model, Ann. Math. **172**, 1435-1469.
[9] S. Smirnov, Discrete complex analysis and probability, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM), Hyderabad, India, 2010, à paraître.

La rentrée 2010 après l'ICM

Guy Métivier

Les succès français à l'ICM ont eu un écho considérable dans les media nationaux : sujets dans les journaux télévisés des grandes chaînes, nombreux articles de presse, communiqués de presse des plus hautes autorités. Le travail de préparation de nombreux acteurs, sociétés savantes, IHES, INSMI[1], laboratoires et établissements concernés, a manifestement payé. Il faut remercier toutes celles et tous ceux qui ont participé à ce travail de communication. Les articles titrant sur l'excellence et la compétitivité des mathématiques françaises au niveau international ont à coup sûr permis de faire passer auprès du grand public un message positif sur nos performances. Cela dit, si on entre dans les détails, on peut être plus critique en relevant quelques propos tronqués ou déformés, mais comme d'habitude dirai-je. Il va s'agir maintenant de dépasser l'événement et de voir comment utiliser le capital réel de sympathie manifesté dans les media pour faire avancer nos projets.

J'ai relevé trois types de questions posées par les journalistes : sur les lauréats eux-mêmes, sur les raisons de la performance de l'école française, et sur l'impact des évolutions structurelles en cours. J'ai été surpris d'avoir peu de questions, et encore moins de relais, sur les résultats des lauréats (jugés a priori trop abstraits) ou sur la recherche mathématique elle-même (avec souvent une ignorance profonde de l'impact des mathématiques sur la société). Malgré tous les efforts des organisateurs du colloque Maths à Venir, il reste donc beaucoup à faire pour diffuser dans un public plus large les messages de cette manifestation. Concernant les lauréats, on ne peut bien sûr que louer leurs qualités exceptionnelles, et les féliciter ici à nouveau. L'analyse de la réussite des mathématiques françaises – qui ne se mesure pas uniquement au nombre de médailles comme il a été fréquemment rappelé – s'appuie, d'une part, sur l'existence d'une tradition forte et d'une école présente dans tous les domaines de la discipline, et, d'autre part, sur la qualité du système de formation des meilleurs étudiants. Dans les réponses aux questions, l'accent a été mis sur des spécificités comme les classes préparatoires, les écoles normales supérieures, le recrutement précoce sur des postes permanents de chercheurs, l'existence d'un vivier de laboratoires de qualité pour l'accueil et la formation des jeunes. Un autre thème de question récurrent est la pérennité de la réussite des mathématiques françaises, avec un amalgame de problèmes divers, comme la désaffection des jeunes pour les études scientifiques, le recul des mathématiques dans les programmes des classes secondaires et préparatoires, le retard au recrutement des chercheurs avec la systématisation et l'allongement des post-doc, les changements de l'organisation et du financement du système de recherche. Sur ces questions, j'ai préféré dire que, plutôt que d'être inquiet, il fallait être vigilant pour maintenir les points essentiels de notre système de formation et prendre acte des évolutions pour adapter notre communauté à la fois aux modifications structurelles nationales, aux changements du paysage mondial

[1] Institut National des Sciences Mathématiques et de leurs Interactions.

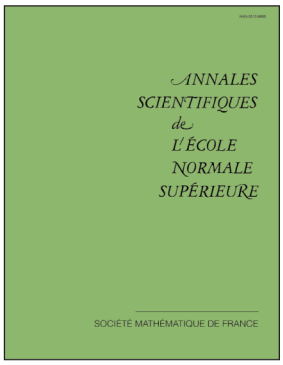
des mathématiques, et aux évolutions de notre discipline.

Je conclurai par quelques réflexions sur les dossiers de cette rentrée 2010. Sur le plan des institutions, la position de l'INSMI est maintenant claire : créé comme un des dix instituts du CNRS, l'INSMI est officiellement nanti, par arrêté du 28 juin 2010, d'une mission nationale d'animation et de coordination pour l'ensemble de la recherche mathématique française. Ce nouveau statut n'est en aucun cas un repli des mathématiques sur elles-mêmes, mais, au contraire, il doit nous donner une visibilité qui facilitera l'ouverture de notre institut sur l'extérieur. Je rappelle, si besoin est, que l'INSMI est un institut interne au CNRS, la stratégie suivie depuis plusieurs années étant d'ancrer les mathématiques dans le CNRS, et, corrélativement, de faire que le CNRS prenne à son compte la coordination nationale des mathématiques. Notre position dans le CNRS doit en particulier favoriser notre politique d'ouverture pluridisciplinaire. Bien entendu, ces questions de positionnement doivent se traduire de façon concrète, et nous travaillons avec tous les acteurs concernés, dont les sociétés savantes, sur plusieurs grands sujets : centres de rencontres, réseau mathématiques-entreprises, documentation, relations internationales, promotion des mathématiques... Une de nos préoccupations est de dégager les moyens nécessaires au développement de ces projets nationaux.

Autre point de préoccupation en cette rentrée, la réponse aux appels d'offre « investissements d'avenir » (ex grand emprunt). Notre objectif, en particulier pour l'appel d'offre « laboratoires d'excellence, » est d'aider à ce que les mathématiques soient fortement présentes dans les dossiers déposés (et aussi dans ceux qui seront retenus !). Pour le moment, il semble qu'il y aura une quinzaine de projets de laboratoires d'excellence auxquels une trentaine de laboratoires de mathématiques vont participer, projets assez bien différenciés et adaptés aux situations locales. Plusieurs commentaires : d'abord les discussions ont montré la nécessité pour les laboratoires d'inscrire leur politique dans celle de leur(s) université(s) de rattachement, ce qui en a conduit pas mal à chercher des synergies locales avec d'autres laboratoires. Ce n'est pas toujours simple, mais l'autonomie des établissements donne à ceux-ci ce pouvoir de faire passer leur politique de site avant les politiques propres des laboratoires. Notre rôle est d'expliquer qu'il n'y a pas de bons laboratoires de mathématiques isolés, qu'un bon laboratoire de mathématiques doit être intégré au réseau national (et international) avec lequel il doit communiquer et échanger, sans parler des autres interactions bien entendu. Par ailleurs, on voit clairement émerger des « grands sites universitaires » provenant de regroupements d'universités ou de renforcements de PRES, et incluant de plus en plus d'écoles d'ingénieurs. Ceci conduira à repenser la structuration des mathématiques sur certains de ces sites pour y rendre plus visible l'interlocuteur « mathématiques ». À côté de cela, nous ne devons pas non plus perdre de vue la quinzaine d'UMR et les équipes d'accueil non attachées au CNRS qui ne vont pas participer directement aux projets du grand emprunt. Ces équipes doivent continuer à occuper leur place dans le réseau. Nous les défendrons bien sûr auprès de leur université, mais, là encore, un travail de structuration nous attend. Une piste sera d'en associer un certain nombre aux laboratoires, par exemple par le biais de fédérations.

Dans tous les cas (missions nationales ou opérations du grand emprunt), on voit bien que nous devrons adapter notre organisation aux évolutions en cours et nous devrons veiller plus particulièrement au bon fonctionnement de tout ce qui est d'intérêt collectif ou qui sert à l'animation du réseau national des mathématiciens.

Encore une fois, je félicite les lauréats des prix de l'IMU et les conférenciers invités de l'ICM. Nous devons maintenant agir tous ensemble pour renforcer l'organisation des mathématiques françaises et l'adapter aux nouveaux contextes.



Annales de l'ÉNS

Tome 43 - fascicule 4

2010

Huayi Chen
Arithmetic Fujita approximation

Florent Balacheff, Stéphane Sabourau
Diastolic and isoperimetric inequalities on surfaces

Jun-Muk Hwang
Equivalence problem for minimal rational curves with isotrivial varieties of minimal rational tangents

Carel Faber, Sergey Shadrin, Dimitri Zvonkine
Tautological relations and the r-spin Witten conjecture

Eric Lombardi, Laurent Stolovitch
Normal forms of analytic perturbations of quasihomogeneous vector fields: Rigidity, invariant analytic sets and exponentially small approximation

prix public* : 70 € - prix membre* : 70 €
* frais de port non compris

Revue disponible par abonnement : Europe : 320 € - hors Europe : 350 €

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

INFORMATIONS

Quelques données chiffrées sur l'attribution des PES 2009 en mathématiques

Bernard Helffer

Le document suivant concernant l'attribution de la Prime d'Excellence Scientifique (PES) en 2009 a été réalisé à partir de données recueillies auprès du MESR (Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche) pour permettre au départ la réflexion du bureau de la SMF. Même si ce document ne permet pas une analyse complète, il nous a semblé important de diffuser cette information « brute » aux lecteurs de la *Gazette*. Cette analyse devrait être poursuivie par d'autres moyens, en particulier parce qu'elle ne prend en compte que les établissements ayant choisi le recours à l'évaluation par la commission nationale. Nous rappelons (voir la *Gazette* de juillet) que l'INSMI a attribué 15 PES en 2009 (1 Chargé de Recherches et 14 Directeurs de Recherche), ces bénéficiaires étant uniquement des titulaires de médailles du CNRS ou de certains prix. Nous rappelons aussi que, pour ce qui concerne les mathématiques, seules Aix-Marseille 2 et Paris 6 ont décidé de ne pas avoir recours à l'évaluation nationale.

Il y avait 578 candidats en mathématiques : 2 DR, 260 PR et 316 MCF ; 250 en 25^{e} section et 228 en 26^{e}. Ce tableau fournit, pour chaque établissement, le nombre de primes accordées ou refusées par l'établissement, à partir du classement effectué par la commission nationale qui avait conduit à 110 classés A, 176 classés B et 292 classés C. Les établissements ayant refusé le classement national n'apparaissent donc pas dans ce tableau.

Résultats globaux :

106 classés A ont eu la prime et 4 ne l'ont pas eue (1 PR et 3 MCF ; 2 en 25^{e} et 2 en 26^{e}) ; 38 classés B n'ont pas eu la prime (11 PR et 27 MCF ; 19 en 25^{e} et 19 en 26^{e}) et 138 l'ont eue (75 PR et 63 MCF ; 43 en 25^{e} et 95 en 26^{e}) ; 284 classés C n'ont pas eu la prime et 8 ont eu la prime (6 PR et 2 MCF ; 2 en 25^{e} et 6 en 26^{e}).

Voici maintenant le détail des résultats classés par établissements. Le tableau qui suit utilise les conventions suivantes : les lettres A, B ou C désignent la note globale attribuée par la commission nationale ; les lettres P ou R désignent respectivement les primes accordées ou refusées. Sont indiqués en italique les établissements attribuant moins de primes que ne le laissait supposer le classement national et en gras les établissements en attribuant plus.

Etablissement	AR ou BR	AP ou CR	CP ou BP
U Aix-Marseille1	3	15	3
U Aix-Marseille 3	3	2	0
U Amiens	1	5	1
U Angers	1	5	0
U Antilles-Guyanne	0	2	2
IUFM Antilles	0	1	0
U Artois	0	1	0
U Avignon	0	4	2
U Besançon	0	10	2
Besançon ENS	0	2	0
U Bordeaux 1	0	6	12
U Bordeaux 2	0	1	2
U Bordeaux 4	0	1	0
Bordeaux IP	0	0	1
U Brest	1	5	1
U Bretagne Sud	0	5	2
ENS Cachan	0	2	1
U Caen	4	6	0
U Cergy-Pontoise	1	3	1
U Chambéry	0	3	0
U Clermont-Ferrand 2	0	14	2
UTC Compiègne	0	1	1
U Dijon	0	4	3
U Evry	1	1	0
Evry ENSIE	1	1	0
U Grenoble 1	2	9	4
U Grenoble 2	0	2	0
Grenoble INP	0	0	4
U Le Havre	0	2	0
U Le Mans	0	2	1
U La Réunion	0	2	1
U La Rochelle	0	3	0
U Lille 1	0	19	9
U Limoges	0	2	1
U Littoral	0	2	2
U Lyon 1	0	17	8
Lyon Ecole Centrale	0	1	1
Lyon ENS	0	2	1
Lyon INSA	0	0	1
Lyon INRP	0	0	1
U Marne la Vallée	0	6	1
U Metz	0	4	1
U Montpellier 2	0	14	7
U Montpellier 3	0	0	1
U Mulhouse	0	0	1
U Nancy 1	0	5	8
U Nancy 2	0	1	0
Nancy INP	0	2	0
Nîmes CUFR	0	0	1
U Nantes	2	8	0
Nantes EC	0	1	0
U Nice	0	4	2

Etablissement	AR ou BR	AP ou CR	CP ou BP
U Nouvelle Calédonie	0	1	0
U Orléans	3	6	2
U Paris 1	1	2	3
U Paris 2	0	1	0
U Paris 5	0	6	1
U Paris 7	4	14	6
U Paris 8	0	0	1
U Paris 9	0	7	5
U Paris 10	0	2	2
U Paris 11	4	26	1
U Paris 12	0	6	0
U Paris 13	1	10	3
Paris CNAM	0	1	0
Paris EC	0	0	1
Paris EHESS	0	2	0
U Pau	2	7	3
U Perpignan	0	2	0
U Poitiers	1	3	1
U Polynésie	0	1	0
U Reims	2	2	0
U Rennes 1	1	7	2
U Rennes 2	1	3	0
Rennes INSA	0	3	0
U Rouen	1	8	0
Rouen INSA	0	1	1
U Saint-Etienne	0	3	1
U Strasbourg	1	10	5
U Toulon	0	4	3
U Toulouse 2	0	3	0
U Toulouse 3	0	17	9
Toulouse INP	0	2	0
Toulouse INSA	0	6	1
U Tours	0	4	3
U Valenciennes	0	3	0
U Versailles-St-Quentin	1	8	0

Je remercie Valérie Girardin qui a assuré le traitement des données.

L'institut Africain des Sciences Mathématiques AIMS-Sénégal

Vincent Rivasseau[1]

Un nouvel élan est nécessaire pour mettre en valeur les immenses ressources humaines et matérielles de l'Afrique, continent qui rassemblera environ le quart des jeunes de la planète d'ici trente ans. Le choix de développer la science la plus avancée possible en Afrique est crucial. Les pays africains trouveront ainsi à former et à stabiliser chez eux des cadres compétents pour développer leur économie, leurs services publics et résoudre durablement les défis de la nutrition, de l'éducation, de la santé, de l'urbanisation et de la préservation de l'environnement. Le reste du monde ne peut se tenir à l'écart de cet effort. Il doit investir rapidement et massivement dans cette direction afin d'accompagner et d'accélérer cette évolution de l'Afrique vers la science et la technologie, qui permettra d'éviter les très grands dangers liés aux déséquilibres actuels et d'atteindre au plus vite un équilibre plus juste et plus sûr pour l'ensemble de la planète.

L'initiative AIMS est née de ces considérations, et de la vision et de la volonté exceptionnelles d'un cosmologue sud-africain, Neil Turok. Sa famille, associée très étroitement dès le début à la lutte anti-apartheid de Nelson Mandela, s'est trouvée à l'arrivée de la démocratie en Afrique du Sud en position de l'aider à réaliser un plan à la fois ambitieux et réaliste visant à accélérer le développement scientifique de l'Afrique. Ce plan, à l'initiative AIMS, propose, à partir du modèle d'un premier institut prototype situé à Muizenberg, près du Cap, de créer en Afrique d'ici 2020 un réseau d'une quinzaine d'instituts scientifiques étroitement connectés entre eux. Ce réseau formera chaque année des centaines d'étudiants africains au niveau master dans des conditions équivalentes aux meilleures conditions rencontrées en Europe ou en Amérique du Nord. Certains de ces instituts comporteront aussi des centres de recherche à thèmes, comme c'est déjà le cas à Muizenberg.

L'initiative AIMS est unique par sa vision panafricaine associant enseignement et recherche de haut niveau avec un curriculum à spectre large et une pédagogie innovante mettant l'accent sur la réflexion et la pensée critique. Les étudiants et les (nombreuses...) étudiantes bénéficient tous d'une prise en charge complète sous forme d'une bourse d'études. AIMS est donc loin du modèle anglo-saxon d'études universitaires payantes ! Ils bénéficient aussi d'un accès permanent à l'informatique et à internet, et d'une interaction étroite avec des tuteurs à temps plein et d'excellents professeurs bénévoles venus du monde entier. Cette initiative est également unique parce qu'elle est née et se nourrit de la réflexion de la communauté scientifique internationale, et parce qu'elle est gérée avec rigueur et pragmatisme. Elle a ainsi tous les atouts pour devenir au cours des prochaines années le programme international le plus visible et le plus cohérent en Afrique dans les sciences mathématiques et leurs applications, entendues au sens très large de la Renaissance, c'est-à-dire allant des mathématiques ou de la physique pure jusqu'aux sciences médicales ou économiques.

[1] Professeur de physique mathématique, université Paris-Sud, Président de l'Association pour la Promotion Scientifique de l'Afrique.

Un tel réseau d'instituts n'est bien entendu pas le concurrent mais bien le complément des universités africaines, qui accomplissent leur travail dans des conditions très difficiles pour permettre l'accès d'une fraction croissante de la population africaine à l'enseignement supérieur. Chaque institut, pour recevoir le label AIMS, devra satisfaire à une série de critères exigeants, dont le premier est de travailler en étroite coopération avec les universités locales et d'accepter le caractère panafricain du recrutement.

J'ai eu la chance et le privilège d'être étroitement associé à l'institut AIMS de Muizenberg dès sa création. J'y ai vécu les plus belles heures d'enseignement de ma vie. La petite taille de l'institut, l'ambiance familiale et chaleureuse dans laquelle les tuteurs et les professeurs partagent les repas et bien des aspects de la vie d'une cinquantaine d'étudiants venus de vingt à trente pays différents de toute l'Afrique, y créent une ambiance unique. Il n'est pas rare que les discussions se prolongent tard dans la nuit sur tous les aspects des cours avant de regagner nos chambres. Ce climat informel est particulièrement exceptionnel en Afrique. La venue des plus grands scientifiques mondiaux, comme par exemple l'unique visite en Afrique du Professeur Hawking, à AIMS en 2008, y crée un enthousiasme difficile à décrire à nos milieux scientifiques européens plus blasés. Comment ne pas avoir par ailleurs le cœur brisé lors du récit par tel étudiant rwandais du massacre de sa famille, et de son désir de surmonter un tel drame en se consacrant à la science ? De telles expériences changent votre vie à jamais. C'est aussi une étudiante de l'institut qui a un jour exprimé le vœu que « le prochain Einstein soit africain », vœu largement repris par Neil Turok, et qui, peut-être dans une certaine naïveté voulue, est capable d'être compris et de toucher le cœur de tous.

Des étudiants à Aims au Cap

Année après année j'ai pu constater combien les étudiants francophones, nombreux dans cet institut, semblaient particulièrement bien formés, notamment ceux venus de pays relativement proches comme le Cameroun ou Madagascar. La

générosité de Neil Turok et du premier directeur de l'institut, Fritz Hahne, m'ont permis de visiter, aux frais de AIMS, d'autres universités africaines comme par exemple celle d'Abomey-Calawi au Bénin, d'y donner les premiers cours de théorie quantique des champs, d'y rencontrer d'autres étudiants et professeurs africains exceptionnels mais bien isolés.

Ce sont toutes ces expériences inoubliables qui ont amené en 2008 à la fondation de l'Association pour la Promotion Scientifique de l'Afrique. Cette association, encore toute jeune par la taille, est déjà soutenue par de grands noms de la science française. Elle se veut, à terme, un forum, un lieu d'information et d'action pour toutes les bonnes volontés décidées à aider au développement de tous les champs scientifiques en Afrique. Ce fut pour le petit noyau fondateur un choix risqué d'ouvrir cette association à tous, même aux non-scientifiques. L'avenir dira si nous avons eu raison. Ce choix provient en tout cas de notre conviction que le développement scientifique de l'Afrique sera en définitive dans les prochaines décennies une trop grande cause pour la limiter aux seuls spécialistes. Nous sommes prêts à accueillir une certaine contribution du grand public à cette cause, comme c'est le cas pour certains aspects de la recherche médicale par exemple.

La première action de l'APSA a consisté à concevoir avec le Professeur Mamadou Sanghare, de l'université de Dakar, un institut du même type que celui d'Afrique du Sud, mais situé cette fois au Sénégal, au cœur de l'Afrique de l'ouest subsaharienne et francophone. L'expérience, le soutien enthousiaste et efficace de Neil Turok sont notre premier atout dans cette entreprise.

L'institut du Sénégal, lui aussi innovant, ne sera pas la simple copie de celui du Cap, car les étudiants devraient y rester deux années au lieu d'une. Il devrait par contre partager avec ce dernier d'être bien financé, bien géré et très bien relié à la communauté scientifique internationale en mathématiques et sciences exactes. Nous espérons qu'il deviendra au fil des ans un nœud clé du réseau AIMS. Mamadou Sanghare, algébriste formé au Maroc, a fondé l'école de cryptographie et l'école doctorale de mathématiques du Sénégal. Il allie à son excellente connaissance du Sénégal et des mathématiques africaines une grande finesse et une grande chaleur humaine. L'institut AIMS-Sénégal va certainement prospérer sous sa direction éclairée.

L'institut AIMS-Sénégal devrait ouvrir ses portes à la rentrée 2011 pour une première promotion encore modeste d'une trentaine d'étudiants. Mais AIMS-Sénégal comportera assez rapidement, dès 2013 nous l'espérons, un centre de recherches associé avec des programmes à thèmes, qui fonctionnera un peu comme l'institut Émile Borel en France, en plus modeste bien sûr, mais avec une ouverture thématique plus large inspirée par les besoins particuliers de l'Afrique et de son développement.

La construction de l'institut devrait commencer dès ce mois de novembre 2010 sur le site écologique de l'Institut de Recherche pour le Développement (IRD) à MBour, à quelques 80 km au sud de Dakar, grâce en particulier au dynamisme de Michel Laurent, président de l'IRD, et de l'équipe IRD au Sénégal. Ce site soigneusement sélectionné offre des atouts exceptionnels. Il est plus proche que Dakar du futur aéroport international Blaise Diagne et de sa future zone industrielle à Ndass, dont l'ouverture est annoncée à la fin 2011. L'institut est aussi la locomotive d'un projet ambitieux de campus scientifique international, le CIREM, qui sous l'égide

de l'IRD et en collaboration avec l'université Cheikh Anta Diop de Dakar, l'Union internationale pour la conservation de la nature et l'Académie des Sciences du Sénégal devrait devenir à terme un centre très visible de l'Afrique de l'ouest pour la science et le développement durable.

La réserve écologique de MBour

L'institut AIMS-Sénégal est sur le plan légal une fondation de droit sénégalais créée en janvier 2010. Son premier bâtiment et ses premières années de fonctionnement sont déjà financés, tout d'abord grâce à la générosité de nos deux mécènes fondateurs, Daniel Iagolnitzer et *Kavelmann & Fonn*, puis grâce à des subventions tout à fait exceptionnelles du Sénégal et du Canada, ainsi que de la compagnie Google. L'institut AIMS-Sénégal est en particulier un projet scientifique prioritaire du président du Sénégal et de son gouvernement, qui lui ont alloué dès cette année un million d'euros. C'est à l'échelle de ce pays un très grand acte de foi en la science et l'avenir. Nous avons désormais le devoir de réussir. Nous devons ces engagements aussi à tous les soutiens scientifiques de l'institut. Parmi ses premiers parrains figurent plusieurs prix Nobel ; je voudrais ne citer que Klaus von Klitzing dont la venue l'an dernier à Dakar a été très utile, et Françoise Barré-Sinoussi, codécouvreur du virus du sida, dont l'engagement en Afrique est exemplaire. En France et dans le secteur des mathématiques, des membres de notre communauté tels Jean-Pierre Bourguignon, Alain Connes, Maxime Kontsevich ou Cédric Villani, pour ne citer que les plus connus, soutiennent activement le programme AIMS et l'institut AIMS-Sénégal.

Le Canada s'est engagé en juillet 2010 par la voix de son premier ministre à financer à hauteur de quinze millions d'euros dans les quatre prochaines années la création de trois nouveaux instituts AIMS, au Sénégal, au Ghana et en Éthiopie. AIMS-Sénégal est le plus avancé des trois et devrait ouvrir en premier. La France, par l'intermédiaire du MESR, finance également dès cette année l'institut AIMS-Sénégal, à un niveau beaucoup plus modeste que le Canada ou le Sénégal, mais qui, je l'espère, ira croissant.

La qualité scientifique des programmes de l'institut et la sélection des étudiants seront assurés par un partenariat universitaire original qui associe l'ensemble des

universités publiques du Sénégal, l'Ecole Normale supérieure et les universités de Paris VI et de Paris XI en France, et l'université d'Ottawa au Canada. Plusieurs autres universités devraient dans un futur proche rejoindre ce partenariat et compléter l'ouverture internationale de l'institut.

L'ensemble des universités et institutions françaises de recherche est invité très chaleureusement à faire connaître l'institut AIMS-Sénégal et le réseau AIMS, et à les aider dans leur fonctionnement et leur recherche de financements. Elles peuvent notamment encourager leurs enseignants-chercheurs ou chercheurs à participer aux enseignements et programmes de recherche d'AIMS en comptabilisant dans la mesure du possible ces enseignements dans leur service, sur la base du volontariat. Elles seront naturellement bien placées pour accueillir des étudiants ainsi formés dans leurs programmes doctoraux. Il est cependant bien entendu que l'esprit du programme AIMS consiste à former le plus possible d'Africains à un très bon niveau scientifique international afin que ceux-ci exercent leurs activités en Afrique ou restent sous une forme ou une autre au service de ce continent.

L'institut AIMS-Sénégal travaillera aussi avec toutes les associations et institutions françaises et étrangères qui, souvent de longue date, développent les sciences et la coopération universitaire avec l'Afrique. Dans le secteur des mathématiques je pense plus particulièrement en France au CIMPA (Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées) et à des programmes ou réseaux tels que SARIMA (Soutien aux Activités de Recherche en Informatique et Mathématique en Afrique), RAGAAD (Réseau Africain de Géométrie et Algèbre Appliquées au Développement), STAFAV (Statistiques pour l'Afrique Francophone et Applications au Vivant), et à tous les mathématiciens français engagés dans la coopération avec l'Afrique. C'est en grande partie grâce à leurs patients efforts durant des décennies que le terreau existe aujourd'hui pour l'institut AIMS-Sénégal.

Le décollage scientifique de l'Afrique est une tâche essentielle de notre génération. Le programme AIMS peut dans ce but jouer un rôle majeur. Tous les mathématiciens et scientifiques français ne peuvent aller enseigner sur le terrain en Afrique mais tous ensemble nous pouvons contribuer au succès de AIMS-Sénégal et du réseau AIMS au cours des prochaines années. Et pourquoi ne pas rejoindre l'APSA ? C'est possible pour trente euros (dont vingt fiscalement déductibles) en trois clics de souris sur le site `www.scienceafrique.fr/2.html` !

Sites web

AIMS-Sénégal : `http://www.aims-senegal.sn`
CIREM : `http://www.cirem.sn`
APSA : `http://www.scienceafrique.fr`
AIMS : www.nexteinstein.org, www.aims.ac.za

Le prix Fermat 2009 décerné à Elon Lindenstrauss et Cedric Villani

La cérémonie de remise du prix Fermat 2009 s'est tenue le 10 mai 2010 au Conseil Régional Midi-Pyrénées, à Toulouse, en présence des lauréats, Elon Lindenstrauss (Hebrew University of Jerusalem/Princeton University) et Cédric Villani (ÉNS Lyon).

Créé en 1987 à l'initiative de J.-B. Hiriart-Urruty, le Prix Fermat de Recherches en Mathématiques récompense (tous les deux ans) les travaux de recherches de mathématiciens dans les domaines où les contributions de Pierre de Fermat ont été déterminantes (principes variationnels, calcul des probabilités, théorie des nombres). Ce grand prix scientifique, décerné par l'Université Paul-Sabatier de Toulouse, avec le soutien de la Région Midi-Pyrénées, a acquis un très fort renom international dans le monde des mathématiques. On pourra consulter l'adresse `http://www.math.univ-toulouse.fr/PrixFermat` pour quelques rappels historiques sur l'influence déterminante de Pierre de Fermat sur le développement des mathématiques, ainsi que la liste des précédents lauréats du prix.

Le lecteur trouvera dans le présent numéro une brève présentation des travaux des lauréats, tous deux récipiendaires de la médaille Fields moins d'un an plus tard.

Le Prix André Lichnerowicz pour la géométrie de Poisson

Yvette Kosmann-Schwarzbach

Le prix André Lichnerowicz a été créé en 2008. Il est attribué en reconnaissance de contributions notables à la géométrie de Poisson, tous les deux ans lors de la « Conférence internationale sur la géométrie de Poisson en mathématiques et en physique » (« International Conference on Poisson Geometry in Mathematics and Physics ») à des chercheurs ayant soutenu leur doctorat huit ans au plus avant l'année de la Conférence.

Le prix est établi à la mémoire d'André Lichnerowicz (1915-1998) dont les travaux furent essentiels dans la création de la géométrie de Poisson comme branche des mathématiques. En 2010, il a été décerné par un jury composé des membres du comité d'honneur et du comité scientifique de la Conférence. Le financement du prix de 500 euros pour chaque lauréat a été fourni par l'institution responsable de la Conférence, l'Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro.

Le prix André Lichnerowicz pour l'année 2010 a été décerné à Marco Gualtieri et Xiang Tang le 26 juillet 2010 à l'IMPA à Rio de Janeiro

Marco Gualtieri a soutenu son doctorat de mathématiques à l'université d'Oxford en 2004 sous la direction de Nigel Hitchin. Après avoir occupé des postes de chercheur post-doctorant au MSRI à Berkeley, au Fields Institute de Toronto, puis au MIT, il a été nommé au poste de professeur assistant à l'université de Toronto. Ses importants travaux sur la géométrie généralisée ont été la source d'inspiration pour de nombreuses publications sur ce sujet. Il avait déjà établi dans sa thèse les fondements de la théorie des structures complexes généralisées ainsi que des structures kählériennes généralisées, et il a ensuite développé la géométrie généralisée et ses applications à la physique, indépendamment ou en collaboration avec Gil Cavalcanti, Henrique Bursztyn et Vestislav Apostolov. Plus récemment, il a étudié les D-branes dans les variétés complexes généralisées et leurs relations avec la géométrie non-commutative, ainsi que d'autres généralisations des géométries classiques.

Xiang Tang est titulaire d'un Ph. D. en mathématiques soutenu à l'université de Californie à Berkeley en 2004 sous la direction d'Alan Weinstein. Il a poursuivi ses recherches post-doctorales à l'université de Californie à Davis avant de devenir professeur assistant à Washington University à Saint Louis. Ses travaux ont porté principalement sur les théorèmes de l'indice sur les espaces singuliers, où il utilise à la fois les outils de géométrie non-commutative (cohomologie cyclique, K-théorie, théorèmes de l'indice généraux de Connes-Moscovici et Nest-Tsygan) et les structures de la géométrie de Poisson. Parmi ses contributions importantes, obtenues indépendamment ou en collaboration, se trouvent une nouvelle démonstration de la conjecture d'Atiyah-Weinstein sur l'indice des opérateurs de Fourier intégraux et l'indice relatif des structures CR, l'étude des structures de Poisson non-commutatives sur les orbifolds, l'étude de diverses structures de type Hopf et la théorie de l'indice sur les orbifolds.

Clubs universitaires et stages d'été pour lycéens

Martin Andler[1]

Cet article est le premier d'une série visant à présenter les différents types d'activités mathématiques proposées aux collégiens et lycéens en dehors du temps scolaire (d'où le nom « activité périscolaire »). Les lecteurs impatients pourront prendre connaissance d'autres initiatives en se rendant sur le site d'Animath[2] ou en consultant [Andler 2009].

Il existe d'assez nombreux clubs et ateliers[3] de mathématiques fonctionnant dans les collèges et lycées, certains d'entre eux, mais pas tous, étant impliqués dans Maths en Jeans[4]. Nombreux voulant dire de l'ordre de quelques centaines, alors qu'il existe environ 10 000 établissements scolaires (collèges, lycées de différents types). On constate que la pérennité de ces structures est fragile, car elles sont dépendantes de l'enthousiasme et du dévouement des enseignants de ces établissements.

Les clubs universitaires

Avec des objectifs un peu différents sont apparus ces dernières années plusieurs clubs universitaires. Le plus ancien est le club de mathématiques discrètes de Lyon[5], créé par Bodo Lass, spécialiste de combinatoire, chercheur CNRS en mathématiques à l'institut Camille Jordan (UMR 5208 CNRS-UCBL), et maintenant animé par Bodo Lass, Theresia Eisenkölbl (MCF à l'université Claude-Bernard) et Pierre Dehornoy (doctorant à l'ÉNS de Lyon). Voici comment le club se présente lui-même :

Ce club s'adresse essentiellement aux collégiens et lycéens de la région Rhône-Alpes, mais tous les jeunes matheux sont les bienvenus. Il sagit de pratiquer les mathématiques comme un loisir. Cette activité doit être mise sur le même plan que faire du violon au conservatoire, par exemple. Si tu aimes les mathématiques et les défis qu'elles posent, si tu jubiles à résoudre des problèmes, si tu cherches des énoncés, méthodes et solutions, si tu souhaites aller plus loin dans cette voie et te demandes : « pourquoi n'y a-t-il pas des clubs, des conservatoires ou des classes de maths comme il y a des classes musicales ou sportives », rejoins-nous : on peut commencer à tout moment.

Le but principal n'est pas de préparer un concours, mais de faire des mathématiques jolies, élégantes, amusantes, efficaces, profondes, importantes et passionnantes. Néanmoins, la plupart des participants se présentent à des jeux-concours tels que les Olympiades internationales de mathématiques (OIM), le

[1] Université de Versailles Saint-Quentin, président d'Animath.

[2] http ://www.animath.fr

[3] La dénomination « atelier » fait référence à la notion d'« atelier scientifique » reconnue par l'Éducation nationale. Les textes de référence sont les circulaires 2001-046 du 21.3.2001 (BOEN du N° 13 du 29.3.2001) et 2004-086 du 25.5.2004 (BOEN du 3.6.2004) et on trouve une description complète du dispositif sous la référence [http://eduscol.education.fr/D0109/ASTDISP.htm].

[4] http://mathenjeans.free.fr/amej/accueil.htm

[5] http://math.univ-lyon1.fr/~lass/club.html

Tournoi des villes, le concours hongrois KöMaL, les Olympiades académiques de première, le Concours général, le Concours intégral, le Kangourou des mathématiques, le Championnat des jeux mathématiques et logiques, etc.

Ces dernières années, le club, qui se réunit le dimanche tous les 15 jours, a attiré des élèves de toute la France, dont la plupart des jeunes qui ont représenté la France à l'Olympiade internationale en 2010[6].

Le club olympique d'Orsay[7] est un peu plus récent. Créé à l'initiative de Louis Santharoubane, MCF de mathématiques à Orsay, dans le cadre d'un partenariat entre l'université Paris-Sud, l'Olympiade française de mathématiques (Claude Deschamps), et l'académie de Versailles (representée par Pierre Michalak, IA-IPR de mathématiques), il est maintenant animé principalement par David Zmiaikou et Bernardo da Costa, deux doctorants d'Orsay.

Les objectifs du club d'Orsay sont :

d'enseigner aux élèves des mathématiques élémentaires ingénieuses, de les encourager à étudier des sujets profonds, de développer leur intuition, créativité et ténacité dans la résolution des problèmes. Notre espoir est que les séances d'entraînement, les séminaires et stages que nous organisons encourageront les élèves à choisir une carrière scientifique.

Le club est à l'initative d'un tournoi international : International Tournament of Young Mathematicians[8], qui s'est déroulé à Orsay en 2009 et 2010. Compétition par équipe d'un type nouveau et très original, sur laquelle nous reviendrons prochainement, et qui sera complétée en 2011 par une compétition analogue au niveau français.

Le laboratoire de mathématiques d'Orsay soutient fortement cette initiative, notamment en utilisant les nouvelles dispositions du Contrat doctoral qui permettent de valider un monitorat par l'encadrement d'activités de ce type.

Le « Cercle mathématique de Strasbourg[9] » est tout récent : il a été créé à la rentrée 2010, à l'initative de Tatiana Beliaeva, spécialiste de géométrie arithmétique, MCF à l'université de Strasbourg, avec l'appui de l'IRMA. Il se présente de la manière suivante :

Le cercle est destiné à tous les lycéens (tous les niveaux et filières confondus) qui s'intéressent aux mathématiques. Encadrés par des enseignants et chercheurs de l'IRMA et de l'IREM, les élèves vont y découvrir des mathématiques autres que celles du programme du lycée, ou d'autres aspects des mathématiques déjà connues.

Le club de Lille[10], créé par le département de mathématiques de l'université de Lille 1 à l'initative de Mihai Tibar, géomètre algébriste et professeur de cette

[6] Voir `http://www.animath.fr/spip.php?article105` pour des informations sur l'équipe française et le site officiel, très bien fait, de l'OIM `http://www.imo-official.org/`

[7] `http://matholympia.blogspot.com/`

[8] `www.itym.org`

[9] `http://www-math.u-strasbg.fr/CercleMath/`

[10] `http://math.univ-lille1.fr/~tibar/Stage/stageSeconde.html`

université, est encore dans les limbes, mais il devrait également commencer à fonctionner cet automne, combinant plusieurs activités à destination des lycéens et des professeurs :

(1) *Cours/ateliers de préparation aux Olympiades de Première, 4 séances d'une demi-journée, entre octobre et février.*

(2) *Projets « Maths en Jeans », où un chercheur propose un thème de recherche à étudier par groupes de 2-4 élèves, sous la direction d'un professeur du lycée. La réalisation peut être présentée par les élèves au congrès national Maths en Jeans au mois de mars.*

Stages d'été

Le club de Lille est un prolongement d'un stage d'été destiné à des élèves de Seconde qui s'est déroulé fin juin début juillet à Lille[11]. Trois stages de ce type se sont déroulés l'été dernier : outre celui de Lille, celui organisé par l'association Science ouverte à Bobigny[12] en association avec l'université Paris-Nord (deux semaines du 21 juin au 2 juillet 2010), et celui organisé par le centre Galois[13] à Orléans en lien avec l'université d'Orléans et les diverses institutions mathématiques régionales. Dans le cas du stage de Bobigny, l'objectif n'était pas de s'adresser spécifiquement à des élèves très doués en mathématiques, mais de les recruter sur la base de la motivation seule, et de leur lieu d'habitation, la Seine Saint-Denis. L'analyse suivante est éloquente : 24 jeunes venant de 16 établissements et 18 communes de Seine-Saint-Denis, dont 46% de garçons et 54% de filles, 66% de boursiers. L'objectif du stage d'Orléans (deux stages distincts d'une semaine, du 21 au 25 juin, puis du 28 juin au 2 juillet) était très similaire. Nous reviendrons plus longuement sur ces expériences qui sont appelées à se développer (prolongement vers les élèves de Première etc.).

Ces différentes initiatives sont de nature à changer profondément l'attractivité des études scientifiques, et en particulier mathématiques, pour les jeunes, que leur talent soit déjà très affirmé ou pas, et aussi l'attractivité des universités. Dans beaucoup de pays, ce genre de structure, clubs et stages pendant les vacances, existe depuis de longues années. Il est instructif de constater que les quatre clubs mentionnés plus haut ont tous été créés par des collègues ayant fait leur scolarité ailleurs qu'en France et ayant connu, comme élèves, ce genre d'expérience. Il y a maintenant un savoir-faire qui ne demande qu'à se généraliser à d'autres universités !

Références

[2009g] Les activités mathématiques périscolaires I et II, *Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public* 482 et 489 (2009).

[11] `http://math.univ-lille1.fr/~tibar/Stage/stageSeconde.html`
[12] `http://scienceouverte.fr/spip/index.php`
[13] `http://centre-galois.fr/`

CARNET

Malliavin et moi

Michèle Vergne

Pise : juin 2010

Je suis à Pise, j'apprends par courrier électronique la mort de Paul Malliavin. Si quelqu'un me semblait immortel parmi les immortels, c'était lui. Je repense à lui qui m'avait introduite à l'Académie et fait visiter la Bibliothèque de l'Institut et la Bibliothèque Mazarine. Par les fenêtres, on voit la Seine. Il me parla du cardinal de Richelieu. Je me souviens de sa phrase (je crois me souvenir qu'il l'attribuait à Richelieu) *« je regretterai la beauté de ces lieux dans l'au-delà »*.

IHP : mai 68

J'ai 25 ans. Je suis en blue jeans, cheveux longs. Mon héroïne, c'est Louise Michel. Je me vois bien envoyée au bagne pour mes idées.

Slogans, manifestations, il faut changer le système. L'Institut Henri Poincaré poussiéreux, il faut le détruire. Assemblées générales, motions, Malliavin intervient de sa voix douce, je crie « Malliavin Mandarin, Malliavin Fasciste ». Si les gardes rouges formaient leurs bataillons, je serais avec eux, et j'enverrais Malliavin servir le peuple. Il ne se départit pas de son sourire béat.

Depuis, lorsque je le croise dans la rue, il me salue en découvrant son chapeau, et m'adresse toujours un cérémonieux : « Chère Madame ».

Au théâtre : janvier 2009

À l'Académie des Sciences, Paul Malliavin présente un candidat comme futur membre. La partie n'est pas jouée. Je m'asseois près de lui le long de l'ovale vert. Il sort quelques feuilles de papier froissées de sa poche : « Madame, j'aimerais votre opinion sur mon discours » et commence à déclamer à voix basse : « Voici déjà cent ans qu'Elie Cartan... ». Vient son tour de parler. Il déclame à voix haute : « Voici déjà cent ans... ». Applaudissements. Son candidat est élu.

La formule de Poisson

Malliavin et moi, nous nous extasions devant la Formule de Poisson. Sans doute il en connaît tous les aspects les plus fins et les plus profonds, moi non, mais je trouve en effet que c'est la plus belle formule mathématique.

Deux choses que Malliavin aime : les mathématiques, influer sur le destin des gens

Ce ne sont pas des thèmes indépendants, s'il parle d'un collègue, c'est souvent en louant la beauté de son travail : « Demailly, son théorème d'annulation est extraordinaire ; pensez Madame qu'il ne requiert pas d'inégalités point par point, mais en moyenne ».

Réception chez les Malliavin

Je suis invitée à une réception chez les Malliavin et je viens avec ma fille, Marianne. Elle a huit ans, il me semble me souvenir. On rentre dans une cour pavée, on monte un escalier, on sonne, et on rentre dans un appartement plongé dans la pénombre. Des bibliothèques remplies de livres couvrent les murs, les sièges sont antiques, j'ai peur que les meubles tombent en poussière si on tire les rideaux. Malliavin discute avec ma fille, il lui trouve une vieille édition illustrée des Enfants du Capitaine Grant. Elle s'installe sur un rebord de fenêtre et lit passionnément, pendant que les invités, mathématiciens sans frontières, se racontent leurs souvenirs. Marie-Paule Malliavin s'inquiète ; il faut manger les petits fours et déguster les sorbets de chez Berthillon.

Tentations

Malliavin me téléphone : il désire me présenter à l'Académie. J'objecte : « mon père, ma mère sont morts, c'est trop tard pour leur faire plaisir, et moi non plus, cela ne me ferait aucun plaisir ». « Madame, nous ne sommes pas Académiciens pour notre plaisir, mais pour servir notre pays ». Il me donne rendez-vous à l'Académie, me conduit à la salle des séances. Dans la semi-obscurité, en marbre blanc, les têtes coupées des grands hommes observent la séance. La nuit, je rêve : une niche éclairée, au fond de la niche, une bouteille de whisky sur un piédestal (je viens de revoir « Rio Bravo »). Je me rends compte que je désire plus que tout boire une gorgée de whisky, et que je désire aussi rentrer à l'Académie : je retéléphone : « oui, je vais rédiger ma notice de titres et travaux. » D'ailleurs, je suis bien incapable de dire non aux injonctions de Malliavin.

Non

Je suis élue. Ma sœur Gilberte n'a pas attendu mon élection, et ma sœur Martine va aussi mourir. Maintenant, d'autres plans se préparent en coulisses : il faut un représentant de la France au Comité Exécutif de l'Union Mathématique Internationale ; Malliavin et Jacques-Louis Lions me contactent, ce sera moi, ont-ils décidé. Malliavin me téléphone tous les jours. Chaque fois, je lui dis : « Non, je ne veux pas, je ne peux pas. » Après chaque coup de téléphone, une vague d'angoisse me submerge : je ne suis pas à la hauteur.

Honneurs

Je m'habitue à trouver quelque plaisir aux honneurs.

C'est le jour de la séance solennelle de l'Académie des Sciences. Descendre les marches entre les sabres levés de la garde républicaine me paraît normal. Malliavin est en grand habit. La paume de l'épée de notre paléontologue représente évidemment un dinosaure. Malliavin est heureux d'être parmi tous ses confrères. Il les connaît tous. Il avance une chaise pour Pierre Lelong, qui va sur ses 90 ans. Il écoute gentiment Denisse. Il taquine Jean Dercourt, il m'adresse un mot aimable. Il plaisante : « Ici, nous aimons tous beaucoup ceux qui font des recherches sur la longévité et les pilules du bonheur pour le troisième âge », en prévoyant l'élection de Beaulieu comme nouveau président de l'Académie des Sciences.

Manœuvres

Malliavin a un plan pour X : il envoie des piles de courrier, téléphone, compte ses pions. Il scrute les faiblesses du plan adverse de Z pour Y. Si la manœuvre échoue, Z triomphe et Y est choisi : Malliavin me donne un conseil sibyllin. Je l'interprète grossièrement ainsi : dès que l'un est choisi par notre section, oublier tout le mal qu'on a pensé de lui.

Faut-il faire de même avec les morts : c'est prudent, on passera l'éternité à leurs côtés.

Mesures de Haar et mesures de Malliavin

Y a-t-il une sorte de mesure de Haar pour les groupes de lacets ? Quels sont les groupes « naturels » qui ont des représentations unitaires ? Les groupes localement compacts, grâce à la mesure de Haar, mais le groupe unitaire a une représentation unitaire, on peut aussi construire des mesures ergodiques pour certains groupes naturels, comme le groupe des permutations infinies. Ce sont des questions qui préoccupent Paul Malliavin et Marie-Paule.

Je crois naïvement que les notions mathématiques sont sans géniteurs, enfantées dans les choux. Mais la mesure de Haar n'existait pas avant Haar, le calcul de Malliavin avant Malliavin, l'intégrale d'Itô avant Itô. Malliavin a une idée plus juste : il a les larmes aux yeux à l'annonce du prix Gauss attribué à Itô, qui meurt peu après ; le monde sans Itô lui paraît moins beau.

De même pour moi, le monde sans Malliavin n'est plus tout à fait pareil.

Paul Malliavin (1925 - 2010) et son calcul (1976 - ...)

Marc Yor

Écrire que les probabilités ont eu quelques difficultés à être reconnues comme discipline mathématique à part entière est un euphémisme peu original.

Toutefois, n'est-il pas paradoxal que, dans le concert mathématique des nations, un des pays où elles ont eu le plus de mal à être reconnues est sans aucun doute celui de Pascal, Fermat, Borel et Paul Lévy. Peut-être faut-il voir là une illustration de plus de l'adage : « Nul n'est prophète en son pays ».

Quoi qu'il en soit, dans l'ère post-Paul Lévy, c'est-à-dire dès le début des années 70, quelques très grands mathématiciens se sont faits les hérauts des probabilités, et sont parvenus à les hisser – en particulier, dans l'opinion de l'establishment mathématique ! – au rang de discipline mathématique essentielle. L'apothéose eut lieu au Congrès International de Madrid, en 2006, où pour la première fois, une médaille Fields fut décernée à un probabiliste : Wendelin Werner, et le Prix Gauss à Kiyosi Itô. Revenons en France au début des années 70, pour y distinguer deux probabilistes pur sucre : Paul-André Meyer et Jacques Neveu, d'une part, et un mathématicien aux multiples talents, Paul Malliavin, d'autre part.

Le premier a pu construire, avec son élève Claude Dellacherie, et à l'aide de la théorie polonaise des ensembles et de la théorie des capacités de Choquet, la théorie générale des processus stochastiques, en établissant des distinctions fines et précises entre passé strict, passé et présent, futur strict, distinctions qui illuminent les opérations de compensation de Lévy, essentielles dans l'étude des processus à accroissements indépendants et plus généralement des processus de Markov.

Hélas, un travail de fond était encore bien trop novateur aux yeux de certains groupes influents de l'époque, et Meyer lui-même relate, avec humour et un peu de tristesse, à l'issue d'un de ses exposés au Séminaire BCD, la gentille appréciation d'un grand professeur de l'époque : « Après tout, les probabillités, ce n'est pas si dégueulasse que ça »

Le second, Jacques Neveu, a eu une activité inlassable de pédagogue, de formateur de chercheurs en probabilités, et a donné – entre autres – un cours lumineux sur l'intégration d'Itô, en 1972.

Le troisième, Paul Malliavin – au centre de cette note – a su créer un calcul des variations stochastiques, et une théorie de la transformation de Fourier sur l'espace de Wiener, qui, à bien des égards, ont révolutionné le domaine. Les connaissances très profondes de Paul Malliavin en analyse (complexe, en particulier) et géométrie différentielle, lui ont été précieuses, et lui ont permis de bâtir ce monument. Il a présenté ses résultats fondamentaux à Kyoto en 1976. Ceux-ci ont été immédiatement reconnus comme extrêmement féconds, et dans les années qui ont suivi, sous l'influence de D. Stroock en particulier, plusieurs probabilistes de premier plan se sont mis à populariser ce qui allait devenir rapidement le Calcul de Malliavin. J'ai pu ainsi écouter des exposés remarquables de J. Neveu, P.A. Meyer et D. Williams sur ce sujet. À cet égard, la conférence de Durham en juillet 1980 marque vraiment un tournant : d'une part, la caractérisation des semimartingales

comme bons intégrateurs vient d'être obtenue : c'est le théorème de Bichteler-Dellacherie-Mokobodzki en 1979, et, d'autre part, le calcul de Malliavin, étayé des travaux remarquables de Bismut, est pleinement reconnu.

C'est encore lors de cette Conférence de Durham que de nombreux exposés sur la géométrie différentielle stochastique (GDS) sont présentés ; en particulier, P.A. Meyer y expose les travaux de L. Schwartz sur la GDS du second ordre. En fait, J. Eells et D. Elworthy d'une part, et P. Malliavin ont également balisé le chemin... Beaucoup plus tard, P. Malliavin développera, avec A. Thalmaier son calcul des variations stochastique en vue de l'application aux Mathématiques Financières.

Ce qui précède est un aperçu très bref d'une partie de l'œuvre de P. Malliavin dans le domaine des probabilités.

Dans l'activité scientifique de Paul Malliavin, il faut inclure également ses présence et participation assidues à de nombreux séminaires de la région parisienne, en particulier, et de nombreux voyages scientifiques, témoignages lumineux de son inlassable curiosité.

En 2009-2010, ce que j'appelais « son » séminaire, le mercredi après-midi à l'IHP le voyait apparaître comme figure principale.

Lors de ses derniers passages à « son » séminaire, il venait avec « sa machine à respirer ». Puis, il nous a annoncé qu'il allait se rendre en Chine. Je ne peux pas m'empêcher de penser que, connaissant le degré de pollution de ce pays, Paul Malliavin avait fait, avec ce dernier voyage, le choix délibéré d'être debout, jusqu'au dernier moment.

Parmi les nombreuses leçons que j'ai apprises de Paul Malliavin, une phrase me revient, qu'il prononçait souvent lorsqu'un orateur disait qu'un résultat, ou une formule était facile : oui, disait Paul Malliavin, mais après des milliers d'heures de travail. En complément de cet hymne au travail, Paul Malliavin se donnait également beaucoup de mal à mettre en valeur les travaux de jeunes chercheurs.

Ce 3 juin 2010, les mathématiques en général, et les probabilités en particulier, ont perdu une figure emblématique.

Malliavin et l'analyse de Fourier

Jean-Pierre Kahane

Il vaut la peine de lire et de relire les travaux de Malliavin, et il sera utile de les regrouper et de les rééditer. Ils sont relatifs à plusieurs branches des mathématiques, mais on y trouve une vision commune qui domine l'habileté technique, d'ailleurs exceptionnelle : il faut voir les choses de haut avant de plonger dans la jungle. Je me bornerai ici aux plus importantes contributions de Malliavin à l'analyse de Fourier, qui suffisent à illustrer cette hauteur de vues et cette habileté.

Je ne vais pas suivre l'ordre chronologique mais partir du 13 avril 1959, la date de sa note au Comptes rendus « Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droite », qui le rendit célèbre du jour au lendemain. Puis je reviendrai à sa thèse, de 1954, et à ses travaux avec Beurling dans les années 1960. Et je terminerai par les alentours de sa note, ses travaux sur l'algèbre de Wiener et les questions qui s'y rattachent.

La synthèse

En analyse harmonique, la synthèse signifie la reconstruction d'un son, d'un signal, d'une fonction ou d'un autre objet à partir des harmoniques qu'il contient. Par exemple, les fonctions périodiques peuvent être reconstruites à partir de leurs séries de Fourier. Il en est de même pour les fonctions presque périodiques au sens de Bohr, pour les fonctions quasi-périodiques au sens de Paley et Wiener et pour les fonctions moyenne-périodiques de Laurent Schwartz. Dans tous ces cas on associe à une fonction f appartenant à un espace fonctionnel le sous-espace fermé $\tau(f)$ engendré par ses translatées, et les harmoniques sont les générateurs des sous-espaces les plus simples contenus dans $\tau(f)$ (unidimensionnels dans les premiers cas évoqués, mais pas nécessairement dans le cas des moyenne-périodiques). La synthèse exprime le fait que les harmoniques contenus dans $\tau(f)$ engendrent $\tau(f)$. C'est une notion très générale.

Qu'en est-il pour les fonctions bornées ? La question a un sens si l'on équipe $L^\infty(R)$ de la topologie faible comme espace dual de $L^1(R)$ (en topologie forte, on retrouve les fonctions presque-périodiques de Bohr). Elle s'étend à $L^\infty(G)$ comme dual de $L^1(G)$ quand G est un groupe abélien localement compact, comme $\mathbb{R}^d$, ou $\mathbb{Z}$, ou $\mathbb{Z}^d$. La synthèse a lieu quand G est compact. Laurent Schwartz avait montré en 1948 qu'elle est en défaut quand $G = \mathbb{R}^3$, ou $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 3$ [22]. La situation restait inconnue dans les autres cas, et en particulier dans ce qui apparaissait comme le cas crucial, $G = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$. À l'époque, c'était un défi lancé à tous les analystes.

La note de Malliavin résout le problème dans le cas crucial [15]. Ensuite Malliavin donne la réponse complète dans un article des *Annales de l'IHÉS* : la synthèse est en défaut pour tous les groupes G (abéliens, localement compacts) non compacts [16].

Le problème a beaucoup de formes équivalentes. Par dualité, il concerne la structure des idéaux fermés de l'algèbre de convolution $L^1(G)$: un tel idéal est-il nécessairement l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent ? Par dualité et transformation de Fourier, il s'exprime dans l'algèbre de Wiener $A(\Gamma) = \mathcal{F}L^1(G)$,

où Γ est le groupe dual de G : un idéal fermé dans $A(\Gamma)$ est-il nécessairement l'idéal des fonctions qui s'annulent sur un fermé de Γ ?

Si, au lieu de $A(\Gamma)$, on considère $C(\Gamma)$, l'espace de toutes les fonctions continues sur Γ (et nulles à l'infini si Γ n'est pas compact), la réponse est positive, et une façon de l'exprimer consiste à dire que, étant donné $f \in C(\Gamma)$, $\mu \in M(\Gamma) = C^*(\Gamma)$ (mesure de Radon bornée sur Γ), et un fermé $E \subset \Gamma$, tels que $f = 0$ sur E et que le support de μ soit contenu dans E, alors le produit scalaire $< \mu, f >= \int f d\mu$ est nul.

Pour $A(\Gamma)$, le problème peut s'exprimer en remplaçant l'espace des mesures $M(\Gamma)$ par celui des « pseudomesures » $PM(\Gamma) = A^*(\Gamma)$. Étant donné un fermé $E \subset \Gamma$, $f \in A(\Gamma)$ nulle sur E, et $T \in PM(\Gamma)$ à support dans E, est-il vrai que $< T, f >= 0$? Dans les cas usuels, une pseudomesure peut être vue comme une distribution de Schwartz dont la transformée de Fourier est bornée.

Schwartz avait choisi pour E la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ euclidien, et pour T la dérivée dans une direction (disons, radiale) de la mesure d'aire sur E, σ ; le fait que $\hat{\sigma}(u) = O(\frac{1}{|u|})$ $(|u| \to \infty)$ montre que $\hat{T}(u) = O(1)$ $(|u| \to \infty)$, c'est-à-dire que T est une pseudomesure. Cela était apparu à Schwartz en préparant un exercice sur les distributions. En choisissant pour f une fonction test générique s'annulant sur E, on a $< T, f >\neq 0$, contre-exemple à la synthèse spectrale.

Comment choisir E, T, f quand $\Gamma = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{T}$? L'idée de Malliavin est de choisir f en premier lieu, comme somme d'une série trigonométrique très lacunaire, de sorte que sa distribution (au sens de l'image de la mesure de Lebesgue) soit de classe C^∞, et qu'on puisse définir $T = \delta'(f)$ (dérivée de la mesure de Dirac appliquée à f) comme une pseudomesure ; c'est un tour de force, et ensuite c'est un jeu de s'arranger pour que $< T, f >\neq 0$; il est clair que T est portée par l'ensemble des zéros de f, donc on a un contre exemple à la synthèse spectrale quand $G = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.

La construction de Malliavin peut être allégée en prenant pour f la somme d'une série trigonométrique aléatoire ; c'est un bon exemple de l'usage des probabilités en analyse [4, 10]. L'extension aux G non compacts (Γ non discrets) ne présente pas de difficulté.

Il y a maintenant d'autres voies pour obtenir le théorème de Malliavin. Varopoulos a utilisé sa théorie des algèbres tensorielles pour faire dériver le cas général de l'exemple de Schwartz [23]. Körner a repris l'idée de définir d'abord l'ensemble E, un ensemble étrange qui est mince au sens que $C(E) = A(E)$, l'algèbre des restrictions à E des fonctions appartenant à l'algèbre de Wiener (c'est la définition des « ensembles de Helson »), et qui est épais au sens qu'il porte une pseudomesure dont la transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini (c'est la définition des « ensembles de multiplicité ») ; la construction est difficile mais on savait depuis longtemps qu'elle entraînerait la non-synthèse spectrale [11, 7].

Le théorème de Malliavin a donné matière à beaucoup d'exposés, de commentaires et de travaux [18, 21, 7]. D'un autre côté, il clôt une période, durant laquelle l'attention se focalisait sur l'algèbre de Wiener $A(\Gamma)$ comme un objet essentiel de l'analyse. De manière erronée on a pu croire qu'il marquait la fin de l'analyse harmonique commutative. Mais il est vrai, et heureux, que l'analyse harmonique commutative a pris d'autres voies.

La thèse et le théorème de Beurling-Malliavin

En 1959 Malliavin était professeur à la Faculté des sciences de Caen et il avait une réputation solide en analyse complexe. Il avait été, comme moi, élève de Szolem Mandelbrojt. Szolem racontait des histoires et posait des questions. Il avait un travail en commun avec Norbert Wiener d'où sortait la question suivante, qu'il proposa à Malliavin :

Que peut-on dire de l'ensemble des zéros réels d'une fonction holomorphe $f(z)$ dans le demi-plan $x = Re z > 0$, et bornée sur les droites verticales dans ce demi-plan, quand on connait une majoration du type $|f(z)| \leq M(x)$?

La thèse répond complètement à cette question et elle en ouvre beaucoup d'autres, avec de beaux résultats en analyse complexe et en analyse fonctionnelle [14]. Elle a valu à Malliavin d'être invité à l'Institute for Advanced Study de Princeton en 1954-55 et d'y rencontrer Arne Beurling. L'invitation fut renouvelée en 1960-61 et donna lieu à une collaboration extrêmement fructueuse entre Beurling et Malliavin. Pendant cette année, ils réussirent à résoudre complètement deux questions difficiles et intimement liées :

(1) caractériser les fonctions entières qui peuvent s'écrire comme quotients de deux fonctions entières de type exponentiel bornées sur l'axe réel ;

(2) calculer le « rayon de totalité » d'une suite réelle donnée, Λ, c'est-à-dire la borne supérieure des a tels que les $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda\in\Lambda}$ engendrent $L^2(-a, a)$. Les résultats ne furent publiés par les auteurs qu'en 1967, mais en fait ils furent connus dès 1961 [5], et ce sont des joyaux de la théorie des fonctions.

La réponse à la première question fait intervenir l'intégrale logarithmique

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log|f(x)| \frac{dx}{1+x^2} ;$$

elle se trouve exposée complètement dans le livre de Paul Koosis « The logarithmic integral » [12] et dans ses « Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin » [13]. Pour les fonctions entières considérées, l'intégrale converge. Inversement, et c'est le principal, si $f(z)$ est une fonction entière et que l'intégrale logarithmique converge, il existe une fonction entière de type exponentiel arbitrairement petit, et bornée sur l'axe réel, $g(z)$, telle que la fonction de type exponentiel $f(z)g(z)$ soit bornée sur l'axe réel. Par transformation de Fourier, on obtient ainsi la définition des hyperdistributions régularisables par convolution avec des fonctions de supports arbitrairement petits.

La seconde question fait intervenir une nouvelle sorte de densité de la suite Λ, que Beurling et Malliavin appellent « densité effective ». On peut la définir comme la borne inférieure des densités des suites « BM-régulières » contenant Λ, en convenant qu'une suite est BM-régulière de densité D si sa fonction de décompte, $n(r)$, vérifie

$$\int |n(r) - Dr| \frac{dr}{1+r^2} < \infty .$$

C'est une condition intermédiaire entre $n(r) - Dr = O(1)$ $(r \to \infty)$ (régularité uniforme) et $n(r) - Dr = o(r)$ (régularité de Pólya). À chaque notion de régularité correspondent pour les suites, en copiant les termes de la théorie de la mesure, des notions de densité extérieure et de densité intérieure. La densité effective est la densité extérieure associée à la BM-régularité.

Les résultats sont donc faciles à exprimer, mais les méthodes sont très élaborées et nécessitent des raffinements de la théorie du potentiel [1, 2].

Autour et à la suite de la synthèse

Je reviens à l'algèbre de Wiener $A(\Gamma) = \mathcal{F}L^1(G)$. Le théorème de Wiener-Lévy dit que les fonctions analytiques opèrent dans $A(\Gamma)$, c'est-à-dire que si $f \in A(\Gamma)$ et que Φ est analytique sur $f(\Gamma)$ (et nulle à l'origine si Γ n'est pas compact), la fonction $\Phi \circ f$ appartient à $A(\Gamma)$. En vue d'étendre ce résultat ou de montrer qu'il est inaméliorable, il est indiqué d'étudier la croissance des normes $\| \exp iuf \|_{A(\Gamma)}$ quand $u \to \infty$. En vérité, seules les fonctions analytiques opèrent dans $A(\Gamma)$: c'est la réciproque du théorème de Wiener-Lévy, démontrée par Katznelson en 1958 [8]. Séduit par le problème, Malliavin eut une autre approche : que peut-on dire des fonctions Φ telles que $\Phi \circ f \in A(\Gamma)$ quand f est donnée ? Si l'on pense à $L^1(G)$ au lieu de $A(\Gamma)$, les fonctions qui opèrent définissent un calcul symbolique, et Malliavin se pose le problème du « calcul symbolique individuel ». La méthode est alors l'étude des normes des $\exp iuf$ dans $PM(\Gamma)$, l'espace dual de $A(\Gamma)$, et elle permet à Malliavin de construire des $f \in A(\Gamma)$ telles que $\Phi \circ f \in A(\Gamma)$ implique $\Phi \in C^\infty$, avec même des précisions sur l'ordre de grandeur des dérivées successives de Φ [17]. Ce résultat prélude à la découverte sur la non-synthèse, qui repose aussi sur une estimation des $\| \exp iuf \|_{PM(\Gamma)}$. Convenablement exploité, il permet de retrouver le théorème de Katznelson [6].

L'usage de $PM(\Gamma)$ est essentiel dans d'autres questions concernant $A(\Gamma)$. Étant donné un fermé E dans Γ, les restrictions à E des fonctions appartenant à $A(\Gamma)$ constituent une algèbre de Banach, $A(E)$. Nous avons vu que les ensembles de Helson sont définis par $A(E) = C(E)$, l'algèbre des fonctions continues sur E (et nulles à l'infini si E n'est pas compact). Dans ce cas, toutes les fonctions continues (nulles à l'origine) opèrent dans $A(E)$. Mais on a mis en évidence beaucoup d'ensembles E tels que les seules fonctions opérant dans $A(E)$ sont les fonctions analytiques, et on ne connaît pas de situation intermédiaire. La conjecture de dichotomie de Katznelson est qu'il y a seulement deux cas possibles : ou $A(E) = C(E)$; ou les seules fonctions opérant dans $A(E)$ sont analytiques. C'est toujours un problème ouvert.

Quand Γ est discret, on parle d'ensembles de Sidon au lieu d'ensembles de Helson. La conjecture de dichotomie est ouverte pour les ensembles de Sidon, mais Katznelson et Malliavin en firent une « vérification statistique » [9]. Pour cela, ils introduisirent une méthode de sélection aléatoire des entiers qui fut, plus tard, largement utilisée par Jean Bourgain. Suivant cette méthode, l'ensemble aléatoire obtenu est presque sûrement, soit Sidon, soit « d'analyticité ». C'est, de nouveau, une jolie application des probabilités à l'analyse harmonique.

La structure des ensembles de Sidon est encore mystérieuse. La conjecture en cours est que tous les ensembles de Sidon sont des réunions finies d'ensembles quasi-indépendants, avec une définition convenable de la quasi-indépendance ; on aurait, de ce fait, leur description complète. L'argument le plus fort en faveur de cette conjecture est un théorème de Paul et Marie-Paule Malliavin, de 1967, relatif aux groupes Γ duals des groupes $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ (p premier) : dans ce cas, les ensembles de Sidon ne sont autres que les réunions finies d'ensembles indépendants. Les

dernières contributions importantes à ce problème sont dues à Gilles Pisier et Jean Bourgain dans les années 1980 [19, 20, 3].

J'ai tenté de donner un coup de projecteur sur quelques contributions majeures de Malliavin à l'analyse de Fourier. Pour mettre l'ensemble en pleine lumière, il faut se référer aux œuvres elles-mêmes, et je renouvelle le souhait qu'elles soient regroupées et publiées.

Références

[1] A. Beurling et P.Malliavin.– On Fourier Transforms of measures with compact support, Acta Math. 107 (1962), 291-309.

[2] A. Beurling et P.Malliavin.– On the closure of characters and the zeros of entire functions, Acta Math. 118 (1967), 79-93.

[3] J. Bourgain.– Sidon sets and Riesz products, Ann. Inst. Fourier 35, 1, (1985), 137-148.

[4] J.-P. Kahane.– Sur un théorème de Paul Malliavin, C.R. Acad. Sci. A-248 (1959) 2943-2944.

[5] J.-P. Kahane.– Travaux de Beurling et Malliavin, Séminaire Bourbaki, Décembre 1961, exposé 225.

[6] J.-P. Kahane.– Une nouvelle réciproque du théorème de Wiener-Lévy, C.R. Acad. Sci. A-264 (1967), 104-106.

[7] Jean-Pierre Kahane et R. Salem.– Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Paris, Hermann 1963.

[8] Y. Katznelson.– Sur les fonctions opérant sur l'algèbre des séries de Fourier absolument convergentes, C.R. Acad. Sci. A-247 (1958), 404-406.

[9] Y. Katznelson et P. Malliavin.– Vérification statistique de la conjecture de la dichotomie sur une classe d'algèbre de restriction, C.R. Acad. Sci. A-262 (1966), 490-492.

[10] R. Kaufman.– Gap series and an example to Malliavin's theorem, Pacific J. Math. 28 (1969), 117-119.

[11] T. Körner.– A pseudofunction on a Helson set, Astérisque 5 (1973), 3-224 et 231-239.

[12] P. Koosis.– The logarithmic integral, vol. I et II, Cambridge University Press, 1988 et 1992.

[13] P. Koosis.– Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin, Montreal, Publications CRM, 1996.

[14] P. Malliavin.– (thèse) Acta Math 93 (1954), 179-255.

[15] P. Malliavin.– Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale sur la droite, C.R. Acad. Sci. A-248, 2155-2157.

[16] P. Malliavin.– Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts, Publ. Math. I.H.É.S. 1959, 61-68.

[17] P. Malliavin.– Sur l'impossibilité de la synthèse spectrale dans une algèbre de fonctions presque-périodiques, C.R. Acad. Sci. A-248 (1959) 1756-1758 ; voir aussi Calcul symbolique et sous-algèbres de $L^1(G)$, Bull. Soc. Math., 8(1959), 180-190.

[18] P. Malliavin.– Ensembles de résolution spectrale, Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm 1962, 368-378.

[19] P. Malliavin et M.-P. Malliavin.– Caractérisation arithmétique d'une classe d'ensembles de Helson, C.R. Acad. Sci. A-264 (1967), 192-193.

[20] G. Pisier.– Arithmetical characterisation of Sidon sets, Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1983), 87-89.

[21] W. Rudin.– Fourier Analysis on Groups, Wiley 1962.

[22] L. Schwartz.– Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts, C.R. Acad. Sci. A-227 (1948), 424-426.

[23] N. Varopoulos.– Sur un théorème de M. Paul Malliavin, C.R. Acad. Sci. 263 (1967), 834-836.

Naoufel Ben Abdallah

(1968 – 2010)

Pierre Degond

La brutale disparition de Naoufel Ben Abdallah le lundi 5 juillet 2010 a été pour toute la communauté mathématique française et tous ses amis toulousains un choc terrible.

Naoufel était une personne d'une très grande modestie, d'une extrême gentillesse, qui possédait un exceptionnel talent pour les mathématiques, doublé d'une insatiable curiosité pour toutes les facettes de la science. Ancien élève de l'École Polytechnique, il a effectué sa thèse à l'École Polytechnique en 1994. Nommé Chargé de Recherches au CNRS à Toulouse en 1994, il deviendra Professeur à l'université Paul Sabatier en 1998.

Sa maturité d'esprit et son goût pour les domaines de recherche de pointe se sont confirmés très vite. Ses recherches ont d'abord porté sur la théorie cinétique, notamment appliquée aux plasmas et aux semi-conducteurs. De l'époque de sa thèse date notamment un théorème d'existence de solutions faibles du problème de Cauchy aux limites pour le système de Vlasov-Poisson qui n'a pas encore été surpassé.

Dans le même temps, il a apporté d'importantes contributions à la théorie dite de l'approximation de la diffusion en champ fort et à la construction des correcteurs de couches limites associés. De cette époque date aussi la clarification des liens hiérarchiques entre les différents modèles micro-méso et macroscopiques de semiconducteurs, travaux qui ont eu un large impact. Dernièrement, il travaillait sur un programme consacré à la diffusion anormale.

C'est dans le domaine du transport quantique que ses talents mathématiques ont trouvé le meilleur terrain pour s'exprimer. Un de ses travaux d'avant-garde est l'étude du système de Schrödinger-Poisson multidimensionnel avec prise en compte des états de scattering. Très vite, il récidive, en proposant un modèle hybride « classique-quantique » pour les systèmes quantiques « ouverts », c'est-à-dire échangeant avec le monde extérieur. Il consacrera l'essentiel de ses recherches ces dernières années à cette étude, infiniment complexe, mais vitale pour les applications.

Avec un constant souci des applications, sans toutefois ne rien céder de la rigueur des démonstrations, il étudiera les effets de confinement spatial qui sont d'ores et déjà omniprésents dans les composants électroniques (gaz d'électrons bidimensionnels, puits et boîtes quantiques, etc.). Il donnera plusieurs théorèmes qui caractérisent le comportement de ces systèmes sous l'influence de différents phénomènes tels que couplage de bande ou masse variable. Ces résultats révèlent

une grande virtuosité mathématique qu'il avait récemment mise au service d'applications d'une brûlante actualité comme l'électronique de spin. Il savait également transformer ces concepts en applications concrètes, notamment dans le domaine numérique, où il a été le premier à proposer des méthodes multi-échelles « supportant » le régime semi-classique.

Il est impossible de rendre compte de la richesse et de la diversité de pensée de Naoufel. Mais au-delà de son seul talent mathématique, Naoufel possédait le sens du contact indispensable à la création des liens interdisciplinaires sans lesquels la recherche en mathématiques appliquées ne peut rayonner pleinement. Il avait également mis ses exceptionnelles qualités humaines au service de la communauté scientifique, toulousaine en particulier, en dirigeant le laboratoire MIP de 2004 à 2007 et en préparant son intégration à ce qui est devenu l'Institut de Mathématiques de Toulouse. Il a également eu de nombreuses responsabilités nationales, auprès de l'ANR notamment, et internationales, en particulier en direction du Maghreb au travers du réseau IMAGEEN. De tous ces engagements, ses collègues gardent le souvenir d'une remarquable qualité d'écoute, d'une humanité et d'une générosité exceptionnelles, associées à un sens des responsabilités et à un véritable talent pour la direction des personnes.

Naoufel était très reconnu au niveau national et international. Il entretenait d'étroites collaborations avec l'Italie, l'Autriche, l'Espagne, et au-delà des océans, les États-Unis (Austin, Maryland, ASU, Brown recevaient régulièrement ses visites), ainsi que l'Asie : Chine, Japon, Inde, Hong-Kong, Singapour...

Tout au long de sa trop brève carrière, Naoufel aura marqué notre communauté par sa créativité, son exigence de rigueur, mais aussi son ouverture d'esprit, et sa gentillesse. Au-delà de ses travaux scientifiques, qui continueront d'être une profonde source d'inspiration pour ses collègues et leurs étudiants, restera le souvenir de ce jeune homme qui aimait raconter des blagues, qui n'avait pas son pareil pour les tours aux cartes et qui savait si bien imiter les stars... et ses collègues. Toute la communauté mathématique est unie pour témoigner à sa famille sa solidarité dans la douleur.

LIVRES

Mathematicians fleeing from Nazi Germany :
Individual Fates and Global Impact
R. Siegmund-Schultze
Princeton University Press, 2009. 504 p. ISBN : 978-1-4008-3140-1. $49.50

Des mathématiciens allemands émigrant aux États-Unis au cours des années 1930... On pense immédiatement à quelques personnalités, Emmy Noether, Hermann Weyl, Richard Courant, à des légendes, des anecdotes...

Par exemple, Emmy Noether trouva un poste aux États-Unis — alors qu'elle n'en avait jamais vraiment eu en Allemagne, parce qu'elle était une femme. Mais qu'en savons-nous précisément ? Elle avait un moyen d'existence, c'est vrai, mais ce poste à Brym Mawr (un collège de filles, les femmes avec les femmes...) n'était ni très prestigieux, ni même permanent. Comme le livre le confirme, Emmy Noether a pourtant joué un rôle très important dans l'importation de l'algèbre abstraite aux États-Unis, ce qui est d'autant plus remarquable qu'elle n'y a passé qu'un an et demi : elle est morte dès 1935.

Richard Courant a aussi joué son rôle dans le développement des mathématiques américaines, du côté des mathématiques appliquées. C'est aussi aux qualités d'organisateur scientifique et d'administrateur qu'il avait montrées en Allemagne où il avait été, avant son renvoi, directeur de l'Institut de mathématiques de Göttingen, que l'on doit la création de ce qui s'appelle aujourd'hui le *Courant Institute*.

Nous n'en savons en général pas beaucoup plus.

L'histoire douloureuse du XX^{e} siècle a pourtant eu un effet plus qu'anecdotique sur l'histoire des mathématiques et des mathématiciens. Pour prendre un exemple aujourd'hui bien étudié, la première guerre mondiale, après avoir massacré une grande partie de l'élite scientifique française, a débouché sur un long boycott des relations avec les scientifiques allemands, au moment où les mathématiciens allemands développaient, notamment, l'algèbre et la topologie générale. Ce qui a eu des conséquences sur le développement des mathématiques en Europe.

C'est à une autre tragédie du siècle dernier qu'est consacré le livre de Reinhard Siegmund-Schultze, celle créée par la politique nazie, et à ses effets sur les mathématiques dans le monde et, au moins, en Europe et aux États-Unis.

Ce que ce n'est pas

Le titre du livre est précis. Signalons tout de même qu'il ne s'agit pas d'une étude des mathématiques et des mathématiciens dans l'Allemagne nazie, un sujet qui mériterait pourtant une étude rigoureuse (voir toutefois le livre [5]) pas non plus des mathématiques et des mathématiciens pendant la période nazie (voir [3]).

Fuir l'Allemagne nazie

Précisément, donc, il s'agit de l'émigration (de la fuite, de l'exil...) d'une partie importante de l'élite mathématique allemande et de ses effets sur le développement des mathématiques, en particulier aux États-Unis. Les destins individuels sont étudiés et placés dans le contexte de l'émigration de mathématiciens germanophones.

C'est un livre d'histoire. La problématique en est clairement délimitée : « destins individuels et effet global » (*Individual fates and global impact*), dit le sous-titre. Qui émigra ? Pourquoi ? Où ? Quelle intégration dans le pays d'accueil ? Quelle influence sur la vie scientifique de ce pays ?

Les réponses apportées à ces questions s'appuient sur des sources vérifiables et soigneusement citées, documents publiés et documents d'archives, mais aussi entretiens réalisés avec des témoins et leurs familles, et lettres reçues par l'auteur, au cours des années 1990. Si ce livre est une version d'un livre plus ancien publié en allemand [6], ce n'est pas qu'une traduction, mais bien un nouveau livre, utilisant de nouvelles sources et de nouveaux travaux.

La question de la définition de chacun des mots dans l'expression « mathématicien germanophone émigré » fait l'objet d'une discussion précise et soigneuse, qui a conduit l'auteur à dresser une liste de cent quarante-cinq personnes. Le livre est consacré à ces personnes, des êtres humains (mathématiciens) engagés dans une activité humaine (les mathématiques, autant que possible, les mathématiques, lorsqu'ils pouvaient en faire) dans une période terriblement difficile et dure, et les mathématiciens d'aujourd'hui y trouveront « des informations sur la vie, l'activité politique, et les souffrances de leurs prédécesseurs » (les guillemets marquent des citations du livre, traduites par moi).

Destins individuels

S'il n'est pas une collection d'histoires individuelles, ce livre prend ces histoires au sérieux. Outre celle de ces 145 émigrés, il contient aussi une liste de 17 mathématiciens germanophones qui furent assassinés – comme Otto Blumenthal, un ami proche de David Hilbert et un éditeur des *Mathematische Annalen*, qui fut démis de son poste à Aachen pour des raisons raciales et politiques en 1933, émigra aux Pays-Bas, puis fut déporté à Theresienstadt – ou poussés au suicide – comme Felix Hausdorff, un des inventeurs de la topologie générale, qui était aussi, sous le nom de Paul Mongré, un écrivain, et qui se suicida avec sa femme et sa belle-sœur, en 1942, pour échapper à la déportation. Il contient aussi une liste (probablement incomplète, dit l'auteur...) de 71 mathématiciens qui subirent des persécutions diverses.

Mais revenons à nos cent quarante-cinq émigrés, hommes et femmes (il y a quinze femmes dans cette liste) qui furent les acteurs de cette histoire (Histoire). Emmy Noether, Hermann Weyl, Richard Courant, nous le savons, mais aussi cent quarante-deux autres. On pense aux scientifiques qui quittèrent l'Allemagne parce que les lois antisémites les avaient privés de leurs postes, leur interdisaient de publier leurs travaux, et menaçaient leurs vies.

Mais il y eut aussi des mathématiciens qui émigrèrent parce qu'ils ne pouvaient supporter de vivre sous le terrorisme nazi – certains, comme Carl Ludwig Siegel,

revinrent en Allemagne au cours des années 1950. L'un d'eux était Peter Thullen, spécialiste d'analyse complexe, collaborateur et ami d'Henri Cartan, qui partit pour l'Italie, puis l'Équateur (en 1934–35) et qui avait tenu un journal en 1933 : ses notes, reproduites dans un appendice du livre, montrent l'ambiance terroriste qui régna en Allemagne dès le début de la période nazie et que personne, juif ou pas (Thullen lui-même était un militant des mouvements de jeunes catholiques), ne pouvait manquer de constater et de subir.

La plupart des émigrés étaient pourtant juifs (considérés, et donc menacés, comme tels par le régime).

Certains cherchèrent des postes en Europe, en France (comme Emil Julius Gumbel et Felix Pollaczek), en Italie (comme avait fait Thullen), ou aux Pays-Bas (comme Blumenthal), des choix qui s'avérèrent plutôt mauvais, lorsque ces pays édictèrent leurs propres lois antisémites (la France en 1940, l'Italie en 1938) ou furent occupés par les troupes allemandes (les Pays-Bas). D'ailleurs certains italiens (comme Beniamino Segre) et français (Jacques Hadamard, Szolem Mandelbrojt, André Weil...) durent émigrer pour échapper à la politique anti-juive de leurs pays. Max Dehn espérait prendre le poste que libérait Viggo Brun à Torndheim, mais une fois la Norvège occupée, il dut émigrer une deuxième fois (il arriva aux États-Unis... grâce au transsibérien). Fritz Noether émigra en Union soviétique, où il fut finalement victime du stalinisme. D'autres pays sont mentionnés, la Suède, l'Angleterre, la Turquie, l'Australie, le Canada...

Amerika !

Mais les États-Unis furent la destination principale (et/ou finale) de la grande majorité de nos émigrants. Dans les années 1930, la communauté mathématique américaine était déjà bien organisée, ses membres avaient produit des résultats de haut niveau (par exemple, au Congrès international d'Oslo en 1936, les toutes premières médailles Fields avaient été attribuées à un Européen, le finlandais Lars Ahlfors, et à un américain, Jesse Douglas, pour sa solution du problème de Plateau). Elle fut pourtant profondément transformée par cette arrivée massive de bons (et même souvent exceptionnels) mathématiciens, qui, de plus, travaillaient sur des sujets peu représentés outre Atlantique.

Bien sûr, il y eut la peur que ces immigrants prennent tous les postes et qu'il ne reste rien pour les étudiants que leurs collègues américains formaient. Bien sûr, il y eut quelques manifestations d'un antisémitisme qui n'était pas encore politiquement incorrect. Des mathématiciens aussi importants que Max Dehn ou André Weil furent condamnés à des postes dans des institutions peu prestigieuses, Black Mountain College ou Lehigh (voir [7])... le pays fut d'ailleurs qualifié de *a land of intellectual cannibals* par Oscar Zariski (voir [4]), un immigrant lui aussi (il était originaire de Biélorussie, pas un germanophone, donc, mais l'influence de l'immigrante allemande Emmy Noether dans sa formation est indiscutable).

Puisqu'il est question de l'influence d'Emmy Nother, mentionnons le rôle joué par quelques immigrants exceptionnels sur la constitution, en Amérique, de nouvelles disciplines. Nous avons déjà cité Richard Courant, mais il ne fut pas le seul allemand impliqué dans la création de nouvelles écoles de mathématiques appliquées. Le livre étudie et décrit le rôle joué par von Karman, von Mises et d'autres.

La table des matières

C'est un livre très riche et le plus simple est de dresser une liste des titres de chapitres :

– The terms "German-speaking mathematicians", "forced" and "voluntary emigration",
– The notion of "mathematician" plus quantitative figures on persecution,
– Early emigration,
– Pretexts, forms, and the extent of emigration and persecution,
– Obstacles to emigration out of Germany after 1933, failed escape, and death,
– Alternative (non-American) host countries,
– Diminishing ties with Germany and self-image of the refugees,
– American reaction to immigration : help and xenophobia,
– Acculturation, political adaptation, and the American entrance into the war,
– The impact of immigration on American mathematics,
– Epilogue : the postwar relationship of German and American mathematicians.

Une synthèse historique de ce genre se fonde, nous l'avons dit, sur de nombreux documents. Certains sont reproduits dans le livre et sont particulièrement pertinents pour l'analyse menée par l'auteur. Citons les journaux de Richard von Mises et de Peter Thullen.

Conclusion

Parmi ces documents, que l'on m'excusera de qualifier d'émouvants, se trouve une lettre que le mathématicien Max Dehn envoya à la société mathématique allemande en 1948 (dont je propose ici un extrait, dans une double traduction dont j'assume la responsabilité, voir aussi [2]) :

> Mais *je ne peux pas revenir à la Deutsche Mathematiker-Vereinigung*. Je n'ai aucune raison de penser que cette association agira à l'avenir autrement qu'elle l'a fait en 1935. Je crains qu'elle ne résiste pas, une fois encore, à des pressions extérieures. [...] Qu'elle ne se soit pas dissoute, qu'un nombre important de ses membres ne l'ait pas quittée, voilà ce qui me conduit à cette attitude négative. Je n'ai pas peur que la DMV exclue à nouveau ses membres juifs, mais la prochaine fois ce sera peut-être des prétendus communistes, anarchistes, ou personnes de couleur.

C'est bien de la responsabilité de la communauté des mathématiciens qu'il est question ici. Outre une « protestation intermittente et désespérée de la mémoire » (comme l'écrivit Jankelevitch), outre « la responsabilité pour les vivants de garder vivante la mémoire de ces événements historiques » (une citation de la préface du livre), ce livre est un témoignage de la volonté, pour une partie de notre communauté, d'assumer cette responsabilité. L'auteur, qui est allemand, présente lui-même son livre comme un signe que « les mathématiciens allemands sont préparés à affronter les problèmes et la responsabilité du passé ». Il n'est pas évident qu'il en soit de même partout. J'ai été très impressionnée, lorsque j'ai commencé à travailler sur la façon dont les mathématiciens français juifs avaient disparu des publications scientifiques pendant la période de Vichy (voir [1]), de constater que *rien* n'avait été fait sur ce sujet.

Je laisse le dernier mot à l'auteur, Reinhard Siegmund-Schultze, lui-même un chercheur de l'ancienne Allemagne de l'Est, aujourd'hui professeur dans une université norvégienne :

> les raisons de s'intéresser au problème social et historique de l'émigration scientifique sont nombreuses, et parmi elles des événements politiques récents.

Références

[1] M. Audin – « Publier sous l'Occupation I. Autour du cas de Jacques Feldbau et de l'Académie des sciences », *Rev. Hist. Math.* **15** (2009), p. 5–57.

[2] ———, « Une « vie brève » de Max Dehn », *Images des Mathématiques, CNRS* (2010), En ligne `http://images.math.cnrs.fr/Une-vie-breve-de-Max-Dehn.html`.

[3] J. Olff-Nathan (éd.) – *La Science sous le Troisième Reich*, Seuil, Paris, 1993.

[4] C. Parikh – *The unreal life of Oscar Zariski*, Academic Press, 1991.

[5] S. Segal – *Mathematicians under the Nazis*, Princeton University Press, Princeton, 2003.

[6] R. Siegmund-Schultze – *Mathematiker auf der Flucht vor Hitler*, Dokumente zur Geschichte der Mathematik [Documents on the History of Mathematics], vol. 10, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1998, Quellen und Studien zur Emigration einer Wissenschaft. [Sources and studies on the emigration of a science].

[7] A. Weil – *The Apprenticeship of a Mathematician*, Birkhäuser, Basel, 1992, Translated from the French by Jennifer Gage.

M. Audin,
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université de Strasbourg et CNRS

Ce compte-rendu est la version française d'un texte à paraître dans le numéro de novembre 2010 des *Notices of the AMS*

Mathématiques, sciences et musique
É. Decreux
Ellipses, 2008. 301 p. ISBN : 978-2-7298-4096-9. 24,50€

L'auteur de ces lignes ne manque jamais une occasion d'affirmer de manière un peu provocatrice qu'il n'y a aucun rapport entre mathématiques et musique (il est d'ailleurs intéressant que la réplique la plus fréquente soit « Et les gammes ? », comme si la musique c'était les gammes...). Cette position est une réaction au poncif habituel – souvent véhiculé par des mathématiciens – qu'il y a identité entre mathématiques et musique (par exemple entre recherche mathématiques et composition musicale) dont il nous semble inutile de rappeler qu'il est à la fois faux et sans intérêt. L'ouvrage qui est l'objet de cette recension ne tombe heureusement pas dans ce travers. L'auteur prend soin, dès l'introduction, de distinguer entre la musique et son enracinement dans différentes cultures d'une part, et l'utilisation ou l'apparition des mathématiques dans la modélisation de pièces musicales, en acoustique ou dans la physiologie de l'audition d'autre part.

Les deux premiers chapitres abordent l'acoustique et ses applications (par exemple l'étude du timbre des instruments de musique). Les trois chapitres suivants, très riches, s'intéressent d'abord au dialogue entre musique et sciences dans l'Antiquité et au Moyen Âge (avec des figures incontournables comme Pythagore, mais aussi d'intéressantes indications sur par exemple les musiques

d'Extrême-Orient) puis à la période qui va de la Renaissance à l'époque des Lumières (citons Rameau), et finalement au dix-neuvième siècle avec en particulier Helmholtz. La conclusion insiste sur la spécificité des mathématiques qui sont ici un modèle de « description » mais pas « d'explication en soi », puis indique, faisant allusion à l'époque moderne et aux usages de l'informatique en musique, qu'il « convient de rester prudent quant à la réelle nature des liens entre les sons et la musique ». Nous ne résistons pas au plaisir de reproduire les dernières phrases de cette conclusion : « Les exemples issus de l'histoire semblent inviter à prendre garde de ne pas inverser l'ordre des priorités entre ce qui est du domaine de la sensation et de la construction musicale et celui de la connaissance. Ils rappellent que pour comprendre la musique, l'écoute et la pratique sont et demeurent les gestes de base ».

Après cette conclusion viennent une annexe mathématique, un index des termes physico-mathématiques, un index des termes musicaux, des éléments de biographie, et une bibliographie d'un peu moins de cent références. Les lecteurs trouveront dans cet ouvrage à la fois un riche corpus que nous n'avons que brièvement effleuré des interactions entre musique, mathématiques et sciences, mais aussi les avertissements leur suggérant de ne pas croire que la musique est réductible aux mathématiques.

J.-P. Allouche,
CNRS, LRI, UMR 8623,
Université Paris-Sud

Representation Theory of the Symmetric Groups

T. Ceccherini-Silberstein, F. Scarabotti et F. Tolli
Cambridge studies in advanced mathematics 121, 2010. 412 p. ISBN : 978-0-521-11817-0. 78$

Ce livre traite de la théorie des représentations $\mathbb{C}$-linéaires du groupe symétrique. Le public visé est assez large. Le lecteur n'a besoin que de connaissances élémentaires de théorie des groupes et d'algèbre linéaire pour accéder au contenu du livre (même les produits tensoriels sont redéfinis), et les concepts ne sont développés dans leur plus grande généralité que lorsque cela n'introduit pas de difficulté technique supplémentaire. En même temps, les principaux résultats classiques sont présentés de manière détaillée et la bibliographie est soigneusement établie. Le livre peut donc servir d'introduction au sujet autant que de référence.

Un des intérêts du livre pour le lecteur maîtrisant déjà les bases de la théorie des représentations du groupe symétrique est l'originalité de la présentation. Celle-si s'inspire notamment des travaux de Okounov et Vershik, et repose sur des outils tels que les paires de Gelfand, les algèbres de Gelfand-Tsetlin, ou les éléments de Young-Jucy-Murphy. Le livre incorpore également un certain nombre de résultats récents, par exemple les formules de Lassalle pour les caractères du groupe symétrique (publiées en 2008).

L'ouvrage commence par deux chapitres d'exposition de la théorie des représentations des groupes finis, sur le corps des nombres complexes. Le premier chapitre est annoncé par les auteurs comme un cours d'introduction basique à la théorie des représentations des groupes finis et il présente de manière concise tous

les concepts usuels de la théorie. Un deuxième bref chapitre présente la théorie des bases de Gelfand-Tsetlin et les algèbres associées.

L'étude des groupes symétriques proprement dite commence au troisième chapitre avec l'analyse de leurs représentations irréductibles selon l'approche d'Okounov et Vershik, dont les grandes lignes sont les suivantes. On démontre tout d'abord que les paires $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n+1})$ sont sans multiplicités, c'est-à-dire que toute représentation irréductible de $\mathfrak{S}_{n+1}$ se restreint en une somme directe de représentations irréductibles *deux à deux distinctes* de $\mathfrak{S}_n$. On peut alors former le graphe de branchement des groupes symétriques, dont les sommets de niveau n sont les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$, et dont les arêtes relient un sommet V de niveau n et un sommet W de niveau $n+1$ si V est une sous-représentation de la restriction de W à $\mathfrak{S}_n$ (L'ensemble des chemins du graphe de branchement reliant la représentation triviale de $\mathfrak{S}_1$ à un sommet V donne donc une base de V, dite base de Gelfand-Tsetlin). Parallèlement, on dispose d'un autre graphe, le graphe de branchement de Young, dont les sommets de niveau n sont les diagrammes de Young à n cases, et dont deux sommets sont reliés si on peut passer d'un diagramme de Young à l'autre en ajoutant une case. La démarche consiste alors à identifier les deux graphes de branchement. Cette identification repose sur l'étude du spectre de certains éléments X_k de l'algèbre de groupe $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$, les éléments de Young-Jucy-Murphy (chaque X_k est la somme des transpositions (i,k) pour i variant de 1 à $k-1$).

Les auteurs utilisent ensuite les informations obtenues par cette méthode pour pousser plus loin l'analyse des représentations irréductibles et démontrer un certain nombre de règles combinatoires classiques : règle de Murnaghan-Nakayama pour calculer récursivement les caractères des représentations irréductibles, règle de Pieri ou règle de Young pour calculer la décomposition de certaines représentations usuelles en représentations irréductibles. La combinatoire exposée au chapitre trois est ensuite complétée au chapitre six, qui présente notamment une démonstration de la célèbre règle de Littlewood-Richardson (mais en suivant cette fois-ci une méthode classique, due à James).

Les autres aspects classiques de la théorie des représentations des groupes symétriques ne sont pas en reste dans le livre. Le chapitre quatre expose les bases de la théorie des fonctions symétriques, en soulignant le lien avec les représentations du groupe symétrique. Le chapitre cinq continue sur la théorie des caractères et expose des formules récentes de Lassalle et de Corteel-Goupil-Schaeffer. Le chapitre sept est un exposé autonome et concis des bases de la théorie des représentations des $*$-algèbres de dimension finie (c'est-à-dire des sous-algèbres unitaires et stables par conjugaison de $\mathrm{End}(V)$, pour V de dimension finie). Ses résultats sont utilisés au huitième et dernier chapitre qui expose deux thèmes importants. D'une part la très classique (mais fondamentale) dualité de Schur-Weyl qui lie les représentations des groupes symétriques et des groupes linéaires $GL_n(\mathbb{C})$, découverte au début du XX$^{\mathrm{e}}$ siècle par Schur. D'autre part, une autre dualité de Schur-Weyl mettant en jeu les algèbres de partition, introduites à la fin de ce même siècle indépendamment par V.F.R. Jones et P. Martin.

Le livre de T. Ceccherini-Silberstein, F. Scarabotti et F. Tolli constitue donc un bel ensemble, couvrant des aspects variés de la théorie des représentations des groupes symétriques, accessible à des néophytes mais potentiellement intéressant

pour un lecteur un peu plus chevronné. Comme ombre au tableau, on peut mentionner une certaine profusion de notations, qui fait parfois obstacle à une lecture rapide. On regrette donc l'absence d'un index des notations. Enfin, à titre anecdotique, il manque une entrée pour les fonctions sphériques dans l'index. Mentionnées deux fois dans la préface du livre pour leur importance et apparaissant plusieurs fois dans le livre, le lecteur doit pourtant éplucher le texte pour trouver leur définition (p. 50, entre deux exercices).

A. Touzé,
Université Paris XIII

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Faculty Position in Geometry
at the Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)

The School of Basic Sciences at EPFL invites applications for a position of professor of mathematics at the associate or full professor level in the field of geometry. The field should be interpreted broadly and may comprise, for example, differential, algebraic or arithmetic geometry, although certainly not limited to these domains.

We are seeking candidates with an outstanding research record and a strong commitment to excellence in teaching at both the undergraduate and graduate levels. Substantial start-up resources and research infrastructure will be available.

The School of Basic Sciences aims for a strong presence of women amongst its faculty, and female candidates are strongly encouraged to apply. Applications including letter of motivation, curriculum vitae, publication list, concise statement of research and teaching interests as well as the names and addresses (including email) of at least five references should be submitted in PDF format via the website **http://sbpositions.epfl.ch/applications/**. The evaluation process will start on December 15, 2010, but applications arriving after that date may also be considered.

For additional information, please contact **Professor Philippe Michel**, Chair, Mathematics Search Committee.

Email: philippe.michel@epfl.ch,

Please specify the tag «geometry» in the subject field.