

SOMMAIRE DU N° 123

SMF

Mot du Président	3
------------------------	---

MATHÉMATIQUES

Des fronts d'onde en topologie, <i>E. Ferrand</i>	5
Analyse semiclassique d'algorithmes de type Metropolis, <i>L. Michel</i>	16

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Une brève introduction à la théorie effective de l'aléatoire, <i>L. Bienvenu, M. Hoyrup</i> ..	35
--	----

DOCUMENTS

En souvenir de Paulette Libermann (2), <i>M. Chaperon</i>	49
---	----

ENSEIGNEMENT

Réformons la réforme, <i>Contribution du Forum des Sociétés Savantes du 10 novembre 2009</i>	67
Réforme du lycée et enseignement scientifique, <i>D. Duverney</i>	72
Communiqué joint sur la réforme du lycée, <i>SMF, APMEP</i>	79
Enseignement de l'informatique au lycée, <i>M. Granger</i>	81

INFORMATIONS

Nouvelles du CNRS, section 01, <i>V. Bonnaillie-Noël, Y. Brenier</i>	85
Note d'information du comité d'experts d'attribution de la PES	90

CARNET

Jean Mémin (1940 – 2009), <i>F. Coquet, J. Jacod</i>	93
Quelques souvenirs sur I.M. Gelfand, <i>A. Guichardet</i>	95

LIVRES	101
--------------	-----

Éditorial

Ce numéro a été conçu une fois de plus dans un contexte de politique scientifique et éducative agité et complexe. Plusieurs articles et le mot du Président se font l'écho des problèmes qu'affrontent actuellement les mathématiques. Le plus sérieux à long terme, puisqu'il y va du vivier et des générations futures de mathématiciens, scientifiques et ingénieurs, est sans doute, avec la réforme de la formation des enseignants, celui des changements de programmes et d'organisation envisagés au Lycée et l'affaiblissement corrélatif des exigences scientifiques au profit d'un hypothétique et ambigu rééquilibrage des filières.

Par ailleurs, les transformations qui affectent l'enseignement supérieur et la recherche ne vont pas sans poser autant de questions de fond. Tout un ensemble de mesures contribuent à modifier profondément l'univers académique et scientifique dans lequel la plupart d'entre nous ont grandi et vécu : nouvelles méthodes d'évaluation, individuelles et collectives ; mise en place de statuts et de primes pour « l'excellence » (P.E.S., chaires...) ; différenciation des universités au travers des différents réseaux d'excellence et outils de financement...

Dans tous les cas ces mesures, si elles ont des traits positifs, puisqu'elles contribuent à augmenter les financements de la recherche, ne sont pas anodines en termes d'éthique collective, puisqu'elles vont toutes dans le sens d'une remise en cause d'une certaine forme d'égalité républicaine, qui, longtemps, s'est manifestée à tous les niveaux. Les diplômes d'une petite université valaient ceux d'une grande université parisienne ; de façon plus symbolique, les primes (comme celle d'encadrement doctoral et de recherche) récompensaient un investissement (un travail d'encadrement) ou des résultats remarquables (un travail de recherche) plutôt qu'une qualité individuelle supérieure (l'excellence...).

Tous ces glissements sémantiques et symboliques finissent par avoir pour corrélats des effets bien tangibles en termes de comportements collectifs (dégradation ou évolution dans le sens de l'histoire, à chacun d'en juger). La décision récente de Paris 6 de nier le rôle national de l'IHP pour n'y voir qu'une de ses écoles internes parmi d'autres, au détriment de ses fonctions collectives d'hébergement des associations et d'outil au service de notre communauté en est le dernier exemple. Exemple pénible par ses effets concrets, mais aussi par ce qu'il signifie de mutation d'une idée de l'université française, conçue comme un tout au service de la collectivité, vers celle d'institutions devant rentabiliser les actifs immobiliers et bientôt financiers que la collectivité leur a confiés tout en affichant une place honorable sur le marché des quotations internationales (Shangai...). Comment tous ceux qui concevaient, peut-être un peu naïvement, l'IHP comme une grande maison des mathématiciens ne ressentiraient-ils pas un peu d'amertume à l'idée de ne plus y voir que la façade prestigieuse d'une grande université parisienne ?

O tempora, o mores...

Avec les meilleurs vœux de la Gazette à tous ses lecteurs pour l'année mathématique 2010.

— Zindine Djadli, Frédéric Patras

Mot du Président

Chers amis, chères amies,

Je me suis adressé à vous par courriel avant Noël pour vous faire part de notre préoccupation concernant l'évolution de l'IHP et, en particulier, la présence en ses murs des sociétés savantes et des associations. Je remercie toutes celles et ceux qui, suite à ce message, ont manifesté leur attachement aux missions nationales de l'IHP au service des mathématiques et de la physique théorique, et nous ont proposé leur aide : il nous sera probablement nécessaire d'y avoir recours ; la SMF restera extrêmement vigilante, tout particulièrement si les risques concernant la vocation de l'IHP au service de la communauté des mathématiciens et des physiciens théoriciens se précisaient. Paradoxalement, cette crise pourrait avoir une conséquence positive : en mettant au grand jour les questions de fond qui se posent sur l'avenir de l'IHP, elle pourrait permettre que celui-ci ne soit pas tracé seulement par concertation entre quelques décideurs mais que nous réfléchissions ensemble à l'usage que nous avons fait jusqu'à présent de cet institut unique en son genre, et que notre communauté ait pleinement son mot à dire sur son avenir.

Un événement majeur pour nous a été la tenue du colloque «MATHS A VENIR», les 1^{er} et 2 décembre. Ce colloque a été un réel succès puisqu'il a réuni quelque 700 participants, mélangeant mathématiciens professionnels et élus, journalistes et personnalités ayant des responsabilités dans l'enseignement supérieur, la recherche ou les entreprises. Les tables rondes ont permis de préciser certains des problèmes que rencontrent les mathématiciens pour faire connaître leur discipline, et les retombées que leurs recherches peuvent avoir dans les autres sciences et la technologie. L'impact médiatique du colloque montre que ces préoccupations ont été comprises largement au-delà de notre communauté. Cependant, rétrospectivement, nous ne serons assurés de son succès que s'il est effectivement suivi d'effets. Aussi, les principaux acteurs des mathématiques, dont les sociétés savantes, doivent réfléchir sur ses conclusions (que l'on peut trouver sur le site web de « MATHS A VENIR ») et participer à leur mise en œuvre. Elles soulignent certaines des difficultés que nous rencontrons : diminution du nombre de postes dans l'enseignement supérieur, fossé toujours présent entre les grandes écoles et l'université, nécessité d'accroître la diffusion de la culture mathématique, de préserver une recherche fondamentale non

ciblée, de maintenir l'attractivité de la France dans un contexte international de concurrence de plus en plus vive, entre un nombre d'acteurs grandissant. Même si la qualité des mathématiques française est unanimement reconnue, ces conclusions ont aussi signalé des points où nous avons à apprendre de nos voisins : comment multiplier et organiser les interactions avec les autres sciences et les entreprises ?

Dans le passé, le relatif éloignement entre les mathématiques et les questions touchant la société avait largement dispensé les mathématiciens d'aborder des problèmes d'éthique qui se posent depuis longtemps en physique ou en biologie, par exemple. Ce n'est plus le cas actuellement, et ce colloque a mis en évidence la nécessité pour notre communauté de s'interroger sur ses responsabilités.

Il sera certainement nécessaire d'ajouter une vraie réflexion sur l'articulation entre les besoins qui ont été mis en évidence et l'évolution rapide du paysage de l'enseignement supérieur et de la recherche, du fait de l'autonomie des universités, de l'évolution du CNRS, des modes d'évaluation, et des modes de financement. Il est important de mesurer l'impact que ces évolutions ont déjà sur l'enseignement et la recherche mathématique, et leurs conséquences probables à court ou moyen terme ; les sociétés savantes en sciences doivent ici continuer à jouer le rôle clef qui est le leur, du fait de leur position privilégiée : le contact direct qu'elles maintiennent avec l'ensemble des enseignants et des chercheurs leur permet une analyse précise de la situation ; elles disposent d'une liberté de parole qui leur permet d'adresser à nos tutelles des critiques constructives ; elles doivent enfin déployer des actions incitatrices vis-à-vis de notre communauté pour indiquer les nouvelles opportunités à saisir et accroître ainsi la réactivité, le dynamisme et la cohésion des mathématiciens.

Je vous souhaite une très bonne année !

Le 1^{er} janvier 2010
Stéphane Jaffard

MATHÉMATIQUES

Des fronts d'onde en topologie

Emmanuel Ferrand

Différentes notions de « front d'onde », plus ou moins reliées entre-elles, interviennent dans divers champs de la physique et des mathématiques (en particulier en analyse microlocale). Il ne sera question ici que de la version la plus naïve, celle issue du principe de Huygens (1629-1695), mais que l'on développera dans une direction peut-être inattendue, celle de la topologie différentielle et de la théorie de nœuds. Nous évoquerons au passage la géométrie différentielle extrinsèque des courbes et des surfaces, les notions d'enveloppe et de contour apparent, les diagrammes de bifurcation, la transformée de Legendre,...

L'essentiel de ce qui est résumé ci-dessous est exposé avec beaucoup plus de brio par V.I. Arnold dans une multitude de publications, en particulier [Ar1]. Je souhaite juste montrer ici la continuité entre ces considérations élémentaires et des questions nettement plus pointues et récentes en topologie *de contact*.

1. Propagation des équidistantes

1.1. Le retournement de l'ellipse

Dans un milieu homogène isotrope représenté par le plan euclidien, on peut, en suivant Huygens, modéliser un phénomène de propagation en considérant la famille des courbes dites *équidistantes* à une courbe donnée, sur laquelle on aura choisi un côté (i.e. une coorientation), pour indiquer le sens de la propagation. Cette courbe initiale représentera le « front d'onde » au temps $t = 0$, la courbe équidistante à distance t du côté indiqué, le *front d'onde* au temps t .

Déterminer les courbes équidistantes revient par définition à considérer l'ensemble des points extrémités de segments de longueur t , perpendiculaires à la courbe initiale. Supposons par exemple que la courbe initiale soit une ellipse, avec une propagation vers l'intérieur. On voit que lorsque t est petit, cette courbe équidistante est une courbe convexe, lisse. Mais, en un temps fini, ce processus de propagation développe des singularités.

Le calcul montre que lorsque t est égal au rayon de courbure en un point de la courbe initiale, alors l'équidistante correspondante est singulière au point « image ». Dans le cas de l'ellipse, ces singularités sont des points de rebroussement de première espèce, sauf lorsque t est égal à un des extrema du rayon de courbure.

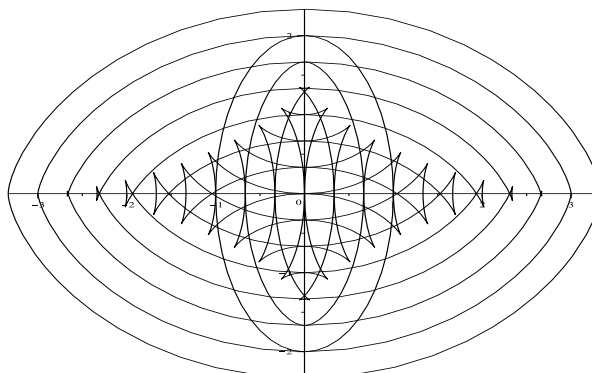


FIG. 1. Le retournement de l'ellipse.

Au cours de la propagation, l'ensemble des points singuliers décrit donc le lieu des centres de courbure, i.e. la développée de l'ellipse, qui elle-même est une courbe plane singulière (une sorte d'astroïde à 4 pointes).

Écrire explicitement les calculs pour cet exemple est un exercice simple mais instructif sur la théorie des courbes paramétrées. Mais on peut aussi décrire les équidistantes de la manière suivante, qui mélange le paramétré et l'implicite : Soit $\gamma : S^1 \mapsto \mathbb{R}^2$ notre courbe initiale supposée régulière, paramétrée par un angle $w \in S^1$. Notons $F(Q, w)$ la distance entre un point Q du plan et le point $\gamma(w)$ de la courbe. Le point Q est l'extrémité d'un segment de longueur $t > 0$, orthogonal à la courbe, si et seulement si $F(Q, w) = t$ et si de plus w est un *point critique* pour la fonction $w \mapsto F(Q, w)$. Ainsi, l'ensemble Γ_t , donné par la formule suivante :

$$\Gamma_t = \{Q \in \mathbb{R}^2, \exists w \in S^1, F_t(Q, w) = 0, \frac{\partial F_t}{\partial w}(Q, w) = 0\},$$

où l'on a posé $F_t(Q, w) = F(Q, w) - t$, est l'union des deux équidistantes à distance t , correspondant à chacun des cotés de la courbe.

1.2. Le front d'onde

Le même genre de calcul peut se faire pour déterminer les hypersurfaces équidistantes d'une sous-variété N immergée dans une variété riemannienne M , de dimension n quelconque. On aboutit, modulo quelques hypothèses, à une formule du type suivant, dans laquelle F est une fonction définie sur le produit $M \times N$.

$$\{Q \in M, \exists w \in N, F(Q, w) = 0, \frac{\partial F}{\partial w}(Q, w) = 0\}$$

Pour qu'une telle formule ait un sens, il n'est pas nécessaire de disposer d'une immersion de N dans M , ni même que la dimension de N soit inférieure à celle de M . Il suffit d'avoir deux variétés lisses M et N et une fonction définie sur le produit. *Un front d'onde sera ici un sous-ensemble de M défini localement par une formule de ce type.*¹

¹ même s'il n'est plus question d'onde du tout !

Nous allons dans la suite considérer diverses constructions issues de contextes variés, qui font apparaître de tels fronts d'ondes.

2. Quelques autres exemples classiques

2.1. Enveloppes et principe de Huygens

Dans les livres de géométrie différentielle traditionnelle on apprend que, étant donné une famille de courbes γ_λ dans le plan, indexées par $\lambda \in I$ pour un certain intervalle I et définies implicitement par une équation $\gamma_\lambda = \{Q \in \mathbb{R}^2, F(Q, \lambda) = 0\}$, on peut en définir l'enveloppe E , par la formule suivante :

$$E = \{Q \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda \in I, F(Q, \lambda) = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda}(Q, \lambda) = 0\},$$

ce qui montre qu'une enveloppe est un front d'onde.

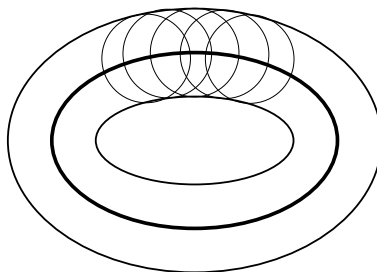


FIG. 2. Les équidistantes comme enveloppes de cercles.

Ce n'est pas une surprise, les questions de propagation ne sont pas très loin. Si l'on revient à la formule 1.1 pour les équidistantes d'une courbe, on s'aperçoit que l'ensemble Γ_t est l'enveloppe de la famille des cercles de rayon t , centrés sur la courbe initiale γ . C'est une version du *principe de Huygens*, selon lequel une source compliquée (ici la courbe initiale γ) est équivalente à la superposition de sources ponctuelles placées en chaque point de la source, émettant des fronts d'onde circulaires.

2.2. Contours apparents

Considérons maintenant une surface N dans $\mathbb{R}^3$. Fixons un axe privilégié « vertical », et considérons la projection sur le plan horizontal, orthogonal à cet axe. Lorsqu'on regarde N (que l'on suppose fabriquée dans un matériau plus ou moins translucide) depuis la direction verticale, on en voit le *contour apparent*, c'est-à-dire la trace sur le plan de projection de l'ensemble des points de N où le plan tangent à N contient la direction de projection.

En géographie, si N est le graphe de la fonction altitude et si de plus l'axe appelé « vertical » ci-dessus est celui (plutôt horizontal) de notre regard dans un paysage de collines, la ligne d'horizon est une partie seulement du contour apparent, les collines n'étant pas translucides.

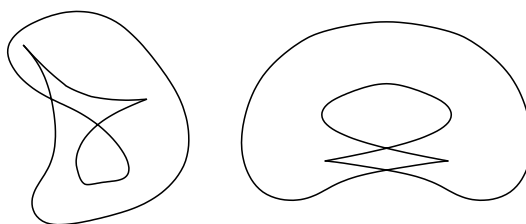


FIG. 3. Deux contours dans le plan de tores immergés dans $\mathbb{R}^3$.
Exercice : retrouver les immersions correspondantes.

Si N est donnée implicitement par une équation régulière

$$F(x, y, z) = 0,$$

le plan tangent contient la direction verticale si et seulement si

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

(le gradient de F , qui est orthogonal au plan tangent, est alors horizontal).

Le contour apparent est alors donné par

$$\{(x, y), \exists z, F(x, y, z) = 0, \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 0\}.$$

Il s'agit donc bien d'un front d'onde au sens de 1.2. Il n'y a pas de raison de se limiter au cas d'une surface dans l'espace tridimensionnel, on peut définir de manière similaire le contour apparent pour une sous-variété dans un produit ou dans l'espace total d'un fibré.

2.3. Bifurcations de valeurs critiques

Considérons une famille f_t de fonctions d'une variable réelle w , paramétrée par t dans un intervalle I . Le *diagramme de bifurcation des valeurs critiques* est le sous-ensemble de $I \times \mathbb{R}$ constitué des couples (t, u) tels que u soit un extremum local.

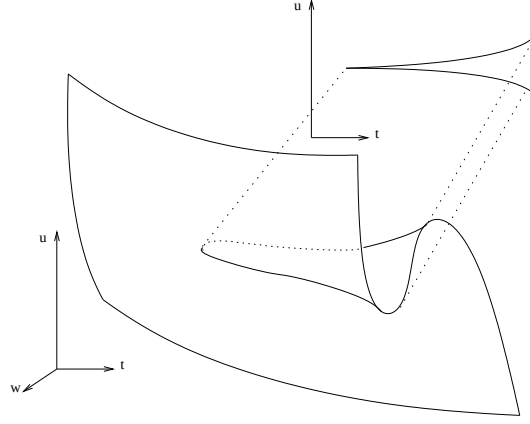
C'est l'ensemble

$$\{(t, u), \exists w, f'_t(w) = 0, u = f_t(w)\}$$

Si l'on pose $F(t, u, w) = u - f_t(w)$, on voit que cet ensemble est encore un front d'onde, au sens de 1.2. C'est aussi le contour apparent du graphe de la fonction $(t, w) \mapsto f_t(w)$, projeté sur le plan (t, u) .

Par exemple, pour $f_t(w) = w^3 - tw$, le diagramme de bifurcation est un point de rebroussement de première espèce.

Remarque. La *transformation de Legendre* s'inscrit dans ce contexte. Considérons une fonction g d'une variable réelle w , et la famille de fonctions paramétrée par $t \in \mathbb{R}$ définie par $f_t(w) = tw - g(w)$. Le diagramme de bifurcation des valeurs critiques de cette famille est constitué de tous les extrema locaux. Supposons g convexe quadratique hors d'un compact. Chaque fonction f_t possède alors un maximum global. Si pour tout t on sélectionne ce maximum

FIG. 4. Bifurcations des extrema de $w \mapsto w^3 - tw$.

dans le diagramme de bifurcation, on obtient une fonction continue, en général non lisse, et dont le graphe est un sous-ensemble du diagramme de bifurcation. Nous verrons plus loin (3.3) comment dépasser certaines difficultés liées à cette non-différentiabilité. Ce point de vue « front d'onde » peut être utile, par exemple en thermodynamique classique, pour clarifier des diagrammes de phase (voir Thom [Th], et aussi les travaux de F. Aicardi [AFV]).

2.4. Valeurs critiques, suite

La notion de valeur critique permet en fait d'unifier tout ce qui précède. Soient N et M deux variétés lisses, et une application lisse $\varphi : N \rightarrow M$. Le contour apparent dans M du graphe de φ , $G \subset N \times M$, n'est pas autre chose que l'ensemble W_φ des *valeurs critiques* de φ , c'est-à-dire l'ensemble des points de l'image de φ , image d'un point où la différentielle de φ est de rang inférieur à $\dim(M)$.

$$W_\varphi = \{Q \in M, \exists w \in N, Q = \varphi(w), \dim(D\varphi_w(T_w N)) < \dim(M)\}$$

Par exemple, si $\dim(N) < \dim(M)$, tous les points de l'image sont critiques, et W_φ s'identifie avec l'image de φ .

2.5. Singularités

Les exemples de fronts d'onde rencontrés jusqu'ici présentaient en général des singularités. Cette formulation en termes de valeurs critiques permet d'utiliser toutes les ressources de la théorie des singularités, et d'identifier ces singularités dans les cas génériques.

Il résulte de la théorie d'Arnold (voir, par exemple, [AGV] et [Ar2]) qu'un front d'onde sur une surface est génériquement une courbe présentant des points de rebroussement de première espèce et des points doubles transverses isolés (voir les contours de la figure 2.2). Un front d'onde dans l'espace est génériquement une surface présentant des lignes de points de rebroussement et de points doubles transverses, des queues d'aronde et des points triples isolés.

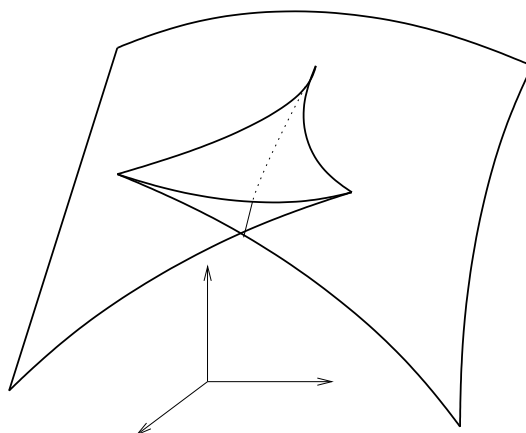


FIG. 5. Au voisinage d'une queue d'aronde.

3. Singuliers mais pas trop : le point de vue de contact

3.1. La structure de contact

Une meilleure compréhension des fronts d'ondes génériques provient de l'introduction d'un ingrédient supplémentaire, *la structure de contact*. Revenons provisoirement au cas des fronts d'onde dans le plan euclidien. Un *élément de contact* est la donnée d'un point du plan et d'une droite passant par ce point. L'ensemble E des éléments de contact du plan est donc de dimension 3, c'est le produit du plan par l'espace projectif réel de dimension 1 (qui est un cercle).

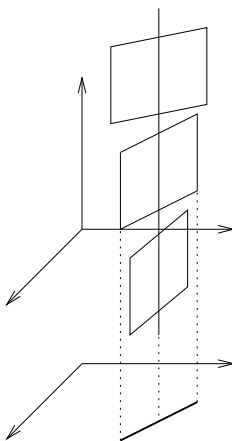


FIG. 6. Le fibré des éléments de contact du plan et son champ d'hyperplans naturel.

L'ensemble E nous parvient naturellement muni d'un *champ de plan*, obtenu par la construction « tautologique » suivante. Représentons un élément $e \in E$ par

un couple $e = (Q, D)$, où Q est un point du plan, et D une droite passant par Q . Soit ξ_e le plan de l'espace tangent à E en e , qui contient la direction tangente à la fibre (le cercle) au dessus de Q , et qui, dans la direction « plane », contient la droite D .

Ce champ de plans est la *structure de contact naturelle de E* . Une courbe lisse immergée dans le plan se relève naturellement à E en associant à chaque point de la courbe la tangente passant par ce point. Ainsi, s'il y a un croisement normal, ce relèvement fournit deux points distincts dans la fibre au dessus du point double. Si la courbe n'est plus immergée, mais possède des rebroussements de première espèce, elle se relève aussi, car, à défaut de vecteur vitesse, il existe au point singulier une droite tangente bien définie. Enfin si la courbe est un front d'onde générique (immersion à croisements transverses en dehors de points de rebroussement de première espèce isolés, voir 2.5), la courbe relevée est plongée : c'est un *entrelacs* dans E .

La courbe relevée possède par construction une propriété remarquable : elle est partout tangente au champ de plans ξ . On dit qu'elle est *legendrienne*. Un front d'onde générique se relève en un entrelacs legendrien, et réciproquement, *un entrelacs legendrien générique se projette sur un front d'onde générique*.

3.2. L'espace des 1-jets de fonctions $J^1(\mathbb{R})$

Fixons dans le plan un système de coordonnées cartésiennes (t, u) , et considérons l'ouvert dense E formé par tous les éléments de contact *non-verticaux*, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas parallèles à l'axe des u . De tels éléments de contact sont repérés par trois coordonnées cartésiennes, (t, u) pour le point base, et la pente p de la droite non-verticale passant par (t, u) . Le plan de contact au point (t, u, p) est engendré par l'axe des p et le vecteur $(1, p, 0)$ (autrement dit $\xi = \ker(du - p dt)$). Il s'agit de la *structure de contact standard* de $\mathbb{R}^3$.

Une fonction lisse d'une variable réelle donne une courbe plongée dans $\mathbb{R}^3$, le « 1-graphe » de f , qui est l'ensemble des $(t, u = f(t), p = f'(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Ce 1-graphe est par construction legendrien. Réciproquement, toutes les courbes legendriennes de $\mathbb{R}^3$ dont la projection dans le plan (t, u) est lisse sont automatiquement des 1-graphes. En effet, cette projection dans le plan, ne pouvant avoir de tangente verticale, est le graphe d'une certaine fonction de la variable t .

La projection d'un entrelacs legendrien compact dans $\mathbb{R}^3$ est donc singulière. Les points de rebroussement sont l'unique moyen de changer de direction selon l'axe des t .

3.3. Transformation de Legendre, suite

L'application $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $(t, u, p) \mapsto (p, u - tp, -t)$ préserve le champ de plans ξ . Elle envoie donc une courbe legendrienne sur une autre courbe legendrienne. L'image du 1-graphe d'une fonction n'est pas en général le 1-graphe d'une fonction, sauf si la projection sur l'axe des p est régulière, c'est-à-dire si la fonction de départ est convexe ou concave. Le graphe de la « vraie » transformée de Legendre (voir 2.3) est une section continue du front d'onde de la legendrienne transformée.

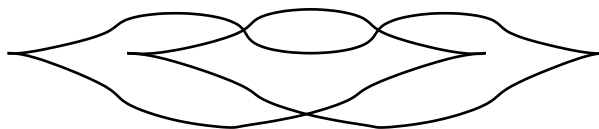


FIG. 7. Le front d'onde d'un nœud de trefle legendrien.

Un calcul montre que l'image par Φ du 1-graphe de $f(t) = t^3$ a pour front d'onde la courbe paramétrée par $(3t^2, -2t^3)$. Plus généralement, au niveau des fronts d'onde, cette transformation envoie les points d'inflexion sur des points de rebroussement. On peut vérifier que l'inverse est aussi vrai. Φ est en fait une version locale de la dualité projective (voir, par exemple, [Fe]). Par ailleurs, cette transformation, qui induit une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le plan (t, p) , est la « déquantification de Maslov » de la transformation de Fourier (voir, par exemple, [Li]).

3.4. Entrelacs legendriens

Un entrelacs legendrien dans $\mathbb{R}^3$ est complètement déterminé par son front d'onde. En effet, la tangence à ξ implique que $p = \frac{du}{dt}$ le long d'une courbe legendrienne. Un front d'onde code donc un entrelacs dans l'espace. Pour obtenir le diagramme de nœud correspondant, il suffit de voir qu'à chaque croisement la branche qui a la plus grande pente p passe au dessus.

Réciproquement, tout diagramme de nœud peut être transformé de sorte que les croisements respectent cette convention, et peut donc être réalisé par un front d'onde, quitte à lui ajouter quelques points de rebroussement (qui ne changent pas la topologie du nœud correspondant). Cette manière de coder les entrelacs par un dessin purement bidimensionnel est connue aujourd'hui sous le nom de *diagramme en grille* (« grid diagram ») et sert à la formulation combinatoire de l'homologie de Heegaard-Floer des entrelacs (voir, par exemple, [NT]).

La question de la classification des entrelacs legendriens (i.e. déterminer si deux entrelacs sont ou non dans la même composante connexe de l'espace des plongements legendriens) possède un intérêt propre en topologie de contact. Cette théorie des nœuds « sous contrainte » legendrienne est équivalente à la classification des fronts d'onde modulo trois mouvements élémentaires, cousins des trois mouvements de Reidemeister. Des invariants assez subtils peuvent être définis dans ce cadre, en particulier une version de l'homologie de contact relative (voir, par exemple, [Ng]) ou bien les « décompositions de front d'onde » de Chekanov et Pushkar, [CP].

4. Éléments de contact, suite

La construction de 3.1 peut être reformulée et généralisée comme suit. Un *élément de contact* sur une variété M de dimension n est la donnée d'un point Q de M et d'un hyperplan vectoriel dans $T_Q M$. Comme un tel hyperplan s'identifie à une droite dans $T_Q^* M$, l'ensemble E des éléments de contact de M n'est pas autre chose que $PT^* M$, la projectivisation fibre à fibre du fibré cotangent de M .

Or $T^* M$ est tautologiquement muni d'une 1-forme dite « de Liouville », notée λ , et qui s'écrit $\sum P_i dQ_i$ dans un système $(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n)$ de coordonnées

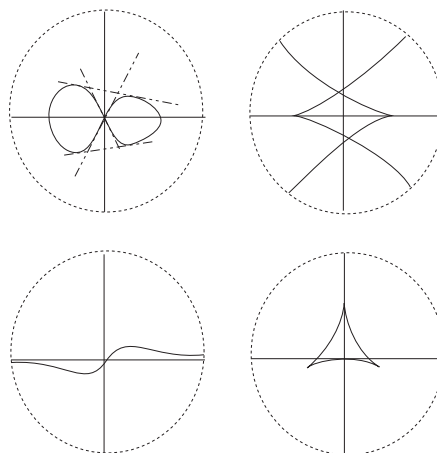


FIG. 8. La dualité projective.

canoniques de T^*M , $(Q_1, \dots, Q_n)$ désignant des coordonnées sur M . La projectivisation du noyau de λ induit un champ d'hyperplans ξ sur E . C'est la *structure de contact*² naturelle de E . Les *sous-variétés legendriennes* de E sont les sous-variétés de dimension $n - 1$, partout tangentes au champ d'hyperplans ξ (dont on peut montrer qu'il ne possède pas de sous-variété intégrale de dimension supérieure à $n - 1$).

Soit $\pi : E \rightarrow M$ la projection naturelle et L une sous-variété legendrienne de E . L'ensemble $\pi(L)$ est par définition le *front d'onde* de L . On peut montrer qu'il est bien décrit localement par une formule du type 1.2. Comme ci-dessus, la donnée d'un front d'onde générique détermine la legendrienne plongée qui vit au dessus. Une sous variété $N \subset M$ est toujours le front d'onde de la legendrienne L constituée de tous les éléments de contact tangents à N (L est la projectivisation du fibré conormal de N). Si N est réduite à un point dans M , L est la fibre de π au dessus de ce point.

4.1. Dualité projective

Ce cadre est le bon pour formuler la dualité projective. On suppose que M est l'espace projectif réel de dimension n . Notons $M^\vee$ l'espace projectif dual, l'ensemble des hyperplans projectifs de M . Un élément de contact de M détermine un hyperplan projectif, donc un point de $M^\vee$, et réciproquement. Ainsi il existe une bijection naturelle entre les ensembles des éléments de contact E et $E^\vee$ de M et $M^\vee$. On peut se convaincre que cette bijection préserve les structures de contact naturelles, et donc on peut identifier E et $E^\vee$. Autrement dit, il existe deux projections $\pi : E \rightarrow M$ et $\pi^\vee : E \rightarrow M^\vee$, dont les fibres sont des espaces projectifs (de dimension $n - 1$) legendriens, et en chaque point de E , l'hyperplan de contact est engendré par les espaces tangents des deux fibres correspondantes.

² et plus généralement, une variété de contact est une variété munie d'un champ d'hyperplans localement modelé sur cette construction, ce qui explique et justifie la terminologie « de contact ».

Par construction, pour obtenir le dual projectif d'une sous-variété N de M , i.e. l'ensemble des hyperplans projectifs tangents à N , il suffit de relever N à E (i.e. considérer son conormal projectivisé) puis de projeter par $\pi^\vee$. *Le dual projectif d'une sous-variété est donc un front d'onde*, en général singulier. Par exemple, si M est le plan projectif, la dualité échange points d'inflexion et points de rebroussement. Si N est une surface immergée dans l'espace projectif de dimension 3, les lignes de points de rebroussement du front dual correspondent aux courbes paraboliques sur la surface (voir [Ar2], [Ur]).

4.2. Éléments de contact coorientés et propagation de fronts

Si au lieu de projectiviser fibre à fibre le cotangent d'une variété M on se contente de le sphériser, on obtient *l'ensemble des éléments de contact coorientés de M* . Si l'on fixe de plus une métrique riemannienne sur M , l'ensemble des éléments de contact coorientés s'identifie avec le fibré tangent unitaire T_1M , qui est muni d'une 1-forme (dite « de contact ») α naturelle. Notons encore $\pi : T_1M \rightarrow M$ la projection naturelle. Soit $v \in T_1M$, et V un vecteur tangent à T_1M en v . Alors $D\pi_v(V)$ est un vecteur tangent à M en $\pi(v)$, on peut donc l'évaluer contre v à l'aide de la métrique, et c'est là ce qui définit notre forme. Par exemple, dans le cas du plan euclidien muni de coordonnées (x, y) , un vecteur unitaire s'identifie avec un angle θ et α avec la forme $\cos(\theta)dx + \sin(\theta)dy$.

Le flot géodésique de la variété riemannienne M habite naturellement sur T_1M . On peut vérifier qu'il préserve la structure de contact [Ar1]. Dans ce contexte, la propagation de fronts évoquée en 1 se reformule et se généralise ainsi :

Étant donné une hypersurface coorientée N de M , on la relève dans T_1M en considérant l'ensemble (legendrien) L formé par tous les éléments de contact tangents à N et dont les coorientations sont compatibles. Propager N au temps t dans la direction de la coorientation revient à transporter L par le flot géodésique jusqu'au temps t , puis à projeter sur M la sous-variété legendrienne L_t ainsi obtenue. Le front $\pi(L_t)$ est en général singulier.

4.3. Singularités nécessaires

Il me reste à évoquer des résultats non-élémentaires dans cette théorie. Je vais me limiter à un exemple, qui rentre dans le cadre plus large des résultats de singularités « globalement nécessaires » en topologie symplectique ou de contact, dans lequel on peut ranger la conjecture d'Arnold sur l'intersection lagrangienne. Il s'agit d'une question posée par Arnold à la fin du siècle dernier [Ar2], et résolue par Chekanov et Pushkar en 2002 [CP].

Reprenons l'exemple de la propagation de l'ellipse. Nous avons observé que ce processus fait apparaître des fronts d'onde singuliers, et qu'à un moment de la propagation, 2, puis 4 singularités coexistent. Elles finissent par disparaître, et à la fin le front d'onde reprend une forme convexe et se propage vers l'extérieur.

Arnold demande si ce phénomène (coexistence de 4 singularités) persiste pour un phénomène de propagation dans un milieu (métrique riemannienne) quelconque. En fait il demande si ces singularités sont nécessaires pour des raisons topologiques, et formule une question indépendante de toute métrique : *On considère le relevé legendrien $L_0 \subset T_1\mathbb{R}^2$ de l'ellipse coorientée vers le centre (correspondant au front*

d'onde initial), le relevé legendrien $L_1 \subset T_1\mathbb{R}^2$ d'une courbe convexe coorientée vers l'extérieur (représentant le front d'onde « retourné »), et une famille L_t quelconque de plongements legendriens reliant L_0 à L_1 . Est-il vrai qu'il existe alors un instant t tel que 4 singularités (comptées avec multiplicité) coexistent sur le front d'onde $\pi(L_t)$?

Je ne connais pas de preuve élémentaire de ce résultat pourtant très concret. La théorie, assez technique, de Chekanov et Pushkar de « décomposition des fronts d'onde » [CP], permet de répondre par l'affirmative à la question d'Arnold. Elle fournit par ailleurs des invariants puissants (dans l'esprit de l'homologie de contact d'Eliashberg [EGH]) pour le problème de la classification des entrelacs legendriens.

5. Références

- [AFV] Aicardi, F. Ferrand, E. Valentin, P. *On the classification of generic phenomena in one-parameter families of thermodynamic binary mixtures*, Phys. Chem Chem Phys, 6, 2002.
- [Ar1] Arnold V.I., *Contact geometry and wave propagation*, Enseign. Math. (2) 36 (1990), n° 3-4, 215-266.
- [Ar2] Arnold V.I., *Arnold's problems*, Springer, 2004.
- [AGV] Arnold, V. I. ; Gusein-Zade, S. M. ; Varchenko, A. N. Singularities of differentiable maps. Vol. I. The classification of critical points, caustics and wave fronts. Monographs in Mathematics, 82. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.
- [CP] Chekanov, Y., Pushkar, P., *Combinatorics of fronts of Legendrian links, and Arnold's 4-conjectures*, Russian Math. Surveys 60 (2005), n° 1, 95-149.
- [EGH] Eliashberg, Y., Givental, A., Hofer, H., *Introduction to symplectic field theory*, Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part II, 560-673.
- [Fe] Ferrand, E. *Apparent contours and their Legendrian deformations* Mosc. Math. J. 3 (2003), no. 3, 889-898.
- [FP] E. Ferrand, P. Pushkar, Morse theory and global coexistence of singularities on wave fronts. *J. London Math. Soc.* **74** (2006), 527-544
- [Li] Litvinov, G.L.. *The Maslov Dequantization, Idempotent and Tropical Mathematics : A Very Brief Introduction* in Idempotent Mathematics and Mathematical Physics, AMS « Contemporary Mathematics », 2005.
- [Ng] Ng, L. *Computable Legendrian invariants* Topology 42 (2003), no. 1, 55-82.
- [NT] Ng, L. Thurston, D., *Grid diagrams, braids, and contact geometry*, Proceedings of Gökova Geometry-Topology Conference 2008, 120-136 (Gökova Geometry-Topology Conference (GGT), Gökova, 2009).
- [Th] Thom, R., Stabilité structurelle et morphogénèse, Interéditions, Paris, 1972.
- [Ur] Uribe, R. A *Projective Invariant for Swallowtails and Godrons, and Global Theorems on the Flecnodal Curve*, Moscow Mathematical Journal 6 :4 (2006) 731-768.
- [Wh] Whitney, H., *On singularities of mappings of euclidean spaces, I. Mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math. (2) 62 (1955), 374-410.

Analyse semiclassique d'algorithmes de type Metropolis

Laurent Michel¹

1. Introduction

Le calcul numérique effectif est un problème qui se pose fréquemment dans divers domaines des sciences (Physique, Biologie, Médecine, etc.). Dans bien des situations, les méthodes déterministes de calcul sont mises en défaut et on a recours à des méthodes probabilistes dites de Monte-Carlo. Supposons par exemple que f est une fonction continue sur un intervalle borné $[a, b]$ et que $0 \leq f \leq 1$. Si la fonction f varie très vite, les méthodes de discrétisation de l'intervalle $[a, b]$ pour calculer numériquement l'intégrale de f demanderont un très grand nombre de pas. Si ce nombre est trop grand, la méthode devient inopérante pour des raisons de temps de calcul. Une approche probabiliste (qui est le fondement de la théorie de la mesure) consiste à découper $[0, 1]$ en petits morceaux $[a_k, a_{k+1}]$ et à approcher l'intégrale de f par

$$\sum_{k=0}^N p_k a_k,$$

où $p_k/(b-a)$ est la probabilité que $f(x)$ appartienne à $[a_k, a_{k+1}]$. Le nombre d'intervalles nécessaires pour une bonne approximation étant raisonnable, la méthode est efficace, à condition que l'on soit capable de calculer les probabilités p_k . En d'autres termes, le problème initial du calcul numérique de l'intégrale de f se ramène au problème suivant : déterminer un algorithme qui permette de tirer au hasard pour la densité f lorsque celle-ci n'est pas facilement calculable.

L'algorithme de Metropolis, du nom de N. Metropolis, appartient à cette famille et c'est sans doute l'un des algorithmes les plus utilisés. P. Diaconis rapporte souvent l'exemple suivant pour illustrer son efficacité (voir par exemple [Dia09]). Un de ses collègues lui propose de décoder un texte $\mathcal{T}$ écrit avec des symboles puisés dans un ensemble $\mathcal{B}$. Si l'on note $\mathcal{A}$ l'alphabet latin augmenté des symboles usuels (point, virgule, espace, etc.), il s'agit de déterminer la fonction

$$f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$$

qui donnera un sens au message. Une approche très naïve consisterait à tester successivement toutes les fonctions d'encodage f . Or, en pratique, ces ensembles ont un cardinal élevé (de l'ordre de 40 symboles pour écrire en français). Par conséquent, l'ensemble des fonctions d'encodage contient $40!$ éléments (en supposant pour simplifier que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont même cardinal). La simple énumération de tous ces éléments est donc inaccessible aux ordinateurs.

Il faut donc trouver un algorithme qui en un certain sens favorise les fonctions d'encodage plausibles. Une hypothèse raisonnable, consiste à penser que la fonction f établit une correspondance entre les ensembles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$ qui respecte

¹ Université de Nice.

la répartition des lettres dans la langue française. Pour obtenir ces statistiques, on peut partir d'un texte classique et enregistrer pour chaque symboles x et y , la proportion $M(x, y)$ de chaînes xy dans le texte (si l'on utilise par exemple les 2500 pages d'« À la recherche du temps perdu », à raison de 4000 caractères par page, la collecte des occurrences $M(x, y)$ nécessitera de l'ordre de 10^7 opérations, nombre négligeable par rapport à $40!$). Si on note $(t_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$ la suite des symboles apparaissant dans le message codé $\mathcal{T}$, on introduit alors la plausibilité de f :

$$(1) \quad Pl(f) = \prod_{i=1}^N M(f(t_i), f(t_{i+1})).$$

Plus le nombre $Pl(f)$, est grand plus le décodeur f respecte les statistiques de la langue française. On cherche donc une fonction f qui maximise la plausibilité. Pour cela, on part d'une fonction de codage arbitraire f_1 que l'on va modifier en une fonction f_2 de manière à augmenter sa plausibilité et on itère le procédé. Le choix retenu pour passer de f_1 à f_2 , est donné par l'algorithme de Metropolis qui suit :

- On commence par calculer $p_1 = Pl(f_1)$.
- À partir de f_1 on fabrique une fonction f_1^* en effectuant une transposition aléatoire des valeurs que f_1 attribue à deux symboles.
- On calcule $p_1^* = Pl(f_1^*)$. Si $p_1^* \geq p_1$, on pose $f_2 = f_1^*$.
- Si $p_1^* < p_1$, on joue à pile ou face avec probabilité p_1^*/p_1 . Si le résultat est pile, on pose $f_2 = f_1^*$ et si c'est face on pose $f_2 = f_1$.

On itère ensuite le procédé à partir de f_2 .

Bien que l'ensemble de toutes les fonctions possibles soit très grand, cet algorithme converge très rapidement. C'est du moins, ce qu'on peut observer sur des simulations. On renvoie à [Dia09] pour plus de détails.

Un autre exemple très connu est celui du problème des sphères dures. C'est pour traiter ce problème que Metropolis et al [MRR⁺53] ont élaboré leur algorithme. Étant donnés un entier $N \geq 1$ et un réel $\varepsilon > 0$ fixés, on cherche à disposer aléatoirement N disques de rayon ε dans une boîte $\tilde{B} =] - A - \varepsilon, A + \varepsilon[^2$ de manière à ce que les disques ne se recouvrent pas. Ce problème est posé par l'étude de phénomènes de transitions de phases en physique statistique. Dans ce modèle, les disques représentent des atomes et le nombre N est donc très grand (on renvoie à [Uhl68] pour une description du modèle).

Si on numérote les disques et qu'on note $x_1, \dots, x_N$ la position de leurs centres respectifs, on cherche donc à tirer au hasard un point $X = (x_1, \dots, x_N)$ dans l'espace de configuration

$$(2) \quad \mathcal{O}_{N,\varepsilon} = \{X \in B^N, \forall i \neq j, |x_i - x_j| > \varepsilon\},$$

où $B =] - A, A[^2$. Ici, le terme « hasard » signifie « uniformément par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{O}_{N,\varepsilon}$ ». Or, la géométrie de cet ouvert étant très compliquée (par exemple, le volume de $\mathcal{O}_{N,\varepsilon}$ est inconnu), la mesure de Lebesgue associée n'est pas directement accessible. Pour dépasser ces difficultés, Metropolis et al [MRR⁺53] ont élaboré un algorithme de type Monte-Carlo. Nous décrivons ici une version semiclassique de cet algorithme qui nécessite la donnée d'un paramètre $h > 0$. On part d'une configuration arbitraire $X^1 = (x_1^1, \dots, x_N^1) \in \mathcal{O}_{N,\varepsilon}$ et on itère le procédé suivant :

- On choisit un des N disques au hasard, disons le k ème et on déplace son centre x_k^1 au hasard uniformément dans une boule de rayon h . On note $x_k^{1,*}$ sa nouvelle position et $X^{1,*} = (x_1^1, \dots, x_k^{1,*}, \dots, x_N^1) \in \mathbb{R}^{2N}$ la nouvelle configuration. Si $X^{1,*} \in \mathcal{O}_{N,\varepsilon}$, on pose $X^2 = X^{1,*}$.
- Si $X^{1,*} \notin \mathcal{O}_{N,\varepsilon}$, on pose $X^2 = X^1$ (i.e. on reste au point précédent).

On fabrique ainsi une suite de points $X^1, \dots, X^n$ et lorsque n devient grand la répartition des X^n dans l'ouvert $\mathcal{O}_{N,\varepsilon}$ est uniforme par rapport à la mesure de Lebesgue.

En pratique, le nombre d'étapes nécessaires pour atteindre l'uniformité est raisonnable (au regard du nombre de disques N) et cet algorithme est très efficace pour simuler un échantillon représentatif de configurations. On peut alors utiliser cet échantillon pour calculer des quantités physiques (des intégrales) par une méthode de Monte-Carlo.

Le but de cet article est de montrer comment obtenir sur certains exemples un contrôle théorique à priori sur le nombre d'étapes nécessaires avant d'atteindre l'uniformité. C'est un sujet très vaste et nous aborderons essentiellement le cas d'algorithmes de Metropolis sur des espaces d'états continus et dans un cadre semiclassique, c'est à dire lorsque le déplacement élémentaire est contrôlé par un petit paramètre h . On renvoie aux articles [LD07], [DL09], [DL09], [LM09], [DLM08] pour des résultats complets et à [Leb] pour une synthèse. Il existe aussi une très large littérature lorsque l'espace d'état est un ensemble fini de cardinal N . Dans ce cas, il est très intéressant de relier la vitesse de convergence de l'algorithme à N (par exemple dans le cas du message codé, $N = \sharp \mathcal{A}!$). Pour une introduction à cette problématique ainsi que des références complètes, nous référons à [Dia09], [SC97], [DSC98].

L'article est organisée comme suit. Dans une première partie, on rappelle quelques propriétés élémentaires des chaînes de Markov et des noyaux de Markov, puis on donne une définition de l'algorithme de Metropolis dans un cas métrique. La seconde partie est consacrée à des rappels de théorie spectrale des opérateurs. On se limite dans cette partie au cas des opérateurs bornés, afin de simplifier l'exposition. Enfin dans une dernière partie, on montre comment une analyse spectrale fine permet de déterminer la vitesse de convergence de l'algorithme de Metropolis semiclassique. En particulier on traite le problème des sphères dures.

2. Généralités sur les chaînes de Markov

2.1. Chaînes de Markov sur un espace fini

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans un espace X . On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov si la connaissance de la chaîne au temps n ne dépend que de sa valeur au temps $n - 1$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x_1, \dots, x_n \in X$, on demande

$$(3) \quad P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1) = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1})$$

où $P(A|B)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B . On supposera ici que les chaînes de Markov considérées sont homogènes, c'est à dire que pour tout

$x, y \in X$ la probabilité $P(X_n = y | X_{n-1} = x)$ est indépendante de n . On notera $K(x, y)$ cette quantité.

Si on suppose que l'ensemble X est fini de cardinal m . Les probabilités de transitions $(K(x, y))_{x, y \in X}$ définissent une matrice $m \times m$ à coefficients réels, positifs et tels que pour tout $x \in X$

$$(4) \quad \sum_{y \in X} K(x, y) = 1$$

On notera K cette matrice.

Supposons donnée une probabilité $\pi(x)$ sur X . On dit que π est stationnaire pour K si quelque soit $y \in X$ on a

$$(5) \quad \sum_{x \in X} \pi(x) K(x, y) = \pi(y)$$

Autrement dit, on demande que le vecteur $(\pi(y))_{y \in X}$ soit un vecteur propre de la matrice K^t pour la valeur propre 1.

Le théorème fondamental de chaînes de Markov (simple corollaire du théorème de Perron-Frobenius) affirme que sous une simple hypothèse de connectivité, il existe une unique mesure stationnaire et que les itérés K^n de la matrice de transition convergent vers la distribution stationnaire.

Théorème 0.1. *Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $K^n(x, y) > 0$ pour tout $x, y \in X$. Alors, K possède une unique distribution stationnaire π et pour tout $x, y \in X$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} K^n(x, y) = \pi(y)$.*

Autrement dit, quelque soit le point de départ x , au bout de n étapes la chaîne a une probabilité très proche de $\pi(y)$ d'être en y , pourvu que n soit grand. Si l'on cherche à échantillonner π (i.e. à tirer des points au hasard par rapport à π) et que l'on ne connaît pas π , le théorème précédent affirme qu'une chaîne de Markov pour laquelle π est stationnaire fera l'affaire pourvu qu'on l'ait itérée suffisamment. Un problème naturel consiste donc à trouver une chaîne de Markov pour laquelle π est stationnaire qui soit calculable. L'estimation du nombre d'itération nécessaire pour atteindre l'uniformité est aussi d'un grand intérêt.

2.2. Algorithme de Metropolis sur un ensemble fini

On suppose toujours que X est un ensemble fini et on se donne une probabilité π sur X . On suppose en outre que la probabilité π n'est connue qu'à une constante multiplicative près. On cherche à construire une matrice de Markov M pour laquelle π est stationnaire. Une réponse évidente consiste à prendre $M(x, y) = \pi(y)$ quelque soit x . Autrement dit, on choisit une probabilité de transition de x à y uniforme et égale à $\pi(y)$. En pratique ce choix n'a aucun intérêt : la probabilité π étant inconnue, la matrice M l'est aussi.

Supposons maintenant qu'on dispose d'une matrice de Markov $K(x, y)$ (n'ayant a priori aucun lien avec π), qui soit connue et qui vérifie $K(x, y) = 0$ ssi $K(y, x) = 0$. On va fabriquer à partir de K une matrice M pour laquelle

π est stationnaire. Pour cela on introduit le taux d'acceptation $A(x, y) = \pi(y)K(y, x)/\pi(x)K(x, y)$ et on pose :

$$(6) \quad M(x, y) = \begin{cases} K(x, y) & \text{si } x \neq y \text{ et } A(x, y) \geq 1 \\ K(x, y)A(x, y) & \text{si } x \neq y \text{ et } A(x, y) < 1 \\ K(x, y) + \sum_{z|A(x,z)<1} K(x, z)(1 - A(x, z)) & \text{si } x = y \end{cases}$$

Cette formule a une interprétation simple en terme de chaînes de Markov. Supposons que la chaîne est en x . Pour déterminer sa position à l'étape suivante, on choisit y au hasard à l'aide du noyau K . Si $A(x, y) \geq 1$, on bouge en y . Si $A(x, y) < 1$, on accepte ce mouvement avec probabilité $A(x, y)$ et on reste sur place avec probabilité $1 - A(x, y)$. Contrairement à l'exemple trivial discuté au début de ce paragraphe, les coefficients de la matrice M sont calculables, puisqu'ils ne font intervenir que des quotients $\pi(x)/\pi(y)$, quantité dans laquelle la constante de renormalisation inconnue a disparu.

Il est assez facile de voir que la chaîne M vérifie $\pi(x)M(x, y) = \pi(y)M(y, x)$ et par conséquent

$$(7) \quad \sum_x \pi(x)M(x, y) = \sum_x \pi(y)M(y, x) = \pi(y) \sum_x M(y, x) = \pi(y).$$

Autrement dit, π est stationnaire pour M .

Revenons maintenant à l'exemple de cryptographie discuté précédemment. Dans ce cas, X est l'ensemble des bijections de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$. Si ces ensembles ont disons 40 éléments, alors $\#X = 40!$. La probabilité π est donnée par

$$(8) \quad \pi(f) = z^{-1} \prod_{i=1}^N M(f(t_i), f(t_{i+1}))$$

où z est une constante de renormalisation et $\mathcal{T} = (t_i)_{i=1, \dots, N}$ est le texte codé. En pratique, pour calculer z , on doit sommer la définition précédente sur toutes les fonctions $f \in X$. Or, X contient tant d'éléments que ce calcul est impossible. Par contre, il est très facile de définir la chaîne de Markov K qui consiste à fabriquer une fonction f^* à partir de f en transposant aléatoirement les valeurs que f associe à deux symboles. On applique ensuite le procédé de Metropolis à K et l'on s'aperçoit que le problème du calcul de la constante z disparaît.

2.3. Généralités sur les noyaux de Markov

Soit (X, d) un espace métrique et $\mathcal{B}$ la tribu des Boréliens de X . On note $L^\infty(X)$ l'espace des fonctions bornées sur X , muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Définition 0.2. Un noyau de Markov $K(x, dy)$ sur X est une application de X à valeurs dans les mesures Boréliennes sur X telle que :

- pour tout $x \in X$, $K(x, dy)$ est une mesure de probabilité
- pour tout $A \in \mathcal{B}$, $x \mapsto K(x, A) = \int_A K(x, dy)$ est une fonction mesurable.

Pour $f \in L^\infty(X)$ on définit $K(f)$ par

$$(9) \quad K(f)(x) = \int_X f(y)K(x, dy).$$

Puisque $K(x, dy)$ est une mesure de probabilité, la fonction $K(f)$ appartient à $L^\infty(X)$ et on a

$$(10) \quad \begin{aligned} K(1) &= 1 \\ f \geq 0 &\implies K(f) \geq 0 \\ \|K(f)\|_\infty &\leq \|f\|_\infty \end{aligned}$$

On définit les itérées d'un noyau de Markov par

$$(11) \quad K^{m+n}f(x) = \int_X K^m(f)(y) K^n(x, dy)$$

Notons $\mathcal{M}(X)$ l'espace des probabilités sur X . $\mathcal{M}(X)$ s'injecte dans le dual des fonctions continues bornées $C_b^0(X)$ par

$$(12) \quad \langle \pi, f \rangle = \int_X f(x) d\pi(x)$$

Par suite, K^t opère sur $\mathcal{M}(X)$ par

$$(13) \quad \langle K^t(\pi), f \rangle = \langle \pi, K(f) \rangle$$

Définition 0.3. Une probabilité π est dite invariante pour K si $K^t(\pi) = \pi$.

Le théorème suivant est le pendant du théorème 0.1 dans le cas continu.

Théorème 0.4. Supposons que X est un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Supposons que le noyau K vérifie les hypothèses suivantes :

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in X, \forall A \in \mathcal{B}, K^n(x, A) > 0$
- Pour toute fonction f uniformément continue sur X , la famille $(K^n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ est équicontinue sur X .

Alors, pour tout $x \in X$ et $A \in \mathcal{B}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} K^n(x, A) = \pi(A)$.

On renvoie à [Fel71] pour la preuve de ce théorème et une exposition générale sur les noyaux de Markov.

Évidemment ce résultat est loin d'être optimal puisqu'il affirme seulement une convergence ponctuelle sans préciser la vitesse à laquelle la convergence a lieu. Par la suite, on travaillera avec la distance de variation totale.

Définition 0.5. Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur X . Leur distance en variation totale est définie par

$$(14) \quad \|\mu - \nu\|_{TV} = \sup_{A \in \mathcal{B}} |\mu(A) - \nu(A)| = \frac{1}{2} \sup_{f \in L^\infty, \|f\|_\infty \leq 1} \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|$$

Revenons au cas où $K(x, dy)$ est un noyau de Markov sur X admettant une mesure stationnaire π . Notons Π_0 le projecteur sur les fonctions constantes $\Pi_0(f) = \int_X f(x) d\pi(x)$. La distance de variation totale entre $K^n(x, dy)$ et la mesure stationnaire est une quantité qui dépend du point de départ x . Il est donc naturel d'essayer d'estimer cette quantité indépendamment de x . Il vient de la définition précédente que

$$(15) \quad \sup_{x \in X} \|K^n(x, dy) - \pi\|_{TV} = \frac{1}{2} \|K - \Pi_0\|_{L^\infty \rightarrow L^\infty}$$

Nous verrons par la suite, comment des techniques spectrales permettent d'estimer cette quantité. Une difficulté notable vient du fait qu'on doit estimer un opérateur dans L^∞ , un espace fonctionnel qui n'est pas naturellement associé à la décomposition spectrale des opérateurs.

2.4. Un algorithme de Metropolis dans le cas continu

Nous décrivons ici la classe d'algorithmes que nous étudions. Ces algorithmes ont été introduits en 1953 par Metropolis et al [MRR⁺53] pour étudier des problèmes de transitions de phase modélisés à travers le problème des sphères dures. De nombreuses généralisations ont été développées depuis. Nous décrivons ici un algorithme de Metropolis semiclassique associé à une mesure de densité sur un ouvert d'une variété Riemannienne.

On se donne une variété Riemannienne, lisse, compacte sans bord (M, g) . On note $d_g(x, y)$ la distance géodésique entre deux points de la variété et $d_g x$ la forme volume induite par la métrique. Pour $h \in]0, 1]$, on note $B(x, h)$ la boule riemannienne centrée en x et de rayon h et on note $|B(x, h)|$ son volume.

Soit Ω un ouvert de M et $\rho(x)$ une fonction bornée sur $\overline{\Omega}$ telle que $d\pi(x) = \rho(x)d_g x$ est une probabilité sur Ω . On considère l'opérateur T_h défini sur les fonctions continues sur Ω par

$$(16) \quad (T_h f)(x) = v_h(x)f(x) + \frac{1}{|B(x, h)|} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{B(x, h)}(y)f(y)d_g y$$

avec $v_h(x) = 1 - \frac{1}{|B(x, h)|} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{B(x, h)}(y)d_g y$. On remarque que la fonction v_h est à valeurs dans $[0, 1]$. On note t_h le noyau de T_h , qui est donné par

$$(17) \quad t_h(x, dy) = v_h(x)\delta_{y=x} + \frac{\mathbf{1}_{\{d_g(x, y) \leq h\}}}{|B(x, h)|} d_g y, \forall x \in \Omega$$

où $\delta_{y=x}$ est la mesure de Dirac centrée en x : $\int_{\Omega} f(y)\delta_{y=x} = f(x)$ pour toute fonction continue f .

Par définition, quelque soit $x \in \Omega$, $t_h(x, dy)$ est une mesure de probabilité sur Ω , et par conséquent t_h est un noyau de Markov. C'est le noyau associé à la marche aléatoire naturelle sur la variété définie de la manière suivante : si la marche est au point x , elle se déplace en un point $y \in M$ choisi uniformément dans la boule géodésique centrée en x et de rayon h . Si le point fabriqué ainsi est encore dans l'ouvert Ω , on effectue le mouvement, si par contre il sort de Ω , on reste au point x .

Le noyau de Markov ainsi fabriqué admet la mesure stationnaire $d\mu(x) = Z_h |B(x, h)| d_g x$, où Z_h est une constante telle que $d\mu$ est une probabilité sur Ω . Le fait que Z_h est incalculable en pratique pose à priori un problème.

La stratégie de Metropolis consiste à modifier le noyau t_h de sorte qu'il admette $d\pi(x) = \rho(x)d_g x$ comme mesure stationnaire. Pour cela, on remarque que les mesures μ et π sont reliées de la manière suivante :

$$(18) \quad d\pi(x) = \rho(x)d\mu(x)$$

avec $p(x) = \frac{Z_h \rho(x)}{|B(x, h)|}$. On définit le taux d'acceptation $A(x, y)$ associé à la fonction $p(x)$ par

$$(19) \quad A(x, y) := \min(1, \frac{p(y)}{p(x)}) = \min(1, \frac{\rho(y)|B(x, h)|}{\rho(x)|B(y, h)|}).$$

On remarque au passage que la constante Z_h inconnue a disparu. Le noyau de Metropolis est alors défini par

$$(20) \quad M_h(x, dy) = w_h(x)\delta_{y=x} + \min(1, A(x, y))t_h(x, dy)$$

avec $w_h(x) = 1 - \int_{\Omega} \min(1, A(x, y))K_h(x, dy)$. En terme de marche aléatoire, le noyau précédent se comprend de la manière suivante. Si la marche est au point x , elle se déplace en un point y construit grâce au noyau $t_h(x, dy)$. Si le point obtenu vérifie $p(y) \geq p(x)$, on garde le déplacement. Dans la cas contraire, on effectue le mouvement avec probabilité $A(x, y)$ et on reste sur place avec probabilité $1 - A(x, y)$.

Si on utilise la définition de t_h , un simple calcul montre que

$$(21) \quad M_h(x, dy) = m_h(x)\delta_{y=x} + K_h(x, dy)$$

avec

$$(22) \quad K_h(x, dy) = \min(1, A(x, y)) \frac{\mathbf{1}_{\{d_g(x, y) \leq h\}}}{|B(x, h)|} d_g y$$

et $m_h(x) = 1 - \int_{\Omega} K_h(x, dy)$.

On traitera plus tard deux exemples : le cas où M est une variété abstraite, $\Omega = M$ et la fonction ρ est constante ainsi que le cas où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ (qui peut toujours être plongé dans un tore plat). Dans chacun des cas, le but est d'estimer la vitesse de convergence de M_h^n vers la mesure stationnaire $d\pi(x) = \rho(x)dx$. Au regard de (15), ceci revient à estimer $\|M_h^n - \Pi_0\|_{L^\infty \rightarrow L^\infty}$. À la manière de ce qui est fait en dimension fini pour calculer les puissances successives d'une matrice on aimerait pouvoir diagonaliser l'opérateur M_h .

3. Quelques résultats classiques en théorie spectrale

3.1. Spectre des opérateurs autoadjoints compacts

On rappelle ici quelques résultats classiques de théorie spectrale. Pour simplifier l'exposition on se limite au cas des opérateurs bornés. On renvoie à [Bre83] et [RS72] pour une exposition plus complète. Supposons que $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert (par exemple $L^2(\Omega)$). Un opérateur borné T sur $\mathcal{H}$ est une application linéaire continue $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Le spectre de T est défini de la manière suivante :

Définition 0.6. On dit que $z \in \mathbb{C}$ n'est pas dans le spectre de T si l'opérateur $T - z$ est inversible. Dans ce cas, on note $R(z) = (T - z)^{-1}$ l'inverse de $T - z$ appelé résolvante. On notera $\text{Spect}(T)$ le spectre de T .

D'après le théorème de l'application ouverte, la résolvante $R(z)$ est un opérateur continu pour toute valeur de z où elle est bien définie. Lorsque $\mathcal{H}$ est un espace de dimension finie, le spectre est constitué de valeurs propres, c'est à dire de nombres complexe λ tels que $(T - \lambda)$ n'est pas injectif. En dimension infinie, il peut exister des éléments du spectre qui ne sont pas valeurs propres.

Définition 0.7. *L'adjoint de T est l'unique opérateur borné T^* tel que $\langle Tf, g \rangle = \langle f, T^*g \rangle$ quels que soient $f, g \in \mathcal{H}$. On dit que l'opérateur T est autoadjoint si on a $T^* = T$.*

Il est facile de voir que lorsque T est autoadjoint, $\text{Spec}(T) \subset \mathbb{R}$. En fait, si on note $\|T\|$ la norme d'opérateur de T , on a $\text{Spec}(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.

Définition 0.8. *On dit qu'un opérateur borné $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est compact si l'adhérence de l'ensemble $T(\{f \in \mathcal{H}, \|f\| \leq 1\})$ est compacte.*

Il est bien connu que la précompacité des ensembles bornés d'un espace vectoriel normé caractérise le fait qu'il est de dimension finie. Conséquence de ce théorème dû à Riesz, la théorie spectrale des opérateurs compact est très agréable.

Théorème 0.9. *Soit $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un opérateur auto-adjoint compact. Les assertions suivantes sont satisfaites :*

- $0 \in \text{Spec}(T)$.
- $\text{Spec}(T)$ est un ensemble discret et le seul point d'accumulation possible de cet ensemble est 0.
- $\text{Spec}(T) \setminus \{0\}$ est constitué de valeurs propres réelles de multiplicité finie .
- Il existe une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ formée de vecteurs propres de T .

La dernière conclusion de ce théorème affirme qu'à l'instar des matrices symétriques en dimension finie, les opérateurs compacts se diagonalisent dans une base orthonormée.

3.2. Calcul fonctionnel

3.2.1. Cas des opérateurs compacts

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée. On veut définir $f(T)$ pour T opérateur auto-adjoint. En dimension finie, en utilisant la diagonalisabilité des matrices symétriques, il est possible de définir $f(A)$. Cette stratégie s'adapte parfaitement au cas d'opérateurs compacts en dimension infinie. En effet, si on note $\text{Spec}(T) = \{\lambda_0 = 0\} \cup \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}^*\}$, E_k les sous espaces propres associés et P_k le projecteur orthogonal sur E_k , il suffit de définir $f(T)$ par la série normalement convergente

$$(23) \quad f(T) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) P_k.$$

En particulier, le spectre de $f(T)$ est l'image par f du spectre de T .

3.2.2. Cas des opérateurs non bornés

Il est possible de généraliser tout ce qui a été développé dans ce chapitre au cas où l'opérateur T n'est pas défini sur $\mathcal{H}$ tout entier, mais seulement sur un sous espace dense $\mathcal{D}$ appelé domaine de l'opérateur. On aboutit ainsi à la notion d'opérateur non borné.

Définition 0.10. *Un opérateur non borné T de domaine $\mathcal{D}$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{H}$.*

Le spectre d'un opérateur non borné est défini comme précédemment. C'est l'ensemble des nombres complexes z tels que $T - z$ ne possède pas d'inverse continu. Il faut noter ici, que le domaine $\mathcal{D}$ n'étant pas fermé, le théorème de l'application ouverte ne s'applique plus et il peut exister des éléments z du spectre pour lesquels $T - z$ est inversible mais d'inverse non-continue. La définition d'adjoint et d'opérateur auto-adjoint s'étend aussi au cas des opérateurs non bornés. Enfin, il existe aussi un calcul fonctionnel pour les opérateurs non bornés auto-adjoints.

Un exemple essentiel d'opérateurs non bornés est donné par le Laplacien. Supposons que (M, g) est une variété Riemannienne compacte sans bord et notons Δ_g l'opérateur de Laplace-Beltrami sur cette variété. Fixons un système de coordonnées locales et notons (g_{ij}) la matrice de g , (g^{ij}) celle de g^{-1} . Pour toute fonction régulière f on pose

$$(24) \quad \Delta_g f = \det(g)^{-1/2} \sum_{i,j} \partial_{x_i} \det(g)^{1/2} g^{ij} \partial_{x_j}$$

On définit ainsi un opérateur non borné auto-adjoint sur $L^2(M, d_g x)$ ayant pour domaine l'espace de Sobolev $H^2(M)$. De plus $-\Delta_g$ est positif (au sens des opérateurs), de sorte que $T := -\Delta_g + 1$ est inversible. Les théorèmes d'injection de Sobolev montrent alors que $T^{-1} : L^2(M) \rightarrow L^2(M)$ est compact. Comme 0 ne peut pas être valeur propre de T , il existe une base Hilbertienne (e_k) de $L^2(M)$ formée de vecteurs propres de T associés à des valeurs propres $\mu_k \in]0, 1]$ tendant vers 0 lorsque k tend vers l'infini. En revenant à $-\Delta_g$ on montre que le spectre du Laplacien est formé de valeurs propres positives, isolées ($\lambda_k = 1/\mu_k - 1$), tendant vers $+\infty$ et on récupère une base hilbertienne $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ associée à ce spectre.

En utilisant ces informations, pour toute fonction continue bornée f on peut définir l'opérateur borné sur $L^2(\Omega)$, $f(-\Delta_g)$, au moyen de la formule

$$(25) \quad f(-\Delta_g)\psi = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) \langle \psi, e_k \rangle e_k.$$

Par construction le spectre de cet opérateur est l'image par f du spectre du Laplacien.

3.3. Estimation de la vitesse de convergence vers la stationnarité

Supposons que T est un opérateur de Markov sur un espace de probabilité (X, π) et supposons que π est stationnaire pour T . Notons $K(x, dy)$ le noyau de T et supposons (pour simplifier) que T est compact sur $L^2(X)$. Comme T est markovien, 1 est nécessairement valeur propre. On suppose que c'est une valeur propre simple et on note (μ_k) la suite des valeurs propres de T ordonnées de sorte

que $\mu_0 = 1$ et $\mu_1 = \sup \text{Spec}(T) \setminus \{\mu_0\}$. En particulier le trou spectral est donné par $g(T) = 1 - \mu_1$. On note $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la base hilbertienne associée aux (μ_k) et Π_k le projecteur orthogonal dans $L^2(X)$ sur $\text{Vect}(e_k)$. Enfin, on suppose qu'il existe $\delta_0 > g(T)$ tel que $\text{Spec}(T) \subset [-1 + \delta_0, 1]$.

Alors pour tout $f \in L^2(X)$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(26) \quad \|T^n f - \Pi_0 f\|_{L^2}^2 = \|(T - \Pi_0)^n f\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^n \Pi_k f \right\|_{L^2}^2$$

En utilisant l'orthogonalité des projecteurs, il vient :

$$(27) \quad \|T^n f - \Pi_0 f\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|^{2n} \|\Pi_k f\|_{L^2}^2 \leq (1 - \min(g(T), \delta_0))^{2n} \|f\|_{L^2}^2$$

Comme on a supposé que $\delta_0 > g(T)$, il suit $\|T^n - \Pi_0\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq e^{-ng(T)}$. La convergence (en norme L^2) vers la mesure stationnaire se fait donc à vitesse exponentielle; le taux de convergence étant donné par le trou spectral.

Cependant si on est intéressé par l'obtention d'estimations en variation totale, on doit contrôler la norme de $T_h^n - \Pi_0$ comme opérateur sur L^∞ , ce qui est beaucoup plus difficile tant l'orthogonalité des projecteurs est cruciale dans l'estimation précédente. Une stratégie consiste à passer par L^2 et à contrôler les pertes lorsqu'on revient dans L^∞ . Plus précisément, on a :

$$(28) \quad \|T^n - \Pi_0\|_{L^\infty \rightarrow L^\infty} \leq \|T\|_{L^\infty \rightarrow L^2} \|T^{n-2} - \Pi_0\|_{L^2 \rightarrow L^2} \|T\|_{L^2 \rightarrow L^\infty}$$

L'opérateur étant Markovien, la première des normes du produit ci-dessus est bornée par 1. Le second terme est contrôlé par (27). Par contre le dernier terme n'a aucune raison a priori d'être borné (lorsque les paramètres du problème bougent) ni même fini.

La méthode que nous utilisons pour remédier à ce problème consiste à traiter différemment la partie du spectre proche de 1 et celle loin de 1. Étant donné un paramètre $\gamma \in]0, g(T)[$, on écrit $T^n - \Pi_0 = T_1^n + T_2^n$ avec $T_1 = \sum_{\gamma < \mu_k < 1} \mu_k \Pi_k$ et $T_2 = \sum_{\mu_k \leq \gamma} \mu_k \Pi_k$. Pour estimer T_2^n , on profite du fait que T_2 est très petit dans L^2 . Dans l'inégalité

$$(29) \quad \|T_2^n\|_{L^\infty \rightarrow L^\infty} \leq \|T_2\|_{L^\infty \rightarrow L^2} \|T_2^{n-2}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \|T_2\|_{L^2 \rightarrow L^\infty}$$

le second terme (qui est plus petit que γ^{n-2}) contrôlera le dernier.

Pour traiter le terme T_1 , on écrit

$$(30) \quad \|T_1^n\|_{L^\infty \rightarrow L^\infty} \leq \sum_{\gamma < \mu_k < 1} \mu_k^n \|\Pi_k\|_{L^\infty \rightarrow L^\infty} \leq (1 - g(T))^n N(\gamma) \sup_{\gamma < \mu_k < 1} \|\Pi_k\|_{L^\infty \rightarrow L^\infty}.$$

où $N(\gamma) = \#\{k, \gamma < \mu_k < 1\}$. Il s'agit alors de démontrer de bonnes estimations sur les projecteurs spectraux ainsi qu'une estimation de la fonction de comptage des valeurs propres $N(\gamma)$.

4. Analyse Semiclassique de l'algorithme de Metropolis

Nous décrivons ici des résultats récents sur l'analyse d'algorithmes de type Metropolis par des méthodes semiclassiques. L'article fondateur est dû à P. Diaconis et G. Lebeau [LD07], [DL09] et concerne le cas où Ω est l'intervalle $]0, 1[$ de $\mathbb{R}$. Dans cet article les auteurs établissent le lien entre la théorie spectrale de l'opérateur de Metropolis et la théorie spectrale du Laplacien avec condition de Neumann au bord (ici deux points). Ils en déduisent ensuite la convergence en variation totale des itérés du noyau de Metropolis vers la mesure stationnaire. De plus, ils démontrent que les fonctions propres de l'opérateur de Metropolis et celles du Laplacien de Neumann sont exponentiellement proches loin du bord. Dans les deux sections à venir, on présente des généralisations de ce résultat à des cas plus géométriques : le cas d'une variété Riemannienne compacte sans bord [LM09] et le cas d'un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, [DLM08].

4.1. Cas d'une marche aléatoire sur une variété

On reprend les notations de la partie 2.4 en supposant en outre que l'ouvert Ω est égal à M . L'opérateur T_h défini par (16) devient

$$(31) \quad (T_h f)(x) = \frac{1}{|B(x, h)|} \int_{B(x, h)} f(y) d_g y$$

et son noyau t_h est donné par

$$(32) \quad t_h(x, dy) = \frac{\mathbf{1}_{\{d_g(x, y) \leq h\}}}{|B(x, h)|} d_g y$$

Soit ${}^t T_h$ l'opérateur transposé agissant sur les mesures de Borel sur M , défini par $\langle {}^t T_h(\mu), f \rangle = \langle \mu, T_h(f) \rangle$. Soit c_d le volume de la boule unité dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$. Pour h petit, $h^{-d}|B(x, h)|$ est une fonction régulière sur M qui converge vers c_d uniformément sur M lorsque $h \rightarrow 0$. Soit $d\nu_h$ la mesure de probabilité sur M définie par :

$$(33) \quad d\nu_h = \frac{|B(x, h)|}{Z_h c_d h^d} d_g x$$

où Z_h est une constante de normalisation telle que $d\nu_h(M) = 1$. Alors, pour h petit, $d\nu_h$ est proche de $d_g x / \text{Vol}(M)$ et Z_h est proche de $\text{Vol}(M)$.

On vérifie facilement que T_h est auto-adjoint sur $L^2(M, d\nu_h)$ et admet $d\nu_h$ pour mesure stationnaire. La norme de T_h agissant sur $L^2(M, d\nu_h)$ est égale à 1 et pour tout $h > 0$ fixé, l'opérateur T_h est compact. Par conséquent son spectre $\text{Spec}(T_h)$ est un sous ensemble fermé de $[-1, 1]$ qui est discret dans $[-1, 1] \setminus \{0\}$, avec 0 comme point d'accumulation. Afin de décrire le spectre de l'opérateur T_h , on introduit la fonction G_d définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$(34) \quad G_d(\xi) = \frac{1}{c_d} \int_{|y| \leq 1} e^{iy\xi} dy$$

Au facteur $\frac{1}{c_d}$ près, la fonction G_d est la transformée de Fourier de la fonction caractéristique de la boule unité dans $\mathbb{R}^d$. C'est une fonction radiale de sorte que l'on est amené à introduire la fonction Γ_d définie sur $[0, \infty[$ par

$$(35) \quad G_d(\xi) = \Gamma_d(|\xi|^2).$$

La fonction Γ_d est analytique et il existe $\gamma_0 < 1$ tel que $\Gamma_d(s) \in [-\gamma_0, 1]$ quelque soit s . De plus, on a $\lim_{s \rightarrow \infty} \Gamma_d(s) = 0$, $\Gamma_d(s) = 1$ ssi $s = 0$, et près de $s = 0$

$$(36) \quad \Gamma_d(s) = 1 - \frac{s}{2(d+2)} + \mathcal{O}(s^2)$$

Avant de décrire les résultats obtenus dans [LM09], considérons l'exemple où la variété est le tore plat de dimension d muni de la métrique euclidienne : $M = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$. Dans ce cas, l'opérateur T_h et le Laplacien sont très étroitement reliés puisque $T_h = \Gamma_d(-h^2\Delta_g)$. En effet sur le tore, le spectre du Laplacien est décrit par la théorie des séries de Fourier. À chaque $k \in \mathbb{Z}^d$ correspond une fonction propre $e_k(x) = e^{i\langle k, x \rangle}$ de $-\Delta_g$ associée à la valeur propre $|k|^2 := \sum_{j=1}^d k_j^2$. De plus, les fonctions e_k , $k \in \mathbb{Z}^d$ forment une base hilbertienne de $L^2(M)$. Par conséquent, il suffit de vérifier que $T_h e_k = \Gamma_d(-h^2\Delta_g) e_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$. Comme la métrique est plate, on calcule facilement :

$$(37) \quad \begin{aligned} T_h e_k(x) &= \frac{1}{c_d h^d} \int_{B(x, h)} e^{i\langle k, y \rangle} dy = \frac{e^{i\langle k, x \rangle}}{c_d} \int_{B(0, 1)} e^{i\langle hk, u \rangle} du \\ &= \Gamma_d(h^2 |k|^2) e^{i\langle k, x \rangle} = \Gamma_d(-h^2\Delta_g) e_k(x) \end{aligned}$$

Par suite, le spectre de T_h est entièrement décrit par la fonction Γ_d . On voit par exemple très facilement en utilisant le développement limité de Γ_d en 0 que le trou spectral est donné par $g(T_h) = \frac{h^2}{2(d+2)} + O(h^4)$.

Dans le cas où la variété n'est pas un espace symétrique et lorsque la métrique n'est pas plate, l'opérateur T_h n'est plus une fonction du Laplacien. Cependant, il subsiste quelque chose de l'approximation de T_h par $\Gamma_d(-h^2\Delta_g)$. Par exemple, on démontre dans [LM09] que les valeurs propres de T_h sont bien approchées par celles de $\Gamma_d(-h^2\Delta_g)$ pour ce qui concerne les valeurs propres proches de 1. En effet, notons

$$(38) \quad 0 < \dots \leq \mu_{k+1}(h) \leq \mu_k(h) \leq \dots \mu_1(h) < \mu_0(h) = 1$$

la suite décroissante des valeurs propres positives de T_h . On a le théorème suivant :

Théorème 0.11. *Soit $h_0 > 0$ suffisamment petit. Il existe $\gamma < 1$ tel que pour tout $h \in]0, h_0]$ on a $\text{Spec}(T_h) \subset [-\gamma, 1]$ et 1 est une valeur propre simple de T_h . De plus, pour tout $L > 0$, il existe $h'_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $h \in]0, h'_0]$ et pour tout $k \leq L$, on a*

$$(39) \quad \left| \frac{1 - \mu_k(h)}{h^2} - \frac{\lambda_k}{2(d+2)} \right| \leq Ch^2$$

On peut aussi préciser la vitesse de convergence des itérés du noyau K_h vers la mesure stationnaire $d\nu_h$.

Théorème 0.12. *Il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$ tels que pour tout $h \in]0, h_0]$ on a*

$$(40) \quad e^{-\gamma'(h)nh^2} \leq 2 \sup_{x \in M} \|K_h^n(x, y) d_g y - d\nu_h\|_{TV} \leq C e^{-\gamma(h)nh^2} \quad \text{pour tout } n$$

Ici $\gamma(h), \gamma'(h)$ sont des fonctions positives telles que $\gamma(h) \simeq \gamma'(h) \simeq \frac{\lambda_1}{2(d+2)}$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Autrement dit, la vitesse de convergence est exponentielle quand n tend vers l'infini et le taux de convergence est en $\lambda_1 h^2$ où λ_1 est la première valeur propre non nulle du Laplacien.

Si l'on veut échantillonner la mesure canonique sur la variété (plutôt que $d\nu_h$), il faut modifier légèrement l'opérateur T_h en utilisant le procédé de Metropolis. On doit alors étudier un opérateur M_h qui n'est plus compact mais qui est une petite perturbation de l'opérateur T_h . On peut alors adapter les arguments précédents pour décrire le spectre de M_h et estimer la vitesse de convergence vers la mesure stationnaire.

Nous concluons cette partie en donnant quelques idées des démonstrations des théorèmes ci-dessus. Celles-ci reposent sur de l'analyse micro-locale en version semiclassique. On renvoie à [DS99] et [Mar02] pour des textes de référence. En ce qui concerne le théorème 0.11, la stratégie consiste à comparer les opérateurs T_h et $\Gamma_{d,h} := \Gamma_d(-h^2 \Delta_g)$ et à démontrer qu'ils sont proches en un certain sens. À cette fin, on démontre que pour toute fonction $\Phi_0 \in C_0^\infty$, $T_h \Phi_0(-h^2 \Delta_g)$ et $\Gamma_{d,h} \Phi_0(-h^2 \Delta_g)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels et que leurs symboles sont proches. Ceci permet d'utiliser les informations spectrales que nous avons sur $\Gamma_{d,h}$ pour en déduire des résultats sur T_h . En plus de l'approximation des valeurs propres énoncée dans le théorème 0.11, on démontre une estimation de Weyl de la fonction de comptage des valeurs propres ainsi que des estimées des fonctions propres en norme L^∞ : il existe $\delta_0 > 0$ et $h_0 > 0$ tels que pour tout $\lambda \in [0, \delta_0]$ et $h \in]0, h_0]$, on a

$$(41) \quad \# \text{Spec}(T_h) \cap [1 - \lambda, 1] \leq C(1 + h^{-2}\lambda)^{d/2},$$

et pour toute fonction $u_h \in L^2(M)$ et tout $z_h \in [1 - \delta_0, 1]$ tels que $(T_h - z_h)u_h = 0$, on a

$$(42) \quad \|u_h\|_{L^\infty} \leq C((1 + h^{-2}(1 - z_h))^{d/2}.$$

Le point de départ de la preuve du théorème 0.12 est l'égalité (15). Compte tenu des remarques de la section 3.3, il s'agit de démontrer une estimation convenable du projecteur spectral $1_{[1-Ch^2, 1]}(T_h)$ comme opérateur de L^2 dans L^∞ . Ceci est possible grâce aux estimées (41) et (42).

4.2. Opérateur de Metropolis sur un ouvert borné

Nous terminons cet article en décrivant le résultat que nous avons obtenu avec P. Diaconis et G. Lebeau sur l'analyse de l'algorithme de Metropolis sur un domaine borné.

4.2.1. Problème à un corps

On s'intéresse d'abord au problème consistant à déplacer au hasard un point dans un ouvert. On munit $\mathbb{R}^d$ de la métrique euclidienne et on suppose que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert borné et que sa frontière $\partial\Omega$ est de régularité Lipschitz (i.e. peut être paramétrée localement par une fonction Lipschitz). On se donne une densité $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on suppose régulière et on considère le noyau de Metropolis défini en (21), (22). Ici, la métrique est plate de sorte que la forme volume $d_g x$ est donnée par la mesure de Lebesgue et que le volume de la boule $B(x, h)$ est indépendant de x et donné par $c_d h^d$ où c_d est le volume euclidien de la boule unité. Par suite, la fonction $A(x, y)$ est donnée par $A(x, y) = \min(1, \rho(y)/\rho(x))$ et le noyau de Metropolis est

$$(43) \quad M_h(x, dy) = m_h(x)\delta_{y=x} + K_h(x, dy)$$

avec

$$(44) \quad K_h(x, dy) = \frac{1}{c_d h^d} \mathbf{1}_{\{d_g(x, y) \leq h\}} dy$$

et $m_h(x) = 1 - \int_{\Omega} K_h(x, dy)$.

On vérifie facilement que cet opérateur est auto-adjoint sur $L^2(\Omega, \rho(x)dx)$ de sorte que la mesure $\rho(x)dx$ est stationnaire. Se pose donc la question de la convergence des itérés de M_h vers la mesure stationnaire. Pour cela, on étudie le spectre de l'opérateur M_h . Pour simplifier, on suppose ici que $\rho = 1$.

La frontière de l'ouvert Ω étant Lipschitz, on montre facilement qu'il existe une constante $\delta_0 > 0$ telle que pour tout $h > 0$ petit on a $0 \leq m_h(x) < 1 - \delta_0$. Par suite le spectre essentiel de l'opérateur de multiplication par m_h est inclus dans $[-1, 1 - \delta_0]$. Or, l'opérateur K_h étant compact, il est bien connu que le spectre essentiel de $M_h = m_h + K_h$ est lui aussi inclus dans $[-1, 1 - \delta_0]$. Autrement dit, le spectre de M_h est discret dans $[1 - \delta_0, 1]$. On note

$$(45) \quad 0 < \dots \leq \mu_{k+1}(h) \leq \mu_k(h) \leq \dots \mu_1(h) \leq \mu_0(h) = 1$$

la suite décroissante des valeurs propres positives de M_h .

Comme précédemment, on va comparer ces valeurs propres à celles d'un opérateur de référence. On introduit donc le Laplacien de Neumann Δ_N défini par

$$(46) \quad \Delta_N u(x) = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2 u(x)$$

qui est auto-adjoint sur le domaine suivant

$$(47) \quad D(\Delta_N) = \{u \in H^2(\Omega), \partial_n u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

où $\partial_n u(x)$ est la dérivée normale de u sur la frontière $\partial\Omega$. Comme pour l'opérateur de Laplace Beltrami sur une variété, les injections de Sobolev montrent que l'inverse de $-\Delta_N + 1$ est compact, de sorte que le spectre de $-\Delta_N$ est constitué de valeurs propres $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ tendant vers l'infini. On a alors le résultat suivant :

Théorème 0.13. Soit $h_0 > 0$ suffisamment petit. Il existe $\gamma < 1$ tel que pour tout $h \in]0, h_0]$ on a $\text{Spec}(M_h) \subset [-\gamma, 1]$ et 1 est une valeur propre simple de M_h . De plus, pour tout $L > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$ petit, il existe $h'_0 > 0$ tel que pour tout $h \in]0, h'_0]$ et pour tout $k \leq L$, on a

$$(48) \quad |\mu_k(h) - 1 + \frac{h^2(d+2)}{2}\lambda_k| < \varepsilon h^2$$

Comme dans le cas d'une marche aléatoire sur une variété on démontre aussi la convergence exponentielle à l'équilibre :

Théorème 0.14. Il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$ tels que pour tout $h \in]0, h_0]$ on a

$$(49) \quad e^{-\gamma'(h)nh^2} \leq 2 \sup_{x \in M} \|M_h^n(x, y) d_g y - d\nu_h\|_{TV} \leq Ce^{-\gamma(h)nh^2} \quad \text{pour tout } n$$

Ici $\gamma(h), \gamma'(h)$ sont des fonctions positives telles que $\gamma(h) \simeq \gamma'(h) \simeq \frac{\lambda_1}{2(d+2)}$ lorsque $h \rightarrow 0$.

La démonstration du théorème 0.13 est un peu différente de celle du théorème 0.11. En effet, pour éviter des problèmes liés au fait que le bord de l'ouvert n'est pas régulier, on n'utilise pas ici d'analyse microlocale. On choisit plutôt une méthode variationnelle qui permet de comparer l'opérateur M_h sur $L^2(\Omega)$ à l'opérateur de Metropolis sur le tore, via leurs formes de Dirichlet respectives. Ceci permet en particulier d'obtenir une estimation similaire à (41).

Une manière élémentaire de voir apparaître le Laplacien avec condition de Neumann, consiste à appliquer l'opérateur M_h à une fonction propre de Δ_N . Supposons pour simplifier que le bord de Ω est régulier et que $(-\Delta_N - \lambda)u = 0$ et $\partial_n u = 0$ sur $\partial\Omega$. Alors u est une fonction régulière et on a

$$(50) \quad T_h u(x) - u(x) = \int_{|z| < 1, x+hz \in \Omega} (u(x+hz) - u(x)) dz$$

Si $\text{dist}(x, \partial\Omega) > h$, un développement de Taylor et l'impairité des fonctions $z \mapsto z_i$ montrent que

$$\begin{aligned} T_h u(x) - u(x) &= h \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} u(x) \int_{|z| < 1} z_j dz + \frac{h^2}{2} \sum_{i,j} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u(x) \int_{|z| < 1} z_i z_j dz + O_{L^\infty}(h^3) \\ &= \frac{\alpha_d}{2} h^2 \Delta u(x) + O_{L^\infty}(h^3) = \frac{\alpha_d}{2} h^2 \lambda u(x) + O_{L^\infty}(h^3) \end{aligned}$$

Pour x tel que $\text{dist}(x, \partial\Omega) < h$, on utilise des coordonnées telles que localement $\Omega = \{(x_1, x') \in \mathbb{R}^d, x_1 > 0\}$. Un nouveau développement de Taylor montre que

$$T_h u(x) - u(x) = h \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} u(x) \int_{|z| < 1, x_1 + h z_1 > 0} z_j dz + O_{L^\infty}(h^2)$$

Un argument de parité montre que les termes d'indices supérieurs à 2 dans la somme ci dessus s'annulent. Par ailleurs, comme $\partial_n u|_{\partial\Omega} = 0$ et $\text{dist}(x, \partial\Omega) < h$ le terme d'indice $j = 1$ est un $O_{L^\infty}(h^2)$. Comme l'ensemble $\{\text{dist}(x, \partial\Omega) < h\}$ est de mesure $O(h)$, il vient

$$1_{\text{dist}(x, \partial\Omega) < h} (T_h u - u) = O_{L^2}(h^{\frac{5}{2}}).$$

En combinant cette estimation avec l'estimation loin du bord, il vient $T_h u - u = \frac{1}{2}\alpha_d h^2 \lambda u + O_{L^2}(h^{5/2})$. On en déduit aisément l'existence de valeurs propres $\mu_k(h)$ de T_h satisfaisant (48). Il faut par contre travailler un peu plus pour montrer qu'on récupère ainsi toutes les valeurs propres proches de 1. Concernant la preuve du théorème 0.14, la stratégie est la même que dans le cas d'une variété compacte. Cependant, l'approche variationnelle ne permet pas de prouver d'estimation des fonctions propres similaire à (42). Pour estimer les projecteurs spectraux de L^2 dans L^∞ , on passe donc par des estimées de Nash. On renvoie à [DSC96], [DLM08] et [Leb] pour plus de détails.

4.2.2. Le problème des sphères dures

Revenons maintenant au problème historique, dit des sphères dures, que nous avons décrit dans l'introduction. La stratégie que nous avons mise en œuvre pour étudier le déplacement aléatoire d'un point dans un ouvert s'adapte facilement. On reprend ici les notations de l'introduction. L'espace de configurations est donc

$$(51) \quad \mathcal{O}_{N,\varepsilon} = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in B^N, \forall 1 \leq i < j \leq N, |x_i - x_j| > \varepsilon\}.$$

où $B =]-A, A]^2$. Il convient de remarquer que lorsque N devient grand, l'ensemble $\mathcal{O}_{N,\varepsilon}$ peut être très compliqué. Par exemple, il est démontré dans [Kah09] qu'on peut avoir une faible densité de disques sans que cet ensemble soit connexe. Plus précisément, Kahle montre que $\mathcal{O}_{N,\varepsilon}$ peut avoir des composantes connexes d'intérieur vide dès que $N\varepsilon$ est grand et sous la contrainte $N\varepsilon^d$ arbitrairement petit. Cependant, on démontre dans [DLM08] que si $N\varepsilon$ est suffisamment petit, alors l'ouvert $\mathcal{O}_{N,\varepsilon}$ est connexe et Lipschitz.

Introduisons maintenant l'opérateur de Metropolis. On note φ la fonction caractéristique de la boule unité dans $\mathbb{R}^2$ et on introduit le noyau

$$K_h(x, dy) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{x_1} \otimes \dots \otimes \delta_{x_{j-1}} \otimes h^{-d} \varphi\left(\frac{x_j - y_j}{h}\right) dy_j \otimes \delta_{x_{j+1}} \otimes \dots \otimes \delta_{x_N},$$

et l'opérateur de Metropolis associé sur $L^2(\mathcal{O}_{N,\varepsilon})$

$$M_h(u)(x) = m_h(x)u(x) + \int_{\mathcal{O}_{N,\varepsilon}} u(y)K_h(x, dy),$$

avec

$$m_h(x) = 1 - \int_{\mathcal{O}_{N,\varepsilon}} K_h(x, dy).$$

En terme de chaîne de Markov, ce noyau s'interprète de la manière suivante. Supposons que la chaîne est en $X = (x_1, \dots, x_N)$ au temps n . Pour déterminer sa position au temps $n+1$, on commence par choisir un entier j au hasard dans $\{1, \dots, N\}$ puis on déplace au hasard le disque x_j dans la boule de rayon h centrée en x_j . On est donc exactement en train de mettre en œuvre la procédure décrite dans l'introduction.

Le noyau M_h admet la mesure de Lebesgue pour mesure stationnaire et comme dans les cas précédents, la convergence des itérés de M_h vers cette mesure se fait

à vitesse exponentielle; le taux de décroissance exponentiel étant donné par une quantité spectrale. Plus précisément, introduisons l'opérateur

$$(52) \quad |\Delta|_N = -\frac{1}{16N}\Delta, \\ D(|\Delta|_N) = \left\{ u \in H^1(\mathcal{O}_{N,\varepsilon}), -\Delta u \in L^2(\mathcal{O}_{N,\varepsilon}), \partial_n u|_{\partial\mathcal{O}_{N,\varepsilon}} = 0 \right\}.$$

Comme le bord de $\mathcal{O}_{N,\varepsilon}$ est Lipschitz, la dérivée normale est bien définie. Cet opérateur est positif, à résolvante compacte. On note $0 = \nu_0 < \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots$ son spectre. Le théorème suivant donne une première estimation de la vitesse de convergence de l'algorithme de Metropolis pour le problème des sphères dures dans un cadre semiclassique.

Théorème 0.15. *Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\mathcal{O}_{N,\varepsilon}$ soit connexe et Lipschitz. Alors*

$$(53) \quad \sup_{x \in \mathcal{O}_{N,\varepsilon}} \left\| T_h^n(x, dy) - \frac{dy}{\text{vol}(\mathcal{O}_{N,\varepsilon})} \right\|_{TV} \leq C_4 e^{-ng(h)}.$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-2} g(h) = \nu_1$.

La preuve de ce théorème consiste essentiellement à se ramener au cas du théorème 0.14 en itérant suffisamment T_h . On renvoie à [DLM08] pour les détails.

5. Conclusion

Les méthodes d'analyse microlocale se sont avérées très fructueuses pour entamer l'étude de la vitesse de convergence d'algorithmes de Metropolis. Il faut néanmoins mentionner deux limites à cette approche.

En premier lieu, dans les estimations de variation totale du type (53), le taux de décroissance exponentielle est optimal, par contre la constante devant l'exponentielle est très mal connue. En particulier sa dépendance par rapport à la dimension de l'espace reste à étudier.

Une autre limite à cette approche est qu'elle ne s'applique qu'au cas semiclassique, c'est à dire lorsque le mouvement entre deux étapes de la chaîne de Markov est petit. Dans la pratique les algorithmes utilisés sont souvent globaux (on s'autorise à déplacer un point dans tout l'espace de configuration). Pour l'heure ces problèmes semblent hors d'atteinte par des méthodes semiclassiques.

6. Références

- [Bre83] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [Dia09] P. Diaconis. The Markov chain Monte Carlo revolution. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 46(2) :179–205, 2009.
- [DL09] P. Diaconis and G. Lebeau. Micro-local analysis for the Metropolis algorithm. *Math. Z.*, 262(2) :411–447, 2009.
- [DLM08] P. Diaconis, G. Lebeau, and L. Michel. Analysis of the metropolis algorithm in a bounded domain. *preprint Univ. Nice*, 2008.
- [DS99] M. Dimassi and J. Sjöstrand. *Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit*. Lecture Note Series. 268. Cambridge University Press, London, 1999.

- [DSC96] P. Diaconis and L. Saloff-Coste. Nash inequalities for finite Markov chains. *J. Theoret. Probab.*, 9(2) :459–510, 1996.
- [DSC98] P. Diaconis and L. Saloff-Coste. What do we know about the metropolis algorithm. *J. Comput. System Sci.*, 57(1) :20–36, 1998.
- [Fel71] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I & II.* Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.
- [Kah09] M. Kahle. Asymptotically zero-density stable configuration of hard discs. *preprint Stanford Univ.*, 2009.
- [LD07] G. Lebeau and P. Diaconis. Métropolis : le jour où l'étoile probabilité entra dans le champ gravitationnel de la galaxie microlocale. In *Séminaire : Équations aux Dérivées Partielles. 2006–2007*, pages Exp. No. XIV, 13. 2007.
- [Leb] G. Lebeau. Introduction à l'analyse de l'algorithme de metropolis. Cours de l'école d'été du GDR MOAD. <http://moad.univ-lyon1.fr/Main.php>
- [LM09] G. Lebeau and L. Michel. Semiclassical analysis of a random walk on a manifold. *Annals of Probability*, 2010.
- [Mar02] A. Martinez. *An introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis.* Springer, New York, 2002.
- [MRR⁺53] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, and E. Teller. Equations of state calculations by fast computing machines. *J. Chem. Phys.*, 21 :1087–1092, 1953.
- [RS72] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis.* Academic Press, New York, 1972.
- [SC97] L. Saloff-Coste. Lectures on finite markov chains. *Lectures notes in math.* 1665. Springer, New York, 1997.
- [Uhl68] G. E. Uhlenbeck. An outline of statistical mechanics. In *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, volume 2, pages 1–19. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1968.

Société Mathématique de France PRIX D'ALEMBERT



Prix décerné
par la Société Mathématique de France
Il vise à encourager
la diffusion de la connaissance
des mathématiques
vers un large public.

D'un montant de 2000 euro, il récompense :

- une œuvre ou un parcours ayant intéressé
le public aux développements des mathématiques
- un ouvrage d'enseignement, de vulgarisation
ou de pédagogie des mathématiques

candidatures à déposer avant le :
mercredi 15 avril 2010

Société Mathématique de France
IHP - 11 rue Pierre et Marie Curie 75231 Paris cedex 05
<http://smf.emath.fr>



MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Une brève introduction à la théorie effective de l'aléatoire

Laurent Bienvenu¹, Mathieu Hoyrup²

1. La complexité de Kolmogorov

1.1. Des suites pas vraiment aléatoires

Imaginez qu'un après-midi où vous n'avez rien d'autre à faire, vous décidiez de prendre une pièce de monnaie, et de tirer à pile ou face mille fois de suite. Imaginez de plus que vous obteniez alors le résultat :

PPPPPPPPPP... (mille piles)

Il y a là de quoi s'interroger. La suite obtenue ne semble absolument pas « aléatoire », mais en y réfléchissant, du point de vue de la théorie usuelle des probabilités, cette suite a rigoureusement *la même* probabilité d'occurrence que n'importe quelle autre suite de la même longueur. Mais quel joueur, fut-il mathématicien, ne conclurait pas immédiatement devant un tel résultat que la pièce est biaisée ? Nous sommes donc ici face à un paradoxe que la théorie usuelle des probabilités est impuissante à résoudre.

Une réponse à ce paradoxe fut apportée en 1965 par Kolmogorov [Kol65]³ (déjà à l'origine de la formalisation axiomatique du calcul des probabilités !). L'intuition de Kolmogorov est la suivante : si la suite *PPPPPP*... nous semble surprenante, c'est qu'elle est simple, c'est-à-dire facile à décrire. Et Kolmogorov de proposer de définir la complexité d'un objet comme étant la longueur de sa plus petite « description ». Il s'agit bien entendu d'être prudent sur ce que l'on appelle « description », car les paradoxes rôdent, notamment le célèbre paradoxe de Berry, qui consiste en l'expression :

Le plus petit entier naturel qui ne peut pas être décrit
avec moins de deux cents caractères

¹ Chargé de recherche CNRS LIAFA, Université Paris 7.

² Chargé de recherche INRIA LORIA, Nancy.

³ Des idées similaires furent développées à la même époque par Solomonoff [Sol64] et Chaitin [Cha66, Cha75], ce qui donne lieu, encore aujourd'hui, à d'incessantes querelles de paternité. Nous nous garderons bien d'y prendre part, et renvoyons le lecteur curieux aux articles originaux.

Cette expression comportant moins de deux cents caractères, l'entier n qu'elle décrit est en contradiction même avec sa définition. La solution proposée par Kolmogorov pour éviter ce genre d'écueil est d'adopter un point de vue inspiré de l'informatique, dans lequel « description » s'entend par « programme informatique ». La *complexité de Kolmogorov* d'un objet fini x (suite de piles/faces, entier naturel, graphe fini, etc.) est donc la taille du plus petit programme informatique permettant de générer x . On ne peut s'empêcher de faire l'analogie avec le principe du Rasoir d'Occam, couramment interprété dans la science moderne comme la recherche de l'explication la plus simple à une observation. Ici l'objet observé est x , et sa plus simple « explication » est le plus petit programme informatique qui produit x .

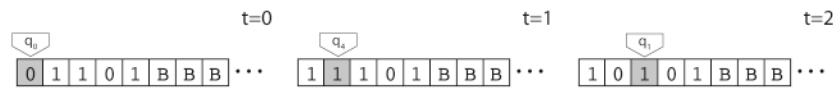
1.2. Un peu de calculabilité

Le lecteur rigoureux ne manquera pas de faire remarquer que la définition de la complexité de Kolmogorov que nous venons de proposer est encore un peu trop vague. Le terme « programme informatique » est très général : il existe divers langages de programmation (Pascal, Caml, C, Java, etc.), et le résultat d'un programme informatique donné dépend également du système d'exploitation (Windows, Unix, etc.) sur lequel il est exécuté. Il paraît donc peu aisé de donner une définition *absolue* de la notion de programme informatique.

Ceci peut néanmoins être fait de façon rigoureuse grâce aux travaux d'Alan Turing, datant du milieu des années 1930. Turing propose un modèle mathématique d'ordinateur (et ce bien avant l'apparition des ordinateurs que nous connaissons aujourd'hui!), appelé *machine de Turing*. Une machine de Turing consiste en :

- un ruban de lecture, composé d'une infinité de cases, chaque case pouvant contenir un des trois caractères 0, 1, et B (blanc).
- une tête de lecture/écriture, qui se déplace sur le ruban case par case
- un ensemble fini d'états dans lequel peut se trouver la tête, dont deux particuliers, l'état initial q_I , et l'état final q_F .
- une table de transition, qui peut être vue comme une fonction à deux paramètres, prenant en entrée l'état actuel de la tête, et le symbole présent sur la case lue par la tête, et donnant les instructions à effectuer dans ce cas, qui sont au nombre de trois : (1) écrire un nouveau symbole sur la case, (2) déplacer la tête de lecture d'une case vers la droite ou d'une case vers la gauche, (3) changer l'état de la tête de lecture. On peut représenter cette table de transition comme un ensemble de quintuplés; par exemple, le quintuplé $(q_3, B, 1, \leftarrow, q_5)$ signifie que si la tête est dans l'état q_3 et lit le symbole B , alors elle écrit à la place le symbole 1, se déplace vers la gauche et passe dans l'état q_5 .

Un calcul d'une machine se déroule de la façon suivante. Initialement, on place une suite finie de symboles 0 ou 1 (la valeur d'entrée du calcul) au début du ruban, que l'on complète par une infinité de B . La tête de lecture/écriture est placée en face de la première case, dans l'état q_I . Puis on exécute les instructions données par la table de transition. Si à un moment donné la tête de lecture passe dans l'état final q_F , le calcul s'arrête, et le résultat (valeur de sortie) est alors la suite finie de symboles 0 ou 1 qui se trouve sur le ruban (les symboles B sont ignorés).



Une machine de Turing M calcule donc une application (notée également M , par souci de simplicité) de l'ensemble des suites binaires finies, habituellement noté $\{0,1\}^*$, dans lui-même. Cette application est en général partielle car une machine M peut, sur une entrée donnée p , ne jamais atteindre l'état final. Aussi rudimentaire que peut paraître une machine de Turing, on peut montrer que toute fonction calculable (de $\{0,1\}^*$ dans lui-même) par ordinateur l'est par une machine de Turing. On a ainsi un modèle de calcul simple mais suffisamment puissant pour formaliser notre intuition de départ, par la correspondance

ordinateur	=	machine de Turing
programme/description	=	valeur d'entrée du ruban (au début du calcul)
objet décrit	=	valeur de sortie du ruban (à la fin du calcul)

1.3. Vers une définition formelle de la complexité de Kolmogorov

Ainsi, lorsque l'on a un calcul du type $M(p) = x$, p peut-être vu comme une description de la suite binaire finie x *relativement à la machine M* . On peut alors définir la complexité de Kolmogorov relativement à M de x (notée $K_M(x)$) comme étant la longueur du plus petit p tel que $M(p) = x$, formellement :

Définition 1. La complexité de Kolmogorov de $x \in \{0,1\}^*$ relativement à une machine M est définie par

$$K_M(x) = \min \{|p| : M(p) = x\}$$

(où $|p|$ désigne la longueur de p), avec la convention $K_M(x) = +\infty$ si aucun p ne satisfait $M(p) = x$.

Il demeure que la complexité K_M dépend de la machine M , alors que l'on souhaite avoir une notion de complexité de Kolmogorov absolue. Sans pouvoir supprimer totalement cette dépendance, il est possible de la minimiser. En effet, il existe des machines de Turing *universelles*, c'est-à-dire qui peuvent simuler toute autre machine. Plus précisément, il existe une énumération $M_0, M_1, \dots$ des machines de Turing⁴ et une machine U telle que, sur l'entrée $0^k 1 p$ (k symboles 0, suivis de 1 puis de p), U retourne $M_k(p)$.

Proposition 2. La machine universelle U présentée ci-dessus est optimale pour la complexité de Kolmogorov, c'est-à-dire que pour toute machine M , il existe une constante c_M telle que

$$K_U \leq K_M + c_M$$

Preuve : soit M une machine de Turing, et soit k son indice dans l'énumération des machines. Pour tout $x \in \{0,1\}^*$, s'il existe p tel que $M(p) = x$, on a alors $U(0^k 1 p) = x$ par définition de U , et donc par définition de la complexité de Kolmogorov, $K_U(x) \leq K_M(x) + (k+1)$. En prenant $c_M = k+1$, on a le résultat voulu.

⁴ Le fait qu'il n'existe qu'une quantité dénombrable de machines de Turing est clair par la définition présentée plus haut.

La proposition précédente permet finalement de définir la complexité de Kolmogorov d'une suite binaire finie x , en posant

$$K(x) = K_U(x)$$

où U est une machine de Turing optimale, fixée une fois pour toutes. Comme nous l'avons dit plus haut, notre définition de la complexité de Kolmogorov n'est pas indépendante de la machine U , mais elle l'est à une constante près. La théorie de complexité de Kolmogorov est donc une théorie *asymptotique* : dire que $K(0001101) = 3$ n'a aucun sens, mais on peut par exemple dire que si x est une suite binaire de longueur n , dont les $n/2$ premiers bits sont des zéros, alors $K(x) \leq n/2 + O(1)$. On notera que la Proposition 2 assure que $K(x) < +\infty$ pour tout x , et même que $K(x) \leq |x| + O(1)$. En effet, si M est la machine calculant la fonction identité (c'est-à-dire la machine qui sur toute entrée s'arrête immédiatement sans rien faire), on a pour tout x , $K_M(x) = |x|$, et donc $K_U(x) \leq |x| + O(1)$ par la Proposition 2. Ceci est clair intuitivement : pour décrire un x donné, une façon de procéder est de décrire x explicitement, c'est-à-dire d'en énoncer les bits un par un.

Nous avons jusqu'à maintenant défini la complexité de Kolmogorov uniquement pour les suites binaires finies. Mais, comme les informaticiens le savent bien, la plupart des objets finis dont l'ensemble est dénombrable peuvent s'encoder facilement par des suites binaires. Ainsi, un entier n peut se représenter par son écriture binaire, ou encore par 0^n , une paire d'entiers (n, m) par $0^n 1^m$, un graphe fini à n sommets comme une matrice carrée $n \times n$ à coefficients binaires, elle-même représentable par une suite binaire de n^2 éléments, etc. On peut donc ainsi, ayant choisi un encodage, définir la complexité de Kolmogorov d'un entier, d'un rationnel, d'un graphe fini, etc., comme étant la complexité de Kolmogorov de la suite binaire finie le représentant. Le lecteur attentif (toujours lui !) objectera que la complexité de Kolmogorov de tels objets dépendra de l'encodage choisi. C'est exact, mais seulement à une constante additive près (la complexité de Kolmogorov elle-même étant définie à une constante additive près, ce n'est donc pas un problème !), comme le montre le lemme suivant :

Lemme 3. *Pour toute fonction f calculable, il existe une constante c_f telle que pour $x \in \{0, 1\}^*$:*

$$K(f(x)) \leq K(x) + c_f$$

Preuve : soit M la machine de Turing qui sur une entrée p , calcule $f(U(p))$ (où U est notre machine optimale fixée). Une telle machine existe car la composée de deux fonctions calculables est toujours calculable⁵. Soit x une suite binaire finie. Soit p le plus court programme pour U qui produit x (i.e., tel que $|p| = K(x)$). On a par définition $M(p) = f(U(p)) = f(x)$. Donc $K_M(f(x)) \leq K(x)$, et par la Proposition 2, il suit que $K(f(x)) \leq K(x) + c_M$. En prenant $c_f = c_M$ on a le résultat voulu.

Ainsi, si x et y sont deux encodages d'un même objet (par exemple un rationnel), en prenant f et g les fonctions permettant de passer d'un codage à l'autre, le Lemme ci-dessus prouve que $|K(x) - K(y)| = O(1)$. De façon plus générale, le

⁵ Un fait intuitivement évident, mais que nous admettrons ici car il n'est pas si facile de le prouver directement avec les machines de Turing.

Lemme 3 exprime le fait que l'on ne peut pas créer de la complexité de Kolmogorov par des moyens algorithmiques.

1.4. Des suites finies aléatoires

Ainsi équipés de la notion de complexité de Kolmogorov, nous pouvons enfin formaliser la notion de suite finie aléatoire comme étant une suite n'admettant pas de description plus petite qu'elle-même :

Définition 4. Une suite binaire finie x est dite aléatoire si $K(x) \geq |x|$. De même, pour un type d'objet fini, on dit qu'un objet x est aléatoire si sa représentation sous forme de suite binaire l'est (l'encodage étant fixé à l'avance). Plus généralement, on dit qu'un objet x est c -aléatoire si $K(x) \geq |x| - c$.

Notons que pour tout n il existe nécessairement des suites binaires aléatoires de longueur n . En effet, le nombre de programmes de longueur au plus $n - 1$ est égal à $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$; il existe donc moins de descriptions potentielles de longueur au plus $n - 1$ que de suites de longueur n , ce qui prouve notre assertion. Le même argument combinatoire montre que parmi les suites binaires de longueur n , au plus 2^{n-c} ne sont pas c -aléatoires (soit une proportion d'au plus 2^{-c} de suites non c -aléatoires). Par exemple, pour $c = 10$, au moins 99,9% des suites d'une longueur n donnée sont c -aléatoires. Ceci correspond bien à l'intuition que les suites finies aléatoires (ou quasi-aléatoires) doivent être nombreuses, de sorte que si l'on tire une suite binaire au hasard, la suite obtenue sera aléatoire avec grande probabilité (ce qui est bien la moindre des choses !)

Il est en revanche à noter que la notion d'objet aléatoire (ou c -aléatoire) n'est pas robuste. En effet, la complexité de Kolmogorov n'est définie qu'à une constante près (dépendant de la machine optimale U choisie), mais modifier la constante peut changer l'ensemble des suites aléatoires. A bien y réfléchir, le fait de ne pas avoir dans le cas des suites binaire finies une distinction absolue entre « aléatoire » et « non-aléatoire » est sans doute une bonne chose : quel sens aurait l'affirmation « 0000 n'est pas aléatoire » ? On peut en revanche affirmer que pour n suffisamment grand, la suite 0^n n'est pas aléatoire. En effet, soit f la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1\}^*$ qui à n associe 0^n . D'après le Lemme 3, on a

$$K(0^n) = K(f(n)) \leq K(n) + O(1)$$

Or, un entier n peut se représenter par une suite binaire de longueur $\log(n) + O(1)$: son écriture en base 2. Ainsi, pour tout entier n , $K(n) \leq \log(n) + O(1)$. Il suit des deux inégalités précédentes que

$$K(0^n) \leq \log(n) + O(1)$$

Et donc, pour n suffisamment grand, la complexité de 0^n , de l'ordre de $\log(n)$, est beaucoup plus petite que sa longueur, qui est n . Voilà qui apporte une réponse partielle au paradoxe du début de cet article : pour tout n assez grand, la suite $PPPPPP\dots$ (n fois P) n'est pas aléatoire (on peut en effet identifier P^n à 0^n par l'encodage $P \mapsto 0$ et $F \mapsto 1$).

Au delà de cet exemple simple, la notion de suite binaire aléatoire est riche d'applications, notamment à l'algorithmique et à la combinatoire. On peut en effet, pour donner une borne inférieure sur complexité d'un algorithme, utiliser les suites aléatoires comme « pire cas », et estimer la complexité de l'algorithme sur ces suites seulement.

Il arrive également que l'on puisse utiliser la complexité de Kolmogorov pour prouver la correction d'algorithmes probabilistes. En plus de son entrée x , un algorithme probabiliste possède une seconde entrée, qui peut être vue comme une chaîne de bits aléatoires r , que l'algorithme utilise lors de son exécution. Pour prouver que l'algorithme est correct, il est d'usage de prouver que pour toute entrée x , la probabilité que r fasse que l'algorithme retourne la bonne réponse est haute. Une autre façon de procéder est de prouver que si r est une suite aléatoire (ou quasi-aléatoire), alors l'algorithme est correct. Cette technique a récemment été utilisée de façon spectaculaire par Moser [Mos09] pour obtenir un résultat majeur en combinatoire, à savoir une version constructive (via un algorithme probabiliste) du lemme local de Lovász (voire [For09] pour une bonne « vulgarisation » de ce résultat).

Il n'est pas possible, dans ces quelques pages, de donner un exposé plus détaillé de tels arguments. Cependant, afin de comprendre le type de techniques qu'ils peuvent mettre en jeu, nous allons donner une preuve alternative d'un théorème élémentaire bien connu en utilisant la complexité de Kolmogorov : il existe une infinité de nombres premiers. Supposons en effet qu'il en existe seulement un nombre fini $p_1 < \dots < p_k$. On a alors une surjection (calculable) f de $\mathbb{N}^k$ dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ définie par

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$$

Soit maintenant un entier n aléatoire, c'est-à-dire que sa représentation binaire est une suite aléatoire. Cette suite a pour taille $\log(n) + O(1)$, et comme elle est aléatoire on a par définition $K(n) = \log(n) + O(1)$. Soit alors $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ le k -uplet tel que $f(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = n$. D'après le Lemme 3, on a $K(n) \leq K(\alpha_1, \dots, \alpha_k) + O(1)$. Comme les nombres premiers p_i sont tous au moins égaux à 2, les α_i sont tous d'ordre $O(\log n)$, et donc représentés par une suite binaire de longueur $O(\log \log n)$. Donc :

$$\log(n) + O(1) = K(n) \leq K(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = O(k \log \log n)$$

ce qui est bien sûr une contradiction pour n suffisamment grand.

Dans cette première partie, nous avons vu comment donner un sens à la notion d'aléatoire pour les suites binaires finies (et les objets qui peuvent être représentés ainsi), via la complexité de Kolmogorov. Insistons une nouvelle fois sur le fait que la notion de complexité de Kolmogorov est plus quantitative que qualitative, et ne permet pas de dire si une suite de dix mille « piles » obtenue en jouant à pile ou face est aléatoire ou non. Supposons maintenant que l'on lance une pièce équilibrée une infinité de fois, et que l'on obtienne la suite $PPP \dots$ (uniquement des piles). On a envie dans ce cas de dire que cette suite *n'est pas* aléatoire. On peut donc ainsi espérer définir un critère qualitatif d'aléatoire sur l'ensemble des suites binaires infinies c'est-à-dire, définir de façon absolue quelles suites sont aléatoires et quelles suites ne le sont pas. C'est en effet possible, non seulement dans le cas des suites

binaires infinies, mais dans de nombreux espaces de probabilité, comme nous allons le voir maintenant.

2. Éléments aléatoires et pseudo-aléatoires dans les espaces de probabilités

Si l'on tente de définir mathématiquement ce que pourrait vouloir dire, pour un élément d'un espace de probabilité, qu'être « aléatoire », on s'attend à ce qu'un tel élément soit typique vis-à-vis de la mesure de probabilité sous-jacente, c'est-à-dire qu'il vérifie « la plupart » des propriétés vraies avec probabilité 1, ou qu'il soit dans « la plupart » des ensembles de mesure 1. Sauf dans le cas où l'espace de probabilité est discret, on ne peut évidemment pas exiger d'un élément qu'il soit dans tous les ensembles de mesure 1. Alors quel sens donner à l'expression « la plupart » ? La théorie de la calculabilité (qui permet de formaliser la notion d'algorithme, et que l'on a présentée ci-dessus via les machines de Turing), et plus généralement l'*analyse calculable* (la théorie qui permet de manipuler les objets, structures de l'analyse mathématique avec des algorithmes) fournissent des réponses satisfaisantes à cette question.

L'idée est donc de définir un élément aléatoire comment un élément qui vérifie toutes les propriétés de mesure 1 qui peuvent être « décrites par un algorithme ». Tout le problème est donc de donner un sens précis à cette dernière expression et nous verrons qu'il existe plusieurs notions non équivalentes, ayant chacune son intérêt propre.

Pour définir comment un algorithme peut décrire un ensemble mesurable, nous partons du résultat classique de la théorie de la mesure.

Théorème 5. *Sur tout espace métrique X , toute mesure de probabilité borélienne P est régulière, c'est-à-dire que pour tout borélien $A \subseteq X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F et un ouvert G tels que $F \subseteq A \subseteq G$ et $P(G \setminus F) < \varepsilon$.*

Une manière de décrire un borélien est donc de fournir une suite de fermés et une suite d'ouverts approchant l'ensemble par l'intérieur et l'extérieur respectivement.

Nous travaillons ici sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels muni de la σ -algèbre $\mathcal{B}$ des boréliens. Tout peut se généraliser aux espaces métriques séparables.

2.1. L'approche de Martin-Löf

L'approche de Martin-Löf s'appuie sur une version calculable de la régularité des mesures.

Définition 6. *Un ensemble A est **Martin-Löf P-mesurable** s'il existe une machine de Turing qui, sur l'entrée n , décrit un fermé F_n et un ouvert U_n tels que $F_n \subseteq A \subseteq U_n$ et $P(U_n \setminus F_n) < 2^{-n}$.*

Décrire un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}$, c'est produire une liste (infinie) d'intervalles ouverts à bornes rationnelles dont l'union est U . Décrire un fermé F , c'est décrire l'ouvert $\mathbb{R} \setminus F$.

La définition 6 est une généralisation d'une définition due à Martin-Löf, qui s'est limité dans [ML66] aux ensembles de mesure nulle (l'algorithme n'ayant alors pas à fournir les fermés F_n). Faisons quelques observations à propos de cette notion :

Remarques. – La description produite par l'algorithme est partielle dans le sens où elle ne caractérise pas l'ensemble A . En fait, l'algorithme décrit tout ensemble A' vérifiant

$$(1) \quad \bigcup_n F_n \subseteq A' \subseteq \bigcap_n U_n.$$

Ainsi, la description fournie par l'algorithme peut éventuellement distinguer deux boréliens P -équivalents : il existe (sauf dans le cas d'une mesure discrète) des boréliens A' qui sont P -équivalents à A mais ne satisfont pas la double-inclusion (1) : il suffit par exemple d'enlever un élément de $\bigcup_n F_n$ à A . Ainsi, l'information donnée par l'algorithme sur A est plus fine qu'une description de la classe d'équivalence de A .

– En réalité, si A est Martin-Löf P -mesurable, il existe des boréliens A' qui sont P -équivalents à A mais qui ne sont pas Martin-Löf P -mesurables.

Théoreme 7 (Martin-Löf [ML66]). L'intersection de tous les ensembles Martin-Löf P -mesurables de mesure 1 est Martin-Löf P -mesurable.

On note M_P cette intersection et on qualifie de **Martin-Löf P -aléatoires** ses éléments.

Notons $\mathcal{M}_P$ la collection des ensembles Martin-Löf P -mesurables. Ce n'est pas une σ -algèbre en général, mais

- (1) C'est une algèbre booléenne
- (2) Si pour tout $i \in \mathbb{N}$, A_i est Martin-Löf P -mesurable et s'il existe un même algorithme qui sur l'entrée i décrit A_i et si $P(\bigcup_i A_i)$ est un nombre calculable, alors $P(\bigcup_i A_i)$ est Martin-Löf P -mesurable, et de même pour $\bigcap_i A_i$.

Nous étions partis d'un espace de probabilité $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$. Considérons l'ensemble M_P , la collection $\mathcal{M}_P$ de parties de M_P , et la restriction de P à $\mathcal{M}_P$. $(M_P, \mathcal{M}_P, P)$ n'est pas un espace de probabilité car $\mathcal{M}_P$ n'est pas une σ -algèbre. Néanmoins, $\mathcal{M}_P$ a une structure proche, qui permet, dans certaines limites, de « faire des probabilités » sur cette structure. En voici un exemple.

Lemme 8 (Borel-Cantelli). Soient A_i des ensembles uniformément Martin-Löf P -mesurables tels que $\sum_i P(A_i) < \infty$. Alors

- i) $\limsup A_i = \bigcap_i \bigcup_{j>i} A_j$ est Martin-Löf P -mesurable, et de mesure nulle.
- ii) $M_P \subseteq (\limsup A_i)^c$.

(on utilise ci-dessus la notation E^c pour désigner le complémentaire d'un événement E). Ainsi, la conclusion n'est pas que P -presque tout élément n'appartient qu'à un nombre fini de A_i , mais que cela est vrai de tout élément de M_P . Ainsi chacun des points Martin-Löf P -aléatoires se comporte bien de manière typique pour cette propriété.

Remarquons que dans le lemme classique, l'analogue de (i) n'est pas explicité puisqu'il se déduit immédiatement du fait que l'on dispose d'une σ -algèbre.

2.2. L'approche de Schnorr

Montrer qu'un ensemble de mesure 1 est Martin-Löf P -mesurable, c'est l'approcher de l'intérieur par des fermés dont on contrôle la mesure. Dans bien des cas, on connaît précisément la mesure de ces fermés, ou tout au moins, on peut concevoir un programme qui va estimer leurs mesures avec n'importe quelle précision. C'est par exemple le cas dans la loi forte des grands nombres.

La définition suivante, plus forte que la Définition 6, requiert explicitement que l'on puisse estimer à l'aide d'un algorithme les mesures des fermés et ouverts approchant le borélien. On dira qu'une machine de Turing *décrit* un réel x si elle produit une suite de rationnels q_n (encodés sous forme de suites binaires finies) vérifiant $|q_n - x| < 2^{-n}$. Un réel x est dit *calculable* s'il peut être décrit par une machine de Turing. L'ensemble des réels calculables est dénombrable puisque l'ensemble des algorithmes l'est.

Définition 9. *Un ensemble A est Schnorr P -mesurable s'il existe un algorithme qui, sur l'entrée n , décrit un fermé F_n , un ouvert U_n et leurs mesures respectives, tels que $F_n \subseteq A \subseteq U_n$ et $P(U_n \setminus F_n) < 2^{-n}$.*

De la même façon, notons $\mathcal{S}_P$ la collection des ensembles Schnorr P -mesurables. Par définition, la Schnorr P -mesurabilité est plus forte que la Martin-Löf P -mesurabilité, c'est-à-dire que $\mathcal{S}_P \subseteq \mathcal{M}_P$. Encore une fois, $\mathcal{S}_P$ n'est pas une σ -algèbre en général mais possède les mêmes propriétés que $\mathcal{M}_P$:

- (1) C'est une algèbre booléenne
- (2) Si pour tout $i \in \mathbb{N}$, A_i est Schnorr P -mesurable et qu'il existe un même algorithme qui sur l'entrée i décrit A_i et si $P(\bigcup_i A_i)$ est un nombre calculable, alors $P(\bigcup_i A_i)$ est Schnorr P -mesurable, et de même pour $\bigcap_i A_i$.

Cette notion plus forte induit une autre notion d'élément aléatoire, plus faible.

Définition 10. *On note $\mathcal{S}_P$ l'intersection de tous les ensembles Schnorr P -mesurables de mesure 1, et on appelle **Schnorr P -aléatoires** ses éléments.*

La situation est alors bien différente, puisque l'analogue du Théorème 7 n'est pas vrai en général, comme le montre le théorème suivant (la mesure P est dite non-atomique si elle n'a pas de point de concentration, c'est-à-dire de point $x \in [0, 1]$ tel que $P(\{x\}) > 0$).

Théorème 11. *Si la mesure P est non-atomique, $\mathcal{S}_P$ n'est pas Schnorr P -mesurable.*

Ce résultat est un corollaire du résultat suivant :

Théorème 12. *Tout ensemble Schnorr P -mesurable de mesure non nulle contient un élément calculable.*

En effet, pour obtenir le Théorème 11 à partir du Théorème 12, il suffit de remarquer que si un point calculable est de P -mesure nulle, il n'est pas Schnorr aléatoire. Ainsi si P n'a pas d'atome, aucun point Schnorr P -mesurable n'est calculable, donc $\mathcal{S}_P$, de mesure 1, ne peut pas être Schnorr P -mesurable.

Notons qu'inversement, ce dernier théorème n'a pas d'analogue dans le cadre de Martin-Löf, puisque $\mathcal{M}_P$, Martin-Löf P -mesurable et de mesure 1, ne contient pas de point calculable (toujours dans le cas où P n'a pas d'atome).

Le Théorème 12 est intéressant parce qu'il permet de simuler l'aléatoire, et fonctionne comme un générateur pseudo-aléatoire : l'élément dont l'existence est assurée se comporte comme un point aléatoire vis-à-vis de la propriété considérée, mais n'est pas aléatoire puisqu'il peut être engendré par un programme, processus déterministe, prédictible, reproductible. Ce théorème est de plus constructif : de la description d'un ensemble Schnorr P -mesurable A de mesure non nulle, la preuve du théorème fournit automatiquement un algorithme calculant un élément de A .

Nous avons mentionné que la loi forte des grands nombres entraine dans le cadre de Schnorr. En fait, on peut prouver un analogue du lemme de Borel-Cantelli dans ce cadre, en ajoutant une hypothèse.

Lemme 13 (Borel-Cantelli). *Soient A_i des ensembles uniformément Schnorr P -mesurables tels que $\sum_i P(A_i)$ est fini et calculable. Alors*

- i) $\limsup A_i = \bigcap_i \bigcup_{j>i} A_j$ est Schnorr P -mesurable, et de mesure nulle
- ii) $S_P \subseteq (\limsup A_i)^c$.

Ce résultat admet un joli corollaire concernant les nombres normaux. Rappelons qu'un nombre réel x est normal dans une base b si dans la suite des chiffres de l'expansion de x en base b , tout motif de longueur k apparaît avec une fréquence b^{-k} ; ainsi, dans l'écriture décimale d'un nombre x normal, le bloc de décimales 7251 apparaît avec une fréquence égale à $1/10000$. La loi des grands nombres assure que pour une base donnée b , l'ensemble des nombres normaux en base b est de mesure 1 mais paradoxalement, on connaît peu d'exemples explicites de nombres normaux ; par exemple, la normalité de π en base 10, bien que très vraisemblable (une étude statistique des milliards de décimales de π déjà calculées le laisse penser), n'a pas été démontrée.

Corollaire 14. *Il existe un réel calculable absolument normal, c'est-à-dire normal dans toutes les bases.*

En effet, en utilisant le lemme 13 et les propriétés de S_P , on montre facilement que l'absolue normalité est une propriété Schnorr λ -mesurable, où λ est la mesure de Lebesgue. Puisque cette propriété a probabilité 1, le théorème 12 fournit un algorithme calculant un réel absolument normal.

Le théorème 12 a d'autres conséquences inattendues : il permet de « faire des probabilités » sur l'ensemble des points calculables qui est, rappelons-le, dénombrable. Nous partons d'un espace de probabilité $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$, puis nous considérons l'ensemble $\mathbb{R}_c$ des réels calculables et la collection $\mathcal{B}_c$ des restrictions des ensembles Schnorr P -mesurable à $\mathbb{R}_c$. En utilisant le théorème 12, il est facile de montrer que la fonction P_c qui à $A_c = A \cap \mathbb{R}_c$ (où A est Schnorr P -mesurable) associe $P(A)$ est bien définie. En effet, si A et B sont Schnorr P -mesurables et $A_c = B_c$, alors $A \triangle B$ est Schnorr P -mesurable (S_P est une algèbre booléenne) et $(A \triangle B)_c = A_c \triangle B_c = \emptyset$ donc $P(A \triangle B) = 0$.

Ainsi on peut « faire des probabilités » sur $(\mathbb{R}_c, \mathcal{B}_c, P_c)$, ce qui a une conséquence intéressante. Un ensemble dénombrable n'admet pas de mesure uniforme. Mais si P est la mesure de Lebesgue λ sur l'intervalle réel $[0, 1]$, λ_c est donc une « pseudo-mesure » uniforme sur l'ensemble des réels calculables : chaque point calculable est de poids nul pour P_c mais l'ensemble des réels calculables de $[0, 1]$, bien que dénombrable, est de poids 1 pour P_c .

2.3. Les réels aléatoires via la complexité de Kolmogorov

Nous avons jusqu'à présent proposé deux approches de la théorie effective de l'aléatoire : une pour les suites binaires finies (la complexité de Kolmogorov) et une pour les réels (la théorie effective de la mesure). Est-il possible de concilier les deux ? Après tout, un réel $\alpha \in [0, 1]$ peut être identifié avec la suite $a_0 a_1 a_2 a_3 \dots$ des chiffres de son expansion binaire. Ne pourrait-on pas alors dire que α est aléatoire si tous les segments initiaux de la suite des a_i ont une complexité de Kolmogorov maximale ? Plus précisément, on pourrait dire que α est aléatoire si

$$(2) \quad K(a_0 a_1 a_2 \dots a_n) \geq n - O(1)$$

Hélas, ainsi que l'a démontré Martin-Löf, cette définition ne convient pas, puisqu'aucune suite binaire infinie $a_0 a_1 a_2 \dots$ ne satisfait la condition (2), ce qui peut sembler rendre impossible une caractérisation de l'aléatoire (pour la mesure de Lebesgue) sur les réels par la complexité de Kolmogorov. Cependant, il est tout de même possible d'obtenir une telle caractérisation, mais en utilisant une variante de la complexité de Kolmogorov, appelée *complexité de Kolmogorov préfixe*. La complexité de Kolmogorov préfixe (notée KP) est définie de la même manière que la complexité de Kolmogorov classique, à ceci près que l'on impose une restriction aux machines de Turing.

Définition 15. Une machine de Turing M est dite préfixe si pour toute paire de suite binaires finies x, y telles que x est un préfixe de y , et que M s'arrête sur l'entrée x , alors M s'arrête également sur l'entrée y et $M(x) = M(y)$.

Ici, préfixe s'entend au sens usuel ; par exemple 00 est un préfixe de 0010. Il est possible de montrer un analogue de la Proposition 2 pour les machines de Turing préfixes, à savoir l'existence d'une machine de Turing préfixe V , optimale dans la classe des machines préfixes. On peut alors définir pour tout x :

$$KP(x) = K_V(x) = \min \{ |p| : V(p) = x \}$$

La complexité de Kolmogorov préfixe est en général plus grande que la complexité simple, et en réalité n'en diffère qu'à un terme logarithmique près. Mais elle se trouve être parfaitement adaptée pour caractériser l'aléatoire au sens de Martin-Löf, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 16 (Levin-Schnorr). Soit α un élément de $[0, 1]$. Soit $0, a_0 a_1 a_2 \dots$ l'écriture de α en base 2. On a l'équivalence entre les assertions suivantes.

(i) α est aléatoire au sens de Martin-Löf pour la mesure de Lebesgue

(ii) $KP(a_0 a_1 \dots a_n) \geq n - O(1)$

(iii) $\lim_n KP(a_0 a_1 \dots a_n) - n = \infty$

Remarques. – Le théorème ci-dessus peut en fait se généraliser à l'aléatoire au sens de Martin-Löf pour une mesure μ quelconque, en remplaçant (ii) par

$$(ii') \quad KP(a_0 a_1 \dots a_n) \geq -\log \mu(X_{a_1 a_2 \dots a_n}) - O(1)$$

où $X_{a_1 a_2 \dots a_n}$ est l'ensemble des réels dont l'expansion binaire commence par $a_0 \dots a_n$, et en remplaçant similairement (iii) par

$$(iii') \quad \lim_n KP(a_0 a_1 \dots a_n) + \log \mu(X_{a_1 a_2 \dots a_n}) = \infty$$

- Malgré l'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii), la borne $n - O(1)$ de l'assertion (ii) est la meilleure possible (voir [Bie08]).
- La complexité de Kolmogorov (préfixe ou non) est en revanche inadaptée pour caractériser l'aléatoire au sens de Schnorr. Ainsi, il existe des réels Schnorr aléatoires (pour la mesure de Lebesgue) dont l'expansion binaire a une complexité de Kolmogorov très petite, tandis que certains réels ont une expansion binaire de complexité de Kolmogorov préfixe quasi-maximale mais ne sont pas Schnorr-aléatoires.

3. Pour en savoir plus

Nous espérons à travers ces quelques pages avoir donné envie au lecteur d'en apprendre plus sur cette riche théorie qu'est celle de l'aléatoire effectif. Pour ce qui est de la complexité de Kolmogorov, le livre de référence est celui de Li et Vitanyi [LV08]. Pour les liens entre calculabilité, complexité, et aléatoire, on pourra consulter le livre de Nies [Nie09], ainsi que celui de Downey et Hirschfeldt [DHar] qui paraîtra très prochainement. Signalons également une remarquable introduction à la complexité de Kolmogorov, plus complète que le présent article, de Grigorieff et Ferbus [GF04]. Pour plus de détails sur une théorie générale de l'aléatoire effectif dans des espaces de probabilité, et ses interactions avec la théorie ergodique et les systèmes dynamiques, se référer aux thèses de doctorat de Hoyrup [Hoy08] et Rojas [Roj08]. Enfin, une autre approche possible de la théorie effective de l'aléatoire (que nous n'avons pas présentée dans cet article) est possible via la théorie des jeux et martingales (proposée par Ville [Vil39] et Schnorr [Sch71]) ; cette dernière est traitée en détail dans la thèse de doctorat de Bienvenu [Bie08].

4. Références

- [Bie08] Laurent Bienvenu. *Caractérisation de l'aléatoire par les jeux : imprédictibilité et stochasticité*. Thèse de doctorat, Université de Provence, 2008.
- [Cha66] Gregory Chaitin. On the length of programs for computing finite binary sequences. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 13(547-569), 1966.
- [Cha75] Gregory Chaitin. A theory of program size formally identical to information theory. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 22 :329–340, 1975.
- [DHar] Rodney Downey and Denis Hirschfeldt. *Algorithmic randomness and complexity*. Springer, to appear.
- [For09] Lance Fortnow. Computational complexity blog : A Kolmogorov complexity proof of the Lovász local lemma (post du 2 juin 2009). <http://blog.computationalcomplexity.org>, 2009.
- [GF04] Serge Grigorieff and Marie Ferbus. Is randomness native to computer science ? *Current Trends in Theoretical Computer Science*, 2 :141–179, 2004.
- [Hoy08] Mathieu Hoyrup. *Calculabilité, aléatoire et théorie ergodique sur les espaces métriques*. Thèse de doctorat, Université de Paris VII, 2008.
- [Kol65] Andrei Kolmogorov. Three approaches to the quantitative definition of information. *Problems of Information Transmission*, 1 :1–7, 1965.
- [LV08] Ming Li and Paul Vitányi. *An introduction to Kolmogorov complexity and its applications*. Texts in Computer Science. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 2008.
- [ML66] Per Martin-Löf. The definition of random sequences. *Information and Control*, 9 :602–619, 1966.

- [Mos09] Robin Moser. A constructive proof of the Lovász local lemma. In *Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2009)*, pages 343–350. ACM, 2009.
- [Nie09] André Nies. *Computability and randomness*. Oxford Logic Guides. Oxford University Press, 2009.
- [Roj08] Cristóbal Rojas. *Randomness and ergodic theory : an algorithmic point of view*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, Paris, 2008.
- [Sch71] Claus Schnorr. *Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit*, volume 218 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
- [Sol64] Ray Solomonoff. A formal theory of inductive inference i and ii. *Information and Control*, 7 :1–22 and 224–254, 1964.
- [Vil39] Jean Ville. *Etude critique de la notion de collectif*. Gauthiers-Villars, Paris, 1939.



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Professor of Mathematics

The Department of Mathematics at ETH Zurich (www.math.ethz.ch) invites applications for a faculty position in mathematics. Applications in the fields of algebra and topology are particularly welcome. We are looking for candidates with an outstanding research record and a proven ability to direct research work of high quality. Willingness to teach at all university levels and to participate in collaborative work both within and outside of ETH Zurich is expected.

In association with other members of the Department, the future professor will be responsible for teaching mathematics courses for students of mathematics, natural sciences and engineering. He or she will be expected to teach undergraduate level courses (German or English) and graduate level courses (English).

Please submit your application together with a curriculum vitae, a list of publications, the names of at least three referees, and a short overview of the research interests to the **President of ETH Zurich, Prof. Dr. Ralph Eichler, Raemistrasse 101, ETH Zurich, 8092 Zurich, Switzerland, (or via e-mail to faculty-recruiting@sl.ethz.ch), no later than April 15, 2010.** With a view toward increasing the number of female professors, ETH Zurich specifically encourages qualified female candidates to apply.



Revue d'histoire des mathématiques

Tome 15, Fascicule 1

Contents

Michèle Audin

Publier sous l'Occupation I. Autour du cas de Jacques Feldbau et de l'Académie des sciences

Alexandre Guilbaud, Guillaume Jouve

La résolution des équations aux dérivées partielles dans les *Opuscles mathématiques* de D'Alembert (1761-1783)

Javier Docampo Rey

TEXTS & DOCUMENTS. A new source for medieval mathematics in the Iberian Peninsula: The commercial arithmetic in Ms 10106 (Biblioteca Nacional, Madrid)

prix public* : 37 € - prix membre* : 26 €

* frais de port non compris



Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

<http://smf.emath.fr>

DOCUMENTS

En souvenir de Paulette Libermann (2)

Marc Chaperon

Voici le second volet du petit cours commencé dans le numéro précédent [11] comme commentaire de la thèse de Paulette Libermann. L'exposé rapide de quelques notions de base est illustré entre autres de résultats qui lui sont attribuables. Comme dans [11], *différentiable* signifie « assez différentiable ».

Intégrales de formes différentielles, images inverses, différentielle extérieure

Images directes de chemins, intégrale curviligne, images réciproques de fonctions et de 1-formes

Soit $g : M \rightarrow N$ une application différentiable entre variétés.

L'*image* par g d'un chemin γ à valeurs dans M est le chemin $g_*\gamma := g \circ \gamma$ à valeurs dans N ; de même, l'*image réciproque* (ou *inverse*) par g d'une fonction réelle f sur N est la fonction réelle $g^*f := f \circ g$ sur M .

Quand γ est défini sur un segment $[t_0, t_1]$ (on dit alors que γ est un *arc*), l'*intégrale* (curviligne) *le long de* γ d'une forme de Pfaff α sur M est par définition

$$\int_{\gamma} \alpha := \int_{t_0}^{t_1} \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt,$$

où $\alpha_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}^*M = (T_{\gamma(t)}M)^*$ désigne la valeur de α au point $\gamma(t)$. Cette intégrale est invariante par changement de paramétrage : si $\varphi : [s_0, s_1] \rightarrow [t_0, t_1]$ vérifie $\varphi(s_j) = t_j$, alors $\int_{\gamma \circ \varphi} \alpha = \int_{\gamma} \alpha$; lorsque α est la différentielle df d'une fonction réelle f sur M , puisque $df_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = (f \circ \gamma)'(t)$,

$$(3) \quad \int_{\gamma} df = f(\gamma(t_1)) - f(\gamma(t_0)) \quad (\text{formule de la moyenne}).$$

Une forme de Pfaff α est déterminée par les $\int_{\gamma} \alpha$; en effet, pour tout $x \in M$ et tout $\mathbf{v} \in T_x M$, il existe¹ un arc $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ tel que $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}$; si $\gamma_{\varepsilon} : [0, 1] \rightarrow M$ est donné par $\gamma_{\varepsilon}(t) := \gamma(\varepsilon t)$, alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_{\gamma_{\varepsilon}} \alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \alpha_{\gamma(\varepsilon t)}(\dot{\gamma}(\varepsilon t)) dt = \alpha_{\gamma(0)}(\dot{\gamma}(0)) = \alpha_x \mathbf{v}.$$

¹ Prendre une carte φ de M telle que $\varphi(a) = 0$ et un chemin de la forme $\varphi \circ \gamma(t) = \theta(t\varphi_*\mathbf{v}) + t\varphi_*\mathbf{v}$, où $\varphi_*\mathbf{v} = T_x\varphi(\mathbf{v})$ et $\theta : \text{im } \varphi \rightarrow [0, 1]$ est C^∞ à support compact, égale à 1 près de 0.

L'image réciproque par g d'une forme de Pfaff β sur N est la forme de Pfaff $g^*\beta$ sur M telle que $\int_\gamma g^*\beta = \int_{g*\gamma} \beta$ pour tout arc γ dans M ; elle est donnée par la formule

$$(g^*\beta)_x = \beta_{g(x)} \circ T_x g.$$

Pour $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, la formule de dérivation d'une fonction composée, en termes intrinsèques

$$T(f \circ g) = (Tf) \circ Tg,$$

s'écrit donc $g^*df = d(g^*f)$.

Formes différentielles, leur intégrale sur les rectangles paramétrés et leurs images réciproques

Une forme différentielle de degré k ou k -forme différentielle, ou k -forme α sur une variété M est un champ de formes k -linéaires alternées $\alpha_x : (T_x M)^k \rightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire une section différentiable du fibré vectoriel $\bigwedge^k T^*M$ de base M dont la fibre au-dessus de $x \in M$ est l'espace $L_{\text{alt}}^k(T_x M, \mathbb{R})$ des formes k -linéaires alternées sur $T_x M$; un atlas de ce fibré vectoriel est (naturellement) formé des cartes naturelles $\bigwedge^k T^*\varphi : \alpha_x \mapsto (\varphi(x), (T_x \varphi)_* \alpha_x) \in \text{im } \varphi \times L_{\text{alt}}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, où φ est une carte de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (l'application linéaire tangente $T_x \varphi$ va donc de $T_x M$ dans $T_{\varphi(x)} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$), $\alpha_x \in L_{\text{alt}}^k(T_x M, \mathbb{R})$ et $(T_x \varphi)_* \alpha_x(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := \alpha_x((T_x \varphi)^{-1} \mathbf{v}_1, \dots, (T_x \varphi)^{-1} \mathbf{v}_k)$ pour $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$.

Pour toute application différentiable $\rho : [0, 1]^k \rightarrow M$, l'intégrale de α le long du rectangle paramétré ρ de dimension k est par définition

$$\int_\rho \alpha := \int_{[0,1]^k} \alpha_{\rho(t)}(\partial_1 \rho(t), \dots, \partial_k \rho(t)) dt$$

(intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^k$), où $\partial_j \rho(t) \in T_{\rho(t)} M$ est la dérivée partielle de ρ par rapport au $j^{\text{ième}}$ facteur et $\alpha_{\rho(t)} \in L_{\text{alt}}^k(T_{\rho(t)} M, \mathbb{R})$ désigne la valeur de α au point $\rho(t)$.

Une k -forme α est déterminée par les $\int_\rho \alpha$; en effet, pour $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in T_x M$, il existe² un rectangle paramétré $\rho : [0, 1]^k \rightarrow M$ tel que $\partial_j \rho(0) = \mathbf{v}_j$ pour tout j ; si $\rho_\varepsilon : [0, 1]^k \rightarrow M$ est donné pour $0 < \varepsilon \leq 1$ par $\rho_\varepsilon(t) := \rho(\varepsilon t)$, alors $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-k} \int_{\rho_\varepsilon} \alpha = \alpha_x(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ comme pour $k = 1$.

Étant donnée une application différentiable $g : M \rightarrow N$ entre variétés, l'image réciproque par g d'une k -forme β sur N est la k -forme $g^*\beta$ sur M telle que $\int_\rho g^*\beta = \int_{g*\rho} \beta$ pour tout rectangle paramétré ρ de dimension k dans M , en notant $g*\rho := g \circ \rho$; elle est donnée par la formule

$$(g^*\beta)_x = \beta_{g(x)} \circ (T_x g)^k,$$

où $(T_x g)^k(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := (T_x g(\mathbf{v}_1), \dots, T_x g(\mathbf{v}_k))$ pour $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in T_x M$.

² Même démonstration que pour $k = 1$ en remplaçant $t\varphi_*\mathbf{v}$ par $\sum t_j \varphi_*\mathbf{v}_j$.

La différentielle extérieure

Celle d'une forme de Pfaff α sur M est la 2-forme $d\alpha$ sur M telle que

$$(4) \quad \int_{\rho} d\alpha = \int_{\partial\rho} \alpha$$

pour tout rectangle paramétré $\rho : [0, 1]^2 \rightarrow M$ de classe C^2 , où $\partial\rho$ désigne le *bord orienté* de ρ , obtenu en mettant bout à bout les chemins $[0, 1] \ni s \mapsto \rho(s, 0)$, $[0, 1] \ni s \mapsto \rho(1, s)$, $[0, 1] \ni s \mapsto \rho(1 - s, 1)$ et $[0, 1] \ni s \mapsto \rho(0, 1 - s)$; elle est donnée par

$$(5) \quad d\alpha_{\rho(t)}(\partial_1\rho(t), \partial_2\rho(t)) = \partial_1(\alpha_{\rho(t)}\partial_2\rho(t)) - \partial_2(\alpha_{\rho(t)}\partial_1\rho(t)).$$

Plus généralement, pour chaque $k \geq 1$, la *différentielle extérieure d'une k -forme α* sur M est la $(k+1)$ -forme $d\alpha$ sur M vérifiant (4) pour tout rectangle paramétré ρ de dimension $k+1$ en posant

$$\int_{\partial\rho} \alpha := \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \left(\int_{\partial\rho_i^1} \alpha - \int_{\partial\rho_i^0} \alpha \right),$$

où les « faces » $\partial\rho_i^j$ de ρ sont les rectangles paramétrés de dimension k définis par

$$\partial\rho_i^j(s) := \rho((s_\ell)_{\ell < i, j}, (s_\ell)_{\ell \geq i}), \quad s = (s_1, \dots, s_k) \in [0, 1]^k, \quad j = 0, 1;$$

l'identité (5) est le cas particulier $k = 1$ de la formule³

$$(6) \quad d\alpha_{\rho(t)}(\partial_1\rho(t), \dots, \partial_{k+1}\rho(t)) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \partial_i \left(\alpha_{\rho(t)} \left((\partial_\ell\rho(t))_{\ell < i}, (\partial_\ell\rho(t))_{\ell > i} \right) \right),$$

qui résulte de (4), de la formule de la moyenne et du théorème de Fubini : en effet, en notant par exemple $\alpha(\partial_1\rho(t), \dots, \partial_k\rho(t)) := \alpha_{\rho(t)}(\partial_1\rho(t), \dots, \partial_k\rho(t))$,

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\rho_i^1} \alpha - \int_{\partial\rho_i^0} \alpha \\ &= \int_{[0,1]^k} \left(\alpha \left(\partial_{s_j} \rho((s_\ell)_{\ell < i}, 1, (s_\ell)_{\ell \geq i}) \right)_{1 \leq j \leq k} - \alpha \left(\partial_{s_j} \rho((s_\ell)_{\ell < i}, 0, (s_\ell)_{\ell \geq i}) \right)_{1 \leq j \leq k} \right) ds \\ &= \int_{[0,1]^k} \int_0^1 \partial_\tau \alpha \left(\partial_{s_j} \rho((s_\ell)_{\ell < i}, \tau, (s_\ell)_{\ell \geq i}) \right)_{1 \leq j \leq k} d\tau ds \\ &= \int_{[0,1]^{k+1}} \partial_i \alpha \left((\partial_\ell\rho(t))_{\ell < i}, (\partial_\ell\rho(t))_{\ell > i} \right) dt \end{aligned}$$

en posant $t := ((s_\ell)_{\ell < i}, \tau, (s_\ell)_{\ell \geq i})$. Naturellement, le « miracle » est que le second membre de (6) ne dépende que des $\partial_j\rho(t)$; il se vérifie en se ramenant par une carte au cas où M est un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et en utilisant le fait qu'alors $\partial_i\partial_\ell\rho = \partial_\ell\partial_i\rho$.⁴

³ Valide lorsque ρ est une application C^2 à valeurs dans M définie sur un ouvert ou un « ouvert à coins » de $\mathbb{R}^k$, par exemple $[0, 1]^k$.

⁴ Dans ce cas, α s'identifie à une application de U dans $L_{\text{alt}}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (sa seconde composante) et $d\alpha : U \rightarrow L_{\text{alt}}^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est donnée par $d\alpha(x)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} D\alpha(x)(\mathbf{v}_i)((\mathbf{v}_\ell)_{\ell < i}, (\mathbf{v}_\ell)_{\ell > i})$, $x \in U$, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1} \in \mathbb{R}^n$.

Cette définition de la différentielle extérieure n'est pas trop intrinsèque, mais elle a le mérite de montrer qu'une k -forme est faite pour être intégrée sur des objets de dimension k , la différentiation extérieure apparaissant comme duale (« cobord ») du « bord orienté » ∂ grâce à la formule de Stokes⁵ (4) – qui généralise (3) et entraîne à peu de frais les autres « formules de Stokes ».

Il résulte aussitôt des définitions de l'image inverse et de la différentielle extérieure que

$$(7) \quad d(g^*\beta) = g^*d\beta$$

pour toute application différentiable $g : M \rightarrow N$ entre variétés et toute forme différentielle β sur N .

Par ailleurs, pour toute k -forme différentielle α sur M ,

$$(8) \quad dd\alpha = 0.$$

En effet, l'intégrale de $dd\alpha$ sur tout rectangle paramétré $\rho : [0, 1]^{k+2} \rightarrow M$ est nulle car

$$\int_{\rho} dd\alpha = \sum_{i=1}^{k+2} (-1)^{i+1} \left(\int_{\partial\rho_i^1} d\alpha - \int_{\partial\rho_i^0} d\alpha \right) = \sum_{i=1}^{k+2} (-1)^{i+1} \left(\int_{\partial\partial\rho_i^1} \alpha - \int_{\partial\partial\rho_i^0} \alpha \right),$$

autrement dit

$$\int_{\rho} dd\alpha = \sum_{i=1}^{k+2} (-1)^{i+1} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} \left(\int_{\partial(\partial\rho_i^1)_j^1} \alpha - \int_{\partial(\partial\rho_i^1)_j^0} \alpha - \int_{\partial(\partial\rho_i^0)_j^1} \alpha + \int_{\partial(\partial\rho_i^0)_j^0} \alpha \right),$$

somme où « chaque face de dimension k de ρ apparaît deux fois et avec des signes opposés⁶ » car

$$\partial(\partial\rho_i^\ell)_j^m = \partial(\partial\rho_j^m)_{i-1}^\ell, \quad 1 \leq j < i \leq k+2, \quad \ell, m \in \{0, 1\}.$$

Une forme différentielle β est *fermée* lorsque $d\beta = 0$; elle est *exacte* quand elle est la différentielle extérieure $\beta = d\alpha$ d'une forme différentielle, appelée une *primitive* de β et évidemment unique à l'addition d'une forme fermée près⁷; la formule (8) affirme donc que *toute forme exacte est fermée*.

⁵ Whitney a même *construit* la théorie des formes différentielles à partir de là [25].

⁶ Si $k = 1$, ces faces correspondent aux arêtes du cube $[0, 1]^3$.

⁷ Quand on parle d'additionner deux sections α et β d'un fibré vectoriel E , c'est bien sûr d'addition dans chaque fibre qu'il s'agit, c'est-à-dire que $(\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ dans E_x .

Flots, dérivée et crochet de Lie

Flots et dérivée de Lie

À tout champ de vecteurs différentiable X sur la variété M on associe son *flot* ou (pseudo)groupe à un paramètre g_X^t , défini de la manière suivante : pour tout $a \in M$, l'application $t \mapsto g_X^t(a)$ est le chemin dans M solution *maximale* (c'est-à-dire définie sur un *intervalle* aussi grand que possible) de l'équation différentielle $\dot{x} = X(x)$ (« courbe intégrale⁸ de X ») passant par a au temps $t = 0$.

La théorie des équations différentielles entraîne que le domaine de définition de $g_X : (t, a) \mapsto g_X^t(a)$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times M$ et que g_X est aussi différentiable que X ; il est clair que $g_X^s(g_X^t(a)) = g_X^{s+t}(a)$ lorsque le premier membre a un sens ou, ce qui revient au même, pour $a \in \text{dom}(g_X^t) \cap \text{dom}(g_X^{s+t})$; en particulier, puisque $g_X^0 = \text{id}_M$, chaque g_X^t est un difféomorphisme de l'ouvert $\text{dom } g_X^t \subset M$ sur l'ouvert $\text{dom } g_X^{-t}$, et $(g_X^t)^{-1} = g_X^{-t}$.

Si X est à support compact, les solutions de $\dot{x} = X(x)$ ne peuvent pas « partir à l'infini en un temps fini », donc $\text{dom } g_X = \mathbb{R} \times M$ et g_X est une action différentiable du groupe additif $\mathbb{R}$ sur M , c'est-à-dire que $t \mapsto g_X^t$ est un homomorphisme de $\mathbb{R}$ dans le groupe des difféomorphismes de M sur elle-même ; en pareil cas, on dit que X (ou son flot) est *complet*.

La *dérivée de Lie* d'un champ de tenseurs⁹ τ sur M par rapport à X est par définition

$$(9) \quad \mathcal{L}_X \tau := \frac{d}{dt} g_X^{t*} \tau \Big|_{t=0},$$

qui est un champ de tenseurs de même nature que τ ; par exemple, la dérivée de Lie d'une fonction réelle f sur M est la fonction réelle sur M *produit* (intérieur) ou *contraction* $df(X)$ de df par X :

$$\mathcal{L}_X f = df(X) : x \mapsto d_x f(X_x).$$

Pour $k > 0$, la dérivée de Lie d'une k -forme différentielle α sur M vérifie la *formule de Cartan*¹⁰

$$(10) \quad \mathcal{L}_X \alpha = d(\alpha X) + (d\alpha)X,$$

où αX et $(d\alpha)X$ désignent¹¹ les *produits intérieurs* (ou *contractions*) $x \mapsto \alpha_x X_x$ et $x \mapsto (d\alpha_x)X_x$ de α et $d\alpha$ par X ; la preuve est très facile : quels que soient $x \in M$ et $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \in T_x M$, il existe $\rho_1 : (\mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (M, x)$ telle que $\mathbf{v}_j = \partial_j \rho_1(0)$, et il suffit de prendre $\rho(t) := g_X^{t_1} \circ \rho_1(t_2, \dots, t_{k+1})$ et $t = 0$ dans (6). Voici une application importante :

⁸ Terminologie en léger conflit avec celle de « variété intégrale » [11], puisqu'il s'agit ici de courbes *paramétrées*.

⁹ Ici, forme différentielle de degré k ou, comme un peu plus loin, champ de vecteurs.

¹⁰ Il ne fait aucun doute qu'elle était connue et utilisée par Élie [5] mais, comme beaucoup de notions primitives, la dérivée de Lie a mis assez longtemps à être reconnue comme telle et c'est Henri qui a écrit (10) sous cette forme. On peut, si l'on y tient, la prendre comme définition – intrinsèque mais incompréhensible – de la différentielle extérieure.

¹¹ Avec les notations introduites quand nous avons écrit le système de Cartan de $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Lemme de Poincaré

Toute forme différentielle fermée α de degré $k \geq 1$ sur M est localement exacte : chaque $a \in M$ a un voisinage ouvert Ω tel que $\alpha|_{\Omega}$ soit exacte.

En effet, si Ω est le domaine d'une carte φ nulle en a ayant pour image une boule B de $\mathbb{R}^n$, soit X le champ de vecteurs sur Ω image inverse par φ du champ radial $Y_y := y$ sur B ; pour tout $x \in \Omega$, les $g_X^t(x) = \varphi^{-1}(e^t \varphi(x))$ avec $t \leq 0$ sont bien définis et, d'après (10), puisque $d\alpha = 0$,

$$\begin{aligned} \alpha_x &= (g_X^0 \alpha)_x = (g_X^0 \alpha)_x - \lim_{t \rightarrow -\infty} (g_X^t \alpha)_x = \int_{-\infty}^0 \frac{d}{dt} (g_X^t \alpha)_x dt \\ &= \int_{-\infty}^0 (g_X^t \mathcal{L}_X \alpha)_x dt = \int_{-\infty}^0 (g_X^t d(\alpha X))_x dt = \int_{-\infty}^0 d(g_X^t(\alpha X))_x dt \\ &= \left(d \int_{-\infty}^0 g_X^t(\alpha X) dt \right)_x, \end{aligned}$$

la dernière intégrale s'entendant dans chaque fibre¹².

Cohomologie de de Rham

Pour $k > 0$, le quotient de l'espace vectoriel des formes fermées de degré k sur M par l'espace vectoriel des formes exactes de degré k est le k -ième espace de cohomologie de de Rham $H^k(M, \mathbb{R})$; une forme k -linéaire alternée sur un espace de dimension $< k$ étant nulle, $H^k(M, \mathbb{R}) = \{0\}$ pour $k > \dim M$; on note $H^0(M, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions localement constantes sur M et $H^\bullet(M, \mathbb{R}) := \bigoplus_{k \geq 0} H^k(M, \mathbb{R})$.

Images réciproques de champs de vecteurs, crochet de Lie

Étant donnée une application différentiable $h : M \rightarrow N$ entre variétés, une *image réciproque* d'un champ de vecteurs Y sur N par h , si elle existe, est un champ de vecteurs X sur M tel que $h \ll$ envoie les courbes intégrales de X sur celles de Y », c'est-à-dire que $h \circ g_X^t = g_Y^t \circ h$; cette relation étant vérifiée pour $t = 0$, elle est équivalente à celle obtenue en la dérivant par rapport au temps, qui s'écrit $T_x h(X_x) = Y_{h(x)}$ pour tout $x \in X$; on voit donc que si h est *étale*, c'est-à-dire que tous les $T_x h$ sont des isomorphismes, Y a une unique image réciproque par h , notée $h^* Y$ et donnée par la formule

$$(h^* Y)_x = (T_x h)^{-1} Y_{h(x)}.$$

La formule (7) a donc un sens lorsque τ est un champ de vecteurs Y sur M , et¹³

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y],$$

crochet de Lie des champs de vecteurs X et Y , tel que

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} f = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y f - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X f$$

pour toute fonction réelle f sur M .

L'*identité de Jacobi* $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$, qui fait des champs de vecteurs C^∞ sur M l'archétype des algèbres de Lie, s'en déduit.

¹² On peut trouver rassurant de se placer dans la carte φ en prenant comme variable $s = e^t$.

¹³ Propriété de « dérivation d'un produit » $\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y f = \mathcal{L}_{\mathcal{L}_X Y} f + \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X f$.

D'après la formule de dérivation d'un produit et (9), quelles que soient la fonction f , le champ de tenseurs τ , les champs de vecteurs X, Y et la forme différentielle α de degré $k > 0$ sur M , on a

$$(11) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_X(f\tau) &= (\mathcal{L}_X f)\tau + f\mathcal{L}_X\tau \\ \mathcal{L}_X(\alpha Y) &= (\mathcal{L}_X\alpha)Y + \alpha\mathcal{L}_X Y \\ &= d(\alpha X)Y + (d\alpha)XY + \alpha[X, Y]. \end{aligned}$$

Si φ est une carte de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et que, pour tout champ de vecteurs X sur M et tout $x \in \text{im } \varphi$, on note $X_\varphi(x) := T_x\varphi(X_{\varphi^{-1}(x)}) \in T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$,

$$(12) \quad [X, Y]_\varphi(x) = DY_\varphi(x)X_\varphi(x) - DX_\varphi(x)Y_\varphi(x).$$

Applications de la formule de Cartan chez Paulette Libermann

Transformations de contact infinitésimales

Soit α une *forme de contact* sur une variété V , ce qui signifie, rappelons-le, que $T_x M = \ker \alpha_x \oplus \ker d\alpha_x$ pour tout $x \in V$; soit $\mathcal{K}$ la *structure de contact* $\mathcal{K}_x := \ker \alpha_x$ associée. Une *transformation de contact infinitésimale* ou *champ de Lie* de $\mathcal{K}$ est un champ de vecteurs X sur V dont le flot $g^t := g_X^t$ préserve $\mathcal{K}$, c'est-à-dire que $T_x g^t(\mathcal{K}_x) = \mathcal{K}_{g^t(x)}$ pour tout $(t, x) \in \text{dom } g_X$: on dit que les g^t sont des *transformations de contact* ou *automorphismes* (locaux) de $\mathcal{K}$.

Théorème de Libermann¹⁴

Sous ces hypothèses, un champ de Lie X est déterminé par son hamiltonien $-\alpha X$ par rapport à α , et toute fonction réelle F de classe C^2 sur V est le hamiltonien d'un champ de Lie¹⁵ X_F de classe C^1 . En particulier, si α est C^∞ , l'application $F \mapsto X_F$ est un isomorphisme de $C^\infty(V, \mathbb{R})$ sur l'espace des champs de Lie C^∞ de $\mathcal{K}$, isomorphisme dont l'inverse est $X \mapsto -\alpha X$.

En effet, X est un champ de Lie si et seulement si son flot g^t vérifie $(g^{t*}\alpha)_x = \mu_t(x)\alpha_x$ pour tout $x \in \text{dom } g^t$, ce qui (après dérivation par rapport à t) se traduit par $\mathcal{L}_X\alpha = \lambda\alpha$, où λ est une fonction réelle sur V ; d'après (10), les relations entre X et $F := -\alpha X$ sont donc données pour chaque $x \in V$ par les deux équations

$$(13) \quad -\alpha_x X_x = F(x)$$

$$(14) \quad -d_x F + d\alpha_x X_x = \lambda(x)\alpha_x;$$

si $X_x = Y_x + Z_x$ dans la décomposition $T_x V = \mathcal{K}_x \oplus \ker d\alpha_x$, (13) détermine Z_x connaissant $F(x)$ et vice versa puisque $\alpha_x|_{\ker d\alpha_x}$ est un isomorphisme; quant à (14), elle s'écrit

$$\begin{aligned} -d_x F|_{\ker d\alpha_x} &= \lambda(x)\alpha_x|_{\ker d\alpha_x} \\ d_x F|_{\mathcal{K}_x} &= (d\alpha_x Y_x)|_{\mathcal{K}_x}; \end{aligned}$$

¹⁴ L'ayant toujours [10] attribué à Sophus Lie, j'ai failli demander qui était ce Libermann la première fois qu'on en a crédité à juste titre [19] Paulette Libermann en ma présence.

¹⁵ Le groupe des automorphismes de $\mathcal{K}$ est donc énorme, les X_F avec F à support compact (par exemple) étant complets.

la première équation détermine $\lambda(x)$ connaissant $d_x F|_{\ker d\alpha_x}$ et vice versa, et la seconde détermine Y_x connaissant $d_x F|_{\mathcal{K}_x}$ et vice versa, la forme bilinéaire non dégénérée $d\alpha_x|_{(\mathcal{K}_x)^2}$ induisant l'isomorphisme $\mathbf{v} \mapsto (d\alpha_x \mathbf{v})|_{\mathcal{K}_x}$ de $\mathcal{K}_x$ sur son dual.

Application : théorie locale des équations aux dérivées partielles du premier ordre

Sous ces hypothèses, on se donne $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ et l'on pose $E := F^{-1}(0)$. Deux observations préalables :

i) comme il n'y a pas de forme bilinéaire alternée non dégénérée sur un espace de dimension impaire, V est de dimension impaire $2n + 1$;

ii) une variété intégrale W de $\mathcal{K}$ est de dimension au plus n ; en effet, si $\iota : W \hookrightarrow V$ est l'inclusion, la relation $\iota^* \alpha = 0$ exprimant que W est intégrale entraîne que $\iota^* d\alpha = d(\iota^* \alpha) = 0$, c'est-à-dire que chaque espace tangent $T_x W$ est inclus dans son orthogonal pour la forme bilinéaire non dégénérée $d\alpha_x|_{(\mathcal{K}_x)^2}$, d'où $\dim T_x W \leq 2n - \dim T_x W$; les variétés intégrales de dimension n sont les *variétés de Legendre* de $\mathcal{K}$.

Pour tout $x \in E$,

iii) la preuve précédente montre que $X = X_F$ est nul en x si $d_x F = 0$, puisqu'alors $Y_x = Z_x = 0$;

iv) il résulte de (13)–(14) et de l'antisymétrie de $d\alpha_x$ que $d_x F(X_x) = 0$, donc que X_F est tangent en x à E pour $d_x F \neq 0$ (car F est alors une submersion dans un voisinage ouvert U de x , donc $U \cap E$ est une sous-variété de codimension 1 ayant $\ker d_x F$ pour espace tangent en x) ;

v) on déduit de (13) que X_x appartient à $\mathcal{K}_x$.

Les points (iii)–(iv) impliquent que l'on a $g_X^t(E \cap \text{dom } g_X^t) \subset E$ pour tout t ; le point (v), joint au fait que les g_X^t préservent $\mathcal{K}$, entraîne donc les faits suivants :

vi) pour toute variété intégrale $W_0 \subset E$ de $\mathcal{K}$ et tout $a \in W_0$ où $X_a \notin T_a W_0$, il existe un ouvert $\Omega \ni (0, a)$ de $\mathbb{R} \times W_0$ tel que l'application $j : \Omega \rightarrow E$ définie par $j(t, x) := g_X^t(x)$ soit un difféomorphisme sur une variété intégrale W de $\mathcal{K}$, qui vérifie donc $\dim W = \dim W_0 + 1$;

vii) cela impose $\dim W_0 < n$ d'après (ii) ; par conséquent, une *solution géométrique* de l'équation aux dérivées partielles généralisée E , c'est-à-dire une variété de Legendre L contenue dans E , vérifie $X_x \in T_x L$ pour tout $x \in L$;

viii) si $\dim W_0 = n - 1$ (on dit alors que (E, W_0) est un *problème de Cauchy généralisé, bien posé au point a*), alors W est une solution géométrique de E ;

ix) réciproquement, d'après (vii), toute solution géométrique W de E s'obtient de cette manière au voisinage de chaque $a \in W$ où X_a n'est pas nul (il suffit de prendre pour W_0 une hypersurface de W passant par a avec $X_a \notin T_a W_0$) ; il y a donc existence et unicité locales de la solution d'un problème de Cauchy généralisé bien posé.

Si $V = J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\mathcal{K} = \mathcal{K}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et que, en notant $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ les points de $\mathbb{R}^n$, l'équation E est de la forme $\partial_t y = g(t, x, y, \partial_x y)$, un problème de Cauchy bien posé classique est la donnée de la valeur $y_0(x)$ de la fonction inconnue pour $t = 0$; cela détermine bien la donnée de Cauchy généralisée $W_0 = \{(0, x, y_0(x), g(0, j_x^1 y_0), Dy_0(x))\} \subset E$, qui définit en chacun de ses points

un problème bien posé dont les solutions locales généralisées W sont des sections holonomes de la projection-source $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ contenues dans E , jets d'ordre 1 des solutions locales du problème de Cauchy.

Champs hamiltoniens sur une variété symplectique

Paulette Libermann n'est pas non plus étrangère [19] à leur définition intrinsèque. Une variété symplectique est le couple formé d'une variété V et d'une *forme symplectique* sur V , c'est-à-dire une 2-forme *fermée* ω telle que les $\omega_x \in L_{\text{alt}}^2(T_x V, \mathbb{R})$ soient toutes *non dégénérées* (la dimension de V est donc paire). Un champ de vecteurs X sur V est alors dit *symplectique* lorsque son flot $g^t = g_X^t$ préserve ω , c'est-à-dire que $g^{t*}\omega = \omega$ dans $\text{dom } g^t$ pour tout t (les g^t sont donc des *transformations symplectiques* de ω). Comme cette relation est vérifiée automatiquement si $t = 0$, cela revient à dire que $0 = \frac{d}{dt}g^{t*}\omega = g^{t*}\mathcal{L}_X\omega$ pour tout t , c'est-à-dire que $\mathcal{L}_X\omega = 0$; du fait que ω est fermée, cela équivaut d'après (10) à ce que la forme de Pfaff ωX soit *fermée*.

Lorsqu'elle est exacte, $\omega X = dH$, on dit que X est *hamiltonien* et que la fonction H est un *hamiltonien* de X ; il détermine X , et chaque fonction réelle H sur V est le hamiltonien d'un unique champ hamiltonien X_H : en effet, pour chaque $x \in V$, l'équation $\omega_x \mathbf{v} = d_x H$ a une unique solution $\mathbf{v} \in T_x V$ puisque ω_x est non dégénérée. Le groupe des transformations symplectiques (globales) de ω est donc lui aussi énorme, puisqu'il contient les $g_{X_H}^t$ avec H à support compact.

Comme $\mathcal{L}_{X_H} H = dH(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0$, le flot de $X = X_H$ préserve H , c'est-à-dire que $H(g_X^t(x)) = H(x)$ pour tout $(t, x) \in \text{dom } g_X$ (« conservation de l'énergie »); on dit aussi que H est une *intégrale première* de X_H . Puisque $\mathcal{L}_{X_H} K = dK(X_H) = \omega(X_H, X_H) = -\mathcal{L}_{X_H} H$ quelles que soient les fonctions réelles H et K sur V , le *crochet de Poisson* $\{H, K\} := \mathcal{L}_{X_H} K$ (« parenthèses de Poisson ») est antisymétrique; on en déduit la version hamiltonienne (triviale mais éminemment utile) d'un théorème d'Emmy Noether : si « X_K est une symétrie infinitésimale de H », c'est-à-dire que H est une intégrale première de X_K , alors K est une intégrale première de X_H . Le crochet de Poisson relève aux fonctions le crochet de Lie des champs de vecteurs¹⁶ en ce sens que $X_{\{H, K\}} = [X_H, X_K]$; il vérifie (donc) l'identité de Jacobi, munissant $C^\infty(V, \mathbb{R})$ d'une structure d'algèbre de Lie si ω est C^∞ .

Le cas « concret » étudié depuis Lagrange au moins [20] est celui où V est le fibré cotangent (« espace des phases ») T^*M d'une variété (« espace des configurations ») M , muni de sa *structure symplectique canonique* ω_M , unique 2-forme sur T^*M dont l'image inverse par la projection $J^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow T^*M$ est la différentielle extérieure de la forme de contact canonique $dy_0 - y_1 dx$ définissant $\mathcal{K}^1(M, \mathbb{R})$.

¹⁶ On peut de même, si α est une forme de contact, relever le crochet de Lie des champs de Lie aux fonctions réelles par (l'inverse de) l'isomorphisme $X \mapsto \alpha X$, le crochet obtenu étant dit *de Lagrange*, semble-t-il.

Courbure

Courbure d'une connexion

Si $\mathcal{H}$ est une connexion sur une submersion $\begin{matrix} E \\ \downarrow \pi, \\ B \end{matrix}$ tout champ de vecteurs X

défini sur un ouvert $U \subset B$ se relève en un unique champ de vecteurs $\tilde{X}$ sur $\pi^{-1}(U)$ *horizontal* en tout point a , donné par $\tilde{X}_a = (T_a\pi|_{\mathcal{H}_a})^{-1}X_{\pi(a)}$. Un fait remarquable de la nature est que, si Y est un autre champ de vecteurs sur U , la composante verticale $([\tilde{X}, \tilde{Y}]_a)_V$ du crochet de Lie $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$, en chaque point $a \in \pi(U)$, ne dépend que de $\tilde{X}_a, \tilde{Y}_a \in \mathcal{H}_a$, c'est-à-dire de $X_{\pi(a)}, Y_{\pi(a)} \in T_{\pi(a)}B$; on définit donc une application bilinéaire alternée $R_a : T_{\pi(a)}B \times T_{\pi(a)}B \rightarrow \mathcal{V}_a$, le *tenseur de courbure de $\mathcal{H}$ au point a* , par la formule

$$(15) \quad R_a(X_{\pi(a)}, Y_{\pi(a)}) := ([\tilde{X}, \tilde{Y}]_a)_V.$$

Si Γ est l'application de Christoffel de $\mathcal{H}$ dans une carte fibrée $\tilde{\varphi}$ de π au-dessus de la carte φ de B , on déduit de (12) que, en posant $z := \tilde{\varphi}(a)$ et $\mathbf{x}_j := T_{\pi(a)}\varphi(\mathbf{v}_j)$,

$$(16) \quad R_a(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = D\Gamma(z)(\mathbf{x}_2, -\Gamma(z)\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_1 - D\Gamma(z)(\mathbf{x}_1, -\Gamma(z)\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2,$$

ce qui prouve notre « fait de la nature » (voir le paragraphe suivant pour un argument plus joli).

Quand E est un fibré vectoriel de base B , l'identification de $\mathcal{V}_a$ à la fibre $E_{\pi(a)}$ identifie R_a à un élément de $L_{\text{alt}}^2(T_{\pi(a)}B, E_{\pi(a)})$; en particulier, si $E = TB$, on se trouve dans la situation peut-être déjà un peu plus familière¹⁷ où R_a est à valeurs dans $T_{\pi(a)}B$. Si E est un fibré affine, elle est à valeurs dans l'espace vectoriel $\vec{E}_{\pi(a)}$ sous-jacent à la fibre. Plus généralement, lorsque E est un fibré principal de groupe structural G , la donnée de a permet d'identifier $E_{\pi(a)}$ à G par l'inverse de la bijection $G \ni g \mapsto ga$, donc d'identifier $\mathcal{V}_a$ à l'*algèbre de Lie* de G (l'espace tangent $\mathfrak{g} := T_1G$ à G en l'élément neutre 1) par l'inverse de la différentielle au point 1 de la bijection précédente; dans cette identification, on a donc $R_a \in L_{\text{alt}}^2(T_{\pi(a)}B, \mathfrak{g})$, ce qui apparaît bien sûr dans [18].

« Courbure » d'un système de Pfaff

Si $\mathcal{P}$ est un système de Pfaff¹⁸ sur une variété V , on peut remplacer dans ce qui précède l'espace vertical « concret » $\mathcal{V}_a$ par sa version « abstraite »

$$\nu\mathcal{P}_a := T_aV/\mathcal{P}_a$$

¹⁷ Pour un fibré vectoriel général, lorsque $\mathcal{H}$ est *linéaire*, c'est-à-dire quand le transport parallèle d'un temps à un autre le long de n'importe quel chemin l'est – ce qui revient à dire que les applications de Christoffel $\Gamma(x, y)$ dans les cartes de fibré vectoriel sont linéaires par rapport à y –, il résulte de (16) que la courbure R_a dépend linéairement de a vu comme élément de $E_{\pi(a)}$; en notant $b = \pi(a)$, $R_a(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ est donc la valeur au point $(a, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in E_b \times T_bB \times T_bB$ d'une application *trilinéaire* R_b à valeurs dans E_b ; si $E = TB$, le monstre familier de la géométrie riemannienne [22] est la forme *quadrilinéaire* $(T_bB)^4 \ni (a, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{h}) \mapsto R_b(a, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \cdot \mathbf{h}$ (produit scalaire).

¹⁸ C'est-à-dire un sous-fibré vectoriel du fibré tangent TV , les cas stupides de TV et de sa section nulle étant exclus.

(ce qui définit un fibré vectoriel $\nu\mathcal{P}$ de base V , le *fibré normal* à $\mathcal{P}$) et noter $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_\nu$ la projection canonique $T_a V \rightarrow \nu\mathcal{P}_a$. Le fait de la nature précédent se généralise : on définit le « *tenseur de courbure* » $R_a \in L_{\text{alt}}^2(\mathcal{P}_a, \nu\mathcal{P}_a)$ du système de Pfaff $\mathcal{P}$ au point $a \in V$ par la formule

$$(17) \quad R_a(X_a, Y_a) := ([X, Y]_a)_\nu,$$

où X, Y varient parmi les *sections du fibré vectoriel* $\mathcal{P}$ au-dessus d'ouverts $U \ni a$ de V (champs de vecteurs sur U vérifiant $X_x, Y_x \in \mathcal{P}_x$ ou, de manière équivalente, $(X_x)_\nu = (Y_x)_\nu = 0$ pour tout x).

Pour démontrer notre « fait de la nature », on peut considérer localement $\mathcal{P}$ comme une connexion¹⁹ et utiliser (16) ou, de manière plus élégante, remarquer que si l'on multiplie par exemple Y par une fonction réelle f définie au voisinage de a , (11) donne $[X, fY]_a = f(a)[X, Y]_a + \mathcal{L}_X f(a)Y_a$ et donc $([X, fY]_a)_\nu = f(a)([X, Y]_a)_\nu$ puisque $(Y_a)_\nu = 0$, d'où $([X, fY]_a)_\nu = ([X, Y]_a)_\nu$ si $f(a) = 1$.

Proposition. Pour toute variété intégrale W de $\mathcal{P}$, le tenseur de courbure R_a est identiquement nul sur $T_a W \times T_a W$ quel que soit $a \in W$.

En effet, si X, Y sont des champs de vecteurs sur un voisinage de a dans W , il est facile de les étendre localement en des sections $\tilde{X}, \tilde{Y}$ de $\mathcal{P}$ définies au voisinage de a dans V ; par définition, $\tilde{X}_a = X_a, \tilde{Y}_a = Y_a$ et de plus, puisque, près de a , les flots de $\tilde{X}$ et de X coïncident sur W , on a $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_a = [X, Y]_a \in T_a W \subset \mathcal{P}_a$. On en déduit que $R_a(X_a, Y_a) = R_a(\tilde{X}_a, \tilde{Y}_a) = ([\tilde{X}, \tilde{Y}]_a)_\nu = ([X, Y]_a)_\nu = 0$, d'où la proposition puisque (X_a, Y_a) peut être n'importe quel couple de vecteurs tangents à W en a .

Définition. Un *élément intégral* de $\mathcal{P}$ en $a \in V$ est un candidat plausible pour être l'espace tangent en a à une variété intégrale de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel I_a de $\mathcal{P}_a$ tel que $R_a|_{I_a \times I_a} = 0$.

Le *théorème de Cartan-Kähler* pour les systèmes de Pfaff²⁰ affirme que, dans le cas analytique, tout élément intégral « générique » I_a de $\mathcal{P}$ est bien de la forme $I_a = T_a W$ pour au moins une variété intégrale (analytique) W de $\mathcal{P}$. Voici deux exemples extrêmes où ce résultat général est inutile.

Exemple 1. - Systèmes de Pfaff complètement intégrables

Ce sont les systèmes de Pfaff $\mathcal{P}$ tels que $R_a = 0$ pour tout $a \in V$ (autrement dit, $\mathcal{P}_a$ est un élément intégral). Par exemple, le système de Pfaff $\mathcal{V}$ défini par les espaces verticaux d'une submersion est complètement intégrable (et complètement intégré, les fibres en étant des variétés intégrales). Une connexion complètement intégrable est parfois dite *plate* puisque sa courbure est partout nulle.

¹⁹ Voir la preuve du théorème de Frobenius un peu plus loin.

²⁰ Plus Cartan que Kähler dans ce cas [2] ; il est assez sidérant qu'Élie Cartan, à partir de trois exemples, ait pu chercher à établir un résultat aussi général et voir comment « coïncider » la variété intégrale cherchée.

Théorème de Frobenius. Si un système de Pfaff $\mathcal{P}$ sur V est complètement intégrable, il existe bien, pour tout $a \in V$, une variété intégrale W de $\mathcal{P}$ telle que $T_a W = \mathcal{P}_a$ (et donc, pour des raisons de dimension, $T_x W = \mathcal{P}_x$ pour tout $x \in W$ si W est connexe); en outre, cette variété intégrale est localement unique : si W' en est une autre, il existe un voisinage ouvert U de a dans V tel que $W \cap U = W' \cap U$ (on dit que W et W' ont le même germe²¹ en a).

À partir de là, on voit que la relation « il existe une variété intégrale connexe de $\mathcal{P}$ contenant a et a' » entre points a, a' de V est une relation d'équivalence, dont les classes d'équivalence s'appellent les *feuilles* du feuilletage de V défini par $\mathcal{P}$; elles héritent de leur définition une structure de variété connexe (injectivement immergée) de même dimension que les $\mathcal{P}_a$, mais ce ne sont pas des sous-variétés (plongées) en général. Même pour $\dim \mathcal{P}_a = 1$ (« champ de droite », toujours complètement intégrable²² puisque les R_a sont alternées), l'étude globale des feuilletages est un sujet très difficile où, après Ehresmann et Reeb, se sont illustrés entre autres Haefliger, Novikov, Thurston et, dans le cas des champs de droites, tous les grands noms des systèmes dynamiques depuis Poincaré.

Structure locale du feuilletage défini par un système de Pfaff complètement intégrable. Pour tout $a \in V$, il existe des ouverts $U \subset \mathbb{R}^n$, $U' \subset \mathbb{R}^p$ et une carte (« famille de plaques ») ψ de V avec $a \in \text{dom } \psi$ et $\text{im } \psi = U \times U'$ telle que le feuilletage de $\text{dom } \psi$ défini par $\mathcal{P}$ ait pour feuilles les $\psi^{-1}(U \times \{y_0\})$ avec $y_0 \in U'$; chacune de ces feuilles locales (« plaques ») est évidemment contenue dans une des feuilles du feuilletage global, mais celle-ci peut revenir couper $\text{dom } \psi$ suivant d'autres plaques, dont la réunion peut même être dense²³ dans $\text{dom } \psi$.

Preuve à la Dieudonné [12] du théorème de Frobenius et de l'existence de familles de plaques. Soit φ une carte quelconque de V en a ; en la composant avec une translation et une permutation des coordonnées, on peut supposer qu'elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, que $\varphi(a) = 0$ et que $T_a \varphi(\mathcal{P}_a)$ est horizontal, c'est-à-dire supplémentaire de l'espace vertical $\{0\} \times \mathbb{R}^p$ de la projection $\pi : (x, y) \mapsto x$. En restreignant $\text{dom } \varphi$, il en résulte que tous les $\mathcal{H}_{\varphi(z)} := T_z \varphi(\mathcal{P}_z)$ sont horizontaux, donc qu'il existe une application de Christoffel $\Gamma : \text{im } \varphi \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, telle que $\mathcal{H}_{(x,y)}$ soit le graphe de $-\Gamma(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \text{im } \varphi$. Les variétés intégrales de dimension maximale de $\mathcal{P}$ dans $\text{dom } \varphi$ sont les images par φ^{-1} de celles de la connexion $\mathcal{H}$ ainsi définie, lesquelles sont *localement* les graphes des solutions $y = f(x)$ de l'équation « aux différentielles totales »

$$(18) \quad \frac{dy}{dx} + \Gamma(x, y) = 0;$$

²¹ Au début, Ehresmann utilisait ici aussi le mot *jet*, peu recommandable dans ce cas hors du cadre analytique.

²² La théorie inclut donc l'étude des *orbites* ou *lignes de champ* d'un champ de vecteurs X sur V (en considérant le champ de droites $x \mapsto \mathbb{R}X_x$ sur l'ouvert de V où X ne s'annule pas), images de ses courbes intégrales.

²³ Si α est un nombre irrationnel, les orbites du champ de vecteurs constant $X_x := (1, \alpha) \in \mathbb{R}^2 = T_x \mathbb{T}^2$ sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ sont toutes denses.

si une telle solution f prend la valeur y_0 en 0, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que le segment $[0, x]$ soit contenu dans $\text{dom } f$, il en résulte que $f(tx)$ est pour $0 \leq t \leq 1$ la valeur $R^t(x, y_0)$ au temps t de la solution de l'équation différentielle $\frac{dy}{dt} + \Gamma(tx, y)x = 0$ qui vaut y_0 pour $t = 0$. Comme $R^t(x, y_0)$ existe pour tout t si $x = 0$, la théorie des équations différentielles [9] nous dit qu'il existe des boules ouvertes $U \subset \mathbb{R}^n$ et $U' \subset \mathbb{R}^p$ de centre 0 telles que, pour $x \in U$, l'application $y_0 \mapsto R^1(x, y_0)$ soit un difféomorphisme de U' sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$; bref, $h : (x, y_0) \mapsto (x, R^1(x, y_0))$ est un difféomorphisme de $U \times U'$ sur un ouvert de $U \times \mathbb{R}^p$.

Il reste donc simplement à vérifier que, pour tout $y_0 \in U'$, l'unique candidate $f : x \mapsto R^1(x, y_0)$ à être dans U la solution de (18) qui vaut y_0 pour $x = 0$ est bien solution de (18) : on obtiendra la famille de plaques $\psi := h^{-1} \circ \varphi$ et, pour $y_0 = 0$, le théorème de Frobenius. Or, en dérivant par rapport à x l'identité $\frac{\partial}{\partial t} f(tx) + \Gamma(tx, f(tx))x = 0$ et en utilisant (16), on voit que $t \mapsto tDf(tx)$ et $t \mapsto -t\Gamma(tx, f(tx))$ vérifient la même équation différentielle sur $[0, 1]$ et prennent la même valeur 0 $\in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ en $t = 0$, donc sont égales, d'où le résultat cherché pour $t = 1$.

Remarques

Pour les champs de droites, ce n'est rien d'autre que la théorie des équations différentielles « dépendant du temps ». La construction effectuée en général (avant la vérification finale, qui utilise la nullité de la courbure) est une version locale de la démonstration [11] du théorème d'Ehresmann. La nullité de la courbure est imposée par la symétrie de la dérivée seconde des solutions de (18). Un des mérites de la preuve de Dieudonné est qu'elle marche en dimension infinie.

Exemple 2. - Champs d'hyperplans et structures de contact

Si α est une forme de Pfaff partout non nulle sur V et que $\mathcal{K}_z := \ker \alpha_z$, la courbure au point z du système de Pfaff $\mathcal{K}$ s'identifie à $-d\alpha_z|_{\mathcal{K}_z}$ par l'isomorphisme de $\nu\mathcal{K}_z = T_z V / \mathcal{K}_z$ sur $\mathbb{R}$ induit par α_z .

En effet, quelles que soient les sections locales X, Y du fibré vectoriel $\mathcal{K}$ au voisinage de z , on a $\alpha X = \alpha Y = 0$, et donc $\alpha_z[X_z, Y_z] = -d\alpha_z(X_z, Y_z)$ d'après (11).

Une structure de contact est donc « complètement non intégrable », sa courbure étant en tout point une forme bilinéaire non dégénérée.

La structure de contact canonique $\mathcal{K} = \mathcal{K}^1(M, \mathbb{R})$ de $J^1(M, \mathbb{R})$ est une connexion sur le fibré trivial $J^1(M, \mathbb{R}) = T^*M \times \mathbb{R}$ de base T^*M , donc a une « application de Christoffel » intrinsèque : en notant comme les mécaniciens $x = (q, p)$ ($p \in T_q^*M$) les points de T^*M et $z = (q, p, y)$ ceux de $J^1(M, \mathbb{R})$, chaque $\mathcal{K}_z$ est défini par l'équation $dy = p dq$, donc est le graphe de la forme linéaire $p dq$ sur $T_x(T^*M)$; la forme de Pfaff $\lambda = \lambda_M$ sur T^*M donnée par $\lambda_x = p dq$ s'appelle la *forme de Liouville* de T^*M .

La courbure de la connexion $\mathcal{K}^1(M, \mathbb{R})$ sur le fibré trivial $J^1(M, \mathbb{R}) = T^*M \times \mathbb{R}$ de base T^*M s'identifie donc à la 2-forme $d\lambda_M$ sur T^*M : on retrouve la forme symplectique canonique $\omega_M = -d\lambda_M$ sur T^*M .

Remarques

Pour obtenir les équations de Hamilton sous leur forme historique, on a le choix entre nos conventions de signe et celles de [20], selon lesquelles $\omega_M = d\lambda_M$ et $\omega_M X_H = -dH$.

Toute application étale g entre ouverts de M se relève en l'application T^*g de $T^*\text{dom } g$ sur $T^*\text{im } g$ donnée par $T^*g(q, p) := (g(q), p \circ (T_q g)^{-1})$, évidemment symplectique (elle préserve la forme de Liouville); si X est un champ de vecteurs sur M , chaque $T^*g_X^t$ est le temps t du flot du champ de vecteurs *hamiltonien* qui a pour hamiltonien $K(q, p) = pX_q$; les intégrales premières de la mécanique classique obtenues en appliquant le « théorème de Noether hamiltonien » sont en général de tels K .

Étant donné un système de Pfaff $\mathcal{P}$ sur V , soit $\mathcal{P}^\perp$ le sous-fibré vectoriel de T^*V dont la fibre au-dessus de x est formée des $\xi \in T_x^*V$ nulles sur $\mathcal{P}_x$. Pour tout $a \in V$, il existe r sections $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ de $\mathcal{P}^\perp$ au-dessus d'un ouvert $U \ni a$ telles que $\alpha(x) := (\alpha_1(x), \dots, \alpha_r(x))$ soit une base de $\mathcal{P}_x^\perp$ pour tout $x \in U$; autrement dit, $\alpha(x)$ induit un isomorphisme de $\nu\mathcal{P}_x$ sur $\mathbb{R}^r$ qui, comme pour $r = 1$, identifie R_x à $-d\alpha(x)|_{\mathcal{P}_x^\perp} = -(d\alpha_1(x), \dots, d\alpha_r(x))|_{\mathcal{P}_x^\perp} \in L_{\text{alt}}(\mathcal{P}_x, \mathbb{R}^r)$.

Il résulte du lemme de transversalité de Thom que « presque toute » forme de Pfaff sur une variété de dimension impaire est une forme de contact en dehors d'une hypersurface²⁴. En revanche, il est clair que, sauf ceux qui sont définis par une submersion et les champs de droites, les systèmes de Pfaff ne sont *presque jamais* complètement intégrables. Pourquoi donc consacrer tant d'efforts à des objets aussi improbables? Une réponse est qu'ils apparaissent de manière plutôt robuste (malgré une certaine perte de régularité par perturbation) dans le cas des feuilletages stable et instable d'un difféomorphisme d'Anosov – d'où, semble-t-il, l'intérêt de Novikov; une autre, très présente chez Élie Cartan et dans [18], est que les objets les plus symétriques sont souvent les plus beaux et les plus utiles; en voici une illustration, supposant connue la cohomologie de de Rham :

La connexion « de Gauss-Manin » associée à une submersion propre et la monodromie

On peut associer à toute submersion propre
$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ B \end{array}$$
 le fibré vectoriel $H^\bullet E$ de base B

sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dont la fibre au-dessus de b est l'espace de cohomologie $H^\bullet(E_b, \mathbb{K})$. Pour voir que c'est bien un fibré vectoriel muni d'une connexion linéaire plate canonique $\mathcal{H}$, nous allons en construire²⁵ un atlas $\{\tilde{\varphi}\}_{\varphi \in \Phi}$ de fibré vectoriel tel que, en notant $\mathcal{H}_\varphi$ la connexion linéaire plate sur $\text{dom } \tilde{\varphi}$ dont l'application de Christoffel dans la carte $\tilde{\varphi}$ est²⁶ $\Gamma = 0$, les connexions $\mathcal{H}_\varphi$ et $\mathcal{H}_\psi$, coïncident sur $\text{dom } \tilde{\psi} \cap \text{dom } \tilde{\varphi}$

²⁴ Lisse, voir par exemple [10]; de même, la différentielle extérieure de « presque toute » forme de Pfaff sur une variété M de dimension paire est symplectique en dehors d'une hypersurface, forcément non vide si M est compacte sans bord.

²⁵ En supposant pour simplifier les choses E paracompacte.

²⁶ Plus simplement, $\tilde{\varphi}$ est une famille de plaques du feuilletage défini par $\mathcal{H}_\varphi$, qui naît donc « tout intégrée »; Élie Cartan nommait d'ailleurs *connexion infinitésimale* ce que nous appelons connexion, ce dernier terme désignant une façon de « connecter » deux fibres $E_b, E_{b'}$ voisines – pour une connexion (infinitésimale) ayant de la courbure, le résultat dépend, même localement, de l'arc joignant b à b' dans B le long duquel on effectue le transport parallèle.

pour $\varphi, \psi \in \Phi$; on peut donc bien recoller les $\mathcal{H}_\varphi$ en une connexion linéaire plate $\mathcal{H}$ sur $H^\bullet E$.

Dans cette construction, Φ est l'atlas de B formé des cartes dont l'image est une boule ouverte de centre 0 dans $\mathbb{R}^n$. Une connexion sur π étant choisie, la preuve du théorème d'Ehresmann montre qu'il existe pour chaque $\varphi \in \Phi$ une trivialisatation $h_\varphi : \pi^{-1}(\text{dom } \varphi) \rightarrow \text{dom } \varphi \times F_\varphi$ de π au-dessus de $\text{dom } \varphi$; pour chaque $b \in \text{dom } \varphi$, l'injection canonique $i_b : E_b \hookrightarrow \pi^{-1}(\text{dom } \varphi)$ induit un isomorphisme i_b^* de $H^\bullet(\pi^{-1}(\text{dom } \varphi), \mathbb{K})$ sur $H^\bullet(E_b, \mathbb{K})$, qui se « lit » à l'aide de h_φ comme l'isomorphisme j_b^* de $H^\bullet(\text{dom } \varphi \times F_\varphi, \mathbb{K})$ sur $H^\bullet(\{b\} \times F_\varphi, \mathbb{K})$ associé à l'inclusion²⁷ $j_b : \{b\} \times F_\varphi \hookrightarrow \text{dom } \varphi \times F_\varphi$. On peut donc associer à φ la carte $\tilde{\varphi}$ de $H^\bullet E$ au-dessus de φ , d'image $\text{im } \varphi \times H^\bullet(\pi^{-1}(\text{dom } \varphi), \mathbb{K})$, donnée par $\tilde{\varphi}(b, c) := (\varphi(b), (i_b^*)^{-1}c)$, $c \in H^\bullet(E_b, \mathbb{K})$. Il est facile de vérifier que l'on obtient ainsi l'atlas de fibré vectoriel et la connexion plate annoncés²⁸.

Pour $b \in B$, le transport parallèle le long de chaque lacet γ dans B , de base b , définit un automorphisme de $H^\bullet E_b$ car la connexion est linéaire; comme elle est plate, cet automorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie de γ ; on définit ainsi un homomorphisme du groupe fondamental $\pi_1(B, b)$ dans le groupe des automorphismes de $H^\bullet E_b$, la monodromie.

Torsion, connexion de Levi-Civita et variantes apparaissant dans la thèse

La torsion $\tau_a \in L_{\text{alt}}(T_a M, T_a M)$ au point $a \in M$ d'une connexion linéaire sur une variété M (c'est-à-dire sur son fibré tangent) peut être définie rapidement comme suit : pour toute surface paramétrée $\sigma : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (M, a)$, on a $\tau_a(\partial_1 \sigma(0), \partial_2 \sigma(0)) = D_2 \partial_1 \sigma(0) - D_1 \partial_2 \sigma(0)$, où $D_1 \partial_2 \sigma(s, t) := \frac{D}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} \sigma(s, t)$ et $D_2 \partial_1 \sigma(s, t) := \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \sigma(s, t)$. Pour chaque métrique riemannienne sur M , il existe une unique connexion linéaire *sans torsion* (« symétrique ») sur M et *riemannienne*, c'est-à-dire telle que le transport parallèle du temps s au temps t le long d'un chemin γ dans M soit toujours une isométrie de $T_{\gamma(s)} M$ sur $T_{\gamma(t)} M$: c'est la *connexion de Levi-Civita*. Son absence de torsion permet par exemple une preuve intrinsèque du fait que les points critiques de la fonctionnelle d'action $\frac{1}{2} \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt$ sur l'espace des chemins γ à extrémités $\gamma(0), \gamma(1)$ fixées dans M sont des *géodésiques*, solutions de l'équation $\frac{D}{dt} \dot{\gamma}(t) = 0$.

Puisque le transport parallèle pour la connexion de Levi-Civita préserve le produit scalaire, il induit un transport parallèle des repères orthonormés d'espaces tangents à M , qui est celui d'une connexion sur le fibré des repères orthonormés, *principale*, c'est-à-dire telle que le transport parallèle préserve l'action du groupe structural. Dans la thèse [18] sont de même introduites des connexions plus ou moins canoniques sur les fibrés principaux considérés, utilisées *beaucoup* plus tard par divers spécialistes.

²⁷ L'isomorphisme inverse est p_b^* , où $p_b(x, y) := (b, y)$, toute forme différentielle fermée α sur $\text{dom } \varphi \times F_\varphi$ telle $j_b^* \alpha = 0$ étant exacte : pour le voir, il suffit d'appliquer notre preuve du lemme de Poincaré au champ X sur $\text{dom } \varphi \times F_\varphi$ dont l'image par $\varphi \times \text{id}_{F_\varphi}$ a pour flot $(x, y) \mapsto (b + e^t(x - b), y)$.

²⁸ Un trait subtil de cette construction est que le fibré $H^\bullet E$ et la connexion sont $\mathbb{K}$ -analytiques lorsque π l'est, contrairement aux trivialisations locales h_φ obtenues par partition de l'unité.

En guise de conclusion

Naturellement, je n'ai fait qu'effleurer le sujet, mon ambition se bornant à donner au lecteur une partie des moyens de se frayer un chemin dans les travaux de Paulette Libermann, de son maître Ehresmann et de leur maître Élie Cartan. L'œuvre de ce dernier n'est pas achevée : chaque génération en fait la glose à sa manière, essayant d'en éclairer les zones d'ombre au risque d'en perdre le fil conducteur. Ce n'est pas un des moindres mérites de Paulette Libermann d'avoir donné dans le premier chapitre de sa thèse un aperçu bref mais substantiel de cette œuvre dans le langage flambant neuf d'Ehresmann, fibrés, jets et connexions mais aussi pseudogroupes et groupoïdes²⁹, de nouveau très populaires [23, 24, 17] après un temps d'oubli : ils avaient sans doute souffert de leur nom de groupes au rabais³⁰ alors que, chez Lie ou Élie Cartan, les « groupes » sont souvent des pseudogroupes – ceux-ci apparaissent déjà naturellement, nous l'avons vu, quand on considère le flot d'un champ de vecteurs non complet (de même, ce qui tient lieu de groupe à un paramètre pour les champs de vecteurs dépendant du temps est un « groupoïde à deux paramètres », de sorte que beaucoup de scientifiques font des groupoïdes sans le savoir !). C'est un des effets inévitables de la glose, dont les coups de projecteur plongent un temps dans l'obscurité ce qui est pourtant inévitablement là³¹.

À Élie Cartan, je l'ai dit, on retourne sans cesse : son « problème d'équivalence », dont j'ai bien peu parlé malgré le titre de la thèse³², est devenu « méthode d'équivalence » algorithmique [16], ce qui est réducteur mais correspond dans une certaine mesure au contenu de [18] ; sa théorie de l'involution continue d'inspirer Malgrange [21] après Kuranishi et bien d'autres [13, 1], tels Ehresmann, dont les jets permettent une formulation intrinsèque des prolongements d'un système différentiel.

²⁹ Exemples typiques : les difféomorphismes entre ouverts d'une variété M forment un pseudo-groupe, et même un groupoïde si l'on s'interdit de les composer lorsque le domaine du second n'est pas exactement l'image du premier ; les germes aux points de M de tels difféomorphismes locaux forment un groupoïde (on ne peut composer un germe f en a et un germe g en b que si $b = f(a)$), ainsi que leurs jets d'ordre k (au point où l'on a « germifié ») ; lorsque M est munie d'une structure supplémentaire, métrique riemannienne ou forme symplectique ou structure de contact, par exemple, les objets qui la préservent forment un sous-pseudogroupe ou un sous-groupoïde du précédent ; l'exemple riemannien d'une sphère un peu cabossée au voisinage d'un point mais bien ronde par ailleurs montre que ce pseudogroupe ou groupoïde peut être assez irrégulier, étant apte à déceler des symétries locales qu'ignore le groupe des isométries globales de notre sphère cabossée sur elle-même, en général trivial. Un objet fondamental de la théorie des feuilletages est le groupoïde d'holonomie, qui généralise la monodromie.

³⁰ Pour ne rien dire des horribles *algébroides*, qui semblent tout droit sorties d'un mauvais film de science-fiction.

³¹ L'insistance sur les groupes abstraits, qui, si l'on en croit le dogme, n'agissent que sur eux-mêmes avant qu'on les ait représentés, est évidemment pour beaucoup dans les ténèbres où l'on a ainsi fini par rejeter les groupes de Lie historiques, pseudogroupes de transformations qu'il est souvent malaisé d'abstraire de l'espace sur lequel ils agissent.

³² Il s'agit de trouver des critères pour que deux structures soient localement équivalentes, c'est-à-dire se ramènent l'une à l'autre par changement de coordonnées locales ; naturellement, le langage des variétés, que j'ai utilisé de bout en bout, ne privilégie aucun système de coordonnées a priori, de sorte que « changement de coordonnées » doit être pris au sens de « difféomorphisme » – ce jansénisme, même si je m'en moquais un peu dans [11], est totalement justifié par le fait que les vrais problèmes ne peuvent pas dépendre du choix de coordonnées.

Il serait sans doute temps, d'ailleurs, de retourner aussi à Ehresmann avant que ses textes si concis ne deviennent inaccessibles aux générations éduquées aujourd'hui³³ ; ainsi, la démonstration « du » théorème d'Ehresmann que j'ai donnée [11] est en fait la sienne [14] . . . , tellement elliptique que l'on s'est empressé d'en trouver d'autres bien moins élégantes et naturelles.

Il faudrait aussi comprendre ce moment où la communauté mathématique a cessé de suivre Ehresmann sur la voie des catégories, où il avait pourtant été mené bien naturellement (par exemple, un groupoïde est une [petite] catégorie dont toutes les flèches sont inversibles) et qui a permis beaucoup plus tard à G. Segal d'apporter des simplifications considérables à la théorie des feuilletages.

Pour achever cet hommage à Paulette Libermann, je dirai qu'il y a des précurseurs : pas Euler, Poincaré ni Élie Cartan (on n'est pas le précurseur de ceux qui vous doivent tout), mais des gens comme elle justement, qui traitent de problèmes parfois jugés un peu académiques ou obscurs jusqu'à ce que quelqu'un, ayant besoin des objets concernés, s'aperçoive que le travail a été fait, et bien fait.

Références

- [1] R. L. BRYANT, S. S. CHERN, R. B. GARDNER, H. L. GOLDSCHMIDT, P. A. GRIFFITHS. *Exterior Differential Systems*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, Springer-Verlag, Berlin, 1991
- [2] É. CARTAN, *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., 3^e série, **16** (1901), 241-311
- [3] ——— *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **21** (1904), 153-206
- [4] ——— *Les sous-groupes des groupes continus de transformations*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **25** (1908), 57-194
- [5] ——— *Leçons sur les invariants intégraux*. Hermann, Paris, 1922
- [6] ——— *La structure des groupes infinis*, Séminaire de Math., 4^e année, 1936-37, G. (polycopié)
- [7] ——— *Les problèmes d'équivalence*, Selecta, Gauthier-Villars, Paris, 1937, 113-136
- [8] ——— *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Hermann, Paris, 1948
- [9] M. CHAPERON, *Calcul différentiel et calcul intégral*, deuxième édition. Dunod, Paris, 2008
- [10] ——— *Géométrie différentielle et singularités de systèmes dynamiques*. Astérisque **138-139**, 1986
- [11] ——— *En souvenir de Paulette Libermann*. Gazette des mathématiciens **122**, octobre 2009
- [12] J. DIEUDONNÉ, *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York, 1960
- [13] ——— *Éléments d'Analyse*, tome 4. Gauthier-Villars, Paris, 1971
- [14] C. EHRESMANN, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque Top. Bruxelles 1950, 29-
- [15] ——— *Les prolongements d'une variété différentiable*, C. R. Acad. Sc. Paris **233** (1951), p. 598, 777 et 1081
- *Structures locales et structures infinitésimales*, ibidem, **234**, 1952, p. 587
- [16] R. B. GARDNER, *The method of equivalence and its applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa. , 1989
- [17] M. GOLUBITSKY, I. STEWART, *Nonlinear dynamics of networks : the groupoid formalism*, Bull. Amer. Math. Soc. **43** (2006), 305-364
- [18] P. LIBERMANN, *Sur le problème de l'équivalence de certaines structures infinitésimales*. Thèse, Université de Strasbourg, 21 mai 1953. Ann. Mat. Pura Appl. **36**, 1954, p. 27-120

³³ Bien sûr, la science progresse en grande partie parce que ses acteurs, comprenant mal le travail de leurs prédécesseurs, en font autre chose, parfois plus intéressant que l'original, mais il y a des limites. . .

- [19] ——— *Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et des structures de contact*. Colloque de géométrie différentielle globale, 1958, p. 37-59, Gauthier-Villars, Paris, 1959
- [20] ———, C.-M. MARLE, *Géométrie symplectique, bases théoriques de la mécanique*. Publications Mathématiques de l'Université Paris VII, **21**, 1986-87
Traduction anglaise par B. E. Schwarzbach : *Symplectic geometry and analytical mechanics*. Mathematics and its Applications, **35**. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987
- [21] B. MALGRANGE, *Systèmes différentiels involutifs*, Panoramas et Synthèses **19**, Société mathématique de France, 2005
- [22] J. MILNOR, *Morse Theory*, Princeton University Press, 1963
- [23] A. WEINSTEIN, *Symplectic groupoids and Poisson manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **16** (1987), 101-104
- [24] — *Groupoids : unifying internal and external symmetry*, Notices Amer. Math. Soc. **43** (1996), 744-752
- [25] H. WHITNEY, *Geometric integration theory*, Princeton University Press, 1957



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Two Assistant Professorships in Mathematics

The Department of Mathematics at ETH Zurich (www.math.ethz.ch) invites applications for qualified candidates from all areas of mathematics. Duties of these positions include, in addition to research, an active participation in teaching courses of mathematics for students of mathematics, natural sciences, and engineering.

Candidates should have a Ph.D. or equivalent and have demonstrated the ability to carry out independent research work. Willingness to teach at all university levels and to participate in collaborative work both within and outside of ETH Zurich is expected. The successful candidates will teach undergraduate level courses (German and English) and graduate level courses (English).

Assistant professorships have been established to promote the careers of younger scientists. The initial appointment is for four years with the possibility of renewal for an additional two-year period.

Please submit your application together with a curriculum vitae and a list of publications **to the President of ETH Zurich, Prof. Dr. Ralph Eichler, ETH Zurich, Raemistrasse 101, 8092 Zurich, Switzerland (or via e-mail to faculty-recruiting@sl.ethz.ch), no later than February 28, 2010**. With a view toward increasing the number of female professors, ETH Zurich specifically encourages female candidates to apply.

ENSEIGNEMENT

Les responsables de plus de quarante sociétés savantes et associations d'enseignants se sont constitués en Forum le 17 octobre afin de mener une réflexion commune sur le fonctionnement de l'Éducation Nationale, l'avenir de la recherche et des universités. Vous trouverez au début de cette rubrique leur première contribution à propos de la réforme des concours de recrutement des enseignants du second degré¹.

Luc Chatel a par ailleurs présenté mi-novembre sa réforme des lycées, réforme que Xavier Darcos avait dû repousser après les manifestations des lycéens fin 2008. Le projet est analysé par Daniel Duverney; son texte est accompagné d'un communiqué commun de la SMF et de l'APMEP².

La rubrique se penchera enfin sur l'enseignement de l'informatique au lycée : un texte de M. Granger rendra compte des premières discussions conduites entre SMF, EPI et SPECIF.

Réformons la réforme

Contribution du Forum des Sociétés Savantes du 10 novembre 2009

Nos Sociétés se sont déjà adressées par deux fois en 2009 au ministre de l'Éducation Nationale pour lui faire part de leurs analyses sur les effets de la réforme de la formation et des concours de recrutement des professeurs. Sur le principe, il est légitime que la formation des professeurs, qui s'effectue déjà en cinq ans (six ans pour les agrégés), soit sanctionnée par un master. Si une réforme plus ample doit être envisagée, elle ne peut l'être sans l'accord des communautés enseignantes et universitaires et ne peut aboutir qu'au terme d'une véritable concertation que la parution précipitée des décrets en juillet a compromise. La parution de ces décrets et de circulaires crée une situation d'extrême confusion que nos sociétés dénoncent. Confrontées à un projet de réforme qui nous semble, en l'état, irréalisable et dangereux, nous proposons de repenser la réforme sur la base des principes suivants.

¹ Texte disponible sur le site de la SMF :

<http://smf.emath.fr/VieSociete/ForumSocietesSavantes/FSSMaster.html>

² Texte disponible sur le site de la SMF :

<http://smf.emath.fr/Enseignement/Masterisation/CommuniqueFSS.pdf>

Propositions

Ne pas dissocier les maquettes des masters et les concours

Les concours de recrutement et leurs programmes doivent rester nationaux et fonder la sélection des candidats sur leurs connaissances et compétences, évaluées par des spécialistes universitaires et des enseignants des disciplines concernées. La réforme de la formation et des concours ne doit pas produire un affaiblissement des exigences disciplinaires ni une restriction du champ des matières étudiées. Pour les candidats au concours de professeur des écoles, la réforme doit être l'occasion d'un renforcement, adapté à leur future mission, des connaissances dans les disciplines absentes de la licence dont ils sont titulaires.

Selon les promoteurs de la réforme, les épreuves des concours ne sauraient influencer sur les programmes des masters : ce seraient les masters, indépendants et complémentaires des concours, qui garantiraient la compétence disciplinaire des candidats. Nous récusons toujours cette vision irréaliste, qui vide les concours de leur substance, comme s'il s'agissait, à terme, de les faire disparaître purement et simplement. Au contraire, c'est sur la base de concours nationaux, aux exigences disciplinaires larges et clairement établies, que pourra être rédigé le cahier des charges précis qui permettra ensuite à chaque université de préparer des maquettes de master, et au ministère de les valider. Il est indispensable d'articuler (et non de dissocier) la réflexion sur le contenu du concours (dates des épreuves, nombre, nature et programmes de celles-ci) et la réflexion portant sur le contenu des masters. Il faut aussi écarter la possibilité de concours comprenant des épreuves à géométrie variable, différentes selon le cursus actuel ou passé des candidats. C'est la seule garantie du niveau national des compétences requises de tous les enseignants du primaire et du secondaire.

L'absence de certaines disciplines au sein des épreuves du projet de concours allégé, loin de conduire à une présence plus marquée de ces disciplines dans les maquettes de master, entraînerait au contraire leur disparition. C'est pourquoi un cadrage national des formations de master est indispensable pour chaque discipline, afin de garantir l'équité et la cohérence nationale des recrutements.

Les maquettes des nouveaux masters ne sauraient être élaborées dans nos universités sans un accord préalable de la communauté enseignante sur l'ensemble du dispositif de formation et de recrutement (calendrier des stages et des concours, dispositif précis d'encadrement des stages, maquette et programme des concours, cadrage national des masters en terme de contenu, modalités de l'adossement des masters à la recherche, etc.). Un cadrage des concours tardif, pour des maquettes à remettre par les universités mi-avril, et donc localement par les concepteurs de formations bien plus tôt, serait clairement incompatible avec cette exigence. Il déboucherait sur une impossibilité de mettre en œuvre la réforme à la rentrée 2010.

Stages, année de stage pratique rémunérée et formation professionnelle

La formation proprement pratique doit intervenir après le concours. La connaissance du système éducatif, notamment, ne sera vérifiée qu'à l'issue de l'année rémunérée de stage pratique en alternance dont on ne saurait faire l'économie. Si des stages doivent intervenir avant le concours, il s'agira de stages en observation

ou de pratique accompagnée sous la responsabilité d'un tuteur, les stages en pleine responsabilité n'ayant de sens qu'après la réussite au concours.

La notion de stage pratique en alternance est loin d'être acquise, les stages prévus cette année n'étant accompagnés d'aucune préparation ni encadrement universitaire. Les modalités prévues en font de simples remplacements, créant un précédent plus qu'inquiétant pour la formation professionnelle future des enseignants. La première année d'exercice en tant que fonctionnaire stagiaire est modifiée pour tous en 2010-2011, sans que les modalités en aient été précisées d'aucune façon. Aucune information n'est disponible sur la forme des actions prévues à l'université ni sur la nature de leur encadrement. Aucune certitude sur la réduction du temps de service n'est donnée.

Nous demandons, pour tous les lauréats aux concours de recrutement de l'Éducation Nationale, le maintien de l'année de stage rémunérée, permettant au professeur stagiaire encadré par un tuteur de prendre pour un tiers de son service la responsabilité d'une classe, tout en suivant l'indispensable formation universitaire d'accompagnement. C'est au cours de ce stage que pourra être approfondie et vérifiée si besoin la connaissance du système éducatif. C'est à l'issue de ce stage que devront être titularisés les professeurs ayant fait la preuve de leur aptitude à l'enseignement.

Il est légitime que des stages passifs en observation et actifs en pratique accompagnée, donnant lieu à une préparation et un encadrement universitaire, soient proposés aux étudiants dès la licence puis en master pour leur permettre de confronter leur vocation d'enseignants à la réalité, mais cela ne doit pas se faire au détriment de l'acquisition de connaissances disciplinaires.

Formation continue des enseignants

La formation continue des enseignants titulaires devra être développée.

De nombreux universitaires participent déjà à la formation continue des enseignants du secondaire par le biais des formations proposées par le Plan Académique de Formation. Néanmoins, il est indispensable de mettre en place ou de développer des structures spécifiques au sein des universités, gérées par elles, proposant aux enseignants des formations, éventuellement obligatoires et donnant lieu à décharge de service, aux missions de l'Éducation Nationale et aux programmes enseignés. Le modèle des IREM (Instituts de Recherche en Enseignement des Mathématiques) pourrait être étendu aux autres disciplines. Dans cet esprit, il est primordial de conserver les concours internes, dont la préparation constitue un maillon essentiel de la formation continue des enseignants.

Choix des masters et conséquences pour les étudiants

Les cursus menant aux différents concours de recrutement de l'Éducation Nationale, à une autre voie professionnelle ou à la recherche doivent pouvoir rester compatibles et permettre des réorientations. À cette fin, nous demandons le maintien d'exigences scientifiques et disciplinaires effectives dans toutes les formations de master.

Un master défini comme un parcours professionnalisant vers les métiers de l'enseignement ne saurait en même temps préparer les étudiants au doctorat. Mais on ne peut demander aux étudiants de choisir dès la fin de leur licence entre des cursus exclusifs les uns des autres, dirigés le premier vers la recherche, le deuxième

vers l'agrégation, le troisième vers le CAPES et le quatrième vers le CRPE, leurs choix n'étant pas toujours conséquences de vocations différentes, mais parfois de niveau disciplinaire, qu'ils ne sont pas nécessairement à même d'appréhender en fin de licence. De plus, de nombreux établissements ne pouvant ouvrir deux ou trois masters différents dans un même domaine se verraient rapidement privés de master recherche ou professionnel. Le financement de préparations post-master non-diplômantes à l'agrégation et aux autres concours doit aussi être garanti. Sinon, les répercussions se feraient sentir dès la licence, avec la fermeture induite de nombreuses filières en dehors des grands centres et un appauvrissement dramatique de l'offre de formation, créant une injustice géographique dans l'enseignement supérieur et un appauvrissement du potentiel d'enseignants.

En retardant d'un an le recrutement, la réforme annoncée pénalisera les étudiants dont les moyens financiers sont fragiles et aboutira à une sélection sociale des candidats. Elle entraînera aussi la baisse du nombre de candidats, et donc la baisse du niveau de recrutement. Le problème des admis-refusés qui obtiendraient le master mais pas le concours aggraverait le problème social si la structure des masters n'était pas assez souple pour garantir leur reconversion vers les vrais emplois qu'un diplôme à bac+5 doit légitimement leur permettre de briguer. De surcroît, il ne doit pas s'instaurer un double régime entre les enseignants fonctionnaires qui auront réussi le concours, et des titulaires du master refusés au concours mais recrutés avec un statut différent, ce qui, à terme, rendrait possible la disparition des concours, affaiblissant la qualité de l'enseignement en France.

Les mesures sociales prévues cette année, limitées à quelques bourses, sont très insuffisantes. L'offre de postes d'assistants d'éducation est clairement incompatible avec, simultanément, la validation d'un master, la préparation d'un concours et les stages prévus.

Mesures de transition

Enfin, pour garantir la cohérence des formations, il est indispensable de connaître les programmes et les dates des concours ainsi que les modalités des éventuels stages avant d'élaborer les maquettes des masters correspondants.

Les concours de recrutement de l'enseignement primaire et secondaire n'ont pas été maintenus en l'état pour 2010 puisque les lauréats 2010 non candidats en 2009 devront simultanément valider un M1. Chaque établissement doit ainsi délivrer cette année des ECTS de master dans des conditions qui n'ont pas été clairement précisées. On constate le mélange de la prise en compte de l'assiduité à une préparation à un concours non conçue pour être diplômante avec des modules ou des mémoires de master conçus pour un débouché sur la recherche, etc. Des absurdités dans la délivrance des équivalences sont déjà observées. La lourde charge constituée par des stages en responsabilité est clairement incompatible avec la préparation des concours.

Problèmes spécifiques de l'agrégation

Pour le concours de l'agrégation 2011, des solutions doivent être trouvées afin qu'aucun étudiant ne soit lésé dans la phase de transition.

La parution fin juillet du décret instituant l'obligation d'être titulaires d'un master complet pour les candidats à l'agrégation a des conséquences dès cette année. Les étudiants titulaires d'un M1 doivent choisir entre se concentrer sur

la préparation de l'agrégation cette année et valider un M2 qui leur permettrait de candidater en 2011. Les préparateurs craignent surtout une diminution très forte du nombre des candidats pour l'année prochaine (uniquement non reçus cette année mais titulaires d'un M2), entraînant la fermeture de la majorité des préparations. Faute de mesures de transition efficaces, le nombre de candidats se trouvant mécaniquement diminué en 2011, une importante proportion des postes ne pourra être pourvue par les jurys, ce processus risquant d'entraîner une diminution drastique du nombre des postes pour l'avenir.

Beaucoup de candidats à l'agrégation préparent en même temps le CAPES. Les moyens doivent être trouvés de maintenir cette possibilité, sous peine de voir s'effondrer le nombre de candidats au concours le plus difficile et se creuser l'écart entre les universités en mesure de proposer une préparation à l'agrégation et les autres. L'agrégation étant en pratique souvent préalable à la thèse, le nombre de futurs doctorants, donc de futurs chercheurs, s'en trouverait également diminué.

Conclusion

En tant que responsables élus des sociétés savantes et associations d'enseignants, représentatives de la communauté universitaire et enseignante dans toutes les disciplines du savoir, nous demandons à être partie prenante de véritables négociations. Compte tenu de notre légitimité scientifique, de notre expérience pédagogique et de notre représentativité dans le monde universitaire et enseignant, il est nécessaire que nous soyons des interlocuteurs à part entière, que nous soyons informés du calendrier, des étapes et des acteurs de la réforme, que nous participions en tant que spécialistes aux commissions qui auront à prendre les décisions.

Le respect de ces exigences sera la condition d'une réforme réussie de la formation des enseignants et de leur recrutement.

Réforme du lycée et enseignement scientifique

Daniel Duverney

Les grandes orientations de la réforme du lycée proposée par le ministère Chatel ont été dévoilées au public fin novembre 2009, pour une mise en œuvre progressive : septembre 2010 en seconde, septembre 2011 en première, septembre 2012 en terminale. Le but de cette note, complétée par quatre annexes, est de synthétiser les informations fournies et proposer une analyse des objectifs de la réforme. Les textes ministériels originaux sont disponibles sur Internet¹.

La réforme du lycée proposée par le ministère Chatel

Les annexes 1, 2 et 3 donnent les propositions d'organisation des classes de seconde, première et terminale du lycée d'enseignement général. Les grandes lignes de la « Réforme du lycée² » sont les suivantes :

- Elle porte uniquement sur le lycée d'enseignement général. Le lycée d'enseignement technologique et le lycée professionnel ne sont pas concernés. D'ailleurs, le lycée professionnel a déjà été réformé il y a deux ans. La durée des études y est notamment passée de 4 à 3 ans.
- Elle généralise au cycle terminal (première et terminale) les deux heures d'aide individualisée qui existaient déjà en seconde depuis la « Réforme des lycées ». Ces deux heures prennent le nom d'accompagnement personnalisé, et sont prises sur les horaires disciplinaires.
- Elle introduit un tronc commun de matières de culture générale pour tous les élèves du lycée d'enseignement général. Ce tronc commun représente plus de 60% de l'horaire disciplinaire. Il est aligné sur l'horaire actuel de la première ES.
- La classe de première S perd ainsi 3h30 hebdomadaires d'enseignement scientifique. Par contre, l'histoire-géographie y passe de 2h30 à 4h. Ainsi la classe de première S voit-elle son horaire de sciences chuter lourdement, tandis que son horaire de culture générale augmente. En fait, les heures d'accompagnement personnalisé sont prises, en première S, exclusivement sur les matières scientifiques.
- Il y a donc clairement une réorientation du lycée d'enseignement général vers les matières de culture générale et de communication jusqu'à la fin de la classe de première. Toutes proportions gardées, il s'agit d'une démarche analogue à celle de l'égalité scientifique du ministère Bérard de 1923. Comme elle, la réforme Chatel affaiblit notre enseignement scientifique secondaire, sans aucune justification.

¹ <http://www.education.gouv.fr/pid23519/la-reforme-lycee.html>

² Rappelons que le lycée a déjà été réformé deux fois récemment. D'abord de 1992 à 1994, a eu lieu la « Rénovation pédagogique des lycées ». Impulsée par Lionel Jospin en 1989, elle a été reprise par Jack Lang et finalement mise en place par François Bayrou, avec des modifications importantes par rapport au projet initial. Puis de 2000 à 2002, la « Réforme des lycées » a été lancée par Claude Allègre, et mise en place par Jack Lang.

Ainsi, les deux objectifs de la réforme du lycée actuelle, présents et visibles dès janvier 2008 dans le rapport de l'Inspection Générale sur la voie scientifique³, se trouvent-ils maintenus et confirmés :

- Réduire le coût du lycée d'enseignement général, notamment par la disparition de la grille horaire des options facultatives (il est vrai très nombreuses) et probablement d'une partie des dédoublements.
- Réaliser un tronc commun de matières de culture générale jusqu'en première inclusivement, au détriment de l'enseignement scientifique.

Avec un peu de recul, il semblerait que toutes les consultations (mission de Gaudemar, rapports Descoings et Apparu) aient eu pour fonction principale de diriger le débat public vers des problèmes tout à fait marginaux par rapport aux objectifs de la réforme, comme celui de l'orientation.

Le problème de l'orientation

Selon le Ministre, la nouvelle organisation (c'est-à-dire la réduction drastique des enseignements scientifiques en première S) faciliterait la réorientation des élèves en première. Les arguments utilisés sur le site du ministère sont les suivants :

- a) Afin de faciliter la réorientation entre les différentes séries au cours ou à la fin de l'année, les enseignements communs en classe de première sont portés à environ 60% de l'emploi du temps des élèves.
- b) Tous les lycéens de première suivent le même enseignement en français, en histoire-géographie, en langues vivantes (LV1 et LV2), en éducation civique, juridique et sociale (ECJS) et en éducation physique et sportive (EPS).
- c) Le lycéen qui change de série en cours ou en fin de première doit uniquement acquérir les connaissances des matières de spécialisation propres à la série qu'il rejoint.

Posons concrètement le problème : réorientation de quelle série vers quelle série ?

Imagine-t-on par exemple que, à la fin de la première, un élève qui a suivi la voie littéraire ou la voie économique puisse se réorienter vers la voie scientifique (en admettant qu'il en ait le désir) ? Comment diable fera-t-il pour combler les lacunes d'une année entière d'enseignement scientifique, même réduit à la portion congrue ?

La seule réorientation possible en fin de première irait des voies scientifiques et économiques vers la voie littéraire. L'annexe 4 montre que cette réorientation est possible pour les classes préparatoires, comme chacun sait. Il n'y a quasiment aucune réorientation possible à partir de la voie littéraire. Elle ne propose aucun enseignement d'économie ni de sciences.

D'ailleurs, il n'y a jamais eu au lycée de réorientation en fin de première, sauf de façon marginale. Les classes de première et terminale constituent bien un cycle, considéré comme tel par les élèves et leurs familles, qui leur permet de se spécialiser.

Le schéma proposé dans la réforme Chatel n'a aucune chance de modifier cet état de fait (ou alors, il faudra expliquer avec patience comment cela pourrait bien

³ Pour plus de détails et un accès aux sources, voir mon analyse dans la *Gazette des Mathématiciens* de janvier 2009, http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/2009/119/smf_gazette_119_51-56.pdf

fonctionner). Le problème de l'orientation apparaît donc comme un écran de fumée, destiné à camoufler les véritables objectifs de la réforme, rappelés plus haut.

Un recentrage du lycée sur les « humanités »

Toute réforme du lycée porte la marque de ses promoteurs ; en premier lieu, celle du Ministre qui la conçoit et commence à la mettre en place et à l'imposer, malgré les difficultés.

C'est ainsi que la « Rénovation pédagogique des lycées » (1992-1994) et la « Réforme des lycées » (2000-2002) portent la marque de Lionel Jospin et Claude Allègre. Elles sont caractérisées, sur le plan pédagogique, par une attention accrue (voire quasi-exclusive) portée aux méthodes « actives », liées au « recentrage » du système éducatif sur l'élève. Dans le domaine scientifique, cet accent mis sur les méthodes « actives » conduit à privilégier la démarche inductive, fondée sur un recours systématique à « l'expérience », opposée à la démarche déductive des mathématiques (et d'une part importante de la physique), présentée comme un obstacle au développement des études scientifiques. Il s'agissait, selon les termes de Claude Allègre⁴, de « remettre les mathématiques à leur juste place ».

Il est très vraisemblable, comme je l'ai montré par ailleurs⁵, que ces conceptions sont en partie responsables des difficultés de notre enseignement scientifique supérieur et de sa dégradation à partir de 1995. Mais, au moins, l'équipe de la « Rénovation pédagogique » était consciente de la nécessité d'un enseignement scientifique solide au lycée, assuré par le cycle terminal scientifique⁶.

Le projet actuel porte la marque de son promoteur, Xavier Darcos, même s'il n'est plus Ministre de l'Éducation Nationale. Xavier Darcos a exposé sa philosophie de l'éducation, et ses interrogations, dans « L'art d'apprendre à ignorer ». Il plaide clairement pour un recentrage de l'enseignement, à tous les niveaux, sur les « humanités », à partir de deux principes⁷ :

- Il faut récuser toute décomposition de l'enseignement « général » au profit des disciplines trop spécialisées.

- Il n'est possible de continuer à se former tout au long de la vie qu'à condition d'avoir acquis, très tôt, une bonne formation généraliste.

On reconnaît sans peine les disciplines « trop spécialisées » : ce sont les matières scientifiques et techniques. Plus loin, Xavier Darcos conclut : « Il nous faut donc reconstruire un nouvel humanisme scolaire, même si la formule paraît pompeuse et vague. Car la science sans la conscience, nous en connaissons le prix.⁸ »

L'organisation du lycée proposée reflète ces conceptions. Une véritable spécialisation des futurs scientifiques n'est autorisée qu'en terminale (sans augmentation des horaires scientifiques, comme le montre l'annexe 1). Les trois

⁴ « La défaite de Platon », Fayard 1995, page 452.

⁵ Actes du colloque « Quel avenir pour l'enseignement scientifique au lycée et dans l'enseignement supérieur ? », avril 2008, pages 21-35.

⁶ « Former des scientifiques est une nécessité évidente pour tout pays. C'est au niveau du lycée que l'on peut aborder pour la première fois les aspects conceptuels des sciences expérimentales et que se préfigurent des vocations scientifiques. » Quel lycée pour demain ? Propositions du CNP sur l'évolution du lycée, Le livre de poche, 1991, page 115.

⁷ « L'art d'apprendre à ignorer », Plon, 2000, page 109.

⁸ *Ibid.*, page 114.

séries de première disparaissent de fait. Elles font place à un tronc commun de « culture générale », renforcé pour ceux qui le désirent (les élèves de S – rien ne change pour les autres) par une « coloration » scientifique.

Il est très vraisemblable que cette « déspecialisation » de la classe de première générale n'est qu'un premier pas vers une déspecialisation de l'ensemble du cycle terminal. Il y a, en effet, deux façons de régler le problème de la « hiérarchie » (bien réelle) des séries :

- Revaloriser réellement la série littéraire, en laissant notamment une réelle possibilité aux élèves qui le désirent de suivre un enseignement moins spécialisé.
- Réaliser la fusion des trois séries autour d'un tronc commun « humaniste », c'est-à-dire supprimer, ou au moins affaiblir, la voie scientifique du lycée en tant que telle.

Il est tout à fait clair que l'option actuellement choisie par le ministère est la deuxième. Il s'agit d'une rupture franche par rapport aux préconisations du rapport de l'Inspection Générale sur la voie littéraire⁹. Elle marginalise les études scientifiques au lycée (en première pour l'instant) en les ramenant au rang d'options, avec un horaire réduit.

Dans le schéma actuel, les futurs scientifiques passeraient donc d'abord une première partie du bac centrée sur le français et l'histoire-géographie, avec un horaire lourd en première, avant d'être autorisés à préparer leur bac scientifique, conformément à leurs goûts et à leurs projets.

Répetons-le : toutes proportions gardées, le principe de la réforme est le même que celui de l'égalité scientifique de 1923¹⁰, qui a provoqué en son temps une baisse sensible du niveau de formation scientifique secondaire et des difficultés accrues au niveau de la formation scientifique supérieure.

Un projet inacceptable

Il est tout à fait évident que l'enseignement scientifique est difficile, qu'il demande de maîtriser de nombreux prérequis qui doivent être construits pas à pas. Nous avons besoin de nombreux scientifiques, de tous les niveaux, pour remplir avec compétence les tâches qui leur sont dévolues dans notre société. Nous sommes au 21^e siècle, et il suffit de regarder autour de soi pour comprendre la place que les sciences et techniques tiennent dans notre vie quotidienne : communication, déplacements, informatique, médecine, accès à la culture...

Retarder d'un an la spécialisation des futurs scientifiques est donc une aberration, alors que la masse de connaissances et compétences à maîtriser s'accroît sans cesse. L'idée d'introduire un accompagnement personnalisé pour tous les élèves du lycée n'est pas, en soi, à rejeter. Cependant, pour les élèves ayant choisi les sciences en première, l'horaire d'accompagnement spécialisé ne devrait pas être pris sur les matières scientifiques. Il n'est pas question de méconnaître la nécessité, pour les futurs scientifiques, d'une formation de « culture générale » jusqu'au baccalauréat.

⁹ *Évaluation des mesures prises pour revaloriser la série littéraire au lycée* rapport conjoint IGEN-IGAENR, juillet 2006.

¹⁰ Nicole Hulin, *Les méfaits de l'égalité scientifique*, Bulletin de l'UPS, n° 205, janvier 2004, pp. 10-17 : <http://home.nordnet.fr/~dduverney/monsie/niveau3/NHulin2.pdf>. Voir aussi Éric Barbazo : *L'A.P.M.E.P. et l'égalité scientifique dans les programmes de 1925* : <http://www.apmep.asso.fr/spip.php?article1985>

Mais l'apprentissage scientifique des futurs scientifiques, dans le cycle terminal, doit rester la priorité. Il est anormal (et certainement unique en Europe) de proposer la démarche inverse.

Il est clair que l'ensemble de la communauté scientifique doit réagir fermement, d'autant que le problème semble superbement ignoré par les médias et le monde politique.

Annexe 1 : grille horaire de la classe terminale

Enseignements obligatoires	Horaire élève actuel (BO n°29, juillet 2000)			Horaire élève prévu par la réforme Chatel		
	S	ES	L	S	ES	L
Philosophie	3h	4h	7h	3h	4h	8h
Histoire-géographie	2h30	4h	4h		4h	4h
Langues vivantes 1 et 2	4h	4h	5h	4h	4h	4h
Éducation Physique et Sportive	2h	2h	2h	2h	2h	2h
Éducation civique, juridique et sociale	0h30	0h30	0h30	0h30	0h30	0h30
Mathématiques	5,5h	4h		6h	4h	
Physique-chimie	5h			5h		
Sciences de la vie et de la Terre	3h30 ²			3h30 ²		
Sciences économiques et sociales		6h			5h	
Littérature française			4h			2h
Littérature étrangère en langue étrangère						1h30
Une « spécialité » obligatoire au choix	2h ³	2h ⁴	2-5h ⁵	2h ⁶	1h30 ⁷	3-5h ⁸
Accompagnement personnalisé				2h	2h	2h
Horaire total élève	28h30	28h30	26h30	28h	27h	27
Option facultative	3h	3h	3h	2h ¹		

¹ Histoire-géographie optionnelle en terminale S.

² Remplacé dans la voie S « Sciences de l'ingénieur » par 8 h de SI.

³ Mathématiques, Physique-Chimie, SVT. En terminale S « SI », il s'agit d'une option facultative : Mathématiques ou Physique-Chimie seulement.

⁴ Mathématiques, SES, LV1.

⁵ Latin (3h), Grec (3h), LV1 (2h), LV2 (3h), Arts (5h), Mathématiques (3h).

⁶ Mathématiques, Physique-Chimie, SVT, Informatique.

⁷ Maths appliquées, SES ou Économie approfondie.

⁸ Arts (5h), arts du cirque (8h), maths appliquées (4h), LV3 (3h), approfondissements LV1 ou LV2 (3h), langues de l'antiquité (3h), droit et grands enjeux du monde contemporain (3h).

Annexe 2 : grille horaire de la classe de première

Enseignements obligatoires	Horaire élève actuel (BO n°29, juillet 2000)			Horaire élève prévu par la réforme Chatel		
	S	ES	L	S	ES	L
Enseignements communs						
Français	4h	4h	6h	4h	4h	4h
Histoire-géographie	2h30	4h	4h	4h	4h	4h
Langues vivantes 1 et 2	4h	4h30	5h30	4h30	4h30	4h30
Éducation Physique et Sportive	2h	2h	2h	2h	2h	2h
Éducation civique, juridique et sociale	0h30	0h30	0h30	0h30	0h30	0h30
<i>Total enseignements communs</i>	13h	15h	18h	15h	15h	15h
Enseignements de spécialisation	S	ES	L	S	ES	L
Mathématiques	5h	3h	2h	4h	3h	
Physique-chimie	4,5h	1h30	1h30	3h	1h30	1h30
Sciences de la vie et de la Terre	4h ¹			3h ²		
Sciences économiques et sociales		5h			5h	
Littérature française						2h
Littérature étrangère en langue étrangère						2h
Un enseignement obligatoire au choix		2h ³	3h ⁴			3h ⁵
<i>Total enseignements de spécialisation</i>	13,5 ⁶	9h30	6h30	10 h ⁷	9h30	8h30
Accompagnement personnalisé				2h	2h	2h
Travaux personnels encadrés	2h	2h	2h	1h	1h	1h
Horaire total élève	28h30	28h30	26h30	28h	27h30	26h30
Option facultative	3h	3h	3h			

¹ Remplacé dans la voie S « Sciences de l'ingénieur » par 8 h de SI.

² Remplacé dans la voie S « Sciences de l'ingénieur » par 7 h de SI.

³ Mathématiques, Sciences Économiques et Sociales, LV 1 ou LV 2.

⁴ Latin, Grec, LV 2, LV 3, LV 1 (2h), Arts (5h).

⁵ Maths appliquées, LV3, approfondissement LV1 ou LV2, langues de l'antiquité, mais également arts (5h) ou arts du cirque (8h).

⁶ En S « SVT ». Sinon, 17,5 h en S « SI ».

⁷ En S « SVT ». Sinon, 14 h en S « SI ».

Annexe 3 : grille horaire de la classe de seconde

Enseignements obligatoires	Horaire élève actuel (BO n°29, juillet 2000)	Horaire élève prévu par la réforme Chatel
Français	4h30	4h
Histoire-géographie	3h30	3h
Langues vivantes 1 et 2	5h30	5h30
Mathématiques	4h	4h
Physique-chimie	3h30	3h
Sciences de la vie et de la Terre	2h	1h30
Éducation Physique et Sportive	2h	2h
Éducation civique, juridique et sociale	0h30	0h30
Enseignements d'exploration	2h30 ou 3h	2 x 1h30
Aide individualisée	2h	
Accompagnement personnalisé		2h
Total	30h à 30h30	28h30
Option facultative	2h30 à 3h00	

Annexe 4 : répartition des étudiants de classes préparatoires suivant le type de baccalauréat

	Bac S	Bac ES	Bac L	Bac Techno
Classes Prépas Scientifiques	95,7%	0,0%	0,0%	4,3%
Classes Prépas Économiques	47,6%	44,0%	0,7%	7,7%
Classes Prépas Littéraires	23,3%	22,4%	54,3%	0,0%

Source : Note d'Information n° 06-23, août 2006, MEN.

Communiqué joint sur la réforme du lycée

SMF, APMEP¹

Un document présentant les modalités d'organisation des trois niveaux Seconde-Première-Terminale ainsi que les grilles des horaires prévus dans ces classes, est en ligne sur le site du Ministère depuis le jeudi 19 novembre. Il est à noter que seules les voies générales sont présentées à ce jour. Les grilles horaires présentées ne permettent pas d'envisager un rééquilibrage entre les différentes séries et laissent présager une diminution importante et non justifiée des enseignements scientifiques dans leur ensemble. L'APMEP et la SMF présentent ici une analyse des propositions ministérielles et rappellent, comme principe de base, que tout élève du lycée doit avoir accès à un enseignement scientifique, de culture pour les uns, de fond pour les autres. Nous vivons aujourd'hui dans une société où la science et la haute technologie sont de plus en plus présentes dans le quotidien, et un minimum de connaissances scientifiques, dont des mathématiques, est absolument indispensable à tous les futurs citoyens. Une constatation immédiate et alarmante : la globalisation probable de toutes les heures dédoublées et une redistribution de ces heures aux équipes pédagogiques, qui serait alors soumise aux décisions locales et sans cadrage national. Les conditions d'enseignement seraient rendues beaucoup plus difficiles, pour les élèves et leurs professeurs, entraînant des enseignements à plusieurs vitesses selon la nature sociologique des établissements scolaires. Détaillons pour chaque classe l'analyse des propositions.

Pour la nouvelle classe de Seconde

– Sans aucune justification, l'horaire global de sciences pour tous est diminué, notamment l'horaire en physique-chimie et SVT. Les mathématiques, quant à elles, perdent l'heure d'aide individualisée. À l'aube du 21^e siècle, une telle orientation, qui semble restreindre l'enseignement scientifique en seconde, paraît tout à fait déraisonnable.

– La prévisible disparition de tous les dédoublements est inquiétante : il est inconcevable de former les élèves aux nouvelles technologies avec des groupes de classes non dédoublées. L'accent est pourtant mis dans les programmes sur l'utilisation et la maîtrise des logiciels ainsi que sur la découverte de l'algorithmique.

– Nous notons avec satisfaction l'introduction d'un enseignement d'exploration intitulé "Méthodes et pratiques scientifiques". Toutefois, il devra être proposé et mis en place dans tous les lycées de France, pour permettre aux élèves intéressés par les sciences, marginalisées dans le tronc commun, de s'investir davantage dans leurs matières de prédilection.

– L'accompagnement personnalisé remplace l'aide individualisée. Si l'on peut se réjouir que cet accompagnement soit proposé à tous les élèves, il est indispensable d'en délimiter les contenus et les exigences. Notamment, permettra-t-il aux élèves intéressés de travailler davantage en mathématiques ou en sciences, dans le cadre

¹ Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

d'une autonomie accrue des établissements ? Toutes les disciplines vont devoir proposer un projet pour ces deux heures d'accompagnement en concurrence les unes des autres, ce qui ne sera pas forcément profitable pour les élèves. Le problème des effectifs de ces heures d'accompagnement se pose également : si chaque élève choisit ce qu'il veut faire, la gestion a priori des groupes et des horaires des enseignants sera difficile.

Pour le cycle terminal

- La réforme devait renforcer le pôle scientifique en série S, ce que contredit la réduction de 10h30 à 10h des mathématiques en cycle terminal de la série S.
- L'expression mathématiques appliquées, utilisée pour les voies L et ES, n'a pas été définie et n'a fait l'objet d'aucune concertation préalable. Son contenu doit être très rapidement précisé. Les professeurs de mathématiques, attachés à considérer leur discipline comme un tout, s'étonnent que cette distinction qui n'existe pas dans les premières années universitaires fasse ainsi son apparition au lycée.
- Ici encore il est impensable de faire travailler les élèves individuellement sur l'outil informatique en classe entière.

La classe de Première

- Un horaire de 4 heures de mathématiques en classe entière, sans dédoublement, est une erreur fondamentale pour la série S qui voit la part de l'enseignement scientifique en net recul. Que peut-on raisonnablement espérer enseigner dans cet horaire ? De plus, les sauts pédagogique et conceptuel que cet horaire va induire, de 4 heures en Première à plus de 6 heures en Terminale, va renforcer les difficultés de beaucoup d'élèves de cette série et, à terme, va accentuer la désaffection pour les études supérieures scientifiques déjà constatée. Répétons-le : à l'aube du 21^e siècle, diminuer la part de l'enseignement scientifique en première S paraît une orientation tout à fait déraisonnable. L'horaire de 5 heures de mathématiques doit y être maintenu.
- L'enseignement de spécialité en Première ES disparaît alors que les horaires et les programmes en étaient équilibrés.
- Un enseignement de mathématiques générales n'est pas proposé à tous les élèves de la série L. Accepter un arrêt complet de la formation scientifique et mathématique en seconde pour des élèves qui se destineront, par exemple, au concours de professeurs des écoles, est une erreur, déjà signalée dans plusieurs rapports de l'Inspection Générale.
- L'enseignement de spécialité proposé en L ne sera pas choisi puisqu'il est mis en parallèle avec des enseignements importants pour les élèves littéraires, comme les langues de l'antiquité ou la LV3. Il serait plus pertinent de prévoir deux enseignements au choix, de 2h chacun par exemple, afin de permettre aux élèves littéraires de construire leur formation avec un bon niveau littéraire sans pour autant sacrifier une formation mathématique dont ils pourront avoir besoin dans leurs études supérieures. Cela permettrait également d'équilibrer l'horaire total de la série L avec celui des autres séries : un horaire global inférieur dévalorise la section littéraire aux yeux des élèves et de leurs parents.

La classe de Terminale

- La plupart des inquiétudes formulées pour les classes précédentes se retrouvent à ce niveau.
- La série S propose un enseignement de spécialité intitulé informatique et sciences du numérique, ce qui introduit une nouvelle discipline dans l'enseignement scientifique du lycée. Les contenus et les objectifs de cet enseignement de spécialité, ainsi que ses relations avec les spécialités actuelles de terminale S, restent flous. Ils devront être précisés le plus tôt possible, notamment par rapport à la spécialité mathématique, afin d'éviter des effets de concurrence.

Enseignement de l'informatique au lycée

Rencontre SMF-EPI-SPECIF 20-11-2009

Michel Granger

Étant donné l'intérêt que porte la SMF aux questions d'enseignement dans les lycées, elle ne peut rester en dehors des débats suscités, à chaque réforme, par la place de l'informatique. S'il est incontournable que l'informatique prenne une place croissante dans l'enseignement secondaire, il reste beaucoup de questions ouvertes, dont certaines touchent de près aux mathématiques. L'idée s'est donc naturellement imposée d'une rencontre avec des informaticiens qui aient réfléchi à ces questions, afin de mieux comprendre leurs analyses et leurs propositions et d'alimenter la réflexion de la SMF. C'est ainsi qu'une réunion s'est tenue sur ce sujet le 20 novembre dernier. Il s'agissait d'un premier échange de vue, qui s'inscrivait dans notre volonté que la réflexion de la SMF s'appuie sur un partenariat avec les informaticiens. L'annonce, postérieure à la programmation de cette réunion de la création d'une option informatique en classe de terminale S, lui a donné un relief particulier. Les participants à cette réunion étaient Aline Bonami, Daniel Duverney et Michel Granger pour la SMF, et Jean-Pierre Archambault (EPI), Gilles Dowek (groupe ITIC de l'ASTI) et Laure Petrucci (SPECIF). Ce texte reprend le contenu d'un compte rendu qui a été relu par tous les participants.

Voici d'abord une brève présentation des associations dont font partie nos interlocuteurs informaticiens. L'EPI (Enseignement public et informatique) est une association qui développe, depuis des années, un argumentaire et des initiatives en faveur de l'introduction de l'informatique en tant que discipline spécifique au lycée¹. SPECIF est une association d'enseignants et chercheurs en informatique. L'ASTI (association Française des sciences et techniques de l'information) est une société savante en sciences et techniques de l'information et son groupe ITIC réfléchit aux questions d'enseignement. Ces structures ont été entendues au ministère de l'Éducation Nationale à plusieurs occasions et ont aussi exposé leur point de vue à l'APMEP.

¹ <http://www.epi.asso.fr>

Les informaticiens présents ont développé les points suivants, concernant leur discipline et son enseignement :

- (1) l'informatique constitue une discipline scientifique à part entière ;
- (2) les réformes en cours vont inéluctablement dans le sens d'une introduction de l'informatique comme une discipline autonome ;
- (3) les mathématiciens ont parfois tendance à réduire l'informatique à la science des algorithmes, et à considérer qu'ils peuvent l'enseigner. Le point de vue des informaticiens est différent ;
- (4) l'informatique repose sur les quatre concepts d'algorithme, de langage, d'information et enfin de machine.

Ces quatre aspects interagissent. Si le premier est proche des mathématiques, le dernier l'est davantage de la physique. Ils sont en fait inséparables dans l'enseignement. On devrait pouvoir les enseigner dès le lycée avec un degré de sophistication adapté au public. Il faut préciser qu'il n'est pas question d'un enseignement à visée professionnelle : il s'agit, comme dans les autres disciplines scientifiques, d'une formation en amont de l'orientation définitive des élèves, d'un apprentissage progressif avec trois stades dans la formation, qui correspondent grosso modo à l'articulation primaire-collège/lycée/post bac :

- Phase 1 : usage courant des outils informatiques, traitements de texte et tableurs, moteur de recherche, navigateur web. À ce stade on a observé que les enfants qui « bidouillent » de l'informatique ont souvent une représentation très rudimentaire de leur pratique avec très peu de verbalisation. Il est donc très important de structurer cet enseignement avec une initiation aux concepts, de développer l'aptitude à expliquer ce qui est fait.

- Phase 2 : apprendre à écrire des programmes simples, se familiariser avec les concepts d'affectation, de séquence, de test, de boucle, ... Des notions sur des algorithmes élémentaires, sur les réseaux, sur l'architecture des ordinateurs, sur le chiffrement et la compression de l'information commencent à être introduites.

- Phase 3 : formation à l'informatique scientifique : théorie des automates, des langages de programmation, des bases de données, notion de complexité, etc.

Les participants à la réunion se sont accordés sur l'intérêt d'un dialogue entre nos deux disciplines, qui ont beaucoup en commun. On observe que la réforme en cours des lycées voit l'introduction de nouvelles matières que sont le droit, l'histoire de l'art. Il y a une diminution globale de l'enseignement des sciences particulièrement marquée en première S (-3h30 hebdomadaires). On est confronté à un mode de pensée dominant qui oppose en valorisant le second volet :

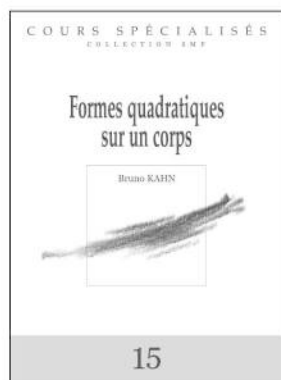
- les matières faisant appel à la logique et la rigueur scientifique,
- et celles qui insistent sur la maîtrise du langage, les facultés de rédaction et d'expression.

Dans ce contexte il est important que les scientifiques dans leur ensemble coopèrent pour éviter la marginalisation de l'esprit scientifique au lycée. Une lutte entre les différentes disciplines scientifiques ne peut qu'être préjudiciable à la place des sciences dans leur ensemble au lycée. Au contraire, une terminale scientifique avec deux dominantes, mathématiques ou informatique d'une part, sciences expérimentales de l'autre, peut participer à un rééquilibrage de celle-ci dans lequel l'image des concepts mathématiques se trouve renforcée.

Nos interlocuteurs informaticiens insistent sur le fait que dans les enseignements post-bac les étudiants ont des « trous » dans leur formation en informatique, formation qui dépend actuellement beaucoup de l'intérêt que leurs professeurs de mathématiques lui ont porté. Ceci touche davantage les étudiants non informaticiens que les futurs informaticiens, pour lesquels on prend le temps de reprendre les bases. Comme pour les mathématiques c'est en effet un enjeu de fournir une formation solide en informatique aux utilisateurs non spécialistes de la discipline. L'EPI demande la constitution d'un corps spécifique d'enseignants en informatique. Leur formation (et les concours CAPES agrégation) devra comprendre une solide formation en d'autres disciplines, mathématiques, mais aussi physique et électronique, voire biologie. Pour la constitution de ce corps enseignant, il y a deux options : le constituer petit à petit ou directement, avec un saut qualitatif de nature assez volontariste. Dans l'optique d'une introduction d'abord en terminale d'ici trois ans les informaticiens pencheraient pour la deuxième solution. Selon eux beaucoup de collègues de départements d'informatique seront prêts à jouer le jeu.

Les informaticiens se réjouissent de l'introduction de l'enseignement de spécialité optionnel « informatique et sciences du numérique » en classe de terminale S, même s'il s'agit d'un schéma un peu distinct de celui de l'introduction dès la seconde d'une discipline à part entière. Ils se disent prêts à participer à l'élaboration des programmes.

En conclusion, cette réunion a donné lieu à un échange très intéressant et a montré l'importance d'une concertation entre mathématiciens et informaticiens. Bien entendu la réflexion de la SMF sur les sujets abordés dans cette réunion, qui avait un caractère exploratoire, ne fait que commencer. La SMF souhaite y contribuer en partenariat avec toutes les associations intéressées. Les mathématiciens seront amenés à se positionner sur ces questions qui engagent l'avenir de tout l'enseignement des sciences.



Cours Spécialisés 15

**Formes quadratiques
sur un corps**

Bruno Kahn

Ce livre expose la théorie des formes quadratiques sur un corps, en mettant l'accent sur la technique de Pfister-Arason-Knebusch d'extension des scalaires aux corps de fonctions de quadriques.

This book presents the theory of quadratic forms over a field, focusing on the Pfister-Arason-Knebusch technique of extensions to function fields of quadrics.

prix public* : 55 € - prix membre* : 38 €

* frais de port non compris



Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

<http://smf.emath.fr>

INFORMATIONS

Nouvelles du CNRS, section 01

Virginie Bonnaillie-Noël, Yann Brenier

La section 01 du comité national du CNRS entame la deuxième année de son mandat de quatre ans. Comme chacun sait, la première année a été particulièrement agitée et riche en rebondissements (création de l'institut de mathématiques, apparition des chaires CNRS/universités avec plusieurs avatars, futur et réforme du CNRS, mouvement universitaire, etc). Néanmoins, le travail de section a pu s'effectuer dans de bonnes conditions, notamment grâce à la solide infrastructure, nationale, du CNRS. Les informations récentes sont disponibles sur le site du comité national à l'adresse suivante : <http://cn.math.cnrs.fr>

Organisation de l'INSMI

Guy Métivier a été nommé directeur scientifique de l'INSMI (Institut des sciences mathématiques et de leurs interactions). Il a pris ses fonctions le 15 mai dernier. Ce nouvel institut fonctionne avec plus de moyens humains. Outre le directeur scientifique, il y a également deux directeurs scientifiques adjoints, Patrick Dehornoy pour le suivi des laboratoires et Pascal Chossat pour les relations internationales, ainsi que 4 chargés de mission : Marc Massot pour le calcul, Valérie Berthé pour l'interface informatique, Frédéric Coquel pour les relations avec l'industrie et Élise Janvresse pour la communication scientifique.

Session Printemps 2009

Intervention de Jean-Marc Gambaudo et Guy Métivier

Selon Jean-Marc Gambaudo et Guy Métivier, la création d'un institut de mathématiques peut présenter plusieurs avantages :

- pour la première fois, notre politique nationale est écrite et actée par la direction ;
- jusqu'à présent, le budget des mathématiques a été de 3.5 millions d'euros ; avec la création de l'INSMI, il devrait augmenter substantiellement ;
- les mathématiques ont désormais accès au comité de direction du CNRS tous les mercredis matins ; il est reconnu que les instituts peuvent avoir des politiques différentes et l'idée d'animation de réseau national des mathématiques est désormais acceptée par la direction.

Guy Métivier rappelle que la mobilité a permis un essaimage et que c'est un principe auquel il faut déroger le moins possible.

L'interdisciplinarité prend une part de plus en plus importante dans les moyens attribués. À noter en particulier que, dorénavant, une partie des délégations est réservée à des candidats souhaitant travailler dans un laboratoire relevant d'une autre section que la section 01.

Intervention des élus C de la section 01, approuvée par l'ensemble de la section

Nous attirons l'attention de la direction de l'INSMI et du CNRS sur les conséquences graves, en terme d'organisation du travail dans les laboratoires, du mandat de gestion unique donné aux universités pour la majorité des unités de mathématiques. Les personnels des BAP I¹, dès maintenant, E² et F³ dans l'avenir proche, se trouvent en porte-à-faux entre deux modes de travail, aux techniques et aux cultures en forte divergence. Leurs spécificités et leur engagement doivent être explicitement reconnus et pris en compte dans l'évolution de leur carrière.

L'alternative est de voir les laboratoires saignés à blanc de leurs personnels ITA, ceux-ci préférant déjà changer de discipline, afin de conserver de bonnes conditions d'évaluation de leur carrière, et d'éviter de perdre le lien avec le CNRS.

Bibliothèques

La section partage la vive inquiétude des bibliothécaires et des mathématiciens en charge des bibliothèques de mathématiques, sur l'avenir du financement de leurs ressources documentaires et de la présence dans les bibliothèques d'un personnel de haut niveau.

Rappelons que l'accès aux ressources documentaires, qu'il s'agisse des revues électroniques ou de collections de livres, joue en mathématiques un rôle vital dans l'élaboration d'une recherche de qualité. En outre, la mutualisation de ressources documentaires mathématiques au niveau national au cours des dernières années a joué un rôle important dans le fonctionnement « en réseau » de la communauté mathématique française – notamment en permettant aux chercheurs en dehors des « grands centres » d'avoir accès à une documentation de qualité.

L'importance des ressources documentaires et du rôle des bibliothèques en mathématiques n'est pas toujours facile à faire comprendre en dehors de la communauté mathématique. Nous espérons vivement que l'INSMI pilote une politique d'accès aux ressources électroniques en mathématiques mutualisée au niveau national, indispensable à la vie scientifique de beaucoup d'unités. Il nous paraît aussi essentiel que l'INSMI s'attache à préserver le bon fonctionnement des bibliothèques mathématiques en y affectant des personnels de rang A.

¹ Branche d'Activité Professionnelle. B.A.P. I : gestion scientifique et technique des établissements publics à caractère scientifique, culturel et professionnel (GST-EPSCP)

² BAP E : informatique, statistique et calcul scientifique (ICS).

³ BAP F : information, documentation, culture, communication, édition, TICE (IDCCET).

Direction des unités de recherche

À l'occasion de divers changements de directeurs d'unités, qu'elle a approuvés, la section 01 estime que les directeurs d'unités doivent se choisir parmi les chercheurs et enseignants-chercheurs dont la carrière est suffisamment avancée. En effet, cette charge est devenue et va devenir de plus en plus lourde : il est important que les directeurs d'unités aient assez d'expérience pour pouvoir mener de front cette tâche ardue et complexe et le développement harmonieux d'une activité de recherche.

Unités et chercheurs

La section a émis un avis très favorable au soutien par le CNRS des unités examinées lors de la session de printemps, suite à leur évaluation par l'AERES. Rappelons que la section est impliquée dans les évaluations de l'AERES par la présence statutaire de l'un de ses membres A ou B. Hélas la présence de représentants C n'est pas prévue par le dispositif actuel, ce que déplore le comité national.

Par ailleurs, la section a également évalué les chercheurs des unités en renouvellement et ceux des unités à mi-parcours. La section rappelle que les chercheurs sont tenus de fournir, à la date prévue et sans aucun délai, un rapport tous les deux ans en plus du compte-rendu annuel, ceci suivant les modalités rappelées en temps utiles par le CNRS. L'envoi d'un rapport à temps est une obligation statutaire. En l'absence de rapport, la section émet un avis différé et réservé en cas d'absences répétées.

Session d'automne 2009

Membres de la section 01

Parmi les membres élus, Frédéric Patras a été nommé chargé de mission à l'INSHS et a été remplacé par Frank Loray, DR2 à l'IRMAR.

Intervention de Guy Métivier

Le CNRS a signé son contrat d'objectifs avec le ministère début octobre. Le décret organique a été signé début novembre et redéfinit les missions du CNRS de manière précise : le CNRS est organisé en instituts. Les directeurs des instituts sont nommés par le président du CNRS. Le président est aussi directeur général. C. Bréchnignac et A. Migus termineront leur mandat mi-janvier. Il y aura ensuite un changement de direction. Le secrétaire général est également prolongé dans ses fonctions jusqu'à la fin de son mandat. La situation semble plus stable que l'an dernier.

La mission d'évaluation des laboratoires a été supprimée du décret. Cette mission est désormais confiée exclusivement et légalement à l'AERES. Le CNRS demande au comité national d'émettre un avis de pertinence et d'adéquation du laboratoire avec la politique de l'INSMI. Un certain nombre de textes sont en cours de rédaction sur la politique de l'INSMI : politique de réseau (interaction entre les laboratoires, essaimage, recrutement externe, activités internationales des laboratoires). Plusieurs points seront étudiés de près lors des évaluations d'unité :

- adéquation du bilan avec le projet présenté précédemment,
- prise en compte des recommandations des précédentes évaluations,
- rayonnement international,

- insertion de l'unité dans le réseau national (participation à des GDR,...),
- qualité des interactions pluridisciplinaires et avec les entreprises,
- fonctionnement des services communs dans l'unité.

G. Métivier a demandé à ce qu'il y ait un représentant ITA dans les comités de visites des gros laboratoires afin d'observer la gestion des services et l'intégration des ingénieurs de recherche dans les équipes. L'avis de pertinence du soutien du CNRS aux unités n'est pas transmis au directeur d'unité. L'AERES transmet le rapport d'évaluation.

Intervention de Christian Le Merdy

À l'AERES, il y a 3 délégués scientifiques en mathématiques : C. Le Merdy, C. Graffigne, G. Levitt qui sont chargés de l'évaluation des laboratoires, des formations et des fédérations. Le rapport d'évaluation de l'AERES comporte des données quantitatives sur les effectifs et producteurs sans préciser de nom. Chaque laboratoire sera évalué par une note (A+, A, B et C) pour chacun des points suivants :

- qualité scientifique et production,
- rayonnement et attractivité,
- stratégie, gouvernance et vie du laboratoire,
- appréciation du projet,
- note finale.

Ces notes sont attribuées lors d'une réunion regroupant tous les présidents des comités de visite de la vague courante. Dans les rapports apparaîtront cette année le nombre de producteurs et le taux de producteurs. Ce dernier indicateur n'est pas fiable car il dépend du contour du laboratoire et peut amener à un comportement de sélectivité (certains directeurs de laboratoire préféreront retirer certains membres du laboratoire afin d'améliorer ce taux).

Pour les unités de grande taille, une personne ITA fera partie du comité de visite afin d'évaluer la gestion globale, la bibliothèque ou le fonctionnement informatique du laboratoire.

Motions

Motion 1 : La section 01 a fait sienne la motion de la CPCN :

« La CPCN est hostile à la logique des primes d'excellence scientifique. Elle en dénonce les effets pervers : promotion d'une minorité d'individus au détriment des équipes, montant disproportionné par rapport aux salaires et pour une durée parfois indéterminée. Elle dénonce non moins vigoureusement les modalités d'attribution qui en sont proposées dans l'urgence : arbitraire des critères, suivisme de prix déjà attribués et pourvus, délégitimant l'organisme et ne tenant aucun compte des disparités disciplinaires. À défaut d'une réelle revalorisation de la carrière des chercheurs, la CPCN propose d'attribuer cette prime à tous les nouveaux entrants à l'occasion de leur titularisation, pour saluer l'excellence des recrutements au CNRS et palier le niveau scandaleux des salaires d'embauche. »

La section 01 estime qu'en associant l'attribution des médailles à la prime d'excellence scientifique (PES), le CNRS détourne l'esprit de cette distinction en y ajoutant une rémunération individualisée.

Dans le contexte actuel, confus et manquant clairement d'une concertation préalable, la section 01 décide d'ajourner la proposition de noms pour ces médailles.

Destinataires : Mme Catherine Bréchnac, M. Arnold Migus, Mme Nicole Le Gal.

Motion 2 :

La section 01 rappelle deux principes fondamentaux de l'action du CNRS, à savoir le caractère national du recrutement et la priorité donnée à l'élaboration d'une politique scientifique nationale, décidée par des instances nationales. Elle regrette que le manque de transparence dans la mise en place des chaires bafoue ces deux principes.

La section décide que la participation aux comités de sélection pour les chaires ne se fera qu'à titre individuel sans mandat de la section.

Destinataire : M. Guy Métivier.

Chercheurs

Tous les chercheurs recrutés en 2008 ont été titularisés. Hormis un chargé de recherche mis en disponibilité, tous les chargés de recherche deuxième classe ayant demandé leur promotion ont été promus.

Voici les résultats relatifs aux promotions des directeurs de recherche :

Promotion DR1 : 1. GABORIAU Damien, 2. BENOIST Yves, 3. BALADI Viviane, 4. RAUGEL Geneviève 5. DELON Françoise, 6. HAMDACHE Kamel, 7. MICHEL Jean.

Promotion DRCE1 : 1. COLLIOT-THELENE Jean-Louis, 2. DEGOND Pierre, 3. VOISIN-CORON Claire.

Promotion DRCE2 : 1. LODAY Jean-Louis, 2. TALAGRAND Michel.

Concours CNRS

Chaires CNRS / enseignement supérieur

En 2009, 4 chaires CNRS / enseignement supérieur rattachées à l'INSMI étaient à pourvoir. Celles de Nantes et Paris 13 ont été prises respectivement par Nicolas Pétrélis et Antoine Touzé (ce dernier ayant été classé au concours CR2). Les chaires proposées à Bordeaux et à Rennes n'ont pas été pourvues car les candidats classés ont apparemment tous préféré d'autres postes (un poste CR CNRS, un poste à l'école polytechnique et un poste de maître de conférences à Marseille). La section se réjouit que le ministère ait finalement renoncé à créer les chaires au détriment de postes CR2, comme cela avait été prévu au départ, ce qui a permis le recrutement de quatre CR2 supplémentaires (voir plus loin). Néanmoins, elle n'est toujours pas satisfaite du double fléchage thématique et géographique des chaires, ainsi que du mode de sélection des candidats.

Concours chercheurs CNRS

Il y a eu 4 postes supplémentaires de chargés de recherche en 2009. Des candidats des listes complémentaires ont donc été appelés. Simone Diverio, Sylvain Ervedoza et Alexandre Gaudillière sont ainsi admis sur le concours 01/04 et François Gay-Balmaz sur le concours 01/07 (avec affectation dans un laboratoire de mécanique). À noter aussi une recrue CR2 supplémentaire pour la physique (section 02), avec affectation dans un laboratoire de mathématiques : Fabien Vignes-Tourneret. Dans les deux derniers cas, l'interdisciplinarité a joué un rôle crucial dans la récupération des postes (sinon, il n'y aurait sans doute eu que trois recrues supplémentaires).

Informations pour le concours 2010

Il y aurait une augmentation extrêmement forte dans la promotion des carrières pour 2010. En 2009, il y a eu 132 promotions DR1, 27 DRCE1, 12 DRCE2. Pour 2010, il devrait y avoir 210 promotions DR1, 70 DRCE1 et 15 DRCE2.

Au niveau de l'INSMI, il pourrait y avoir au concours un poste de DR1, 9 DR2, 2 CR1, 3 postes CR2 d'échange avec les sections 2 (physique théorique), 7 (informatique) et 10 (mécanique), 1 poste en CID 45, 12 postes CR2 dont au moins 4 avec coloriage.

En 2010, il devrait y avoir 5 chaires CNRS / enseignement supérieur. Les négociations sont en cours avec les universités.

Note d'information du comité d'experts d'attribution de la PES, (section 25-26)

Le comité d'experts national d'attribution de la PES (Prime d'excellence Scientifique) pour les 25^e et 26^e sections du CNU¹ s'est réuni les 8 et 9 octobre 2009 au ministère de la recherche. Ses membres ont estimé indispensable d'informer la communauté mathématique de la méthodologie utilisée lors de cette expertise, tout en préservant comme il se doit la confidentialité des débats. Le texte qui suit poursuit le double but de faire savoir aux candidats quels ont été les critères à l'aune desquels leurs dossiers ont été évalués, et de fournir aux représentants des mathématiques au sein des conseils des établissements, compétents en ce qui concerne l'attribution de la PES, des éléments utiles à la défense des dossiers dont ils seront chargés.

Rappelons d'abord qu'à compter de cette année, la PES remplace l'ancienne PEDR, et que son attribution fait l'objet d'une nouvelle procédure. Les établissements qui ne sont pas encore passés à l'autonomie (RCE et compétences élargies) doivent faire examiner les dossiers des candidats par l'instance nationale. Celle-ci leur transmet, par l'intermédiaire du ministère de la recherche, un avis pour chaque dossier, constitué d'une note globale (A, B ou C), et de quatre notes par critère (Production scientifique, Encadrement doctoral et scientifique, Rayonnement scientifique, Responsabilités scientifiques). Les établissements déjà autonomes peuvent se dispenser de la phase nationale, ou demander au comité d'experts d'examiner les dossiers des candidats issus de leur sein. Quatre universités autonomes n'ont pas souhaité faire appel au comité d'experts national (Aix-Marseille II, Clermont-Ferrand I, Paris VI et Toulouse I).

Le cadrage du ministère demande à chaque comité d'attribuer la note maximale A à 20% des dossiers, la note B à 30% des dossiers et la note C aux 50% restants. Chaque dossier est examiné par deux experts, un expert thématique, compétent dans le domaine scientifique du candidat, et un expert géographique, chargé d'évaluer l'ensemble des dossiers transmis par un même établissement. Bien

¹ La composition du comité se trouve à l'adresse suivante : http://media.enseignementsup-recherche.gouv.fr/file/Mesures_communes_ens-chercheurs/11/4/decision_PES_membres_de_l_instance_nationale_119114.pdf

entendu, au cours de la réunion du comité, chacun s'est abstenu d'intervenir lorsque la discussion concernait soit un candidat de son propre établissement, soit un collaborateur pendant la période d'évaluation.

Les dossiers sont répartis en trois groupes, correspondant aux grades des candidats (MCF, PR2, PR1+PRCE). Le ministère n'impose aucune contrainte sur le pourcentage de dossiers à classer en A, B, C à l'intérieur de chacun de ces groupes. Le comité de mathématiques, suivant la tradition établie depuis plusieurs années par les anciens comités d'attribution de la PEDR, a décidé d'appliquer le même taux de satisfaction des demandes aux trois groupes concernés. Cette politique confère un certain avantage aux candidats Maîtres de Conférences ou Professeurs de deuxième classe. Elle est justifiée aux yeux du comité par la nécessité de préserver l'attractivité des métiers de la recherche et de l'enseignement supérieur, dont les rémunérations de début de carrière sont bien peu compétitives en regard de celles auxquelles pourraient prétendre les jeunes enseignants-chercheurs s'ils choisissaient une autre voie. Elle contribue également à encourager les jeunes Maîtres de Conférences, parfois soumis à des conditions de travail difficiles dans leurs premières années d'enseignement, à fortement s'investir dans leur activité de recherche.

L'évaluation des dossiers se fait à partir des quatre critères indiqués plus haut. Ceux-ci sont modulés en fonction des grades des candidats. C'est ainsi que l'encadrement doctoral, qui est un élément important d'appréciation pour les dossiers d'enseignants-chercheurs expérimentés, joue un rôle moindre en ce qui concerne les personnels récemment recrutés. Par exemple, le comité a évalué positivement les dossiers de jeunes Maîtres de Conférence, même en l'absence de tout encadrement doctoral, à partir du moment où les intéressés avaient démontré la grande qualité de leurs travaux scientifiques, ainsi que leur prise d'autonomie effective par rapport à leurs travaux de thèse. Une différence notable séparant la PES de l'ancienne PEDR réside dans le fait que, conformément au décret instituant cette nouvelle prime, la PES est attribuée « aux personnels dont l'activité scientifique est jugée d'un niveau élevé par les instances d'évaluation dont ils relèvent, ainsi qu'à ceux qui exercent une activité d'encadrement doctoral ». Le comité a estimé que cette phrase permet, contrairement à ce qui semblait de tradition avec la PEDR, d'attribuer la prime à des professeurs de 1^{re} classe ou de classe exceptionnelle qui n'ont effectué aucun encadrement de thèse pendant la période de référence. Toutefois, dans un tel cas, il a été exigé en contrepartie des travaux scientifiques de qualité exceptionnelle. Ces règles de compensation expliquent en particulier que des dossiers aient pu recevoir une note globale A, bien que la lettre C leur ait été attribuée pour certaines notes par critères.

Le comité a regretté de ne pouvoir donner la note maximale A à plus de 20% des dossiers. Cela l'a conduit à devoir attribuer, parmi les dossiers de PR2 ou PR1-PRCE, la note B à des dossiers excellents, et même, dans certains cas, à des candidats dont le travail scientifique est de très haut niveau (lorsque leur activité d'encadrement doctoral ou administrative était moins intense). De même, le quota de 30% pour la note B, a obligé le comité à noter C certains très bons dossiers. Compte-tenu du haut niveau de la compétition, il serait incompréhensible que les établissements n'accordent pas la prime de manière quasi-systématique aux candidats notés A ou B. En outre, ceux qui en auraient les possibilités budgétaires ne doivent pas hésiter

à accorder la prime, y compris à certains dossiers notés C, sous réserve de la satisfaction préalable des candidatures émanant du même établissement, et mieux notées par le comité d'experts national. De fait, les notes attribuées représentent une évaluation relative des dossiers entre eux, et non pas un jugement absolu de la valeur des candidats. Le fait que les notes par critères soient souvent nettement plus élevées que la note globale du dossier traduit d'ailleurs la frustration du comité de devoir se conformer aux quotas indiqués plus haut pour chacune des appréciations. Le comité précise qu'une note globale C n'est pas un avis négatif sur l'activité scientifique des candidats, mais signifie simplement que les experts les ont considérés comme étant, au sein de leur corps, dans la seconde moitié de la liste.

Enfin, le comité tient à encourager pour les années qui viennent le plus grand nombre possible de Professeurs et Maîtres de Conférences à faire acte de candidature.



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Faculty Positions in Computational Mathematics at Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)

The EPFL announces the creation of a new Mathematics Institute in Computational Science and Engineering (MATHICSE). In this framework EPFL is planning to make a number of appointments at the assistant, associate professor or full professor level.

Candidates for these new positions are expected to have an exceptional track record in research that conjugates mathematical and numerical techniques for the solution of complex problems in science and engineering.

Successful candidates will establish and lead vigorous independent research programs, interact with existing projects in the CSE area across the EPFL Campus, and be committed to excellence in undergraduate and graduate teaching. Significant start-up resources and research infrastructure will be available.

Applications should be made via

<http://sbpositions.epfl.ch/applications/>

by **April 15, 2010**.

Candidates should submit their curriculum vitae including list of publications, concise statement of research and teaching interests, and the names and addresses (including email) of five referees as a single PDF file (at most 20 A4-format pages, not counting the list of publications).

For additional information, please contact :

Professor Alfio Quarteroni (Chairman)
MATHICSE Search Committee

Email: alfio.quarteroni@epfl.ch, please specify Subject: «Computational Mathematic» in the email heading

The EPFL School of Basic Sciences aims for a strong presence of women amongst its faculty, and qualified female candidates are strongly encouraged to apply.

CARNET

Jean Mémin

(1940 – 2009)

François Coquet, Jean Jacod

Notre collègue et ami Jean Mémin nous a quittés le 21 septembre dernier, au terme de cinq ans de lutte contre le cancer.

Né au Mans, Jean Mémin a passé son Capes à Rennes avant de partir pour 5 ans comme enseignant coopérant au Cambodge. De retour en France, il obtient son premier poste d'assistant à la faculté des Sciences Économiques de Rennes. Il soutient sa thèse de 3^e cycle en 1974, sous la direction de Michel Métivier, et devient Docteur d'État en 1979. Il prendra en 1979 un poste de Maître-Assistant à l'UER de Mathématiques et Informatique de l'Université Rennes 1, université qu'il ne quittera plus et où il devient Professeur en 1985.



Jean Mémin a construit son œuvre scientifique autour de la théorie des processus en temps continu. Il a ainsi participé à la création ou à l'exploration d'outils désormais classiques, tels que le théorème de Girsanov, les caractéristiques locales des semi-martingales, ou la condition dite « UT » (uniforme tension) pour la convergence d'intégrales stochastiques. Les problèmes relevant du calcul stochastique et/ou de la convergence de processus reviennent d'ailleurs dans la plus grande partie de sa production scientifique. On lui doit notamment des travaux sur la convergence en loi vers des processus à accroissements indépendants, la vitesse de convergence dans les théorèmes limites fonctionnels, la stabilité d'équations différentielles stochastiques, les processus de Dirichlet ou de Dirichlet faible, la convergence des solutions d'équations différentielles stochastiques rétrogrades, les martingales non-linéaires, la discrétisation et la convergence des filtrations. Nombreux sont ceux, parmi les résultats qu'il a obtenus, qui ont fait date et sont régulièrement cités dans la littérature.

Ces travaux ont été accomplis avec une vingtaine de collaborateurs différents : pour Jean, le travail de recherche se concevait comme un travail d'équipe. Ces collaborations sont pour une bonne part internationales. Outre quelques rencontres ponctuelles, Jean Mémin a été très actif pour favoriser les premiers passages en

France d'Albert Shyriaev, dont les travaux avaient déjà inspiré sa thèse de 3^e cycle. En Pologne, dès la fin des années 70, il est au cœur de l'éclosion de l'école de probabilité de l'Université de Torun (Université dont il a reçu la médaille du mérite en 1998), en particulier en tant que collaborateur régulier d'Adam Jakubowski. Plus récemment, il a été un collaborateur privilégié de Shige Peng autour de la théorie des espérances et martingales non linéaires.

Plus rare, Jean Mémin a su concilier un travail mathématique ininterrompu avec un investissement total dans la vie universitaire : il a été membre du Comité National du CNRS, Directeur de l'UFR de mathématiques de l'Université Rennes 1, membre du CA puis du CEVU de la même université, responsable de nombreux programmes internationaux axés sur des collaborations scientifiques ou pédagogiques. Il était enfin dévoué à son métier d'enseignant, qu'il ne considérait pas comme une charge mais comme un plaisir.

Mais celles et ceux qui l'ont côtoyé à l'Université Rennes 1 ou au hasard des rencontres scientifiques se souviendront en premier lieu, non de son bilan scientifique, pédagogique ou administratif, mais de son humanité et de sa modestie. Jean ne se mettait jamais en avant, parlait peu de lui et faisait preuve, notamment envers les chercheurs débutants, d'une extrême disponibilité, dépourvue de toute condescendance. Et à titre plus personnel, il nous semble également important de rappeler la présence constante, à ses côtés, de Maya, dont Jean a largement partagé la vie artistique, et qui quant à elle a beaucoup partagé de la vie mathématique de Jean, même si elle est réticente à le reconnaître.

Dans un monde universitaire et mathématique feutré mais parfois sans grande tendresse, la gentillesse, la compréhension et la solidarité de Jean Mémin, manqueront, comme manqueront ses capacités plus proprement mathématiques. La communauté mathématique peut à tout point de vue s'enorgueillir d'avoir compté Jean Mémin parmi les siens, et en garder le souvenir ému.

Quelques souvenirs sur I.M. Gelfand

(1913 – 2009)

Alain Guichardet

Il me serait impossible de parler de I.M. Gelfand sans évoquer l'atmosphère qui régnait à Moscou à la fin des années 1950. J'y débarquai un beau jour de septembre 1958, accompagné de ma femme, aussi curieuse que moi de découvrir cette mystérieuse URSS, et muni du diplôme de Russe de l'École des Langues orientales. Staline était mort 5 ans auparavant, le très révolutionnaire 20^e congrès du Parti communiste soviétique avait eu lieu en 1956, Khrouchtchev régnait depuis peu ; il n'avait pas encore eu le temps d'imposer l'ouverture appelée par la suite « le dégel », et la société soviétique vivait encore extrêmement repliée sur elle-même.

L'Université d'État de Moscou (*em-gué-ou*) était une véritable forteresse – l'un des 5 immeubles hauts et pointus construits à Moscou sous Staline – où l'on ne pouvait pénétrer que dûment muni d'un laissez-passer obtenu au prix d'une longue attente. Ledit immeuble renfermait des centaines de chambres d'étudiants, des restaurants, des salles de cours et de séminaires, ainsi que des pièces servant de bureaux aux diverses chaires d'enseignement.

Celle qui me concernait s'appelait *Mekh-Mat* (i.e. Mécanique et Mathématiques) ; elle consistait en une pièce où une secrétaire s'activait avec une machine à écrire, et une antichambre avec canapé et tableau noir où s'entretenaient des personnages aussi prestigieux que I.M. Gelfand, M.A. Naïmark, V.I. Arnold, R.A. Minlos, S.V. Fomin, G.E. Chilov... Je fus admis dans l'équipe de Gelfand au titre d'« aspirant », l'aspiranture étant une sorte de 3^e cycle succédant aux cinq années d'études ; j'y devins ami avec un autre aspirant, A.A. Kirillov, qui devait, quatre ans plus tard, révolutionner la théorie des représentations unitaires des groupes de Lie par sa Méthode des Orbites. Je m'entretenais volontiers avec Mark Aronovitch (Naïmark) que je trouvais plus facile d'accès que Israël Moisseievitch (Gelfand).

Le point d'orgue de toutes ces activités était le très fameux « Séminaire Gelfand », qui se tenait le lundi soir, commençant vers 19 heures et se terminant en principe vers 22 heures, mais parfois beaucoup plus tard. L'expression « commençait vers » est tout à fait adaptée : je revois Israël Moisseievitch marchant interminablement dans le couloir, s'entretenant avec divers collègues et, probablement, organisant à ce moment-là le programme du séminaire. C'était un séminaire hautement pluridisciplinaire, dont l'intitulé de « Analyse fonctionnelle » reflétait mal la variété des sujets exposés. Lesquels sujets planaient en général très haut au dessus de ma tête ; je me souviens en particulier d'un exposé fait par Malgrange, de passage à Moscou, auquel je pus cependant servir convenablement d'interprète.

Trois ans plus tard, de retour à Moscou à l'occasion de l'exposition universelle qui comportait une section « mathématiques », je fus convié à faire un exposé au séminaire Gelfand ; ma thèse était assez avancée, et mon bagage mathématique un peu moins mince ; j'attendais avec appréhension le moment, non précisé à l'avance, de mon intervention ; Israël Moisseievitch interrompait fréquemment la séance en priant les jeunes auditeurs d'expliquer certains passages des exposés qu'ils avaient entendus ; à un moment donné, il demanda aussi à Sacha (Kirillov) d'expliquer

ce qu'étaient une catégorie et un foncteur... Après la fin de mon exposé, Israël Moisseievitch me posa une question à laquelle je ne sus pas répondre, ce qui m'attira un cinglant « *vous ne savez pas de mathématiques* ».

Il n'en reste pas moins que mes conversations avec Israël Moisseievitch et Mark Aronovitch m'ont été fort utiles ; alors que mes connaissances à l'époque se bornaient aux algèbres d'opérateurs dans les espaces hilbertiens, ils m'ont suggéré d'étudier les représentations unitaires des groupes, et en particulier celles d'un certain groupe discret – les groupes de cette espèce sont souvent les plus coriaces ! – qui, dans leur esprit, devaient conduire à des algèbres d'opérateurs plutôt exotiques – et y ont effectivement conduit.

Par la suite, j'ai revu Israël Moisseievitch à plusieurs reprises, en particulier lors d'un séjour à Paris en 1975 (le « dégel » était passé par là !) durant lequel il fut nommé *doctor honoris causa* à l'Université Paris VI ; je le revis ensuite à Moscou lors d'un mien séjour en 1976 . Voici deux anecdotes qui montrent assez bien sa position vis à vis du régime soviétique : je lui avais proposé en 1975 de lui offrir le roman « Le docteur Jivago » de Pasternak alors introuvable en URSS pour des raisons idéologiques, proposition refusée très sèchement : « *Si je suis pris avec ce livre, je ne pourrai plus jamais aller à l'étranger* ». L'année suivante, son refus s'était changé en des regrets, regrets vite oubliés puisque je pus lui offrir Jivago que j'avais dans mes bagages. Ou encore, passant à pied devant l'Institut Steklov, haut lieu s'il en fut des mathématiques soviétiques et mondiales, il me dit : « *C'est un établissement fasciste* » ...

Après avoir évoqué mes rencontres avec l'homme I.M. Gelfand, je voudrais parler de mes rencontres avec une petite, malheureusement très petite, partie de son œuvre mathématique, que je diviserai en un petit nombre de rubriques.

Algèbres de Banach commutatives - Références [1] à [5]

Dans cette théorie, le résultat clef est le théorème dit de Gelfand-Mazur (Gelfand écrit qu'il a été démontré antérieurement par Mazur, par une méthode différente) : si une algèbre de Banach commutative complexe à unité est un corps, c'est le corps des complexes. Suivent toute une série de résultats et/ou de concepts très importants :

- Tout idéal maximal d'une telle algèbre A est le noyau d'un caractère, ou morphisme de A dans le corps des complexes.

- Le « spectre de Gelfand » de A est l'ensemble $\hat{A}$ des caractères de A , espace que l'on munit de la topologie de la convergence simple et qui est compact si A est à unité, localement compact en général.

- La « transformation de Gelfand » est l'application qui à tout a de A associe la fonction $\hat{a}$ sur $\hat{A}$: $\hat{a}(x) = x(a)$. On comprend maintenant que le modèle auquel on tente de ramener l'étude des algèbres de Banach commutatives à unité est l'espace des fonctions continues sur un espace topologique compact.

- Calcul fonctionnel holomorphe : pour une fonction holomorphe f , on définit $f(a)$ à l'aide de la formule de Cauchy adaptée à cette situation.

- Nouvelle démonstration d'un théorème de N.Wiener sur les séries trigonométriques : si une fonction périodique f qui ne s'annule pas est développable en une série trigonométrique absolument convergente, la fonction $1/f$ l'est aussi.

– Nouvel éclairage sur la théorie des groupes topologiques localement compacts commutatifs, en associant à un tel groupe l'algèbre des fonctions intégrables munie du produit de convolution; l'objet dual d'un groupe G est ici l'espace $\hat{G}$ des caractères de G , ou morphismes continus de G dans le tore S^1 . Précisons que le théorème de dualité de Pontriagin date de 1934.

– Théorème de Gelfand et Naïmark (inclus dans la référence [8]) : si A admet une involution satisfaisant $\|xx^*\| = \|x\|^2$, la transformation de Gelfand est un isomorphisme. Ces algèbres ont été appelées « algèbres de Gelfand-Naïmark », puis C^* -algèbres (commutatives). On peut dire aussi que la catégorie des C^* -algèbres commutatives à unité est équivalente à celle des espaces topologiques compacts – idée que A.Connes met souvent au début de ses exposés : en abandonnant la condition de commutativité, on obtient la notion de « espaces topologiques non commutatifs ».

Algèbres de Banach (non nécessairement commutatives)

Références [7], [8]

Ici le modèle auquel on essaie de comparer une algèbre de Banach quelconque est celui des algèbres d'opérateurs dans des espaces hilbertiens. On note $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés dans un espace hilbertien complexe $\mathcal{H}$, muni de l'involution qui transforme chaque opérateur A en son adjoint A^* ; on considère ensuite les sous-algèbres involutives de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ fermées pour une certaine topologie, et c'est là qu'apparaissent des différences essentielles. Dès 1936, Murray et von Neumann, mus par des considérations de Physique Quantique, avaient établi une théorie très poussée des algèbres, dites « de von Neumann », fermées pour la topologie faible.

Celles, beaucoup plus générales, qui interviennent dans les travaux de Gelfand et Naïmark sont supposées seulement fermées pour la topologie de la norme des opérateurs; on les a appelées « algèbres de Gelfand-Naïmark », puis C^* -algèbres. Le théorème fondamental de ces auteurs affirme qu'une algèbre de Banach munie d'une involution satisfaisant la condition $\|xx^*\| = \|x\|^2$, est isomorphe à une C^* -algèbre d'opérateurs. Ce résultat s'accompagne d'une étude des représentations des algèbres de Banach involutives (représentations irréductibles, formes linéaires positives,...), ainsi que de celles des groupes localement compacts généraux, fournissant une nouvelle preuve d'un résultat de Gelfand et Raïkov (cf. [6]) : tout groupe localement compact admet suffisamment de représentations unitaires irréductibles.

Représentations des groupes de Lie - Références [9] à [15]

La théorie des groupes localement compacts commutatifs étant désormais bien comprise, Gelfand et ses collaborateurs s'attaquent à celle des groupes de Lie non nécessairement commutatifs, l'objet dual d'un tel groupe G étant maintenant l'ensemble $\hat{G}$ des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de G , et le problème fondamental consistant à décrire ce dual le plus précisément possible. Ce problème avait été résolu dès 1931 (théorème de Stone et von Neumann) pour le groupe de Heisenberg qui joue un rôle fondamental en Physique quantique.

Gelfand et Naïmark commencent par examiner le plus petit groupe de Lie non commutatif : le groupe affine de R , dit aussi « groupe des transformations $ax + b$ » ;

c'est un groupe résoluble; Gelfand et Naïmark décrivent entièrement l'ensemble $\hat{G}$ et ajoutent, un peu hâtivement, que « leurs méthodes peuvent aussi être appliquées, avec quelques modifications, à tous les groupes résolubles »; en réalité, il aura fallu plus de vingt ans d'efforts (L. Pukanszky, M. Duflo et son école) pour obtenir une théorie satisfaisante des duals des groupes résolubles.

Le cas nettement plus simple des groupes nilpotents, moins « noncommutatifs » que les groupes résolubles, a été résolu, non pas directement par Gelfand *et alii*, mais – et avec quel succès! – par A.A. Kirillov, autre brillant mathématicien issu de l'équipe Gelfand, dont la « méthode des orbites » a suscité d'innombrables recherches ultérieures.

Une autre série de travaux, eux aussi promis à un bel avenir, concerne les groupes semi-simples non compacts, la théorie des groupes compacts étant connue depuis une vingtaine d'années (H.Weyl, E.Wigner). Gelfand et Naïmark commencent par le groupe $SL(2, C)$, assimilé dans [10] au groupe de Lorentz à 4 dimensions d'espace-temps, qui lui est localement isomorphe. On voit apparaître dans cette étude un grand nombre de notions qui allaient jouer des rôles essentiels pendant les années à venir (mentionnons, pour ne citer qu'eux, les travaux d'Harish-Chandra) : diverses décompositions d'un groupe G en produits de sous-groupes (décompositions de Gelfand-Naïmark, de Bruhat,...), séries principales et complémentaires de représentations avec leurs caractères, décomposition de la représentation régulière en représentations irréductibles, *alias* formule de Plancherel,...

Après $SL(2, C)$, Gelfand et Naïmark passent à $SL(n, C)$, mais, là, leur liste de représentations unitaires irréductibles est incomplète; vingt ans plus tard E. Stein proposera une liste élargie dont D.Vogan montrera en 1986 qu'elle est complète. Ils examinent ensuite les groupes complexes classiques, puis Gelfand et Graev étudient les groupes de Lie semi-simples réels $SL(n, R)$; ce cas est nettement plus compliqué que celui des groupes complexes, comportant notamment des séries de représentations qui n'apparaissent pas dans le cas complexe; précisons que le groupe $SL(2, R)$ avait été traité en 1947 par V. Bargmann (c'est aussi un groupe de Lorentz à isomorphisme local près!). Là encore Vogan a apporté une solution. Ajoutons que la description du dual des groupes de Lie semi-simples complexes a été achevée par D.P. Jelobenko, autre collaborateur de I.M. Gelfand, mais que le cas des groupes de Lie semi-simples réels n'est pas encore complètement résolu (en 2009).

Représentations de G^X - Références [16], [17]

Je voudrais terminer cette notice sur I.M. Gelfand en parlant d'un sujet qui m'avait intéressé au point que j'en avais tiré une courte note parue dans la *Gazette des mathématiciens*, n° 4 en 1975, ainsi qu'un exposé au *Séminaire Bourbaki*, n° 486.

Verchik, Gelfand et Graev étudient ici les représentations d'un type très particulier de groupes de dimension infinie : disons, pour fixer les idées, le groupe G^X des applications boréliennes d'un espace borélien X dans un groupe localement compact G ; ils construisent des représentations irréductibles de G^X par une méthode qui s'applique en particulier au cas où G est l'un des groupes de Lie $SO_0(n, 1)$, $SU(n, 1)$; leur construction a pour point de départ une représentation irréductible

U de G et un 1-cocycle de G à valeurs dans l'espace hilbertien de U . P. Delorme a rédigé une démonstration complète de l'irréductibilité de la représentation de G^X ; elle repose essentiellement sur le fait que le 1-cocycle de départ n'est pas un cobord, ce qui suppose évidemment que le groupe de cohomologie $H^1(G, U)$ est non nul. Or P. Delorme a démontré que les groupes $SO_0(n, 1)$, $SU(n, 1)$ sont les seuls groupes de Lie simples (à isomorphisme local près) admettant une représentation unitaire irréductible U avec $H^1(G, U)$ non nul. Delorme et moi avons alors pensé que Gelfand pressentait ce résultat, mais il nous a dit qu'il l'ignorait...

J'ajouterai que l'une des raisons qui confèrent un très grand intérêt à la construction de Verchik, Gelfand et Graev est qu'on peut la rattacher à la notion de « produit tensoriel continu » d'espaces hilbertiens – la représentation de G^X est en un certain sens un produit tensoriel continu de représentations de G –, notion dont les propriétés fondamentales ont été établies par H. Araki et E.J. Woods dans leur article Complete boolean algebras of type 1 factors (1966). Verchik, Gelfand, Graev ont par la suite construit des représentations unitaires irréductibles de G^X lorsque G est un groupe semi-simple compact, cas où la construction précédente ne s'applique pas puisque ici $H^1(G, U)$ est toujours nul (références [18], [19]).

J'arrête ici cette courte liste de rencontres avec I.M. Gelfand et son œuvre mathématique ; faute de compétence, je ne peux qu'espérer que d'autres que moi souhaiteront exposer des sujets tout aussi importants que ceux abordés ici : équations différentielles et physique mathématique, représentations de longueur finie de groupes de Lie, algèbres enveloppantes, cohomologie de diverses algèbres, ou de variétés, construction explicite de bases (dites « à la Gelfand-Tsetlin ») pour les représentations de dimension finie des groupes classiques, etc, etc. Et, pour conclure, je ne pourrais mieux faire que citer le bel hommage rendu à Gelfand par B. Kostant à la fin du dernier tome des œuvres complètes : « *It seems to me to be a correct assessment to say that I.M. Gelfand has produced seminal papers in more areas of mathematics than any other mathematician, certainly in the latter half of this century* » .

Bibliographie sélective de I.M. Gelfand

Les références qui suivent sont tirées des œuvres complètes de I.M. Gelfand (Springer Verlag, 1987).

- [1] *On normed rings*. Dokl. Akad. Nauk, 23, (1939), 430-432.
- [2] *To the theory of normed rings II*. Dokl. Akad. Nauk, 25, (1939), 570- 572.
- [3] *On the theory of characters of commutative topological groups* (avec D.A. Raïkov). Dokl. Akad. Nauk, 28, (1940), 195-198.
- [4] *Normierte Ringe*. Mat. Sb., 9(51), (1941), 3-23.
- [5] *Commutative normed rings* (avec D.A. Raïkov et G.E. Chilov), Usp. Mat. Nauk, 1 (2), (1946), 48-146.
- [6] *Irreducible unitary representations of locally bicomact groups* (avec D.A. Raïkov), Mat. Sb., 13 (55), (1942), 301-316.
- [7] *On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space* (avec M.A. Naïmark). Mat. Sb., 12 (54), (1942), 197-213.
- [8] *Normed rings with an involution and their representations* (avec M.A. Naïmark). Izv. Akad. Nauk, 12, (1948), 445-480.

- [9] *Unitary representations of the group of linear transformations of the straight line* (avec M.A. Naïmark). Dokl. Akad. Nauk, 55, (1947), 567-570.
- [10] *Unitary representations of the Lorentz group* (avec M.A. Naïmark). Izv. Akad. Nauk, 11, (1947), 411-504.
- [11] *On unitary representations of the complex unimodular group* (avec M.A. Naïmark). Dokl. Akad. Nauk, 54, (1946), 195-198.
- [12] *Complementary and degenerate series of representations of the complex unimodular group* (avec M.A. Naïmark). Dokl. Akad. Nauk, 58, (1946), 1577-1580.
- [13] *The principal series of irreducible representations of the complex unimodular group* (avec M.A. Naïmark). Dokl. Akad. Nauk, 56, (1947), 3-4.
- [14] *Unitary representations of classical groups* (avec M.A. Naïmark). Tr. Mat. Inst. Steklov, 36, (1950), 1-288.
- [15] *Unitary representations of real unimodular group* (Principal non-degenerate series) (avec M.I. Graev). Izv. Akad. Nauk, 17, (1952), 189-249.
- [16] *Irreducible representations of the group G^X and cohomologies* (avec A.M. Verchik et M.I. Graev). Funkt. Anal. Priloz., 8(2), (1974), 67-69.
- [17] *Representations of the group $SL(2, R)$ where R is a ring of functions* (avec A.M. Verchik et M.I. Graev). Usp. Mat. Nauk, 28(5), (1973), 82-128.
- [18] *Representations of the group of smooth mappings of a manifold into a compact Lie group* (avec A.M. Verchik et M.I. Graev). Compos. Math., 35 (1977), 299-334.
- [19] *Representations of the group of functions taking values in a compact Lie group* (avec A.M. Verchik et M.I. Graev). Compos. Math., 42, (1981), 217- 243.



*Photographie prise lors d'un repas chez A.Guichardet, en 1975.
De gauche à droite : Mme Schwartz, Laurent Schwartz, Hélène Guichardet (12 ans), I.M.Gelfand en train de poser une colle à Hélène, Jacques Dixmier, Mme Guichardet (debout).*

LIVRES

Suites de Sturm, indice de Maslov et périodicité de Bott

J. BARGE, J. LANNES

Birkhäuser Verlag, 2008. 199 p. ISBN : 978-3-7643-8709-9. 63,19 €

Comme le titre le suggère, cet ouvrage établit de nouvelles démonstrations des théorèmes de périodicité de Bott en K -théorie topologique et algébrique en utilisant la théorie des suites de Sturm et un morphisme dont la définition est inspirée par l'indice de Maslov.

Dans un article publié aux « Annals of Mathematics » en 1959, Raoul Bott calcule les groupes d'homotopie stable des espaces BU et BO . Ici et ci-dessous, U , O et Sp sont respectivement les groupes unitaire, orthogonal et symplectique infinis classiques, et B est le foncteur « espace classifiant ». Notons Ω le foncteur qui associe, à un espace topologique pointé, l'ensemble des lacets dans cet espace, muni d'une topologie convenable, et considérons les entiers relatifs $\mathbf{Z}$ comme espace topologique discret. Alors, Bott établit en particulier les équivalences d'homotopie $\Omega^2(BU \times \mathbf{Z}) \simeq BU \times \mathbf{Z}$, $\Omega^4(BO \times \mathbf{Z}) \simeq BSp \times \mathbf{Z}$ et $\Omega^4(BSp \times \mathbf{Z}) \simeq BO \times \mathbf{Z}$. Les calculs de Bott impliquent que la K -théorie complexe (resp. réelle), qui est une « théorie de cohomologie généralisée » et donc en particulier un foncteur $\mathbf{Z}$ -gradué sur les espaces topologiques, est 2- (resp. 8-) périodique. La périodicité admet donc une reformulation géométrique, à savoir une comparaison des fibrés vectoriels complexes (resp. réels) sur un espace X avec les fibrés vectoriels complexes (resp. réels) sur l'espace $X \times S^2$ (resp. $X \times S^8$).

Ces théorèmes de périodicité comptent parmi les résultats les plus importants de la topologie algébrique du siècle dernier. Ils ont connu des réincarnations dans d'autres domaines mathématiques. Par exemple, en géométrie algébrique, suivant Morel et Voevodsky, la périodicité complexe correspond à un théorème de Quillen sur la K -théorie algébrique de la droite projective, tandis que les travaux de Karoubi et de l'auteur de cette note fournissent une version de la périodicité réelle en géométrie algébrique. Ces résultats algébriques sont d'ailleurs exprimés de la façon la plus nette (et la plus belle !) dans le langage de la théorie de l'homotopie motivique des schémas, établi par Morel et Voevodsky il y a quelques années.

Il y a beaucoup de démonstrations de la périodicité de Bott et de ses généralisations. Dans un article publié aux « Annales de l'ÉNS » en 1991, Latour donne une liste de quatre démonstrations différentes dans le cadre de la topologie classique, pour y ajouter une cinquième qui repose sur l'étude des lagrangiens transversaux. C'est cette démonstration de Latour qui a fortement influencé la démonstration d'un des résultats principaux du livre de Barge et Lannes, à savoir le Théorème 4.2.10 : *Soit R un anneau régulier dans lequel 2 est inversible. Alors les applications*

$$I : (\pi_0 \mathcal{F})(R) \rightarrow (\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R) \quad \text{et} \quad \text{Mas} : (\pi_0 \Omega \mathcal{L})(R) \rightarrow (\pi_0 \mathcal{F})(R)$$

définies ci-dessous sont des isomorphismes de monoïdes abéliens inverses l'un de l'autre. Disons tout de suite que ici, π_0 et Ω ne désigneront pas les foncteurs habituels sur les espaces topologiques mais des variantes algébriques naïves définies pour les foncteurs de la catégorie des anneaux vers la catégorie des ensembles pointés. Par exemple, un élément dans $\Omega\mathcal{L}(R)$ est par définition un élément dans $\mathcal{L}(R[t])$ qui est le point de base si on l'évalue à $t = 0, 1$. Sans définir les foncteurs $\mathcal{L}$ et $\mathcal{F}$, disons simplement que les foncteurs $\pi_0\Omega\mathcal{L}$ et $\pi_0\mathcal{F}$ sont essentiellement les foncteurs ${}_{-1}U_1$ et ${}_1V_0$ de Karoubi, définis explicitement à partir des formes bilinéaires (anti-)symétriques. Par exemple, ${}_1V_0(R)$ est le quotient du monoïde des classes d'isomorphie des triplets (L, q_0, q_1) avec L un R -module projectif de type fini et q_0, q_1 deux formes bilinéaires non dégénérées sur L , par la relation $(L, q_0, q_1) + (L, q_1, q_2) \sim (L, q_0, q_2)$.

Bien sûr, les isomorphismes du théorème font penser aux isomorphismes que l'on obtient en appliquant π_0 à l'équivalence $\Omega_{{}_1}\mathcal{U}(R) \simeq {}_1\mathcal{V}(R)$ du théorème fondamental de Karoubi sur la K -théorie hermitienne (publié également aux « *Annals of Mathematics* », en 1980). Chez Karoubi, la définition des morphismes est très différente, donnée par certains cup-produits. La construction très élégante de Barge et Lannes du morphisme *Mas* et l'étude de ses propriétés est un des points clé de leur livre. La terminologie fait référence à l'indice de Maslov topologique qui induit un isomorphisme $\pi_0\Omega(U/O) \cong \mathbf{Z}$, ce qui est une conséquence de la version topologique réelle du théorème 4.2.10 ci-dessus. Ce théorème est seulement un des huit isomorphismes de Bott algébriques naïfs, les sept autres étant établis dans le chapitre 6. Bien que – comme le point de vue motivique mentionné plus haut le suggère – il faille considérer deux cercles différents S^1 et $\mathbf{G}_m$ dans ce cadre algébrique, les énoncés et leurs démonstrations dans ce chapitre n'ont pas besoin de la machine motivique. La comparaison précise entre ces théorèmes de périodicité algébrique de Barge et Lannes et les théorèmes de Karoubi et motiviques est une des questions qui restent à explorer. Notons d'ailleurs que l'ouvrage de Barge et Lannes contient également des variantes topologiques (complexes et réelles) du théorème 4.2.10.

Vue la diversité des constructions et résultats dans ce livre remarquable, il nous est impossible d'en donner une liste complète. Parmi les autres théorèmes de cet ouvrage, citons seulement la description du conoyau du morphisme $H_2(EG\mathcal{L}(R)) \rightarrow H_2(ESp(R))$ comme sous-groupe de ${}_1V_0(R)$ pour tout anneau R , ce qui donne une variante de certains résultats de Sharpe.

Quelques mots sur le rôle des suites de Sturm. Par définition, une suite de Sturm sur un R -module libre L est une suite finie, disons $\underline{q}$, de formes bilinéaires symétriques alternativement définies sur L et $L^* = \text{Hom}_R(L, R)$; à une telle suite est associé un automorphisme symplectique "élémentaire" $E(\underline{q})$ de l'espace hyperbolique $H(L)$. Les propositions cruciales 2.2.4 et 3.1.1 fournissent, explicitement en fonction de $\underline{q}$, un R -module libre L' et un lagrangien de $H(L \oplus L')$ qui est à la fois transverse à $E(\underline{q}) \cdot (L \oplus L')$ et à $L^* \oplus L'^*$. Ceci est l'ingrédient principal pour démontrer que l'indice de Maslov *Mas* est bien défini.

Ce livre agréable à lire s'adresse surtout à tous les mathématiciens qui s'intéressent à la K -théorie topologique, algébrique ou hermitienne, et plus généralement à la topologie algébrique ou aux formes hermitiennes et leurs lagrangiens. Comme il est plus ou moins « self-contained », supposant connus seulement

quelques notions et résultats élémentaires d'algèbre, il peut aussi être lu et compris par les mathématiciens qui travaillent dans d'autres domaines. Ce livre contient une introduction très bien rédigée, avec d'abord une motivation générale sur la théorie de Sturm, ensuite une esquisse de la démonstration du théorème 4.2.10 ci-dessus, un plan du livre et enfin des conseils de lecture pour le lecteur pressé. On regrette toutefois l'absence d'un index.

Jens Hornbostel,
Université de Bonn

Mon cabinet de curiosités mathématiques

I. STEWART, L. DECRÉAU ET A. TRUCHET (TRAD.)

Flammarion, 2009. 374 p. ISBN : 978-208-1225343. 63, 20 €

L'ouvrage de Ian Stewart prend la forme d'un recueil de 178 chapitres très courts (entre quelques lignes et quelques pages). Chaque chapitre traite d'un nouveau sujet, d'une nouvelle curiosité mathématique pour reprendre la terminologie de l'auteur. Ces curiosités sont largement indépendantes les unes des autres, de telle façon qu'il est possible – et même conseillé – de ne pas lire le livre linéairement, mais au contraire de l'ouvrir au hasard et d'y découvrir à chaque fois une nouvelle surprise. Vous l'aurez compris, les curiosités mathématiques que nous offre Ian Stewart sont extrêmement variées. Voici un petit éventail des richesses que l'on trouve dans ce livre.

- Des énigmes logiques ou mathématiques, certaines relativement classiques et d'autres plus originales. Par exemple, connaissez-vous le problème suivant, dit des maris jaloux : « Trois maris jaloux accompagnés de leurs femmes doivent traverser une rivière. Ils trouvent une barque qui ne peut accueillir que deux passagers à la fois. Comment s'y prendre pour que tout le monde traverse la rivière sans qu'une femme ne se retrouve jamais avec un homme hors de la présence de son mari ? ». À votre sagacité...

- Des « tours de magie » dont le but est souvent d'illustrer certaines propriétés topologiques surprenantes au premier abord. Par exemple, sauriez-vous comment vous y prendre pour retirer une ficelle (topologiquement équivalente à un cercle) enroulée (une fois) autour de votre bras sans sortir la main de la poche de votre pantalon ?

- Des explications sur certaines règles ou certaines conventions des mathématiques que, souvent les gens connaissent sans pour autant savoir d'où elles viennent : pourquoi ne peut-on pas diviser par 0 ? pourquoi moins par moins, ça fait plus ? etc.

- Des présentations sommaires de théories mathématiques modernes ou des conjectures encore ouvertes. Ian Stewart nous offre ainsi quelques essais sur le théorème des quatre couleurs, sur le théorème de Fermat, sur l'hypothèse de Riemann, sur le problème de la fourmi de Langton, sur les fractales et leurs applications à la construction d'antennes de téléphones portables... et encore bien d'autres choses. S'il arrive que vous vous sentiez démuni lorsque l'on vous demande « Mais à quoi ça sert ? », il est possible que ce livre vous donne quelques éléments de réponse.

– Et aussi, en vrac : des syllogismes à démêler, des blagues mathématiques à comprendre, des anecdotes concernant des mathématiciens célèbres qui contredisent souvent des préjugés classiques (comme, par exemple, le fait qu'un mathématicien est nécessairement un expert en calcul mental), de brèves explications sur la vie des mathématiciens et plus généralement de la communauté mathématique d'aujourd'hui (pourquoi n'y a-t-il pas de prix Nobel de mathématiques ? qu'est-ce que le prix Abel ?)

Malgré cette foulditude de sujets, le livre possède une forte cohérence interne qui est notamment incarnée par le retour récurrent de certaines thématiques ou de certains protagonistes. Également, lorsque cela a un sens, l'auteur n'hésite jamais à replacer le problème qu'il évoque dans un contexte historique donnant par là-même une dimension supplémentaire à son texte.

Les solutions de toutes les questions posées au fil des chapitres sont regroupées à la fin du livre. Même si vous avez résolu le problème, je ne saurais trop vous conseiller d'aller voir la solution « officielle » d'une part car elle peut évidemment être différente de la vôtre, mais d'autre part, également, car elle est parfois complétée par des remarques ou des prolongements intéressants.

En un mot, ce livre incarne une nouvelle fois le talent de Ian Stewart en matière de vulgarisation scientifique. Son style alerte et ludique traduit de façon magistrale son enthousiasme et son émerveillement à découvrir et à faire partager les mathématiques. La diversité des thèmes abordés, pourtant tous choisis méticuleusement, reflète quant à elle la vaste culture et le recul de l'auteur. Elle contribue en outre à rendre l'ouvrage passionnant pour tous les publics : les mathématiciens professionnels, de même que les écoliers, trouveront dans ces pages, j'en suis persuadé, de quoi les intéresser. À mettre sans hésiter entre toutes les mains, donc.

Xavier Caruso,
Université Indépendante de Moscou