

# SOMMAIRE DU N° 122

---

<b>SMF</b>	
Mot du Président .....	3
<b>MATHÉMATIQUES</b>	
Le $h$ -principe ? <i>V. Borrelli</i> .....	5
Sur la dynamique des solitons : stabilité, collision et explosion, <i>Y. Martel, P. Raphaël</i> .....	15
Odyssée dans le groupe de Cremona, <i>J. Déserti</i> .....	31
<b>EN HOMMAGE À HENRI CARTAN (SUITE)</b>	
Dans la famille Cartan... <i>M. Audin</i> .....	45
Le calcul de l'homologie des espaces d'Eilenberg-MacLane par Henri Cartan, <i>F.-X. Dehon</i> .....	52
<b>DOCUMENTS</b>	
En souvenir de Paulette Libermann, <i>M. Chaperon</i> .....	63
<b>ENSEIGNEMENT</b>	
La « masterisation » à l'épreuve des textes officiels, <i>V. Girardin</i> .....	81
<b>INFORMATIONS</b>	
Une nouvelle revue de la Société Française de Statistique (SfdS), <i>J.-P. Raoult,</i> <i>C. Vermandele</i> .....	91
Bilan du CSD5 de l'ANR , <i>P. Collet, F. James, P. Lefèvre, J.-C. Saut</i> .....	92
Le prix « Ibni Oumar Mahamat Saleh » .....	96
<b>LIVRES</b> .....	99

# Éditorial

---

Chers lecteurs,

*Outre les rubriques traditionnelles, nous concluons, avec ce dernier numéro de 2009, l'hommage à Henri Cartan. Nous n'excluons toutefois pas que d'autres textes, de témoignage ou scientifiques viennent s'y rajouter au fil des prochains volumes, car nous n'avons pu couvrir qu'une partie des nombreuses facettes de ses activités et de sa personnalité.*

*Cartan, rappelons-le, outre ses travaux et engagements, a été, plus peut-être que tout autre – c'est en tout cas le témoignage qui ressort de jugements rétrospectifs dus à A. Borel, dont nous reprenons dans la suite quelques analyses –, l'incarnation d'un style, celui des « mathématiques à la française » et du premier Bourbaki : « Pour nous, Cartan était l'illustration la plus frappante, presque l'incarnation de Bourbaki... Tout son travail ne semblait pas faire intervenir d'idées radicalement nouvelles, révolutionnaires. Il consistait plutôt en une succession de lemmes naturels, d'où découlaient soudainement des théories importantes » avec, en arrière fond épistémologique, la croyance en « l'unité et l'ultime simplicité des mathématiques fondamentales ». L'article de F.-X. Dehon, dans ce volume, en donne une des illustrations les plus abouties, avec le calcul, par Cartan, de l'homologie des espaces d'Eilenberg-MacLane.*

*Toujours au titre des notices biographiques, mais la remarque vaut également pour les autres rubriques, il nous arrive de recevoir, souvent tardivement, le reproche de lacunes. Nous sommes conscients de certaines, mais rappelons à tous nos lecteurs que ce journal est aussi le leur. Nous attendons donc qu'ils nous proposent des articles, des auteurs, et s'engagent à nos côtés pour faire de la Gazette le reflet le plus fidèle possible qui soit de notre communauté. À bons entendeurs...*

Bonne lecture à tous.

— Zidine Djadli, Frédéric Patras

## Mot du Président

---

La réforme de la mastérisation de la formation des enseignants n'a pas connu de pause estivale : publication des rapports Marois et Filâtre, et des décrets précisant les conditions de transition. L'article de V. Girardin de cette gazette fait le point sur la situation. La réunion des responsables en mathématiques, organisée par la SMF le 26 septembre, a montré combien notre communauté continue à être très inquiète quant à l'issue de cette réforme.

De nouvelles complications sont à prévoir cette année, puisque l'agrégation va maintenant rentrer de plein pied dans le processus de mastérisation. Durant tout l'an dernier, nous avons subi, de la part du Ministère de l'Éducation Nationale, un refus complet de dialogue avec la communauté académique et les formateurs. La SMF, parmi bien d'autres associations, n'avait cessé de demander une concertation entre les différents partenaires.

Cette initiative n'ayant pas été prise par nos tutelles, elle l'a été au printemps, sous le parrainage de la Conférences des Présidents d'Université, par la CDIUFM, la CDUS et la CDUL : ils ont lancé des « États généraux de la formation des enseignants ».

Cette vaste consultation sur le web a conduit à un document de synthèse très riche, qui reflète les préoccupations de tous les intervenants, et est accessible sur le site de ces états généraux :

<http://www.etatsgeneraux-formationdesenseignants.fr/>

Il a été présenté le 29 septembre, lors d'une table ronde à la Mutualité, à laquelle j'ai participé, ce qui m'a permis de rappeler quelques-uns des principes qui ont dirigé notre action sur ce dossier : importance des concours à contenu disciplinaire fort, amélioration du niveau en mathématiques des professeurs des écoles, nécessité de sérieux aménagements pour la période de transition, et plus généralement, mettre tout en œuvre pour que la réforme ne diminue ni l'attractivité des métiers d'enseignants, ni le niveau de ceux-ci.

La rentrée présente plusieurs autres dossiers importants : la réforme du Lycée, qui doit entrer en vigueur dans un an, mais aussi des questions liées à l'évaluation.

En effet, la loi LRU prévoit que les enseignants-chercheurs doivent être évalués par le CNU, tous les quatre ans (au moins). Ce point a été l'un des sujets abordés lors d'une réunion de concertation début septembre entre les membres du CNU 26<sup>e</sup> section et les présidents des sociétés savantes de mathématiques ; de nombreuses questions de fond se posent : est-ce le rôle du CNU d'assurer cette évaluation ? en aura-t-il les moyens ? sa structure doit-elle être modifiée en profondeur pour assurer cette nouvelle fonction, ou l'introduction prévue de suppléants (qui, en pratique, doublera sa taille) suffira-t-elle ? comment cette évaluation sera-t-elle ensuite utilisée par les établissements ?

L'essentiel des réflexions que nous menons sur les différentes réformes en cours dépasse généralement les mathématiques ; c'est d'ailleurs la raison pour laquelle nous avons souvent choisi de nous exprimer en tant que « sciences fondamentales » pour la plupart de nos interventions auprès de nos tutelles (lettres communes avec la SFP et la SCF).

Le choix de dépasser ce cadre encore disciplinaire a été effectué l'an dernier lors de l'envoi des deux lettres ouvertes à X. Darcos, qui était à l'initiative de la CCL (Confédération Concours Lettres) et de la SMF, et ces lettres ont été signées par la plupart des associations d'enseignants et sociétés savantes représentatives, toutes disciplines confondues.

L'écho qu'elles ont reçu nous a incité à chercher un mode de coordination pour l'avenir ; une réunion générale des présidents de sociétés aura lieu à l'IHP en octobre avec cette perspective.

Je vous souhaite une très bonne rentrée.

Le 1<sup>er</sup> octobre 2009  
*Stéphane Jaffard*

# MATHÉMATIQUES

---

## Le $h$ -principe ?

Tout ce qui n'est pas interdit est autorisé!

Vincent Borrelli<sup>1</sup>

---

Le 26 mars 2009, l'Académie norvégienne des sciences et des lettres a décerné le prix Abel à Mikhaïl Gromov pour ses « *contributions révolutionnaires en géométrie* ». Parmi celles-ci, la découverte au début des années 70 d'une propriété partagée par nombre de problèmes géométriques : le  $h$ -principe.

### 1. Un exemple introductif

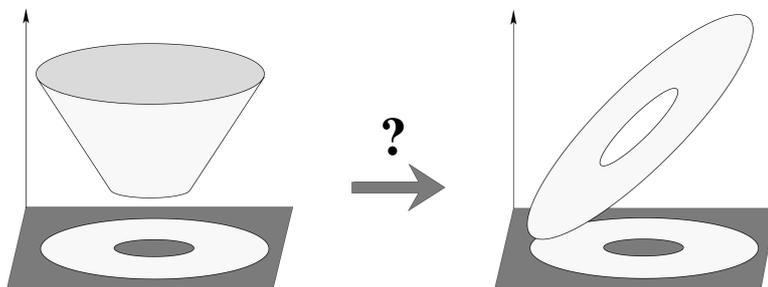
Voyons de quoi il retourne au travers d'un petit problème élémentaire. On se donne un anneau du plan euclidien  $A = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \mid \frac{1}{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{3}{2}\}$  et deux fonctions de classe  $C^1$  :

$$\begin{array}{ll} f : A & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} g : A & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto y. \end{array}$$

La question est la suivante : existe-t-il une homotopie  $(h_t)_{t \in [0,1]}$  de fonctions  $C^1$  telle que  $h_0 = f$ ,  $h_1 = g$  et

$$\forall t \in [0, 1] \quad dh_A h_t \neq 0 ?$$

Autrement dit, on voudrait passer d'une portion de cône à un anneau incliné sans faire apparaître de plans horizontaux (ni verticaux!).



---

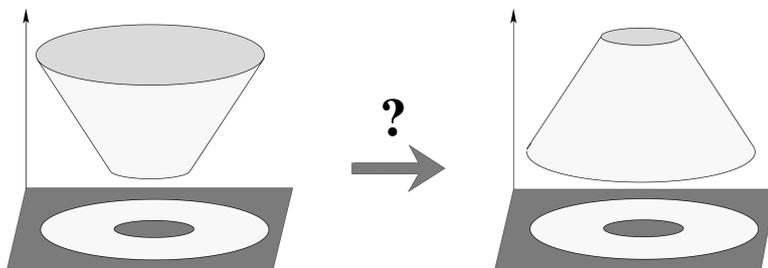
<sup>1</sup> Université Lyon I

Après quelques essais, on peut avoir l'impression que le problème est impossible... et c'est effectivement le cas. Les applications « gradient » de  $f$  et de  $g$ , restreintes au cercle unité  $\mathbb{S}^1 \subset A$ , s'identifient à des lacets

$$\begin{array}{ccc} \text{grad } f : & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow \mathbb{E}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto (x, y) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{grad } g : & \mathbb{S}^1 & \longrightarrow \mathbb{E}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto (0, 1) \end{array}$$

qui évitent l'origine  $O$ . Le premier tourne une fois autour de  $O$  alors que le second est un lacet constant. L'existence d'une famille de fonctions  $h_t : A \longrightarrow \mathbb{R}$  permettant de passer de  $f$  à  $g$  sans créer de plans horizontaux induirait une homotopie  $\text{grad } h_t : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$  entre  $\text{grad } f$  et  $\text{grad } g$  ce qui impliquerait que le nombre de tours autour de  $O$  de ces deux lacets devrait être le même. Contradiction.

Considérons une variation du même problème, il s'agit maintenant de passer de  $f$  à  $-f$  sans créer de plans horizontaux.



Là encore il semble que le problème soit impossible, mais cette fois l'argument précédent ne s'applique pas car les lacets  $\text{grad } f$  et  $-\text{grad } f$  effectuent le même nombre de tours autour de  $O$  et sont donc homotopes. En particulier l'obstruction « évidente » de l'exemple précédent s'évanouit et on chercherait vainement un nouvel argument permettant d'aboutir à une contradiction : contrairement à ce que l'intuition suggère, cette fois il est bel et bien possible de passer d'un cône à l'autre sans faire apparaître de plans horizontaux. Quelques dessins expliquant ce petit miracle figurent à la fin de ce texte en annexe. Mais l'essentiel est ailleurs : dans les deux exemples que l'on vient de parcourir, la réponse à la question posée ne semble dépendre que d'un seul fait, celui de l'existence ou non d'une homotopie joignant les fonctions « gradient ». Pour le dire brièvement, la simple disparition d'une obstruction *homotopique* a induit une réponse positive à un problème *différentiel*.

Voyons cela de plus près. Notons  $\mathcal{R}$  la condition différentielle qui porte sur  $f$ , c'est-à-dire *in fine*, l'ensemble  $\mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$ . Une fonction  $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que

$$\forall a \in A \quad \text{grad } h_a \in \mathcal{R}$$

est dite *solution* de la *relation différentielle*  $\mathcal{R}$  et on note  $\text{Sol}(\mathcal{R})$  l'espace de toutes les solutions de  $\mathcal{R}$ . Les deux problèmes précédents se reformulent ainsi :

QUESTION.— Les fonctions  $f$  et  $g$  (resp.  $f$  et  $-f$ ) sont-elles dans la même composante connexe par arcs de  $Sol(\mathcal{R})$  ?

Puisque l'espace  $Sol(\mathcal{R})$  s'injecte (modulo les fonctions constantes) continûment dans l'espace  $\Gamma(\mathcal{R}) = C^0(A, \mathcal{R})$  des applications continues de  $A$  dans  $\mathcal{R}$  au moyen de la flèche

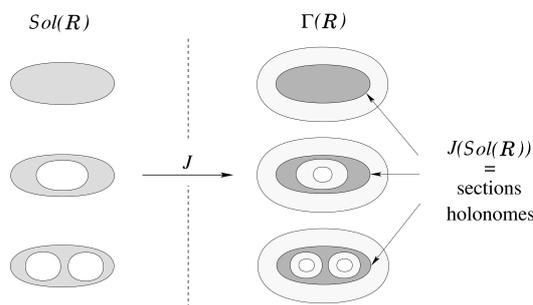
$$J: \begin{array}{ccc} Sol(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{R}) \\ f & \longmapsto & grad f \end{array}$$

une condition nécessaire est que leurs images par  $J$  habitent la même composante de  $\Gamma(\mathcal{R})$ . Cette dernière condition revient à demander que les applications « gradient » (restreintes au cercle unité) effectuent le même nombre de tours autour de l'origine. Ce n'est pas le cas pour  $f$  et  $g$  qui, par conséquent, vivent dans des composantes différentes de  $Sol(\mathcal{R})$ . Et c'est la raison pour laquelle la réponse à la question du premier problème est négative. En revanche, pour  $f$  et  $-f$  le nombre de tours est le même ce qui signifie donc que  $J(f)$  et  $J(-f)$  sont dans la même composante de  $\Gamma(\mathcal{R})$ . Se pose alors la question de la réciproque : si  $J(f)$  et  $J(-f)$  habitent la même composante de  $\Gamma(\mathcal{R})$  en est-il de même, dans  $Sol(\mathcal{R})$ , pour  $f$  et  $-f$  ? Comme on l'a vu la réponse est oui – c'est notre petit miracle – mais en fait quelque chose de bien plus fort a lieu : il se trouve que l'application  $J$  est une *équivalence d'homotopie*. Ceci signifie que les espaces  $Sol(\mathcal{R})$  et  $\Gamma(\mathcal{R})$  sont homotopiquement indiscernables. En particulier,  $J$  fait correspondre bijectivement les composantes entre elles.

Au bilan, nous avons une relation différentielle  $\mathcal{R}$  et une question concernant l'espace  $Sol(\mathcal{R})$  des solutions de cette relation. On a constaté que cet espace se voit de façon naturelle comme un sous-espace d'un espace incomparablement plus facile à appréhender :  $\Gamma(\mathcal{R})$ . Ce dernier, traditionnellement appelé *espace des sections de la relation différentielle  $\mathcal{R}$* , est simplement composé des fonctions continues  $\sigma : A \rightarrow \mathcal{R}$ . Parmi elles, un petit nombre provient du gradient d'une fonction

$$\sigma = grad f \quad \text{où} \quad f : A \rightarrow \mathbb{R},$$

elles sont alors dites *holonomes* et correspondent précisément à l'image par  $J$  de  $Sol(\mathcal{R})$ .



Dans cette représentation schématique,  $Sol(\mathcal{R})$  et  $\Gamma(\mathcal{R})$  possèdent toutes deux trois composantes et  $J$  les fait correspondre bijectivement (en fait, ici,  $J$  est une *équivalence d'homotopie*).

De nombreuses questions, en géométrie et ailleurs, reviennent à résoudre une relation différentielle  $\mathcal{R}$ , mais, en général, les espaces  $Sol(\mathcal{R})$  et  $\Gamma(\mathcal{R})$  sont topologiquement très différents l'un de l'autre.

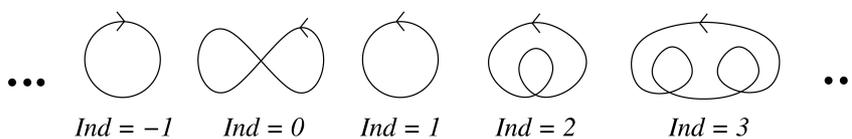
**Définition.**— On dit que  $\mathcal{R}$  satisfait au *h-principe* (ou au *principe homotopique*) si l'inclusion naturelle  $J : Sol(\mathcal{R}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{R})$  est une équivalence d'homotopie.

*A priori*, montrer qu'une relation différentielle satisfait au *h-principe* peut sembler incomparablement plus difficile, plus coûteux, que de résoudre directement le problème initial. Cette impression doit cependant être modérée pour deux raisons. D'abord il existe une théorie, initiée et largement développée par M. Gromov, qui permet dans de nombreuses cas de démontrer rapidement et simplement l'existence d'un *h-principe*. Ensuite, bien sûr, le gain obtenu dépasse très largement le prix payé : au final, en plus de la réponse à un problème donnée, on hérite d'une description homotopique de l'espace de *toutes* les solutions. En particulier, la relation différentielle  $\mathcal{R}$  admet une solution si et seulement si  $\Gamma(\mathcal{R})$  est non vide et la classification de l'ensemble des solutions découle de celle des composantes de  $\Gamma(\mathcal{R})$ . En d'autres termes, le problème différentiel se réduit miraculeusement à un « simple » problème topologique. C'est exactement ce qui se passe pour la relation différentielle de nos deux exemples introductifs. On montre en effet qu'elle satisfait au *h-principe* et ceci implique que le nombre de tours de l'application « gradient » est la seule obstruction à l'existence d'une homotopie dans  $Sol(\mathcal{R})$  permettant de passer d'une solution (la fonction  $f$ ) à une autre ( $g$  ou  $-f$ ).

## 2. Trois exemples célèbres

Satisfaire au *h-principe* est une propriété extrêmement forte pour une relation différentielle puisqu'elle implique que l'aspect « analyse » du problème disparaît complètement au profit de la seule topologie. Il est donc naturel de penser que de telles relations différentielles doivent être excessivement rares. Pourtant de nombreux problèmes en géométrie répondent à un *h-principe*, en voici quelques exemples historiques.

**Le théorème de Whitney-Graustein (1937).**— *Les courbes fermées régulières et orientées du plan sont classées par leur seul indice.*



Décryptons cet énoncé laconique. Une courbe fermée orientée  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est dite *régulière* si elle est  $C^1$  et si la dérivée de  $f$  ne s'annule jamais :

$$f' : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

En particulier, la courbe admet une droite tangente en chaque point de  $\mathbb{S}^1$ . Deux courbes régulières  $f$  et  $g$  étant données, on dit qu'elles sont *régulièrement homotopes* s'il existe une homotopie  $(h_t)_{t \in [0,1]}$  de courbes régulières telle que  $h_0 = f$  et  $h_1 = g$ . Le problème auquel répond le théorème de Whitney-Graustein est celui de la classification des courbes régulières fermées à homotopie régulière près. La relation différentielle est donc l'ensemble  $\mathcal{R} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  et le problème revient à déterminer l'ensemble des composantes (connexes par arcs) de

$$\text{Sol}(\mathcal{R}) = \{f \in C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \mid f' \in C^0(\mathbb{S}^1, \mathcal{R})\}.$$

On montre – et c'est le point clé – que  $\mathcal{R}$  satisfait au  $h$ -principe, par conséquent les composantes de  $\text{Sol}(\mathcal{R})$  correspondent *via*  $J$  avec celles de  $\Gamma(\mathcal{R}) := C^0(\mathbb{S}^1, \mathcal{R})$  :

$$\begin{array}{ccc} J: \text{Sol}(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{R}) \\ f & \longmapsto & f'. \end{array}$$

Or, les composantes de  $\Gamma(\mathcal{R})$  sont en bijection avec  $\mathbb{Z}$ , la bijection étant donnée par le nombre de tours d'un représentant quelconque de la composante. L'indice  $\text{Ind}(f)$  d'une courbe  $f$  étant le nombre de tours de  $f'$  autour de l'origine  $O$ , il classe donc à lui-seul les courbes régulières fermées et orientées.

**Le retournement de la sphère (S. Smale, 1958).**– Une application  $f : M \rightarrow N$  de classe  $C^1$  d'une variété dans une autre est une *immersion* si en tout point  $m \in M$ , le rang de la différentielle  $df_m$  est égal à la dimension de  $M$ . Dans ce cas, l'image de  $M$  par  $f$  possède en tout point un espace tangent<sup>2</sup>. Deux immersions  $f$  et  $g$  sont *régulièrement homotopes* s'il existe une homotopie  $(h_t)_{t \in [0,1]}$  parmi les immersions telle que  $h_0 = f$  et  $h_1 = g$ . Un célèbre théorème de Smale énonce qu'il existe une homotopie régulière qui permet de « retourner » la sphère, c'est-à-dire de passer de l'inclusion naturelle  $i : \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  à l'immersion  $r \circ i : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  où  $r$  est une réflexion de  $\mathbb{R}^3$  par un plan vectoriel (on trouvera facilement sur la toile un petit film montrant le retournement). Ce résultat contre-intuitif est une conséquence d'un fait plus général : si  $\dim M < \dim N$ , la relation différentielle des immersions  $\mathcal{I}$  satisfait au  $h$ -principe (M. Hirsch, 1959). Autrement dit l'application

$$\begin{array}{ccc} J: \text{Imm}(M, N) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{I}) = \text{Mono}(TM, TN) \\ f & \longmapsto & df \end{array}$$

où  $\text{Imm}(M, N)$  est l'espace des immersions de  $M$  dans  $N$  et  $\text{Mono}(TM, TN)$  celui des monomorphismes<sup>3</sup> de fibrés de  $TM$  dans  $TN$  est une équivalence d'homotopie. La théorie de l'obstruction montre rapidement que si  $M = \mathbb{S}^2$  et  $N = \mathbb{R}^3$  alors l'espace  $\text{Mono}(TM, TN)$  est connexe, par conséquent, deux immersions quelconques  $f, g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sont toujours régulièrement homotopes et en particulier  $f = i$  et  $g = r \circ i$ .

**Le théorème de Nash-Kuiper (1954-1955).**– Jusqu'à présent, tous nos exemples ont fait intervenir une condition différentielle *ouverte* mais il existe aussi des relations différentielles *fermées*<sup>4</sup> qui satisfont au  $h$ -principe. J. Nash et N. Kuiper ont

<sup>2</sup> ... et même plusieurs aux points multiples.

<sup>3</sup> Applications continues envoyant chaque fibre de  $TM$  linéairement et injectivement dans les fibres de  $TN$ .

<sup>4</sup> Concrètement, définies par une série d'inégalités larges et/ou d'égalités.

montré que c'est le cas pour la relation différentielle des immersions isométriques  $\mathcal{I}_{iso}$  d'une variété riemannienne  $(M, g)$  dans l'espace euclidien  $\mathbb{E}^q$ ,  $q > \dim M$  (une immersion  $f : (M, g) \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^q$  est *isométrique* si elle conserve les longueurs). Ainsi, l'application

$$J : \begin{array}{ccc} \mathcal{I}mm_{iso}(M, \mathbb{E}^q) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{I}_{iso}) = Mono_{iso}(TM, T\mathbb{E}^q) \\ f & \longmapsto & df \end{array}$$

est une équivalence d'homotopie. Ceci a une conséquence très surprenante : l'espace  $Mono(TM, T\mathbb{E}^q)$  se rétractant sur celui des monomorphismes isométriques  $Mono_{iso}(TM, T\mathbb{E}^q)$ , tout ce qui peut se réaliser dans le monde des immersions peut être réalisé dans le monde des immersions isométriques de classe  $C^1$  ! Par exemple, il est possible d'effectuer le retournement de la sphère isométriquement... En rentrant un peu plus dans la technologie du  $h$ -principe, on peut même démontrer un résultat encore plus surprenant : il existe un plongement isométrique de la sphère unité dans une boule arbitrairement petite de  $\mathbb{E}^3$  ! Bien sûr, les immersions en question sont bien  $C^1$ , mais la conservation de la courbure de Gauss par isométrie interdit qu'elles soient  $C^2$ . La question de leur régularité  $C^{1,\alpha}$  est ouverte.

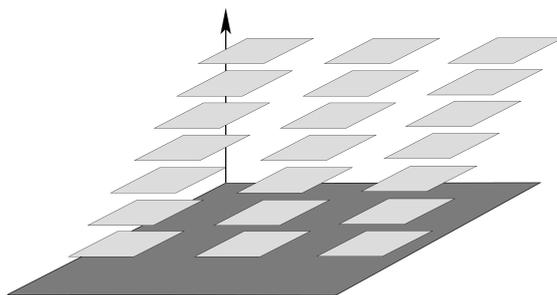
**Flexibilité versus rigidité.**— Il existe de nombreux autres exemples où le  $h$ -principe apparaît : en géométrie riemannienne  $C^2$ , en géométrie symplectique, en géométrie de contact, etc. Et dans certains domaines, en topologie symplectique notamment, une question plus générale finit par occuper une place prépondérante : les relations qui satisfont le  $h$ -principe sont-elles rares ou au contraire abondantes ? Pour reprendre une métaphore due à Y. Eliashberg et N. Mischachev, il se pourrait que les relations qui vérifient le  $h$ -principe ne constituent qu'un îlot au milieu de l'océan des autres relations, ou à l'inverse, que ce soit les relations qui ne satisfont pas le  $h$ -principe qui se réduisent à un îlot... La difficulté est qu'en général, étant donnée une relation différentielle, il est bien délicat de savoir si elle satisfait ou non au  $h$ -principe et il faut parfois développer des outils très sophistiqués pour démontrer l'échec du  $h$ -principe. Dans ce cas, on parle de *rigidité* : une propriété homotopiquement possible dans  $\Gamma(\mathcal{R})$  se trouve interdite par un argument « sophistiqué ». Dans le cas contraire, c'est-à-dire quand le  $h$ -principe est satisfait, la situation est dite *flexible* : tout ce qui n'est pas homotopiquement interdit a effectivement lieu.

### 3. Le chemin de montagne

Les trois exemples précédents sont tous antérieurs aux années 70, autrement dit, M. Hirsch, N. Kuiper, J. Nash, S. Smale et bien d'autres faisaient du  $h$ -principe sans le savoir. Il revient à M. Gromov d'avoir mis en évidence cette notion fondamentale mais également d'avoir produit nombre de techniques et de théorèmes qui assurent, à partir de propriétés topologiques et géométriques d'une relation différentielle, qu'elle satisfait au  $h$ -principe. Ses techniques, ses théorèmes mais aussi ses réflexions sont rassemblés dans un livre dont la réputation est immense et dont il n'est pas très difficile de prédire qu'il restera pour longtemps une mine d'or pour les mathématiciens : *Partial Differential Relations*. Il est bien entendu impossible, en quelques lignes, de donner ne serait-ce qu'un résumé des travaux qui y sont développés, mais il est tout de même possible d'avoir une idée de ce

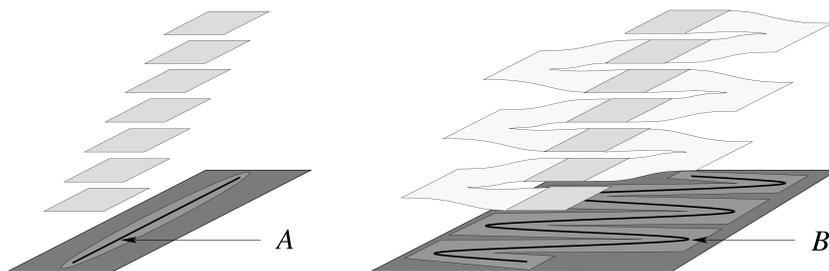
qui, très souvent, fait marcher la machine du  $h$ -principe : le truc dit de *la rampe de garage* ou du *chemin de montagne*.

Sous des formes variées, ce truc est en effet au cœur des différentes méthodes « classiques » utilisées pour démontrer un  $h$ -principe. La version que nous allons présenter est due à Y. Eliashberg et N. Mischachev. Elle apparaît naturellement lorsque l'on considère le problème suivant, fondamental pour la théorie : étant donnée une fonction  $f_0 : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et un champ de plans  $R$  le long du graphe de cette fonction, peut-on trouver une fonction  $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  qui soit (arbitrairement)  $C^0$ -proche de  $f_0$  et dont le champ de plans tangents soit (arbitrairement)  $C^0$ -proche du champ de plans  $R$  ?



Par exemple, ici, on a choisi  $f_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x = (x, y) \mapsto x$ ,  
et le champ de plan  $R$  est horizontal.

Dans cet énoncé, il faut comprendre que le champ de plans  $R$  joue le rôle de la contrainte imposée par la relation différentielle  $\mathcal{R}$  et que, si cette dernière est ouverte, la fonction  $f$  recherchée en donne une solution. Comme on le voit sur la figure ci-dessus, il n'y a, en général, aucun espoir de répondre positivement à la question posée par ce problème. En revanche, un résultat relativement récent – le théorème d'approximation holonome d'Eliashberg-Mischachev – montre que la réponse est *toujours* positive si l'ouvert  $\mathcal{U}$  est un voisinage suffisamment petit d'une sous-variété  $A$  de codimension au moins un et si  $f$  est définie, non plus sur  $\mathcal{U}$ , mais sur un voisinage suffisamment petit  $\mathcal{V}$  d'une déformation  $B$  de la sous-variété  $A$ .



Le dessin de droite montre comment est construit la fonction  $f$  qui est  $C^0$ -proche de  $f_0$  et dont le champ de plans tangents est  $C^0$ -proche de  $R$  au dessus d'un voisinage d'une déformation  $B$  de  $A$ .

Concrètement,  $B$  ressemble à une ondulation de la sous-variété  $A$ , avec d'autant plus d'oscillations que l'on demande à  $B$  d'être proche de  $A$ . C'est ce phénomène

d'oscillation qui crée un « chemin de montagne », bien visible sur l'illustration ci-dessus à droite. Notons que, si la relation différentielle est invariante par difféomorphisme (comme celle des immersions  $\mathcal{I}$  par exemple), on peut ensuite composer  $f$  par un difféomorphisme de la base pour obtenir une solution au dessus de  $A$ .

## 4. Une bibliographie succincte

### 4.1. Trois références incontournables

Y. ELIAHSBERG, N. MISHACHEV, *Introduction to the h-principle*, Graduate Studies in Mathematics, Vol 48, Amer. Math. Soc., Providence, 2002.

M. GROMOV, *Partial Differential Relations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, 1986.

D. SPRING, *Convex Integration Theory*, Birkhäuser, 1998.

### 4.2. Trois ouvrages pour s'initier rapidement

M. ADACHI, *Embeddings and Immersions*, Translation of Math. Monographs, vol 124, Amer. Math. Soc, 1993.

H. GEIGES, *h-principle and flexibility in geometry*, Mem. of the Amer. Math. Soc., n. 164, 2003.

E. GIROUX, *Flexibilité en géométrie symplectique*, cours ENS-Lyon, 1993.

### 4.3. Trois promenades

M. AUDIN ET P. PANSU, *Le h-principe de Mischa Gromov*, sur le site *Images des Mathématiques*,

<http://images.math.cnrs.fr/Le-h-principe-de-Misha-Gromov.html>

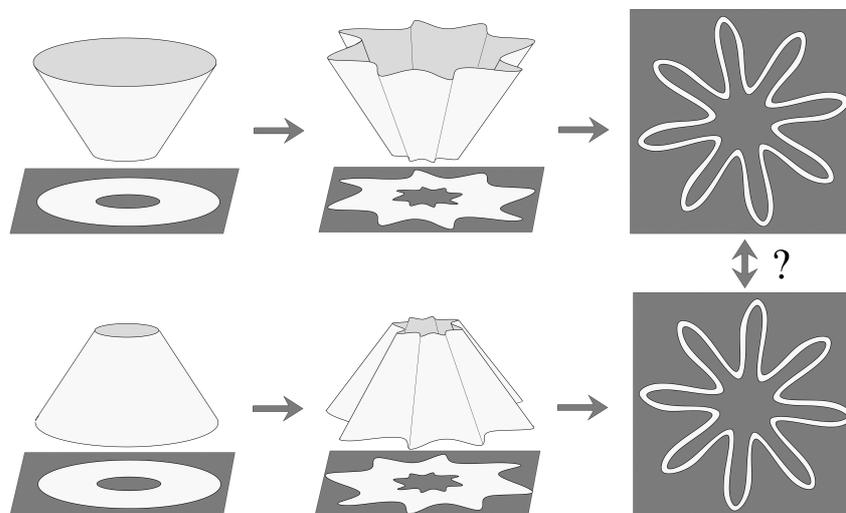
D. SPRING, *The Golden Age of Immersion Theory in Topology : 1959-1973. A Mathematical Survey from a Historical Perspective*, Bull. of the Amer. Math. Soc., Vol. 42 (2005), 163-180.

C. VILLANI, *Paradoxe de Scheffer-Shnirelman revu sous l'angle de l'intégration convexe [d'après C. De Lellis et L. Székelyhidi]*, Séminaire Bourbaki, 2008-2009, numéro 1001.

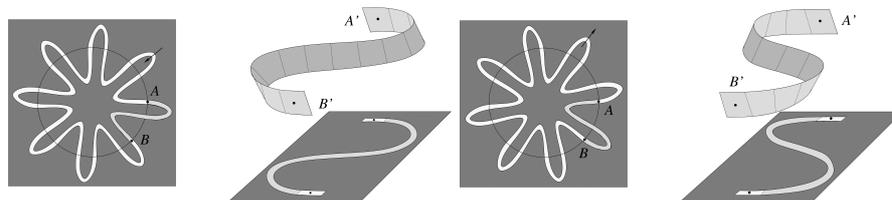
## 5. Annexe

Le petit problème de la première partie de ce texte est tiré d'un exercice proposé dans l'ouvrage de Y. Eliashberg et N. Mishachev (p. 37-38). Je donne ci-dessous ma solution personnelle, je suis intéressé par toute solution plus courte ou simplement différente.

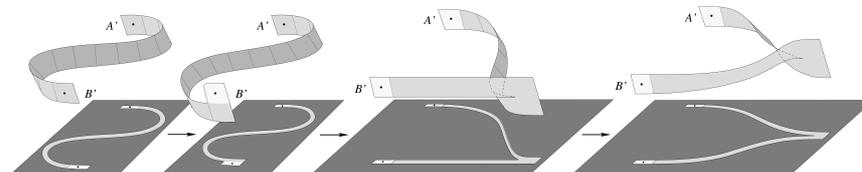
La première étape consiste à « plisser » les cônes jusqu'à ce que le domaine de définition ressemble à un fin ruban oscillant de part et d'autre du cercle unité. Cette opération ne fait bien sûr pas apparaître de plans tangents horizontaux mais, en revanche, elle modifie le domaine de définition. Ce petit inconvénient n'est pas majeur, il sera corrigé plus tard.



Les graphes « oscillant » périodiquement, on sélectionne dans chacun des deux domaines de définition représentés à droite ci-dessus une partie correspondant à une seule oscillation. Dans les figures qui suivent, on a fait correspondre sur le côté droit de chaque domaine de définition la portion de graphe correspondant à une oscillation.

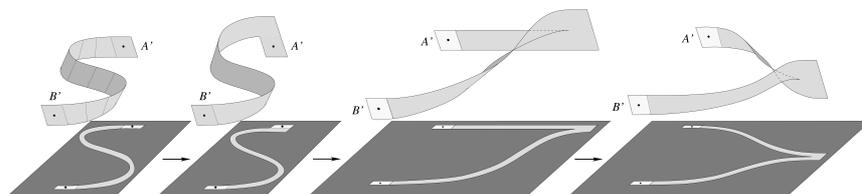


On déforme la portion du premier graphe comme indiqué dans les illustrations ci-dessous. Le dernier dessin fait clairement apparaître le premier virage d'un chemin de montagne.

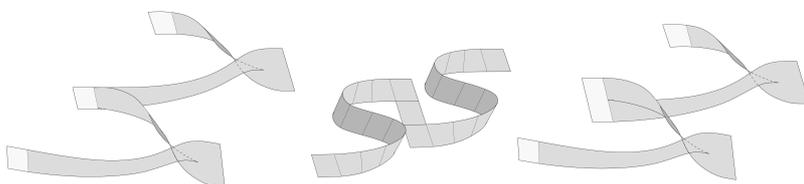


La portion de l'autre graphe se déforme similairement. Le dernier dessin est exactement le même que celui figurant en dernière position ci-dessus.

Au cours du mouvement les voisinages de  $A'$  et de  $B'$ , colorés en clair sur les dessins, ne sont pas modifiés. Ceci pose un problème au moment de recoller entre



elles les déformations correspondant à chaque « oscillation » puisqu'il apparaît des zones qui ne sont plus des graphes (dessin ci-dessous à gauche). La solution de ce petit problème est simple : il suffit, avant d'effectuer ces déformations, de réaliser une homotopie qui allonge verticalement la zone de recollement (dessin du milieu). De cette façon, l'arête cuspidale disparaît pour faire place à un virage du chemin de montagne (dessin de droite).



On peut donc, au cours du mouvement, recoller entre elles les déformations correspondant à chaque « oscillation ». On passe ainsi du cône au cône renversé sans faire apparaître de plans tangents horizontaux. En revanche, le domaine de définition a été déformé au cours de l'homotopie. Ce dernier défaut se corrige facilement, il suffit de composer ladite l'homotopie par une difféotopie<sup>5</sup> du plan qui, à chaque étape, envoie le domaine de définition sur l'anneau de départ. L'homotopie ainsi obtenue est toujours solution de la relation différentielle puisque celle-ci est clairement invariante par difféomorphisme.

*Toutes les figures illustrant ce texte ont été réalisées en utilisant le logiciel libre Xfig.*

*Merci à Damien Gayet, Francis Lazarus et Boris Thibert qui, par leurs nombreuses suggestions, m'ont permis d'améliorer grandement la rédaction de ce texte.*

<sup>5</sup> Une homotopie chez les difféomorphismes.

## Sur la dynamique des solitons : stabilité, collision et explosion

Yvan Martel<sup>1</sup> et Pierre Raphaël<sup>2</sup>

---

Les solitons sont au cœur de la modélisation de nombreux phénomènes physiques : propagation d'ondes en mécanique des fluides, formation de faisceaux lasers en optique non-linéaire, dynamique des galaxies en astrophysique, etc. La compréhension mathématique de ces objets et de leur rôle dans la description des dynamiques d'ondes non-linéaires est depuis les années 60 un sujet de recherche extrêmement actif qui met en œuvre des points de vue très divers : théorie classique des équations aux dérivées partielles (théorie des EDP elliptiques et de l'intégrabilité complète), analyse fonctionnelle et analyse harmonique, théorie des systèmes dynamiques (théorie des perturbations, fonctionnelles de Liapounov), des ingrédients classiques de la physique mathématique (analyse spectrale), ainsi que des contributions importantes de l'analyse numérique.

L'objectif de ce texte est de présenter un aperçu de certaines problématiques modernes liées à l'étude des solitons allant de résultats classiques d'existence et de stabilité à des résultats plus récents de stabilité asymptotique, collision et explosion, issus principalement de travaux récents des deux auteurs en collaboration avec Frank Merle (Université de Cergy-Pontoise et IHÉS).

### 1. Solitons et propagation d'ondes non-linéaires

#### 1.1. Solitons et équation de Schrödinger non-linéaire

Les solitons ou ondes solitaires sont au centre de la description de la propagation d'ondes non-linéaires et ont surgi historiquement dans des domaines de la physique très divers allant de la mécanique des fluides à l'optique non-linéaire et la physique des plasmas en passant par l'astrophysique. Ils correspondent à des objets non-linéaires exceptionnels pour lesquels se compensent exactement deux processus physiques génériques : la dispersion et la concentration.

Prenons par exemple la propagation d'un faisceau laser dans un milieu non-linéaire, typiquement une fibre optique supposée transporter un signal électromagnétique sur de longues distances. Deux phénomènes dominants entrent en jeu : la dispersion, c'est-à-dire de façon schématique la propension du faisceau à s'étaler en espace comme il le ferait dans le vide, et la concentration, conséquence de l'interaction du milieu et de l'onde qui tend à focaliser les rayons. La dispersion permet la propagation du faisceau, la focalisation permet de confiner cette propagation au centre de la fibre optique. Partant des équations de Maxwell, la recherche de solutions de type onde plane se propageant dans une direction donnée aboutit

---

<sup>1</sup> Université de Versailles-Saint-Quentin-en-Yvelines et Institut Universitaire de France

<sup>2</sup> Université Paul Sabatier Toulouse

dans certains régimes au modèle simplifié de Schrödinger non-linéaire gouvernant l'équation de l'enveloppe de l'onde, [37] :

$$(1) \quad (\text{NLS}) \quad \begin{cases} i\partial_t \psi + \Delta \psi + \psi |\psi|^2 = 0, \\ \psi(0, x) = \psi_0(x), \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad \psi(t, x) \in \mathbb{C},$$

où typiquement  $N = 1, 2, 3$  dépendant de la modélisation physique. La variable de « temps »  $t$  correspond en réalité dans la modélisation physique à la direction de propagation de l'onde. D'un point de vue mathématique, la dispersion est associée à l'équation de Schrödinger linéaire :

$$(2) \quad (\text{LS}) \quad i\partial_t \psi + \Delta \psi = 0,$$

qui conserve la masse totale de l'onde :

$$\forall t \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\psi(t, x)|^2 dx = \int |\psi_0(x)|^2 dx,$$

mais disperse le paquet d'ondes, ce que l'on peut mesurer par exemple via la décroissance locale de la masse :

$$\forall R > 0, \quad \int_{|x| \leq R} |\psi(t, x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Contrairement à (2) le système *non-linéaire* complet (1) admet des solutions exceptionnelles pour lesquelles dispersion et concentration se compensent exactement et qui se propagent *sans aucune déformation* : ce sont les solitons ou ondes solitaires. Dans le cas de (1), ce sont en fait des solutions périodiques en temps de la forme

$$\psi(t, x) = e^{it} Q(x)$$

où le profil  $Q$  doit résoudre l'EDP elliptique non-linéaire :

$$(3) \quad \Delta Q - Q + Q|Q|^2 = 0.$$

Le phénomène de compensation entre dispersion et concentration apparaît naturellement dans des modélisations physiques diverses, notamment en mécanique des fluides et en physique des plasmas où la modélisation des phénomènes dominants par des ondes solitaires s'est avérée extrêmement pertinente, voir [37] pour une plus ample introduction.

## 1.2. L'équation de Korteweg-de-Vries : un cas complètement intégrable

Une des plus anciennes découvertes d'ondes solitaires est due à Korteweg et de Vries [15], qui ont modélisé des ondes exceptionnelles se propageant à la surface de l'eau sur de très longues distances sans déformation. Une réduction aujourd'hui classique et qui revêt un caractère universel, [31], permet de modéliser la dynamique complexe de la surface libre de l'eau dans certains régimes par le modèle simplifié qui décrit *la dynamique d'enveloppe* dite de Korteweg-de Vries (KdV) :

$$(4) \quad (\text{KdV}) \quad \partial_t u + \partial_x(\partial_x^2 u + u^2) = 0 \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad u(t, x) \in \mathbb{R}.$$

Ici  $u(t, x)$  mesure la hauteur de la surface de l'eau par rapport à un niveau de référence plat. L'onde solitaire correspond alors à une onde progressive – une vague – se propageant sans déformation à la vitesse  $c > 0$ , soit :

$$u(t, x) = Q_c(x - ct).$$

Ceci nous conduit à résoudre l'EDP non-linéaire  $(Q_c'' + Q_c^2 - cQ_c)' = 0$  qui en une dimension d'espace se résout explicitement avec conditions nulles à l'infini :

$$Q_c(x) = Q_c(x) = cQ(\sqrt{cx}) \quad \text{où} \quad Q(x) = \frac{3}{2} \cosh^{-2}\left(\frac{x}{2}\right).$$

D'un point de vue mathématique, le modèle de (KdV) possède une structure exceptionnelle d'*intégrabilité complète*. Cette notion a constitué une découverte majeure de l'analyse des années 60-70 et a nourri jusqu'à aujourd'hui une littérature considérable. Sans rentrer dans le détail de la définition des paires de Lax ([20]), contentons-nous de dire qu'une structure extrêmement rigide du flot de (KdV) permet via une transformation explicite – le scattering inverse – de ramener le problème non-linéaire sur un problème *linéaire*. Une manifestation de cette rigidité du flot est par exemple l'existence d'une *infinité* de lois de conservation.

L'intégrabilité complète permet d'obtenir plusieurs résultats qualitatifs fins :

(i) *Comportement en temps long des solutions de (KdV)* : un premier résultat spectaculaire est la description en temps long du flot de (KdV) (voir [7] pour une démarche rigoureuse) : toute solution dont la donnée initiale est régulière et suffisamment décroissante en espace admet une décomposition :

$$(5) \quad u(t, x) = \sum_{k=1}^N Q_{c_k}(x - x_k - c_k t) + \varepsilon(t, x) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x > 0} |\varepsilon(t, x)| = 0,$$

où  $0 < c_1 < \dots < c_N$ ,  $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$ . En d'autres termes, l'onde se décompose en un train d'ondes solitaires – dynamique de type particulière – et une onde dispersée  $\varepsilon$  qui génériquement peut emporter une partie de l'énergie initiale du système. L'onde solitaire apparaît donc comme un attracteur universel du flot Hamiltonien associé à (KdV).

(ii) *Interaction de solitons* : (5) décrit l'état asymptotique du système en temps grand, les ondes solitaires sont alors découplées. Une question importante pour la physique et l'analyse est celle de l'interaction et de la collision des solitons qui mènent asymptotiquement à cet état découplé. Un fait spectaculaire est l'existence de collisions de solitons complètement élastiques – sans perte d'énergie –. En effet, la transformation du scattering inverse permet d'exhiber des solutions explicites appelées *multi-solitons*. Pour commencer, on remarque que  $U_1 := Q$  (le 1-soliton) peut s'écrire

$$U_1(t, x) = \frac{3}{2} \cosh^{-2}\left(\frac{x-t}{2}\right) = 6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log(1 + e^{x-t}).$$

Pour tout  $0 < c < 1$ , la fonction suivante  $U_{1,c}$  est une solution 2-soliton typique de (KdV) :

$$(6) \quad U_{1,c}(t, x) = 6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log(1 + e^{x-t} + e^{\sqrt{c}(x-ct)} + \alpha e^{x-t} e^{\sqrt{c}(x-ct)}),$$

avec  $\alpha = \left(\frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}\right)^2$ . Par une analyse asymptotique simple ([42]), on observe

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|U_{1,c}(t, x) - Q_c(x - ct) - Q(x - t - \delta)\|_{H^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \text{ avec } \delta = 2 \log \left(\frac{1 + \sqrt{c}}{1 - \sqrt{c}}\right) > 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|U_{1,c}(t, x) - Q_c(x - ct - \delta') - Q(x - t)\|_{H^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \text{ avec } \delta' = \frac{\delta}{\sqrt{c}} > 0.$$

Cette solution contient donc deux solitons  $Q$  et  $Q_c$  venant de  $t = -\infty$  et ensuite rentrant en collision élastique et dont les formes, les tailles et les vitesses (ces paramètres sont reliés) ne sont pas altérés par la collision. De plus, la collision ne produit aucune dispersion donc aucune perte d'énergie. La terminologie *solitons* a été introduite par Zabusky et Kruskal [43] (voir aussi Fermi, Pasta and Ulam [8]), après la découverte *numérique* de cette propriété remarquable. Il est aussi intéressant de remarquer que les trajectoires de ces deux solitons sont décalées par la collision ( $\delta, \delta' > 0$ ). Des expressions plus générales, mais similaires, pour un nombre arbitrairement grand de solitons, de tailles quelconques deux-à-deux différentes, sont disponibles [31].

### 1.3. Étude des ondes solitaires dans le cas non-intégrable

D'autres équations d'évolution issues de la physique sont complètement intégrables, [AC02]. Mais cette propriété exceptionnelle a le défaut d'être instable par perturbation de l'équation, ce qui ne permet pas de raffiner la modélisation physique. Un effort considérable ces trente dernières années a été entrepris pour développer une théorie beaucoup plus robuste et générale avec des apports importants de différentes parties des mathématiques. Notons néanmoins à titre de comparaison que la conjecture de simplification générique en ondes solitaires qui généraliserait (5) aux cas non-intégrables, reste encore largement inaccessible, voir Tao [39] pour les plus récents développements.

La suite de cet article est dédiée à la présentation de certaines problématiques dans l'étude mathématique moderne des solitons et des ondes non-linéaires associées. Nous rappellerons tout d'abord comment la théorie des EDP elliptiques et des techniques variationnelles ont permis dans les années 80 de démontrer l'existence et la stabilité d'ondes solitaires pour une large classe de problèmes. Nous nous concentrerons ensuite sur trois problématiques récentes au cœur des travaux des auteurs :

- (i) Étude du flot autour d'une onde solitaire et stabilité asymptotique.
- (ii) Étude de l'interaction de deux solitons dans un cadre non-intégrable.
- (iii) Étude de la concentration de l'onde et du phénomène d'*explosion* dans certains régimes.

## 2. Stabilité du soliton

Nous déclinons dans cette section la problématique d'étude du flot autour d'un soliton dans le cas particulier des équations de (KdV) généralisées. Cet exemple canonique a l'avantage de permettre un certain nombre de calculs explicites et de profiter de l'intuition du cas complètement intégrable (4). Nous reviendrons dans

la dernière section sur (NLS) et sur les liens étroits – non évidents à première vue – qui existent entre ces deux équations.

## 2.1. L'équation de KdV généralisée

Considérons l'équation de (KdV) généralisée :

$$(7) \quad (\text{gKdV}) \quad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x(\partial_x^2 u + u^p) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad t, x \in \mathbb{R}, \quad u(t, x) \in \mathbb{R},$$

pour  $p = 2, 3, 4$ . Les cas  $p = 2, 3$  sont complètement intégrables, contrairement au cas  $p = 4$ . On pourrait également remplacer  $u^p$  par une fonction  $g(u)$  avec suffisamment de régularité.

La première problématique est celle de la résolution locale en temps du problème de Cauchy (7). Comme pour les ODE, elle est basée sur une méthode de point fixe de type Cauchy-Lipschitz mais en dimension infinie, ce qui nécessite des estimations de dispersion fine et des effets régularisants dans des espaces fonctionnels adaptés. Les travaux pionniers sur ces techniques remontent à Kato [14], et les résultats les plus complets sur (gKdV) sont dus à Kenig, Ponce, Vega [16]. On obtient l'existence locale et l'unicité de la solution de (7) à donnée initiale fixée dans l'espace  $H^1(\mathbb{R})$  muni de la norme :

$$\|u(t)\|_{H^1} := \left( \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u)^2(t, x) + u^2(t, x) dx \right)^{1/2}.$$

En outre, pour  $1 < p < 5$ , la solution est *globale et bornée* dans cet espace, ce qui est une conséquence classique des deux lois de conservation fondamentales et de la théorie de Cauchy :

$$(8) \quad \text{Norme } L^2 : \quad \forall t \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} u^2(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}} u_0^2(x) dx,$$

$$(9) \quad \text{Energie} : \quad \forall t \geq 0, \quad E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(t))^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}} u^{p+1}(t) = E(u(0)).$$

La conservation de l'énergie est en fait une conséquence directe de la structure *Hamiltonienne* de (gKdV).

Introduisons maintenant les solitons de (gKdV) qui sont des ondes progressives de la forme  $u(t, x) = Q_c(x - ct)$ , tendant vers 0 en l'infini en  $x$ , ce qui implique pour  $Q_c$

$$(10) \quad (Q_c'' + Q_c^p)' = cQ_c'.$$

Il existe des solutions  $H^1$  de cette équation différentielle ordinaire si et seulement si  $c > 0$ , et dans ce cas la solution est explicite :

$$(11) \quad Q_c(x) = c^{\frac{1}{p-1}} Q(\sqrt{c}x) \quad \text{où} \quad Q(x) = \left( \frac{p+1}{2} \cosh^{-2} \left( \frac{(p-1)x}{2} \right) \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

En outre, en utilisant l'invariance translationnelle de (gKdV), on obtient la famille à deux paramètres d'ondes solitaires :

$$(12) \quad R_{c, x_0}(t, x) = Q_c(x - x_0 - ct), \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}_*^+.$$

## 2.2. Stabilité des solitons

On s'intéresse maintenant à une propriété qualitative des solitons, qui est leur stabilité par perturbation de la donnée initiale. En d'autres termes, étant donné  $\varepsilon, c > 0$ , peut-on trouver  $\alpha_0 > 0$  tel que pour toute donnée initiale dans un voisinage de  $Q_c$ , i.e.  $\|u_0 - Q_c\|_{H^1} < \alpha_0$ , la solution correspondante de (gKdV) reste au voisinage de l'onde solitaire :  $\forall t \geq 0, \|u(t) - Q_c(x - ct)\|_{H^1} < \varepsilon$ . Posée en ces termes, la réponse est trivialement négative puisque

$$\forall c_2 > c_1 > 0, \limsup_{t \rightarrow +\infty} \|Q_{c_2}(x - c_2 t) - Q_{c_1}(x - c_1 t)\|_{H^1} = \|Q_{c_1}\|_{H^1} + \|Q_{c_2}\|_{H^1},$$

même si  $c_1$  et  $c_2$  sont arbitrairement proches. Le mieux qu'on puisse espérer est une *stabilité orbitale*, soit la stabilité de la famille entière d'ondes solitaires (12) modulo le paramètre de translation au sens suivant : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha_0 > 0$  tel que si  $\|u_0 - Q_c\|_{H^1} \leq \alpha_0$ , alors il existe une fonction  $y(t)$  telle que

$$(13) \quad \forall t \geq 0, \quad \|u(t) - Q_c(\cdot - y(t))\|_{H^1} \leq \varepsilon.$$

Il résulte de plusieurs travaux ([5], [10], [41]) que  $Q_c$  est orbitalement stable pour (gKdV) si et seulement si

$$(14) \quad \frac{d}{dc} \left( \int Q_c^2 \right) > 0.$$

L'équation (11) implique  $\int Q_c^2 = c^{\frac{2}{p-1}-\frac{1}{2}} \int Q^2$  et donc  $Q_c$  est stable si et seulement si  $p < 5$ .

La démonstration de la stabilité dans [5] et [41] repose sur la *caractérisation variationnelle* du soliton qui minimise l'énergie à masse donnée, soit :

$$(15) \quad E(Q_c) = \min_{v \in H^1, \|v\|_{L^2} = \|Q_c\|_{L^2}} E(v)$$

et l'infimum est atteint sur  $Q_c$  à une translation près :

$$(16) \quad \forall v \in H^1, E(v) = E(Q_c) \text{ et } \|v\|_{L^2} = \|Q_c\|_{L^2} \Rightarrow v \equiv Q_c(\cdot - y) \text{ pour } y \in \mathbb{R}.$$

En outre, les techniques de *concentration-compacité* introduites par P.-L. Lions au début des années 80 ([22]) permettent de décrire toutes les suites minimisantes de (15) et de conclure qu'une fonction dans  $H^1$  dont l'énergie et la norme  $L^2$  sont proches de celle de  $Q_c$  doit nécessairement elle-même être proche de  $Q_c$  dans  $H^1$  à une translation près. La stabilité orbitale de  $Q_c$  par le flot de (gKdV) est maintenant une conséquence directe des lois de conservation (8), (9).

## 2.3. Stabilité asymptotique

La stabilité orbitale est loin de tout dire sur le comportement de la solution. Une question classique en systèmes dynamiques est celle de l'état asymptotique du système quand  $t \rightarrow +\infty$ . L'intuition fondamentale est modélisée sur le théorème général de décomposition (5) obtenu dans le cas intégrable. Des travaux récents (voir [24] et certains autres travaux cités dans cet article) ont permis de démontrer la stabilité asymptotique du soliton au sens suivant : si l'on perturbe un soliton  $Q_c$ , la solution correspondante se décompose en une partie onde solitaire avec une

vitesse  $c^+ > 0$  proche mais a priori différente de  $c$ , qui est la seule « grosse » onde formée par le système, et un reste plus lent correspondant à une éjection d'énergie qui peut a priori contenir d'autres solitons, nécessairement petits, et de la radiation. Plus précisément, si  $\|u_0 - Q_c\|_{H^1} \leq \alpha_0$ , il existe un paramètre de translation  $y(t)$  et une valeur limite  $c^+$  proche de  $c$  tels que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, x) - Q_{c^+}(x - y(t))\|_{H^1(x > \frac{1}{10}t)} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y'(t) = c^+.$$

Comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y'(t) = c^+$  proche de  $c$ , la région  $x > \frac{1}{10}t$  contient bien le soliton pour  $t$  grand, et de façon générale,  $u(t)$  est bien petit pour  $x < \frac{1}{10}t$  par la stabilité mais ne converge pas nécessairement vers 0 en norme  $H^1$ . La valeur  $\frac{1}{10}$  est un peu arbitraire, le résultat est encore vrai dans la région  $x > \beta t$ , pourvu de prendre  $\alpha_0$  petit dépendant de  $\beta > 0$ . En revanche, le résultat devient faux si on veut prendre  $\beta = 0$ , à cause de la présence possible de petits solitons, à petite vitesse. Notons aussi que le soliton peut être sensiblement dévié de la trajectoire rectiligne au sens où  $|y'(t) - c_+| \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , mais  $y(t) - c_+ t$  peut dans certains cas diverger, de façon logarithmique par exemple.

La démonstration est de nature plus complexe que la démonstration de la stabilité. Elle repose notamment sur l'introduction de résultats de rigidité de type théorème de Liouville qui permettent de classifier les états asymptotiques possibles du système. De telles stratégies sont classiques en théorie elliptique ou parabolique, mais reposent dans le cadre dispersif sur de nouvelles propriétés de monotonie du flot. Voir aussi [38] pour un exposé plus détaillé.

### 3. Dynamique des multisolitons

Nous allons considérer les dynamiques des multisolitons avec deux problématiques majeures : existence et stabilité, et la question délicate de la collision dans le cas de (gKdV).

#### 3.1. Existence et stabilité des multisolitons

Hors du cas intégrable, il n'existe plus de formules exactes pour décrire un multisoliton généralisant (6). Il faut commencer par construire les multisolitons en s'aidant de la décroissance exponentielle en espace de  $Q_c$  et donc du faible couplage entre les ondes. Etant donnés deux vitesses  $c_1, c_2 > 0$ , on démontre ainsi ([23]) l'existence – et l'unicité – d'une solution de (gKdV) vérifiant :

$$(17) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \|U(t) - Q_{c_1}(x - c_1 t) - Q_{c_2}(x - c_2 t)\|_{H^1} = 0.$$

Une telle solution est un 2-soliton *pur* en  $-\infty$  car toute l'énergie du système est transférée aux ondes solitaires. Dans le cas intégrable, le 2-soliton pur en  $-\infty$  l'est aussi en  $+\infty$ , mais nous verrons que ce n'est génériquement plus vrai dans le cas non-intégrable.

Une fois le 2-soliton pur construit en  $-\infty$  par exemple, se pose la question de la stabilité de la structure 2-soliton. La stabilité d'un soliton repose sur sa caractérisation variationnelle (15) mais cette stratégie de démonstration ne suffit pas pour un multisoliton. À nouveau l'utilisation fine de formules de monotonie a récemment permis de démontrer la stabilité des multisolitons en grand temps, [27].

### 3.2. Interaction de deux solitons

Nous allons maintenant parler de la collision de deux solitons dans le cadre non-intégrable de (gKdV). De nombreux essais numériques ont été consacrés à cette question, mais les seuls résultats rigoureux dans le cas de (gKdV) non-intégrables sont très récents, voir [25, 26].

Nous les décrivons brièvement dans le cas  $p = 4$  pour (gKdV), soit

$$(18) \quad \partial_t u + \partial_x(\partial_x^2 u + u^4) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Ces résultats ont été obtenus dans le cas asymptotique particulier de deux solitons de vitesses (et donc de tailles) très différentes.

Pour commencer, on considère une solution  $U(t)$  contenant deux solitons quand  $t \rightarrow -\infty$  :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|U(t) - Q(x-t) - Q_c(x-ct)\|_{H^1} = 0,$$

sous l'hypothèse

$$(19) \quad 0 < c \ll 1.$$

La question essentielle est de décrire cette solution lorsque les solitons rentrent en collision (théoriquement pour  $t \sim 0$ ). Les résultats obtenus dans [25] sur ce problème se décomposent en deux parties :

- La collision est presque élastique ;
- La collision n'est pas purement élastique.

Le fait que la collision de deux solitons pour des équations de type KdV est presque élastique, mais pas exactement élastique est en accord avec les prévisions numériques (sur des modèles plus généraux de la physique) et expérimentales. On consultera à ce sujet l'article très complet de W. Craig et *al.* [6], où sont comparés les multi-solitons de KdV, des essais numériques, et des expériences en réservoir. La conclusion principale de cette étude confirme que la collision élastique des solitons de (KdV) est en effet une bonne représentation d'un phénomène remarquable pour une équation non-linéaire, mais que les solutions multi-solitons de (KdV) sont trop parfaites pour correspondre exactement à la réalité d'une collision. En général, une petite perte de masse est observée comme conséquence de la collision.

Nous détaillons maintenant les résultats obtenus dans le théorème suivant.

**Théorème 1** (Collision de deux solitons pour (gKdV) quartique).

*Il existe  $c_0 > 0$  assez petit tel que si  $0 < c < c_0$  et si  $U(t)$  est l'unique solution de (18) satisfaisant*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|U(t) - Q(\cdot - t) - Q_c(\cdot - ct)\|_{H^1(\mathbb{R})} = 0$$

*alors il existe  $c_1^+, c_2^+, y_1(t), y_2(t)$  tels que*

(i) *La collision est presque élastique :*

$$c_1^+ \underset{c \sim 0}{\sim} 1, \quad \frac{c_2^+}{c} \underset{c \sim 0}{\sim} 1,$$

$$w^+(t, x) = U(t, x) - (Q_{c_1^+}(x - y_1(t)) + Q_{c_2^+}(x - y_2(t))),$$

$$\text{vérifie } \lim_{t \rightarrow +\infty} \|w^+(t)\|_{H^1(x \geq \frac{c}{10}t)} = 0, \quad \sup_t \|w^+(t)\|_{H^1} \leq Kc^{\frac{1}{3}};$$

(ii) *La collision n'est pas exactement élastique :*

$$c_1^+ > 1, \quad c_2^+ < c$$

et

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \|w^+(t)\|_{H^1} > 0.$$

Ce résultat appelle plusieurs commentaires :

– On doit tout d'abord comparer les ordres de tailles des diverses fonctions, pour  $c > 0$  petit à des constantes multiplicatives près :

$$\|Q\|_{H^1} \sim 1, \quad \|Q_c\|_{L^2} \sim c^{\frac{1}{12}}, \quad \|w^+(t)\|_{H^1} \leq Kc^{\frac{1}{3}}.$$

Cela signifie que  $w^+$  est bien un terme résiduel d'ordre inférieur et que la structure 2-soliton est préservée. De plus, pour  $t$  grand,  $w^+(t)$  tend vers zéro localement autour des solitons, ce qui caractérise les tailles asymptotiques  $c_1^+$ ,  $c_2^+$  des deux solitons.

– Les centres de masse  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  des deux solitons vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y_1'(t) - c_1^+| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |y_2'(t) - c_2^+| = 0.$$

– Le point (ii) de ce théorème implique qu'il n'existe aucune solution de (18) ((gKdV) quartique) de type 2-soliton pur dans ce régime (un soliton petit par rapport à l'autre) contrairement au cas intégrable (non-linéarité quadratique ou cubique). En effet, s'il existait une telle solution, elle devrait correspondre à  $U(t)$  aux invariances de l'équation près (translations, scaling); mais  $U(t)$  n'est pas une solution de type 2-soliton, car  $w^+(t)$  ne tend pas vers 0 quand  $t \rightarrow +\infty$ .

– Monotonie des vitesses : la taille et donc la vitesse du soliton principal est augmentée par la collision tandis que la taille du petit soliton est diminuée.

L'extension de ces résultats à des non-linéarités plus générales

$$(20) \quad \partial_t u + \partial_x(\partial_x^2 u + g(u)) = 0$$

est au cœur de travaux en cours. Pour  $g(u)$  tel que  $g(u) = u^p + g_1(u)$  ( $p = 2, 3$  ou  $4$ ) où  $\lim_{u \rightarrow 0} u^{-p} g_1(u) = 0$ , et pourvu que les solitons vérifient le critère de stabilité (14), on peut démontrer la partie positive du théorème précédent, [26], sans pouvoir dire en général si la collision est exactement pure ou seulement approximativement pure.

#### 4. Le cas de Schrödinger non-linéaire

Nous nous concentrons dans cette section sur l'équation de Schrödinger non-linéaire que nous écrivons dans le cas général :

$$(21) \quad \text{(NLS)} \quad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + u|u|^{p-1} = 0, \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad u(t, x) \in \mathbb{C},$$

le cas de la non-linéarité cubique  $p = 3$  étant particulièrement pertinent pour la physique. L'existence *locale* en temps de solutions dans l'espace d'énergie  $H^1(\mathbb{R}^N)$

découle d'estimations fines de dispersion du flot linéaire – pour  $p < \frac{N+2}{N-2}$  (voir Ginibre et Velo [9]). Ces solutions vérifient la conservation de la masse :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(t)|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |u_0|^2,$$

et de l'énergie :

$$(22) \quad E(u(t)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t)|^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1}(t) = E(u(0)),$$

structure similaire au problème (gKdV).

En outre, on démontre qu'il existe un exposant critique

$$p_c = 1 + \frac{4}{N}$$

tel que toutes les solutions de (NLS) sont globales en temps et bornées dans  $H^1$  pour  $p < p_c$ , alors que pour  $p \geq p_c$ , un phénomène d'explosion en temps fini de l'onde est possible. Pour cette dynamique explosive, la concentration l'emporte sur la dispersion et le faisceau se focalise en temps fini. Notons que le cas  $p = 3$ ,  $N = 2$  est un modèle important introduit dans les années 50 en optique non-linéaire et où précisément l'explosion est associée à un phénomène de concentration de l'onde et à la formation d'un faisceau laser.

Quelle que soit la valeur de  $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ , le système admet des ondes solitaires qui sont ici des solutions périodiques  $u(t, x) = Q(x)e^{it}$  avec :

$$(23) \quad \Delta Q - Q + Q|Q|^{p-1} = 0.$$

On peut en outre faire voyager les ondes solitaires en ligne droite en utilisant une symétrie du problème, l'invariance de Galilée, qui produit les ondes progressives suivantes :

$$(24) \quad Q(x - \beta t) e^{i\frac{\beta}{2} \cdot (x - \beta t)} e^{it}, \quad \beta \in \mathbb{R}^N.$$

#### 4.1. Le cas sous critique $p < p_c$

Si l'équation (23) est soluble explicitement en dimension  $N = 1$  avec  $Q$  donné comme pour (gKdV) par (11), elle admet en revanche en dimension  $N \geq 2$  une infinité de solutions. Une classification complète des solutions de l'équation stationnaire (23) est ouverte. En revanche, la famille de solitons (stables) que nous considérons correspond à l'*unique* solution  $H^1$  radiale *positive* de (23). On peut à nouveau montrer par des arguments variationnels qu'elle minimise l'énergie (22) à norme  $L^2$  donnée, d'où sa stabilité orbitale, [5].

Comme pour (gKdV), on peut aussi construire une famille de 2-solitons (et plus) se comportant asymptotiquement comme deux ondes découplées :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|U(t, x) - Q(x - \beta_1 t) e^{i\frac{\beta_1}{2} \cdot (x - \beta_1 t)} e^{it} - Q(x - \beta_2 t) e^{i\frac{\beta_2}{2} \cdot (x - \beta_2 t)} e^{it}\|_{H^1} = 0.$$

Une telle solution est explicite pour  $N = 1$ ,  $p = 3$ , seul cas où existe une structure d'intégrabilité complète. La stabilité de ces solutions est un problème ouvert pour des non-linéarités puissances, mais a récemment été démontrée pour d'autres types

de non-linéarité. L'analyse se heurte ici à de nouveaux phénomènes et notamment la question de la stabilité asymptotique du soliton qui est en fait *fausse* pour  $N = 1, p = 3$  et constitue un problème ouvert délicat en général.

Notons enfin que d'autres types de non-linéarité peuvent induire des dynamiques de multisolitons plus complexes. C'est typiquement le cas pour la non-linéarité de Hartree

$$i\partial_t u + \Delta u - \varphi_{|u|^2} u = 0, \quad \varphi_{|u|^2}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{y \in \mathbb{R}^3} \frac{|u(y)|^2}{|x-y|} dy, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

qui est un modèle standard en astrophysique et où la non-linéarité  $\varphi_{|u|^2}$  correspond au champ gravitationnel Newtonien. Ce système admet des ondes solitaires se propageant en ligne droite sur le modèle (24). En revanche, dans une dynamique 2-soliton, chaque particule est fortement déviée par le champ gravitationnel créé par l'autre. On peut alors démontrer ([17]) l'existence d'un 2-soliton pur où la dynamique des centres de masse reproduit *asymptotiquement* la dynamique non piégée du problème à deux corps en gravitation Newtonienne, soit hyperbolique ou parabolique, ce qui illustre une fois de plus le caractère profondément particulière des dynamiques d'ondes solitaires. L'extension de ces techniques à d'autres types d'équations comme par exemple les équations de transport non-linéaires et le système de Vlasov-Poisson gravitationnel – qui est un modèle standard en astrophysique pour la description des amas de galaxie – est au cœur de recherches actives, [21].

#### 4.2. La dynamique explosive : existence et structure de viriel

Concentrons-nous maintenant sur (21) dans le cas d'une non-linéarité suffisamment focalisante :

$$p \geq p_c = 1 + \frac{4}{N}.$$

Dans ce cas, il existe des solutions qui explosent en temps fini. En fait, l'existence de solutions explosives pour les équations d'ondes non-linéaires est en général un problème délicat, et (NLS) est à cet égard un cas exceptionnel où l'existence de solutions explosives est connu depuis les années 50. L'argument est élémentaire et repose sur le calcul algébrique suivant : si  $u(t, x)$  est solution de (21), alors un calcul direct montre que :

$$(25) \quad \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |u(t, x)|^2 dx \leq 16E(u_0)$$

avec égalité pour  $p = p_c$ .

En particulier, si  $E_0 < 0$ , alors la fonction positive  $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 |u(t, x)|^2 dx$  doit vivre sous une parabole inversée et donc un flot régulier ne peut vivre qu'un temps fini.

Cet argument dit du *viriel* est exceptionnel car il exhibe un *ouvert* de l'espace d'énergie où toutes les solutions explosent, décrivant donc un phénomène stable a priori. En outre ce genre d'argument obstructif est en fait assez général, et est par exemple appliqué en mécanique des gaz pour montrer l'apparition de chocs, [36].

En revanche, cet argument par obstruction est d'une part complètement instable par perturbation de l'équation et très lié au choix de la non-linéarité puissance, et d'autre part il ne dit absolument *rien* sur la nature de la formation de singularité. Depuis les années 50 où ces arguments ont été exhibés, les premiers progrès sur ces sujets ont tout d'abord été obtenus grâce aux simulations numériques qui via le développement de techniques particulières toujours plus fines ont permis depuis les années 80 jusqu'à nos jours d'exhiber des *dynamiques explosives stables*. Mais encore aujourd'hui, ces simulations restent limitées à des problèmes simples avec souvent une géométrie élémentaire – typiquement en symétrie radiale par exemple. Au niveau de l'analyse, bien que de nombreuses questions élémentaires sont encore largement ouvertes, ces dix dernières années ont vu la résolution analytique de certains problèmes d'explosion considérés comme canoniques. Nous présentons un de ces résultats dans le paragraphe suivant.

### 4.3. Explosion $L^2$ critique et régime du « log-log »

Considérons (NLS) avec  $p = p_c = 1 + \frac{4}{N}$ , le plus petit exposant permettant l'explosion (cas  $L^2$  critique). Notons  $Q$  le soliton, soit l'unique solution positive radiale non triviale dans  $H^1$  de

$$\Delta Q - Q + Q^{1+\frac{4}{N}} = 0.$$

Le lien entre soliton et dynamique explosive repose sur la caractérisation variationnelle du soliton qui a permis à Weinstein [40] au début des années 80 de démontrer le résultat remarquable suivant :

**Théorème 2** ([40]). *Soit  $u_0 \in H^1$  avec  $\|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$ , alors la solution correspondante de (NLS) est globale et bornée dans  $H^1$ .*

En d'autres termes, l'explosion si elle a lieu nécessite un *quantum* minimum de masse donné par la norme  $L^2$  du soliton. Une manière naïve de traduire ce théorème est qu'il faut un minimum –explicite! – d'énergie pour former un faisceau laser. Considérons donc des données explosives de masse  $\|u_0\|_{L^2} \geq \|Q\|_{L^2}$ . Un premier fait spectaculaire est qu'une symétrie du problème implique l'existence d'une solution explosive explicite :

$$S(t, x) = \frac{1}{|t|^{\frac{N}{2}}} Q\left(\frac{x}{t}\right) e^{i\frac{|x|^2}{4|t|}} e^{it}$$

qui explose en  $t = 0$  avec une vitesse

$$(26) \quad \|\nabla S(t)\|_{L^2} \sim \frac{1}{|t|},$$

et telle que  $\|S\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$  (explosion à masse minimale). Un résultat précurseur de Merle [Men86] montre que  $S$  est la *seule* solution explosive à masse minimale aux invariances de l'équation près.

Un nombre considérable de travaux formels et numériques a été dédié dans les années 80 à la compréhension de la formation de singularité pour ce problème, [37], et tous ces travaux étaient unanimes : la vitesse (26) n'est jamais observée numériquement, suggérant que cette dynamique explicite est en fait complètement instable. Différentes lois pour la dynamique stable ont alors été proposées dont

la loi dite du « log-log », [19], selon laquelle la dynamique d'explosion stable correspondrait à une vitesse :

$$(27) \quad \|\nabla u(t)\|_{L^2} \sim \sqrt{\frac{\log |\log(T-t)|}{T-t}}.$$

Il y aurait beaucoup à dire sur ce double log qui n'a absolument rien d'intuitif. Une solution explosant selon cette loi fut construite en 2001 par Perelman, [P], puis les travaux de Merle et Raphaël (entre autres [29], [30]) ont permis de décrire complètement ce régime en petite dimension et près de la masse critique :

**Théorème 3** (Description de l'explosion près de la masse critique). *Soit  $N \leq 5$  et  $p = p_c$ . Il existe  $0 < \alpha^* \ll 1$  tel que si  $u_0 \in H^1$  vérifie*

$$\|Q\|_{L^2} < \|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2} + \alpha^*$$

*et si la solution correspondante de (NLS) explose en temps fini  $0 < T < +\infty$ , alors il existe un point d'explosion  $x(T)$  et un profil asymptotique  $u^* \in L^2$ , il existe des paramètres de changement d'échelle  $\lambda(t) > 0$ , et de phase  $\gamma(t) \in \mathbb{R}$  tels que la solution se décompose près de l'explosion en une partie singulière et une partie régulière :*

$$u(t, x) = Q_{sing}(t, x) + \tilde{u}(t, x)$$

avec

$$(28) \quad Q_{sing}(t, x) = \frac{1}{\lambda^{\frac{N}{2}}(t)} Q\left(\frac{x - x(T)}{\lambda(t)}\right) e^{i\gamma(t)}$$

et

$$(29) \quad \tilde{u}(t, x) \rightarrow u^* \text{ dans } L^2 \text{ quand } t \rightarrow T.$$

La vitesse d'explosion est donnée par

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \sim \frac{1}{\lambda(t)} \rightarrow +\infty \text{ quand } t \rightarrow T,$$

et elle satisfait l'alternative suivante :

(i) soit la solution est dans le régime du log-log :

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2} \sim \sqrt{\frac{\log |\log(T-t)|}{T-t}}$$

qui est stable par perturbation de la donnée initiale ;

(ii) soit

$$(30) \quad \|\nabla u(t)\|_{L^2} \geq \frac{C(u_0)}{T-t}.$$

Ce résultat appelle deux commentaires :

– Tout d’abord, il implique que soit la solution est dans le régime stable du log-log – confirmant la prédiction numérique –, soit elle le quitte pour satisfaire (30), ce qui est une borne inférieure optimale aux vues de l’exemple (26). La double question de savoir s’il existe hors du log-log d’autres régimes que le régime  $\frac{1}{T-t}$ , et si ces régimes sont effectivement instables comme le suggèrent les simulations numériques, est ouvert.

– En outre, un point fondamental est que la partie singulière de la solution *admet une structure complètement universelle* construite sur l’onde solitaire et complètement indépendante de la donnée initiale. Notamment, la solution concentre en un point  $x(T)$  qui est le point d’explosion une partie de sa norme  $L^2$  qui est un *quantum universel* donné par la norme  $L^2$  du soliton :

$$|Q_{\text{sing}}(t, x)|^2 \rightarrow \|Q\|_{L^2}^2 \delta_{x=x(T)} \quad \text{quand } t \rightarrow T$$

au sens des mesures : c’est la première *bulle* de concentration. Le reste de la solution ne concentre pas et forme le profil  $u^*$ .

Bien qu’à première vue d’une nature sensiblement différente, l’analyse du problème explosif est en fait intimement liée à la compréhension du flot autour de l’onde solitaire  $Q$  et il existe en ce sens une grande continuité conceptuelle entre les travaux sur les problèmes sous critiques de stabilité et stabilité asymptotique des ondes solitaires, et les travaux sur la dynamique explosive.

Concluons ce bref survol de la dynamique explosive en disant que le cas surcritique  $p > p_c$  est très largement ouvert. Dans [33], [34], des solutions explosives radiales sont construites pour  $p = 5$  qui explosent non pas en un point, mais sur une sphère. Enfin, des travaux très récents [18], [35] considèrent un problème sensiblement différent à première vue mais qui exhibe en fait une structure similaire : le problème de « wave map » qui est un modèle standard en théorie quantique des champs et en relativité générale. Les fonctions ne sont plus ici réelles ou complexes mais à valeur dans une variété – typiquement la sphère – ce qui introduit une problématique très riche du lien entre les phénomènes d’explosion et la géométrie de l’espace ambiant.

## 5. Références

- [1] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 149. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [2] H. Berestycki, P.-L. Lions, Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state, *Arch. Rational Mech. Anal.* **82**, (1983) 313-345.
- [3] J.L. Bona, W.G. Pritchard, L.R. Scott, Solitary-wave interaction, *Phys. Fluids* **23**, **438**, (1980).
- [4] J.L. Bona, P.E. Souganidis, W. Strauss, Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A.* **411** (1987), 395-412.
- [5] T. Cazenave, P.L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, *Comm. Math. Phys.* **85**, (1982) 549-561.
- [6] W. Craig, P. Guyenne, J. Hammack, D. Henderson, C. Sulem, Solitary water wave interactions. *Phys. Fluids* **18**, (2006), 057106.
- [7] W. Eckhaus, P. Schuur, The emergence of solutions of the Korteweg - de Vries equation from arbitrary initial conditions, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **5**, (1983) 97-116.

- [8] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, Studies of nonlinear problems, I, Los Alamos Report LA1940 (1955); reproduced in *Nonlinear Wave Motion*, A.C. Newell, ed., American Mathematical Society, Providence, R. I., 1974, pp. 143-156.
- [9] J. Ginibre, G. Velo, On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case. *J. Funct. Anal.* **32** (1979), 1-32.
- [10] M. Grillakis, J. Shatah, W. Strauss, Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I., *J. Func. Anal.* **74** (1987), 160-197.
- [11] R. Hirota, Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons, *Phys. Rev. Lett.*, **27** (1971), 1192-1194.
- [12] H. Kalisch, J.L. Bona, Models for internal waves in deep water, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **6** (2000), 1-20.
- [13] T. Kato, On nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor.* **46** (1987), 113-129.
- [14] T. Kato, On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation. *Studies in applied mathematics*, 93-128, *Adv. Math. Suppl. Stud.*, 8, Academic Press, New York, 1983.
- [15] D.J. Korteweg, G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Philos. Mag.* **539** (1895), 422-443.
- [16] C.E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle, *Comm. Pure Appl. Math.* **46**, (1993) 527-620.
- [17] J. Krieger, Y. Martel, P. Raphaël, Two soliton solutions to the gravitational Hartree equation, to appear in *CPAM*.
- [18] J. Krieger, W. Schlag, D. Tataru, Renormalization and blow up for charge one equivariant critical wave maps, *Invent. Math.* **171** (2008), 543-615.
- [19] M. J. Landman, G. C. Papanicolaou, C. Sulem, P.-L. Sulem, Rate of blowup for solutions of the nonlinear Schrödinger equation at critical dimension. *Phys. Rev. A* (3) **38** (1988), 3837-3843.
- [20] P. D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.* **21**, (1968) 467-490.
- [21] Lemou, M.; Mehats, F.; Raphaël, P., The orbital stability of the ground states and the singularity formation for the gravitational Vlasov Poisson system, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol 189, p 425-468, 2008.
- [22] P.-L. Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **1** (1984), 109-145.
- [23] Y. Martel, Asymptotic  $N$ -soliton-like solutions of the subcritical and critical generalized Korteweg-de Vries equations, *Amer. J. Math.* **127** (2005), 1103-1140.
- [24] Y. Martel, F. Merle, Asymptotic stability of solitons of the gKdV equations with general nonlinearity. *Math. Ann.* **341** (2008), 391-427.
- [25] Y. Martel, F. Merle, Description of two soliton collision for the quartic gKdV equations. *arXiv :0709.2672v1*.
- [26] Y. Martel, F. Merle, Stability of two soliton collision for the generalized KdV equations, *Commun. Math. Phys.* (2009).
- [27] Y. Martel, F. Merle, Tai-Peng Tsai, Stability and asymptotic stability in the energy space of the sum of  $N$  solitons for the subcritical gKdV equations, *Commun. Math. Phys.* **231**, (2002) 347-373.
- [28] F. Merle, Determination of blow-up solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equations with critical power, *Duke Math. J.* **69** (1993), 427-454.
- [29] F. Merle, P. Raphaël, Blow up dynamic and upper bound on the blow up rate for critical nonlinear Schrödinger equation, *Ann. Math.* **161** (2005), 157-222.
- [30] F. Merle, P. Raphaël, Sharp lower bound on the blow up rate for critical nonlinear Schrödinger equation, *J. Amer. Math. Soc.* **19** (2006), 37-90.
- [31] R.M. Miura, The Korteweg-de Vries equation : a survey of results, *SIAM Review* **18**, (1976) 412-459.
- [32] G. Perelman, On the blow-up phenomenon for the critical nonlinear Schrödinger equation in 1D, *Ann. Henri. Poincaré* **2** (2001), 605-673.
- [33] P. Raphaël, Existence and stability of a solution blowing up on a sphere for a  $L^2$  supercritical nonlinear Schrödinger equation, *Duke Math. J.* **134** (2006), 199-258.

- [34] P. Raphaël, J. Szeftel, Standing ring blow up solutions to the  $N$ -dimensional quintic (NLS), to appear in Comm. Math.Phys.
- [35] I. Rodnianski, I. Sterbenz, On the singularity formation in the critical  $O(3)$  sigma model, to appear in Annals of Math.
- [36] T. C. Sideris, Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids, Comm. Math. Phys. **101** (1985), 475-485.
- [37] C. Sulem, P.L. Sulem, *The nonlinear Schrödinger equation. Self-focusing and wave collapse*. Applied Mathematical Sciences, 139. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [38] T. Tao, Why are solitons stable? Bull. Amer. Math. Soc. **46** (2009), 1-33.
- [39] T. Tao, A global compact attractor for high-dimensional defocusing non-linear Schrödinger equations with potential, arXiv :0805.1544v2
- [40] M.I Weinstein, Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates, Comm. Math. Phys. **87** (1983), 567-576.
- [41] M.I. Weinstein, Lyapounov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations, CPAM 39, (1986) 51-68.
- [42] M. Wadati, M. Toda, The exact  $N$ -soliton solution of the Korteweg – de Vries equation, J. Phys. Soc. Japan **32**, (1972) 1403-1411.
- [43] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal, Interaction of « solitons » in a collisionless plasma and recurrence of initial states, Phys. Rev. Lett. **15** (1965), 240-243.

## Odyssée dans le groupe de Cremona

Julie Déserti<sup>1</sup>

Le plan projectif  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  est le quotient de  $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  par la relation d'alignement  $\sim$  définie par  $(x, y, z) \sim (x', y', z')$  si et seulement si  $(x', y', z') = \alpha(x, y, z)$  avec  $\alpha$  dans  $\mathbb{C}^*$ . La notation  $(p_0 : p_1 : p_2)$  représente la classe d'équivalence du point  $p = (p_0, p_1, p_2)$  de  $\mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ . On peut inclure  $\mathbb{C}^2$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  via l'application  $(x, y) \mapsto (x : y : 1)$ ; on parle alors de la carte affine  $z = 1$ , carte dans laquelle un point est repéré par ses coordonnées  $(x, y)$ . De même on peut introduire les cartes affines  $x = 1$  et  $y = 1$ . Le groupe des automorphismes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  est le groupe  $\text{PGL}_3(\mathbb{C})$ , i.e. le groupe des transformations de la forme

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \\ (x : y : z) &\mapsto (a_0x + a_1y + a_2z : a_3x + a_4y + a_5z : a_6x + a_7y + a_8z), \\ &\det(a_i) \neq 0. \end{aligned}$$

Une *transformation rationnelle*  $f$  du plan projectif dans lui-même est une transformation de la forme

$$f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto (f_0(x, y, z) : f_1(x, y, z) : f_2(x, y, z)),$$

les  $f_i$  désignant des polynômes homogènes de même degré sans facteur commun ; le degré de  $f$  est le degré des  $f_i$ . Plaçons-nous dans la carte affine  $z = 1$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  munie des coordonnées  $x$  et  $y$  ; une transformation rationnelle est une transformation de la forme  $\left(\frac{P(x,y)}{R(x,y)}, \frac{Q(x,y)}{R(x,y)}\right) = \left(\frac{f_0(x,y,1)}{f_2(x,y,1)}, \frac{f_1(x,y,1)}{f_2(x,y,1)}\right)$  avec  $P, Q$  et  $R$  dans  $\mathbb{C}(x, y)$ . La transformation  $f$  est *birationnelle* s'il existe une transformation rationnelle  $g$  telle que

$$f \circ g = g \circ f = \text{id}.$$

Un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  est une transformation birationnelle. La transformation rationnelle quadratique  $\sigma$  définie par

$$\sigma : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto (yz : xz : xy)$$

est une involution birationnelle (elle s'écrit  $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$  dans la carte  $z = 1$ ). Le prolongement au plan projectif complexe de tout automorphisme polynomial de  $\mathbb{C}^2$  est une transformation birationnelle.

L'ensemble des transformations birationnelles de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  dans lui-même forme un groupe, le *groupe de Cremona*; on le désigne par  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ , étant sous-entendu qu'on travaille sur  $\mathbb{C}$ . Les éléments de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  sont aussi appelés *transformations de Cremona*.

Revenons à l'involution  $\sigma = (yz : xz : xy)$ . On remarque que l'image de la droite  $x = 0$  par  $\sigma$  est le point  $(1 : 0 : 0)$ , on dit que la droite  $x = 0$  est *contractée* sur le point  $(1 : 0 : 0)$ ; de même  $y = 0$  (resp.  $z = 0$ ) est contractée sur  $(0 : 1 : 0)$  (resp.  $(0 : 0 : 1)$ ). Comme  $\sigma$  est une involution  $(1 : 0 : 0)$  est « envoyé » sur la droite  $x = 0$ ; on dit que  $(1 : 0 : 0)$  est *éclaté* sur  $x = 0$ . Les points  $(0 : 1 : 0)$  et

<sup>1</sup> Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris VII

$(0 : 0 : 1)$  sont respectivement éclatés sur les droites  $y = 0$  et  $z = 0$ . De manière plus générale si  $f = (f_0 : f_1 : f_2)$  désigne une transformation birationnelle, on peut définir

- l'ensemble d'indétermination de  $f$  qui est le lieu d'annulation des  $f_i$ , c'est l'ensemble fini des points éclatés par  $f$ ;
- l'ensemble exceptionnel de  $f$  qui est le lieu des zéros de  $\det \text{jac } f$ , c'est l'ensemble des courbes contractées par  $f$ .

Un automorphisme du plan projectif complexe n'éclate pas de point et ne contracte pas de courbe. On peut vérifier que le prolongement  $(yz : y^2 - xz : z^2)$  à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  de l'application de Hénon  $(y, y^2 - x)$  (qui est un automorphisme du plan affine  $\mathbb{C}^2$ ) contracte une unique droite, celle d'équation  $z = 0$ , et a un unique point d'indétermination  $(1 : 0 : 0)$ .

Si  $f = (f_0 : f_1 : f_2)$  est une transformation birationnelle du plan projectif dans lui-même le réseau homaloïdal associé à  $f$  est le système de courbes  $\mathcal{H}_f$  défini par

$$\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0, \quad (\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C});$$

autrement dit c'est l'image réciproque par  $f$  du réseau de droites  $\alpha_0 x + \alpha_1 y + \alpha_2 z = 0$ . Chaque courbe de  $\mathcal{H}_f$  est donc rationnelle, *i.e.* paramétrée par  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Les points bases  $m_i$  de  $\mathcal{H}_f$  sont les points par lesquels passent toutes les courbes du réseau; ce sont aussi les points bases de  $f$ . Ils peuvent être dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  ou infiniment proches de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  (notion dont on reparlera plus loin). Par opposition aux points infiniment proches, les points de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  sont appelés *points propres*. Les points bases propres de  $f$  sont les points d'indétermination de  $f$ . Deux courbes génériques de  $\mathcal{H}_f$  se coupent en les points bases de  $\mathcal{H}_f$  et un unique autre point.

Le réseau homaloïdal associé à un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  est l'ensemble des droites du plan projectif. Le réseau homaloïdal associé à  $A\sigma$ , où  $A$  désigne un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , est l'ensemble des coniques passant par les trois points  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$  et  $(0 : 0 : 1)$ . En effet l'image d'une droite générique  $ax + by + cz = 0$  par  $\sigma$  est la conique  $ayz + bxz + cxy = 0$ .

On a essayé d'opter pour un langage accessible ce qui peut heurter les spécialistes...

## 1. de Jonquières, un mathématicien marin

Si l'on en croit Hudson ([Hud27]) c'est en 1822, dans un traité de Poncelet ([Pon22]), qu'apparaît la première transformation birationnelle (qui ne soit pas un automorphisme). Durant une quarantaine d'années environ trente mathématiciens se sont intéressés de près ou de loin à certaines transformations birationnelles. L'accès aux travaux des mathématiciens de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle n'est pas toujours aisé mais est facilité par le travail de certains historiens dont Loria fait partie ([Lor02]). Évoquons une petite partie de la vie scientifique de Jonquières : il souhaite décrire les courbes gauches dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  qui ne sont pas intersection complète de deux surfaces, *i.e.* qui ne sont pas intersection transverse de deux surfaces.

Il pense avancer dans cette étude en généralisant la méthode utilisée par Seydewitz ([Sey47]) pour la cubique gauche  $\mathcal{C}$ , image du morphisme de Veronese

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{C}), \quad (x : y) \mapsto (x^3 : x^2y : xy^2 : y^3),$$

ou bien en carte affine l'image de  $t \mapsto (t, t^2, t^3)$ . La courbe  $\mathcal{C}$  est l'intersection des trois quadriques suivantes

$$Q_1 = xz - y^2, \quad Q_2 = xt - yz, \quad Q_3 = yt - z^2;$$

en revanche l'intersection de deux  $Q_i$  distinctes est l'union de  $\mathcal{C}$  et d'une certaine droite  $\ell$ . On peut voir que c'est encore le cas pour tout couple de quadriques,  $\mathcal{C}$  n'est donc pas l'intersection de deux quadriques; en fait ce n'est pas une intersection complète. De Jonquières a besoin pour généraliser la méthode de Seydewitz, d'au moins une correspondance biunivoque entre les points de deux plans qui ne soit pas un automorphisme; c'est ainsi qu'il en présente une dans [dJ64]. Un réseau homaloïdal (abstrait) est une famille de courbes à deux paramètres ayant « grosso modo » des propriétés analogues à la famille des droites de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . Sa construction commence par la remarque suivante : on se donne un point  $p$  et  $2(n-1)$  points  $m_i$  en position générale; les courbes de degré  $n$  singulières en  $p$  avec multiplicité  $n-1$  (i.e. les courbes « passent  $n-1$  fois » par  $p$ ) et qui passent par les  $m_i$  forment un réseau homaloïdal. D'après le théorème de Bezout deux courbes de degré  $n$  se coupent en  $n^2$  points qui s'organisent dans notre contexte de la façon suivante : en les  $m_i$  on obtient  $2(n-1)$  points simples et le point multiple « produit »  $(n-1)^2$  points d'intersection confondus de sorte qu'il reste un point d'intersection « libre ». Une telle famille de courbes a donc des propriétés analogues à la famille des droites de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  (deux droites se coupent en un point « libre »). Il établit alors une correspondance biunivoque entre ces courbes et les droites d'un plan; en ajoutant la condition « le point d'intersection de deux droites quelconques dans le plan correspond au point variable commun aux deux courbes correspondantes » on obtient une transformation birationnelle entre les deux plans considérés. Ces transformations seront appelées *transformations de Jonquières*. De nos jours on présente les transformations de Jonquières de la façon suivante : c'est à conjugaison birationnelle près les transformations du type

$$\left( \frac{a(y)x + b(y)}{c(y)x + d(y)}, \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta} \right), \begin{bmatrix} a(y) & b(y) \\ c(y) & d(y) \end{bmatrix} \in \text{PGL}_2(\mathbb{C}(y)), \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \text{PGL}_2(\mathbb{C});$$

remarquons que la famille des droites  $y = \text{constante}$  est préservée dans son ensemble par un tel élément du groupe de Cremona. Pour les spécialistes les transformations de Jonquières sont précisément celles qui préservent une fibration rationnelle<sup>2</sup>.

À la fin de sa vie, lorsque le marin laisse définitivement place au mathématicien, de Jonquières continue à s'intéresser aux éléments de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  (voir [dJ85a, dJ85b, dJ86]).

<sup>2</sup> Dans notre contexte une fibration rationnelle est une application rationnelle de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  dont les fibres sont des courbes rationnelles.

## 2. L'impulsion de Cremona, suivie de celle de Noëther

L'étude des transformations birationnelles est initiée par Cremona dans les années 1863 – 1865 (voir [Cre64, Cre65a, Cre65b, Lor04]). Lors de son séjour à Bologne, Cremona découvre un mémoire d'un astronome italien, Schiaparelli ([Sch64]). Dans cet article Schiaparelli considère les transformations du plan pour lesquelles le réseau homaloïdal associé est un réseau de coniques passant par trois points; Cremona démontre alors que modulo les automorphismes du plan un tel élément s'écrit

$$\left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad \text{ou} \quad \left( \frac{1}{y}, \frac{1}{x} \right).$$

L'existence d'autres transformations birationnelles a déjà été évoquée par Magnus ([MA]) et de Jonquières mais Cremona ne semble pas en avoir connaissance; il constate que la composée d'automorphismes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et de transformations quadratiques peut être plus compliquée que les transformations évoquées précédemment. Dès lors il entreprend de décrire tous les éléments de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ . Pour traiter ce problème il s'appuie sur le fait qu'à chaque transformation birationnelle on peut associer un réseau homaloïdal; à ce moment là la réciproque n'est pas encore connue sauf dans le cas des transformations de Jonquières dont il donne une construction géométrique. Au même moment Noëther s'intéresse lui aussi à la description des transformations birationnelles du plan projectif complexe ([Noe69, Noe70, Noe72]). Notons l'existence d'une correspondance abondante entre Noëther et Cremona : ils ont échangé au moins neuf lettres en 1871 (voir [Men86]), en particulier au sujet du résultat suivant énoncé par Noëther cette même année.

**Théorème 1.** *Le groupe de Cremona est engendré par les automorphismes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et l'involution quadratique*

$$\sigma : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto (yz : xz : xy).$$

La démonstration avancée par Noëther est incomplète. C'est en 1901 qu'est donnée la première preuve complète de ce théorème; elle est due à Castelnuovo. Expliquons la faille de la démonstration de Noëther : il sait que toutes les transformations birationnelles quadratiques n'ont pas nécessairement trois points d'indétermination propres; autrement dit il ne suffit pas d'éclater chaque point d'indétermination pour obtenir un automorphisme sur une certaine surface rationnelle, *i.e.* un automorphisme d'une surface birationnelle à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . C'est par exemple le cas pour l'élément de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  donné par

$$f : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto (xy : z^2 : yz);$$

après avoir éclaté  $(1 : 0 : 0)$  on constate qu'il y a encore un point d'indétermination  $p$  sur le diviseur exceptionnel. On dit que  $p$  est infiniment proche de  $(1 : 0 : 0)$  ce que l'on note  $p \succ (1 : 0 : 0)$ . Noëther prend en compte ce type de transformations quadratiques mais ne traite pas le cas des éléments quadratiques de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  les plus « dégénérés », comme par exemple

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \quad (x : y : z) \mapsto (x^2 : xy : y^2 - xz)$$

qui compte un point d'indétermination  $(0 : 0 : 1)$  et deux points base  $p$  et  $m$  tels que  $p \succ m \succ (0 : 0 : 1)$ . Segre pointe cet oubli dans [SE] et Castelnuovo y remédie dans [Cas01]. Il existe de nombreuses démonstrations du théorème 1, on trouve par exemple un panorama dans [AC02]. Dans les années 1980 Gizatullin puis Iskovskikh ont donné une présentation de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  par générateurs et relations ([Giz82, Isk85]).

À noter qu'il n'existe pas d'analogue à ce théorème en dimension supérieure ([Pan99]) : il faut une infinité non dénombrable de transformations de degré strictement supérieur à 1 pour engendrer le groupe  $\text{Bir}(\mathbb{P}^n)$  des transformations birationnelles de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  dans lui-même lorsque  $n \geq 3$ . En effet étant donnée une cubique plane lisse, Pan construit une transformation birationnelle de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , avec  $n \geq 3$ , qui contracte celle-ci. Or l'ensemble des classes d'isomorphismes des cubiques planes lisses est une famille à un paramètre ; il s'en suit que l'ensemble des types birationnels des composantes du lieu exceptionnel des éléments de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^n)$  est infini ; ceci n'est pas le cas si on suppose que  $\text{Bir}(\mathbb{P}^n)$  est engendré par le groupe des automorphismes de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  et un nombre fini de transformations de degré strictement supérieur à 1.

### 3. Petite incursion dans le monde des transformations quadratiques

Le théorème de génération de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  conduit naturellement à l'étude des transformations de Cremona de degré 2 (voir [CD]) ; notons  $\text{Bir}_2$  l'ensemble qu'elles forment. Le groupe  $\text{PGL}_3(\mathbb{C}) \times \text{PGL}_3(\mathbb{C})$  agit sur  $\text{Bir}_2$

$$\text{PGL}_3(\mathbb{C}) \times \text{Bir}_2 \times \text{PGL}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Bir}_2, \quad (A, f, B) \mapsto AfB^{-1}.$$

On désigne par  $\mathcal{O}(f)$  l'orbite d'un élément  $f$  de  $\text{Bir}_2$  sous cette action. C'est une sous-variété algébrique lisse de dimension finie de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  ; en revanche son adhérence peut être singulière. On peut décrire  $\text{Bir}_2$  : si

$$\begin{aligned} \Sigma^0 &= \mathcal{O}(x(x : y : z)), \\ \Sigma^1 &= \mathcal{O}(x^2 : xy : y^2 - xz), \quad \Sigma^2 = \mathcal{O}(xy : z^2 : yz), \quad \Sigma^3 = \mathcal{O}(yz : xz : xy), \end{aligned}$$

alors  $\text{Bir}_2 = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3$ . De plus on a les égalités

$$\dim \Sigma^0 = 10, \quad \dim \Sigma^1 = 12, \quad \dim \Sigma^2 = 13, \quad \dim \Sigma^3 = 14$$

ainsi que les conditions d'incidence

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma^0} &= \Sigma^0, \\ \overline{\Sigma^1} &= \Sigma^0 \cup \Sigma^1, \quad \overline{\Sigma^2} = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2, \quad \overline{\Sigma^3} = \text{Bir}_2 = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3. \end{aligned}$$

Expliquons pourquoi  $\dim \Sigma^3 = 14$  ; le groupe d'isotropie de  $\sigma$  est constitué des éléments  $A, B$  de  $\text{SL}_3(\mathbb{C})$  satisfaisant  $A\sigma = \sigma B$ . Puisque le lieu d'indétermination de  $A\sigma$  est constitué des trois points  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$  et  $(0 : 0 : 1)$  l'élément  $B$  permute ces trois points, il est donc modulo permutation des coordonnées de la forme  $(\alpha x : \beta y : \frac{z}{\alpha\beta})$  ; il s'en suit qu'à permutation des coordonnées

près  $A = \left( \frac{x}{\alpha} : \frac{y}{\beta} : \alpha\beta z \right)$ . En particulier la dimension du groupe d'isotropie de  $\sigma$  est 2 et la dimension de  $\Sigma^3 = \mathcal{O}(\sigma)$  est  $16 - 2 = 14$ .

Les éléments de  $\Sigma^i$  possèdent  $i$  points d'indétermination et pour  $i$  non nul  $3 - i$  points base infiniment proches.

Cette description assure qu'il suffit de montrer que l'adhérence de  $\Sigma^3$  est lisse le long de  $\Sigma^0$  pour obtenir que l'ensemble des transformations birationnelles quadratiques est lisse dans l'ensemble des transformations rationnelles quadratiques, fait établi dans [CD].

La caractérisation, à composition à gauche et à droite près par un automorphisme de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , des transformations birationnelles cubiques se fait aussi en étudiant la nature des courbes contractées; elle est sensiblement plus compliquée (32 modèles). Alors que  $\text{Bir}_2$  est lisse et irréductible, il n'en est pas de même pour l'ensemble des transformations birationnelles cubiques vu comme sous-ensemble de  $\mathbb{P}^{29}(\mathbb{C})$  (le projectivisé de l'espace des polynômes homogènes de degré 3 en 3 variables s'identifie à  $\mathbb{P}^{29}(\mathbb{C})$ ) (voir [CD]).

Notons que Pan, Ronga et Vust ont étudié les transformations birationnelles quadratiques de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  dans lui-même ([PRV01]).

#### 4. Promenade dans les groupes finis, détour par les courbes invariantes

L'impulsion donnée par Cremona dans le domaine des transformations birationnelles conduit à la naissance de la géométrie algébrique dont le groupe principal au sens de Klein, est le groupe des transformations birationnelles ([Kle91]). C'est dans un travail de Bertini que cette géométrie apparaît pour la première fois ([Ber77]): deux transformations birationnelles sont considérées comme identiques lorsqu'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle. Dans cet article Bertini classe les involutions birationnelles. Il y a quatre types de telles transformations de Cremona à conjugaison birationnelle près: les automorphismes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  d'ordre 2, les involutions de Jonquières et les involutions de Geiser et Bertini (dont on peut trouver une définition dans [DI] par exemple). La démonstration de Bertini est considérée comme incomplète; en 2000 Bayle et Beauville obtiennent *via* d'autres méthodes ce même résultat ([BB00]). Ils montrent de plus que les classes de conjugaison des sous-groupes finis cycliques d'ordre 2 sont uniquement déterminées par le type birationnel des courbes de points fixes de genre positif.

En 1894, Castelnuovo établit, à l'aide de la théorie des systèmes linéaires adjoints, que toute transformation de Cremona d'ordre fini préserve ou bien un pinceau de droites, ou bien un réseau de droites, ou bien un système linéaire de cubiques possédant au plus huit points bases ([CA2]). Un résultat analogue avait été annoncé par Kantor dans le mémoire qui lui a valu le prix de l'Académie des Sciences de Naples en 1883. Kantor poursuit son investigation et donne un énoncé similaire pour tout sous-groupe fini de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ ; il entreprend alors de classifier ces groupes ([Kan95]). Wiman étoffe cette liste qui demeure incomplète ([Wim96]); elle est de plus redondante au sens où elle contient des sous-groupes birationnellement conjugués.

Dans les années 2000 l'étude des sous-groupes finis de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  reprend, citons par exemple [dF04, Bea07, Bla09]. Plus récemment Dolgachev et Iskovskikh ont

apporté leur contribution en s'appuyant sur le théorème suivant ([Man67, Isk79]). Soit  $G$  un sous-groupe fini de transformations de Cremona. Il existe une surface rationnelle lisse  $S$  et une transformation birationnelle  $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  telles que  $\varphi^{-1}G\varphi$  soit contenu dans le groupe des automorphismes de  $S$ ; de plus on peut supposer que

- ou bien  $S$  est une *surface de Del Pezzo*<sup>3</sup>,
- ou bien il existe un *fibré en coniques*<sup>4</sup>  $S \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  invariant par  $\varphi^{-1}G\varphi$ .

Dolgachev et Iskovskikh caractérisent les couples  $(G, S)$  satisfaisant l'une des possibilités précédentes; ils utilisent ensuite la théorie de Mori pour déterminer quand deux tels couples sont birationnellement conjugués.

On a précédemment mentionné que les classes de conjugaison des sous-groupes finis cycliques d'ordre 2 de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  sont déterminées par le type birationnel des courbes de points fixes de genre positif ([BB00]); ceci entraîne en particulier que le nombre de ces classes de conjugaison est infini. Étant donné un entier positif  $n$  on peut se demander combien vaut le nombre  $\nu(n)$  de classes de conjugaison d'une transformation birationnelle d'ordre  $n$  dans  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ . De Fernex répond à cette question pour  $n$  premier ([dF04]); on trouve dans [Bla07] une réponse pour tout  $n$ . Pour  $n = 3$ ,  $n = 5$  et  $n$  pair,  $\nu(n)$  est infini. Si  $n$  est un entier impair distinct de 3 et 5 alors  $\nu(n)$  est fini; de plus  $\nu(9) = 3$ ,  $\nu(15) = 9$  et  $\nu(n) = 1$  sinon.

Dans [DI] les auteurs mentionnent quelques problèmes ouverts comme la description des variétés algébriques qui paramètrent les classes de conjugaison des sous-groupes finis de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ ; Blanc donne une réponse à cette question dans deux cas particuliers ([Bla09, Bla]).

Revenons aux travaux de Castelnuovo : il caractérise les éléments de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  qui fixent point par point une courbe irréductible de genre strictement supérieur à 1; une telle transformation est ou bien une transformation de Jonquières, ou bien une transformation d'ordre 2, 3 ou 4 (voir [Cas92]). En reprenant la méthode utilisée par Castelnuovo, Blanc, Pan et Vust précisent ce résultat ([BPV09]). Le cas des courbes de genre 1 a été traité avec des techniques différentes ([BPV09]).

Avec un point de vue de dynamique complexe et non pas de géométrie algébrique, Diller, Jackson et Sommese classifient les courbes invariantes par une transformation birationnelle d'une surface projective complexe ([DJS07]).

## 5. Passage par la dynamique, les groupes infinis dénombrables ayant la propriété (T) et les groupes nilpotents

Considérons les éléments  $f = (xy : z^2 : yz)$  et  $g = (x^3 : y^2z : xyz)$  de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ . On peut vérifier que  $gfg^{-1} = (x^5y^7 : z^{12} : x^2y^3z^7)$ ; en particulier  $\deg(gfg^{-1}) \neq \deg f$  : le degré algébrique n'est pas un invariant birationnel. En revanche le taux de croissance des degrés est un invariant birationnel : soient  $f$

<sup>3</sup> *i.e.*  $S$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , ou à  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  ou encore à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  éclaté en  $1 \leq r \leq 8$  points  $p_i$ , ces points étant en « position générale ».

<sup>4</sup> Un fibré en coniques sur une surface rationnelle  $S$  est une application régulière de  $S$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  dont toutes les fibres sont abstraitement isomorphes à une conique plane.

et  $g$  deux transformations de Cremona ; il existe deux constantes positives  $\alpha, \beta$  telles que

$$\alpha \deg f^n \leq \deg(gf^n g^{-1}) \leq \beta \deg f^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

d'où l'introduction de la notion de premier degré dynamique. Si  $f$  désigne une transformation de Cremona, le *premier degré dynamique* de  $f$  est la quantité

$$\lambda(f) = \lim(\deg f^n)^{1/n}.$$

Dans les années 2000, Diller et Favre ont classifié, à conjugaison birationnelle près, les éléments de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  (voir [DF01]) : une transformation birationnelle  $f$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  vérifie, à conjugaison birationnelle près, une et une seule des propriétés suivantes

- la suite  $(\deg f^n)_n$  est bornée,  $f$  est un automorphisme d'une surface rationnelle  $S$  et un itéré de  $f$  appartient à la composante neutre du groupe des automorphismes de  $S$ ;
- $\deg f^n \sim n$  alors  $f$  n'est pas un automorphisme et  $f$  préserve une unique fibration qui est rationnelle;
- $\deg f^n \sim n^2$  auquel cas  $f$  est un automorphisme préservant une unique fibration qui est *elliptique*<sup>5</sup>;
- $\deg f^n \sim \lambda(f)^n$ ,  $\lambda(f) > 1$ .

Dans les trois premières éventualités  $\lambda(f)$  vaut 1, dans la dernière  $\lambda(f)$  est strictement supérieur à 1; pour plus de détails concernant le dernier cas se référer à [DF01].

Donnons quelques exemples. Si  $f$  est un automorphisme du plan projectif complexe ou une transformation de Cremona d'ordre fini, la suite  $(\deg f^n)_n$  est bornée. La transformation  $f = (xz : xy : yz)$  vérifie  $\deg f^n \sim n$  (se placer dans la carte affine  $z = 1$ ). Enfin l'automorphisme de Hénon  $f$  défini par  $(x, y^3 - x)$  satisfait  $\deg f^n = 3^n$ .

En s'appuyant, entre autres, sur cette classification on peut démontrer le résultat suivant ([Dés]). Soient  $\Gamma$  un sous-groupe d'indice fini de  $\text{SL}_3(\mathbb{Z})$  et  $\rho$  un plongement de  $\Gamma$  dans  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ ; à conjugaison birationnelle près  $\rho$  est le plongement canonique ou la contragrédiente (i.e. l'involution  $u \mapsto {}^t u^{-1}$ ). On en déduit que si  $\Gamma$  désigne un sous-groupe d'indice fini de  $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$  alors  $\Gamma$  ne se plonge pas dans le groupe de Cremona dès que  $n \geq 4$  (voir [Dés]). Dans le même esprit si  $G$  désigne un sous-groupe infini dénombrable de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  ayant la *propriété (T) de Kazhdan*<sup>6</sup>,  $G$  est birationnellement conjugué à un sous-groupe d'automorphismes du plan projectif complexe ([Can06]).

Après les groupes semi-simples on peut décrire les groupes *nilpotents*<sup>7</sup>, la classification de Diller et Favre entrant encore en jeu. Soient  $G$  un groupe nilpotent que l'on suppose ne pas être abélien à indice fini près et  $\rho$  un morphisme injectif de  $G$  dans  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ . D'après ([Dés]), le groupe  $G$  satisfait l'une des propriétés suivantes

<sup>5</sup> Une fibration elliptique sur une surface  $S$  est un morphisme de  $S$  dans une surface de Riemann dont les fibres générales sont des courbes elliptiques.

<sup>6</sup> Un groupe  $G$  a la propriété (T) de Kazhdan si toute action continue de  $G$  sur un espace de Hilbert par déplacement unitaire a un point fixe global.

<sup>7</sup> Soit  $G$  un groupe. Posons  $G^{(0)} = G$  et  $G^{(k)} = [G, G^{(k-1)}]$  pour  $k \geq 1$ . On dit que  $G$  est nilpotent s'il existe un entier  $k$  tel que  $G^{(k)}$  soit trivial.

- tous les éléments de  $G$  sont périodiques ;
- le groupe  $\langle aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G \rangle$  est abélien à indice fini près.

On en déduit des obstructions à ce que certains groupes se plongent dans le groupe de Cremona ([Dés]) : soit  $G$  un groupe contenant un sous-groupe nilpotent  $H$  tel que  $\langle aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in H \rangle$  ne soit pas abélien à indice fini près. Supposons que  $H$  contienne un élément non périodique ; alors  $G$  ne se plonge pas dans  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ .

### 6. Excursion dans le monde de certains groupes abéliens, dans celui des feuilletages, arrivée dans le groupe d'automorphismes

Les sous-groupes abéliens maximaux (pour l'inclusion) non dénombrables de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  ont été étudiés dans [Dés]. Avant de rappeler une propriété cruciale de ces groupes introduisons la notion de feuilletage. Soit  $S$  une surface complexe compacte. Un *feuilletage algébrique* (éventuellement singulier) sur  $S$  est la donnée d'une famille  $(\chi_i)_i$  de champs de vecteurs polynomiaux à zéros isolés définis sur les ouverts  $\mathcal{U}_i$  d'un recouvrement de  $S$  et soumis à des conditions de compatibilité : il existe  $g_{ij}$  une fonction polynomiale ne s'annulant pas sur  $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$  telle qu'on ait  $\chi_i = g_{ij}\chi_j$  sur  $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ . Par exemple un champ de vecteurs rationnel non trivial sur  $S$  définit un feuilletage sur  $S$ .

Si  $G$  est un sous-groupe abélien non dénombrable, il existe un champ de vecteurs rationnel  $\chi$  tel que

$$f_*\chi = \chi, \quad \forall f \in G;$$

en particulier  $G$  préserve un feuilletage (voir [Dés]).

Si  $S$  désigne une surface complexe compacte et  $\mathcal{F}$  un feuilletage sur  $S$ , on peut considérer le groupe  $\text{Bir}(S, \mathcal{F})$  (resp.  $\text{Aut}(S, \mathcal{F})$ ) des transformations birationnelles (resp. polynomiales) sur  $S$  laissant  $\mathcal{F}$  invariant. En général  $\text{Bir}(S, \mathcal{F})$  et  $\text{Aut}(S, \mathcal{F})$  sont finis et coïncident ; dans [CF03] Cantat et Favre étudient les feuilletages qui ne satisfont pas cette philosophie. En utilisant leur classification et en ajoutant l'hypothèse de maximalité on obtient l'énoncé suivant ([Dés]) : si  $G$  est un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  alors

- ou bien  $G$  possède des éléments périodiques ;
- ou bien  $G$  préserve une fibration rationnelle.

Notons que si  $\varphi$  désigne un automorphisme de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  et  $G$  un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  alors  $\varphi(G)$  est encore un sous-groupe abélien maximal non dénombrable de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$ . En étudiant certains sous-groupes abéliens maximaux non dénombrables de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  on montre que, modulo certaines transformations, le groupe des automorphismes de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et l'involution  $\sigma = (yz : xz : xy)$  sont fixés point par point par  $\varphi$ . Le théorème 1 permet alors de caractériser les automorphismes du groupe de Cremona ([Dés]) : soit  $\varphi$  un automorphisme de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  ; il existe une transformation birationnelle  $\psi$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et un automorphisme  $\tau$  du corps  $\mathbb{C}$  tels que

$$\varphi(f) = \tau(\psi f \psi^{-1}), \quad \forall f \in \text{Bir}(\mathbb{P}^2),$$

où  $\tau(g)$  désigne l'élément de  $\text{Bir}(\mathbb{P}^2)$  obtenu en faisant agir  $\tau$  sur les coefficients de  $g$ .

Remarquons qu'en utilisant la description des plongements de  $SL_3(\mathbb{Z})$  dans  $Bir(\mathbb{P}^2)$  mentionnée précédemment on peut caractériser le semi-groupe des endomorphismes de  $Bir(\mathbb{P}^2)$  (voir [Dés]). En particulier le groupe de Cremona est hopfien, *i.e.* tout endomorphisme surjectif de  $Bir(\mathbb{P}^2)$  est injectif.

## 7. Navigation entre les groupes linéaires et le groupe de Cremona

On peut « comparer » le groupe de Cremona aux groupes linéaires. Commençons par remarquer que  $Bir(\mathbb{P}^2)$  ne se plonge pas dans  $GL_n(\mathbb{k})$  où  $\mathbb{k}$  désigne un corps de caractéristique nulle ([CD]). C'est une application du lemme suivant dû à Birkhoff ([Bir36]) : soient  $\mathbb{k}$  un corps de caractéristique nulle et  $A, B$  et  $C$  trois éléments de  $GL_n(\mathbb{k})$  tels que  $C$  soit d'ordre premier  $p$  et  $[A, B] = C$ ,  $[A, C] = [B, C] = \text{id}$ , alors  $p \leq n$ . On suppose qu'il existe un plongement de  $Bir(\mathbb{P}^2)$  dans  $GL_n(\mathbb{k})$ , on applique le lemme de Birkhoff aux images des transformations

$$(e^{-2i\pi/p}x, y), \quad (x, xy), \quad (x, e^{2i\pi/p}y),$$

où  $p$  désigne un nombre premier et on obtient  $p \leq n$ ; ceci étant possible pour tout  $p$  premier, on aboutit à une contradiction.

Considérons un élément générique  $M$  de  $SL_n(\mathbb{C})$  (*i.e.* un élément dont les valeurs propres sont distinctes) et  $\text{Cent}(M)$  son centralisateur

$$\text{Cent}(M) = \{A \in SL_n(\mathbb{C}) \mid AM = MA\};$$

un tel élément de  $SL_n(\mathbb{C})$  est diagonalisable donc  $\text{Cent}(M) \simeq (\mathbb{C}^*)^{n-1}$ .

On a un résultat analogue pour les transformations birationnelles ([Can06]) : soit  $f$  un élément de  $Bir(\mathbb{P}^2)$  de premier degré dynamique strictement supérieur à 1. Si  $g$  appartient au centralisateur de  $f$

$$\text{Cent}(f) = \{h \in Bir(\mathbb{P}^2) \mid hf = fh\},$$

il existe un entier  $m$  strictement positif et un entier  $n$  tels que  $g^m = f^n$ .

Rappelons que si  $\mathbb{k}$  désigne un corps de caractéristique nulle et si  $\Gamma$  est un sous-groupe de type fini de  $GL_n(\mathbb{k})$  alors

- ou bien  $\Gamma$  contient un groupe libre non abélien ;
- ou bien  $\Gamma$  contient un sous-groupe *résoluble*<sup>8</sup> d'indice fini.

Cette propriété a été démontrée par Tits ([Tit72]) ; on dit que  $GL_n(\mathbb{k})$  satisfait l'alternative de Tits. Cantat étudie les sous-groupes de type fini du groupe de Cremona et en déduit que  $Bir(\mathbb{P}^2)$  satisfait l'alternative de Tits ([Can06]).

<sup>8</sup> Soit  $G$  un groupe ; posons  $G_{(0)} = G$  et  $G_{(k)} = [G_{(k-1)}, G_{(k-1)}]$  pour  $k \geq 1$ . Le groupe  $G$  est résoluble s'il existe un entier  $k$  tel que  $G_{(k)}$  soit trivial.

### 8. D'autres horizons

Nous allons esquisser le fait que certaines questions traitées par les dynamiciens apparaissent naturellement chez les physiciens et montrer qu'à partir de deux transformations relativement simples, on débouche sur des problèmes compliqués. Notons  $M_n$  l'espace des matrices  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{P}(M_n)$  son projectivisé. Étant donné un élément  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  de  $M_n$  on peut considérer

- l'application  $J$  qui à  $A = (a_{ij})$  associe la matrice  $(a_{ij}^{-1})$ ;
- l'application  $I$  qui à  $A$  associe  $A^{-1}$ .

Les involutions  $I$  et  $J$  ainsi que la composée  $K = I \circ J$  apparaissent naturellement en mécanique statistique ([BMV91]). Dans ce contexte on est amené à étudier le comportement des itérés de  $K$  (voir [AAdB<sup>+</sup>99, AAdBM99, AdMV06, BV99]), en particulier le degré de complexité des itérés de  $K$

$$\lambda(K) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (\deg K^p)^{1/p}.$$

Remarquons que  $\mathbb{P}(M_n)$  est de dimension  $n^2 - 1$ , que  $I$  est de degré  $n - 1$  et  $J$  de degré  $n^2 - 1$ ; par suite dès que  $n$  n'est plus « petit » il devient délicat de calculer ne serait-ce que  $K^2$ . Lors de l'étude de modèles plus spécifiques apparaissent des symétries supplémentaires d'où l'introduction de sous-espaces  $S$  de  $\mathbb{P}(M_n)$  invariants par  $K$  (voir [AdMV02]). En général on a l'inégalité  $\deg K|_S \leq \deg K$ ; on étudie alors  $\lambda(K|_S)$ . Un exemple provient des modèles de Potts pour lesquels on peut se restreindre à l'espace des matrices cycliques  $C_n$ , i.e. à l'espace des matrices du type

$$\begin{bmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_{n-1} \\ m_{n-1} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & m_1 \\ m_1 & & m_{n-1} & m_0 \end{bmatrix}$$

Le comportement de  $\deg K|_{C_q^n}$  est déterminé dans [BV99]; la restriction de  $K$  aux matrices symétriques cycliques est aussi étudiée ([AdMV06, BK08a]).

Soit  $f$  une transformation de Cremona; notons  $d_n$  le degré de l'itéré  $n$ -ième de  $f$ . La série  $\varphi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n u^n$  a un rayon de convergence non nul et ce rayon est  $\frac{1}{\lambda(f)}$  (voir [AdMV06]). Signalons la conjecture suivante issue d'expériences numériques (voir par exemple [AdMV06, BV99]) : la fonction génératrice  $\varphi$  est rationnelle. Cette conjecture est fautive : Hasselblatt et Propp produisent dans ([HP07]) des contre-exemples en dimension 2 et 3; Bedford et Kim généralisent ces exemples en toutes dimensions ([BK08b]).

## 9. Références

- [AAdB<sup>+</sup>99] N. Abarenkova, J.-Ch. Anglès d'Auriac, S. Boukraa, S. Hassani, and J.-M. Maillard. From Yang-Baxter equations to dynamical zeta functions for birational transformations. In *Statistical physics on the eve of the 21st century*, volume 14 of *Ser. Adv. Statist. Mech.*, pages 436–490. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1999.
- [AAdBM99] N. Abarenkova, J.-Ch. Anglès d'Auriac, S. Boukraa, and J.-M. Maillard. Growth-complexity spectrum of some discrete dynamical systems. *Phys. D*, 130(1-2) : 27-42, 1999.
- [AC02] M. Alberich-Carramiñana. *Geometry of the plane Cremona maps*, volume 1769 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [AdMV02] J.-Ch. Anglès d'Auriac, J.-M. Maillard, and C. M. Viallet. A classification of four-state spin edge Potts models. *J. Phys. A*, 35(44) : 9251-9272, 2002.
- [AdMV06] J.-Ch. Anglès d'Auriac, J.-M. Maillard, and C. M. Viallet. On the complexity of some birational transformations. *J. Phys. A*, 39(14) : 3641-3654, 2006.
- [BB00] L. Bayle and A. Beauville. Birational involutions of  $\mathbf{P}^2$ . *Asian J. Math.*, 4(1) : 11-17, 2000. Kodaira's issue.
- [Bea07] A. Beauville.  $p$ -elementary subgroups of the Cremona group. *J. Algebra*, 314(2) : 553-564, 2007.
- [Ber77] E. Bertini. Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano. *Annali di Mat.*, 8 : 244-286, 1877.
- [Bir36] G. Birkhoff. Lie groups simply isomorphic with no linear group. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42(12) : 883-888, 1936.
- [BK08a] E. Bedford and K. Kim. Degree growth of matrix inversion : birational maps of symmetric, cyclic matrices. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 21(4) : 977-1013, 2008.
- [BK08b] E. Bedford and K. Kim. Linear recurrences in the degree sequences of monomial mappings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 28(5) : 1369-1375, 2008.
- [Bla] J. Blanc. Elements and cyclic subgroups of finite order of the Cremona group, arxiv : 0809.4673, 2008. *À paraître dans Comment. Math. Helv.*
- [Bla07] J. Blanc. The number of conjugacy classes of elements of the Cremona group of some given finite order. *Bull. Soc. Math. France*, 135(3) : 419-434, 2007.
- [Bla09] J. Blanc. Linearisation of finite abelian subgroups of the Cremona group of the plane. *Groups Geom. Dyn.*, 3(2) : 215-266, 2009.
- [BMV91] M.-P. Bellon, J.-M. Maillard, and C.-M. Viallet. Integrable Coxeter groups. *Phys. Lett. A*, 159(4-5) : 221-232, 1991.
- [BPV09] J. Blanc, I. Pan, and T. Vust. On birational transformations of pairs in the complex plane. *Geom. Dedicata*, 139 : 57-73, 2009.
- [BV99] M.-P. Bellon and C.-M. Viallet. Algebraic entropy. *Comm. Math. Phys.*, 204(2) : 425-437, 1999.
- [Can06] S. Cantat. Sur les groupes de transformations birationnelles des surfaces. *preprint*, 2006.
- [Cas92] G. Castelnuovo. Sulle trasformazioni cremoniane del piano, che ammettono una curva fiera. *Rend. Accad. Lincei*, 1892.
- [Cas94] G. Castelnuovo. Sulla razionalità delle involuzioni piane. *Math. Ann.*, 44(1) : 125-155, 1894.
- [Cas01] G. Castelnuovo. Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano. *Atti del la R. Accad. delle Scienze di Torino*, 36 : 861-874, 1901.
- [CD] D. Cerveau and J. Déserti. Transformations birationnelles de petit degré, arxiv : 0811.2325, 2008.
- [CF03] S. Cantat and C. Favre. Symétries birationnelles des surfaces feuilletées. *J. Reine Angew. Math.*, 561 : 199-235, 2003.
- [Cre64] L. Cremona. Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. *Rend. dell' acc. d. sc. di Bologna*, pages 18-21, 1864.
- [Cre65a] L. Cremona. Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. *Mem. dell' acc. d. sc. Bologna*, 5 : -35, 1865.
- [Cre65b] L. Cremona. Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. *Giorn. di matem.*, 3 : 269-280, 363-376, 1865.

- [Dés] J. Déserti. Quelques propriétés des transformations birationnelles du plan projectif complexe, arxiv :0904.1395, 2009.
- [DF01] J. Diller and C. Favre. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(6) : 1135-1169, 2001.
- [dF04] T. de Fernex. On planar Cremona maps of prime order. *Nagoya Math. J.*, 174 : 1-28, 2004.
- [DI] I. V. Dolgachev and V. A. Iskovskikh. Finite subgroups of the plane Cremona group, arxiv :math/0610595, 2006. *Algebra, Arithmetic, and Geometry : Volume I : In Honor of Y.I. Manin. À paraître.*
- [dJ64] E. de Jonquières. De la transformation géométrique des figures planes et d'un mode de génération de certaines courbes à double courbure de tous les ordres. *Nouv. ann. de mathem.*, 3 : 97-111, 1864.
- [dJ85a] E. de Jonquières. Solution d'une question d'Analyse indéterminée, qui est fondamentale dans la théorie des transformations Cremona. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 101 : 857-861, 1885.
- [dJ85b] E. de Jonquières. Sur la dérivation des solutions dans la théorie des transformations Cremona. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 101 : 921-922, 1885.
- [dJ86] E. de Jonquières. Étude sur une question d'analyse indéterminée. *Giorn. di matem.*, 24 : 1-11, 1886.
- [DJS07] J. Diller, D. Jackson, and A. Sommese. Invariant curves for birational surface maps. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(6) : 2793-2991 (electronic), 2007.
- [Giz82] M. Kh. Gizatullin. Defining relations for the Cremona group of the plane. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 46(5) : 909-970, 1134, 1982.
- [HP07] B. Hasselblatt and J. Propp. Degree-growth of monomial maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 27(5) : 1375-1397, 2007.
- [Hud27] H. P. Hudson. *Cremona Transformations in Plane and Space*. Cambridge University Press. 1927.
- [Isk79] V. A. Iskovskikh. Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 43(1) : 19-43, 237, 1979.
- [Isk85] V. A. Iskovskikh. Proof of a theorem on relations in the two-dimensional Cremona group. *Uspekhi Mat. Nauk*, 40(5(245)) : 255-256, 1985.
- [Kan95] S. Kantor. Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene. *Mayer & Müller, Berlin*, 1895.
- [Kle91] F. Klein. Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes. *Ann. Sci. école Norm. Sup. (3)*, 18 : 87-102, 1891.
- [Lor02] G. Loria. L'œuvre mathématique d'Ernest de Jonquières. *Bibliotheca Mathematica*, 3 : 276-322, 1902.
- [Lor04] G. Loria. Luigi Cremona et son œuvre mathématique. *Bibliotheca Mathematica*, 3 : 125-195, 1904.
- [Mag33] L. F. Magnus. Sammlung von Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie. *Berlin*, 1833.
- [Man67] Ju. I. Manin. Rational surfaces over perfect fields. II. *Mat. Sb. (N.S.)*, 72 (114) : 161-192, 1967.
- [Men86] M. Menghini. Notes on the correspondence between Luigi Cremona and Max Noether. *Historia Math.*, 13(4) : 341-351, 1986.
- [Noe69] M. Noether. Ueber die auf Ebene eindeutig abbildbaren algebraischen Flächen. *Göttigen Nachr.*, pages 1-6, 1869.
- [Noe70] M. Noether. Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen. *Math. Ann.*, 3(2) : 161-227, 1870.
- [Noe72] M. Noether. Zur Theorie der eidentigen Ebenentransformationen. *Math. Ann.*, 5(4) : 635-639, 1872.
- [Pan99] I. Pan. Une remarque sur la génération du groupe de Cremona. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 30(1) : 95-98, 1999.
- [Pon22] J. V. Poncelet. Traité des propriétés projectives des figures. *Bachelier, Paris*, 44 : 198, 1822.

- [PRV01] I. Pan, F. Ronga, and T. Vust. Transformations birationnelles quadratiques de l'espace projectif complexe à trois dimensions. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 51(5) : 1153-1187, 2001.
- [Sch64] G. Schiaparelli. Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica. *Mem. dell' acc. d. sc. di Torino*, 21 : 227-319, 1864.
- [Seg01] C. Segre. Un'osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche. *Atti della R. Accad. dell' Scienze di Torino*, 26 : 377-383, 1901.
- [Sey47] F. Seydewitz. Linear-Construction einer Curve doppelter Krümmung. *Archiv. der Mathem. und Physik*, 10 : 211, 1847.
- [Tit72] J. Tits. Free subgroups in linear groups. *J. Algebra*, 20 : 250-270, 1972.
- [Wim96] A. Wiman. Zur theorie der endlichen gruppen von birationalen transformationen in der ebene. *Math. Ann.*, 48 : 195-240, 1896.

Un grand merci à Dominique Cerveau pour ses relectures méticuleuses, ses suggestions et sa patience. Je remercie Laurent Bonavero pour son enthousiasme, ses suggestions et son regard aiguisé ainsi que Julien Grivaux pour ses remarques. Merci à Eric Bedford, c'est suite à nos conversations qu'est née l'idée de ce dernier paragraphe. Je remercie Zindine Djadli de m'avoir proposé et encouragée à écrire ce texte. « **Un sourire est [...] l'essentiel** », **Saint-Exupéry**.

# EN HOMMAGE À HENRI CARTAN

(SUITE)

---

## Dans la famille Cartan, je demande... la sœur

Michèle Audin<sup>1</sup>

---

Il est question ici de familles bien connues, de scientifiques bien connus, et de quelques femmes scientifiques, la plupart peu connues, dont deux, assez mal connues, appartiennent à la famille Cartan.

### Famille Cartan, familles...

#### Le fils, le père, le grand-père

De la famille Cartan, si l'on est mathématicien, on connaît en général le fils, Henri Cartan (1904–2008), sa participation à Bourbaki, son séminaire, ses livres, notamment celui [2] sur les fonctions analytiques, et le père, Élie Cartan (1869–1951), ses algèbres, sa géométrie des espaces de Riemann, ses spineurs... On a parfois entendu parler du grand-père, le maréchal-ferrant de Dolomieu.

#### Les frères, le beau-père

Il arrive que l'on sache aussi qu'Henri Cartan avait un frère musicien, le compositeur Jean Cartan (1906–1932), un élève de Paul Dukas et Albert Roussel, mort de la tuberculose à l'âge de 25 ans, et un frère physicien, Louis Cartan, (1909–1943), arrêté en 1942 pour faits de résistance et décapité par les Allemands en décembre 1943.

Certains vont même jusqu'à savoir qu'Henri Cartan était le gendre de Pierre Weiss (1865–1940), un physicien de la mouvance scientifique de Paul Langevin et Aimé Cotton, bien connu pour ses travaux sur le magnétisme.

#### La belle-mère

Eh bien, dans cette famille, il y avait aussi des femmes. Bien sûr, dira-t-on, puisqu'il y a des fils, des beaux-pères... Avant de laisser de côté la belle-famille d'Henri Cartan, notons au passage, dans ce jeu des sept familles, la présence sur une photographie, aux côtés d'Élie Cartan, pendant la première guerre mondiale, de Madame Weiss, dont la fille Nicole deviendrait l'épouse d'Henri Cartan<sup>2</sup>. On voit sur la figure 1 un détail d'une photographie, prise en 1916, à l'hôpital 103,

---

<sup>1</sup> Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, Strasbourg

<sup>2</sup> Jane Weiss, née Rancès, une artiste, est morte deux ans après la naissance de sa fille. Pierre Weiss s'est remarié avec une sévrienne, agrégée de physique, Marthe Klein (reçue au concours d'entrée à Sèvres en 1905, et (première) à l'agrégation féminine de physique en 1908).

alias École normale supérieure, que commandait le sergent Élie Cartan. On le voit ici avec quelques infirmières, dont la première en partant de la gauche est Jane Weiss et la première en partant de la droite est Marguerite Borel, tout à la fois la fille de Paul Appell<sup>3</sup>, l'épouse d'Émile Borel, et l'écrivaine Camille Marbo<sup>4</sup>.



FIG. 1. Photo de familles

Laissons de côté les belles-familles. Et concentrons-nous sur la famille Cartan et ses filles, et même sur ses filles mathématiciennes. Car il y en a.

### Anna Cartan (1878–1923)

Annette (Anna) Cartan, la petite sœur d'Élie Cartan, est née le 15 mai 1878, neuf ans après son frère, quatrième de la fratrie. Une jeune femme déterminée et courageuse. Elle quitte Dolomieu pour des études de mathématiques, elle entre à l'École de Sèvres en 1901.

Cette année-là, les sévriennes scientifiques sont quatre, Madeleine Routaboul (Besseteaux), Anna Cartan, Eugénie Feytis (Cotton) et Marthe Baillaud (Privat).

On voit ici les quatre élèves autour de leur professeur de physique... dont je suppose que tous les lecteurs l'ont reconnue. Debout, à gauche Marthe et à droite Anna ; assises et encadrant Marie Curie, à gauche Madeleine et à droite Eugénie.

Parmi les professeurs qui enseignaient à l'École de Sèvres en ce temps-là, on note, outre Marie Curie, Jean Perrin et Paul Langevin, qui enseignaient la physique, Jules Tannery, qui enseignait les mathématiques. C'est un professeur qu'Anna Cartan devait apprécier ; la notice qu'elle écrivit sur lui dans le *Bulletin des anciennes élèves de Sèvres* est d'ailleurs citée dans la préface d'Émile Borel pour le livre posthume [6] de Tannery.

### Marthe et Madeleine

De Madeleine, je ne sais rien sinon qu'elle est morte en 1906, on ne la trouve même pas dans les listes de lauréats de l'agrégation. Eugénie et Marthe passeront l'agrégation de physique en 1904.

Marthe Baillaud est, elle aussi, une petite sœur, dans une grande famille d'astronomes<sup>5</sup>. Elle était d'ailleurs la nièce de Jules Tannery : un tout petit monde.

<sup>3</sup> Dans ce jeu des sept familles, signalons aussi que la mère de Marguerite Borel était une nièce de Joseph Bertrand (sur ce mathématicien et ses réseaux sociaux, voir [8]).

<sup>4</sup> Dont on pourra consulter le livre de souvenirs [5].

<sup>5</sup> Son père, Benjamin Baillaud 1848–1934), a été directeur de l'Observatoire de Paris, deux de ses frères, Jules et René, ont été eux aussi des astronomes. Elle a épousé Jean Privat, un médecin... et le fils du libraire toulousain qui publiait les catalogues de l'Observatoire de Paris depuis que Benjamin Baillaud en était le directeur.



FIG. 2. À Sèvres, le professeur et ses élèves

### Eugénie Cotton

Eugénie Feytis deviendra physicienne et l'épouse d'Aimé Cotton (déjà mentionné dans cet article). D'après les traditions familiales, c'est d'ailleurs grâce aux Weiss (Pierre et Jane) qu'ils se sont mariés. Échange de bons procédés, après la mort de Jane Weiss, c'est grâce aux Cotton (Aimé et Eugénie) que Pierre et Marthe Weiss se sont mariés. Celle-ci, mentionnée dans la note 2 était une amie d'Eugénie (et de Marie Curie).

« Madame Cotton » sera plus tard directrice de l'École de Sèvres. C'est elle qui décidera de mettre ses élèves au même niveau que les garçons de la rue d'Ulm, en leur donnant de jeunes professeurs (comme Jacqueline Ferrand et André Lichnerowicz) en mathématiques, et en les envoyant suivre les cours de l'université. Elle sera révoquée par Vichy : la « famille » Langevin-Cotton n'était pas en odeur de sainteté pendant l'Occupation<sup>6</sup>.

### Anna

Quant à Anna Cartan, c'est l'agrégation de mathématiques qu'elle a passée, en 1904 elle aussi. Et elle est devenue professeur de lycée, à Poitiers (1904–1906), puis Dijon (1906–1908), après quoi elle a bénéficié d'une bourse Albert Kahn « autour du monde<sup>7</sup> » pour l'année 1908–1909, elle en a profité pour visiter un certain

<sup>6</sup> Sympathisants communistes, Eugénie et son mari avaient, avant la guerre, aidé des réfugiés allemands et les républicains espagnols. Académicien des sciences, Aimé Cotton a été arrêté deux fois pendant l'Occupation.

<sup>7</sup> Sur les voyages effectués grâce à ces bourses, voir l'article [3].

nombre de pays et d'institutions, elle est même allée aux États-Unis, à Cuba, au Mexique et au Québec, ce qui n'était pas complètement évident en ce temps-là<sup>8</sup>.

Elle est ensuite revenue à Dijon où elle est restée jusqu'en 1916. Elle a été nommée au lycée Jules Ferry à Paris, puis à Sèvres (l'école d'application annexée à l'École de Sèvres) en 1920. Elle a écrit plusieurs livres scolaires pour les élèves de la 6<sup>e</sup> à la 3<sup>e</sup>. Si l'on détaille la liste de ses ouvrages, on trouve :

– Arithmétique et géométrie. Première année. Enseignement secondaire des jeunes filles. En 1912 et 1921.

– Arithmétique. Enseignement secondaire des jeunes filles. Deuxième année. En 1913 et 1918.

Mais on trouve aussi

– Arithmétique. Enseignement secondaire, garçons et jeunes filles. Classes de 4<sup>e</sup> et de 3<sup>e</sup>. 1928 et 1931.

– Arithmétique. Enseignement secondaire, garçons et jeunes filles. Classes de 6<sup>e</sup> et de 5<sup>e</sup>. 1926.

Ces deux-là sont signés par Anna Cartan et Élie Cartan. Entre temps, les programmes des classes secondaires des garçons et des filles ont été unifiés, les manuels d'Anna Cartan devaient être assez appréciés pour être réédités, mais il est probable qu'il fallait un nom d'auteur masculin pour que le livre soit utilisé dans les lycées de garçons, de plus Anna Cartan était déjà décédée.

Anna Cartan est morte d'un cancer en 1923.



© Famille Cartan

FIG. 3. Anna et Hélène Cartan, vers 1920

<sup>8</sup> Les archives d'Ellis Island se souviennent de son arrivée à New York le 8 mars 1909, sur le Celtic, elle venait de Londres et avait pris le bateau à Liverpool. Outre New York, elle est allée aux États-Unis à Saint-Louis, Chicago, Boston et aux chutes du Niagara.

### Hélène Cartan (1917–1952)

Hélène Cartan, la petite sœur d'Henri Cartan, est née le 12 octobre 1917, treize ans après son frère Henri, huit ans après le plus jeune de ses frères, Louis, quatrième de sa fratrie comme sa tante Anna. La photographie de la figure 4 montre, debout de gauche à droite, le père (Élie), le fils aîné (Henri), la mère (Marie-Louise), et assis, les plus jeunes enfants, de gauche à droite Louis, Hélène et Jean.



FIG. 4. Les enfants d'Élie Cartan... et de Marie-Louise (Bianconi) Cartan

Comme ses frères, Hélène Cartan était musicienne et une excellente pianiste.

Elle est entrée à l'École normale supérieure (rue d'Ulm) en 1937. En ce temps-là, juste avant les réformes entreprises par Eugénie Cotton et dont il a été question ci-dessus, les études étaient assez différentes à Ulm et à Sèvres, et personne n'avait encore réussi à interdire aux jeunes femmes de passer le concours d'entrée à l'ENS<sup>9</sup>. Elle était liée, par exemple, avec Jacqueline Ferrand, qui se souvient :

<sup>9</sup> Parmi les premières femmes élèves de cette école, notons, sans exhaustivité, Marie-Louise Dubreil-Jacotin, dès 1926, une mathématicienne, Suzanne Roubaud-Molino, en 1927, une angliciste (qui sera aussi la mère du poète et mathématicien Jacques Roubaud), encore des mathématiciennes, Marie-Hélène Schwartz (fille de Paul Lévy et épouse de Laurent Schwartz, familles...) en 1934, Jacqueline Ferrand en 1936.

*Nous habitons le même quartier, elle boulevard Jourdan, moi boulevard Brune, nous prenions le bus ensemble. Elle était très étourdie. Elle prenait la voiture de son père, l'oubliait et revenait en bus.*

Hélène Cartan a passé l'agrégation de mathématiques trois ans après, en 1940... Sa troisième année d'école a été gâchée par la guerre, comme me l'a dit Jacqueline Ferrand. Tous ses camarades garçons de l'ENS étant mobilisés, c'est l'agrégation féminine qu'elle a dû passer, avec les Sévriennes : la guerre, l'armistice en juin 1940, les seuls concours organisés ont été les agrégations féminines. Hélène a été reçue, bien sûr, première.



FIG. 5. Hélène Cartan en 1938

Et elle est devenue professeur de lycée. Elle a enseigné en particulier au lycée de Besançon. Ce qui ne l'a pas empêchée de commencer un travail de recherche et de publier son premier résultat comme note aux *Comptes rendus* [1]. Il s'agit d'une caractérisation du cercle parmi les espaces topologiques : un espace topologique  $E$  tel que  $E$  moins un point est connexe,  $E$  moins deux points ne l'est pas et, soit  $E$  est compact, soit  $E$  est localement connexe et contient un ensemble non dénombrable, est homéomorphe à un cercle. La note a été présentée à l'Académie des sciences par Élie Cartan, en 1942.

La photographie date de 1938 et montre une jeune femme heureuse. La suite de son histoire est plus tragique. Hélène Cartan a en effet contracté une forme très grave de tuberculose, la tuberculose *miliaire* : le bacille est disséminé dans tout l'organisme, c'est une maladie très contagieuse. Le risque de contagion a interdit à Hélène d'enseigner, et a sévèrement limité sa vie de famille (rappelons qu'un de ses frères, Jean, avait déjà succombé à la tuberculose en 1932).

Elle a passé beaucoup de temps dans des sanatoriums, à Pierrefontaine non loin de Besançon, à Saint-Hilaire du Touvet, près de Grenoble. On trouve par exemple mention d'elle et de sa maladie dans une lettre de Georges de Rham à Henri Cartan,

en 1947 : de Rham, qui a un frère médecin à Leyzin, propose son aide au cas où Hélène voudrait venir à Leyzin.

La situation d'Hélène était certainement de plus en plus déprimante, au fur et à mesure que les années passaient. Un jour de 1952, elle est sortie se promener et a disparu pendant plusieurs jours, jusqu'à ce que son corps soit retrouvé dans la rivière Isère.

L'association des anciens élèves de l'ENS lui a consacré quelques lignes à la suite de la notice nécrologique sur son père, Élie Cartan, mort en mai 1951.

### Remerciements

Principalement

– à Jacqueline Ferrand, qui m'a raconté ses souvenirs d'Hélène Cartan (le 1<sup>er</sup> octobre 2008),

– et... à deux sœurs de la famille Cartan, Françoise Adam et Suzanne Cartan, deux des filles d'Henri Cartan, pour les renseignements qu'elles m'ont donnés, les photographies reproduites ici et leurs encouragements.

Les renseignements sur les astronomes viennent du dictionnaire [7], dont je remercie Philippe Véron de m'avoir envoyé le fichier. Je remercie Rebecca Rogers pour m'avoir communiqué une copie de l'article [3].

### Références

- [1] H. CARTAN – « Sur une caractérisation topologique de la circonférence », *C. R. Acad. Sci. Paris* **214** (1942), p. 23–25.
- [2] H. CARTAN – *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Enseignement des sciences, Hermann, Paris, 1961.
- [3] L. EFTHYMIOU – « Récits de voyage Quatre enseignantes à la Belle Époque », *Clio* **28** (2008), p. 133–144.
- [4] H. GISPERT – *La France mathématique*, Cahiers d'histoire & de philosophie des sciences, vol. 34, Société française d'histoire des sciences et des techniques, Paris, 1991.
- [5] C. MARBO – *À travers deux siècles – Souvenirs et rencontres (1883–1967)*, Grasset, Paris, 1968.
- [6] J. TANNERY (éd.) – *Science et philosophie*, Librairie Félix Alcan, Paris, 1924.
- [7] P. VÉRON – « Dictionnaire biographique des astronomes français (1850-1950) », non publié, 2004.
- [8] M. ZERNER – « Joseph Bertrand », [4], p. 298–322.

# Le calcul de l'homologie des espaces d'Eilenberg-Mac Lane par Henri Cartan

François-Xavier Dehon<sup>1</sup>

---

Nous présentons et tentons de replacer dans son contexte le calcul par Henri Cartan de l'homologie des espaces d'Eilenberg-Mac Lane résumé dans [CA1] et exposé en détail dans le Séminaire Cartan en 1954-55 [CA2].

## 1. Complexes de chaînes, groupes d'homologie, groupes d'homotopie

Nombre des notions liées à ce calcul émergent dans les années 1930.

L'homologie des espaces topologiques d'abord, comme suite de groupes abéliens, même si certains invariants liés à ces groupes (leur rang, les coefficients de torsion) furent définis et calculés plus tôt dans le cadre des complexes simpliciaux (Poincaré [P], cf. [H-S]). Eilenberg [E], reprenant les travaux de Lefschetz, publiée en 1943 la définition de l'homologie singulière d'un espace telle que nous la connaissons aujourd'hui (voir par exemple [SC1]) : à chaque espace topologique  $X$  est associé un complexe de groupes abéliens

$$C_*(X) = (C_n(X), d_n)_{n \geq 0}$$

formé d'une suite de groupes abéliens  $C_n(X)$  et d'homomorphismes  $d_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ ,  $n \geq 1$ , tels que la composée  $d_n \circ d_{n+1}$  est nulle. Le complexe  $C_*(X)$  défini par Eilenberg est appelé le complexe des chaînes singulières de  $X$ . Le  $n$ -ième groupe d'homologie (singulière) de  $X$  est le quotient  $\text{Ker}(d_n)/\text{Im}(d_{n+1})$ , noté  $H_n(X)$ .

Cette définition possède des variantes : l'homologie de  $X$  à coefficients dans un groupe abélien  $\Lambda$ , notée  $H_*(X; \Lambda)$ , lorsqu'on remplace le complexe  $C_*(X)$  par  $C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$  ; la cohomologie de  $X$  à coefficients dans  $\Lambda$ , notée  $H^*(X; \Lambda)$ , lorsqu'on remplace  $C_*(X)$  par le complexe des groupes d'homomorphismes  $\text{Hom}(C_*(X), \Lambda)$ .

À chaque application continue  $X \rightarrow Y$  est associée une suite d'homomorphismes  $C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$  commutant avec les opérateurs  $d_n$ , donc induisant une suite d'homomorphismes  $H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  et cette association est compatible avec la composition des applications : le complexe des chaînes singulières et son homologie sont fonctoriels en l'espace  $X$ . L'homologie d'un espace est par ailleurs un invariant homotopique : deux applications continues homotopes (*i.e.* l'une est une déformation continue de l'autre) induisent les mêmes homomorphismes entre les groupes d'homologie.

On dispose de morphismes canoniques

$$H_*(X) \otimes H_*(Y) \rightarrow H_*(X \times Y)$$

et

$$H^*(X) \otimes H^*(Y) \rightarrow H^*(X \times Y)$$

---

<sup>1</sup> Université de Nice, Laboratoire J.A. Dieudonné.

(le produit tensoriel est pris au sens gradué). Pour tout espace  $X$ , le second morphisme et l'application diagonale  $X \rightarrow X \times X$  induisent une structure d'algèbre graduée commutative sur la cohomologie de  $X$ . Toute structure multiplicative sur  $X$  induit en vertu du premier morphisme une structure d'algèbre sur l'homologie de  $X$ .

Notons enfin que la graduation de l'homologie est liée à la suspension des espaces : la suspension  $\Sigma X$  d'un espace  $X$  muni d'un point base  $x_0$  est le quotient du produit  $S^1 \times X$  par le bouquet  $S^1 \vee X$ . L'espace  $\Sigma X$  est connexe et on dispose pour tout  $n \geq 0$  d'un isomorphisme canonique entre  $H_{n+1}(\Sigma X)$  et le conoyau de l'application  $H_n(\{x_0\}) \rightarrow H_n(X)$ . On dit que l'homologie commute à la suspension.

Les groupes d'homotopie supérieurs  $(\pi_n(X))_{n \geq 2}$  d'un espace  $X$  muni d'un point base furent introduits par Hurewicz vers 1935 comme généralisation du groupe fondamental  $\pi_1(X)$  de Poincaré. Le groupe  $\pi_n(X)$  est l'ensemble des classes d'homotopie d'applications pointées de la sphère  $S^n$  dans  $X$  (relativement au point base choisi sur  $X$ ) muni d'une multiplication généralisant la composition des chemins (voir par exemple [SC2]). À l'opposé des groupes d'homologie ils sont difficilement calculables. Hurewicz construit l'homomorphisme  $\pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$  qui à une classe d'homotopie d'applications  $S^n \rightarrow X$  associe l'image par l'application induite en homologie du générateur privilégié de  $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ . Cet homomorphisme est un isomorphisme si  $n$  est supérieur ou égal à 2 et si  $\pi_k(X)$  est nul pour  $k < n$ . Ainsi on a  $\pi_n(S^n) \simeq H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ . En 1950 on savait également déterminer les groupes  $\pi_{n+1}(S^n)$  mais guère plus.

Les groupes d'homotopie des sphères sont encore loin d'être connus aujourd'hui mais Cartan et Serre [C-S] ont révolutionné le sujet en 1952 avec la suite spectrale d'un espace fibré et le calcul de l'homologie des espaces d'Eilenberg-Mac Lane. Nous exposons ci-dessous le calcul de Cartan à la suite des travaux d'Eilenberg et Mac Lane.

## 2. Complexes et espaces d'Eilenberg-Mac Lane

Les espaces d'Eilenberg-Mac Lane naissent avec l'homologie des groupes (cf. [ML]) : on savait depuis Hurewicz (1936) que les groupes d'homologie d'un espace connexe  $X$  dont les groupes d'homotopie  $\pi_n(X)$  sont nuls pour  $n \geq 2$  ne dépendent que du groupe fondamental  $\pi_1(X)$ . En 1942 Hopf donne une formule décrivant le deuxième groupe d'homologie d'un tel espace en fonction de son groupe fondamental.

Trois ans plus tard Eilenberg et Mac Lane [EML1] explicitent un complexe de groupes abéliens  $K_*(\pi)$  dont l'homologie est celle de tout espace connexe par arc dont le groupe fondamental est  $\pi$  et dont les autres groupes d'homotopie sont nuls. Le complexe de groupes abéliens  $K_*(\pi)$  est décrit algébriquement par ce qu'on appelle la résolution bar de l'algèbre  $\mathbb{Z}[\pi]$  (nous revenons plus loin sur la résolution bar). Son homologie sera appelée l'homologie du groupe  $\pi$ .

Sous l'hypothèse que  $\pi$  est commutatif, les auteurs généralisent leur construction et explicitent un complexe  $K_*(\pi, n)$ ,  $n \geq 2$ , dont l'homologie est celle d'un espace connexe par arc dont les groupes d'homotopie sont nuls sauf le  $n$ -ième qui vaut  $\pi$ . De tels espaces seront appelés par la suite espaces d'Eilenberg-Mac Lane et notés  $K(\pi, n)$  même si seul leur type d'homotopie est déterminé de façon unique.

### 3. Motivations

L'homologie ou la cohomologie permettent de donner le reflet algébrique d'un problème topologique ou géométrique, ceci d'une façon d'autant plus efficace que l'homologie d'un espace a une structure algébrique riche tout en restant raisonnablement calculable. Alors qu'en 1945 les espaces  $K(\pi, n)$  et leurs modèles algébriques ne sont que des généralisations du cas  $n = 1$ , on comprend dans les années 1950 par une théorie de l'obstruction que les classes d'homotopies d'applications d'un espace  $X$  dans un espace  $K(\pi, n)$  sont naturellement en bijection avec les éléments du  $n$ -ième groupe de cohomologie de  $X$  à coefficients dans  $\pi$ . Serre [SE] en déduit que les éléments du groupe de cohomologie  $H^m(K(\pi, n), \pi')$ , qu'on peut relier par une formule de coefficients universels à l'homologie entière de  $K(\pi, n)$ , sont en bijection avec les opérations cohomologiques  $H^n(X, \pi) \rightarrow H^m(X, \pi')$  naturelles en  $X$  (on reconnaît aujourd'hui le lemme de Yoneda). De telles opérations commutant de plus à la suspension ont été construites par Steenrod [ST] pour  $\pi = \pi' = \mathbb{Z}/2$ . Le calcul de l'homologie des espaces  $K(\pi, n)$  permet d'une part d'obtenir exhaustivement les opérations cohomologiques, d'autre part d'obtenir les relations entre leurs composées.

Voici deux exemples spectaculaires de questions géométriques résolues via l'homologie :

Hopf [HO1] montre en 1927 qu'une variété différentiable  $M$  admet un champ de vecteurs ne s'annulant pas seulement si la somme alternée des dimensions des groupes d'homologie de  $M$  à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  est nulle.

Dans les années 1930 Hopf [HO2] s'intéresse également aux structures multiplicatives sur la sphère  $S^n$ . À toute application  $S^n \times S^n \rightarrow S^n$  Hopf associe une application  $f : S^{2n+1} \rightarrow S^{n+1}$  et un entier  $\gamma(f)$  qu'on peut décrire comme suit (voir par exemple [SC3]) : les groupes de cohomologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de la cofibre de l'application  $f$  sont canoniquement isomorphes à  $\mathbb{Z}$  en degré 0,  $n + 1$  et  $2n + 2$ . Le carré, pour la structure multiplicative de la cohomologie, du générateur de degré  $n + 1$  est un multiple entier du générateur de degré  $2n + 2$ . Cet entier est  $\gamma(f)$  et est appelé l'invariant de Hopf de  $f$ . Si la multiplication  $S^n \times S^n \rightarrow S^n$  admet un élément neutre alors l'invariant de Hopf associé est 1 ; autrement dit l'algèbre de cohomologie de la cofibre mentionnée ci-dessus est l'algèbre de polynômes tronquée  $\mathbb{Z}[x]/x^3$  où  $x$  est un générateur de degré  $n + 1$ .

Plusieurs questions ont motivé Hopf dans la recherche d'applications d'invariant de Hopf non nul : d'une part cela fournissait des exemples d'applications entre sphères de dimensions différentes qui ne soient pas homotopiquement triviales ; la fibration de Hopf  $S^3 \rightarrow S^2$  en est le premier. D'autre part l'existence d'une structure multiplicative avec élément neutre sur la sphère  $S^n$  est directement conséquence de la parallélisabilité de la sphère  $S^n$  (l'existence d'un champ de  $n$  vecteurs sur  $S^n$  qui forment en tout point une base de l'espace tangent). La parallélisabilité de la sphère  $S^n$  est elle-même une conséquence directe de l'existence d'un produit bilinéaire (non nécessairement associatif) sur l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{n+1}$  tel que tout vecteur non nul admette un inverse à gauche et à droite (algèbres à division). On

connaissait depuis le milieu du 19<sup>e</sup> siècle le corps des réels, des nombres complexes, des quaternions et l'algèbre des octonions de Cayley comme algèbres à division, mais il a fallu attendre les calculs par Bott des groupes d'homotopie du groupe orthogonal infini  $\varinjlim O(n, \mathbb{R})$  (la fameuse périodicité de Bott) pour que soit prouvé le fait qu'il n'y en a pas d'autre ([B-M]).

Adem ([ADE], 1952) a montré en utilisant les relations sur les opérations de Steenrod qui portent son nom que l'algèbre  $\mathbb{F}_2[x]/x^3$  avec  $x$  de degré  $n+1$  ne peut être la cohomologie modulo 2 d'un espace que si  $n+1$  est une puissance de 2. Adams ([ADA], 1960) a montré que les seuls entiers  $n$  possibles sont 0, 1, 3 et 7. Ces deux résultats sont intimement liés au calcul de l'homologie stable des espaces d'Eilenberg-Mac Lane  $K(\mathbb{Z}/2, n)$ .

Enfin nous avons déjà mentionné l'importance de la détermination des groupes d'homologie des espaces  $K(\pi, n)$  dans le programme révolutionnaire de Cartan-Serre [C-S] pour le calcul des groupes d'homotopie des sphères. Dans ce programme les espaces  $K(\pi, n)$  jouent un rôle dual à celui joué par les sphères  $S^n$  dans la décomposition cellulaire d'un espace. Le programme est mis en perspective avec ses développements ultérieurs dans l'allocation d'Adams au colloque de 1974 en l'honneur d'Henri Cartan ([ADA2]).

#### 4. L'approximation des complexes $K_*(\pi, n)$ par Eilenberg et Mac Lane : structure de dg-algèbre commutative et construction bar itérée

On sait dans les années 1930 que l'homologie à coefficients dans un corps du produit de deux espaces est canoniquement isomorphe au produit tensoriel au sens gradué des homologies (formule de Künneth), de sorte que l'homologie rationnelle d'un groupe topologique ou plus généralement d'un espace de lacets a une structure naturelle de  $\mathbb{Q}$ -algèbre graduée. Il faut cependant attendre Lefschetz (1942) et surtout Eilenberg-Zilber (1953) pour avoir une version satisfaisante de cet isomorphisme au niveau des complexes de chaînes : Eilenberg et Zilber explicitent un morphisme

$$C_*(X) \otimes C_*(Y) \rightarrow C_*(X \times Y)$$

compatible avec l'échange de  $X$  avec  $Y$  et induisant un isomorphisme en homologie. Si  $X$  est muni d'une multiplication  $X \times X \rightarrow X$  associative avec élément neutre, son complexe de chaînes hérite d'une structure de  $\mathbb{Z}$ -algèbre différentielle graduée. Nous dirons pour suivre la terminologie de Cartan que  $C_*(X)$  est une dg-algèbre sur l'anneau  $\mathbb{Z}$ . Si la multiplication sur  $X$  est de plus commutative alors la dg-algèbre  $C_*(X)$  est commutative au sens gradué (Cartan utilise le terme *anticommutatif*).

L'homologie entière d'un espace  $K(\pi, n)$  a naturellement une structure de  $\mathbb{Z}$ -algèbre graduée puisqu'un tel espace est équivalent homotopiquement à l'espace de lacets d'un espace  $K(\pi, n+1)$ . Les méthodes simpliciales développées par Eilenberg et Zilber permettent à Eilenberg et Mac Lane en 1952 [EML2] de décrire le complexe  $K_*(\pi, n)$  avec une structure de dg-algèbre commutative. (Précisément ils définissent  $K_*(\pi, n)$  comme le complexe de groupes abéliens sous-jacent à l'algèbre d'un groupe abélien simplicial.)

Eilenberg et Mac Lane associent par ailleurs à toute dg-algèbre  $A_*$  le complexe total, noté  $\bar{B}(A_*)$ , du complexe normalisé de la résolution « bar » simpliciale de  $A_*$

$$\cdots A_*^{\otimes 2} \rightrightarrows A_* .$$

Ils montrent que si  $A_*$  est commutative au sens gradué, la structure de dg-algèbre de  $A_*$  induit une structure de dg-algèbre sur  $\bar{B}(A_*)$  (la commutativité est cruciale). Ils construisent ensuite un morphisme de dg-algèbres

$$\bar{B}^{\circ n}(\mathbb{Z}[\pi]) \rightarrow K_*(\pi, n)$$

de source la construction bar itérée  $n$ -ième de l'algèbre du groupe  $\pi$  vue comme dg-algèbre concentrée en degré 0, induisant un isomorphisme en homologie. Cette approximation du complexe  $K_*(\pi, n)$  leur permet de calculer les groupes  $H_{n+k}(K(\pi, n))$  pour des petites valeurs de  $k$  ([EML3]).

## 5. Le calcul de Cartan

Cartan introduit d'abord un mime algébrique de la notion de fibration principale : la notion de construction sur les dg-algèbres.

On fixe un anneau commutatif  $\Lambda$ . Une dga-algèbre sur  $\Lambda$  est un complexe de  $\Lambda$ -modules  $A_*$  muni d'un morphisme de complexes  $A_* \otimes_{\Lambda} A_* \rightarrow A_*$  qui en fait une  $\Lambda$ -algèbre graduée, et d'une augmentation  $A_* \rightarrow \Lambda$  qui est un morphisme de dg-algèbres (où  $\Lambda$  est vu comme dg-algèbre concentrée en degré 0). Un dga-module sur  $A_*$  est un complexe de  $\Lambda$ -modules  $M_*$  muni d'un morphisme de complexes  $A_* \otimes_{\Lambda} M_* \rightarrow M_*$  qui en fait un  $A_*$ -module gradué, et d'une augmentation  $M_* \rightarrow \Lambda$  qui est un morphisme de dg-modules sur  $A_*$ . La différentielle sur  $M_*$  induit une différentielle sur le  $\Lambda$ -module gradué augmenté  $\Lambda \otimes_{A_*} M_*$ .

Une construction est la donnée d'une dga-algèbre  $A_*$  sur  $\Lambda$  et d'un dga-module  $M_*$  sur  $A_*$  tel que  $M_*$  est acyclique comme complexe augmenté de  $\Lambda$ -modules. On dit que  $A_*$  est l'algèbre initiale de la construction  $(A_*, M_*)$ .

Le prototype de construction est donné par le complexe des chaînes singulières d'un espace fibré principal : si  $G$  est un groupe topologique opérant sur un espace  $X$  de façon principale alors le complexe de chaînes  $C_*(G)$  est une dga-algèbre sur  $\mathbb{Z}$ , l'augmentation étant induite par l'unique application de  $G$  dans le point. L'action  $G \times X \rightarrow X$  fait du complexe de chaînes  $C_*(X)$  un dga-module sur  $C_*(G)$ . On dispose du morphisme de complexes

$$\mathbb{Z} \otimes_{C_*(G)} C_*(X) \rightarrow C_*(X/G)$$

lequel induit un isomorphisme en homologie. Si l'espace  $X$  est contractile alors le quotient  $X/G$  a canoniquement le type d'homotopie de l'espace classifiant  $BG$  et le couple  $(C_*(G), C_*(X))$  est une construction. Le quotient  $\mathbb{Z} \otimes_{C_*(G)} C_*(X)$  est une approximation du complexe de chaînes de  $BG$  au sens qu'on dispose d'un morphisme

$$\mathbb{Z} \otimes_{C_*(G)} C_*(X) \rightarrow C_*(BG)$$

induisant un isomorphisme en homologie.

Cartan donne un théorème de comparaison entre constructions : soient  $(A_*, M_*)$ ,  $(A'_*, M'_*)$  deux constructions et  $f : A_* \rightarrow A'_*$  un morphisme de dga-algèbres. On

suppose que  $M_*$  est libre comme  $A_*$ -module gradué. Alors il existe un morphisme de dga-modules  $g : M_* \rightarrow M'_*$  compatible avec  $f$  et le morphisme induit

$$\bar{g} : \Lambda \otimes_{A_*} M_* \rightarrow \Lambda \otimes_{A'_*} M'_*$$

ne dépend à homotopie près que de  $f$ . Le morphisme induit en homologie par  $\bar{g}$  est ainsi uniquement déterminé. Si on suppose de plus que  $M'_*$  est libre comme  $A'_*$ -module gradué et l'une des hypothèses suivantes :

- (1)  $f$  est un isomorphisme,
- (2) on a  $H_0(A'_*) \simeq \Lambda$  et  $H_*(f)$  est un isomorphisme,

alors  $\bar{g}$  induit un isomorphisme en homologie. Cette dernière propriété est obtenue par un théorème de comparaison de suites spectrales dû à Moore.

Soit  $A_*$  une dga-algèbre commutative (au sens gradué). Une construction  $(A_*, M_*)$  est multiplicative si  $M_*$  est muni d'une structure de  $A_*$ -algèbre graduée commutative compatible avec la différentielle et l'augmentation. Le quotient  $\Lambda \otimes_{A_*} M_*$  hérite alors d'une structure de dga-algèbre commutative sur  $\Lambda$ .

La construction bar s'inscrit dans les constructions de Cartan : il existe sur le  $A_*$  module gradué  $B(A_*) := A_* \otimes_{\Lambda} \bar{B}(A_*)$  une différentielle faisant de  $B(A_*)$  un dga-module sur  $A_*$  et telle que le quotient  $\Lambda \otimes_{A_*} B(A_*)$  s'identifie à  $\bar{B}(A_*)$  comme complexe augmenté de  $\Lambda$ -modules. La construction bar  $(A_*, B(A_*))$  est spéciale au sens que pour toute construction  $(A'_*, M'_*)$  et pour tout morphisme  $A'_* \rightarrow A_*$  de dga-algèbres il existe un unique morphisme de dga-modules  $M'_* \rightarrow B(A_*)$  envoyant le facteur direct  $\Lambda \otimes_{A'_*} M'_*$  de  $M'_*$  sur le facteur direct  $\bar{B}(A_*)$  de  $B(A_*)$  (un tel morphisme est dit spécial). Cette unicité et la functorialité de  $A_* \mapsto B(A_*)$  montrent que la construction bar  $(A_*, B(A_*))$  est multiplicative lorsque  $A_*$  est une dga-algèbre commutative. Le quotient  $\Lambda \otimes_{A_*} B(A_*) = \bar{B}(A_*)$  hérite alors d'une structure de dga-algèbre commutative sur  $\Lambda$ . L'unicité implique également que si  $(A'_*, M'_*)$  est une construction multiplicative et  $f : A'_* \rightarrow A_*$  un morphisme de dga-algèbres alors l'unique morphisme spécial  $M'_* \rightarrow B(A_*)$  est multiplicatif. Il induit en particulier un morphisme de dga-algèbres

$$\Lambda \otimes_{A'_*} M'_* \rightarrow \Lambda \otimes_{A_*} B(A_*) = \bar{B}(A_*) .$$

Soit  $A_*$  une dga-algèbre commutative. Une construction multiplicative itérée d'algèbre initiale  $A_*$  est une suite  $(A_*^{(n)}, M_*^{(n)})$  de constructions multiplicatives avec  $A_*^{(0)} = A_*$  et pour tout  $n \geq 1$  un isomorphisme de dga-algèbres  $\Lambda \otimes_{A_*^{(n)}} M_*^{(n)} \simeq A_*^{(n+1)}$ . La construction bar permet d'obtenir une telle suite avec  $A_*^{(n)} = \bar{B}^{\circ n}(A_*)$ . D'après ce qui précède l'identité de  $A_*$  se prolonge de façon récursive et unique en une suite de morphismes spéciaux  $M_*^{(n)} \rightarrow B(\bar{B}^{\circ n}(A_*))$  lesquels induisent des morphismes  $A_*^{(n+1)} \rightarrow \bar{B}^{\circ n+1}(A_*)$ . Si chaque  $M_*^{(n)}$  est libre comme  $A_*^{(n)}$ -module gradué et si  $H_0(A_*^{(1)}) = \Lambda$  alors le théorème de comparaison mentionné plus haut montre que chaque morphisme  $A_*^{(n)} \rightarrow \bar{B}^{\circ n}(A_*)$  induit un isomorphisme en homologie. Ainsi fixons pour  $A_*$  l'algèbre  $\mathbb{Z}[\pi]$  d'un groupe abélien  $\pi$ , vue comme dga-algèbre concentrée en degré 0 :  $A_* = K_*(\pi, 0)$ . On peut approcher la construction bar itérée  $\bar{B}^{\circ n}(A_*)$  et donc le complexe de chaînes d'un espace  $K(\pi, n)$  par toute construction multiplicative itérée d'algèbre initiale  $A_*$ ,

pourvu que chaque  $M_*^{(n)}$  soit libre comme  $A_*^{(n)}$ -module gradué.

Tout l'intérêt de la notion de construction multiplicative vient de ce qu'on peut souvent exhiber une construction multiplicative d'algèbre initiale  $A_*$  plus économique que la construction bar  $(A_*, B(A_*))$ . Ceci est particulièrement fructueux lorsqu'on prend pour  $\Lambda$  le corps à  $p$  éléments, où  $p$  est un nombre premier fixé, et pour  $A_*$  l'algèbre d'un groupe  $\pi$  isomorphe à  $\mathbb{Z}$  ou au groupe cyclique  $\mathbb{Z}/p^\alpha$  pour un  $\alpha > 0$  : Cartan exhibe une construction multiplicative itérée  $(A_*^{(n)}, M_*^{(n)})$  d'algèbre initiale  $\mathbb{Z}[\pi]$  telle que la différentielle est nulle sur chaque  $A_*^{(n)}$ , ce qui est loin d'être le cas pour la construction bar itérée  $\bar{B}^{\circ n}(\mathbb{Z}[\pi])$ . Chaque construction  $(A_*^{(n)}, M_*^{(n)})$  est donc minimale et  $A_*^{(n)}$  est isomorphe comme  $\mathbb{F}_p$ -algèbre graduée à l'homologie modulo  $p$  de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane  $K(\pi, n)$ .

Les constructions  $(A_*^{(n)}, M_*^{(n)})$  de Cartan sont obtenues inductivement comme suit.

Pour un entier  $m \geq 1$ , on note  $E(2m-1)$  le quotient de la  $\mathbb{F}_p$ -algèbre graduée commutative libre en un générateur  $x$  de degré  $2m-1$  par la relation  $x^2 = 0$  (cette relation est automatique si  $p > 2$ ). On note  $P(2m)$  le quotient de la  $\mathbb{F}_p$ -algèbre graduée commutative libre en des générateurs  $x_1, x_2, \dots$ , où chaque  $x_k$  est de degré  $2mk$ , par les relations

$$x_k x_l = \frac{(k+l)!}{k! l!} x_{k+l}$$

( $E(2m-1)$  est l'algèbre extérieure en un générateur de degré  $2m-1$  et  $P(2m)$  est l'algèbre à puissances divisées libre en un générateur de degré  $2m$ ). On note enfin  $Q(2m)$  l'algèbre de polynômes tronquée  $\mathbb{F}_p[x]/x^p$  où  $x$  est de degré  $2m$ . L'algèbre graduée  $P(2m)$  est isomorphe au produit tensoriel d'algèbres graduées  $\bigotimes_{k \geq 0} Q(2m p^k)$ .

On munit les algèbres graduées  $E(2m-1)$ ,  $P(2m)$  et  $Q(2m)$  de la différentielle nulle. On observe d'abord qu'il existe une construction multiplicative d'algèbre initiale  $\mathbb{F}_p[\pi]$  et d'algèbre finale  $E(1)$  si  $\pi = \mathbb{Z}$ ,  $E(1) \otimes P(2)$  si  $\pi = \mathbb{Z}/p^\alpha$ . Cartan exhibe ensuite pour tout entier  $m \geq 1$

- une construction multiplicative d'algèbre initiale  $E(2m-1)$  et d'algèbre finale  $P(2m)$ ; cette construction s'identifie à la construction bar  $(E(2m-1), B(E(2m-1)))$ ;

- une construction multiplicative d'algèbre initiale  $Q(2m)$  et d'algèbre finale  $E(2m+1) \otimes P(2mp+2)$ ; cette construction est plus petite que la construction bar.

Comme le produit tensoriel de deux constructions multiplicatives est une construction multiplicative, on obtient une construction multiplicative d'algèbre initiale  $P(2m)$ ,  $m \geq 1$ , puis inductivement une construction multiplicative itérée d'algèbre initiale  $\mathbb{F}_p[\pi]$ .

Si  $\pi$  est un groupe abélien de type fini quelconque, on peut décomposer  $\pi$  en une somme directe de groupes monogènes. L'espace  $K(\pi, n)$  a le type d'homotopie (comme espace de lacets) du produit des espaces  $K(C, n)$ ,  $C$  décrivant les facteurs directs de  $\pi$  choisis. Son homologie à coefficients  $\mathbb{F}_p$  est donc isomorphe comme algèbre au produit tensoriel des homologies des espaces  $K(C, n)$ . Par ailleurs, comme l'algèbre  $\mathbb{F}_p[\pi]$  est le produit tensoriel des algèbres  $\mathbb{F}_p[C]$ , on

peut prendre pour construction multiplicative itérée d'algèbre initiale  $\mathbb{F}_p[\pi]$  le produit tensoriel des constructions multiplicatives itérées d'algèbre initiale les  $\mathbb{F}_p[C]$ .

On observe que si  $C$  est un groupe cyclique d'ordre premier à  $p$  alors l'application de  $K(C, 1)$  dans le point induit un isomorphisme en homologie à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$ . Dit autrement, l'homologie modulo  $p$  du groupe  $C$  est nulle en degré strictement positif. On en déduit que si  $(A_*^{(n)}, M_*^{(n)})$  est une construction multiplicative itérée d'algèbre initiale  $\mathbb{F}_p[C]$  alors chaque  $A_*^{(n)}$ ,  $n \geq 1$ , est acyclique comme complexe augmenté de  $\mathbb{F}_p$ -espaces vectoriels.

Cartan expose un calcul plus intrinsèque et plus précis dans son séminaire.

Il introduit notamment la notion d'algèbre graduée à puissances divisées et montre que la partie paire de l'homologie des espaces  $K(\pi, n)$  possède une telle structure.

On peut par ailleurs suivre au niveau des constructions multiplicatives l'application « suspension »

$$\Sigma K(\pi, n) \rightarrow K(\pi, n+1).$$

Cartan en déduit l'homologie à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$  du spectre d'Eilenberg-Mac Lane, c'est-à-dire la limite directe de la suite de groupes abéliens gradués

$$H_{*+n}(K(\pi, n); \mathbb{F}_p) \rightarrow H_{*+n+1}(K(\pi, n+1); \mathbb{F}_p) \rightarrow \dots$$

induite par les applications  $\Sigma K(\pi, n) \rightarrow K(\pi, n+1)$  et l'isomorphisme de suspension  $H_{k+1}(\Sigma X) \simeq H_k(X)$ . Cette limite directe s'interprète comme le dual du  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel gradué formé des opérations sur la cohomologie modulo  $p$  commutant à la suspension.

En comparant les constructions multiplicatives itérées à coefficients entiers avec celles à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$ , Cartan donne un modèle (que nous n'explicitons pas) du complexe de chaînes à coefficients entiers d'un espace  $K(\pi, n)$  comme dga-algèbre commutative et peut en décrire l'homologie.

## 6. Héritage et remarques

La cohomologie modulo 2 des espaces d'Eilenberg-Mac Lane avait été calculée en 1952 par Serre [SE] de façon différente en utilisant la suite spectrale de la fibration des chemins  $PK(\pi, n+1) \rightarrow K(\pi, n+1)$  dont la fibre est un espace  $K(\pi, n)$ , dans l'esprit des calculs par Borel de l'homologie modulo  $p$  des espaces classifiants des groupes de Lie.

La notion de construction multiplicative et les équivalences d'homotopie entre constructions s'inscrivent à la suite des travaux de fondation de l'algèbre homologique par Cartan et Eilenberg [C-E], laquelle a conduit à la notion de catégorie dérivée d'une catégorie abélienne (Grothendieck).

La modélisation algébrique du complexe de chaînes ou de cochaînes des espaces intervenant dans une fibration est née à la fin des années 1940 avec notamment les travaux de Hirsch, ceux de Chevalley et Eilenberg sur la cohomologie de de Rham d'un groupe de Lie puis ceux de Cartan sur la cohomologie de de Rham des

espaces homogènes de groupes de Lie. Elle s'est poursuivie avec la modélisation par Adams et Hilton (1956) du complexe de chaînes d'un espace de lacets et la construction cobar d'Adams. La situation exposée par Cartan où on obtient un modèle sans différentielle est exceptionnelle. Dans les situations générales l'algèbre homologique et l'introduction des suites spectrales permettent de relier les groupes d'homologie du modèle trouvé avec ceux des espaces considérés comme paramètres du problème. Ainsi la résolution bar servant à modéliser le complexe de chaînes du quotient  $X/G$ , où  $G$  est un groupe topologique opérant principalement sur un espace  $X$ , conduit à la suite spectrale de Rothenberg-Steenrod (1965) dont le terme  $E^2$  est formé des groupes  $\text{Tor}^{\mathbb{H}^*(G)}(\mathbb{H}_*(X), \mathbb{H}_*(\text{pt}))$  tout au moins lorsque l'anneau de coefficients est un corps. De même la résolution bar servant à modéliser le complexe de cochaînes de la fibre homotopique d'une application  $X \rightarrow B$  conduit à la suite spectrale d'Eilenberg-Moore (1966) dont le terme  $E_2$  est formé des groupes  $\text{Tor}_{\mathbb{H}^*(B)}(\mathbb{H}^*(X), \mathbb{H}^*(\text{pt}))$ .

En 1954 Thom a posé la question de la modélisation du complexe de cochaînes à coefficients dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Q}$  d'un espace topologique quelconque par une dga-algèbre commutative, situation qu'on rencontre pour le complexe de de Rham d'une variété différentiable ou pour le complexe de chaînes d'un espace d'Eilenberg-Mac Lane. Une solution fut donnée par Quillen en 1969 dans sa fondation de l'homotopie rationnelle puis par Sullivan (1977) avec ses modèles minimaux (voir [H-H] pour une histoire du sujet).

La situation est plus compliquée en caractéristique  $p$  : le complexe de cochaînes à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$  d'un espace ne peut pas en général être modélisé par une dga-algèbre commutative – l'existence des opérations de Steenrod en témoigne – mais seulement par une algèbre sur une opérade  $E_\infty$ . Mandell [MA] a montré que la catégorie homotopique des espaces, du moins celle qu'on considère quand on complète les groupes d'homotopie en le nombre premier  $p$ , se plonge dans la catégorie homotopique des  $E_\infty$ -dga-algèbres sur la clôture algébrique de  $\mathbb{F}_p$ . La complexité des  $E_\infty$ -algèbres est cependant telle qu'on est loin du succès des calculs de Cartan ou des modèles minimaux de Sullivan.

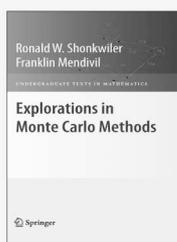
Concluons en observant que, à la connaissance de l'auteur, l'exploitation du calcul par Cartan de l'homologie entière des espaces d'Eilenberg-Mac Lane appartient encore à l'avenir.

## 7. Bibliographie

- [ADA] J.F. ADAMS, *On the non existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math. **72** (1960), 20-104.
- [ADA2] J.F. ADAMS, *The work of M.H. Cartan in its relation with homotopy theory*, Colloque analyse et topologie en l'honneur de Henri Cartan, Astérisque **32-33** (1976), 29-41.
- [ADE] J. ADEM, *The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **38** (1952), 720-726.
- [BIL] J.-B. BOST, L. ILLUSIE ET F. LOESER ORGANISATEURS, *Journée Henri Cartan* (2004), <http://www.diffusion.ens.fr/index.php?res=cycles&idcycle=98>
- [B-M] R. BOTT ET J. MILNOR, *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 87-89.
- [CA1] H. CARTAN, *Sur les groupes d'Eilenberg - Mac Lane  $H(\pi, n)$  I et II*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **40** (1954), 467-471 et 704-707.

- [CA2] H. CARTAN, *Algèbres d'Eilenberg-MacLane*, Séminaire Henri Cartan 1954-1955, exposés 2 à 11 dans H. CARTAN, *Oeuvres*, vol. III, Remmert and Serre ed. (1979).
- [C-E] H. CARTAN ET S. EILENBERG, *Homological algebra* (1956).
- [C-S] H. CARTAN ET J.-P. SERRE, *Espaces fibrés et groupes d'homotopie I et II*, C. R. Acad. Sci. Paris **234** (1952), 288-290 et 393-395.
- [E] S. EILENBERG, *Singular homology theory*, Ann. of Math. **45** (1944), 407-447.
- [EML1] S. EILENBERG ET S. MACLANE, *Relations between homology and homotopy groups of spaces*, Ann. of Math. **46** (1945), 480-509.
- [EML2] S. EILENBERG ET S. MACLANE, *On the groups  $H(\pi, n)$  I*, Ann. of Math. **58** (1953), 55-106.
- [EML3] S. EILENBERG ET S. MACLANE, *On the groups  $H(\pi, n)$  II*, Ann. of Math. **60** (1954), 49-139.
- [EML4] S. EILENBERG ET S. MACLANE, *On the groups  $H(\pi, n)$  III*, Ann. of Math. **60** (1954), 513-557.
- [H-H] K. HESS, *A history of rational homotopy theory* dans I.M. JAMES ED., *History of topology*, 757-796, (1999).
- [H-S] K.S. SARKARIA, *The topological work of Henri Poincaré* dans I.M. JAMES ED., *History of topology*, 123-168, (1999).
- [Ho1] H. HOPF, *Vektorfelder in  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **96** (1927), 225-249.
- [Ho2] H. HOPF, *Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension*, Fundamenta Math. **25** (1935), 427-440, traduit en anglais dans B. ECKMANN ED., *H. Hopf Collected papers*, Springer (2001).
- [MA] M.A. MANDELL,  *$E_\infty$ -algebras and  $p$ -adic homotopy theory*, Topology **40** (2001), 43-94.
- [ML] S. MACLANE, *Origins of the cohomology of groups*, L'Enseignement Mathématique **24** (1978), 1-29.
- [Mo] J.C. MOORE, *Cartan's constructions, the homology of  $K(\pi, n)$ 's and some later developments*, Colloque analyse et topologie en l'honneur de Henri Cartan, Astérisque **32-33** (1976), 173-212.
- [N-H] F. HIRZEBRUCH, *Division algebras and topology* dans H.D. EBBINGHAUS ET AL., *Numbers*, Springer (1990).
- [P] H. POINCARÉ, *Analysis situs*, J. Ec. Poly. **1**, (1895), 1-121.
- [SC1] *Séminaire Henri Cartan 1* (1948-1949).
- [SC2] J.-P. SERRE, *Groupes d'homotopie*, Séminaire Henri Cartan **2** (1949-1950), exposé 2.
- [SC3] H. CARTAN, *Invariant de Hopf*, Séminaire Henri Cartan **11** (1958-1959), exposé 6.
- [SE] J.-P. SERRE, *Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-Mac Lane*, Comment. Math. Helv. **27** (1953), 198-232.
- [ST] N.E. STEENROD, *Products of cycles and extensions of mappings*, Ann. of Math. **48** (1947), 290-320.

## Highlights in Springer's eBook Collection



Monte Carlo methods are among the most used and useful computational tools available, providing efficient and practical algorithms to solve a wide range of scientific and engineering problems.

2009. XII, 244 p. 50 illus. (Undergraduate Texts in Mathematics) Hardcover ISBN 978-0-387-87836-2  
 ► € 49,95 | £44.99



This book offers a comprehensive account of the finite groups. It begins with the basic definitions and moves on to develop the theory, using examples to help students with their understanding.

2009. Approx. 290 p. 6 illus. (Universitext) Softcover ISBN 978-1-84882-888-9  
 ► € 49,95 | £44.99



This groundbreaking book serves as a first introduction to computer programming of scientific applications, using the high-level Python language.

2009. XXVII, 693 p. (Texts in Computational Science and Engineering, Volume 6) Hardcover ISBN 978-3-642-02474-0  
 ► € 44,95 | £39.99

### For access check with your librarian

#### Mathematical Biology An Introduction with Maple and Matlab R. W. Shonkwiler, J. Herod

2nd ed. 2009. XIV, 554 p. 156 illus. (Undergraduate Texts in Mathematics) Hardcover ISBN 978-0-387-70983-3  
 ► € 59,95 | £53.99

#### The Finite Simple Groups An Introduction R. Wilson

2010. Approx. 235 p. (Graduate Texts in Mathematics, Volume 251) Hardcover ISBN 978-1-84800-987-5  
 ► € 49,95 | £44.99

#### Introduction to Analytical Dynamics N. Woodhouse

2nd ed. 2010. Approx. 260 p. 42 illus. (Springer Undergraduate Mathematics Series) Softcover ISBN 978-1-84882-815-5  
 ► € 39,95 | £29.99

**Easy Ways to Order for the Americas** ► **Write:** Springer Order Department, PO Box 2485, Secaucus, NJ 07096-2485, USA ► **Call: (toll free)** 1-800-SPRINGER ► **Fax:** 1-201-348-4505 ► **Email:** orders-ny@springer.com or **for outside the Americas** ► **Write:** Springer Customer Service Center GmbH, Haberstrasse 7, 69126 Heidelberg, Germany ► **Call:** +49 (0) 6221-345-4301 ► **Fax:** +49 (0) 6221-345-4229 ► **Email:** orders-hd-individuals@springer.com  
 ► Prices are subject to change without notice. All prices are net prices.

014445x

# DOCUMENTS

---

## En souvenir de Paulette Libermann

Marc Chaperon

---

Ce qui suit, moins disparate que ne pourrait le faire croire pareille énumération, se compose

- de l'annonce du prochain colloque dédié à la mémoire de Paulette Libermann,
- d'un bref hommage, qui vient donc s'ajouter à ceux, plus consistants, d'Yvette Kosmann-Schwarzbach et Charles-Michel Marle dans la *Gazette* n° 114,
- des trois lettres qu'elle a adressées en 1942 à Élie Cartan depuis Lyon, où elle était réfugiée,
- de l'introduction de sa thèse, qui constitue le cœur de l'ensemble
- d'un texte destiné à ouvrir aux non-spécialistes un accès à ce travail savant et toujours d'actualité, texte dont la seconde partie paraîtra dans le prochain numéro de la *Gazette*.

### Le colloque « Paulette Libermann, héritage et descendance » <sup>1</sup>

Il se tiendra à l'Institut Henri Poincaré du 7 au 12 décembre 2009.

Son comité scientifique est composé de Daniel Bennequin, Alain Chenciner, Victor Guillemin, Lisa Jeffrey, Yvette Kosmann-Schwarzbach et Charles-Michel Marle. Ses organisateurs sont Alain Albouy, Michèle Audin, Marc Chaperon, Jacques Féjoz, Jean-Pierre Marco, Charles-Michel Marle et Eva Miranda.

Voici les sujets qui seront abordés et les conférenciers ayant donné leur accord pour le faire : *structures presque complexes, utilisation en géométrie symplectique et de contact* (Denis Auroux, Paul Biran, Léa Blanc-Centi, Emmanuel Ferrand, Agnès Gadbled, Emmanuel Giroux, Leonor Godinho, Misha Gromov, Tara Holm, Yael Karshon, Ana Rita Pires, Patrick Popescu-Pampu) ; *géométrie de Poisson* (Anne Pichereau, Nguyen Tien Zung, Izu Vaisman, Alan Weinstein) ; *symétries et équations différentielles* (Rui Loja Fernandes, Peter Olver, Shlomo Sternberg [sous réserve]) ; *feuilletages lagrangiens, systèmes intégrables* (Frédéric Hélein, Alfonso Sorrentino, San Vu Ngoc) ; *un peu d'histoire* (David Blair, Ivan Kolář, Jean Pradines) – session organisée par Yvette Kosmann-Schwarzbach.

---

<sup>1</sup> <http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin/Paulette.html>

### Quelques souvenirs

Mademoiselle Libermann, comme nous l'appelions tous<sup>2</sup>, a accompagné toute ma vie professionnelle. À mes débuts, elle m'a en effet fait l'honneur de me demander une conférence lors de la journée de géométrie différentielle qu'elle organisait tous les ans à l'IHP. Très jeunes, Michèle Audin, Daniel Bennequin ou Jean-Pierre Francoise, entre autres, ont aussi reçu ce précieux encouragement. Comme Shih Weishu, Mademoiselle Libermann avait le talent rare d'entretenir chez les débutants une flamme mathématique qui, sinon, aurait pu vaciller.

Par la suite, je suis allé assez souvent au séminaire qu'elle organisait avec Yvette Kosmann-Schwarzbach. C'était l'occasion de compléter ma lecture d'Élie Cartan dont, à la suite de son maître Ehresmann, Mademoiselle Libermann continuait d'assumer pleinement l'héritage, en des temps où certains puristes faisaient à ce grand mathématicien une absurde réputation d'obscurité.

Je l'ai mieux connue lors de colloques, puis quand je suis devenu son collègue à Paris 7 et enfin au séminaire Marle. Elle était une mémoire vivante de la communauté mathématique française, dont elle parlait avec une tendresse sans indulgence comme on parle de sa famille.

Issue de l'immigration, comme on dit de nos jours, elle avait fait de très bonnes études secondaires à Paris au lycée Lamartine (sa famille demeurait non loin, rue de la Tour d'Auvergne) avant de voir son mérite récompensé par le succès au concours d'entrée à Sèvres, l'École Normale Supérieure de Jeunes Filles. Malheureusement, les lois scélérates de Vichy ont pour le moins terni ce succès<sup>3</sup> et elle a dû fuir (à Lyon !) avec sa famille. Dans cette épreuve, la communauté mathématique française a fait tout ce qu'elle pouvait pour soutenir Paulette Libermann, dont la révérence pour Élie Cartan (et la tendresse pour cette communauté) était certainement due *aussi* à ce soutien.

### Les lettres à Élie Cartan

Nous remercions la famille Cartan d'avoir bien voulu les communiquer à Michèle Audin, auteur des notes de bas de page.

Ces lettres montrent à la fois le soutien apporté par le grand mathématicien à la jeune sévrienne et le cran de celle-ci car, tout de même, aller seule de Lyon à Clermont-Ferrand voir Ehresmann à cette époque troublée...

« Lyon le 28 août 1942

*Cher Monsieur*

*Au début d'août, je me suis fixée à Lyon. Je suis désolée de ne pouvoir continuer avec vous des travaux qui m'avaient tant intéressée et pour lesquels vous m'aviez témoigné tant de bienveillante attention ; j'espère que vous comprendrez les raisons*

<sup>2</sup> Ma génération la désignait à son insu d'un *Paulette* affectueux, qu'elle aurait sûrement trouvé impertinent.

<sup>3</sup> Rappelons que, très vite, les juifs n'ont plus eu accès aux grades élevés de la fonction publique (et que le Conseil d'État les a par conséquent bientôt exclus de celle-ci *au nom du principe d'équité...*). Paulette Libermann n'a donc pu passer l'agrégation et c'est ainsi qu'elle est devenue mathématicienne.

qui m'ont poussée à abandonner mes projets. J'ai cependant l'intention, si cela est possible, de continuer mes recherches et je vous serais bien reconnaissante si vous pouviez m'indiquer un Professeur qui voudrait bien me conseiller, soit à Lyon de préférence (car nous avons trouvé un appartement) soit à Grenoble ou à Clermont. Je me suis renseignée ici au sujet de ma bourse ; je ne sais si la bourse Visconti peut être transférée mais si j'obtenais une bourse d'Etat le transfert de celle-ci serait possible. Je ne continuerai mes recherches qu'à cette condition car autrement je me verrais obligée de chercher une situation me trouvant sans autres ressources.

J'ai remis à Mademoiselle Ferrand<sup>4</sup> les livres que vous m'aviez si obligeamment prêtés pour qu'elle vous les rende. D'ailleurs j'ai mis Mademoiselle Ferrand au courant de mes projets avant son départ en vacances.

Je vous remercie pour l'aide que vous avez bien voulu m'accorder pour mes travaux et pour tout ce que vous avez fait pour moi.

En vous souhaitant une bonne fin de vacances, je vous prie d'agréer, Monsieur, l'expression de mon profond respect

P. Libermann »

« Lyon le 15 octobre 1942

Cher Monsieur

Je vous remercie beaucoup de votre carte que je viens de recevoir et je vous suis reconnaissante de vous occuper de moi à un moment où vous êtes éprouvé<sup>5</sup>. J'espère que cette épreuve sera de courte durée.

Je suis allée rendre visite à Madame Weiss<sup>6</sup> qui m'a reçue très gentiment et m'a donné des nouvelles de vous et des vôtres.

En ce qui concerne une bourse je suis allée voir le Doyen de la faculté des Sciences de Lyon avant de recevoir votre carte. Celui-ci va essayer de se mettre en contact avec Monsieur Montel<sup>7</sup>. J'espère que vos démarches aboutiront et je m'excuse de vous causer tant de dérangements. Je suis allée voir Monsieur Paul Lévy, professeur à Polytechnique qui m'a indiqué et prêté des livres mais ne pourra s'occuper de moi, ne restant pas à Lyon<sup>8</sup>.

Je vous prie de croire, cher Monsieur, à l'expression de ma profonde sympathie

P. Libermann »

---

<sup>4</sup> Jacqueline Ferrand, caïmane à l'École de Sèvres.

<sup>5</sup> Élie Cartan est éprouvé par l'arrestation de son fils, le physicien Louis Cartan.

<sup>6</sup> Madame Weiss était la belle-mère d'Henri Cartan.

<sup>7</sup> Le mathématicien Paul Montel était doyen de la faculté des sciences à Paris.

<sup>8</sup> Paul Lévy était à Lyon où l'École polytechnique était repliée.

« Lyon le 3 décembre 1942

*Cher Monsieur*

*J'ai le plaisir d'apprendre que ma bourse vient de m'être transférée et que je vais la toucher en totalité cette semaine.*

*Je vous remercie pour toutes les démarches que vous avez faites à ce sujet et je ne saurais comment exprimer ma reconnaissance pour tout ce que vous avez fait pour moi.*

*En ce qui concerne mes recherches, Monsieur Lichnerowicz m'a adressée à Monsieur Ehresmann ; celui-ci, à qui je suis allée rendre visite à Clermont-Ferrand cette semaine, veut bien me guider dans mon travail et m'a indiqué plusieurs ouvrages de topologie des groupes à lire.*

*J'espère que vous avez de bonnes nouvelles de tous les vôtres et que l'hiver ne présentera pas trop de difficultés pour vous, l'année prochaine nous voyant tous réunis.*

*Mes parents qui devaient venir nous rejoindre n'ont pu le faire à leur grand regret.*

*En vous remerciant encore pour le dévouement dont vous avez fait preuve à mon égard, je vous prie d'agréer, cher Monsieur, l'expression de ma respectueuse sympathie*

*P. Libermann »*



*Paulette Libermann vers 1939  
Extrait d'une « photo de classe » prise à Sèvre*

## L'introduction de la thèse

Le document qui suit reproduit le titre et l'introduction de la thèse de Paulette Libermann, soutenue le 21 mai 1953 devant la faculté des sciences de l'université de Strasbourg ; le jury était formé de Georges Cerf (président), Charles Ehresmann et Jacques Deny. Dans la mesure du possible, la typographie de l'original a été respectée : seule la numérotation des références bibliographiques a changé, celles de la thèse n'apparaissant pas toutes dans cette introduction.

### Sur le problème de l'équivalence de certaines structures infinitésimales.

Mémoire de PAULETTE LIBERMANN (à Strasbourg).

**Résumé.** - *Après avoir rappelé la définition et quelques propriétés des pseudogroupes de Lie, on définit les structures infinitésimales régulières. On peut toujours associer des connexions affines à de telles structures; courbure et torsion de ces connexions. Equivalence locale de deux structures infinitésimales. Application à l'étude des structures presque complexes, presque paracomplexes, presque symplectiques, presque hermitiennes, presque parahermitiennes, presque quaternioniennes, presque quaternioniennes de deuxième espèce.*

#### INTRODUCTION

La *théorie de l'équivalence* développée par E. CARTAN dans de nombreux mémoires (notamment dans [3] et [5])\* est à la base de la géométrie différentielle ; elle permet également l'intégration de certains systèmes différentiels.

L'exposé de cette théorie fait l'objet de la première partie du présent travail ; le problème d'équivalence est formulé en le rattachant à la théorie des espaces fibrés, en particulier en introduisant la notion de *structure infinitésimale régulière* due à C. EHRESMANN [7] : une structure infinitésimale régulière du premier ordre sur une variété différentiable  $V_n$  est une structure fibrée subordonnée à la structure fibrée de l'espace des vecteurs tangents à  $V_n$  (le groupe structural  $G$  est un sous-groupe du groupe linéaire homogène  $L_n$ , la fibre est  $R^n$ ). Le problème d'équivalence de E. CARTAN se ramène au problème d'équivalence locale de ces structures ; nous n'aborderons pas le problème d'existence de telles structures qui conduit à des obstacles, ni celui de l'équivalence globale.

Dans la recherche des conditions d'équivalence locale de deux structures on est amené à étudier le pseudogroupe de leurs automorphismes locaux, d'où la notion de *pseudogroupe fini ou infini de LIE* (« groupe fini » ou « groupe infini » de LIE suivant la terminologie de E. CARTAN. C'est d'ailleurs l'étude du problème d'équivalence qui a conduit E. CARTAN à édifier sa théorie des « groupes infinis » de LIE, que l'on trouve exposée notamment dans [2] et [4] ; les transformations de ce « groupe infini » constituent l'intégrale générale d'un système d'équations aux dérivées partielles que l'on peut ramener à un système de PFAFF en involution.

Dans le chapitre I, consacré aux pseudogroupes de LIE, je rappelle d'abord quelques propriétés des systèmes d'équations aux dérivées partielles et les principales notions de la théorie des systèmes de PFAFF en involution. Ensuite est

\* Les nombres entre crochets renvoient à l'index bibliographique.

exposée la définition d'un pseudogroupe de LIE, telle qu'elle a été donnée par C. EHRESMANN [7] en utilisant la notion de *groupoïde de jets*; un pseudogroupe de LIE est caractérisé par son *ordre*; de plus j'introduis, pour les pseudogroupes finis, la notion de *degré*. Les deux théorèmes fondamentaux de E. CARTAN relatifs à la théorie des pseudogroupes de LIE sont démontrés en utilisant la notion de *prolongement d'une variété différentiable* [7], notion déjà utilisée bien que non formulée explicitement par U. AMALDI dans son ouvrage sur les « groupes infinis » [1]. En vertu du premier théorème de E. CARTAN, tout pseudogroupe de LIE admet un prolongement du premier ordre et, s'il est fini, un prolongement d'ordre et de degré égaux à 1. Dans le deuxième théorème sont énoncées des conditions pour qu'un pseudogroupe de transformations soit un pseudogroupe infini (resp. fini) de LIE d'ordre 1 (resp. d'ordre et de degré égaux à 1).

Dans le chapitre II est définie l'équivalence locale de deux structures infinitésimales régulières. Une structure infinitésimale régulière est déterminée localement par un ensemble de  $n$  formes de PFAFF dont la restriction à tout point de  $V_n$  est un « corepère ». On envisage en particulier des structures *isotropes, localement homogènes, intégrables*. À toute structure infinitésimale régulière sont associées des *connexions affines* [6]; à chacune des connexions correspond un tenseur de *courbure* et un tenseur de *torsion*. Je démontre deux théorèmes relatifs aux structures infinitésimales régulières intégrables. J'expose ensuite les méthodes de E. CARTAN pour traiter le problème d'équivalence restreint (structures dont le groupe structural est la transformation identique). Dans la résolution du problème d'équivalence général, on cherche à déterminer en chaque point un corepère distingué; si cette détermination est possible, on est ramené au problème d'équivalence restreint. Lorsqu'on peut associer canoniquement à la structure une connexion affine, le pseudogroupe de ses automorphismes est un pseudogroupe de LIE de type fini de degré 2; dans le cas contraire, le pseudogroupe de ses automorphismes locaux est en général un pseudogroupe infini de LIE (si l'on suppose de plus les données analytiques).

Les théories générales exposées dans la première partie de ce travail ont leurs applications dans la deuxième partie, consacrée aux structures infinitésimales régulières définies sur une variété différentiable  $V_{2n}$ , de dimension  $2n$ , dont le groupe structural  $G$  est : le groupe linéaire homogène complexe  $L'_n$  ou le groupe linéaire homogène « paracomplexe »  $\check{L}'_n$  (isomorphe à  $L_n \times L_n$ ) ou encore le groupe symplectique  $\check{L}_{2n}$ ; ces structures sont appelées respectivement *presque complexes*, *presque « paracomplexes »*, *presque symplectiques*. On étudiera également dans cette deuxième partie des structures subordonnées aux précédentes, dont le groupe structural est subordonné à une forme réelle du groupe  $L'_n$  : groupe unitaire  $U_n$ , groupe  $U_n^{(k)}$  unitaire « d'espèce  $k$  », groupe « para-unitaire »  $\check{U}_n$  et groupe  $\widehat{L}_n$  (ces deux derniers isomorphes à  $L_n$ ) et si  $n = 2p$ , groupe linéaire homogène quaternionien  $L''_p$  et quaternionien « de deuxième espèce »  $\check{L}''_p$  (identique à  $\widehat{L}_{2p}$ ). Contrairement à ce qui a lieu pour les structures presque complexes, presque paracomplexes et presque symplectiques, on peut associer canoniquement au moins une connexion affine à ces structures (structures *presque hermitiennes*, *presque hermitiennes « d'espèce  $k$  »*, *presque parahermitiennes*, *presque quaternioniennes*, *presque quaternioniennes de deuxième espèce*). Pour chacune de ces connexions, on peut définir, outre les tenseurs de courbure et de torsion, des tenseurs de

courbure et de torsion conformes. La recherche de celles de ces structures qui sont isotropes conduit aux structures intégrables et aux structures localement équivalentes à une structure d'espace hermitien elliptique ou hyperbolique (si le groupe structural est  $U_n$ ), d'espace hermitien d'espèce  $k$  (si le groupe structural est  $U_n^{(k)}$ ), ou à une structure parahermitienne sur la variété  $P_n(\mathbb{R}) \times P_n(\mathbb{R})$  (si le groupe structural est  $\hat{U}_n$ ). On obtient ainsi des espaces riemanniens symétriques à métrique définie ou indéfinie. En définissant une isotropie restreinte, on est conduit aux structures précédentes et en outre à des structures localement équivalentes à une structure presque hermitienne sur la sphère  $S_6$  ou à une structure presque parahermitienne sur la quadrique réelle  $Q_6$ ; ces structures admettent respectivement comme groupe d'automorphismes le groupe simple compact  $G_2$  à 14 paramètres et le groupe simple  $G_2'$  qui sont les deux formes réelles d'un même groupe complexe.

Dans le chapitre III (qui est purement algébrique) sont étudiées des structures de la fibre  $\mathbb{R}^{2n}$  admettant comme groupe d'automorphismes  $L'_n, \hat{L}'_n, \tilde{L}_{2n}, U_n, U_n^{(k)}, \hat{U}_n, \hat{L}_n$ . Dans le dernier paragraphe de ce chapitre est définie l'*adjointe* d'une forme extérieure  $\varphi$  par rapport à une forme extérieure quadratique  $\Omega$  de rang  $2n$ ; l'opérateur  $\Lambda$ , adjoint de l'opérateur  $L\varphi = \varphi \wedge \Omega$  ne dépend que de  $\Omega$  et non de la forme quadratique définie positive échangeable avec  $\Omega$ ; il en est de même de la notion de *classe*; il est également prouvé que la décomposition d'une forme en formes de classe déterminée (dont je donne une démonstration différente de celle d'ECKMANN-GUGGENHEIMER) est identique à la décomposition de LEPAGE.

Ces résultats sont utilisés dans le chapitre IV, consacré au problème d'équivalence des formes différentielles extérieures quadratiques, et dans lequel est introduite la notion de *codifférentielle* par rapport à une forme différentielle extérieure quadratique.

Dans le chapitre V sont étudiées les structures presque complexes et presque paracomplexes, ainsi que les structures presque hermitiennes, presque hermitiennes d'espèce  $k$ , presque parahermitiennes. En particulier, le problème d'équivalence des structures presque complexes et presque hermitiennes sur une variété  $V_4$  est traité en détail.

Enfin les structures infinitésimales régulières de groupe structural  $\hat{L}_n$  (structures presque quaternionniennes de deuxième espèce si  $n = 2p$ ) font l'objet du chapitre VI; à de telles structures on peut associer canoniquement trois connexions affines en général distinctes. On envisage également dans ce chapitre des structures subordonnées aux précédentes, de groupe structural isomorphe au groupe orthogonal  $O_n$  (on détermine celles de ces structures qui sont isotropes); si  $n = 2p$ , on envisage aussi des structures de groupe structural isomorphe à  $L_p \times L_p \times L_p \times L_p$  ou à  $L'_p \times L'_p$  ou à un de leurs sous-groupes; parmi ces dernières, celles dont le groupe structural est isomorphe à  $L'_p$  et qui sont isotropes sont ou bien intégrables ou bien localement équivalentes à une structure parahermitienne complexe sur la variété  $P_p(\mathbb{C}) \times P_p(\mathbb{C})$ .

Qu'il me soit permis d'exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur CHARLES EHRESMANN pour l'aide qu'il a bien voulu m'accorder dans mes recherches et dont les nombreux conseils ont été précieux dans l'élaboration de ce travail.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] U. AMALDI, *Teoria dei gruppi continui infiniti di trasformazioni*. Roma, 1942.
- [2] E. CARTAN, *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, « Ann. Sci. Ec. Norm. », 21, 1904, p. 153–206.
- [3] ——— *Les sous-groupes des groupes continus de transformations*, « Ann. Sci. Ec. Norm. », 25, 1908, p. 57–194.
- [4] ——— *La structure des groupes infinis*, « Séminaire de Math. », 4<sup>e</sup> année, 1936–37, G, (polycopié).
- [5] ——— *Les problèmes d'équivalence*, « Selecta », Paris, Gauthier-Villars, 1937, p. 113–136.
- [6] C. EHRESMANN, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque Top. Bruxelles 1950, p. 29.
- [7] ——— *Les prolongements d'une variété différentiable*, « C.R. Acad. Sc. Paris », 233, 1951, p. 598, 777 et 1081 — *Structures locales et structures infinitésimales*, ibidem, 234, 1952, p. 587.

### Commentaire en forme de petit cours (première partie)

Cette thèse se situe à la charnière de deux mondes : celui de l'avant-guerre, à travers l'œuvre (et la personne) d'Élie Cartan<sup>10</sup>, et le modernisme de l'après-guerre, qu'Ehresmann incarne magnifiquement. Contrairement à d'autres disciples de celui-ci (Haefliger, Reeb, Thom dans une large mesure), Paulette Libermann reste en marge des développements de la topologie différentielle globale, rendus possibles par la clairvoyance de leur maître et par le développement fulgurant de la topologie algébrique et des méthodes homologiques autour d'Henri Cartan. En revanche, elle ne sacrifie rien de la complexité inhérente à l'univers d'Élie Cartan<sup>11</sup>, qu'elle traduit dans le nouveau langage, jouant un rôle de « passeur » bien avant le Dieudonné des *Éléments d'Analyse* [10, 11] et avec moins de parti-pris.

Les notes qui suivent (et celles qui suivront) insistent sur ce nouveau langage<sup>12</sup> et sur certains des développements qu'il a permis, tout en commentant quelques aspects de la thèse.

Le cadre est celui des variétés et applications différentiables (c'est-à-dire  $C^\infty$  ou « assez différentiables », le mot étant sous-entendu lorsque rien n'est spécifié) de dimension finie, dont on suppose connue la définition – la plupart des notions considérées « passent » sans problème dans les catégories analytiques réelle et (en remplaçant  $\mathbb{R}$  par  $\mathbb{C}$ ) complexe et/ou banachique. La dérivée  $k$ -ième d'une application  $f$  est notée  $D^k f$  comme dans [9]. Les chemins sont définis sur des intervalles.

<sup>10</sup> Lequel représente l'avant-garde de l'avant-guerre, ne pas l'oublier.

<sup>11</sup> Par définition, les variétés, les fibrés, les feuilletages, dont l'après-guerre fait ses choux gras, sont localement sans mystère, alors qu'on ne peut pas étudier en toute généralité les propriétés globales d'objets mal compris localement ; la thèse de Paulette Libermann pose justement les fondations locales de telles études globales.

<sup>12</sup> Comme il est devenu en bonne partie classique, je présente mes excuses à ceux qui le connaissent mieux que moi : ce texte n'est pas écrit pour eux. Les choix effectués et les erreurs éventuelles me sont entièrement imputables. Une référence recommandée est bien sûr [14].

**Jets**

Introduits par Ehresmann [7], curieusement presque absents de [10, 11], ils sont au début de la thèse – et de la géométrie différentielle moderne, puisqu'ils généralisent la notion de développement de Taylor aux applications entre variétés différentiables. Rappelons la *formule de Faà di Bruno*<sup>13</sup> donnant la dérivée  $k$ -ième de la composée de deux applications  $C^k$  entre ouverts d'espaces de Banach :

$$\frac{1}{k!} D^k(g \circ f)(x)v^k = \sum D^{|\rho|} g(f(x)) \left( \frac{1}{\rho_1!} \left( \frac{1}{1!} D^1 f(x)v^1 \right)^{\rho_1}, \dots, \frac{1}{\rho_k!} \left( \frac{1}{k!} D^k f(x)v^k \right)^{\rho_k} \right),$$

où  $x$  appartient à l'ouvert de définition de  $g \circ f$ , le vecteur  $v$  à l'espace de Banach ambiant,  $v^k := (\overbrace{v, \dots, v}^{k \text{ fois}})$  et la somme se fait sur tous les  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_k) \in \mathbb{N}^k$  avec  $\sum j \rho_j = k$ , en posant  $|\rho| = \sum \rho_j$ .

Pour chaque entier naturel  $k$ , on dit que deux applications  $f$  et  $g$  de classe  $C^k$ , définies au voisinage d'un point  $a$  d'une variété  $M$ , à valeurs dans une variété  $N$ , ont le même *jet d'ordre  $k$*  en  $a$ , noté  $j_a^k f = j_a^k g$ , lorsqu'elles y prennent la même valeur  $b$  et qu'il existe des cartes locales  $\varphi : (M, a) \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\psi : (N, b) \rightarrow \mathbb{R}^p$  telles que  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  et  $\psi \circ g \circ \varphi^{-1}$  aient le même développement de Taylor d'ordre  $k$  au point  $\varphi(a)$ ; heureusement pour cette définition, la formule de Faà di Bruno implique que c'est alors le cas *quelles que soient* les cartes locales  $\varphi$  et  $\psi$  en  $a$  et  $b$  respectivement.

Soit  $J^k(M, N)$  l'ensemble des jets d'ordre  $k$  d'applications de  $M$  dans  $N$ , c'est-à-dire de tous les  $j_a^k f$  ainsi définis. Si  $M, N$  sont des ouverts  $U, V$  de  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$  respectivement,  $J^k(U, V)$  s'identifie à l'ouvert  $U \times V \times J^k(n, p)$  de l'espace vectoriel de dimension finie

$$J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times J^k(n, p) := \mathbb{R}^n \times \prod_{j=0}^k L_s^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p),$$

où l'on a noté  $L_s^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  l'espace des applications  $j$ -linéaires symétriques de  $(\mathbb{R}^n)^j$  dans  $\mathbb{R}^p$  et  $L_s^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) := \mathbb{R}^p$ ; en effet, il est alors naturel d'identifier  $j_a^k f$  à  $(a, (D^j f(a))_{0 \leq j \leq k})$ , et cette identification est bien bijective puisque tout  $(a, b_0, \dots, b_k) \in U \times V \times J^k(n, p)$  est de la forme  $j_a^k f$  pour  $f(x) = \sum_0^k \frac{1}{j!} b_j (x-a)^j$ .

Dans le cas général, il résulte de la formule de Faà di Bruno que  $J^k(M, N)$  est muni d'une structure de variété différentiable par les *cartes naturelles*  $\Phi_{\varphi, \psi}^k$  associées aux couples de cartes locales  $\varphi$  de  $M$  et  $\psi$  de  $N$  comme suit :

- l'ouvert de définition  $\text{dom } \Phi_{\varphi, \psi}^k$  de  $\Phi_{\varphi, \psi}^k$  est l'ensemble des  $j_a^k f$  avec  $a \in \text{dom } \varphi$  et  $f(a) \in \text{dom } \psi$
- la carte  $\Phi_{\varphi, \psi}^k$  est donnée par la formule<sup>14</sup>

$$\Phi_{\varphi, \psi}^k(j_a^k f) := j_{\varphi(a)}^k(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$$

- son image  $\text{im } \Phi_{\varphi, \psi}^k$  est donc  $J^k(\text{im } \varphi, \text{im } \psi)$ .

<sup>13</sup> Bénéficié en 1988... Elle s'obtient par « composition des développements limités d'ordre  $k \gg [8]$ .

<sup>14</sup> Impliquant que les changements de cartes sont les  $\Phi_{\varphi_1, \psi_1}^k \circ (\Phi_{\varphi, \psi}^k)^{-1} = \Phi_{\varphi_1 \circ \varphi^{-1}, \psi_1 \circ \psi^{-1}}^k$ .

### Exemples et « produits dérivés »

La variété  $J^0(M, N)$  s'identifie évidemment à  $M \times N$  par le difféomorphisme  $j_a^0 f \mapsto (a, f(a))$ .

Le sous-ensemble de  $J^1(\mathbb{R}, N)$  formé des  $j_0^1 f$  est une sous-variété, le *fibré tangent*  $TN$  de  $N$  : chaque carte naturelle  $\Phi_{\text{id}_{\mathbb{R}}, \psi}^1$  est une carte adaptée à cette sous-variété et en induit par restriction la carte  $T\psi : j_0^1 \gamma \mapsto (\psi \circ \gamma(0), (\psi \circ \gamma)'(0))$  ; en outre,  $J^1(\mathbb{R}, N)$  s'identifie à  $\mathbb{R} \times TN$  par l'application  $j_t^1 \gamma \mapsto (t, j_0^1(\gamma \circ \tau_{-t}))$ , où  $\tau_{-t}(x) = x + t$ . On dit que  $j_0^1(\gamma \circ \tau_{-t})$  est la *vitesse*  $\dot{\gamma}(t)$  du chemin  $\gamma$  au temps  $t$  (la donnée de cette vitesse inclut celle de la position  $\gamma(t)$ , mais non celle du temps  $t$ ).

Le sous-ensemble de  $J^1(M, \mathbb{R})$  formé des  $j_a^1 f$  avec  $f(a) = 0$  est une sous-variété, le *fibré cotangent*  $T^*M$  de  $M$  : chaque  $\Phi_{\varphi, \text{id}_{\mathbb{R}}}^1$  en est une carte adaptée et en induit par restriction la carte  $T^*\varphi : j_a^1 f \mapsto (\varphi(a), D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(a)))$  ; en outre,  $J^1(M, \mathbb{R})$  s'identifie à  $T^*M \times \mathbb{R}$  par l'application  $j_a^1 f \mapsto (j_a^1(\tau_{f(a)} \circ f), f(a))$ . On dit que  $j_a^1(\tau_{f(a)} \circ f)$  est la *différentielle*  $d_a f$  de  $f$  au point  $a$  (sa donnée inclut celle de  $a$ , mais non celle de  $f(a)$ ).

Les cartes naturelles munissent  $J^k(M, N)$  de beaucoup plus qu'une simple structure de variété, puisque les projections  $j_a^k f \mapsto a$  (« projection-source »),  $j_a^k f \mapsto f(a)$  (« projection-but ») et  $j_a^k f \mapsto j_a^\ell f$ ,  $0 \leq \ell < k$ , sont toutes des fibrations, comme nous allons le voir maintenant.

### Submersions et fibrations

$E$   
 $\downarrow \pi$   
 $B$

Une application  $\downarrow \pi$  entre variétés est une *submersion* lorsqu'« elle est locale-

ment *en haut* la projection sur le premier facteur d'un produit » : pour tout  $a \in E$ , il existe un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^r$ , une carte locale  $\tilde{\varphi}$  de  $E$  en  $a$  et une carte locale  $\varphi$  de  $B$  en  $\pi(a)$  telles que  $\text{im } \tilde{\varphi} = U \times V$ ,  $\text{im } \varphi = U$  et  $\varphi \circ \pi = \text{pr}_1 \circ \tilde{\varphi}$ , où  $\text{pr}_1 : U \times V \rightarrow U$  désigne la projection sur le premier facteur. On dit alors que  $\tilde{\varphi}$  est une *carte fibrée* de la submersion au-dessus de  $\varphi$ .

De même,  $\pi$  est une *fibration localement triviale* lorsqu'« elle est localement *en bas* la projection sur le premier facteur d'un produit » : pour tout  $b \in B$ , il existe une carte locale  $\varphi$  de  $B$  en  $b$ , une variété  $F$  et un difféomorphisme  $\tilde{\varphi}$  de  $\pi^{-1}(\text{dom } \varphi)$  sur  $\text{im } \varphi \times F$  tels que  $\varphi \circ \pi = \text{pr}_1 \circ \tilde{\varphi}$ , en notant  $\text{pr}_1 : \text{im } \varphi \times F \rightarrow \text{im } \varphi$  la projection sur le premier facteur<sup>15</sup>.

Il est clair (en prenant des cartes locales de la  *fibre type*  $F$ ) qu'une fibration est une submersion et (par définition d'une sous-variété) que les *fibres*  $\pi^{-1}(b)$  d'une submersion sont des sous-variétés. Lorsque  $\pi$  est une fibration, on dit que  $E$  est (*l'espace total* d'un *fibré*<sup>16</sup> de *base*  $B$  et de *projection*  $\pi$ ).

Quand  $F$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^r$ , le difféomorphisme  $\tilde{\varphi}$  de la définition d'un fibré (qui dans tous les cas détermine  $\varphi$ ) est une carte de  $E$ . Un *fibré vectoriel* est défini par la donnée d'un atlas de telles cartes  $\tilde{\varphi}$  avec  $F = \mathbb{R}^r$  (ou un espace

<sup>15</sup> On peut faire l'économie de  $\varphi$  en donnant la définition équivalente suivante : pour tout  $b \in B$ , il existe un ouvert  $\Omega \ni b$  de  $B$  et un difféomorphisme  $h$  de  $\pi^{-1}(\Omega)$  sur  $\Omega \times F$  tel que  $\pi|_{\pi^{-1}(\Omega)}$  soit la première composante de  $h$ , lequel est appelé *trivialisat ion locale* de  $\pi$ .

<sup>16</sup> Le français « espace fibré » est plus appétissant que le « paquet de fibres » (fiber bundle) anglo-saxon.

vectorel), tel que les changements de cartes  $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}^{-1}$  soient linéaires par rapport à la fibre type  $F$  (« atlas de fibré vectoriel »). Il s'ensuit que les fibres  $E_b = \pi^{-1}(b)$  sont munies d'une structure d'espace vectoriel isomorphe à  $F$ . En remplaçant « linéaire » et « vectoriel » par « affine », on obtient la notion de *fibré affine*, dont les fibres sont des espaces affines.

### Sections

Avec les notations précédentes, une *section différentiable de la submersion*  $\pi$  au-dessus de l'ouvert  $U$  de  $B$  est une application différentiable  $\sigma$  de  $U$  dans  $\pi^{-1}(U)$  telle que  $\pi \circ \sigma = \text{id}_U$ ; si  $U = B$ , on parle de *section* de  $\pi$ . De même qu'une application est déterminée par son graphe, une section est déterminée par son *image*  $\sigma(U)$ , qui est une sous-variété (elle apparaît comme un graphe dans les cartes fibrées  $\tilde{\varphi}$ ). Il est donc naturel – d'où la terminologie – de considérer qu'une section différentiable de  $\pi$  au-dessus de  $U$  est une sous-variété qui rencontre chaque fibre de  $\pi|_{\pi^{-1}(U)}$  en un unique point et *transversalement* (voir plus loin).

### Cas des jets

Il est immédiat que les projections  $\pi_k^\ell : J^k(M, N) \rightarrow J^\ell(M, N)$  définies pour  $\ell \leq k$  par  $\pi_k^\ell(j_a^k f) = j_a^\ell f$  sont des fibrations, dont la fibre type est l'espace vectoriel  $\prod_{\ell < j \leq k} L_s^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  : il suffit de prendre  $\tilde{\varphi} = \Phi_{\varphi, \psi}^k$  et  $\varphi := \Phi_{\varphi, \psi}^\ell$  dans la définition. De même, en prenant  $\tilde{\varphi} = \Phi_{\varphi, \psi}^k$  et  $\varphi = \varphi$  (resp.  $\varphi := \psi$ ) dans la définition d'une submersion, on voit que la projection-source  $s_k : j_a^k f \rightarrow a$  et la projection-but  $b_k : j_a^k f \rightarrow f(a)$  sont des submersions<sup>17</sup>.

La formule de Faà di Bruno montre que

- l'on définit ainsi sur  $J^1(M, N)$  une structure de fibré vectoriel de base  $J^0(M, N) = M \times N$ , de projection  $\pi_1^0$  et de fibre type  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$
- le fibré tangent  $TN$  est donc un fibré vectoriel de base  $N$  et de fibre type  $\mathbb{R}^p = L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$ , et le fibré cotangent  $T^*M$  un fibré vectoriel de base  $M$  et de fibre type  $\mathbb{R}^{n*} = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
- pour  $k > 1$ , le fibré  $J^k(M, N)$  est un fibré *affine* de fibre type  $L_s^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  sur  $J^{k-1}(M, N)$
- pour  $\ell < k \leq 2\ell + 1$ , l'espace  $J^k(M, N)$  est muni par les cartes  $\Phi_{\varphi, \psi}^k$  d'une structure de fibré *affine* sur  $J^\ell(M, N)$
- ce n'est pas le cas pour  $k > 2\ell + 1$ , les changements de cartes naturelles étant polynomiaux de degré au moins 2 par rapport à la fibre type, *mais*
- si  $N$  est un espace vectoriel,  $J^k(M, N)$  est muni pour  $0 \leq \ell < k$  d'une structure de fibré affine sur  $J^\ell(M, N)$  (fibré *vectoriel* si  $\ell = 0$ ) par les cartes  $\Phi_{\varphi, \text{id}_N}^k$ .

<sup>17</sup> Ce sont en fait des fibrations, dont les fibres type sont respectivement l'ensemble  $J_0^k(\mathbb{R}^n, N)$  des  $j_0^k f \in J^k(\mathbb{R}^n, N)$  et l'ensemble  $J^k(M, \mathbb{R}^p)_0$  des  $j_a^k f \in J^k(M, \mathbb{R}^p)$  avec  $f(a) = 0$ ; on le voit comme pour les fibrés tangents et cotangents : à toute carte  $\varphi$  de  $M$  on peut associer le difféomorphisme  $\tilde{\varphi}$  de  $s_k^{-1}(\text{dom } \varphi)$  sur  $\text{im } \varphi \times J_0^k(\mathbb{R}^n, N)$  qui envoie  $j_a^k f$  sur  $(\varphi(a), j_0^k(f \circ \varphi^{-1} \circ \tau_{-\varphi(a)}))$ ; à toute carte  $\varphi$  de  $N$  on peut de même associer le difféomorphisme  $\tilde{\varphi}$  de  $b_k^{-1}(\text{dom } \varphi)$  sur  $\text{im } \varphi \times J^k(M, \mathbb{R}^p)_0$  qui envoie  $j_a^k f$  sur  $(\varphi \circ f(a), j_a^k(\tau_{\varphi \circ f(a)} \circ \varphi \circ f))$ .

La fibre  $T_a M$  de  $TM$  au-dessus de  $a \in M$  est l'espace tangent<sup>18</sup> à  $M$  en  $a$ ; la fibre  $T_a^* M$  de  $T^* M$  s'identifie naturellement au dual  $(T_a M)^*$ , la forme de dualité étant  $(\dot{\gamma}(a), d_a f) \mapsto (f \circ \gamma)'(a)$ .

### Exemples de sections

Pour toute application différentiable  $f$  d'un ouvert  $U$  de la variété  $M$  dans la variété  $N$ , l'application  $j^k f : a \mapsto j_a^k f$  est une section de la projection-source  $J^k(M, N) \rightarrow M$  au-dessus de<sup>19</sup>  $U$ , appelée *jet d'ordre  $k$  de  $f$* ; de telles sections sont dites *holonomes*.

Une section du fibré tangent  $TM \rightarrow M$  au-dessus de  $U$  est appelée *champ de vecteurs*<sup>20</sup> sur  $U$ .

Pour toute fonction réelle différentiable  $f$  sur un ouvert  $U$  de  $M$ , l'application  $df : a \mapsto d_a f$  est une section du fibré cotangent  $T^* M \rightarrow M$  au-dessus de  $U$ , ou encore une section du fibré cotangent  $T^* U \subset T^* M$ ; une section du fibré cotangent  $T^* U \rightarrow U$  est appelée « champ de covecteurs » ou *forme de Pfaff* (ou *forme différentielle de degré 1*, ou *1-forme différentielle*, ou *1-forme*) sur  $U$ .

Plus généralement, à toute application différentiable  $f : M \rightarrow N$  est associée l'application  $Tf$  de  $TM$  dans  $TN$  définie par  $Tf(\dot{\gamma}(a)) = \overline{f \circ \gamma}(a)$ ; sa restriction  $T_a f$  à chaque fibre  $T_a M$  est une application *linéaire* dans  $T_{f(a)} M$  (« application linéaire tangente à  $f$  en  $a$  ») : on dit que  $Tf$  un homomorphisme de fibrés vectoriels.

Bien sûr,  $T_a f$  s'identifie à  $j_a^1 f$ . Dans les années 70, on prétendait [10, 11] remplacer par exemple  $j^2 f$  par  $T(Tf)$ , mais l'inflation de dimensions et la redondance qui en résultent sont déraisonnables.

### Caractérisation des submersions, espaces verticaux, horizontaux et sections

On déduit aisément du théorème d'inversion locale qu'une application différentiable

$$E$$

$$\downarrow \pi \text{ entre variétés est une submersion au voisinage de } a \in E \text{ si et seulement}$$

$$B$$

si l'application linéaire tangente  $T_a \pi$  est surjective; par conséquent,  $\pi$  est une submersion si et seulement si  $T_a \pi$  est surjective pour tout  $a \in E$ .

Pour chaque  $a \in E$ , en posant  $b = \pi(a)$ , l'espace tangent au point  $a$  à la fibre  $\pi^{-1}(b)$  de la submersion  $\pi$  est le noyau  $\ker T_a \pi$ ; on l'appelle *espace vertical*  $\mathcal{V}_a$  de  $\pi$  au point  $a$ ; dans le cas d'un fibré vectoriel, il s'identifie donc à l'espace vectoriel  $E_b$ ; pour un fibré affine, il s'identifie à l'espace vectoriel  $\vec{E}_b$  sous-jacent à la fibre.

Achevons de caractériser les sections différentiables  $\sigma$  de la submersion  $\pi$  au-dessus d'un ouvert  $U$  de  $B$  comme sous-variétés : ce sont les sous-variétés  $W$  de  $\pi^{-1}(U)$  qui rencontrent chaque fibre  $\pi^{-1}(b)$  avec  $b \in U$  en un unique point  $a$ , où l'espace tangent  $T_a W$  est *horizontal*, c'est-à-dire supplémentaire dans  $T_a E$

<sup>18</sup> C'est donc un espace *vectoriel*, ce qui n'empêche nullement, quand  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^d$ , de le dessiner authentiquement tangent à  $M$  en  $a$  : considérer les vecteurs tangents à  $M$  en  $a$ , c'est « regarder  $M$  au microscope en se centrant en  $a$  » c'est-à-dire en y plaçant l'origine de l'espace *affine*  $\mathbb{R}^d$ .

<sup>19</sup> C'est aussi évidemment une section de la projection-source  $J^k(U, N) \rightarrow U$ .

<sup>20</sup> En tout point  $a$  de  $U$  on fait pousser en guise d'épi de blé un vecteur  $X_a \in T_a U = T_a M$ .

de l'espace vertical  $\mathcal{V}_a$ ; bref,  $\pi|_W$  est un difféomorphisme de  $W$  sur  $U$  et la section  $\sigma$  correspondante est la composée de  $(\pi|_W)^{-1}$  et de l'inclusion  $W \hookrightarrow \pi^{-1}(U)$ .

### Remarques

Dans le cas du fibré tangent, il faut donc imaginer les fibres  $T_aM$  verticales, transversales à  $M$  (identifiée à la section nulle). Cela contrarie un peu l'intuition géométrique venant des sous-variétés de  $\mathbb{R}^d$ , pour lesquelles  $T_aM$  est couché le long de  $M$ , mais il faut bien voir qu'en identifiant chaque  $T_aM$  au sous-espace affine ainsi dessiné, on obtient une *très mauvaise* représentation de  $TM$  : dans le cas où  $M$  est une courbe dans  $\mathbb{R}^3$ , par exemple, la surface de  $\mathbb{R}^3$  ainsi obtenue admet  $M$  comme arête de rebroussement aux points où la courbe est « vraiment gauche », c'est-à-dire à courbure et torsion non nulles, qui sont pourtant les points les moins singuliers de la surface contenus dans  $M$ .

De même, les géodésiques d'une surface  $S$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  sont les courbes paramétrées  $\gamma$  à valeurs dans  $S$  dont l'accélération  $\gamma''(t)$  est *normale* à la surface pour tout  $t$ , alors que la dérivée seconde  $\ddot{\gamma}(t)$  est *horizontale* pour la connexion de Levi-Civita (voir plus loin). Il faut s'habituer...

Bien pire : le *rang* d'un fibré est la dimension de sa fibre, c'est-à-dire le *corang* de sa projection.

### Quelques fibrés de la thèse

La donnée d'une base (« repère »)  $(e_1, \dots, e_n)$  d'un espace vectoriel réel  $E$  équivaut à celle de l'isomorphisme  $(x^1, \dots, x^n) \mapsto x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$  de  $\mathbb{R}^n$  sur  $E$ . Un objet essentiel, introduit au langage près par Élie Cartan, est le *fibré des repères* d'une variété  $M$  de dimension  $n$ , dont la fibre au-dessus de  $a \in M$  est l'ensemble des *isomorphismes* (linéaires)  $A_a$  de  $\mathbb{R}^n$  sur  $T_aM$ ; c'est donc un ouvert dense du fibré vectoriel de base  $M$  (généralisant  $TM$ ) formé de tous les  $j_0^1 f \in J^1(\mathbb{R}^n, M)$ , et évidemment un fibré dont la fibre type est le groupe linéaire  $GL_n(\mathbb{R})$  (noté  $L_n$  dans la thèse) : on le voit en y restreignant les cartes naturelles  $\Phi_{\text{id}_{\mathbb{R}^n}, \varphi}$  de  $J^1(\mathbb{R}^n, M)$ .

Ce fibré des repères, noté  $\text{Isom}(M \times \mathbb{R}^n, TM)$  dans [11]<sup>21</sup>, est naturellement muni de l'action  $(B, A_a) \mapsto A_a \circ B^{-1}$  de  $GL_n(\mathbb{R})$ , qui est libre et transitive dans chaque fibre : on dit que c'est un *fibré principal* de *groupe structural*  $GL_n(\mathbb{R})$ .

Les « structures infinitésimales régulières » de la thèse sont des « sous-fibrés principaux du fibré des repères ».

Par exemple, se donner une métrique riemannienne sur  $M$  (c'est-à-dire un produit scalaire dans chaque espace tangent  $T_aM$ , dépendant différemment de  $a$  en ce sens que la fonction réelle qui à  $v \in TM$  associe son carré scalaire est différentiable) revient à se donner le sous-fibré du fibré des repères formé des  $A_a$  envoyant la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  sur une base orthonormée pour le produit scalaire dans  $T_aM$ . On obtient ainsi un fibré principal dont le groupe structural est le groupe orthogonal  $O_n$ , le *fibré des repères orthonormés* de la variété riemannienne considérée. Le produit scalaire sur  $T_aM$  est alors l'image du produit scalaire euclidien standard sur  $\mathbb{R}^n$  par un quelconque de ces « repères orthonormés »  $A_a$ .

Étant donné un sous-groupe fermé  $H$  de  $GL_n(\mathbb{R})$ , se donner un sous-fibré principal du fibré des repères, de groupe structural  $H$ , revient de même à se donner pour

<sup>21</sup> Au risque de faire croire que la sphère de dimension 2 est parallélisable, voir la note suivante.

chaque  $a \in M$  un des repères<sup>22</sup>  $A_a$ , les autres étant déterminés par l'action de  $H$ . La « structure » préservée (ou définie) par  $H$  est alors transportée dans  $T_aM$  par un quelconque des  $A_a$  considérés.

Pour chaque  $A_a$ , les  $n$  composantes de  $A_a^{-1}$  (applications coordonnées dans le repère  $A_a$ ) sont des formes linéaires sur  $T_aM$ ; elles forment le « corepère » dont parle l'introduction de la thèse; si l'on se donne une section du fibré de repères considéré au-dessus de l'ouvert  $U$  de  $M$ , c'est-à-dire que l'on choisit pour chaque  $a \in U$  un repère  $A_a$  dans la fibre, les composantes de  $a \mapsto A_a^{-1}$  sont donc des formes de Pfaff sur  $U$ : c'est le sens de la phrase « une structure infinitésimale régulière est déterminée localement par un ensemble de  $n$  formes de PFAFF ».

### Systèmes de Pfaff et systèmes d'(in)équations aux dérivées partielles

Non content d'être fibré en tous sens, l'espace  $J^k(M, N)$  est pour  $k > 0$  muni d'un système de Pfaff canonique, facile à comprendre<sup>23</sup> lorsque  $M = \mathbb{R}^n$  et  $N = \mathbb{R}^p$ .

Une section  $\sigma$  de la projection-source de  $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^n \times \prod_0^k L_s^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  au-dessus d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  est une application de  $U$  dans  $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  qui s'écrit  $\sigma(x) = (x, y_0(x), \dots, y_k(x))$ ; pour qu'elle soit holonome (c'est-à-dire, rappelons-le, de la forme  $j^k f$ ), il faut et il suffit évidemment que, modulo l'identification canonique de  $L(\mathbb{R}^n, L^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p))$  à  $L^{j+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  fondamentale en calcul différentiel,  $Dy_j(x) = y_{j+1}(x)$  pour  $0 \leq j < k$  quel que soit  $x \in U$ .

Exprimons-le en regardant  $\sigma$  comme la sous-variété  $W = \sigma(U)$ : si l'on note  $z = (x, y_0, \dots, y_k)$  les points de  $J^k := J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ , la section est holonome si et seulement si, en tout point  $z$  de  $W$ , l'espace tangent  $T_z W$  (autrement dit l'image de  $D\sigma(x)$ ) est contenu dans le sous-espace  $\mathcal{K}_z^k = \mathcal{K}_z^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  de  $T_z J^k \simeq J^k$  défini par les équations

$$(1) \quad dy_j = y_{j+1} dx \quad \text{pour } 0 \leq j < k,$$

c'est-à-dire formé des vecteurs  $\delta z = (\delta x, \delta y_0, \dots, \delta y_k)$  tels que, modulo l'identification canonique que nous venons de mentionner<sup>24</sup>,  $\delta y_j = y_{j+1} \delta x$  pour  $0 \leq j < k$ .

On dit que (1) est le *système de Pfaff canonique* ou *système de Cartan* (ou, dirais-je, la *structure de contact canonique*) de  $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ ; de manière équivalente, on peut désigner par le même nom le champ de sous-espaces vectoriels (« champ de plans »)  $z \mapsto \mathcal{K}_z^k$ , que l'on peut voir plus géométriquement comme le sous-fibré vectoriel  $\mathcal{K}^k = \mathcal{K}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  de  $TJ^k \simeq J^k \times J^k$  réunion des  $\{z\} \times \mathcal{K}_z^k$ .

Là-dessus, on remarque que, pour chaque  $z \in J^k$ , le « plan »  $\mathcal{K}_z^k$  est l'adhérence<sup>25</sup> de la réunion des  $T_z W$  lorsque  $W$  varie parmi les sections holonomes passant par  $z$ ; en utilisant les cartes naturelles, on en déduit le fait suivant: si l'on se donne maintenant deux variétés  $M$  et  $N$ , on définit un *système de Pfaff*  $\mathcal{K}^k(M, N)$  sur  $J^k(M, N)$ , c'est-à-dire un sous-fibré vectoriel du fibré tangent

<sup>22</sup> Si l'on veut que celui-ci dépende différemment de  $a$ , il faut en général rester au niveau local: sinon, on obtiendrait un isomorphisme du fibré vectoriel trivial  $M \times \mathbb{R}^n$  sur  $TM$ , isomorphisme qui n'existe pas [16] dans le cas de variétés aussi respectables que la sphère de dimension 2: on dit qu'elles ne sont pas *parallélisables*, un des « obstacles » mentionnés dans la thèse – on parle aujourd'hui d'*obstructions*.

<sup>23</sup> Dans les parfois stupides années 70, on avait peur d'être métamorphosé en crapaud si l'on osait donner une définition compréhensible mais non intrinsèque; les temps ont changé, j'espère.

<sup>24</sup> Bref,  $y_{j+1} \delta x$  est le produit intérieur (« contraction ») de  $y_{j+1}$  par  $\delta x$ , c'est-à-dire l'application  $j$ -linéaire symétrique  $(\delta x_1, \dots, \delta x_j) \mapsto y_{j+1}(\delta x, \delta x_1, \dots, \delta x_j)$ .

<sup>25</sup> Il faut bien « attraper » aussi les vecteurs verticaux pour la projection sur  $J^{k-1}$ .

$TJ^k(M, N)$ , par le fait que sa fibre au-dessus de  $z \in J^k(M, N)$  est l'adhérence dans  $T_z J^k(M, N)$  de la réunion des espaces tangents en  $z$  aux sections holonomes passant par  $z$ . Naturellement,

– on l'appelle *système de Pfaff canonique* ou *système de Cartan* (ou *structure de contact canonique*) de  $J^k(M, N)$

– on a  $T_z \Phi(\mathcal{K}_z(M, N)) = \mathcal{K}_{\Phi(z)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  pour toute carte naturelle  $\Phi$  de  $J^k(M, N)$  et tout jet  $z \in \text{dom } \Phi$ , c'est même pourquoi  $\mathcal{K}^k(M, N)$  est bien un sous-fibré vectoriel de  $TJ^k(M, N)$ .

On a donc compris qu'un *système de Pfaff* sur une variété  $V$  peut être défini<sup>26</sup> comme un sous-fibré vectoriel  $\mathcal{P}$  du fibré tangent  $TV$ ; une *variété intégrale* de  $\mathcal{P}$  est une sous-variété  $W$  de  $V$  telle que l'on ait  $T_z W \subset \mathcal{P}_z$  pour tout  $z \in W$ ; dans ce langage, une section de la projection-source de  $J^k(M, N)$  est holonome si et seulement si, vue comme sous-variété, c'est une variété intégrale du système de Cartan – lequel admet d'autres variétés intégrales, par exemple les fibres de la projection sur  $J^{k-1}(M, N)$ .

### Exemple

Si  $p = 1$ , le système de Cartan  $\mathcal{K}^1(M, N)$  est un champ d'hyperplans, authentique structure de contact au sens restrictif actuel, et ses variétés intégrales de dimension  $n$  s'appellent *sous-variétés de Legendre*, terminologie due à V.I. Arnol'd. En particulier, (1) ne comporte qu'une équation, et la forme de Pfaff  $\alpha = dy_0 - y_1 dx$  sur  $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  est une *forme de contact*, c'est-à-dire que  $d\alpha_z$  induit une forme bilinéaire non dégénérée sur  $\mathcal{K}_z^1 = \ker \alpha_z$ ; selon un théorème de Darboux [8], à difféomorphisme près, toutes les formes de contact en dimension  $2n + 1$  se ramènent *localement* à  $\alpha$ .

### Systèmes d'équations aux dérivées partielles

Un système de  $q$  équations aux dérivées partielles de degré  $k$  à  $p$  fonctions inconnues de  $n$  variables s'écrit de manière condensée  $F(j_x^k y) = 0$ , où  $F$  est une application d'un ouvert de  $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  dans  $\mathbb{R}^q$ , la variable est  $x \in \mathbb{R}^n$  et la fonction inconnue  $y$  (à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ ). Une solution  $f$  du système définie dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  s'identifie à  $j^k f$ , c'est-à-dire à une section holonome de la projection-source  $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}^n$  au-dessus de  $U$  et à valeurs dans  $E = F^{-1}(0)$ ; autrement dit, à une variété intégrale de la structure de contact canonique contenue dans  $E$  et se projetant difféomorphiquement (beuh !) sur  $U$ .

Un système d'équations aux dérivées partielles s'identifie donc à un système de Pfaff, à condition d'appeler ainsi le couple formé de (1) et de l'équation  $F(z) = 0$  (ce que fait la thèse, à la suite d'Elie Cartan). Si l'on veut se ramener à notre première définition, il faut prendre comme variété  $V$  la partie lisse de  $E$  (dans la thèse,  $F$  est analytique et cela a un sens) et le système de Pfaff  $\mathcal{P}_z := \mathcal{K}_z \cap T_z V$ , « fibré » dont le rang peut avoir une fâcheuse tendance à sauter (par exemple, si  $k = n = p = q = 1$ , il peut parfaitement arriver que  $\mathcal{K}_z = T_z V$  en certains points, qu'il faut exclure à leur tour de  $V$  si l'on veut un vrai sous-fibré vectoriel).

<sup>26</sup> Dans la « vraie vie », nous allons voir tout de suite qu'il faut parfois un peu compliquer les choses : la variété  $V$  peut avoir des points singuliers, la dimension de la fibre  $\mathcal{P}_z$  peut varier en certains points  $z \in V$ , etc.

Bien entendu, tout cela s'étend au cas où  $E$  est une sous-variété de codimension  $q$  de  $J^k(M, N)$ , pas forcément définie globalement par  $q$  équations réelles.

Pour  $k = p = q = 1$ , il est fructueux d'oublier dans un premier temps la projection  $J^1 \rightarrow J^0$  et de considérer les « solutions géométriques » de l'équation, c'est-à-dire les variétés de Legendre contenues dans  $E$ , qu'elles soient ou non des sections de la projection-source. Elles ont parfois un sens physique, les caustiques étant par exemple les projections dans  $J^0$  de telles solutions géométriques. Ce cas, dont la théorie locale est faite depuis le dix-neuvième siècle, connaît encore des développements globaux.

### *Systèmes d'inéquations aux dérivées partielles*

Les espaces de jets servent aussi de cadre au principe d'homotopie ou  $h$ -principe [13], introduit par Gromov dans sa thèse<sup>27</sup> par une étonnante abstraction de celle de Smale sur la classification des immersions. Cela nous éloigne un peu de Paulette Libermann mais l'idée est intéressante, duale de celle que je viens d'indiquer : dans le cas des immersions d'une variété  $M$  dans une variété  $N$ , on se donne dans  $J^1(M, N)$  l'ensemble ouvert  $\Omega$  formé des jets d'immersions, c'est-à-dire des  $j_a^1 f$  tels que  $T_a f$  soit injective. Étant données deux immersions  $f_0, f_1$  de  $M$  dans  $N$ , on se demande si elles sont *régulièrement homotopes*, c'est-à-dire s'il existe un chemin différentiable  $[0, 1] \ni t \mapsto f_t$  qui les joint *dans l'espace des immersions* ; en d'autres termes, on se demande s'il existe un chemin de sections holonomes  $j^1 f_t$  de  $J^1(M, N) \rightarrow M$  joignant  $j^1 f_0$  à  $j^1 f_1$  et tel que toutes ces sections soient à valeurs dans  $\Omega$ . Naturellement, on peut poser le même problème pour divers sous-ensembles  $\Omega$  de divers  $J^k(M, N)$  ; le principe d'homotopie (quand il est vrai) affirme que la question admet une réponse positive si et seulement si c'est le cas *en oubliant la structure de contact mais pas la projection-source*, c'est-à-dire que l'on peut joindre les deux sections holonomes considérées par un chemin dans l'ensemble des sections pas forcément holonomes à valeurs dans  $\Omega$ . Au fil des ans, c'est devenu étonnamment simple [12].

### **Connexions**

Là encore, Ehresmann a fait du bon travail<sup>28</sup>. Le problème est qu'une submersion

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ B \end{array}$$

ne permet pas de relever localement les chemins de manière unique, sauf

quand elle est un difféomorphisme local en tout point (auquel cas, si c'est une fibration, on dit que c'est une *revêtement*) : si  $\tilde{\varphi}$  est une carte fibrée de  $\pi$ , d'image  $U \times V$ , au-dessus d'une carte  $\varphi$  de  $B$ , alors, pour tout chemin  $\gamma$  à valeurs dans  $\text{dom } \varphi$ , n'importe quel chemin  $\tilde{\gamma}$  à valeurs dans  $\text{dom } \tilde{\varphi}$  de la forme  $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi \circ \gamma(t), f(t))$  avec  $\text{dom } \tilde{\gamma} = \text{dom } \gamma$  relève  $\gamma$ , c'est-à-dire que  $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$  ; par conséquent, même si l'on impose à  $\tilde{\gamma}$  de prendre pour  $t = t_0$  une valeur donnée  $a \in \pi^{-1}(\gamma(t_0))$ , il y a beaucoup de choix  $f$  possibles, dont aucun n'est *a priori* meilleur que les

<sup>27</sup> Les années 70 n'étaient pas toujours stupides.

<sup>28</sup> Dans les années 70, un point de vue algébrique moins général et incompréhensible sévissait pourtant, suscitant parfois, comme souvent en pareil cas, la fierté des initiés : je me souviens de protestations bruyantes contre le recrutement comme professeur d'un mathématicien « appliqué » (maintenant académicien) qui *ne savait pas ce que c'est qu'une connexion*.

autres. La donnée d'une connexion lève cette indétermination et fournit (au moins localement) un unique relèvement  $\tilde{\gamma}$  de  $\gamma$  tel que  $\tilde{\gamma}(t_0) = a$ .

Par exemple, si  $E$  est le fibré des repères de  $B$  (ou un sous-fibré principal), une connexion permet d'obtenir le long de  $\gamma$  un *repère mobile*  $\tilde{\gamma}(t)$  déterminé par sa valeur en  $t_0$ . Si une connexion s'impose, ce repère mobile sera donc « le bon ».

### Définition

Une *connexion* sur la submersion  $\pi$  est un *champ d'espaces horizontaux*, c'est-à-dire un système de Pfaff  $\mathcal{H}$  sur  $E$  tel que  $\mathcal{H}_a$  soit, pour tout  $a \in E$ , un supplémentaire dans  $T_a E$  de l'espace vertical  $\mathcal{V}_a = \ker T_a \pi = T_a(\pi^{-1}(a))$ ; autrement dit,  $T_a \pi|_{\mathcal{H}_a}$  est un isomorphisme sur  $T_{\pi(a)} B$ .

La donnée de  $\mathcal{H}_a$  équivaut à celle de la projection de  $T_a E$  sur  $\mathcal{V}_a$  parallèlement à  $\mathcal{H}_a$ , qui est l'objet choisi par Dieudonné [11] pour définir une connexion, et que l'on peut noter  $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_V$  (*composante verticale* du vecteur tangent  $\mathbf{v}$ ). L'unique relèvement (« relèvement horizontal »)  $\tilde{\gamma}$  annoncé va être défini par la condition initiale et par le fait que la dérivée  $\dot{\tilde{\gamma}}(t)$  est *horizontale* pour tout  $t$ , qui s'écrit (notation de [15])

$$(2) \quad \frac{D\tilde{\gamma}}{dt} := \dot{\tilde{\gamma}}(t)_V = 0.$$

La connexion  $\mathcal{H}$  se « lit » en effet de la manière suivante dans une carte fibrée  $\tilde{\varphi}$  de  $E$  au-dessus de  $\varphi$ , ayant pour image l'ouvert  $U \times V$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$  : pour tout  $a \in \text{dom } \tilde{\varphi}$ , si  $\tilde{\varphi}(a) = (x, y)$ , l'image de  $\mathcal{H}_a$  par  $T_a \tilde{\varphi}$  est le graphe d'une application linéaire  $-\Gamma(x, y)$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^r$  : on définit ainsi l'*application de Christoffel*  $\Gamma : U \times V \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r)$  de la connexion  $\mathcal{H}$  dans la carte fibrée  $\tilde{\varphi}$ , et elle est différentiable parce que  $\mathcal{H}$  l'est ; l'équation  $\mathbf{v}_V = 0$  exprimant que  $\mathbf{v} \in TE$  est horizontal s'écrit donc  $\delta y + \Gamma(x, y)\delta x = 0$ , où  $((x, y), (\delta x, \delta y)) = T\tilde{\varphi}(\mathbf{v})$ . Par conséquent, si  $\gamma$  est un chemin dans  $\text{dom } \varphi$  et que  $x(t) := \varphi \circ \gamma(t)$ , un relèvement  $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\varphi}^{-1}(x(t), y(t))$  de  $\gamma$  à valeurs dans  $\text{dom } \tilde{\varphi}$  est horizontal si et seulement si le chemin  $t \mapsto y(t)$  vérifie l'équation différentielle

$$y'(t) + \Gamma(x(t), y(t))x'(t) = 0$$

traduisant (2), ce qui permet d'appliquer le théorème de Cauchy sur les équations différentielles pour obtenir l'existence et l'unicité locales du relèvement  $\tilde{\gamma}$  prenant une valeur donnée au temps  $t_0$ .

Son existence *globale* est assurée par exemple quand  $\pi$  est *propre*, c'est-à-dire lorsque  $\pi^{-1}(K)$  est compact pour tout compact  $K$  de  $B$  : la solution  $\tilde{\gamma}$  de (2) ne peut en effet dans ce cas « partir à l'infini » au temps  $t \in \text{dom } \gamma$ . Déduisons-en un résultat de base de la topologie différentielle :

**Théorème (Ehresmann)** *Si la submersion  $\pi$  est propre, c'est une fibration*<sup>29</sup>.

**Démonstration** Pour tout  $b \in B$ , il existe un ouvert  $\Omega \ni b$  de  $B$  et une connexion  $\mathcal{H}$  sur  $\pi|_{\pi^{-1}(\Omega)}$  : pour le voir, recouvrons la variété compacte  $\pi^{-1}(b)$  par les domaines de cartes fibrées  $\tilde{\varphi}_j$  en nombre fini et prenons  $\Omega = \bigcap \text{dom } \varphi_j$ , où les  $\varphi_j$  sont les

<sup>29</sup> Réciproquement, une fibration à fibres compactes est évidemment propre. Comme dans la définition d'une fibration, si l'on veut absolument que la fibre-type soit unique à difféomorphisme près, il faut supposer  $B$  connexe.

cartes de  $B$  au-dessous des  $\tilde{\varphi}_j$  ; par restriction, on se ramène donc au cas où  $\text{dom } \varphi_j = \Omega$  pour tout  $j$ , de sorte que les  $\text{dom } \tilde{\varphi}_j$  forment un recouvrement fini de  $\pi^{-1}(\Omega)$  et qu'il existe [10] une partition différentiable de l'unité  $\theta_j$  subordonnée à ce recouvrement ; pour chaque  $j$ , il existe une connexion  $\mathcal{H}_j$  sur  $\pi|_{\text{dom } \tilde{\varphi}_j}$ , par exemple celle dont l'application de Christoffel dans la carte fibrée  $\tilde{\varphi}_j$  est identiquement nulle ; en notant  $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_{j,V}$  la projection correspondante, il suffit alors de prendre comme connexion  $\mathcal{H}$  celle dont la projection  $T_a E \rightarrow \mathcal{V}_a$  est définie par  $\mathbf{v}_V := \sum_j \theta_j(a) \mathbf{v}_{j,V}$  pour chaque  $a \in \pi^{-1}(\Omega)$  (somme prise comme d'habitude sur les  $j$  tels que  $a \in \text{dom } \tilde{\varphi}_j$ ).

Quitte à restreindre  $\Omega$ , on peut supposer qu'il existe une carte  $\varphi$  de  $B$  avec  $\text{dom } \varphi = \Omega$  et telle que  $\varphi(\Omega)$  soit une boule ouverte de centre  $0 = \varphi(b)$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Pour chaque  $y \in \Omega$ , on définit donc un chemin  $\gamma_y : [0, 1] \rightarrow \Omega$  joignant  $y$  à  $b$  par  $\gamma_y(t) := \varphi^{-1}((1-t)\varphi(y))$  ; quel que soit  $x \in \pi^{-1}(y)$ , le chemin  $\gamma_y$  admet un unique relèvement horizontal  $\tilde{\gamma}_x : [0, 1] \rightarrow E$  tel que  $\tilde{\gamma}_x(0) = x$ , et l'application  $x \mapsto \tilde{\gamma}_x(1)$  de  $\pi^{-1}(y)$  dans  $\pi^{-1}(b)$ , appelée *transport parallèle du temps 0 au temps 1 le long du chemin  $\gamma_y$  pour la connexion  $\mathcal{H}$* , est évidemment bijective (son inverse est obtenu en relevant  $t \mapsto \gamma_y(1-t)$ ) ; d'après le théorème sur la dépendance des solutions d'équations différentielles par rapport aux conditions initiales et aux paramètres, c'est donc un difféomorphisme ainsi que l'application  $h$  de  $\pi^{-1}(\Omega)$  sur  $\Omega \times \pi^{-1}(b)$  donnée par  $h(x) := (\pi(x), \tilde{\gamma}_x(1))$ , qui est la trivialisatation locale cherchée.

#### Remarque

Ce théorème très robuste vaut, avec la même preuve, dans le cadre banachique. En procédant comme dans la première partie de la démonstration, on voit qu'une submersion définie sur une variété paracompacte (comme dans la vie réelle) admet une connexion, utilisable dans la fin de la preuve,  $\Omega$  étant le domaine de n'importe quelle carte  $\varphi$  nulle en  $b$  ayant pour image une boule.

#### Un exemple

La structure de contact  $\mathcal{K}^1(M, \mathbb{R})$  est une connexion pour la fibration  $\pi : j_a^1 f \mapsto d_a f$  de  $J^1(M, \mathbb{R})$  sur  $T^*M$ . Nous y reviendrons dans la seconde partie de ce texte à propos de la courbure.

## Bibliographie complémentaire

- [8] M. CHAPERON, *Calcul différentiel et calcul intégral*, deuxième édition. Dunod, Paris, 2008
- [9] J. DIEUDONNÉ, *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York, 1960
- [10] ———, *Éléments d'Analyse*, tome 3. Gauthier-Villars, Paris, 1970
- [11] ———, *Éléments d'Analyse*, tome 4. Gauthier-Villars, Paris, 1971
- [12] Y. ELIASHBERG, N. MISHACHEV, *Introduction to the h-principle*. Graduate Studies in Mathematics, **48**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002
- [13] M. GROMOV, *Partial differential relations*. Springer-Verlag, Berlin, 1986
- [14] P. LIBERMANN, C.-M. MARLE. *Géométrie symplectique, bases théoriques de la mécanique*. Publications Mathématiques de l'Université Paris VII, **21**. Université de Paris VII, U.E.R. de Mathématiques, Paris, 1986–87  
Traduction anglaise par B. E. Schwarzbach : *Symplectic geometry and analytical mechanics*. Mathematics and its Applications, **35**. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987
- [15] J. MILNOR, *Morse Theory*. Princeton University Press, 1963
- [16] J. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*. University of Virginia Press, 1969

# ENSEIGNEMENT

---

## La « masterisation » à l'épreuve des textes officiels

Valérie Girardin<sup>1</sup>

---

Le processus de réforme lancé par un communiqué de presse [2] du conseil des ministres le 2 juillet 2008 prévoit le recrutement au niveau master de tous les enseignants du primaire et du secondaire, d'où le terme barbare de « masterisation ». Le communiqué prévoyait également une modification complète de forme et de fond des programmes et des épreuves des concours, la création de masters spécifiques pour les étudiants s'y destinant ainsi qu'un service à temps plein dès la première année d'exercice des enseignants (en tant que fonctionnaires stagiaires). L'annonce d'une revalorisation substantielle des débuts de carrière accompagnait ces mesures. La première session des nouveaux concours devait avoir lieu en 2010 et par conséquent les masters correspondants devaient ouvrir dès la rentrée 2009.

Un an après, un communiqué [16] MEN<sup>2</sup>-MESR<sup>3</sup> annonce que des groupes de proposition seront mis en place à la rentrée 2009 et devront rendre leurs propositions en novembre 2009, fin octobre 2009 d'après le communiqué [23] MESR de septembre 2009 qui précise que l'objectif est « d'aboutir pour chaque type de concours à un cadrage national ». Le communiqué [22] MEN de septembre 2009 indique que les arrêtés définissant les modalités des concours paraîtront début mars 2010. Le cadrage national des maquettes de master fera l'objet d'une discussion en CNESER<sup>4</sup> en décembre 2009. Les universités pourront transmettre leur offre et maquettes de formation jusqu'à mi-avril 2010. Elles feront l'objet d'une autre séance du CNESER en juin 2010. Les décrets instituant la masterisation ont cependant été publiés le 28 juillet 2009, fixant, à partir de 2010-2011, les nouvelles modalités de recrutement, de nomination et de titularisation des professeurs des écoles, des professeurs certifiés des collèges et des lycées, des professeurs agrégés, des professeurs d'EPS, des professeurs de lycées professionnels, des conseillers principaux d'éducation. Ils instaurent également des mesures de transition pour l'année 2009-2010.

Durant cette année, une vingtaine de textes « officiels » (communiqués de presse ministériels, lettres des ministres, notes et circulaires de la DGES<sup>5</sup>, etc.)

---

<sup>1</sup> Université de Caen, membre du Conseil d'Administration et de la commission enseignement de la SMF.

<sup>2</sup> Ministère de l'Éducation Nationale.

<sup>3</sup> Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche.

<sup>4</sup> Conseil National de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche.

<sup>5</sup> Direction Générale de l'Enseignement Supérieur.

ont été rendus publics, précisant puis modifiant notablement la réforme envisagée, par exemple en ce qui concerne le calendrier d'application, le cadrage national des maquettes de master, le service et la formation des fonctionnaires stagiaires ou la place de l'agrégation.

Ce qui suit a vocation à montrer que, quelle que soit l'opinion que l'on puisse avoir du principe de cette réforme, ces textes parfois contradictoires sont souvent d'interprétation et de mise en pratique délicates. Un point est fait sur la situation mi-septembre ; des explications plus détaillées de la réforme peuvent être trouvées dans les différents textes publiés par la SMF pendant l'année écoulée, notamment [8].

### Sans la masterisation

Les candidats des CRPE<sup>6</sup> et CAPES doivent être titulaires d'une licence. Les épreuves d'admissibilité se passent en mars-avril et les épreuves d'admission en juin-juillet.

Pour le CRPE, les épreuves d'admissibilité comportent trois épreuves écrites (français comptant pour environ 21,5% de la note finale, mathématiques 21,5%, histoire-géographie et sciences technologiques à choisir en majeure 10% - mineure 4%). Les épreuves orales d'admission comportent une épreuve 29% sur le domaine des arts visuels, littérature jeunesse et expression musicale, une épreuve de langue vivante étrangère 7% et une épreuve d'éducation physique 7%.

Pour le CAPES de mathématiques, les épreuves d'admissibilité comportent deux épreuves écrites de mathématiques comptant chacune pour 25% de la note finale. Les épreuves orales d'admission comportent un exposé (leçon, 25%) et un dossier (exemples et exercices, 25%) « visant à évaluer la capacité à concevoir, mettre en forme et analyser une séquence d'enseignement sur un thème donné ». Le programme comporte 10 pages.

Les candidats à l'agrégation de mathématiques doivent être titulaires d'un M1<sup>7</sup>. Les épreuves d'admissibilité de l'agrégation comportent deux épreuves écrites de mathématiques comptant chacune pour 20% de la note finale. Les épreuves orales d'admission comportent trois épreuves comptant chacune pour 20% de la note finale, un exposé d'algèbre et un exposé d'analyse (leçons) et l'analyse d'un texte de modélisation sous forme de séquences pédagogiques.

Rappelons qu'environ 150.000 candidats se présentent chaque année aux concours de recrutement de l'éducation nationale, pour 15.000 lauréats. Ces lauréats deviennent fonctionnaires stagiaires l'année suivante, avec une rémunération supérieure à 15.000 Euros pour un enseignement en responsabilité de l'ordre d'un tiers de service (soit 200 à 300 heures) associé à une formation en IUFM pour deux tiers de service.

---

<sup>6</sup> Concours de recrutement des professeurs des écoles

<sup>7</sup> Première année de master, quatrième année post-bac.

## Des précisions sur la masterisation de juillet 2008 à mars 2009

### Le concours CRPE et le CAPES de mathématiques

Les principes directeurs des concours étaient détaillés en octobre 2008 par François Perret, doyen de l'Inspection générale de l'Éducation Nationale, dans [4].

Le référentiel [1] de 2006 serait « pris en compte dans la conception de toutes les épreuves », suivant trois priorités : la culture disciplinaire, la capacité à planifier et organiser un enseignement adapté à un niveau de classe et la connaissance du service public de l'éducation. Les oraux des concours seraient prépondérants, sur « des critères d'ordre pédagogique et didactique ainsi que de connaissance du système éducatif ». Le passage de la « logique de validation du niveau universitaire à une logique de recrutement conforme aux besoins de l'employeur » est entériné, avec l'entrée prévue des personnels de l'administration et de la société civile dans les jurys. Les épreuves d'admissibilité du concours se dérouleraient en fin de premier semestre de M2<sup>8</sup>, et les épreuves d'admission en fin de deuxième semestre.

Les épreuves d'admissibilité du CRPE comporteraient une épreuve de français et de culture humaniste 20%, une épreuve de mathématiques et de culture scientifique et technologique portant sur le programme des écoles primaires 20%. Les épreuves d'admission comporteraient deux épreuves orales comptant pour 60% de la note finale : une épreuve « prenant la forme d'un exercice pédagogique » sur le programme de l'école primaire et un « entretien avec le jury » sur la connaissance du système éducatif, au contenu administratif.

Les épreuves d'admissibilité de tous les CAPES comporteraient deux épreuves disciplinaires comptant chacune pour 20% de la note finale, « l'épistémologie et l'histoire de la discipline pouvant faire l'objet d'une question spécifique dans l'une des deux épreuves ». Les épreuves orales d'admission comporteraient une épreuve « prenant la forme d'un exercice pédagogique » pour 30% et un « entretien avec le jury » sur la connaissance du système éducatif (au contenu administratif) pour 30% de la note finale. Le programme disciplinaire serait celui des « collèges, lycées, classes post-bac du lycée » (sans autres précisions).

### L'agrégation de mathématiques

Le communiqué [2] de juillet 2008 repris par la charte [3] de septembre 2008 parle indifféremment des « futurs enseignants », tout en soulignant le maintien de la distinction entre CAPES et agrégation. Dans [4], François Perret précisait que l'agrégation recruterait « également » au niveau master mais que les trois types de priorités ci-dessus et le référentiel [1] de 2006 ne concernaient que les autres concours. « Les épreuves et programmes des concours de l'agrégation sont maintenus en l'état, mais une des épreuves orales actuelles sera infléchie dans le sens de l'épreuve orale prenant la forme d'un exercice pédagogique proposée pour les nouveaux concours de recrutement de professeurs ». « On y ajoutera l'épreuve d'entretien avec le jury » sur la connaissance administrative du système éducatif.

Il ne sera pas plus question de réforme de l'agrégation dans les textes officiels jusqu'à parution des décrets en juillet 2009.

<sup>8</sup> Deuxième année de master.

### Les masters

Dans le communiqué [2] de juillet 2008, les universités étaient appelées à mettre en place des « parcours de master ambitieux » assortis de stages d'observation et de pratique accompagnée dès la licence, sans plus de précisions.

D'après la charte [3] de septembre 2008, « l'insertion dans le LMD<sup>9</sup> des parcours de préparation aux métiers de l'enseignement ne peut être conçue indépendamment de la réflexion sur l'apport de la recherche à ces parcours » et « l'organisation des futurs masters sera modulaire, comportant des tronc communs avec d'autres parcours et des unités d'enseignement spécifiques ». Les masters devront « articuler quatre voies complémentaires » disciplinaire, épistémologique en lien avec l'histoire des disciplines, didactique et enfin professionnelle, voie « qui aborde les différentes facettes du métier d'enseignant et le rôle d'agent du service public d'éducation ».

Lors du lancement en octobre 2009 de leur campagne d'habilitation [5], il est prévu que les nouvelles formations « constituent des masters au sens plein du terme, répondant au double objectif de préparer les étudiants au doctorat et de leur offrir un parcours qualifiant et professionnalisant de haut niveau leur permettant d'accéder à des métiers divers », et il est affirmé que « il ne saurait y avoir de master sans une authentique **formation par la recherche**<sup>10</sup> ». Un équilibre doit y être proposé entre culture scientifique, initiation à la recherche y compris par un travail personnalisé, stages d'observation et de pratique accompagnée, didactique, psychologie des apprentissages, connaissance du système éducatif, préparation des concours académique et pratique.

Valérie Péresse demande dans une lettre [7] en février 2009 aux présidents d'université de mettre en place un master professionnalisé pour les futurs professeurs du secondaire « dont la qualité sera un passeport vers l'enseignement mais aussi vers de multiples métiers possibles ».

La campagne d'habilitation des masters lancée le 13 octobre 2008 prévoyait le dépôt de projets à l'AERES<sup>11</sup> au 31 décembre 2008, les établissements devant être informés en juin 2009 des décisions d'habilitation pour la rentrée 2009. En novembre 2008, ce délai est prolongé au 15 février 2009. L'AERES annonçait le 13 février 2009 que « suite aux nombreuses demandes de délai supplémentaire pour transmettre les projets de maquette de masters concernant les métiers de l'enseignement et de la formation, le serveur restera accessible jusqu'au 31 mars 2009 ».

### Les stages durant le master

Dans le communiqué [2] de juillet 2008, « la formation devra comporter une prise de contact progressive et cohérente avec les métiers de l'enseignement qui pourra être amorcée au cours des études de licence et comporter des stages d'observation et de pratique accompagnée ».

La circulaire [5] de lancement de la campagne d'habilitation des masters prévoit simplement « **des aller-retour entre terrain et formation**<sup>12</sup> ».

Dans le communiqué [6] MEN-MESR de janvier 2009 des stages d'observation « pourront » être offerts en M1, et les candidats au concours « pourront » effectuer deux types de stage en M2 ; d'une part, « 3h par semaine ou 2 à 3 semaines de

<sup>9</sup> Licence, Master, Doctorat.

<sup>10</sup> En gras dans le texte initial.

<sup>11</sup> Agence d'Évaluation de la Recherche et de l'Enseignement Supérieur.

<sup>12</sup> En gras dans le texte initial.

stages d'observation et de pratique accompagnée non rémunérés »; et d'autre part, des stages en responsabilité donnant lieu à une « gratification », un étudiant effectuant une centaine d'heures se verrait « indemnisé à hauteur d'environ 3000 Euros ». Il était annoncé 50.000 lieux de stages de pratique accompagnée pour les étudiants de M1 et 40.000 stages en responsabilité pour les étudiants de M2.

### L'année de fonctionnaire stagiaire

Dans le communiqué [2] de juillet 2008, les lauréats étant en situation d'enseignement à temps plein dès leur première année d'exercice, le stage en responsabilité se trouvait supprimé, des actions de formation spécifiques n'étant envisagées qu'en dehors du temps scolaire.

### Les bourses pour les étudiants de master

Le communiqué [6] MEN-MESR de janvier 2009 promet « 12.000 bourses sur critères académiques, calculées en fonction du revenu fiscal de référence des familles », d'un montant maximum de 2.500 Euros et une bourse complémentaire de 1.449 Euros pour certains étudiants déjà boursiers. Pour ceux qui voudraient travailler davantage, « 5.000 postes d'assistants d'éducation<sup>13</sup> seraient réservés aux étudiants de M2 inscrits aux concours de recrutement et 4.000 à ceux de M1 ».

Dans sa lettre [7] de février 2009, Valérie Pécresse annonce globalement 20.000 bourses supplémentaires pour les étudiants de M2 se préparant aux concours.

## Des modifications de la masterisation depuis mars 2009

### Les concours et les masters

Dans le communiqué [9] du 12 mars 2009, Valérie Pécresse et Xavier Darcos annoncent que la réforme, « **dont le processus sera lancé dès la session 2010 des concours** », « **verra son aboutissement à l'occasion de la session des concours 2011**<sup>14</sup> ». « Les universités qui le souhaitent pourront donner à leurs parcours de master ou aux masters qu'elles ont élaborés un caractère provisoire lors de l'année 2009-2010 ». De plus, « pour la session 2010 des concours du second degré, une épreuve disciplinaire comparable à une des épreuves existantes précédemment se substituera à l'épreuve de connaissances générales du système éducatif qui était initialement prévue. »

Il ressortait au printemps 2009 des compte-rendus des sociétés savantes et collectifs d'enseignants reçus aux ministères que la part de l'épreuve de connaissance du système éducatif, si elle était maintenue dans le futur, serait revue à la baisse (moins de 10% de la note finale au lieu des 30% annoncés en octobre 2008).

Moins de dix maquettes de masters concernant les métiers de l'enseignement et de la formation (toutes disciplines confondues) provenant d'universités publiques étant parvenues à l'AERES fin mars 2009, celle-ci décide le 9 avril 2009 de n'en évaluer aucune.

Une note [13] de la DGES confirme en mai 2009 que « la réforme de la formation des maîtres sera mise en œuvre de façon progressive en 2010 et 2011, après une phase de concertation ».

<sup>13</sup> 35 heures par semaine pour un temps complet de surveillance ou de soutien pédagogique, 22 heures pour un mi-temps, rémunération au SMIC.

<sup>14</sup> En gras dans le texte initial.

Les décrets [20] instaurant la masterisation ont été promulgués le 28 juillet 2009, de contenu équivalent aux projets ayant circulé en mai 2009. À partir de la session 2011, les candidats devront être titulaires d'un M1 et être inscrits en M2 pour se présenter aux concours PE et CAPES, et, en cas de réussite au concours, justifier d'un master pour être nommés fonctionnaires stagiaires (le bénéfice du concours leur étant garanti pendant un an en cas d'échec au master l'année du concours). Ils devront être titulaires d'un master complet pour se présenter à l'agrégation.

### **Les stages de master**

Dans le communiqué [9] MEN-MESR de mars 2009, Valérie Pécresse et Xavier Darcos précisent que « en M1, les étudiants se destinant à devenir enseignants pourront ainsi bénéficier de stages d'observation et de pratique accompagnée d'une durée de 108 heures ». « Les stages en responsabilité, qui pourront bénéficier à 50.000 étudiants de M2, feront l'objet d'une rémunération de 3.000 Euros pour 108 heures d'activité ».

La circulaire [21] aux recteurs du 27 août 2009 précise que, à partir de 2010-2011, les « stages d'observation et de pratique accompagnée seront destinés aux étudiants de M1 et M2 ». « La proportion entre observation et pratique accompagnée résultera du projet de formation concerté entre l'académie, l'université et l'étudiant concerné », « pour une durée inférieure à 40 jours et dans la limite de 108 heures ». Les « stages rémunérés en responsabilité seront destinés aux étudiants de M2 ».

### **L'année de fonctionnaire stagiaire**

Xavier Darcos annonce le 20 mars 2009 dans une lettre [10] aux syndicats FSU, qu'à partir de la rentrée 2010, une partie des obligations de service des fonctionnaires stagiaires, de l'ordre d'un tiers, « sera consacrée à une formation continue renforcée permettant la mise en place d'un tutorat et de retours réguliers en formation universitaire ».

Les décrets [20] de juillet 2009 prévoient que « les professeurs stagiaires bénéficient d'une formation dispensée sous la forme d'actions organisées à<sup>15</sup> l'université et d'un accompagnement, » le tutorat n'étant pas évoqué pour les PE, qui seront « titularisés par l'inspecteur d'académie » du département, alors que pour les professeurs du second degré « la titularisation est prononcée par le recteur de l'académie ».

### **La commission de concertation et de suivi**

Le communiqué [9] MEN-MESR du 12 mars 2009 annonce que les conditions définitives de la masterisation seront examinées par une « Commission de concertation et de suivi, coprésidée par un président d'université et un recteur » qui « réunira en nombre égal des membres de l'enseignement supérieur et de l'éducation nationale ». Co-présidée par William Marois, recteur de l'académie de Bordeaux et Daniel Filâtre président de l'université de Toulouse II, elle est installée le 13 mai 2009 et comprend 14 membres relevant de l'éducation nationale et 10 relevant de l'enseignement supérieur et de la recherche. Elle est chargée de remettre des recommandations pour le 15 juillet 2009, en tenant compte des conclusions de groupes de travail ayant associé les organisations syndicales en mai 2009, et « après avoir

<sup>15</sup> Pas nécessairement par l'université.

procédé aux consultations les plus larges ». Elle s'est réunie les 20 et 27 mai et a auditionné les organisations représentatives suivantes : FSU, SGEN-CFDT, UNSA, CSEN-SNALC-Autonome, Société des agrégés, SNETAA, FNEC-FP FO. Les textes des décrets instituant la masterisation sont adressés aux organisations syndicales en mai 2009 ; de plus, « les discussions avec les représentants du ministère de l'Éducation Nationale mettent en évidence un malentendu, voire un désaccord, et ne permettent pas les avancées attendues » (voir le rapport [18] du groupe Filâtre). Le 10 juin 2009, tous les membres universitaires suspendent leur participation à la commission. Chacun des deux groupes continue sa réflexion, sans procéder à aucune autre consultation. Leurs conclusions ont été rendues le 17 juillet 2009, sous forme de deux rapports séparés [17] et [18] et d'une lettre [19] aux ministres co-signée par les deux présidents.

Selon le communiqué [16] MEN-MESR du 9 juillet 2009, les groupes de proposition mis en place à la rentrée devront tenir compte des conclusions de cette commission et de celles des groupes de travail de mai 2009. La composition et la lettre de mission de ces groupes de proposition sont données dans le communiqué [22] MEN du 4 septembre 2009. Quatre groupes de proposition (un par type de professeurs) feront des propositions sur les thèmes suivants : « maquettes des concours et des masters ; dates des épreuves des concours durant le M2 ; conditions, organisation et contenus des stages préparatoires aux concours et du temps de formation consécutif à la prise de fonction ».

### **Les conditions de concours et de recrutement pour 2010**

D'après le communiqué [2] de juillet 2008, la réforme devait être mise en œuvre dès 2009-2010, même si les étudiants n'avaient reçu aucune information préalable à leur inscription (même en préparation aux concours) sur les changements prévus.

Le problème de la transition n'est abordé dans les textes officiels qu'en janvier 2009 dans le communiqué [6] MEN-MESR, prévoyant alors que l'admissibilité en 2009 ouvrirait de droit sur une inscription en M2 sans avoir à justifier d'un M1, que tous les candidats présents aux écrits des concours en 2009 pourraient se présenter aux concours en 2010, et que le M1 pourrait être validé partiellement en 2008-2009 pour eux selon évaluation. La lettre [7] de Valérie Pécresse de février 2009 aux présidents d'universités indiquait que « la première session des nouveaux concours se tiendra au printemps 2010 ». Dans sa lettre [10] de mars 2009 aux secrétaires généraux des syndicats FSU, Xavier Darcos annonce que « les concours seront maintenus dans leur état actuel pour la session 2010 ».

D'après le communiqué [9] MEN-MESR de mars 2009, « pour le premier comme pour le second degré, il y aura au moins autant de places mises aux concours externes de recrutement en 2010 qu'en 2009 »<sup>16</sup>. De plus, « les jeunes enseignants stagiaires, recrutés à l'issue de la session 2010 des concours, bénéficieront d'une formation continue renforcée, dans le cadre de leurs obligations de service, comprenant, d'une part, une partie pratique sous la forme d'un tutorat, et, d'autre part, une formation hors écoles ou établissements, de nature disciplinaire ou professionnelle dont les universités seront les acteurs essentiels ». En juin 2009, une circulaire [15] de la DGES annonce que 12.000 bourses destinées à des étudiants

<sup>16</sup> 9.000 places ont été mises au CRPE en 2008 et 6.000 en 2009.

inscrits en M2 seront attribuées sur critères sociaux ou universitaires pour 2009-2010, d'un montant maximum de 2500 Euros.

Le communiqué MEN-MESR [11] du 31 mars 2009 précisait que « en cas de réussite à un concours de la session 2010, le bénéfice du concours sera garanti pendant un an à ces candidats inscrits en M1. » Ils seraient recrutés comme enseignants stagiaires pour la rentrée scolaire 2011 « sous réserve de l'obtention d'un M2 à l'issue de l'année universitaire 2010-2011, » sans que le master en question soit indiqué.

Assortie d'une circulaire [14] en juin 2009, la note [13] de la DGES de mai 2009 fixe les conditions d'inscription pour 2009-2010. Les candidats devront s'inscrire à l'IUFM ou dans une UFR ainsi que dans un master « approprié » (masters inchangés en 2009-2010), ou à défaut pourront se voir valider 60 ECTS<sup>17</sup> selon évaluation. La validation du M1 (respectivement du M2) « sera appréciée au cas par cas selon des modalités définies par les universités » pour les candidats titulaires d'une licence (respectivement d'un M1). « Les lauréats des concours titulaires du seul M1 seront recrutés comme fonctionnaires stagiaires dès la rentrée 2010 ». Des stages d'observation ou de pratique accompagnée ou en responsabilité rémunérés « pourront être proposés » aux étudiants préparant les concours (sans prise en compte pour la réussite aux concours, inchangés en 2010), mesure confirmée par le texte [21] du 27 août 2009. La lettre [12] de Valérie Pécresse d'avril 2009 au président de la CPU<sup>18</sup> précise que pour 2009-2010 « l'inscription en IUFM vaudra, par convention avec les universités, inscription en M1 ». Le communiqué [23] MESR de septembre 2009 confirme que « l'inscription en IUFM, ou dans une autre composante universitaire offrant une préparation aux concours de l'enseignement est considérée comme équivalente à une inscription en M1 ».

Les décrets [20] stipulent finalement concernant les professeurs des écoles, de lycées professionnels, et certifiés, que les présents aux épreuves d'admissibilité 2009 pourront se présenter au concours 2010 et être nommés fonctionnaires stagiaires à la rentrée 2010. Par contre, les nouveaux candidats devront avoir un diplôme d'au moins quatre années post-Bac ou être inscrits en M1 ; dans ce dernier cas ils ne seront nommés fonctionnaires stagiaires à la rentrée 2010 que s'ils justifient de la validation du M1. Il n'y est pas question de validation d'un master complet, mais pas non plus de conservation du bénéfice du concours en cas d'échec au M1.

Les conditions d'inscription à l'agrégation sont inchangées pour la session 2010 par le décret [20] : les candidats devront être titulaires d'un M1 et les reçus seront nommés fonctionnaires stagiaires à la rentrée 2010 et titularisés à l'issue de l'année 2010-2011.

La circulaire [21] d'août 2009 annonce que « dès 2009-2010, des stages d'observation, ou de pratique accompagnée et des stages en responsabilité devront être proposés aux étudiants inscrits aux concours de recrutement 2010 et inscrits dans une formation de niveau master ou déjà titulaires d'un M1 ou d'un M2. L'objectif est, qu'au total, ces étudiants bénéficient de 108 heures de stage ». « Les formateurs universitaires » participeront à l'évaluation des stages, mais en termes d'encadrement et d'accompagnement, seul un « maître formateur référent » est prévu pour le premier degré et un « enseignant référent » pour le second degré. La

<sup>17</sup> Soit l'équivalent d'une année de master.

<sup>18</sup> Conférence des Présidents d'Universités.

compatibilité de la répartition horaire de ces stages et de celle de la préparation des concours et du master n'est pas assurée.

### Les actions de la SMF

Une pétition demandant un moratoire d'au moins un an sur l'ensemble de la réforme a été mise en ligne le 6 novembre 2008 sur le site de la SMF, comprenant la demande d'un maintien en l'état des concours et du stage en responsabilité et de l'absence d'exigence d'un master pour le recrutement des lauréats des concours 2010. La pétition a reçu en un temps très bref plus de 2500 signatures.

Début janvier 2009, une enquête a été lancée auprès des correspondants SMF sur l'écriture des maquettes dans les départements de mathématiques et leur contenu éventuel (contenu disciplinaire, stages, prise en compte de l'épreuve de connaissance du système éducatif,...).

Une délégation SMF reçue au MESR le 16 janvier 2009 a présenté l'ensemble des problèmes aux conseillers de la ministre Valérie Pécresse, et les a également alertés sur la probable non remontée d'une majorité de maquettes de master, comme il ressortait de l'enquête.

Cette première enquête a été confirmée en février 2009 par une deuxième sur la (non-)remontée des maquettes, depuis 50 départements de mathématiques jusqu'à l'AERES.

En mars et avril 2009, deux lettres ouvertes au ministre Xavier Darcos à l'initiative de la CCL<sup>19</sup> et de la SMF ont été co-signées par une cinquantaine de sociétés savantes et associations d'enseignants de tous niveaux et toutes disciplines; elles reprennent une analyse des dangers de la réforme et lancent un appel solennel pour un déblocage de la situation et une remise à plat complète du dossier. La première a été publiée par un quotidien national, elles ont été explicitement mentionnées par la CPU, des sections du CNU<sup>20</sup>, et par de nombreux journalistes, notamment lors de questions au ministre.

Différents textes soulignant les problèmes liés à la réforme ont été mis en ligne par la SMF durant cette année, dont un texte [8] explicatif co-écrit avec la CCL en mars 2009, et une contribution aux états généraux de la formation des enseignants en juin 2009.

Une réunion organisée par la SMF et réunissant responsables de préparation aux concours, responsables de masters, et plus généralement collègues concernés par la formation des enseignants en mathématiques a lieu à l'IHP le 26 septembre 2009 pour débattre du contenu de la réforme dans ses aspects généraux et ses aspects spécifiques aux mathématiques : compatibilité CRPE-CAPES et CAPES-agrégation; conditions de validation du M1 pour les étudiants inscrits en préparation au concours pour 2009-2010; dispositifs d'accompagnement financier; formation professionnelle et stages durant le master; modalités de l'année de fonctionnaire stagiaire; position des épreuves écrites et orales des concours pendant le master; préparation à l'agrégation après le master; programme, contenu et évolution des concours; programme des masters, spécialités ou parcours; etc.

<sup>19</sup> Coordination Concours Lettres, groupement de sept sociétés savantes de lettres.

<sup>20</sup> Conseil National des Universités.

Tous les documents cités sont disponibles sur le site de la SMF dans le dossier « masterisation »<sup>21</sup>.

### Références

- [1] Référentiel des compétences professionnelles des maîtres - 19 décembre 2006
- [2] Communiqué de presse du conseil des ministres - 2 juillet 2008
- [3] Charte MEN-MESR relative aux principes directeurs de la réforme du recrutement et de la formation des enseignants - 11 septembre 2008
- [4] Les nouveaux concours de recrutement de professeurs - 13 octobre 2008
- [5] Circulaire de la DGES ayant pour objet la « Campagne d'habilitation de diplômes de master pour les étudiants se destinant aux métiers de l'enseignement - Rentrée universitaire 2009 » - 17 octobre 2008
- [6] Communiqué de presse MEN-MESR « La nouvelle formation des maîtres » - 15 janvier 2009
- [7] Lettre adressée par Valérie Pécresse aux présidents d'universités - 2 février 2009
- [8] « La masterisation pour les nuls. Les dangers du projet Darcos de réforme de la formation des maîtres » CCL SMF - mars 2009
- [9] Communiqué de presse MEN- MESR - 12 mars 2009
- [10] Lettre de Xavier Darcos au syndicats nationaux de la FSU sur la formation des enseignants - 20 mars 2009
- [11] Communiqué de presse MEN-MESR - 31 mars 2009
- [12] Lettre de Valérie Pécresse au Président de la Conférence des Présidents d'Universités - 17 avril 2009
- [13] Note du directeur de la DGES sur les conditions 2009-2010 - 14 mai 2009
- [14] Circulaire de la DGES fixant les modalités d'inscription et de validation de 2009-2010 pour les étudiants préparant des concours des métiers de l'enseignement - 5 juin 2009
- [15] Circulaire de la DGES sur les aides spécifiques aux étudiants se destinant aux métiers de l'enseignement - 5 juin 2009
- [16] Communiqué du MESR précisant le calendrier de concertation, remise de maquettes, etc., des nouveaux masters – 9 juillet 2009
- [17] Rapport du groupe présidé par William Marois - 17 juillet 2009
- [18] Rapport du groupe inter-conférences universitaires présidé par Daniel Filâtre - 17 juillet 2009
- [19] Lettre de Daniel Filâtre et William Marois aux ministres - 17 juillet 2009
- [20] Décrets instituant la « masterisation » et précisant les conditions de transition - 28 juillet 2009
- [21] Circulaire destinée aux recteurs sur l'organisation de stages - 27 août 2009
- [22] Communiqué du MEN : Thèmes - Calendrier - Composition des groupes de proposition - 4 septembre 2009
- [23] Communiqué du MESR suivant une réunion de rentrée avec les organisations syndicales - 7 septembre 2009

---

<sup>21</sup> <http://smf.emath.fr/Enseignement/Masterisation>

# INFORMATIONS

---

## **Une nouvelle revue de la Société Française de Statistique (SfdS) : « Statistique et Enseignement »**

Jean-Pierre Raoult et Catherine Vermandele<sup>1</sup>

---

À tous les niveaux de l'enseignement, de l'école à l'enseignement supérieur, on s'accorde à dire que doit figurer une éducation à la statistique ; il en est de même dans de nombreuses formations hors du cadre scolaire ou universitaire. La statistique est en effet à la fois un outil au service d'autres disciplines (biologie et médecine, économie, sciences humaines et sociales, géographie, sciences physico-chimiques ...) et un élément essentiel de la formation citoyenne. Cette nécessité s'est traduite par des évolutions de contenus (en phase d'accroissement en général en France), d'objectifs et de programmes. Mais en même temps l'enseignement de la statistique par et pour des non-statisticiens se cherche encore : ses contenus subissent des variations répétées et ceux qui ont à l'enseigner se sentent parfois démunis.

Il y a ainsi un grand besoin de diffusion et de réflexion sur les concepts, les outils ainsi que les travaux que l'on peut mener avec les élèves et les étudiants en prenant en compte la diversité de leurs connaissances et de leurs aptitudes ainsi que les finalités des filières.

En langue française de tels outils existent déjà, mais de façon dispersée et pas toujours en libre accès ; citons ainsi :

– des articles dans les revues de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (« *Bulletin Vert* » de l'APMEP, PLOT ...) ou des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des mathématiques (en particulier « *Repères IREM* »),

– des sites internet tels que « Statistix », « St@tNet »,...

Par ailleurs des rencontres donnent l'occasion de partager leurs expériences à tous ceux que préoccupe l'enseignement de la statistique : la Société Française de Statistique (SfdS) propose des sessions spécialisées dans ses journées annuelles et a organisé à Lyon en 2008 le « premier congrès francophone sur l'enseignement de la statistique », la commission Inter-IREM Statistique et Probabilités organise des réunions régulières.

---

<sup>1</sup> Rédacteurs en chef de *Statistique et Enseignement*

Sur le plan international, c'est-à-dire le plus souvent en anglais, on trouve des revues électroniques telles que « *Teaching Statistics* », « *Journal of Statistics Education* », « *Statistics Education Research Journal (SERJ)* », « *Technology Innovations in Statistics Education (TISE)* ». L'International Association for Statistics Education organise tous les quatre ans le congrès mondial ICOTS.

Il manquait cependant une revue spécialisée, orientée vers le public francophone, lieu naturel et exigeant pour publier des articles consacré à l'enseignement de la statistique et pouvant tirer profit de l'expérience acquise dans d'autres langues.

C'est pourquoi la SFdS a décidé de créer *Statistique et Enseignement*, revue électronique en libre accès dont le premier numéro (consacré à des articles issus de communications présentées au congrès de Lyon en septembre 2008) paraîtra courant 2009. *Statistique et Enseignement* vise ainsi à publier des contributions relatives à l'enseignement, mais aussi à la formation extra-scolaire, voire à la popularisation « grand public » en statistique. *Statistique et Enseignement* n'est pas un centre de ressources mais une revue à comité de lecture accueillant des réflexions critiques, des analyses, des présentations d'activités accompagnées de commentaires (objectif, conditions d'expérimentation, conclusions de cette étude). Sans être un forum, *Statistique et Enseignement* comportera aussi des débats, des points de vue, des notes de lecture.

Nous vous invitons à visiter le site de la revue<sup>2</sup> y proposer des articles, la lire et la faire connaître.

## **Bilan du Comité Scientifique Disciplinaire Mathématiques et Interactions (CSD5) de l'ANR**

Pierre Collet, François James, Pascal Lefèvre, Jean-Claude Saut

---

### **Bilan**

Nous avons dressé un bilan à la suite de l'édition 2007 (voir [1]). Le resserrement du calendrier de l'appel à projets ANR 2009 [2] ne nous a pas permis de publier une note similaire pour l'édition 2008. Nous souhaitons combler ici cette lacune et informer au mieux notre communauté. Le changement de calendrier devrait permettre une installation des crédits plus en phase avec les calendriers universitaires, donc une gestion plus sereine pour les porteurs.

Depuis 2007, il y a eu un renouvellement partiel du comité. Voici la composition des deux comités successifs :

En 2008 : Gilles Aubert, Naoufel Ben Abdallah, Christophe Besse, Christian Blanchet, Patrick Cattiaux, Antoine Chambert-Loir, Jean Clairambault, Pierre Collet (vice-président), Fabienne Comte, Jean Esterle, Stéphane Gaubert, Martin Haïr, Marc Herzlich, Marc Quincampoix, Jean-Claude Saut (président), Rémi Sentis.

---

<sup>2</sup> <http://www.statistique-et-enseignement.fr/ojs>

En 2009 : Gilles Aubert, Christophe Besse, Patrick Cattiaux, Pierre Collet (vice-président), Jean Clairambault, Fabienne Comte, Jean Esterle, Stéphane Gaubert, Martin Hairer, Marc Herzlich, Pascal Hubert, Ariane Mézard, Marc Quincampoix, Jean-Claude Saut (président), Rémi Sentis, Christian Schmeiser, Christoph Sorger  
Chargés de mission Usar [3] : François James (depuis 2005), Pascal Lefèvre (depuis 2007).

Chargé de mission ANR pour les mathématiques et STIC dans le programme « Blanc-JCJC » : Mohamed Amara (depuis 2007).

Le CSD examine les projets postulant pour un financement de l'Agence Nationale de la Recherche au titre des programmes « Blanc » et « Jeunes Chercheuses et Jeunes Chercheurs » (JCJC), puis propose une sélection, examinée *in fine* par le comité de pilotage de l'ANR. Le nombre de projets sélectionnés dépend de l'enveloppe préliminaire attribuée par l'ANR, la décision finale est du ressort du comité de pilotage. Le CSD a aussi la possibilité d'établir une petite liste de projets bidisciplinaires qui, examinés par deux CSD, sont financés, s'ils sont sélectionnés, sur une enveloppe budgétaire spécifique.

### **Programme JCJC**

En 2008 : nous avons 30 dossiers dont 24 concernaient le seul CSD5. Dix projets ont été financés (soit plus de 33% des projets proposés en CSD5 uniquement ou ayant la CSD5 comme section principale). Aucun projet bi-disciplinaire n'a été classé.

Pour les projets financés, le financement attribué varie entre 60 k€ et 150 k€. Les budgets demandés variaient entre 60 k€ et 190 k€ pour les projets acceptés (entre 25 k€ et 477 k€ globalement). Ils ont été selon les cas acceptés en l'état, ou diminués, ce dernier cas correspondant en général à un nombre trop élevé de post-docs.

Le budget moyen attribué pour un projet financé est donc de 94 k€ environ (97 k€ en 2007), l'enveloppe globale étant de 938 k€.

En 2009 : nous avons 34 dossiers dont 29 concernaient le seul CSD5. Au moment où nous rédigeons cette note, douze projets ont été financés (soit plus de 35% des projets proposés en CSD5 uniquement ou ayant la CSD5 comme section principale). Trois projets figurent sur une liste complémentaire, leur financement dépend d'arbitrages budgétaires au niveau de l'ANR. Aucun projet bi-disciplinaire n'a été classé.

Pour les projets financés, le financement attribué varie entre 50 k€ et 150 k€. Les budgets demandés variaient entre 83 k€ et 238 k€ pour les projets acceptés (entre 45 k€ et 626 k€ globalement), la politique du CSD vis-à-vis du budget étant maintenue par rapport à 2008. Plus spécifiquement, le comité a décidé de ne pas financer les post-docs et thèses sur ce programme JC 2009.

L'enveloppe globale est de 1090 k€ (soit une moyenne d'environ 90 k€ par projet).

### **Programme Blanc**

En 2008 : nous avons 55 dossiers recevables dont 24 concernaient le seul CSD5. Vingt et un projets ont été financés (soit plus de 38% des projets proposés en CSD5 uniquement ou ayant la CSD5 comme section principale). Ainsi une majorité

des projets concernait également un autre Comité Scientifique. Ces associations se font avec des mathématiques dites « pures » comme avec des mathématiques « appliquées ».

Deux projets bi-disciplinaires ont été classés (en commun avec la CSD4 : Physique), avec un financement moyen de 271 k€.

Pour les projets financés, le financement attribué varie entre 75 k€ et 340 k€. Les budgets demandés variaient entre 95 k€ et 671 k€ pour les projets acceptés (entre 48 k€ et 650 k€ globalement).

Le budget moyen attribué pour un projet financé est donc de 202 k€ environ (208 k€ en 2007), l'enveloppe globale (sans les bi-disciplinaires) étant de 4238 k€.

En 2009 : nous avons 64 dossiers dont 41 concernaient le seul CSD5. Au moment où nous rédigeons cette note, vingt-trois projets ont été financés (soit environ 36% des projets proposés en CSD5 uniquement ou ayant la CSD5 comme section principale). Deux projets bi-disciplinaires ont été classés, avec un financement moyen de 265 k€.

Pour les projets financés, le financement attribué varie entre 93 k€ et 260 k€. Les budgets demandés variaient entre 131 k€ et 783 k€ pour les projets acceptés (entre 48 k€ et 783 k€ globalement).

Le budget moyen attribué pour un projet financé est donc de 194 k€ environ, l'enveloppe globale (sans les bi-disciplinaires) étant de 4457 k€.

Comme pour le programme Jeunes Chercheurs, certains budgets ont été maintenus. D'autres ont été drastiquement réduits (mais de manière à ne pas dénaturer les projets). Cela correspond souvent à des postes de post-docs trop nombreux (par exemple un ou plusieurs post-docs par équipe concernée, alors que le vivier est relativement réduit), et/ou à un budget « missions/conférences » surdimensionné.

A contrario, nous avons, comme en 2007, rejeté un projet scientifiquement excellent (au sens de la qualité des participants et des thématiques proposées), mais demandant un énorme budget. En effet, ce projet (qui ressemblait plus à un projet de GDR) aurait été complètement dénaturé par une diminution drastique de son budget.

## Commentaires

Nous avons essayé d'équilibrer les thématiques et tenu compte d'une sensibilité décentralisatrice mais sans qu'elle soit dommageable à la qualité scientifique. Nous insistons sur le fait que ce sont les projets qui sont jugés (en adéquation avec les qualités scientifiques bien sûr) et pas seulement la stature scientifique du porteur ou des participants.

Il est recommandé que le porteur principal soit fortement impliqué tout en respectant bien sûr la règle d'une implication totale inférieure ou égale à 100% dans tous les projets auxquels il participe. L'émiettement de nombreux participants à très faible pourcentage n'est pas non plus un facteur positif pour un projet, sauf cas particulier d'une expertise très pointue à justifier. D'une manière générale, la cohérence scientifique du dossier doit bien être mise en valeur.

Pour le programme JCJC, l'aspect structurant du projet doit apparaître clairement. Le critère d'âge n'est pas absolu, pas plus que le volume de budget demandé. Typiquement, le projet peut être porté par un(e) jeune professeur(e) ou maître de

conférences/chargé(e) de recherches proche de l'habilitation, mais il faut prendre en compte l'impact global du projet. Rappelons que désormais, il y a possibilité d'inclure dans le projet le financement de décharges de services (voir le texte de l'appel d'offre). Les projets doivent rester de taille raisonnable (voir le budget moyen attribué). Les budgets de missions et d'organisation de conférences doivent être argumentés et correspondre à des scénarios réalisables et le plus précis possible. L'ANR ne peut pas assurer un financement de type GDR. Il est bien sûr possible de demander des budgets plus importants mais ces demandes doivent être justifiées très en détail. Pour les demandes de post-docs, sujet sensible, il faut en particulier s'assurer qu'il existe un vivier suffisant dans le domaine et éventuellement mentionner si des candidats sont en vue (voire contactés). L'ANR exigera un suivi de plus en plus précis du recrutement effectif, mais aussi du devenir des post-docs recrutés.

### Programme blanc international

Cette année, l'ANR a lancé un programme blanc international, distinct du programme blanc. Il est réservé à certains pays et pour ces pays à certaines disciplines. Nous avons eu cette année cinq projets soumis en CSD5. Ils ont été évalués et classés selon la même procédure que pour le programme blanc. Au moment où nous écrivons ces lignes, le budget n'est pas encore définitivement alloué et le comité de pilotage ne s'est pas encore réuni pour établir la liste des projets financés.

### Conclusion

Le comité a été impressionné par la qualité scientifique des dossiers présentés, notamment pour le Programme Jeunes Chercheurs. Les choix ont donc été difficiles. Le CSD a regretté par contre que certains dossiers, au demeurant excellents, présentent des budgets surdimensionnés. Le bouclage définitif des budgets des programmes Blanc et JCJC pour cette année ne se fera probablement que tardivement. Il est donc recommandé aux porteurs des projets qui se trouvent sur la liste supplémentaire de soumettre à nouveau lors du nouvel appel d'offres. Globalement, pour les appels, se référer au site de l'ANR [2], onglet « Appels à projets », chercher ensuite en « non thématique » pour trouver les informations liées aux programmes « Blanc », « JCJC », « international ». Un autre site à consulter est celui de « l'unité support » du CNRS, l'Usar [3].

### Références

- [1] P. Collet, F. James, J.-C. Saut, *Bilan du Comité Scientifique Disciplinaire Mathématiques et Interactions (CSD5) de l'ANR*, Gazette SMF **115** (2008), et MATAPLI **85** (2008)
- [2] <http://www.agence-nationale-recherche.fr/>
- [3] <http://www.sg.cnrs.fr/usar/>

## Prix « Ibni Oumar Mahamat Saleh »

---

Le 3 février 2008 notre collègue Ibni Oumar Mahamat Saleh disparaissait, enlevé à son domicile à N'Djamena par les forces armées tchadiennes. Il est, selon toute vraisemblance, mort en détention dans les jours suivants. Ibni Oumar Mahamat Saleh était professeur et ancien recteur de l'université de N'Djamena. Ancien ministre, il était l'une des figures majeures de l'opposition démocratique. Il était à l'origine d'accords inter-universitaires unissant le Tchad à la France, ainsi qu'à d'autres pays africains. Il souhaitait par ces accords contribuer à la qualité de la formation des enseignants de son pays.

La Société Française de Statistique, la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles et la Société Mathématique de France créent un prix en sa mémoire, pour que celle-ci reste vivante, et afin de poursuivre son engagement pour une formation de qualité des jeunes mathématiciens africains.

Le prix « Ibni Oumar Mahamat Saleh » sera décerné annuellement. Il permettra à un étudiant d'un établissement d'Afrique Centrale ou d'Afrique de l'Ouest<sup>1</sup>, en mathématique ou statistique, en master ou en thèse, de faire un séjour scientifique dans un pays autre que le sien. Tous les pays seront éligibles comme pays d'accueil. Le stage aura en général une durée de trois mois. Il sera effectué dans un laboratoire de mathématiques dont l'équipement permette un stage dans des conditions satisfaisantes, sous la conduite d'un encadrant désigné dans ce laboratoire. Il sera souhaitable qu'il y ait un co-encadrant du pays de l'étudiant. L'organisation matérielle du stage de l'étudiant sera gérée par l'administration du laboratoire d'accueil.

Le prix fera l'objet d'un appel d'offres annuel, le premier étant lancé à compter du 1<sup>er</sup> octobre 2009. Chaque candidat devra présenter un projet de recherche, avec une proposition d'accueil dans un laboratoire. Le choix du récipiendaire sera effectué par un comité scientifique mis en place par le CIMPA.

Une souscription sera lancée le 1<sup>er</sup> octobre 2009 pour assurer le financement du prix.

- Lancement de la souscription le 1<sup>er</sup> octobre 2009.
- Premier appel à candidatures le 1<sup>er</sup> octobre 2009, avec date limite le 15 novembre.
- Choix du premier récipiendaire avant le 31 décembre 2009.

Des informations complémentaires sont disponibles sur le site :  
<http://smf.emath.fr/PetitionSaleh/>

Contacts : Aline Bonami, Alain Godinot, Marie-Françoise Roy

---

<sup>1</sup> Plus précisément : Burundi, Bénin, Burkina Faso, Cap-Vert, Cameroun, Côte d'Ivoire, Gabon, Gambie, Ghana, Guinée, Guinée-Bissau, Guinée équatoriale, Libéria, Mali, Mauritanie, Niger, Nigeria, République centrafricaine, République du Congo, République démocratique du Congo, Rwanda, Sénégal, Sao Tomé-et-Principe, Sierra Leone, Tchad, Togo.





Mémoire 113  
**Groupes de Chow-Witt**

J. Fasel

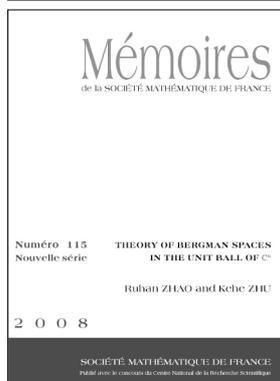
prix public\* : 47 € - prix membre\* : 33 €  
\* frais de port non compris



Mémoire 114  
**Measured Quantum  
Groupoids in Action**

M. Enock

prix public\* : 37 € - prix membre\* : 26 €  
\* frais de port non compris



Mémoire 115  
**Theory of Bergman Spaces  
in the Unit Ball of  $C^n$**

R. Zhao, K. Zhu

prix public\* : 28 € - prix membre\* : 20 €  
\* frais de port non compris



Institut Henri Poincaré  
11 rue Pierre et Marie Curie  
F - 75231 PARIS CEDEX 05

<http://smf.emath.fr>

# LIVRES

---

---

## **Algebraic Geometry and Arithmetic Curves**

QING LIU

Oxford University Press, 2006 (2<sup>e</sup> édition). 600 p. ISBN : 978-0199-2024-92. \$85

---

Les quelque 600 pages de cet ouvrage sont une introduction à la géométrie algébrique avec en ligne de mire la théorie des surfaces arithmétiques et notamment le théorème de réduction semi-stable. Le point de vue adopté est résolument celui des schémas, introduits par Grothendieck il y a plus de 50 ans. Au contraire des textes classiques de Hartshorne ou Mumford, l'auteur n'a pas souhaité faire la transition depuis l'ancienne théorie des variétés, promouvant implicitement l'idée que la géométrie algébrique est la théorie des schémas. Quoiqu'ardu, ce présupposé s'avère d'autant plus nécessaire lorsque l'on vise des applications à la géométrie arithmétique dont le théorème de réduction semi-stable de Deligne-Mumford est certainement l'une des pierres angulaires.

Le premier quart du livre fonde la théorie : définition des schémas, dimension, morphismes, propriétés locales (platitude, régularité, lissité) et globales (propreté). Précédé d'un chapitre de « rappels » d'algèbre commutative, quasiment tout ce qui est affirmé y est démontré en détail et devrait être accessible à un (bon) étudiant de master. Ces quatre premiers chapitres se closent par une démonstration élémentaire (non cohomologique) de quelques incarnations du *Main theorem* de Zariski.

Le quart suivant est plus technique. Il débute (chapitre 5) par l'introduction des faisceaux cohérents et leur cohomologie de Čech. L'auteur renvoie à plusieurs reprises à l'article fondateur *Faisceaux algébriques cohérents* de Serre. Je regrette un peu le caractère incomplet qui en résulte : l'assertion (p. 185) que la cohomologie de Čech se prête à des calculs explicites est étayée par une référence au calcul (p. 195) de la cohomologie du faisceau  $\mathcal{O}(n)$  sur l'espace projectif où ce calcul est ou bien relégué en exercice, ou bien jugé trop technique pour être présenté. En outre, dans cette approche, l'algèbre homologique « grothendieckienne » est un peu laissée pour compte.

Le chapitre 6 définit les différentielles de Kähler et aborde l'étude de quelques classes de morphismes (lisses, l.c.i). Il se termine par une introduction à la dualité en théorie des faisceaux cohérents en se limitant au cas  $f_* / R^r f_*$ ,  $r$  étant un entier majorant la dimension des fibres d'un morphisme propre  $f : X \rightarrow Y$  de schémas noéthériens. Le lien entre dualisant et formes différentielles relatives est énoncé mais non démontré (le cas particulier des intersections complètes de l'espace projectif fait l'objet d'un exercice).

Le chapitre suivant débute par les premières propriétés des diviseurs de Cartier et de Weil sur un schéma. Ces considérations sont appliquées au théorème de Riemann-Roch sur une courbe algébrique et à ses conséquences sur la géométrie des courbes algébriques. Il se conclut par une étude assez détaillée du groupe de Picard d'une courbe singulière comparé à celui de sa normalisée.

Les trois derniers chapitres de ce livre en occupent près de la moitié des pages et exposent des résultats nettement plus avancés.

Les chapitres 8 et 9 sont consacrés aux surfaces, c'est-à-dire aux schémas de dimension 2. Parmi celles-ci figurent bien sûr les surfaces sur un corps, mais aussi, et c'est l'un des intérêts de ce livre, les « surfaces arithmétiques » qui sont fibrées sur un schéma de Dedekind. Liu en présente d'abord leur géométrie birationnelle (éclatements, désingularisation, existence de contraction ; la notion de schéma excellent est introduite), puis se concentre sur les surfaces régulières fibrées sur un anneau de Dedekind (forme d'intersection, contractions, modèles minimaux).

Le dernier chapitre explique le théorème de réduction semi-stable de Deligne et Mumford. Soit  $X$  une courbe projective lisse sur le corps  $K$  des fractions d'un anneau de valuation discrète  $R$  (analogue arithmétique d'un disque époiné) ; un modèle de  $X$  sur  $R$  est une surface, disons régulière,  $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } R$  (l'analogie d'un prolongement au-dessus du disque tout entier) ; on dit qu'il est semi-stable si la fibre spéciale  $\mathcal{X}_s$  (l'analogie de la fibre centrale) est un diviseur à croisements normaux dont toutes les composantes ont multiplicité 1 (plus une condition combinatoire sur les composantes qui sont des courbes rationnelles). Le théorème de réduction semi-stable affirme l'existence de tels modèles, quitte à effectuer une extension finie de  $K$  (l'analogie d'un revêtement ramifié du disque).

Liu expose d'abord la démonstration dans le cas relativement élémentaire où le corps résiduel est de caractéristique 0 – un calcul explicite prouve que le revêtement ramifié de degré égal au ppcm des multiplicités des composantes de la fibre spéciale convient.

Le cas général est bien plus délicat et Liu donne les grandes lignes de la preuve d'Artin et Winters qui repose sur la comparaison des groupes de Picard de  $X$ , du modèle  $\mathcal{X}$  et de la fibre spéciale  $\mathcal{X}_s$ . Il s'avère que pour tout nombre premier assez grand  $\ell$ ,  $\text{Pic}(\mathcal{X}_s)[\ell]$  s'identifie à un sous-groupe de  $\text{Pic}(X)[\ell]$ , le quotient étant un  $\mathbf{Z}/\ell$ -vectoriel de dimension majorée par le nombre de Betti d'un graphe construit à l'aide de la combinatoire de la fibre spéciale. On en déduit alors que le *rang unipotent* du groupe  $\text{Pic}(\mathcal{X}_s)$  est nul puis que  $\mathcal{X}$  est semi-stable pour peu que  $\text{Pic}(X)[\ell]$  soit d'ordre  $\ell^{2g}$ ,  $g$  étant le genre de  $X$ .

Même si les arguments combinatoires qui conduisent à cette majoration (élémentaires mais très délicats) ne sont qu'esquissés dans ce livre, c'est à ma connaissance la seule présentation détaillée de ce théorème dans une monographie. Le chapitre se termine par quelques exemples de constructions de modèles semi-stables, essentiellement sans démonstration.

Chaque chapitre est accompagné de très nombreux exercices, mais dont certains, suivant l'exemple de Hartshorne, sont utilisés dans le corps du texte. Ils me semblent cependant plus accessibles que ceux de ce dernier livre et sont en tout cas plus détaillés.

En conclusion, Qing Liu a réussi dans ce livre un double tour de force : proposer d'une part une introduction accessible, moderne et autonome, aux rudiments de la géométrie algébrique des schémas, et d'autre part une présentation détaillée d'un théorème fondamental de la géométrie arithmétique contemporaine. Belle réussite !

Antoine Chambert-Loir,  
Université Rennes I

---

**Integer Points in Polyhedra**

ALEXANDER BARVINOK

European Mathematical Society, 2008. 199 p. ISBN : 978-3-03719-052-4. 34 €

---

L'ouvrage d'Alexander Barvinok reprend le cours qu'il a donné à l'ETH de Zürich et à l'université de Michigan dont il est professeur. Barvinok est l'un des meilleurs spécialistes mondiaux de la combinatoire et de l'algorithmique des polyèdres entiers.

L'objet de ce fascicule est l'analogie discret de la théorie des polyèdres de l'espace euclidien. Étant donné un réseau – pour simplifier le réseau entier de l'espace euclidien – on considère les polyèdres et les polytopes (polyèdres compacts) dont les sommets appartiennent au réseau.

La question principale qui est l'objet de l'étude combinatoire discrète des polytopes est le calcul aussi explicite que possible du volume et de son analogue discret, le nombre de points du réseau appartenant au polytope.

L'auteur commence par l'étude géométrique des polytopes : faces, décomposition en polyèdres entiers plus simples, cônes tangents, dualité...

Puis il introduit l'algèbre des polyèdres qui permet de faire correspondre aux propriétés géométriques étudiées des interprétations algébriques. Par exemple un rôle important dans l'étude algébrique est donné à la notion de valuation qui s'interprète comme fonction sur l'algèbre des fonctions caractéristiques des polytopes. La construction permet par exemple d'étendre la notion de volume des polytopes au cas de polyèdres non bornés. Dans une seconde partie, Barvinok expose l'essentiel de la théorie des réseaux et les théorèmes fondamentaux de la géométrie des nombres, selon Minkowski un pur joyau des mathématiques, et l'algorithme de réduction des bases dû à Lenstra et Lovasz.

Enfin Barvinok développe l'étude du nombre de points entiers dans un polytope à sommets entiers en introduisant le polynôme d'Ehrhart (qui compte le nombre de points dans les dilatés du polytope), démontre le théorème de Brion-Lawrence qui donne un sens précis à la décomposition d'un polytope en somme de cônes dans l'algèbre polyédrale et étudie des cas particuliers intéressants (comme le cas des polytopes totalement unimodulaires).

Parmi les développements récents prometteurs on signalera l'introduction de méthodes probabilistes – une fois de plus – pour calculer des approximations du nombre de points entiers dans un polytope, ou son volume, en particulier dans le cas de grandes dimensions (A. Barvinok, J. Artigan, ArXiv Mathematics, juillet 2009).

Le sujet est particulièrement adapté pour un cours de niveau assez élémentaire introductif à la géométrie entière et ouvre vers de multiples développements. C'est aussi une nouvelle preuve de la fragilité de la division mathématiques pures, mathématiques appliquées.

Jean-Michel Kantor,  
Institut Mathématique de Jussieu  
Université Paris-Diderot

---

**The Monster group and Majorana involutions**

A. A. IVANOV

Cambridge University Press, 2009. 252 p. ISBN : 978-0-521-88994-0. \$90

---

Les groupes finis simples sont les objets de base en théorie des groupes finis un peu comme les nombres premiers en théorie des nombres. Le projet gigantesque de la classification des groupes finis simples, achevé en 1980, montre qu'ils se regroupent en familles plus ou moins comprises mis à part 26 d'entre eux que l'on appelle les groupes sporadiques. La cardinalité de ces derniers varie entre 7920 (groupe de Mathieu  $M_{11}$  découvert en 1860) et  $\sim 10^{54}$  (le groupe de Fischer-Griess, appelé aussi le Monstre). Ce dernier joue un rôle particulier puisque tous les groupes sporadiques (exceptés 6) se retrouvent dans celui-ci. L'existence du Monstre a été conjecturée indépendamment par B. Fischer et R. Griess en 1973. Diverses conjectures sur sa structure ont permis de calculer sa gigantesque table des caractères (194 caractères irréductibles) avant même de prouver son existence. En 1979, J. Thompson montre l'« unicité » du Monstre et en 1980, R. Griess démontre par un tour de force son existence. Le fait que le Monstre n'ait pas de représentation matricielle de dimension inférieure à 196883 rend son étude difficile. Il a suscité beaucoup d'intérêt depuis sa découverte notamment pour ses liens avec les formes modulaires, les algèbres de Kac-Moody et les TQFT (*topological quantum field theory*). Enfin rappelons que R. Borcherds a été récompensé par la médaille Fields pour ses travaux sur le Monstre et les algèbres de Kac-Moody.

En dépit de l'intérêt qu'on peut avoir pour ce groupe depuis presque quarante ans, ce livre est sans doute un des premiers ouvrages qui contienne une construction rigoureuse et une preuve de son unicité. Ici l'auteur définit le Monstre comme la *complétion universelle* de ce qu'il appelle un *amalgame monstrueux*. Un amalgame de rang  $n$  est la donnée d'un ensemble fini  $H$  et de sous-ensembles  $G_1, \dots, G_n$  munis de structures de groupe  $*_1, \dots, *_n$  tels que  $H = \bigcup_i G_i$  et  $*_i, *_j$  soient compatibles sur  $G_i \cap G_j$ . Une complétion de l'amalgame  $\mathcal{A} = \{G_1, \dots, G_n\}$  est une application  $\varphi$  de  $H$  dans un groupe  $G$  dont l'image engendre  $G$  et qui restreinte à  $G_i$  soit un homomorphisme de groupe. Nous avons alors la notion de complétion universelle  $U(\mathcal{A})$  et  $\mathcal{A}$  admet une complétion injective si et seulement si  $H \rightarrow U(\mathcal{A})$  est injective. Un amalgame monstrueux est un certain amalgame  $\mathcal{M} = \{G_1, G_2, G_3\}$  qui vérifie entre autres les propriétés suivantes. Si  $Q_i$  est la notation pour le plus grand 2-sous-groupe normal de  $G_i$  et si  $G_{ij} := G_i \cap G_j$ , alors  $Q_1$  est un groupe extraspécial d'ordre  $2^{25}$ , le quotient  $G_1/Q_1$  est le groupe fini simple de Conway  $Co_1$  (qui s'obtient comme quotient par  $Z_2$  du groupe d'automorphismes du réseau de Leech  $\Lambda$ ) tandis que  $G_2/Q_2 \simeq Sym_3 \times M_{24}$  où  $M_{24}$  est un groupe de Mathieu et  $G_3 = \langle G_{13}, G_{23} \rangle$ ,  $G_{13} = N_{G_1}(Z_3)$ ,  $G_{23} = N_{G_2}(Z_3)$  où  $Z_3$  est la pré-image d'un certain sous-groupe de  $\Lambda/2\Lambda$  par un certain homomorphisme  $\chi : Q_1 \rightarrow \Lambda/2\Lambda$  de noyau  $Z_1$  tel que l'isomorphisme  $Q_1/Z_1 \simeq \Lambda/2\Lambda$  soit  $Co_1$ -équivariant.

Dans le premier chapitre, l'auteur fait des rappels nécessaires qui lui permettront entre autres de construire un amalgame monstrueux et de démontrer qu'il n'en existe pas d'autre. En particulier, il fait des rappels sur le code de Golay  $C_{12}$ , son groupe d'automorphismes  $M_{24}$ , les modules de Todd  $C_{11}, C_{11}^*$ , les groupes extraspéciaux  $2_\epsilon^{1+2n}$  et leurs extensions, le réseau de Leech et le groupe de Conway  $Co_1$ . Il classe entre autres un certain type d'extensions du groupe extraspécial

$2_+^{1+22}$  par  $M_{24}$ .

Dans le deuxième chapitre, il donne la définition formelle d'un amalgame monstrueux puis en construit un explicitement. Il commence par regarder les possibilités pour  $G_1$  vérifiant les deux conditions  $G_1/Q_1 \simeq Co_1$  et  $Q_1 \simeq 2_+^{1+24}$  plus l'hypothèse sur  $\chi$ . Il obtient deux candidats possibles puis continue avec les autres groupes  $G_2, G_{12}, \dots$  de l'amalgame. La construction est laborieuse et prend une quarantaine de pages. De par sa construction qui consiste à analyser toutes les possibilités, il montre qu'il en existe un seul. À ce stade, le Monstre  $M$  est défini comme étant la complétion universelle de l'unique amalgame monstrueux.

Dans le troisième chapitre, il montre l'existence d'une complétion injective de l'amalgame monstrueux dans le groupe des automorphismes linéaires d'un espace vectoriel  $\Pi$  de dimension 196883. Pour cela il commence d'abord par construire une représentation injective  $\varphi$  de l'amalgame  $\{G_1, G_2\}$  dans  $GL(\Pi)$ . La construction se fait par induction en 6 étapes et conduit en fait à la plus petite représentation injective de  $\{G_1, G_2\}$ . La technique utilisée peut s'adapter à d'autres situations. Elle avait été utilisée par l'auteur précédemment pour construire une représentation de dimension 1333 d'un amalgame de rang 2 provenant du groupe de Janko  $J_4$ . Pour étendre cette représentation à  $\mathcal{M}$  tout entier il montre ensuite que  $G_3$  est isomorphe au sous-groupe de  $GL(\Pi)$  engendré par  $\varphi(G_{13})$  et  $\varphi(G_{23})$ , ce qui lui prend la moitié du chapitre. L'ensemble de ce chapitre est assez technique. Puisque maintenant nous savons que la complétion universelle est injective, nous pouvons identifier  $\mathcal{M}$  avec le sous-amalgame correspondant du Monstre  $M$  et les groupes  $G_1, G_2$  et  $G_3$  sont alors considérés comme des sous-groupes de  $M$ .

Le but du chapitre 5 est de mettre un produit commutatif  $\star$  (qui ne sera pas associatif) sur  $\Pi$  invariant par l'action du Monstre. Pour cela l'auteur a besoin d'enrichir l'amalgame  $\mathcal{M}$  en y ajoutant des sous-groupes de  $M$ . C'est ce qu'il fait dans le chapitre 4. Il étudie aussi la géométrie des classes à droite associée à un amalgame enrichi  $\{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\}$  où les éléments de type  $i$  sont les classes à droite de  $G_i$  et deux éléments de type  $i$  et  $j$  sont incidents si leur intersection est une classe de  $G_i \cap G_j$ .

Dans le sixième chapitre, il étudie le groupe d'automorphismes  $A$  de l'algèbre de Griess  $(\Pi, \star)$  définie dans le chapitre 5. Soit  $\psi : M \rightarrow GL(\Pi)$  l'homomorphisme déduit de la représentation de l'amalgame  $\mathcal{M}$  dans  $GL(\Pi)$ . Le principal résultat technique du chapitre est que le groupe  $\psi(G_1)$  coïncide avec le stabilisateur dans  $A$  de  $\psi(Z_1)$ . Cette identité est le point clé pour montrer la finitude et la simplicité de  $\psi(M)$  et donc que  $\psi(M)$  est le Monstre au sens de la définition classique, *i.e.*, que  $\psi(M)$  est un groupe non-abélien fini simple tel que le centralisateur d'une involution coïncide avec le groupe  $G_1$ .

Le chapitre 7 est dédié à l'étude de certains sous-groupes importants du Monstre.

Dans le chapitre 8, l'auteur axiomatise la notion d'involution de Majorana et de vecteur axial associé. Il montre que les involutions de type  $2A$  du Monstre agissant sur l'algèbre  $\Pi \oplus \Pi_1$ , où  $\Pi_1$  est un  $M$ -module trivial de dimension 1, sont des involutions de Majorana. En particulier, on peut décrire simplement leur action en termes des vecteurs axiaux correspondants. Les sous-algèbres engendrées par des paires de vecteurs axiaux (algèbres de Majorana) ont été calculées par S. Norton : il y a 9 types de classes d'isomorphismes, chaque type correspondant à une des 9 classes de conjugaison de  $M$  contenant un produit de deux involutions de type

2A. D'après l'auteur, le fait que le Monstre soit engendré par des involutions de Majorana devrait dominer les investigations futures.

Enfin dans le chapitre 9, l'auteur montre que  $\psi(M)$  est en fait isomorphe à la complétion universelle  $M$  de  $\mathcal{M}$ . Pour cela, il utilise le fait que la géométrie des classes associée avec le plongement de  $\mathcal{M}$  dans  $\psi(M)$  est simplement connexe.

À mon avis le livre s'adresse avant tout à des gens qui travaillent sur les groupes finis (étudiants en thèse ou spécialistes) : il contient des résultats qui n'étaient pas dans la littérature, ce qui intéressera les spécialistes, et il est suffisamment bien écrit et complet pour être lu par des étudiants en théorie des groupes finis.

Emmanuel Letellier,  
Université de Caen Basse-Normandie