SOMMAIRE DU N^o 121

Éditorial

Chers lecteurs,

Ce numéro accueille, comme de coutume, le rapport moral de la Société. De nombreux sujets d'actualité (réformes, création de l'INSMI...) y sont abordés, et la position adoptée et le rôle important joué par la SMF dans les transformations en cours du panorama des mathématiques françaises, de leur fonctionnement et de leur financement, y sont décrits. Le dynamisme de notre Société, dans tous les domaines qui sont de son ressort, bien au-delà des seuls aspects de politique scientifique, en ressort clairement et mérite d'être signalé.

Signalons aussi, au sommaire, un hommage rendu à Thierry Aubin par de très nombreux collègues et anciens élèves. Le comité de rédaction tient à remercier tout particulièrement le correspondant de la Gazette pour cette entreprise, Philippe Delanoë, ainsi que ses coéditeurs, qui ont assumé la coordination délicate d'une entreprise collective de cette ampleur, en réussissant à en concilier les ambitions avec nos contraintes éditoriales.

Bonne lecture à tous.

— Zindine Djadli, Frédéric Patras

SMF

Rapport moral

Affaires générales

Prises de position et actions de la SMF face aux réformes

La communauté scientifique est confrontée à de multiples réformes, et le rôle de la SMF doit être d'informer notre communauté, de s'enquérir de ses souhaits et de ses craintes, et de défendre notre discipline et les membres de notre communauté. Le nombre de réformes en cours est très élevé : on peut citer les suites de la loi LRU (décret sur le statut des enseignants-chercheurs, par exemple), les problèmes liés à la mise en place effective de cette loi, ou ceux liés à l'évaluation (par exemple attribution des PEDR[1] par les universités, ou encore redistribution de crédits ministériels pour la recherche entre les différents laboratoires). Citons aussi les réformes liées à l'enseignement (mastérisation des concours d'enseignants, réforme du lycée, nouveau programme de la classe de seconde), ou encore l'évolution du CNRS.

Chacun de ces sujets fait l'objet d'un dossier sur notre site, régulièrement mis à jour. Il est donc sans doute inutile de reprendre les détails de chacun d'entre eux. Nous allons donc plutôt décrire le mode de fonctionnement qui a été adopté par la SMF, afin d'être le plus réactif et le plus constructif possible sur tous ces fronts. Les réformes concernant spécifiquement l'enseignement sont par ailleurs développées dans la partie correspondante du rapport.

Une première constatation s'est rapidement imposée : le mode de mise en place de réformes, adopté dans d'autres domaines, consiste d'habitude à lancer d'abord une vaste concertation entre les partenaires, à prendre le temps de la discussion, à faire un audit des forces et faiblesses du système, et à étudier différents scénarios. Ce mode de fonctionnement n'a pas été adopté par nos tutelles. C'est-à-dire, pour reprendre un mot à la mode, un « Grenelle » de l'enseignement et de la recherche, qui aurait permis de prendre l'avis de la communauté des enseignants et chercheurs, n'a pas eu lieu. La loi LRU a été adoptée durant l'été 2007 sans concertation avec les société savantes ainsi que les autres dossiers. Il est difficile de réagir face à un tel mode de fonctionnement : nous n'avons connaissance à l'avance que de « ballons d'essais » ou de « fuites » plus ou moins orchestrées, ou de compte-rendus émanant par exemple de syndicats qui ont été conviés à la table des négociations. Dans chaque cas, si nous voulons quand même être entendus, nous devons réagir vite, et joindre nos forces avec d'autres sociétés savantes. Nos prises de position ne peuvent pas être improvisées, et votées à la hâte par le conseil de la SMF ; encore moins

[1] Primes d'encadrement doctoral et de recherche

être concertées entre plusieurs sociétés. La SMF a donc choisi de réfléchir sur des textes de fond, détaillés, qui couvrent l'ensemble des réformes (prévisibles), suite à une réflexion en profondeur. Ces textes font l'objet d'aller-retours entre plusieurs sociétés ; nous avons ainsi adopté plusieurs textes en commun avec la SFP[2] et la SCF[3], qui sont tous disponibles sur notre site web. Ils nous permettent ensuite de réagir avec rapidité lorsque cela s'avère nécessaire ; c'est ainsi que, toujours en commun avec la SFP et la SCF, nous avons pu remettre des textes plus courts, rapidement élaborés à partir de ces textes généraux :

– à la commission d'Aubert (février 2008) concernant les tutelles des établissements de recherche) ;

– à la commission Schwartz, concernant les carrières dans l'enseignement supérieur (mars 2008) ;

– à la commission Hoffman (mai 2008) concernant les carrières de chercheur ;

– à la commission Philip (octobre 2008) concernant le partenariat entre universités et grandes écoles.

De nombreux mathématiciens se sont émus de l'évolution du CNRS et du risque de son démantèlement suite à la création des instituts. Avec la SFP et la SCF, la SMF s'est exprimée clairement sur l'importance qu'elle attache au CNRS, et a rappelé le rôle primordial que celui-ci a joué depuis sa création pour le redressement de la science, rôle qu'il continue toujours à jouer. Sur la question plus spécifique de la mise en place de l'institut de mathématiques (INSMI[4]), les sociétés savantes de mathématiques se sont également exprimées en décembre 2008 dans un document où elles expriment quelles doivent être les missions du nouvel institut et son articulation avec l'ensemble du CNRS. Cette action a été menée en concertation avec les représentants des mathématiques au CNRS et au ministère, ainsi qu'avec l'ensemble des directeurs d'unités de mathématiques. Ces missions du nouvel institut sont d'autant plus importantes à préciser que les sources de financement venant directement du MESR[5] sont destinées à s'amoindrir, voire à disparaître. L'INSMI devra donc reprendre à son compte plusieurs activités qui n'étaient pas du ressort du CNRS auparavant. La question des « grands instruments » (IHP[6], CIRM[7], IHÉS[8]) et des bibliothèques est particulièrement importante. Nous sommes particulièrement inquiets, car ces questions ne sont toujours pas tranchées : on ne sait, de façon officielle, à l'heure où ce rapport est rédigé, ni quelles seront les missions de l'institut, ni quels seront son financement et son mode de fonctionnement, mais on connaît seulement le directeur, qui vient d'être nommé ; il s'agit de Guy Métivier, professeur à Bordeaux.

Concernant le décret sur le statut des enseignants-chercheurs, la SMF a, dans un premier temps, souhaité se joindre à l'ensemble des protestations émanant de la communauté scientifique, en lançant à ses adhérents un appel à signer la pétition lancée à la suite de la publication dans *le Monde* du mardi 6 janvier 2009 de l'article intitulé « Université : pas de normalisation par le bas », signé par treize

[2] Société Française de Physique
[3] Société Chimique de France
[4] INstitut des Sciences Mathématique et de leurs Interactions
[5] Ministère de l'Enseignement et de la Recherche
[6] Institut Henri Poincaré
[7] Centre International de Recherches Mathématiques
[8] Institut des Hautes Études Scientifiques

universitaires, dont notre collègue Jean-Pierre Demailly. Un texte plus spécifique émanant des sociétés savantes de mathématiques a été un moment envisagé, mais cette initiative n'a pas pu aboutir suite aux réserves émises par l'un des conseils d'administration de nos sociétés.

Ultérieurement, la SMF, la SFP et la SCF ont été reçues par Valérie Pécresse, puis par la médiatrice, Claire Bazy-Malaurie (chargée des modifications concernant le décret sur le statut des enseignants-chercheurs). Nous leur avons répété nos réserves sur la version du décret dont nous avions eu connaissance, notamment en ce qui concerne l'évaluation, et nous avons répété les demandes que nous avions déjà exprimées à la commission Schwartz. À l'heure où nous écrivons ces lignes, une grande confusion règne sur ce dossier, certaines formulations de la version finale du décret étant extrêmement ambiguës et prêtant à des interprétations divergentes.

Si les interactions que nous avons eues avec le MESR nous ont donné l'impression d'être écoutés (à défaut d'être toujours entendus) il n'en est pas de même lors de nos actions vers le Ministère de l'Éducation Nationale. Nos démarches concernant « la masterisation » (cf. partie « Enseignement » de ce rapport) n'y ont pas suscité la moindre réaction.

Nous devons assurer à nos prises de positions une publicité suffisante pour les faire connaître, et pour qu'elles soient prises en compte par nos tutelles. Il est donc nécessaire que les sociétés savantes expriment avec le plus de visibilité possible leur point de vue, afin qu'elles soient enfin reconnues comme interlocutrices à part entière par les responsables des ministères. Dans ce but, des actions largement fédératrices sont indispensables. Ainsi, à l'occasion de la réforme, dite de « masterisation des concours d'enseignants » (cf. la partie « Enseignement ») nous nous sommes rendu compte que nos analyses étaient similaires à celles de la CCL[9] qui rassemble les sociétés savantes de littérature. Nous avons donc décidé de lancer à l'ensemble des sociétés savantes un appel à signer une lettre ouverte au ministre de l'éducation nationale dans laquelle nous lui ferions part de ces analyses. Plusieurs sociétés savantes avaient déjà fait cette demande en vain. Le succès de cette lettre est allé au delà des sociétés savantes, puisque des associations de professeurs du secondaire se sont jointes à nous. Nous avons réitéré cette action après le communiqué des ministères daté du 31 mars, qui posait plus de problèmes qu'il n'en résolvait. Pour la première fois, une cinquantaine d'associations, représentatives de la quasi-totalité des disciplines académiques, ont entrepris une démarche commune. Cet épisode est emblématique du rôle que nos sociétés pourraient être amenées à jouer concernant les réformes : d'un côté, continuer chacune à mener en interne un travail de fond de réflexion, et de proposition, au sein de chaque conseil, en liaison avec l'ensemble de leurs adhérents ; puis se coordonner en dépassant tous les clivages disciplinaires, quand la convergence de leurs analyses et l'importance des enjeux l'exigent.

Adhérents

Le nombre de nos adhérents est actuellement d'un peu plus de 2000. La SMF doit poursuivre son effort pour que ce nombre augmente, afin que nous puissions être le plus représentatif possible de la communauté des mathématiciens français. Plusieurs pistes sont à poursuivre : accroître la visibilité de la SMF auprès des jeunes

[9] Coordination Concours Lettre

mathématiciens, afin que cela devienne pour eux une chose normale, voire automatique, de devenir membre. Faire connaître nos différentes actions, notamment auprès de communautés où nous sommes peu représentés, comme celles des enseignants de mathématiques en lycée, par exemple. Afin que de telles actions soient couronnées de succès, il importe de veiller à ce que nos initiatives ne soient pas exclusivement en direction d'une communauté trop restreinte. À titre de comparaison, il est intéressant de noter que, dans certains pays (comme le Portugal), toute la communauté mathématique appartient à la société nationale correspondante, ce qui lui permet d'être un partenaire absolument incontournable, par exemple lors des négociations autour de réformes, ce qui est loin d'être le cas chez nous.

Le montant de la cotisation SMF est stable à 67 Euros. La SMF est une association loi 1901 reconnue d'utilité publique et elle peut recevoir des dons déductibles des impôts sur le revenu, à hauteur de 66%. Nous avons étudié si les lois en vigueur permettent de déduire la cotisation : après une étude précise des textes et l'avis d'un conseiller juridique, nous préférons ne pas délivrer de reçu fiscal permettant la déductibilité des impôts pour la cotisation.

En revanche, nous allons créer une cotisation « Membre bienfaiteur » de 150 Euros dont 83 Euros seront déductibles au titre de don.

Correspondants SMF

Le renouvellement progressif des correspondants SMF se poursuit, notre but étant d'arriver à un correspondant dans chaque établissement, et qu'ils soient tous réactifs. Deux enquêtes ont été menées auprès de ceux-ci ; l'une à propos de la mastérisation, et la seconde, toujours en cours, à propos de la bibliométrie. Le taux de réponses a été assez satisfaisant, compte tenu des délais plutôt courts :

- approximativement 80% de réponses pour l'enquête sur les dossiers de mastérisation
- approximativement 60% de réponses (à ce jour) pour l'enquête sur la bibliométrie.

Coopération entre sociétés de mathématiques européennes

Le premier week-end réunissant les présidents de sociétés savantes au CIRM (mai 2008) ayant été un succès, un second week-end du même type a eu lieu en mai 2009 à Varsovie, hébergé par le Banach Center. Stéphane Jaffard avait demandé que les questions des réformes, et de l'évaluation des chercheurs et enseignants-chercheurs soient à l'ordre du jour. Cela a permis de comparer les pratiques au niveau européen, et de constater de grandes différences, et de ce fait, l'hétérogénéité des stratégies adoptées par les mathématiciens dans chaque pays. Ainsi, là où les outils bibliométriques sont devenus incontournables pour l'évaluation, les revendications des mathématiciens sont seulement de demander à ce qu'il soient adaptés à chaque discipline ; certains ont obtenu une « exception » pour les mathématiques ; d'autres enfin arrivent à maintenir une ligne ferme tenant à l'évaluation par les pairs dans chaque discipline. Le constat général est quand même d'un accroissement global des outils bibliométriques dans l'évaluation, et de conséquences négatives pour le financement de notre discipline. Ainsi, le financement gouvernemental des mathématiques en Grande-Bretagne a été divisé par deux en cinq ans. Le cadre fourni par l'EMS peut fournir un outil de lobbying efficace au niveau des instances européennes pour défendre notre discipline. De plus, l'EMS peut écrire une lettre de soutien lorsque les mathématiques subissent une attaque spécifique dans un pays. Ce mode d'intervention a plusieurs fois prouvé son efficacité. Il a été aussi fortement question des financements européens : les bourses « ERC[10] » pourraient devenir à terme une sorte de NSF[11] au niveau européen. Aussi est-il important d'inciter dès maintenant les mathématiciens français à postuler à ces sources de financement, et pour cela, il faut développer une aide pour monter les dossiers, et ensuite, gérer le financement obtenu. Il est important de noter que des pays qui ont une politique d'aide à la constitution des dossiers ERC, comme les Pays-Bas, ont de ce fait un taux de réussite bien meilleur.

Les mathématiques françaises dans le monde

Voici quelques-unes des reconnaissances internationales reçues par des mathématiciens français, ou exerçant en France. L'été dernier, nous avons été heureux d'apprendre que, parmi les dix récipiendaires des prix de l'EMS attribués à de jeunes mathématiciens durant le congrès européen, trois étaient français, ou travaillent en France : Arthur Avila, Cédric Villani et Laure Saint-Raymond, et le prix Klein (mathématiques à applications industrielles) a été attribué à Josselin Garnier. Puis à l'automne, le prix Wolf a été attribué à Pierre Deligne. En janvier 2009 Laure Saint-Raymond (École Normale Supérieure), a reçu le prix Ruth Lyttle Satter de l'AMS. Ce prix décerné tous les deux ans, récompense une contribution exceptionnelle d'une mathématicienne. Il a été attribué pour ses travaux fondamentaux concernant les limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann en théorie cinétique des gaz. Le prix Clay 2009 a été attribué à Jean-Loup Waldspurger (Institut de Mathématiques de Jussieu) pour ses travaux en analyse harmonique p-adique. Enfin, le prix Abel a été remis à Michael Gromov. Les mathématiques françaises sont donc très souvent à l'honneur au plus haut niveau. Cela ne doit pas nous empêcher de continuer à nous interroger sur la façon de maintenir cette qualité, d'autant plus que certains indicateurs sont inquiétants : tout d'abord, la place tenue par la France dans les ERC[12] européennes qui sont attribuées (elle n'est que 8^{e}, une fois le résultat rapporté à la taille de la population). Même si des biais peuvent expliquer ce faible score, les chiffres publiés par l'OST[13] indiquent un recul persistant des mathématiques françaises depuis 2001, ces indicateurs doivent nous faire nous interroger, et les sociétés savantes, en collaboration avec le nouvel institut de mathématiques, peuvent aider à améliorer cette situation.

Participation au CNFM[14]

Le CNFM est un organisme qui réunit des repésentants de l'Académie, du CNRS, de la SMF et de la SMAI[15].

L'une des fonctions importantes du CNFM est d'utiliser des crédits venant du MAE[16] pour différentes actions internationales (participation à l'UMI[17], à

[10] European Research Council
[11] National Science Fundation
[12] Contrats de Recherche Européens
[13] Observatoire des Sciences et Techniques
[14] Comité National Français de Mathématiciens
[15] Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles
[16] Ministère des Affaires Étrangères
[17] Union Mathématique Internationale

l'ICM[18],... l'un des principaux soucis du CNFM dans les mois à venir va être le risque de désengagement du MAE concernant les actions scientifiques. Il est encore trop tôt pour dire si ce désengagement probable va affecter les crédits gérés par le CNFM, dans quelles proportions, et, si tel est le cas, s'il sera du ressort du nouvel institut de mathématiques de prendre la relève. De plus, le rôle du CNFM va être particulièrement important dans l'année 2009-2010, en raison du congrès international des mathématiques, qui se tiendra à Hyderabad (Inde) en 2010.

Activités grand public

Cycle de conférences « Un texte, un mathématicien » à la BnF [19]

Pour la cinquième année consécutive, la SMF organise avec Animath et la BnF un cycle de quatre conférences annuelles intitulé « Un texte un mathématicien » et qui se déroule dans le grand auditorium de la Bibliothèque nationale de France (site François Mitterrand). De grands mathématiciens d'aujourd'hui viennent évoquer pendant une heure et demi un texte, une lettre, un article d'un mathématicien célèbre, qui les aura marqués voire qui aura joué un rôle important dans leur carrière de chercheur. Martin Andler pilote l'opération et il est secondé par François Germinet. Deux partenaires de presse accompagnent ce cycle depuis le début, il s'agit de *France Culture*, où le conférencier enregistre une émission, et du magazine *Tangente* qui publie une version écrite et grand public de la conférence. Nouveauté 2009, le magazine *La Recherche* nous a rejoints et consacre un article au thème des conférences, avec un œil plus historique. Ces conférences sont par ailleurs annoncées dans le journal *Le Monde* dans la rubrique tenue par Elisabeth Busser et Gilles Cohen.

Cette année, Ivar Ekeland a donné la première conférence, le 21 janvier 2009, consacrée à John Nash, ses idées et son parcours singulier. L'orateur a présenté les notions d'équilibre introduites par John Nash et qui ont ouvert de nouvelles perspectives en économie, jusqu'au prix Nobel d'économie attribué à ce dernier en 1990. Le 11 février 2009, Viviane Baladi a fait découvrir le parcours de Steven Smale, lauréat de la médaille Fields en 1966. Viviane Baladi est revenue sur les idées de Steven Smale contenues dans son article-programme « Differentiable dynamical systems » de 1967, idées élaborées en partie sur les plages de Rio de Janeiro (notamment son « fer à cheval ») et qui jouent depuis lors un rôle décisif dans la théorie géométrique des équations différentielles (systèmes dynamiques). Le 18 mars 2009, Patrick Dehornoy s'est appuyé sur un article de 1874 de Georg Cantor pour faire découvrir au public des travaux qui ont révolutionné la théorie des ensembles et le problème du continu. Enfin le 8 avril 2009, Jean-Pierre Ramis est remonté à Leonhard Euler et à son article de 1746 sur les séries divergentes. Donner un sens à ce qui n'en a pas : l'orateur est revenu sur cette démarche permanente des mathématiciens, sur les avancées d'Euler et sur son héritage qui mène aux plus récentes recherches en mathématiques et en physique.

À nouveau le succès était au rendez-vous, avec plus de 250 personnes à chaque conférence, remplissant le grand auditorium de la BnF, et un pic de fréquentation pour la conférence de mars sur Cantor, conjonction d'un thème et d'une période propices : grand et petit auditorium étaient pleins ! Comme chaque année la SMF

[18] International Congress of Mathematicians
[19] Bibliothèque nationale de France

et Animath, avec les inspecteurs de mathématiques des trois académies de l'Île-de-France, organisent la venue de nombreuses classes de lycées à ces conférences. La plupart de ces classes bénéficient en outre d'une conférence préparatoire, dans leur établissement, par un enseignant-chercheur volontaire. Les élèves ont également la possibilité d'effectuer juste avant la conférence une visite du site de la BnF ou bien de l'exposition temporaire en cours. Ainsi environ 400 lycéens ont pu participer à ce cycle de conférences en 2009.

Cycle de conférences « Une question, un chercheur » à l'IHP

La SMF et sa consœur la SFP, en collaboration avec l'IHP et l'UPS[20], ont décidé de créer un nouveau cycle de conférences, dans la lignée du cycle « Un texte, un Mathématicien ». Le cycle s'intitule « Une question, un chercheur », il se déroule à l'IHP, à destination des élèves du premier cycle du supérieur (université et classes préparatoires). Les conférences se veulent didactiques et mettant en lumière le métier de chercheur. Deux conférences ont eu lieu cette année, la première par un mathématicien : Wendelin Werner, qui a raconté son parcours et ses mathématiques le 7 novembre 2008 dans une conférence intitulée : « Comment devient-on probabiliste ? » ; la seconde par un physicien, Alain Aspect, qui a parlé le 6 mars 2009 de « L'étrangeté quantique mise en lumière ». Ces deux conférences ont eu un grand succès (les deux amphithéâtres de l'IHP étaient pleins) et le cycle sera renouvelé en 2009/2010.

Participation à des salons

La SMF continue d'être présente sur divers salons dont les enjeux sont liés à la connaissance, la recherche et la diffusion de celle-ci. La SMF était notamment présente au salon de l'éducation, en novembre 2008, où les sociétés de mathématiques étaient accueillies sur le stand de l'ONISEP. Ce salon nous permet de renseigner de nombreux étudiants sur les métiers des mathématiques. De plus, il permet de donner une visibilité accrue à nos sociétés auprès du grand public : ainsi cette année, notre collègue Michel Paugam, qui représentait la SMF, a été interwievé par la chaîne « Comprendre » (projet de télévision scientifique publique sur la TNT et sur le Web).

Comme chaque année la SMF prendra une part active au Salon des Jeux Mathématiques, place Saint-Sulpice à Paris, où elle partagera un stand avec les autres sociétés de mathématiques.

Un événement d'une ampleur particulière a eu lieu cette année : le salon « Ville Européenne des Sciences » qui s'est tenu du 14 au 16 novembre, au Grand Palais, où l'ensemble des associations de mathématiques ont partagé un stand, sous la coordination du CIJM[21]. Cet événement était l'une des activités phares lancées par le MSER dans le cadre de la présidence française de l'union européenne. Des professionnels des mathématiques sont venus à la rencontre des jeunes pour leur montrer l'intérêt des filières mathématiques et scientifiques et parler de leurs métiers. Les nombreuses rencontres avec le public ont connu un grand succès : « Nage de micro-organismes » par François Alouges, « Images fractales » de Jean-François Colonna, présentation du film « Dimension » de Patrick Popescu-Pampu, « Diffusion de la

[20] Union des Professeurs de Spéciales
[21] Comité International de Jeu Mathématique

culture mathématique » par Gilles Cohen, « Les maths à quoi ça sert ? » par Martin Andler, « L'enseignement des mathématiques » par Pierre Arnoux. François Tisseyre a présenté plusieurs de ses films, « Mathématique et architecture » par Gérard Chamayou, « Modélisation mathématique de mouvements de foules » par Bertrand Maury, « Particules en interaction » par Aline Lefebvre, et « Culture et Jeux Mathématiques » par Marie-José Pestel. Ce salon a reçu de très nombreux visiteurs. Notre stand, en particulier, a reçu la visite de nombreuses classes de collège et de lycée.

Publications

État des publications

La situation des publications est assez bonne. Nous avons, après maints efforts, essentiellement résorbé le retard dû aux difficultés rencontrées dans les années 2006-2007. L'ensemble des revues et séries a retrouvé un équilibre. Il subsiste cependant un décalage pour la série *Séminaires et Congrès* dont nous espérons un retour complet à la normale en septembre. L'impératif de qualité, de service aux auteurs reste une priorité à laquelle continuent de veiller les comités éditoriaux, le secrétariat des publications et le directeur des publications. Le flux des articles ou ouvrages soumis est stable avec une augmentation pour *Astérisque* et les *Mémoires* de la SMF. La subvention CNRS globale a été reconduite en 2008. Nous restons dans l'expectative pour cette année.

Faits à signaler pour 2008

– Nous avons testé trois prestataires extérieurs pour la composition et en avons retenu deux. Nous avons prévu de faire un essai avec un autre atelier dans le mois qui vient. Cependant et comme déjà écrit l'an passé il n'est pas encore tout à fait évident mais il est fort plausible que la meilleure solution à moyen terme soit un compromis entre une production totalement « externalisée » et une production entièrement maison, avec un recrutement d'un salarié qui y consacrerait une partie de son temps. Les raisons qui avaient présidé au recrutement d'un salarié (qui ne fait plus partie du personnel) sont toujours présentes (aide à la composition, compétences fines en édition électronique, veille technologique, rapidité d'adaptation aux mutations dans l'édition).

Les coûts globaux de traitement des manuscrits n'ont pas augmenté et ce en dépit de la composition des *Annales de l'ENS* (six fascicules par an représentant 1057 pages pour 2008) et la reprise de quelques manuscrits (notamment ceux de la série *Séminaires et Congrès*) pris dans la tourmente des difficultés structurelles antérieures.

– L'un de nos imprimeurs dont les devis défient la concurrence (même étrangère) a connu quelques difficultés qui ont ralenti certaines parutions. Il vient de nous confirmer que ces difficultés étaient résorbées. Nous continuons de prospecter en France et en Belgique, ne souhaitant pas bien sûr pas être trop dépendants de nos deux imprimeurs actuels, ou pire d'un seul d'entre eux.

– Nous avons constaté une augmentation significative des frais de routage qui pouvaient dépasser les frais de fabrication bruts. Après une étude de notre cellule marseillaise, il a été décidé de retirer le routage aux imprimeurs et d'en charger la Maison de la SMF. Les tests et les résultats sont d'ores et déjà concluants. Nous dresserons le bilan financier à la fin de l'année. L'économie réalisée devrait être supérieure à 20 000 Euros.

– Une restructuration positive a d'ailleurs eu lieu entre le secrétariat des publications et la cellule de diffusion de Marseille permettant de garder un esprit d'équipe et de gagner en productivité. Ce travail continue : il serait bon que la cellule de diffusion de Marseille qui gère plus des deux tiers du flux (abonnements et ventes au numéro) dispose des outils nécessaires à la gestion directe de ces clients sans passer par Paris. Nous y gagnerions en temps et en efficacité.

– Le fonctionnement avec le secrétariat des *Annales de l'ENS* est maintenant bien en place. Les trois premiers fascicules de 2009 sont parus, le fascicule 4 est en composition.

– Nous avons conclu un accord avec la Société Française de Statistique pour la publication de la revue *JSFdS* (Journal de la Société Française de Statistique) qui est issu de la fusion du Journal de la Société Française de Statistique et de la Revue de Statistique Appliquée (RSA). Afin de concourir à la visibilité internationale des activités de la société, c'est devenu une revue électronique en accès libre au 1er janvier 2009. Nous avons mis en ligne les archives 2007 et 2008 (`http://smf.emath.fr/Publications/JSFdS/`). Nous travaillons à la mise en place de leur format. Les archives antérieures seront numérisées par NUMDAM.

– Nous lançons une nouvelle collection intitulée *Collection T*, destinée à un lectorat plus large que celui de nos publications actuelles et qui comprendra des biographies de mathématiciens (avec des mathématiques bien sûr), des ouvrages de mathématiques plus « grand public », etc. Le premier volume devrait paraître cette année. D'autres projets sont en cours.

Perspectives

– Nous poursuivons notre réflexion sur la création d'une nouvelle revue francophone s'adressant à un large public, notamment d'enseignants de mathématiques. En particulier il est clair que cette revue ne se situera ni sur le créneau de la *Revue de la Filière Mathématique* (RMS), ni sur celui du nouveau site CNRS *Images des Mathématiques*. Des contacts fructueux ont déjà été pris, mais il est clair que le lancement prendra tout le temps nécessaire.

– La mise en place du micro-paiement (*pay per view*) n'a toujours pas eu lieu. Mais elle devrait finir par s'imposer. L'une des difficultés est de proposer un « juste prix » (les prix des articles individuels demandés par les éditeurs commerciaux sont anormalement élevés, il convient néanmoins qu'acheter tous les articles électroniques d'un fascicule ne revienne pas moins cher qu'acheter le fascicule).

– Une réflexion est menée sur le serveur de la SMF et notamment la présentation des publications : jusqu'à présent, le secrétariat ou le directeur des publications ne peuvent que très peu intervenir et dépendent donc de tierces personnes. Un objectif de simplification est à l'ordre du jour.

– L'objectif d'autonomie du secteur des publications au sein de la SMF y compris dans la présentation comptable, évoqué à plusieurs reprises et approuvé, reste un objectif auquel nous tenons.

La Gazette des mathématiciens

Depuis 2007, plusieurs chantiers ont été lancés par le Comité de Rédaction, en lien direct avec Stéphane Jaffard :

– ouverture du Comité de Rédaction, et par suite de la *Gazette*, aux enseignants de classes préparatoires aux grandes écoles,
– redéfinition des contenus, en particulier en terme d'accessibilité des articles et de longueur de ceux-ci,
– volonté plus nette de « suivre » les grands débats nationaux ou internationaux qui concernent les mathématiques ou, plus largement, les problèmes liés à l'éducation ou à la recherche.

Au cours de ces derniers mois, les travaux du comité de rédaction de la *Gazette* se sont poursuivis dans ces directions, particulièrement en ce qui concerne les débats actuellement en cours sur les réformes de l'enseignement supérieur et de la recherche.

D'autre part, plusieurs nouveaux membres sont entrés au comité de rédaction afin de dynamiser encore la *Gazette* et de permettre de couvrir plus largement ses missions et ses objectifs.

Le pôle de Luminy

Bilan du CIRM en 2008

Le CIRM, établissement de la SMF, devenu une unité mixte de service entre la SMF et le CNRS en 2000, est soutenu financièrement de manière très importante par le ministère. Une convention de bon voisinage le lie par ailleurs à l'université de la Méditerranée. Le but principal du CIRM est d'organiser et de gérer des rencontres internationales mathématiques de haut niveau et d'accueillir des petits groupes de chercheurs pour des séjours, ce qu'il fait avec un succès croissant. Depuis 2007, le nombre de rencontres organisées au CIRM s'est accru, franchissant de manière apparemment durable la barre des 50 semaines par an (petits groupes de travail non inclus), et le taux de fréquentation de ses colloques a augmenté : 3172 participants en 2007 (contre moins de 2000 jusqu'en 2003), 2863 en 2008. Pour les années à venir nous prévoyons que le nombre de participants oscillera autour de 2800.

L'origine géographique des participants, quant à elle, change peu. Il faut toutefois noter un accroissement tendanciel non négligeable du taux de participants étrangers. L'accroissement du taux de participants de l'union européenne (entre 22% et 25% contre 20% avant 2003) peut être attribué à l'arrivée de nouveaux états membres, mais le nombre de participant hors union européenne augmente aussi (environ 19-20% contre moins de 14% jusqu'en 2003).

Ces évolutions, qui ne sont pas sans conséquence sur le fonctionnement du CIRM, doivent être attribuées à deux facteurs : d'une part l'accroissement de la renommée internationale du centre, phénomène naturel compte-tenu de la constance de sa qualité d'accueil et de la position dominante des mathématiques françaises dans le monde ; d'autre part l'accroissement des capacités d'accueil du centre, conséquence directe de l'opération « CIRM 2000+x » qui s'est achevée « formellement » en juin 2006 avec la mise en service du nouvel auditorium.

Cette évolution positive entraîne cependant un accroissement des coûts de fonctionnement et d'entretien qui n'est pas entièrement compensée par l'accroissement des recettes des rencontres. Un accroissement du budget de fonctionnement du centre ainsi qu'une politique de recrutement de personnel paraissent inévitables à court terme.

Enfin, la mise en service de l'auditorium a permis la restructuration du bâtiment bibliothèque en libérant l'ancienne salle de conférences (surface $100\,\mathrm{m}^2$). Ce réaménagement réalisé grâce notamment à une subvention du Ministère de la Recherche, a permis de disposer en juin 2008 d'une extension importante (et attendue) des rayonnages et aussi de mettre la bibliothèque aux normes dans divers domaines : construction d'un ascenseur pour PMR[22], réseau électrique et informatique, isolation thermique. De nouveaux espaces ont été aménagés pour la consultation des ouvrages par les visiteurs. Le budget global s'est élevé à 520 kEuros.

Le CIRM connaît depuis plusieurs années une diversification de ses thématiques et de ses activités et notamment dans le sens d'une ouverture accrue aux applications et interactions des mathématiques. Mise en place de nouvelles formes de rencontres : trimestres thématiques combinant des ateliers et des cours sur un thème donné en collaboration avec la FRUMAM[23], renforcement des liens internationaux, particulièrement avec le CIMPA[24] et avec les grands pays émergents, organisation de sessions de cours doctoraux d'envergure nationale (et au-delà).

Ces orientations sont conformes aux recommandations du Comité d'Évaluation du CIRM qui s'est tenu le 21 avril 2008. Celui-ci a notamment préconisé une politique de communication extérieure pour améliorer la fréquentation étrangère et pour renforcer son image dans la communauté scientifique.

La politique de subvention des rencontres s'est poursuivie avec quelques aménagements récents destinés à mieux maîtriser ce financement : depuis 2007 l'enveloppe budgétaire allouée aux rencontres est incorporée dans le budget prévisionnel de l'année. D'autre part les tarifs des services (chambres, restaurant) ont été simplifiés et ajustés pour tenir compte de l'inflation.

La maison de la SMF

La cellule de diffusion de Luminy continue d'assurer ses missions fondamentales de diffusion des ouvrages publiés par la SMF, d'information et de publicité auprès des congressistes du CIRM.

Pour assurer ces missions de façon sereine, une légère réorganisation de son activité a débuté en octobre dernier, et va se poursuivre dans l'année à venir. Le

[22] Personne à mobilité réduite
[23] Fédération de recherche mathématique de Marseille
[24] Centre International de Mathématiques Pures et Appliqués

principe général est que tout ce qui est directement lié aux missions de la cellule de diffusion puisse être assuré par elle.

Cette réorganisation implique : de nouvelles tâches, des changements techniques (logiciels), et un léger accroissement de son équipement.

Routage

Pour accroître son efficacité, la cellule de diffusion a pour nouvelle mission, depuis novembre 2008, le routage des publications de la SMF (hors *Gazette*). Le bilan provisoire est un gain très important dans la qualité du service qui s'est traduit par une forte réduction des réclamations, un gain dans les délais de livraison (jusqu'à 15 jours pour les envois à l'étranger) et un gain financier.

Fonctionnement/équipement

Un réseau informatique interne à la cellule de diffusion est mis en place et fonctionne correctement.

À court terme, la cellule de diffusion doit augmenter ses capacités de stockage. Cela représente un investissement assez léger puisque les locaux sont déjà disponibles.

Une partie du bâtiment plus ancienne nécessite des réparations plus ou moins importantes (boîtier électrique, toiture, etc.), et des travaux d'entretien. C'est le cas aussi des abords du bâtiment (escalier nord/ouest, « pigeonniers », etc.). Aucune de ces réparations n'est urgente, mais toutes doivent être planifiées dans les années à venir pour éviter une accumulation.

À noter que l'ensemble du bâtiment est désormais sous protection électronique.

Services auprès des congressistes du CIRM

Les congressistes du CIRM sont informés des publications de la SMF par l'intermédiaire de la lettre d'information et du catalogue qui leur sont distribués à leur arrivée, des vitrines contenant les récentes publications de la SMF, et du stand d'exposition hebdomadaire dans le hall de l'auditorium (usuellement mis en place le mercredi matin).

Le service d'information et de ventes aux participants aux colloques reste assuré pour tous les colloques du CIRM sans exception, toute la semaine, de 14h00 à 15h30. Depuis peu, en plus des publications de la SMF, il est aussi possible d'acquérir des mugs, et clefs USB siglées SMF.

Rencontres et colloques

Le colloque MATHS A VENIR 2009

La Société Française de Statistique, la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles et la Société Mathématique de France, soutenues par l'association *femmes et mathématiques* sont à l'initiative du projet MATHS A VENIR 2009. Il sera organisé avec le Centre National de la Recherche Scientifique, la Fondation Sciences Mathématiques de Paris, l'Institut des Hautes Études Scientifiques et l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique.

MATHS A VENIR 2009 a pour but de contribuer au débat public sur l'avenir des mathématiques en France. Il sera marqué par un colloque qui se tiendra les 1 et 2 décembre 2009 à la Maison de la Mutualité à Paris et qui comprendra cinq conférences mathématiques accessibles aux non-spécialistes, des tables rondes et des animations. Trois ateliers préparatoires : « Mathématiques et société » à Rennes, « Mathématiques et industrie » à Bures-sur-Yvette et Paris et « Mathématiques dans la science contemporaine » à Lille sont organisés au cours du printemps 2009.

Un premier colloque MATHEMATIQUES A VENIR s'était tenu à l'École Polytechnique en 1987 à l'initiative de la SMAI et de la SMF. Il a marqué durablement les esprits et a contribué à une meilleure compréhension du rôle des mathématiques, et de la communauté des mathématiciennes et mathématiciens, dans la société.

Le monde a changé en 20 ans, les mathématiques aussi, MATHS A VENIR 2009 sera l'occasion de faire le point à la lumière de ces changements. Ce colloque se fera en partenariat avec le magazine *Pour la Science*.

Site de MATHS A VENIR 2009 : `www.maths-a-venir.org`

Rencontres scientifiques récurrentes de la SMF

La SMF organise deux manifestations scientifiques récurrentes :

– **La journée scientifique annuelle.** La journée scientifique annuelle 2009 intitulée « Géométrie discrète algorithmique, différentielle et arithmétique », organisée par Christian Mercat, Philippe Castillon, Valérie Berthé, aura lieu le 12 juin 2009 à l'université Montpellier II.

Nous réfléchissons à donner plus d'ampleur à cette journée : passer à un format de deux jours, voire un vrai colloque annuel de la SMF. Le format sur deux jours permettrait d'inclure des tables rondes sur des sujets concernant l'enseignement et la recherche et d'intéresser un spectre plus large de collègue.

– **Les états de la recherche.** Les sessions « états de la recherche », ont un comité scientifique actuellement composé de Albert Cohen, Nathanaël Enriquez, David Harari, Christoph Sorger, Patrice Le Calvez (secrétaire) et Cédric Villani. Pour les années à venir nous allons donner la possibilité aux organisateurs qui le souhaitent d'organiser leur session au CIRM : grâce aux accords avec le DSA[25] du CNRS, ceci sera possible sans perdre les subventions dont nous bénéficions actuellement.

Deux sessions ont eu lieu en 2008 :

– « Variétés rationnellement connexes : aspects géométriques et arithmétiques », organisée par Olivier Debarre et Andreas Höring à l'université de Strasbourg, du 28 au 31 mai 2008 ;

– « Géométrie et probabilités en interaction », organisée par Franck Barthe, Michel Ledoux, à l'Institut de Mathématiques de Toulouse, du 20 au 23 mai 2008.

Deux sessions sont prévues en 2009 :

– « Modèles de dimères et pavages aléatoires », organisée par Cédric Boutillier et Nathanaël Enriquez, à l'Institut Henri Poincaré, du 5 au 7 octobre 2009.

– « Les sciences du vivant » organisée par Pierre-Emmanuel Jabin, à l'Institut Henri Poincaré, du 1 au 3 octobre 2009.

Colloques du CIRM

La plus grande partie de l'activité de la SMF en matière de colloques a lieu à travers le CIRM (*cf.* le paragraphe du rapport consacré au CIRM).

[25] Directeur Scientifique Adjoint

Colloques internationaux

La SMF a co-organisé trois colloques internationaux .

– Le deuxième Congrès Canada-France s'est tenu du 1er au 5 juin 2008, à l'UQAM, à Montréal. Les partenaires du congrès étaient : le Centre de recherches mathématiques (CRM), l'Institute Fields, l'Institut des sciences mathématiques (ISM), le Reseau MITACS, l'Institut du Pacifique pour les sciences mathématiques (PIMS), la Société canadienne de mathématiques appliquées et industrielles (SC-MAI), la Société de mathématiques appliquées et industrielles (SMAI), la Société mathématique de France (SMF), la Société mathématique du Canada (SMC) et l'Université du Québec à Montréal (UQAM).

– Un colloque franco-indien, « RMS/SMF/IMSc Indo-French Conference in Mathematics 2008 » franco-indien, s'est tenu à Chennai du 15 au 19 décembre 2008. Les partenaires en étaient la Ramanujan Mathematical Society et la SMF. Le colloque s'est déroulé dans les deux institutions de Chennai « Institute of Mathematical Sciences », et « Chennai Mathematical Institute ».

– Le premier colloque Franco-Tunisien (CFTM1), s'est tenu à Djerba, du 16 au 20 mars 2009 ; ce colloque était coorganisé par la SMF et la SMT[26]

Nous avons été sollicités pour organiser un nouveau colloque franco-espagnol, ainsi qu'un colloque franco-vietnamien. Suite au succés rencontré par le colloque franco-tunisien, la SMT nous a proposé que celui-ci devienne périodique (avec une périodicité de 3 ou 4 ans).

Divers

La SMF parraine scientifiquement sans les organiser des manifestations scientifiques diverses, ceci est détaillé dans le paragraphe du rapport consacré au Conseil Scientifique.

La SMF a soutenu ou participé à l'organisation de diverses autres manifestations. Rappelons :

– 7-10 juillet : IWAP 2008 ;

– 14 mai, Paris : « Évaluation des risques », 10e rencontre MathIndustrie - Les industriels et les mathématiciens se parlent ;

– 16 janvier, IHP, Paris : « Troisième journée d'accueil des nouveaux recrutés en mathématiques » ;

– 11 décembre, Lyon : « Des mathématiciens primés par l'Académie des Sciences ».

Le Conseil Scientifique de la SMF

À la date du 1er juillet 2008, le conseil était composé de Arnaud Beauville (Nice), Yann Brenier (Nice), Patrick Dehornoy (Caen, secrétaire), Alice Guionnet (Lyon), Philippe Michel (Montpellier), Jean-Christophe Yoccoz (Orsay), plus, ès qualité, Stéphane Jaffard, président de la SMF.

Le conseil a travaillé exclusivement par courrier électronique, sans réunion physique de ses membres.

Chronologie des décisions :

[26] Société de Mathématique Tunisienne

– Juin 2008 :

– Approbation du remplacement de Jeanne Peiffer par Norbert Schappacher au comité de rédaction de la *Revue d'histoire des mathématiques*, et à la candidature de Tom Archibald au même comité ;

– Approbation du remplacement de Sabine Rommevaux par Sophie Roux et de Bruno Belhoste par Hélène Gispert au comité de rédaction de la *Revue d'histoire des mathématiques* ;

– Septembre 2008 :

– Soutien au colloque « 26es Journées Arithmétiques » organisé à Saint-Étienne du 6 au 10 juillet 2009 ;

– Approbation de l'entrée de Joël Sakarovitch au comité de rédaction de la *Revue d'histoire des mathématiques* ;

– Sur demande du Conseil Scientifique, le Conseil d'Administration approuve le principe que, lorsque la SMF est sollicitée pour des nominations en vue de prix et distinctions, le Conseil Scientifique puisse organiser un appel à propositions au sein de la communauté mathématique française (comité national, directeurs de laboratoires), ce principe étant adapté en fonction du prix concerné et de la taille du vivier potentiel de chercheurs susceptibles d'être nommés ;

– Octobre 2008 :

– Désignation de Philippe Michel comme membre du jury du prix Fermat ;

– Soutien au colloque « La Tour d'Hanoi, un casse-tête mathématique d'Edouard Lucas (1842-1891) » organisé à Paris en février 2009.

– Novembre 2008 :

Au terme d'une réflexion entreprise en concertation avec le Conseil d'Administration de la SMF, et afin d'assurer une meilleure couverture thématique du spectre des mathématiques, il est proposé de porter la composition du Conseil Scientifique de six à quinze membres. Compte-tenu du souhait d'Alice Guionnet de se retirer, la composition du nouveau Conseil Scientifique est fixée comme suit :

– Dominique Bakry (probabilités, Toulouse)
– Arnaud Beauville (géometrie algébrique, Nice)
– Yann Brenier (EDP, Nice)
– Guy David (analyse harmonique, Orsay)
– Pierre Degond (mathématiques appliquées, Toulouse)
– Patrick Dehornoy (algèbre et logique, Caen)
– Stéphane Jaffard (président de la SMF, es-qualité)
– Christian Kassel (groupes quantiques, Strasbourg)
– Pascal Massart (statistique, Orsay)
– Philippe Michel (théorie des nombres, Lausanne)
– Jean-Michel Morel (traitement d'image, Cachan)
– Pierre Pansu (géométrie, Orsay)
– Jeanne Peiffer (histoire des mathématiques, Paris)
– Jean-Christophe Yoccoz (systèmes dynamiques, Paris)

– Décembre 2008 :

– Remplacement de Patrick Dehornoy par Arnaud Beauville comme secrétaire du Conseil Scientifique.

– Janvier 2009 :
  – Soutien aux « Troisièmes Rencontres des Jeunes Statisticiens », organisées à Aussois du 31 août au 4 septembre 2009.
– Avril 2009 :
  – Suggestions à l'EMS pour les présidents du comité de programme et du comité des prix du prochain congrès européen ;
  – Soutien au « First Iraqi-French Mathematics Conference ».

Enseignement

La Société Mathématique de France consacre une énergie importante à la réflexion sur l'enseignement de notre discipline. Une partie de nos activités sur la question passe par la commission enseignement regroupant outre son responsable Michel Granger : Pierre Arnoux, Jean-Pierre Borel, Guy Chassé, Laurent Decreusefond, Michel Delord, Daniel Duverney, Valérie Girardin, Edwige Godlewski (SMAI), Pierre Loidreau, Marie-Jeanne Perrin-Glorian (ARDM[27]), Frédérique Petit, Nicolas Tosel (UPS[28]), et Jacques Wolfmann. Deux dossiers ont occupé le devant de la scène durant cette année scolaire : la réforme du lycée et la réforme de la formation des enseignants. Ces deux questions ont occupé une place prépondérante dans nos réflexions et nos actions parce que ces réformes engagent toutes les deux l'avenir de notre système éducatif.

Les positions de la SMF sur ces réformes ainsi que de nombreuses informations sur ces sujets peuvent être consultées sur le site de la SMF dans les deux dossiers suivants :

`http://smf.emath.fr/Enseignement/Masterisation/`

`http://smf.emath.fr/Enseignement/ReformeLycee2009/`

La réforme des lycées

Il s'agit d'une réforme de l'architecture de l'enseignement au lycée qui a été lancée en novembre 2007. On trouvera sur la page `http://smf.emath.fr/Enseignement/ReformeLycee2009/Documentsreferences.html` les documents ministériels qui montrent la genèse de cette réforme en partant de deux documents de l'IGEN[29] sur la série littéraire (juillet 2006) puis sur la série scientifique (novembre 2007). Le processus s'est accéléré avec la mission confiée à Jean-Paul de Gaudemar le 29 mai 2008, dont l'objectif initial était la mise en place de la réforme en classe de seconde dès la rentrée 2009. Une lettre à Jean-Paul. de Gaudemar signée par les sociétés savantes (SMF, SMAI, SFdS) et l'association *femmes & mathématiques* a été envoyée dès le mois de juillet 2008. Nous y analysons les divers scénarios possibles et la lettre est accompagnée de propositions concrètes rassemblées dans une annexe sous forme d'hypothèses de travail. Les dangers pour la voie scientifique d'un tronc commun avec options dans le cycle terminal y sont soulignés.

Cette action est dans la continuité de la participation au colloque « Quel avenir pour l'enseignement scientifique au lycée et dans l'enseignement supérieur » qui

[27] Association de Recherche sur la Didactique des Mathématiques
[28] Union des Professeurs de Spéciales
[29] Inspection Générale de l'Education Nationale

a rassemblé 200 personnes à Paris en avril 2008. Les thèmes suivants y ont été débattus et sont toujours d'actualité : Quel est le besoin réel de scientifiques en France ? Pourquoi y a-t-il une baisse de l'orientation vers les filières scientifiques universitaires ? Quelle formation doit être dispensée au lycée pour permettre une orientation efficace ?

La constitution d'un dossier dont tous les détails figurent sur le site de la SMF permet d'affiner cette analyse :

– Les objectifs majeurs de la réforme sont selon nous la réduction des coûts, et la réalisation d'un tronc commun jusqu'au baccalauréat. Nous critiquons vivement ce projet de tronc commun, dont nous craignons qu'il soit la réalité de la réforme en dépit d'une présentation des enseignements sous forme de modules. Nous pensons qu'il est totalement problématique pour le cycle terminal des deux dernières années du lycée, car il ralentirait certains élèves, tout en soumettant d'autres à des exigences excessives. Un tel projet pourrait induire un effondrement du niveau scientifique des élèves en particulier en mathématiques.

– Pour l'organisation des études au lycée, nous proposons la définition de modules d'enseignement différenciés par niveaux d'approfondissement, avec par exemple trois niveaux pour les mathématiques. Cette organisation éviterait l'écueil du tronc commun indifférencié tout en prenant en compte la nécessaire cohérence de la formation, point particulièrement sensible pour les mathématiques.

Une entrevue avec Jean-Paul De Gaudemar (voir aussi le compte-rendu sur notre site) a réuni au ministère des représentants des quatre sociétés de mathématiques. Les réponses apportées au cours de cette entrevue n'ont pas vraiment apaisé nos inquiétudes.

À la fin du dernier trimestre, divers mouvements de protestation ont amené le ministre de l'éducation nationale à annoncer un report d'un an de la réforme et une nouvelle mission a été confiée à Richard Descoings directeur de l'IEP[30] de Paris qui doit remettre un rapport d'étape au 15 mai et des conclusions définitives en octobre 2009 pour une mise en œuvre à la rentrée 2010.

Une lettre lui a été adressée en février 2009 où nous reprenons essentiellement les analyses de juillet 2008 en les affinant sur divers points : nous y montrons à nouveau les dangers du concept de tronc commun en insistant davantage sur le risque particulier qu'il fait courir aux élèves faibles soumis à un niveau d'exigence accru dans leurs matières non dominantes. Notre préférence est encore plus clairement affichée pour un des deux systèmes raisonnables possibles : le maintien du bac général à trois voies, avec pour la filière scientifique une plus grande spécialisation pour parer au reproche d'encyclopédisme, ou alors un système modulaire qui préserverait la notion de parcours cohérent tout en introduisant une certaine souplesse.

Une consultation sur la réforme du lycée a été organisée par tous les rectorats. La consultation parisienne à laquelle ont participé les sociétés mathématiques et des représentants d'Action Sciences a donné lieu à un rapport détaillé (29 avril 2009). Les problèmes de la filière S, et au sein de cette filière de l'enseignement des mathématiques y sont relevés en des termes qui corroborent largement nos analyses. Ce constat laisse espérer que nos points de vue soient enfin un peu entendus et pris en compte.

[30] Institut d'Études Politiques

Une autre consultation est en cours sur les programmes de seconde qui en raison du report de la réforme doivent être modifiés de façon provisoire pour être en conformité avec le programme des années antérieures. L'analyse des ces nouveaux programmes a suscité de vives inquiétudes sur différents points : techniques et résolutions de problèmes ? quelle informatique ? quelle place pour la géométrie, les probabilités et la statistique ? La SMF développera une analyse plus approfondie, en étant consciente de la nécessité d'avoir sur ces questions de programmes des réponses documentées, consensuelles et qui ne font pas l'économie d'une vue d'ensemble.

Formation des enseignants et concours de recrutements

La réforme des concours de recrutement et de la formation des enseignants du premier et second degré, appelée « mastérisation » était dans l'air depuis quelques mois (voir le précédent rapport moral) et le processus s'est accéléré brusquement au printemps 2008, avec l'annonce d'un projet dont les principes sont résumés dans le communiqué de presse du ministère daté du du 2 juillet 2008 :

– Les enseignants devront justifier de l'obtention d'un diplôme de master.

– Le principe de concours nationaux et la distinction CAPES/ Agreg sont maintenus. Les concours pourront être présentés par les étudiants titulaires d'un master ou inscrits en deuxième année de master.

– Les concours comprendront trois types d'épreuves : sur les disciplines, sur les capacités pédagogiques, et sur la connaissance du système éducatif.

– Enfin, un changement majeur est annoncé : les enseignants auront un service à temps plein dès la première année d'exercice. Autrement dit le stage en responsabilité des lauréats du concours est supprimé.

Ce document était assorti d'un appel aux universités pour mettre en place des « parcours de master ambitieux ».

Il s'agit donc d'un projet de bouleversement majeur de la formation des enseignants. Il a été observé à de multiples reprises que la formation des enseignants était déjà de fait à BAC +5 en incluant le stage en responsabilité. Mais la réforme actuelle va bien au delà d'une simple prise en compte de cette situation. La SMF s'est exprimée depuis un an sur ses dangers, pour la formation des enseignants, pour l'attractivité de la filière enseignement et pour l'avenir de tous les masters de mathématiques. Voici un résumé de ces actions :

Le document mis sur le site de la SMF du 22 octobre 2008 est une prise de position globale sur les dangers de la réforme tels qu'on les percevait dès cette date : on y rappelait que la suppression du stage en responsabilité est la suppression d'une formation professionnelle rémunérée, donc une régression majeure. On rappelait qu'il est impossible de mettre en place une formation au métier d'enseignant de la même qualité dans la même année que celle où a lieu le concours. On soulignait l'incompatibilité entre la prise de responsabilité devant une classe et l'absence de rémunération par un vrai salaire, l'impossibilité (confirmée par la suite des événements !) de tenir le calendrier excessivement serré. On soulevait la question de l'avenir des concours de recrutement à moyen terme, avec la perspective d'un grand nombre de titulaires d'un master d'enseignement n'ayant pas réussi le concours et de lauréats des concours non reçus au master. On soulignait l'impasse dans laquelle se trouvaient les concepteurs potentiels de maquettes de masters d'enseignement pour réaliser correctement un triple objectif de préparation à un concours, de mise en place de stages consistants, et de délivrance d'un master. La demande récurrente de préciser le contenu des concours, cadrage indispensable des masters d'enseignement y était faite. Enfin le sort des étudiants dans la période transitoire était et est toujours un souci permanent.

La SMF insistait fortement pour que la formation mathématique des futurs professeurs ne soit pas entamée. Elle n'est toujours pas rassurée sur ce point par l'absence d'information fiable sur le contenu des nouveaux concours, par la diminution annoncée du nombre d'épreuves, par l'absence de programme et l'introduction d'une épreuve de connaissance du système éducatif inappropriée.

La SMF observe enfin que la question de l'agrégation est peu évoquée. Les candidats potentiels risquent de déserter ce concours si passer simultanément le CAPES par sécurité est rendu impossible. Le lien entre agrégation et études doctorales est aussi à prendre en compte.

Cette prise de position a débouché en novembre 2008 sur la rédaction d'une pétition réclamant un moratoire complet d'un an sur le projet de mastérisation. Cette pétition a été signée en un temps très bref par plus de 2500 collègues. Elle était accompagnée d'un texte intitulé « questions posées par la mastérisation notamment concernant sa mise en œuvre dès 2009 ». Les problèmes évoqués dans le document du 22 octobre y sont repris et détaillés sous forme de questions dont la plupart n'ont toujours pas reçu de réponse 6 mois après.

Une délégation de la SMF reçue au MESR le 16 janvier 2009 a exposé l'ensemble de ces problèmes aux conseillers de la ministre. Nous avons également alerté nos interlocuteurs sur la probable non remontée d'une majorité de maquettes de master, comme il ressortait d'une enquête auprès de nos correspondants.

La suite des événements nous a donné raison, puisque moins de 10 universités publiques ont remonté des maquettes de masters d'enseignement. Un communiqué du ministre Xavier Darcos daté du 31 mars 2009 indique entre autres : « Pour la session 2010, les contenus des concours resteront en l'état ». Mais les lauréats devront quand même être titulaires d'un master préalablement à tout recrutement comme fonctionnaires stagiaires sans qu'on sache exactement de quel master il est question.

Le maintien des concours selon les modalités de l'ancien système, mais assorti des exigences de diplôme du nouveau système engendre une confusion inquiétante pour ne pas dire un désarroi des acteurs, formateurs et étudiants. Cette proposition pour l'année transitoire est pratiquement impossible à appliquer et est susceptible de déstabiliser gravement l'ensemble des masters.

En mars et avril 2009, plusieurs documents élaborés par la SMF en collaboration avec d'autres sociétés savantes, ont exprimé notre inquiétude face à l'impasse dans laquelle nous nous trouvons : un texte explicatif daté du 12 mars 2009 mis sur le site de la SMF coécrit par la coordination concours lettres et la SMF et deux lettres ouvertes au ministre Xavier Darcos cosignées par une cinquantaine de sociétés savantes et d'associations d'enseignants de tous niveaux et de toutes disciplines, reprennent une analyse des dangers de la réforme et lancent un appel solennel pour un déblocage de la situation et une remise à plat complète du dossier. Cela comprend la demande d'un vrai maintien en l'état des concours y compris le stage en responsabilité et l'absence d'exigence d'un master pour le recrutement des lauréats des concours 2010. Les positions de la CPU du 16 avril et du 7 mai dernier émettent la même demande.

La commission présidée par William Marois, Recteur de l'Académie de Bordeaux et Daniel Filâtre président de l'université de Toulouse II est chargée de remettre des recommandations pour le 15 juillet 2009. Mais le délai est très bref et à l'heure où ces lignes sont écrites les perspectives d'avenir sont toujours troubles, que ce soit pour l'année 2009-2010 ou pour la réforme définitive.

Action Sciences

Le collectif Action Sciences dont la création remonte à juin 2002 regroupe actuellement 14 sociétés savantes et associations d'enseignants dans tous les domaines des sciences et se fixe pour objectif de travailler sur l'enseignement secondaire en sciences au niveau du lycée et sur l'articulation lycée-niveau BAC +1 à +3 : évolution du baccalauréat, rapport sur la « désaffection » pour les études scientifiques, recrutement et formation des enseignants. Les deux représentants SMF (Pierre Arnoux et Daniel Duverney) y jouent un rôle très actif, notamment au niveau de la réflexion sur la réforme des lycées qui s'est poursuivie tout au long de l'année.

CFEM[31] et CIEM[32]

Les représentants de la SMF au bureau de la CFEM sont Jacques Wolfmann, Johann Yebbou et Alain Yger (Vice-Président). La participation de la SMF se concrétise au travers des divers chantiers que la CFEM coordonne, en particulier la préparation des congrès internationaux de la CIEM.

Cette année la CFEM s'est elle aussi mobilisée autour de la question de la matérisation de la formation des enseignants. Une réunion organisée en septembre 2008 a abouti à la rédaction d'un texte intitulé « La mastérisation et la formation des enseignants en mathématiques » qui émet lui aussi des critiques majeures sur ce projet. Une réunion de tous les acteurs de la formation des enseignants en mathématiques (responsables de masters et de préparations aux concours) a rassemblé à Chevaleret une centaine de participants le 15 novembre 2008. Un état des lieux des différents projets de master d'enseignement y a été fait, l'impossibilité de mettre en place des projets raisonnables y a été constatée, à la fois à cause des délais trop courts et des incohérences de la réforme.

La formation mathématique des ingénieurs

L'enseignement de notre discipline dans les écoles d'ingénieurs est devenu plus difficile en raison d'une moindre maîtrise des concepts de base par beaucoup d'élèves issus des classes préparatoires par suite de l'évolution des mathématiques au lycée. Les réductions d'horaires ont affecté dans les années récentes l'enseignement des mathématiques mais aussi de la physique dans les écoles elle-mêmes. Nos contacts avec la CTI[33] qui remontent à plusieurs années ont abouti à la création d'un groupe de travail commun CTI-sociétés savantes de mathématiques (SMF SMAI et SFdS) dont les travaux répondent pour partie à nos préoccupations. Ce

---

31 Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques
32 Conférence Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques
33 Commission des Titres d'Ingénieurs

groupe de travail est animé par Guy Chassé et les représentants de la SMF y sont Guy Chassé, Laurent Decreusefond et Pierre Loidreau.

Cette année le groupe de travail s'est penché en priorité sur deux problèmes :

(1) La situation des mathématiques dans les écoles d'ingénieurs et la question de la qualité de la formation des ingénieurs dans notre discipline. Une enquête est en cours à ce propos dans toutes les écoles. Par ailleurs à la suite d'une réunion au ministère en juillet dernier sollicitée par Franck Pacard, un document de travail encore en cours de discussion a été élaboré. Il s'intitule « Mathématiques dans les écoles d'ingénieur ou Mathématiques pour l'Ingénieur » et présente la situation des Mathématiques sous forme d'une « approche compétences » par « forces, faiblesse, opportunités et risques ».

(2) La place des mathématiques dans le document de référence de la CTI qui élabore son cahier « Références et orientations ». Comme son nom l'indique ce document est à la base des évaluations et des auto-évaluations et joue donc un rôle clé dans l'évolution à venir des formations. Le message du groupe de travail est une insistance accrue sur les savoirs fondamentaux (aussi bien en mathématiques qu'en physique et en informatique), transmis sous la forme d'un chapeau commun. À ce premier document s'ajoute pour les mathématiques, comme pour les trois disciplines, un texte relativement bref, intitulé références et orientations-mathématiques. Ce texte distingue trois objectifs : la formation à la rigueur, l'analyse et la synthèse, le rôle des mathématiques comme « grammaire des autres sciences », et enfin des objectifs plus spécialisés. Les compétences minimales attendues concernent la capacité de modélisation et l'aptitude à résoudre un problème. Enfin les champs disciplinaires principaux sont énumérés : probabilités et statistique, analyse et mathématiques discrètes.

Rapport financier, année 2008

Le résultat de l'année 2008 (hors CIRM) est légèrement déficitaire pour un montant de 26 kE (celui de l'année précédente était déficitaire de 56 kE). Les gros progrès faits pour effacer les retards des publications et la diminution de la masse salariale expliquent en grande partie la diminution du déficit.

Grandes masses de l'exécution du budget de la SMF seule

Le volume des produits d'exploitation est de 973 kE en 2008 (pour 943 kE en 2007), dont 568 kE de recettes. Le volume des charges d'exploitation est de 999 kE en 2008 (pour 999 kE en 2007), dont 724 kE de dépenses.

Produits d'exploitation

Ce sont essentiellement les ressources dues aux ventes de produits finis, cotisations, subventions. Les produits financiers représentent la rémunération des fonds placés.

(1) Recettes dues aux revues : 431 kE (contre 347 kE en 2007).

(2) Cotisations, abonnements à la Gazette : 106 kE (contre 109 kE en 2007).

(3) Produits financiers : en hausse avec 33 kE en 2008, à comparer aux 28 kE en 2007 et aux 22 kE en 2006.

Charges d'exploitation

Ce sont essentiellement les charges dues au personnel, les achats divers, les impôts et taxes.

(1) Masse salariale

La masse salariale globale, hors charges, du personnel SMF/CIRM est de 288 kE, il faut ajouter 116 kE de charges. Par ailleurs les salaires du personnel CIRM nous sont remboursés (140 kE en 2008).

Les chiffres de la masse salariale des années précédentes sont :

- en 2007 : 325 kE et 126 kE,
- en 2006 : 315 kE et 112 kE,
- en 2005 : 316 kE et 82 kE.

La diminution est due à l'embauche, en octobre 2007, à temps partiel de 3/5, de notre nouvelle comptable Sabine Albin, et surtout à la suppression du poste de composition de Florent Arnaud remplacé par de la sous-traitance.

(2) Frais de fabrication

Les frais de fabrication (hors composition) s'élèvent à 90 kE (66 kE en 2007, 72 kE en 2006, 82 kE en 2005). Les frais de composition sont de 33 kE au lieu de 1 kE en 2007. Ceci s'explique par le fait que la composition, jusque là, effectuée en interne est maintenant faite par des sous-traitants. En compensation, la masse salariale a diminué (voir plus haut).

Une réorganisation du routage des publications a été entrepris fin 2008 : la cellule de diffusion de Marseille effectue tous les routages des revues (à l'exception de la Gazette) ; en juin 2010 un bilan sera fait. Il semble déjà que le gain par rapport à l'emploi de sociétés commerciales d'édition est probant.

(3) Honoraires et assurances

Les honoraires (12 kE pour le commissaire aux comptes) et assurances (2 kE) sont stables. À noter 3 kE d'honoraires divers.

(4) Frais de maintenance informatique

Les frais de maintenance restent faibles : 5kE (6 kE en 2007).

(5) Affranchissements

Le poste affranchissement, toutes revues confondues, est de 94 kE en 2008, il était de 83 kE en 2007. L'augmentation est due essentiellement à l'affranchissement des Annales. C'est un poste qu'on va surveiller puisqu'on espère le réduire en effectuant le routage en interne (voir ci-dessus).

Les revues de la SMF

Globalement sur l'ensemble des publications le budget est excédentaire de 4 kE alors qu'en 2007 il était déficitaire de 56 kE. Ce redressement spectaculaire s'explique par différentes actions : le poste à temps plein d'une personne faisant la composition a été supprimé et remplacé par une sous-traitance, l'inquiétant retard dans les parutions de 2007 a été presqu'entièrement comblé grâce à l'énergie impressionnante de Nathalie Christiaën, enfin la reprise de l'édition des *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* est positive. Seule, la collection *Séminaires et Congrès* présente encore un retard significatif.

À l'actif du bilan apparaît une créance plus élevée qu'ordinaire due à une facturation de fin d'année plus importante et au non-paiement par l'AMS du produit des ventes de revues de la SMF qu'elle a effectuées pendant toute l'année 2008. L'AMS a promis de payer ses dettes dès qu'elle recevra les derniers numéros manquants de 2008 (ceci doit se faire avant la fin juin).

En ce qui concerne les tarifs des publications, il a été décidé que le prix des abonnements reste stable, l'augmentation du tarif au numéro est de l'ordre de 1,5%, le paquetage institutionnel contiendra désormais *Séminaires et Congrès* et son prix sera augmenté de 50 à 100 Euros.

Budget du CIRM

Le compte de résultat du CIRM présente un excédent de 91 kE qui provient, en grande partie, des recettes exceptionnelles sur le poste « rencontres ». Le centre a connu, en 2008, un taux de remplissage très élevé (plus de 50 semaines). La recette due aux rencontres est de 931 kE (900 kE en 2007, 774 kE en 2006). Par ailleurs, le CIRM a procédé en 2008 à des travaux de réaménagement de la bibliothèque pour un montant de 492 kE. Le Ministère a accordé une subvention de 200 kE en 2007 et 100 kE en 2008 pour ces travaux. Le CIRM a dû puiser dans ses bénéfices pour financer ces investissements, d'où la baisse de son fonds de roulement. (Le fonds de roulement du CIRM est de 97 kE au 31/12/2008 alors qu'il était de 342 kE au 31/12/2007.)

De plus, il est prévu, en 2009, que le CIRM reçoive des subventions du CNRS et de la DGRI comme les années précédentes, mais pas de la DGES (la subvention de 76 kE annoncée en 2008 n'a pas été versée). Cela rend la situation très difficile pour le poste « Travaux et Maintenance » du bâtiment.

Un dernier point à l'étude est la subvention accordée aux rencontres par le Conseil Scientifique (237 kE en 2008), elle finance donc environ 30% du coût des rencontres. Les centres internationaux de rencontres mathématiques (Oberwolfach, Banff) financent entièrement les séjours. Si on veut augmenter le nombre de colloques organisés au CIRM par des mathématiciens étrangers de prestige, il faudrait les subventionner mieux.

Les subventions sont vitales pour la vie du CIRM.

Conclusion sur la situation financière

La situation financière est presque à l'équilibre. Il y a une très bonne maîtrise des dépenses de fonctionnement. Les salaires sont en augmentation régulière. Tous les problèmes de personnel des années précédentes sont réglés et ont entraîné une baisse de la masse salariale.

Un très gros effort a été fourni pour combler le retard des publications de 2007. À ce jour, pratiquement toutes les revues 2008 sont parues et les numéros 2009 commencent à paraître. L'entrée des *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* dans la liste des revues composées et éditées par la SMF a été très positive pour le budget. D'une manière générale, il faudra être attentif à une baisse des ventes des publications au numéro.

Les rentrées des placements sont en légère augmentation. Les placements n'ont pas souffert de la crise financière actuelle.

Remerciements

Le rapport moral fait le bilan de l'ensemble des activités menées au sein de la SMF depuis un an. Il est le reflet du travail effectué par de très nombreux bénévoles, que nous remercions. Citons en particulier les membres du Bureau et du Conseil de la SMF, les directeurs et les membres de nos comités de rédaction, et tous ceux que nous sollicitons, ponctuellement ou régulièrement, et qui offrent leur temps et leurs compétences avec une très grande générosité.

Ce rapport a été rédigé par Jean-Paul Allouche, Jean-Marie Barbaroux, Arnaud Beauville, Pascal Chossat, Lucia Di Vizio, Zindine Djadli, François Germinet, Michel Granger, Stéphane Jaffard, Frédéric Patras, Micheline Vigué, avec l'aide de Sabine Albin, Nathalie Christiaën et Claire Ropartz.

Georg Cantor jeune (à l'époque de l'article de 1874 ?)

MATHÉMATIQUES

Cantor et les infinis[1]

Patrick Dehornoy[2]

En 1874 paraît au Journal de Crelle une note de quatre pages où Georg Cantor, alors âgé de vingt-neuf ans et jeune professeur à l'université de Halle, établit la dénombrabilité de l'ensemble des nombres algébriques et la non-dénombrablité de l'ensemble des nombres réels. Cet article est révolutionnaire car, pour la première fois, l'infini est considéré non plus comme une limite inatteignable mais comme un possible objet d'investigation. L'héritage de ce travail est extraordinaire : non seulement il marque la naissance de la théorie des ensembles – en fait une théorie de l'infini – mais il contient déjà en germe le problème du continu qui a occupé toute la fin de la vie de Cantor et a été et continue d'être le moteur du développement de cette théorie. Un temps objet d'une fascination déraisonnable reposant sur un malentendu, celle-ci est aujourd'hui largement méconnue, alors même qu'apparaissent les premiers signes d'une possible résolution du problème du continu.

Ce texte présente le contexte et le contenu de l'article de Cantor, puis évoque deux des principaux développements qui en sont issus, à savoir la construction des ordinaux transfinis avec l'amusante application aux suites de Goodstein, et le problème du continu, y compris les contresens souvent rencontrés sur la signification des résultats de Gödel et Cohen, ainsi que les résultats récents de Woodin qui laissent entrevoir ce que pourrait être une solution future.

1. Une petite note et deux résultats simples

1.1. L'auteur

Georg Cantor naît en 1845 à Saint-Petersbourg, d'une mère russe et d'un père allemand, homme d'affaires d'origine juive converti au protestantisme. Il passe ses premières années en Russie. La famille revient en Allemagne quand Georg a onze ans, d'abord à Wiesbaden puis à Francfort. Cantor fréquente le lycée de Darmstadt, où ses dons en mathématiques sont remarqués, puis le Polytechnicum de Zürich en 1862, et, à partir de 1863, l'université de Berlin où il obtient l'équivalent d'un master en 1867.

En 1869, à l'âge de vingt-quatre ans, il soutient une thèse en théorie des nombres, reçoit son habilitation, et obtient un poste à l'université de Halle (Saxe-Anhalt).

---

[1] Texte faisant suite à un exposé de la série « Un texte, un mathématicien » à la Bibliothèque nationale de France.

[2] Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme, Université de Caen, 14032 Caen, France.

Là, sous l'influence de son collègue Eduard Heine (1821–1881), il se tourne vers l'analyse, principalement le problème de l'unicité de la représentation d'une fonction par série trigonométrique, qu'il résout positivement en 1870. Sous la forme de l'étude des ensembles d'unicité, la question continuera de jouer un grand rôle dans les réflexions ultérieures de Cantor en arrière-plan de l'élaboration de la théorie des ensembles, voir [12].

À partir de 1872, Cantor entretient une correspondance avec Richard Dedekind (1831-1916), qui est son aîné de quatorze ans et vient de proposer la définition des nombres réels par coupures. C'est dans ce contexte que Cantor s'intéresse aux questions qu'on appelle maintenant de dénombrabilité, c'est-à-dire à la possibilité de numéroter les éléments d'un ensemble. Le résultat fondamental dont on va parler plus loin, à savoir la non-dénombrabilité de l'ensemble des nombres réels, est annoncé pour la première fois dans une lettre à Dedekind datée du 7 décembre 1873. Il est publié l'année suivante au Journal de Crelle, sous le titre « Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen »[3]. Ce court article contient deux résultats portant sur la possibilité ou non de numéroter les nombres réels.

1.2. Un résultat positif...

Les nombres réels sont les coordonnées des points d'une droite. Ils incluent en particulier les nombres entiers $0, 1, 2, \ldots$ et les nombres rationnels, de la forme p/q avec p, q entiers et q non nul. Ils incluent aussi beaucoup de nombres irrationnels. Un nombre réel (ou complexe) α est dit *algébrique* s'il existe au moins une équation algébrique à coefficients entiers dont α soit solution. Tout nombre entier est algébrique, puisque l'entier n est l'(unique) solution de l'équation $x - n = 0$. Tout nombre rationnel est algébrique, puisque le rationnel p/q est l'(unique) solution de l'équation $qx - p = 0$. Un exemple typique de nombre algébrique non rationnel est $\sqrt{2}$, qui est solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$. Il existe énormément de nombres algébriques : tout nombre réel pouvant être écrit à partir des nombres entiers à l'aide des opérations $+, -, \times, /, \sqrt{\ }, \sqrt[3]{\ }, \sqrt[5]{\ }$, ... est algébrique, et il en existe encore bien d'autres puisque, depuis Abel, on sait qu'il existe des équations algébriques dont les solutions ne peuvent pas être exprimées à l'aide des opérations précédentes.

Pourtant, Cantor démontre dans [2] :

Théorème 1. *On peut numéroter les nombres algébriques.*

Autrement dit : *Il n'existe pas plus de nombres algébriques que d'entiers naturels.*

La démonstration de Cantor n'est pas difficile.

Démonstration. Pour toute équation algébrique E

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad \text{avec } a_0 > 0,$$

appelons *hauteur* de E l'entier

$$a_0 + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| + |a_n| + n,$$

[3] Sur une propriété de la collection de tous les nombres algébriques.

III. Abhandlungen zur Mengenlehre.

1. Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.

[Crelles Journal f. Mathematik Bd. 77, S. 258–262 (1874).]

Unter einer reellen algebraischen Zahl wird allgemein eine reelle Zahlgröße ω verstanden, welche einer nicht identischen Gleichung von der Form genügt:

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{1}$$

wo n, a_0, a_1, … a_n ganze Zahlen sind; wir können uns hierbei die Zahlen n und a_0 positiv, die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ ohne gemeinschaftlichen Teiler und die Gleichung (1) irreduktibel denken; mit diesen Festsetzungen wird erreicht, daß nach den bekannten Grundsätzen der Arithmetik und Algebra die Gleichung (1), welcher eine reelle algebraische Zahl genügt, eine völlig bestimmte ist; umgekehrt gehören bekanntlich zu einer Gleichung von der Form (1) höchstens so viel reelle algebraische Zahlen ω, welche ihr genügen, als ihr Grad n angibt. Die reellen algebraischen Zahlen bilden in ihrer Gesamtheit einen Inbegriff von Zahlgrößen, welcher mit (ω) bezeichnet werde; es hat derselbe, wie aus einfachen Betrachtungen hervorgeht, eine solche Beschaffenheit, daß in jeder Nähe irgendeiner gedachten Zahl α unendlich viele Zahlen aus (ω) liegen; um so auffallender dürfte daher für den ersten Anblick die Bemerkung sein, daß man den Inbegriff (ω) dem Inbegriffe aller ganzen positiven Zahlen ν, welcher durch das Zeichen (ν) angedeutet werde, eindeutig zuordnen kann, so daß zu jeder algebraischen Zahl ω eine bestimmte ganze positive Zahl ν und umgekehrt zu jeder positiven ganzen Zahl ν eine völlig bestimmte reelle algebraische Zahl ω gehört, daß also, um mit anderen Worten dasselbe zu bezeichnen, der Inbegriff (ω) in der Form einer unendlichen gesetzmäßigen Reihe

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots \tag{2}$$

gedacht werden kann, in welcher sämtliche Individuen von (ω) vorkommen und ein jedes von ihnen sich an einer bestimmten Stelle in (2), welche durch den zugehörigen Index gegeben ist, befindet. Sobald man ein Gesetz gefunden hat, nach welchem eine solche Zuordnung gedacht werden kann, läßt sich dasselbe nach Willkür modifizieren; es wird daher genügen, wenn ich in § 1 denjenigen Anordnungsmodus mitteile, welcher, wie mir scheint die wenigsten Umstände in Anspruch nimmt.

Um von dieser Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen

FIG. 1. La première page de l'article de 1874 – ici reproduit dans les œuvres complètes de Cantor

et disons qu'un nombre algébrique α *admet la hauteur N* si α est racine d'au moins une équation de hauteur N. Noter qu'un nombre algébrique donné admet certainement une infinité de hauteurs.

Par construction, la hauteur d'une équation est au moins 2. Il existe une seule équation de hauteur 2, à savoir

$$x = 0,$$

et, par conséquent, un seul réel admettant la hauteur 2, à savoir 0.

De même, il existe quatre équations de hauteur 3, à savoir

$$2x = 0, \quad x + 1 = 0, \quad x - 1 = 0, \qquad \text{et} \quad x^2 = 0,$$

et, par conséquent, trois réels admettent la hauteur 3, à savoir $-1, 0, 1$.

Alors, pour toute valeur de l'entier N, il n'existe qu'un nombre fini d'équations de hauteur N, borné supérieurement par $(2N)^N$, et, de là, un nombre fini de réels algébriques admettant la hauteur N, borné supérieurement par $(2N)^N \cdot N$ puisqu'une équation de degré n a au plus n racines.

On peut alors numéroter les nombres algébriques comme suit : on numérote tous les nombres algébriques admettant la hauteur 2, puis tous les nombres algébriques admettant la hauteur 3, puis tous les nombres algébriques admettant la hauteur 4, *etc.* Comme tout nombre algébrique admet une hauteur, la liste ainsi constituée – qui est redondante – contient tous les nombres algébriques. □

1.3. ... et un résultat négatif

Par contre, si on considère la collection de tous les nombres réels, la situation est différente, et c'est le second résultat démontré dans [2].

Théorème 2. *On ne peut pas numéroter les nombres réels.*

Démonstration. Soit $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ une suite quelconque de nombres réels. On va exhiber un nombre réel α qui est différent de chacun des nombres α_n, ce qui montre qu'aucune numérotation des nombres réels ne peut être exhaustive. Sans restreindre la généralité, on suppose $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = 1$.

On va s'efforcer d'extraire de la suite des α_n une sous-suite $\alpha_{n_0}, \alpha_{n_1}, \ldots$ vérifiant

$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_4} < \ldots < \alpha_{n_5} < \alpha_{n_3} < \alpha_{n_1}. \tag{1}$$

On part de $n_0 = 0$ et $n_1 = 1$, et donc de $\alpha_{n_0} = 0$ et $\alpha_{n_1} = 1$. On procède par récurrence. Supposons $i \geqslant 1$ et n_i construit. Alors de deux choses l'une.

Ou bien aucun entier n ne vérifie

$$n > n_i \quad \text{et} \quad \alpha_n \text{ est entre } \alpha_{n_{i-1}} \text{ et } \alpha_{n_i} \text{ (strictement)}, \tag{2}$$

auquel cas on pose $\alpha = (\alpha_{n_{i-1}} + \alpha_{n_i})/2$, et alors α est distinct de α_n pour tout n.

Ou bien il existe n vérifiant (2), et alors on définit n_{i+1} comme étant le plus petit tel entier. Notons que, dans ce cas, pour chaque entier n vérifiant $n_i < n < n_{i+1}$, le réel α_n n'est *pas* entre α_{n_i} et $\alpha_{n_{i+1}}$ (sinon ce serait cet entier n qui aurait été choisi pour n_{i+1}).

Si la construction n'a pas avorté, on a obtenu des nombres réels α_{n_i} vérifiant (1). La complétude de $\mathbb{R}$ implique qu'il existe au moins un nombre réel α coincé entre les deux demi-suites, c'est-à-dire vérifiant

$$\alpha_{n_0} < \alpha_{n_2} < \alpha_{n_4} < \ldots < \alpha < \ldots < \alpha_{n_5} < \alpha_{n_3} < \alpha_{n_1}. \tag{3}$$

Alors α ne peut être égal à aucun des réels α_n. Par (3), c'est clair lorsque n est de la forme n_i. Sinon, il existe i tel que n est entre n_i et n_{i+1}. Mais alors, par construction, α est entre α_{n_i} et $\alpha_{n_{i+1}}$, alors que α_n n'y est pas, ainsi qu'on l'a noté ci-dessus. On a donc à nouveau $\alpha \neq \alpha_n$. □

Cantor observe que le rapprochement des théorèmes 1 et 2 permet de redémontrer l'existence de réels non algébriques, établie pour la première fois par Liouville en 1851.

1.4. En quoi ces résultats sont remarquables

L'infini apparaît dans les textes mathématiques dès l'Antiquité, mais il y apparaît en creux, comme une propriété négative (est infini ce qui n'est pas fini) et une limite inatteignable, mais non comme un objet d'étude en soi.

Vers le milieu du dix-neuvième siècle, une maturation s'est opérée et on commence à réfléchir sur l'infini en des termes plus mathématiques. Par exemple, dans un texte posthume intitulé « Paradoxien des Unendlichen »[4] paru en 1851, Bernhard Bolzano (1781–1848) observe qu'il y a autant d'éléments dans l'intervalle réel $[0,5]$ que dans l'intervalle $[0,12]$, et donc que, dans une collection infinie, une partie propre peut être aussi grosse que le tout – mais c'est ce qu'avait déjà fait Thâbit bin Qurrâ al-Harrânî (836–901) mille ans plus tôt. Pour autant, l'infini reste *terra incognita* et objet de nul résultat ou démonstration, ni même définition puisque la propriété rappelée ci-dessus ne sera explicitement proposée comme définition de l'infini que par Richard Dedekind vers 1888.

Ce qui est profondément novateur dans l'article de Cantor est le fait de *démontrer* des propriétés de l'infini. Ce que fait Cantor, c'est démontrer le premier théorème sur l'infini, en l'occurrence qu'il existe non pas un infini, mais au moins deux : l'infini des nombres algébriques est le même que celui des nombres entiers, mais ce n'est pas le même que celui des nombres réels. Indépendamment de l'énoncé du résultat, qui n'est peut-être pas si important en soi, c'est la possibilité de son existence qui est novatrice : avec Cantor, l'infini devient objet d'étude. La lettre à Dedekind de décembre 1873 est donc le point de naissance d'une théorie mathématique complètement nouvelle, la théorie de l'infini – qui sera plutôt appelée la théorie des ensembles. Il est rare que le point de départ de ce qui deviendra un courant de pensée aussi important puisse être daté avec autant de précision.

Un point mérite d'être relevé. Cantor a intitulé son article « Sur une propriété de la collection des nombres algébriques », ce qui correspond au théorème 1, mais non au théorème 2, qui pourtant nous apparaît aujourd'hui comme le résultat le plus novateur. Comme dans [4], on peut se demander si l'accent mis sur le résultat positif (on peut énumérer...) plutôt que sur le résultat négatif (on ne peut pas énumérer...) n'est pas une précaution de Cantor pour éviter le rejet de son article par Leopold Kronecker (1823–1891), alors éditeur du Journal de Crelle et grand contempteur de l'infini et de toutes les spéculations qu'on appellerait aujourd'hui non effectives.

1.5. L'argument diagonal

En 1891, dix-huit ans après l'article de 1874, Cantor publie une nouvelle démonstration du théorème 2, encore plus simple et frappante, et passée à la postérité comme la démonstration de référence. L'argument dit *diagonal* qui est à la base de cette démonstration a des éléments communs avec une construction développée dès 1875 par Paul du Bois-Reymond (1831–1889), mais la combinaison d'une autoréférence et d'une négation, qui est le point décisif, y apparaît semble-t-il pour la première fois. On sait que cet argument a eu une descendance extraordinaire, puisqu'il est l'ingrédient technique de base dans plusieurs des grands

---

[4] Paradoxes de l'infini.

résultats de la logique du vingtième siècle, notamment le paradoxe de Russell, les théorèmes d'incomplétude de Gödel, la construction d'ensembles indécidables par Turing, et les théorèmes de hiérarchie en théorie de la complexité.

Démonstration du théorème 2 par l'argument diagonal. Soit $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ une suite quelconque de nombres réels. On va à nouveau exhiber un nombre réel α qui est différent de chacun des α_n. Cette fois, on n'utilise pas l'ordre des nombres réels, mais l'existence d'un développement binaire pour chaque nombre réel. Pour chaque entier n, il existe une suite infinie $(a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots)$ de 0 et de 1 telle qu'on ait

$$\alpha_n - E(\alpha_n) = \overline{0, a_{n,1}a_{n,2}\ldots},,$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Posons alors $0^* = 1$, $1^* = 0$, et soit α le réel dont le développement binaire est

$$\overline{0, a^*_{1,1}a^*_{2,2}\ldots},.$$

Alors, quel que soit n, le réel α est différent de α_n, puisque le n-ième chiffre du développement de α_n est $a_{n,n}$, alors que celui de α est $a^*_{n,n}$, qui est différent de $a_{n,n}$ par construction[5]. □

2. L'héritage (1) : les ordinaux

La descendance de l'article de Cantor est extraordinaire puisque c'est toute la théorie des ensembles et, de là, une part non négligeable des mathématiques du vingtième siècle qui peuvent s'y rattacher. Cette descendance peut être décrite en partant des travaux ultérieurs de Cantor. Toujours à Halle, où il devient professeur en 1879 à trente-quatre ans, Cantor s'intéresse de plus en plus à ce qui deviendra la théorie des ensembles et, entre 1879 et 1884, il publie dans les *Mathematische Annalen* une série de six articles qui forment le socle de cette théorie.

Dans cet héritage, on distinguera ici deux thèmes principaux, le premier étant la possibilité de compter au-delà du fini, qui mène à la notion d'ordinal transfini.

2.1. Une théorie des nombres transfinis

Ce que montre Cantor, c'est que, une fois franchie la barrière conceptuelle qui rendait l'infini inaccessible, alors rien ne s'oppose à développer une arithmétique des nombres infinis – ou, plutôt, transfinis, c'est-à-dire au-delà du fini – qui ressemble beaucoup à l'arithmétique des nombres entiers et peut être utilisée en particulier pour des démonstrations par récurrence.

L'idée est de prolonger la suite des nombres entiers, c'est-à-dire de *compter* au-delà de $0, 1, 2, \ldots$. Pour ce faire, le principe placé par Cantor à la base de sa

[5] Tel quel, l'argument n'est pas rigoureux, car il suppose l'unicité du développement binaire, laquelle n'est vraie que pour les réels qui ne sont pas des rationnels dyadiques (rationnels pouvant s'écrire avec un dénominateur qui est une puissance de 2) : ces derniers admettent deux développements, l'un terminé par une infinité de 0, l'autre par une infinité de 1. Pour rendre l'argument rigoureux, il suffit de considérer le réel α' dont le développement binaire est $\overline{0, 1a^*_{1,2}0a^*_{2,4}1a^*_{3,6}0a^*_{4,8}\ldots}$ ce réel n'est certainement pas dyadique, et il diffère de α_n pour tout n. En effet, si α_n est dyadique, on a $\alpha' \neq \alpha_n$ puisque α' n'est pas dyadique, et, sinon, on a $\alpha' \neq \alpha_n$ puisque le $2n$-ième chiffre du développement (unique) de α' n'est pas celui du développement (unique) de α_n.

FIG. 2. Georg Cantor, probablement dans les années 1880

construction est une propriété bien connue pour les nombres entiers et au cœur des démonstrations par récurrence, à savoir que tout ensemble non vide a un plus petit élément. Ce qu'observe Cantor, c'est que, si on garde ce principe, alors il n'existe qu'une façon de prolonger la suite des entiers. Par exemple, il doit exister un plus petit nombre transfini plus grand que tous les entiers, et Cantor l'appelle ω. Ensuite, il doit exister un plus petit nombre transfini plus grand que ω, et Cantor l'appelle $\omega+1$. Évidemment, viennent ensuite $\omega+2$, $\omega+3$, *etc.*, puis un plus petit nombre transfini qui est plus grand que tous les $\omega+n$ et qu'on appelle $\omega+\omega$, ou encore $\omega\cdot 2$. On continue avec $\omega\cdot 2+1$, puis, un peu plus tard, $\omega\cdot 3$, et ainsi de suite. Il existe un plus petit nombre transfini qui vient après tous les $\omega\cdot n$, et on le note $\omega\cdot\omega$, ou encore ω^2. Il n'y aucune raison de s'arrêter en si bon chemin, et on trouve encore plus tard ω^3, ω^4, puis ω^ω, puis ω^{ω^2}, et même un jour ω^{ω^ω}, ... et encore bien d'autres nombres transfinis au-delà.

Ce que démontre Cantor – sans toutefois convaincre le très réticent Kronecker – c'est que la description ci-dessus n'est pas juste une extrapolation gratuite et hasardeuse, mais un système cohérent pouvant être utilisé dans des démonstrations. Par exemple, lui-même l'utilise en 1883 dans l'étude des ensembles d'unicité pour démontrer au moyen d'une récurrence sur les nombres transfinis, et en même temps que le mathématicien suédois Ivar Bendixson (1861–1935), un résultat demeuré fameux sur la structure des sous-ensembles fermés de la droite réelle, à savoir que tout tel ensemble peut s'écrire comme réunion d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble dont tous les points sont points d'accumulation.

2.2. Une application amusante

Les nombres transfinis – aujourd'hui appelés *ordinaux* – sont un moyen puissant de démontrer des résultats mathématiques. Ce qui est intéressant, et peut paraître paradoxal, c'est que l'utilisation des ordinaux infinis permet parfois de démontrer des propriétés d'objets finis qui resteraient sinon inaccessibles. Un exemple spectaculaire est fourni par la convergence des suites de Goodstein en arithmétique. Il s'agit de suites d'entiers définies par une récurrence simple à partir de la notion de développement itéré en base p. Développer un entier n en base p consiste à décomposer n sous forme d'une somme décroissante

$$n = p^{n_1} \cdot c_1 + \cdots + p^{n_k} \cdot c_k$$

où les chiffres c_i sont compris entre 1 et $p-1$, et où les exposants n_i sont des entiers, nécessairement strictement inférieurs à n. On peut alors exprimer les exposants n_i eux-mêmes en base p, et itérer le processus. On appellera développement *itéré* de n en base p l'expression ainsi obtenue. Par exemple, le développement de 26 en base 2 est $2^4 + 2^3 + 2^1$: le développement de 4 est 2^2, celui de 3 est $2^1 + 1$, et, finalement, le développement itéré de 26 en base 2 est $2^{2^{2^1}} + 2^{2^1+1} + 2^1$, ou encore $2^{2^2} + 2^{2+1} + 2$ si on omet les exposants 1.

Définition 1. (*i*) *Pour $q \geqslant p \geqslant 2$, on définit $T_{p,q} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ comme suit : $T_{p,q}(n)$ est l'entier obtenu en remplaçant partout p par q dans le développement itéré de n en base p, et en évaluant le résultat.*

(*ii*) *Pour chaque entier d, on définit la* suite de Goodstein de base d *comme la suite d'entiers $g_2, g_3, \ldots$ vérifiant $g_2 = d$ puis, inductivement,*

$$g_{p+1} = T_{p,p+1}(g_p) - 1$$

si g_p est non nul, et $g_{p+1} = 0$ si g_p est nul.

Par exemple, partant de $g_2 = 26$, on trouve

$$T_{2,3}(26) = T_{2,3}(2^{2^2} + 2^{2+1} + 2) = 3^{3^3} + 3^{3+1} + 3 = 3^{27} + 3^4 + 3 = 7625597485071,$$

et donc $g_3 = 7625597485070$. On recommence ensuite de même en remplaçant 3 par 4, et ainsi de suite. Il semble clair que la suite ainsi obtenue tend vers l'infini extrêmement vite. Et, pourtant, Reuben Goodstein (1912-1985) a démontré en 1942 le résultat suivant :

Théorème 3. *Pour tout entier d, la suite de de Goodstein de base d converge vers 0 : il existe un entier p vérifiant $g_p = 0$.*

Démonstration. L'argument est très simple à partir du moment où on peut utiliser l'arithmétique ordinale. Pour cela, nous introduisons, pour chaque entier p, une fonction $T_{p,\omega}$ analogue à $T_{p,q}$, mais qui va de $\mathbb{N}$ dans les ordinaux : $T_{p,\omega}(n)$ est l'ordinal obtenu en remplacant p par ω dans le développement itéré de n en base p. Ainsi, par exemple, on a

$$T_{2,\omega}(26) = T_{2,\omega}(2^{2^2} + 2^{2+1} + 2) = \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega+1} + \omega.$$

Les propriétés de l'arithmétique des ordinaux entraînent facilement que chacune des fonctions $T_{p,\omega}$ est strictement croissante. Alors, pour $p \geqslant 2$, on pose $\widetilde{g}_p = T_{p,\omega}(g_p)$. Pour chaque entier d, on a ainsi une suite d'ordinaux $\widetilde{g}_2, \widetilde{g}_3, \ldots$ Par construction, quels que soient p, q, r vérifiant $2 \leqslant p \leqslant q \leqslant r \leqslant \omega$, et quel que soit n, on a $T_{q,r}(T_{p,q}(n)) = T_{p,r}(n)$, et, en particulier, $T_{p+1,\omega}(T_{p,p+1}(n)) = T_{p,\omega}(n)$. On en déduit, pour tout p tel que g_p soit non nul,

$$\begin{aligned}\widetilde{g}_{p+1} = T_{p+1,\omega}(g_{p+1}) &= T_{p+1,\omega}(T_{p,p+1}(g_p) - 1)\\ &< T_{p+1,\omega}(T_{p,p+1}(g_p)) = T_{p,\omega}(g_p) = \widetilde{g}_p.\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{g}_2 \arrow[r, equal] & \widetilde{g}_2 \arrow[r, ">"] & \widetilde{g}_3 \arrow[r, equal] & \widetilde{g}_3 \arrow[r, ">"] & \widetilde{g}_4 \arrow[r, equal] & \cdots \\
g_2 \arrow[u, "T_{2,\omega}"'] \arrow[r, "T_{2,3}"'] & \bullet \arrow[u, "T_{3,\omega}"'] \arrow[r, "-1"'] & g_3 \arrow[u, "T_{3,\omega}"'] \arrow[r, "T_{3,4}"'] & \bullet \arrow[u, "T_{4,\omega}"'] \arrow[r, "-1"'] & g_4 \arrow[u, "T_{4,\omega}"'] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

FIG. 3. Démonstration du théorème de Goodstein : en bas, les entiers, en haut, leurs images chez les ordinaux infinis, qui gomment les changements de base ; ne restent alors que les -1 qui forcent la décroissance aussi longtemps que 0 n'est pas atteint

La propriété fondamentale de la suite des ordinaux, à savoir que tout ensemble non vide a un plus petit élément, entraîne que toute suite strictement décroissante d'ordinaux doit être finie. Il existe donc nécessairement un entier p tel que $\widetilde{g}_p$ soit nul, ce qui ne peut se produire que si g_p est également nul (figure 3). □

Le point essentiel dans la démonstration précédente est l'existence de l'ordinal ω, c'est-à-dire l'existence d'un nombre transfini qui domine tous les entiers à la façon dont ω le fait, c'est-à-dire qui soit tel que la distance de 3 à ω soit la même que celle de 2 à ω.

Ce qui est remarquable est que le théorème 3, qui est un pur résultat d'arithmétique, au sens où son énoncé ne met en jeu que les entiers et leurs opérations élémentaires, et qu'on a démontré si simplement en utilisant les ordinaux infinis, ne peut *pas* être démontré sans faire appel à un tel outil. Précisément, s'appuyant sur une méthode développée par Paris et Harrington en 1978, Kirby et Paris ont démontré en 1981 [16] que le théorème de Goodstein ne peut pas être démontré en utilisant seulement les axiomes du système de Peano, c'est-à-dire en restant dans le cadre de l'arithmétique usuelle. En un sens, ce résultat légitime la suspicion de Kronecker envers les méthodes de Cantor[6] ; en un autre sens, il illustre la portée visionnaire de ces dernières.

2.3. Les ordinaux aujourd'hui

Plus d'un siècle plus tard, les tensions sont apaisées, les questions de fondement ont été éclaircies, et les ordinaux et la récurrence transfinie font partie de la palette des mathématiciens. Pour autant, à l'exception de la logique mathématique et de certaines parties de l'informatique théorique (terminaison des systèmes de réécriture) qui en font grand usage, force est de constater que ces outils, pourtant aussi élégants que puissants, restent assez peu utilisés dans le cœur des mathématiques – à quelques notables exceptions près comme le théorème de Martin sur la détermination des boréliens. Ceci n'est pas très étonnant dans la mesure où, finalement, les mathématiques ne font qu'un usage assez limité de l'infini actuel, c'est-à-dire d'un infini qui ne soit pas simplement la continuation indéfinie de la suite des entiers.

[6] Kronecker n'aurait certainement pas été rassuré d'apprendre que le plus petit entier p pour lequel le p-ième terme de la suite de Goodstein de base 4 vaut zéro est $3 \cdot 2^{402653211} - 2$.

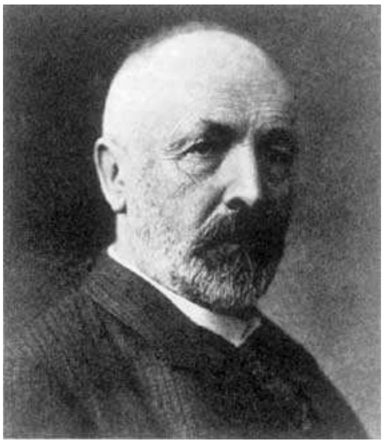


FIG. 4. Georg Cantor, probablement aux alentours de 1900

3. L'héritage (2) : le problème du continu

L'autre héritage direct de l'article de 1874 est la théorie des cardinaux et son problème central, le problème du continu, qui est la question de déterminer le cardinal de l'ensemble des nombres réels. Cantor a cherché pendant toute la suite de sa vie la solution au problème du continu. Resté à Halle – l'opposition de Kronecker l'empêcha de trouver un poste à Berlin – il continua à y développer sa théorie des ensembles, avec des résultats notables comme l'argument diagonal de 1891 ou le théorème de comparabilité des cardinalités de 1897, mais il ne résolut jamais le problème du continu. La fin de sa vie est assez triste. Bien que la portée scientifique de son œuvre ait été largement reconnue par ses pairs, sa vie à partir de 1884, et jusqu'à sa mort en 1918, a été assombrie par des polémiques scientifiques et surtout des épisodes dépressifs de plus en plus sévères qui ont entraîné des internements récurrents dans des institutions de soin.

De son côté, le problème du continu est resté au cœur de la théorie des ensembles tout au long du vingtième siècle et aujourd'hui plus que jamais, à un moment où l'espoir d'une solution commence à se dessiner.

3.1. Une infinité d'infinis

Le théorème 2 a montré qu'il existe au moins deux infinis qu'on ne peut pas mettre en correspondance bijective, à savoir celui de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et celui de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Intuitivement donc, ces infinis n'ont pas la même taille, et le théorème 2 ouvre une nouvelle problématique qui est celle de comparer la taille des infinis.

Rapidement, dès 1878, Cantor a proposé de formaliser la comparaison des tailles dans les termes que nous utilisons toujours, à savoir l'existence de bijections et d'injections : on déclare qu'un ensemble A, fini ou infini, a la même taille (ou cardinalité) qu'un ensemble B s'il existe une bijection de A sur B de même, on déclare que A est de taille (ou de cardinalité) au plus celle de B s'il existe une injection de A dans B. Noter que, dans le cas d'ensembles finis, ces définitions correspondent bien à la comparaison usuelle des nombres d'éléments. En 1897, Cantor et, au même moment, Felix Bernstein (1878–1956) et Ernst Schröder (1841–1902) montreront que cette comparaison des cardinalités est un ordre total : s'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A, alors il existe une bijection de A sur B.

On notera aussi que la théorie des cardinalités infinies se sépare rapidement de celle des ordinaux transfinis : alors que, pour les ensembles finis, dénombrer et ordonner sont des tâches équivalentes, il n'en est pas de même pour les ensembles infinis. Précisément, il n'existe qu'un seul type d'ordre total sur un ensemble fini de cardinalité donnée, alors qu'il existe de multiples ordres totaux deux à deux non isomorphes sur un ensemble infini. Par exemple, du point de vue de la taille, les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont équivalents, alors que, munis de leurs ordres usuels, ils ne le sont pas.

Dans ce contexte, le théorème 2 affirme qu'il existe au moins deux cardinalités infinies distinctes. Cantor lui-même montrera un résultat beaucoup plus fort grâce à une forme de l'argument diagonal.

Théorème 4 (Cantor)**.** *Il existe une infinité d'infinis deux à deux distincts : les cardinalités de $\mathbb{N}$, $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{N}))$, ... sont deux à deux distinctes.*

Démonstration. On commence par démontrer que, quel que soit l'ensemble E, il n'existe pas de surjection, et donc *a fortiori* pas de bijection, de E sur l'ensemble des parties $\mathfrak{P}(E)$. En effet, soit f une application quelconque de E dans $\mathfrak{P}(E)$. On va montrer que f n'est pas surjective en exhibant une partie de E qui n'appartient pas à l'image de f. À cet effet, posons

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}. \tag{4}$$

Soit a un élément quelconque de E. De deux choses l'une. Ou bien a est dans A, ce qui signifie que a n'appartient pas à $f(a)$. Comme a est dans A, c'est que $f(a)$ n'est pas égal à A. Ou bien a est dans le complémentaire de A, ce qui signifie que a appartient à $f(a)$. Comme a n'est pas dans A, c'est à nouveau que $f(a)$ n'est pas égal à A. Donc A ne peut appartenir à l'image de l'application f, et celle-ci ne peut être surjective.

Ceci démontré, posons $E_0 = \mathbb{N}$, $E_1 = \mathfrak{P}(E_0)$, $E_2 = \mathfrak{P}(E_1)$, etc. D'après ce qui précède, quel que soit i, il ne peut exister de bijection de E_i sur E_{i+1}. Par ailleurs, pour tout ensemble non vide E, l'application qui envoie X sur x si X est le singleton $\{x\}$, et sur un élément fixé x_0 sinon, est une surjection de $\mathfrak{P}(E)$ sur E. Par conséquent, pour tous i, j vérifiant $j \geqslant i+2$, il existe une surjection de E_j sur E_{i+1}. De là, s'il existait une bijection de E_i sur E_j, on en déduirait par composition une surjection de E_i sur E_{i+1}, contrairement à ce qu'on a vu plus haut. $\square$

On reconnaît dans la démonstration du théorème 4 les deux ingrédients de l'argument diagonal, à savoir la combinaison d'une autoréférence – utilisation simultanée de x et $f(x)$ ici, comme celle des chiffres diagonaux $a_{i,i}$ dans la section 1 – et d'une négation – $x \notin f(x)$ ici, utilisation de $a^*_{i,i}$ dans la section 1.

3.2. L'hypothèse du continu

Dès lors qu'il existe une infinité de cardinalités infinies différentes, une question évidente est de déterminer la position des cardinalités des ensembles les plus usuels, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$, dans cette famille. Pour ce qui est de la cardinalité de $\mathbb{N}$, on voit facilement que c'est la plus petite des cardinalités infinies : $\mathbb{N}$ s'injecte dans tout ensemble infini[7]. D'après le théorème 2, la cardinalité de $\mathbb{R}$ est strictement plus grande que celle de $\mathbb{N}$. Ce qu'on appelle le *problème du continu*[8], c'est précisément de déterminer quel infini est la cardinalité de $\mathbb{R}$.

Dès 1877 – avant même d'avoir établi l'existence d'une infinité d'infinis et la comparabilité de ceux-ci – Cantor a prédit une solution au problème du continu, l'*hypothèse du continu* :

Toute partie infinie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas en bijection avec $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{R}$.

L'hypothèse du continu signifie qu'il n'existe aucun ensemble de taille strictement intermédiaire entre celles de $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, en termes de cardinalités, que la cardinalité de $\mathbb{R}$ (le continu) est un successeur immédiat pour celle de $\mathbb{N}$ (le dénombrable).

Cantor n'a jamais réussi à démontrer (ou à réfuter) l'hypothèse du continu. Le seul résultat notable qu'il démontra sur le problème du continu est le théorème dit de Cantor–Bendixson sur la structure des fermés mentionné plus haut. Celui-ci entraîne facilement que tout sous-ensemble fermé infini de $\mathbb{R}$ qui n'est pas en bijection avec $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{R}$ entier : ainsi, on peut dire que les fermés satisfont à l'hypothèse du continu. Hélas, Cantor ne put jamais obtenir de résultat analogue pour des sous-ensembles plus compliqués de $\mathbb{R}$ – et les développements de la théorie des ensembles au vingtième siècle montrent qu'on était très loin à l'époque de disposer des moyens techniques de le faire.

Par contre, sans résoudre en rien la question, les travaux ultérieurs de Cantor permettent de donner du problème du continu la version symbolique concise sous laquelle il est souvent énoncé aujourd'hui. Le point de départ est un nouveau résultat fondamental de Cantor qui précise considérablement le théorème 4 et le théorème de Cantor–Bernstein–Schröder.

Théorème 5 (Cantor)**.** *Il existe une suite de cardinalités indexée par les ordinaux*

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots < \aleph_\omega < \aleph_{\omega+1} < \ldots$$

telle que tout[9] *ensemble infini admet pour cardinalité un (et un seul) des alephs*[10]*.*

Ainsi, non seulement il existe une infinité d'infinis, mais on a une description complète de la structure de cette famille des infinis, à savoir une suite bien ordonnée indexée par les ordinaux. Le théorème 5 affirme en particulier que, pour chaque cardinalité κ, il existe une plus petite cardinalité strictement plus grande que κ, ce qui n'a rien d'évident : il aurait très bien pu se faire *a priori* que l'ordre des cardinalités inclue des intervalles denses, comme l'ordre des nombres rationnels.

---

[7] En termes modernes, il faut au moins une forme faible de l'axiome du choix pour pouvoir affirmer ceci ; ces questions somme toute mineures n'interviendront que plus tard, et n'affectent pas vraiment la théorie cantorienne des cardinaux qui est, principalement, une théorie des ensembles bien ordonnables, c'est-à-dire une théorie où l'axiome du choix est valide.

[8] À l'époque de Cantor, l'ensemble des nombres réels est appelée *le continu*.

[9] Ici encore, il convient de préciser « tout ensemble infini bien ordonnable » pour tenir compte des problèmes de choix

[10] $\aleph$ est la première lettre, aleph, de l'alphabet hébraïque.

Dans ce contexte, $\aleph_0$ est la cardinalité de $\mathbb{N}$, et le problème du continu devient celui de déterminer quel aleph est la cardinalité de $\mathbb{R}$. L'hypothèse du continu prend alors la forme simple $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \aleph_1$, puisque $\aleph_1$ est, par définition, le successeur immédiat de $\aleph_0$ dans la suite des alephs.

Par ailleurs, il est facile de définir une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$, donc entre $\mathbb{R}$ et l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$. Puisque la cardinalité de $\mathbb{N}$ est $\aleph_0$, il est naturel de noter $2^{\aleph_0}$ celle de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, qui est donc aussi celle de $\mathbb{R}$. Avec ce formalisme, l'hypothèse du continu correspond donc à l'égalité

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

3.3. Le développement d'une discipline nouvelle

En 1900, David Hilbert (1862–1943) expose au Congrès International des Mathématiciens à Paris sa fameuse liste de vingt-trois problèmes pour les mathématiques du vingtième siècle, et place au premier rang la question de savoir si l'hypothèse du continu est vraie ou fausse. C'est le signe que les réticences sur l'usage de l'infini autrement que comme limite inatteignable ont été dépassées et que le caractère fondamental de l'œuvre de Cantor a été reconnu. Hilbert décrit l'arithmétique transfinie de Cantor comme « le produit le plus étonnant de la pensée mathématique, et une des plus belles réalisations de l'activité humaine dans le domaine de l'intelligence pure ».

Les progrès directs sur le problème du continu ont été lents, car ils n'ont pu se produire qu'après le développement d'un substrat considérable. Dans la lignée du théorème de Cantor–Bendixson montrant que les fermés satisfont à l'hypothèse du continu, un résultat précoce est le théorème démontré en 1916, à l'âge de vingt ans, par Pavel Alexandroff (1896–1982) : les boréliens satisfont à l'hypothèse du continu[11]. On sait maintenant que ce résultat est l'optimum de ce qui pouvait être établi à l'époque, et cette direction de recherche n'a pu être poursuivie qu'à partir des années 1970 avec le développement de ce qu'on appelle la théorie descriptive des ensembles moderne, à savoir l'étude fine des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

La grande difficulté du problème du continu et, plus généralement, de toutes les questions mettant en jeu l'infini, et ce qui rendait pratiquement impossible une solution à l'époque de Cantor, était l'absence d'un cadre conceptuel à la fois précis et objet d'un consensus général pour élaborer une théorie et démontrer des résultats. Cantor a bien proposé une définition devenue classique de la notion d'ensemble – « n'importe quelle collection M d'objets de notre pensée ou de notre intuition définis et séparés ; ces objets sont appelés éléments de M »– mais cela ne saurait suffire à préciser la règle du jeu, c'est-à-dire à déterminer d'où partir pour *démontrer* des propriétés des ensembles. Cantor lui-même a reconnu, en même temps que d'autres comme Cesare Burali-Forti (1861–1931) ou Bertrand Russell (1872–1970), les difficultés où mène l'imprécision de la notion d'objet défini, et ce n'est qu'à partir du début du vingtième siècle que ces points ont commencé à être éclaircis : ce qui importe au mathématicien n'est point de définir ce qu'*est* un ensemble, mais simplement d'obtenir un consensus sur la façon dont *fonctionnent* les ensembles, c'est-à-dire sur le point de départ à partir duquel démontrer des

[11] Mais Alexandroff, déçu de n'avoir pas résolu le problème du continu, devint producteur de théâtre et ne revint aux mathématiques que des années plus tard.

théorèmes. En 1908, Ernst Zermelo (1871–1953) a proposé un système axiomatique pour les ensembles, ultérieurement amendé en 1922 par Adolf Fraenkel (1891–1965), et ce système, connu sous le nom de *système de Zermelo–Fraenkel* ou système ZF, s'est assez rapidement imposé comme un point de départ standard pour la théorie des ensembles, à la façon dont le système d'Euclide est un point de départ pour la géométrie du plan ou le système de Peano en est un pour l'arithmétique.

3.4. Deux résultats majeurs...

À partir du moment où un consensus était établi pour tenir le système ZF comme point de départ d'une théorie des ensembles, la première étape en direction d'une solution du problème du continu est de déterminer si l'hypothèse du continu est ou non une conséquence des axiomes de ce système. Ce n'est pas le cas : Kurt Gödel (1906–1978) d'abord, puis, vingt-cinq ans plus tard, Paul Cohen (1934–2007), ont montré deux résultats négatifs :

Théorème 6 (Gödel, 1938). *Sauf si ceux-ci sont contradictoires*[12]*, la négation de l'hypothèse du continu n'est pas conséquence des axiomes du système* ZF.

Théorème 7 (Cohen, 1963). *Sauf si ceux-ci sont contradictoires, l'hypothèse du continu n'est pas conséquence des axiomes du système* ZF.

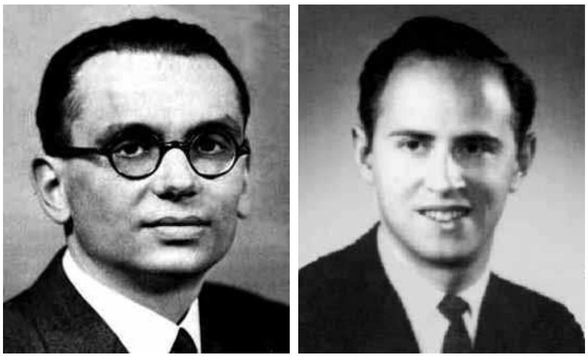


FIG. 5. Kurt Gödel (à gauche) et Paul Cohen (à droite)

Les théorèmes de Gödel et de Cohen sont à juste titre considérés comme des étapes majeures. Leur démonstration a requis la mise en œuvre de moyens complètement nouveaux, méthode des modèles intérieurs dans le cas de Gödel, méthode du forcing dans celui de Cohen. Indépendamment des difficultés purement techniques (qui restent non négligeables, même avec le recul de plusieurs décennies), ces résultats ont nécessité un changement de point de vue complet sur la théorie des ensembles, analogue en bien des points à la révolution copernicienne ou à la découverte des géométries non euclidiennes puisqu'il s'agissait de passer de la vision d'un monde des ensembles unique à celle d'une multiplicité de mondes possibles.

[12] La précaution oratoire est nécessaire, car le second théorème d'incomplétude de Gödel empêche qu'on puisse établir le caractère non-contradictoire du système ZF ; il est donc impossible d'écarter *a priori* l'hypothèse que ce système soit contradictoire.

3.5. ... et deux malentendus

La destinée de la théorie des ensembles n'a, dans la suite du vingtième siècle, guère été plus heureuse que la destinée personnelle de son créateur, Georg Cantor. Deux malentendus sont à l'origine de cette situation.

Le premier malentendu tient au succès-même de la théorie des ensembles. Ce que Zermelo a saisi probablement le premier[13], c'est la possibilité d'utiliser les ensembles comme base unique de la totalité de l'édifice mathématique. Précisément, on peut *représenter* comme ensembles les fonctions (Felix Hausdorff, 1918), puis les entiers (John von Neumann, 1923), et, de là, la quasi-totalité des objets mathématiques. Certes remarquable, ce résultat – mis en œuvre de façon systématique dans le traité de Bourbaki quelques années plus tard – a été pris pour bien plus que ce qu'il est, à savoir un résultat de codage, analogue par exemple à la possibilité de coder les points d'un plan par un couple de nombres réels ou par un nombre complexe. Des épigones approximatifs ont vu un résultat ontologique là où il n'est question que de codage, et posé un dogme « tout est ensemble » faisant jouer à la théorie des ensembles le rôle d'une théorie du grand tout qu'elle ne revendique nullement : il est difficile à un mathématicien laïque de croire que l'entier 2 *est* l'ensemble $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, puisqu'aucune intuition ne vient étayer une telle identité, et qu'aucune démonstration ne saurait en être donnée. Il était dès lors inévitable que l'engouement déraisonnable suscité par cette approche soit déçu et que les applications somme toute mineures de la théorie au reste des mathématiques entraînent un rejet à la mesure des espoirs initiaux. Les dérives pédagogiques des années 1960, directement issues d'une confusion entre « tout est représentable par des ensembles » et « tout est ensemble », n'ont évidemment pas redoré le blason d'une théorie méconnue et souvent imaginée comme la manipulation de diagrammes de Venn aussi abstraits que vides de sens mathématique : la théorie des ensembles est la théorie de l'infini, et elle n'a que très peu à voir avec l'utilisation – au demeurant quotidienne et bien commode – du vocabulaire ensembliste élémentaire par tous les mathématiciens contemporains.

Le second malentendu tient à la signification des théorèmes de Gödel et Cohen. Le public cultivé, et bien des mathématiciens, en ont retenu que le problème du continu est un problème qui ne peut pas être résolu et restera ouvert pour l'éternité. Certains imaginent un mystérieux statut qui ne serait ni vrai, ni faux, ou alors serait intrinsèquement inconnaissable, ou encore dépourvu de tout sens véritable. Ce que disent les résultats de Gödel et Cohen est tout autre, et bien plus simple : ils disent, ou plutôt illustrent puisqu'on le savait déjà depuis les théorèmes d'incomplétude de Gödel, que le système ZF de Zermelo-Fraenkel est incomplet, lacunaire, qu'il n'épuise pas les propriétés des ensembles. Ce sur quoi existe un consensus quasiment général, c'est sur le fait que les axiomes de ZF expriment des propriétés des ensembles que notre intuition recommande de tenir pour vraies. Autrement dit, nous jugeons opportun de prendre ces axiomes comme point de départ et d'accepter comme valides leurs conséquences. Mais personne – en tout cas aucun spécialiste de théorie des ensembles – n'a jamais prétendu que les axiomes de ZF épuisent notre intuition des ensembles. L'exploration de cette notion est en cours, et il se peut très bien que, dans le futur, un consensus émerge sur l'opportunité

[13] Il ne semble pas que Cantor ait anticipé cet aspect du développement de la théorie des ensembles.

d'ajouter de nouveaux axiomes, au fur et à mesure qu'on reconnaîtra comme pertinentes de nouvelles propriétés des ensembles et de l'infini. Ainsi les résultats de Gödel et Cohen ont *ouvert* le problème du continu bien plus qu'ils ne l'ont fermé.

3.6. Le problème du continu aujourd'hui

Près de cinquante ans après le résultat de Cohen, le problème du continu n'est pas réglé, mais des progrès importants ont été effectués et il n'est pas exclu qu'une solution apparaisse dans un futur assez proche.

Le développement majeur de la théorie des ensembles depuis les années 1970 a été l'émergence progressive, sur la base d'un corpus considérable de résultats convergents, d'un consensus quant à l'opportunité d'ajouter au système ZF des axiomes additionnels affirmant l'existence d'infinis de plus en plus grands – ce qui n'est qu'une itération naturelle de l'approche de Cantor [13, 14, 20]. Ces axiomes, dits « de grands cardinaux », ont des formes techniques variées. Le plus important d'entre eux, l'axiome DP dit de *détermination projective*, s'exprime en termes de jeux infinis et on peut le voir comme une forme forte du principe du tiers exclu (si A n'est pas vrai, alors la négation de A est vraie). Le progrès technique principal a été un théorème démontré par Donald A. Martin et John Steel en 1985 et sa réciproque démontrée par Hugh Woodin en 1987 [18, 6]. Essentiellement, ces résultats montrent que le système ZF + DP fournit une description aussi satisfaisante du monde des ensembles dénombrables que ce que le système ZF fournit pour le monde des ensembles finis, à savoir une description qui, en pratique et de façon heuristique, apparaît complète : même si les théorèmes de Gödel empêchent une complétude formelle, et malgré les remarquables résultats de H. Friedman, force est de constater que jamais le défaut de complétude du système ZF n'est apparu comme un véritable facteur limitant en arithmétique ou en combinatoire finie. Sur la base du système ZF + DP, il en est de même pour le niveau suivant, qui est celui de la topologie et de l'analyse dans les ensembles projectifs au sens de Luzin[14]. C'est précisément ce type de complétude heuristique qui suscite l'émergence progressive au sein de la communauté des théoriciens des ensembles – en attendant celle de tous les mathématiciens – d'un consensus pour ajouter l'axiome DP aux axiomes de ZF comme nouveau point de départ de la théorie des ensembles.

Dès lors, l'étude de l'univers des ensembles finis et des ensembles dénombrables est, en un sens, terminée, et l'étape suivante est celle des ensembles de cardinalité $\aleph_1$. C'est à ce niveau que le travail se poursuit depuis la fin des années 1980 [21]. Or, c'est là que se pose le problème du continu dans sa forme générale. Par exemple, le système ZF+DP entraîne que tous les ensembles projectifs satisfont à l'hypothèse du continu, mais il ne dit rien – et ne peut rien dire – sur les ensembles de réels plus compliqués.

À l'heure actuelle, la situation reste ouverte, mais il existe au moins une approche qui mène à un enchaînement de théorèmes probant, à savoir l'approche développée par Hugh Woodin à partir de la notion dite d'absoluité générique, qui consiste, *grosso modo*, à privilégier les propriétés qui sont invariantes par l'action du forcing de Cohen. Ce que montre Woodin, ce sont deux résultats [22, 23, 7, 8], à savoir

[14] La famille des ensembles projectifs est la clôture de la famille des ensembles boréliens par image continue et complément.

qu'il existe un axiome[15] qui, ajouté à ZF + DP, donne, pour le niveau de $\aleph_1$, le même type de description que ZF + DP donne pour le dénombrable, et, d'autre part, que *tout* axiome menant à la situation précédente entraîne nécessairement la fausseté de l'hypothèse du continu.

Ces travaux de Woodin ne constituent pas encore *la* solution du problème du continu pour plusieurs raisons : d'abord il n'existe pas de consensus sur le point de vue adopté (chercher une axiomatisation basée sur la notion d'absoluité générique) [9], ensuite les résultats de Woodin sont pour le moment conditionnés par une hypothèse technique (« la Ω-conjecture ») prédisant que tous les axiomes de grands cardinaux obéissent à certaines règles structurelles. Par contre, ce que montrent ces résultats, c'est qu'il est tout à fait possible de continuer à explorer la notion d'ensemble et que rien n'exclut que, dans un futur plus ou moins lointain, le corpus des résultats accumulés donne à de nouveaux axiomes une évidence *a posteriori* qui suscite une large adhésion, comme c'est aujourd'hui le cas pour l'axiome de détermination projective. Si ces nouveaux axiomes se trouvent impliquer soit l'hypothèse du continu, soit (comme les axiomes de Woodin) sa négation, alors on aura *résolu* le problème du continu. Dans tous les cas, l'existence-même de résultats comme ceux de Woodin semble indiquer que le problème du continu est tout sauf une question scholastique vide de sens, ainsi que l'ont parfois un peu imprudemment suggéré des mathématiciens pas véritablement experts du sujet.

FIG. 6. Hugh Woodin

3.7. Conclusion

En un sens, le problème du continu est un point mineur des mathématiques : peu d'applications dépendent vraiment de l'hypothèse du continu, et les seuls énoncés qui lui sont liés mettent en jeu des objets qui sont soit très grands, soit très compliqués, et sont à ce titre assez éloignés du cœur des mathématiques actuelles. C'est probablement l'une des raisons pour laquelle le problème du continu, premier sur la liste des problèmes de Hilbert en 1900, n'est plus mentionné un siècle plus tard dans la liste des problèmes du millénaire proposé par le Clay Institute [3] et y a, dans la catégorie des problèmes de fondement, été remplacé par le problème P=NP. D'un autre côté, ce problème reste toujours aussi fascinant par son côté fondamental et son énoncé si simple, et il a été et reste le moteur de la recherche

[15] L'axiome de Woodin exprime que le monde des ensembles est, en un certain sens, algébriquement clos, ce qui en fait une hypothèse très naturelle.

en théorie des ensembles. Il est certain qu'on en saura plus dans cent ans, et l'auteur de ces lignes serait bien curieux de savoir où on en sera alors du problème du continu et de l'exploration de l'infini. Dans tous les cas, si quelque chose est certain, c'est bien le fait que Cantor, par sa note anodine de 1874, a ouvert un monde et donné pour des siècles du grain à moudre aux mathématiciens.

Remerciements

Je remercie Pierre Ageron et Akihiro Kanamori pour les utiles précisions qu'ils m'ont apportées, ainsi que Jean Fichot qui m'a signalé la présence précoce d'une forme d'argument diagonal dans les travaux de Paul du Bois-Reymond.

4. Références

[1] C. Boyer, *A History of Mathematics*, Princeton University Press (1985).
[2] G. Cantor, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, Crelles Journal für Mathematik ; 77 ; 1874 ; 258-263.
[3] Clay Mathematical Institute ; *Millenium Problems*, http://www.claymath.org/millennium/.
[4] J.W. Dauben, *Georg Cantor : His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Cambridge, Mass., 1979 ; reprinted 1990.
[5] A.-M. Décaillot, *Cantor et la France*, Correspondance du mathématicien allemand avec les Français à la fin du XIX^{e} siècle, Paris, Kimé, 2008.
[6] P. Dehornoy, *La détermination projective d'après Martin, Steel et Woodin*, Séminaire Bourbaki, Astérique ; 177-178 ; 1989 ; 261–276.
[7] P. Dehornoy, *Progrès récents sur l'hypothèse du continu, d'après Woodin*, Séminaire Bourbaki, Astérisque ; 294 ; 2004 ; 147-172.
[8] P. Dehornoy, *Au-delà du forcing : la notion de vérité essentielle en théorie des ensembles*, *in :* Logique, dynamique et cognition, J.B.Joinet, ed., Publications de la Sorbonne (2007) 147-169.
[9] M. Foreman, *Has the continuum hypothesis been settled ?*, Proceedings Logic Colloquium '03, Lect. Notes in Logic, Assoc. Symb. Logic 24 (2006) 56-75.
[10] M. Foreman, A., Kanamori, eds. ; *Handbook of Set Theory*, http://www.tau.ac.il/~rinot/host.html.
[11] gallica ; (BNF) ; http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k86243w.notice
[12] G. Godefroy, *De l'irrationnalité à l'indécidabilité*, Leçons de mathématiques d'aujourd'hui, volume 2, Cassini (2003).
[13] K. Gödel, *What is Cantor's Continuum Problem ?*, Amer. Math. Monthly ; 54 ; 1947 ; 515-545.
[14] A. Kanamori, *The higher infinite*, Springer, Berlin, 1994.
[15] A. Kanamori, *The mathematical development of set theory from Cantor to Cohen*, Bull. Symb. Logic ; 2 ; 1996 ; 1-71.
[16] L. Kirby & J. Paris, *Accessible independence results for Peano Arithmetic*, Bull. London Math. Soc. ; 14 ; 1982 ; 285–293.
[17] Yu. Manin, *Georg Cantor and his heritage*, arXiv:math.AG/0209244 (2002).
[18] D.A. Martin & J.R. Steel, *A proof of projective determinacy*, J. Amer. Math. Soc. ; 2-1 ; 1989 ; 71–125.
[19] J.J. O'Connor & E.F., Robertson ; *Cantor*, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Cantor.html.
[20] J. Steel, *Mathematics need new axioms*, Bull. Symb. Logic ; 6-4 ; 2000 ; 422-433.
[21] H. Woodin, *Large cardinal axioms and independence : the continuum problem revisited*, Math. Intelligencer ; 16-3 ; 1994 ; 31-35.
[22] H. Woodin, *The Continuum Hypothesis, I & II*, Notices Amer. Math. Soc. ; 48–6 ; 2001 ; 567–576, & **8-7** (2001) 681–690.
[23] H. Woodin, *The Continuum Hypothesis*, Proceedings Logic Colloquium 2000, Ass. Symb. Logic (2005).

N.B. : Les photographies autres que celle de H. Woodin sont extraites du site de biographies de l'université St. Andrews (GB), cf. [19].

Les immeubles, une théorie de Jacques Tits, prix Abel 2008

Guy Rousseau[1]

« À l'origine [début des années 50] le but essentiel de la théorie des immeubles était la compréhension des groupes de Lie exceptionnels d'un point de vue géométrique. Le point de départ était l'observation qu'il est possible d'associer à chaque groupe de Lie semi-simple complexe une géométrie bien définie, de telle façon que les propriétés de base des géométries ainsi obtenues et leurs relations mutuelles peuvent se lire aisément sur les diagrammes de Dynkin des groupes correspondants. »

C'est ainsi que Jacques Tits explique ses motivations initiales pour sa théorie (traduction libre de [T-80]). Il ajoute plus loin, essentiellement : « ces géométries étant construites à partir de blocs élémentaires de rang deux qui ont des analogues évidents sur tout corps k, il était naturel d'essayer d'associer à tout diagramme de Dynkin une géométrie sur k ; en retour on pourrait extraire du groupe d'automorphismes de cette géométrie un groupe, analogue sur k du groupe de Lie semi-simple complexe associé à ce diagramme de Dynkin. Claude Chevalley réussit (en 1955) la construction de ces groupes par des moyens algébriques. Cela facilita la construction de ces géométries et inversement celles-ci se révélèrent un puissant moyen d'étude de ces groupes de Chevalley. En fait ces géométries polyédriques sont maintenant connues sous le nom d'immeubles, selon la terminologie introduite par N. Bourbaki [Bi-68]. »

J'arrête ici l'exposé des prémices de cette théorie qui, avec d'autres importants travaux de théorie des groupes, a valu à Jacques Tits le prix Abel 2008 (partagé avec J.G. Thompson). Voici un extrait de la motivation du comité pour cette nomination : *« un immeuble de Tits [...] encode en termes géométriques la structure algébrique des groupes linéaires. La théorie des immeubles est un principe unificateur dans une palette étonnante d'applications, par exemple dans la classification de groupes algébriques, de groupes de Lie et de groupes finis simples, dans les groupes de Kac-Moody (utilisés par les théoriciens de la physique), dans la géométrie combinatoire (utilisée en informatique), et dans l'étude des phénomènes de rigidité dans les espaces à courbure négative. L'approche géométrique de Tits a été essentielle pour l'étude et la réalisation des groupes finis, dont le Monstre. »*

Je vais expliquer ci-dessous les grandes lignes de la théorie des immeubles et les développements féconds de celle-ci qu'a apportés Jacques Tits dans des directions variées. On trouvera dans [Wolf] une bibliographie extensive des travaux de J. Tits (jusqu'en 2000) et une analyse détaillée (par lui-même) de tous ses travaux jusqu'en 1972. Pour plus d'applications de la théorie on se reportera à [T-75] ou [RS-95].

Je remercie P.E. Caprace, B. Műhlherr et B. Rémy pour leur relecture attentive de ce texte.

[1] Institut Élie Cartan, UMR 7502 Université de Nancy, CNRS, INRIA , BP 70239, F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy cedex.

1. L'immeuble d'un espace projectif

Cet immeuble est le prototype qui a servi de modèle à tous les autres [T-55a], [T-55b], [T-62a]. Le langage adopté à l'époque pour ces généralisations était différent, on adopte ici le point de vue des immeubles.

1.1. Le graphe d'incidence

Soit V un espace vectoriel de dimension finie $n+1$ sur un corps k. Notons $\mathcal{J} = \mathcal{J}(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V différents de $\{0\}$ et V. Un sous-espace de dimension r est appelé un *sommet de type* r : il est dans $\mathcal{J}_r(V)$. L'ensemble $\mathcal{J}_1(V)$ est donc l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ et $\mathcal{J}_r(V)$ est l'ensemble des sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ de dimension $r-1$.

Deux éléments de $\mathcal{J}(V)$ sont dits *incidents* s'ils sont distincts et si l'un est contenu dans l'autre. Les points de $\mathcal{J}_1(V) = \mathbb{P}(V)$ incidents à un élément de $\mathcal{J}_r(V)$ sont donc les points du sous-espace projectif correspondant à cet élément.

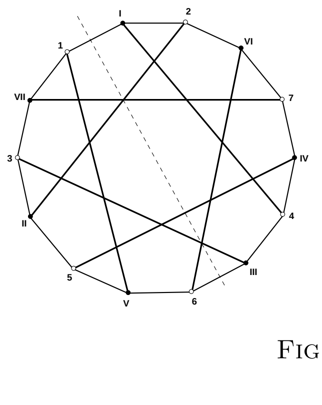
On obtient ainsi une structure de graphe sur $\mathcal{J}(V)$.

1.2. L'exemple du plan projectif sur le corps $\mathbb{F}_2$ à deux éléments

Dans la figure 1 ci-dessous [T-85] on a dessiné à droite ce plan projectif qui comporte sept points (numérotés de 1 à 7) et sept droites (numérotées de *I* à *VII* y compris la droite *VI* formée des points 2, 6 et 7). Le graphe $\mathcal{J}$ correspondant est représenté à gauche ; la couleur d'un sommet détermine son type. Chaque sommet est contenu dans trois arêtes.

Un groupe diédral d'ordre 14 respecte la figure de gauche ; cependant les symétries (par exemple celle par rapport à la droite en pointillé) échangent les types : ce sont des « dualités ». Le groupe des automorphismes (respectant les types) du graphe $\mathcal{J}$ (indépendamment de la longueur des arêtes) est de cardinal 168, c'est $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2)$.

Dans cette figure on peut aussi observer les chemins fermés n'empruntant pas deux fois la même arête et de longueur minimale (6 arêtes), on les appelle *appartements* et on constate que deux arêtes sont toujours contenues dans un même appartement.



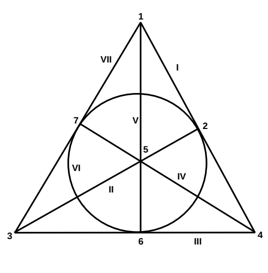


Fig. 1.

1.3. Le complexe simplicial

On appelle *facette* de $\mathcal{J}$ un sous-ensemble de $\mathcal{J}$ formé d'éléments 2 à 2 incidents (c'est donc un drapeau de V) ; son *type* est l'ensemble des types (2 à 2 distincts) de ses éléments. Les facettes maximales ont n éléments (ce sont les drapeaux complets), on les appelle *chambres*. Les facettes à $n-1$ éléments sont appelées *cloisons*.

L'ensemble partiellement ordonné $\mathcal{I} = \mathcal{I}(V)$ de ces facettes est un complexe simplicial appelé *immeuble* de $\mathbb{P}(V)$. Ses facettes non vides minimales correspondent aux sommets de $\mathcal{J}$. Ainsi $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont deux aspects de la même structure.

1.4. Les appartements

Ils sont en bijection avec les décompositions de V en somme directe de droites : les sommets de l'*appartement* A correspondant à la décomposition $V = D_1 \oplus \cdots \oplus D_{n+1}$ sont tous les sous-espaces vectoriels sommes de certains des D_i ; les facettes de l'appartement A sont les facettes de $\mathcal{I}$ formées de sommets de A. Ainsi un appartement est un sous-complexe simplicial.

Dans l'exemple 1.2 un appartement est donc formé de trois points non alignés et des trois droites qu'ils définissent. On vérifiera la coïncidence avec la définition de 1.2.

Il est facile de vérifier que deux facettes quelconques de $\mathcal{I}$ sont contenues dans un même appartement : c'est une conséquence d'une variante du théorème de Jordan-Hőlder : si $\{0\} \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n \subset V$ et $\{0\} \subset U_1 \subset \cdots \subset U_n \subset V$ sont deux drapeaux complets de V, il existe une base $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ de V et une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ telles que, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, V_i ait pour base $\{e_1, \cdots, e_i\}$ et U_i ait pour base $\{e_{\sigma 1}, \cdots, e_{\sigma i}\}$.

Le groupe $\mathfrak{S}_{n+1}$ qui vient d'apparaître est le groupe des automorphismes du complexe simplicial A (il agit par permutation des droites). Il est simplement transitif sur les chambres de A.

1.5. Action du groupe projectif linéaire

Le groupe $G = \mathrm{PGL}(V) = \mathrm{GL}(V)/k^*$ agit clairement sur $\mathcal{J}$ en respectant les types et la relation d'incidence. On peut donc considérer son action sur l'immeuble $\mathcal{I}$, elle respecte la structure de complexe simplicial et permute les appartements. Elle est même *fortement transitive i.e.* elle permute transitivement les paires formées d'une chambre dans un appartement.

Le stabilisateur de l'appartement associé à la décomposition $V = ke_1 \oplus \cdots \oplus ke_{n+1}$ est le sous-groupe N de $\mathrm{PGL}(V)$ formé des classes d'éléments dont la matrice dans la base des e_i est monomiale. On a donc un homomorphisme surjectif de N dans $W = \mathfrak{S}_{n+1}$ dont le noyau T est formé des classes d'automorphismes diagonaux dans cette base.

Les facettes de $\mathcal{I}$, c'est-à-dire les drapeaux de V, de type fixé $\tau \subset \{1, \cdots, n\}$ sont conjuguées par G. Si $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ est une base ordonnée de V, alors les espaces vectoriels $V_r = ke_1 \oplus \cdots \oplus ke_r$ pour $r \in \tau$ forment une facette σ_τ de type τ. Le fixateur P_{σ_τ} de cette facette est formé des classes d'automorphismes dont la matrice dans cette base est triangulaire supérieure par blocs (de taille τ en un sens évident). Ainsi l'ensemble $\mathcal{I}_\tau$ des facettes de type τ s'identifie à G/P_{σ_τ} et $\mathcal{I}$ est réunion disjointe des $\mathcal{I}_\tau$ pour $\tau \subset \{1, \cdots, n\}$. Pour $g, g' \in G$ et $\tau, \tau' \subset \{1, \cdots, n\}$, on a $g\sigma_\tau \subset g'\sigma_{\tau'} \Leftrightarrow gP_{\sigma_\tau} \supset g'P_{\sigma_{\tau'}} \Leftrightarrow gP_{\sigma_\tau}g^{-1} \supset g'P_{\sigma_{\tau'}}g'^{-1}$ (car les groupes P_{σ_τ} sont leurs propres normalisateurs).

Si $\tau = \{1, \cdots, n\}$, les facettes de type τ sont les chambres ; le groupe $B = P_{\sigma_\tau}$ correspond aux matrices triangulaires supérieures. La variante du théorème de Jordan-Hőlder évoquée en 1.4 (appliquée aux V_i ci-dessus et aux $U_i = gV_i$ pour $g \in G$) montre que $G = BNB$ (décomposition de Bruhat).

1.6. Le théorème fondamental de la géométrie projective

On vient de voir que le groupe $G = \mathrm{PGL}_n$ avec ses sous-groupes P_{σ_τ} détermine l'immeuble $\mathcal{I}$. Inversement on sait que :

Théorème (*cf. e.g.* [A-57]). *Toute bijection d'un espace projectif $\mathbb{P}(V)$ (sur un corps k) sur un espace projectif $\mathbb{P}(V')$ de même dimension $n+1 \geqslant 3$ (sur un corps k') qui conserve l'alignement, détermine un isomorphisme μ de k sur k' et est induite par une bijection $\mu-$semi-linéaire de V sur V'.*

Ainsi l'immeuble $\mathcal{I}(V)$ détermine le corps de base k et son groupe d'automorphismes est produit semi-direct de $\mathrm{PGL}(V)$ par $\mathrm{Aut}(k)$.

C'est cette parfaite illustration du fort lien entre géométries et groupes (décrit dès 1872 par Felix Klein dans son programme d'Erlangen) qui inspire la théorie des immeubles.

1.7. Généralisations

On peut bien sûr généraliser l'essentiel des constructions précédentes aux espaces projectifs abstraits. Mais surtout après les travaux d'A. Borel et J. Tits [BIT-65], il est maintenant facile d'envisager la construction d'un immeuble pour tout groupe algébrique semi-simple :

Le groupe $G = \mathrm{PGL}(V)$ est algébrique semi-simple, T (resp. B) en est un sous-tore déployé maximal (resp. un sous-groupe de Borel ou un sous-groupe parabolique minimal), N est le normalisateur de T et les groupes P_{σ_τ} sont les sous-groupes paraboliques de G contenant B.

Si maintenant G est un groupe algébrique semi-simple quelconque, on peut donner un sens aux sous-groupes T, B, N, P_{σ_τ} et donc construire un complexe simplicial avec des appartements comme en 1.5. Mais pour expliquer cette construction, on va d'abord parler un peu de théorie des immeubles.

2. Définition abstraite d'immeuble

Il y a maintenant des références très accessibles pour cette théorie [Rn-89], [Su-95], [G-97] et, le plus complet actuellement, [AB-08].

2.1. Groupes de Coxeter

Définition. *Un système de Coxeter est une paire (W, S) où W est un groupe (de Coxeter) engendré par le sous-ensemble fini S, formé d'éléments d'ordre 2 et dont une présentation est fournie par cet ensemble générateur S et les relations $(ss')^{m(s,s')} = 1$ pour $s, s' \in S$, où $m(s, s')$ est l'ordre de ss' (pas de relation si $m(s, s') = \infty$).*

La *matrice de Coxeter* de W est $(m(s, s'))_{s,s' \in S}$. On dit que W est *irréductible* si S ne peut être partagé en deux sous-ensembles non vides qui commutent. Le *rang* de W est $|S|$. Le *graphe de Coxeter* de W est le graphe de sommets indexés par S, avec entre deux sommets distincts correspondant à s, s' aucune arête (resp. une arête, une arête double, une arête triple, une arête affectée du coefficient $m(s, s')$) si $m(s, s') = 2$ (resp. 3, 4, 6, un autre entier ou l'infini). Ce graphe est connexe si et seulement si W est irréductible.

Le groupe de permutations $\mathfrak{S}_{n+1}$ engendré par les transpositions $(1, 2), (2, 3), \ldots,$ $(n, n+1)$ est de Coxeter avec pour graphe $\bullet\!-\!\bullet\!-\!\bullet\!-\cdots-\!\bullet\!-\!\bullet\!-\!\bullet$ (n sommets). Les groupes de Coxeter de rang 2 sont les groupes diédraux.

H.S.M. Coxeter a étudié et classifié les groupes de Coxeter finis et J. Tits les a étudiés en général, *cf.* [T-61] plus largement connu grâce à [Bi-68].

2.2. Complexes de Coxeter

Si $J \subset S$, on peut définir le sous-groupe $W(J)$ de W engendré par J ; il est de Coxeter. On dit que J est *sphérique* si $W(J)$ est fini. On considère la réunion disjointe $A(W)$ des quotients $W/W(J)$ que l'on ordonne par $wW(J) \leqslant w'W(J') \Leftrightarrow wW(J) \supset w'W(J')$ (et donc $J \supset J'$). On obtient ainsi un complexe simplicial, dit *complexe de Coxeter de W*. Le rang de $wW(J)$ est $|S \setminus J|$ et son type est J.

Les éléments maximaux (les *chambres*) sont les éléments de W, les éléments maximaux hors chambres (les *cloisons*, de rang $|S| - 1$) sont les paires $\{w, ws\}$ pour $w \in W$ et $s \in S$. Ainsi une cloison est contenue dans exactement deux chambres, on dit que le complexe est *mince*. Une *galerie* de longueur n dans $A(W)$ est une suite $C_0, C_1, \cdots, C_n$ de chambres telle que, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, C_i et C_{i-1} sont minorées par une cloison commune (on dit que C_i et C_{i-1} sont *mitoyennes*). Deux chambres de $A(W)$ peuvent toujours être jointes par une galerie, qui est unique si on précise les types des cloisons traversées. On en déduit que W est le groupe des automorphismes de $A(W)$ respectant les types et qu'il agit (à gauche) simplement transitivement sur les chambres.

Ce complexe est plus facilement compris via sa représentation géométrique construite par J. Tits, *cf.* [T-61] ou [Bi-68] :

Dans un espace vectoriel réel V de dimension $|S|$, on peut construire des réflexions σ_s par rapport à des hyperplans $\mathrm{Ker}\alpha_s$ (avec $(\alpha_s)_{s\in S}$ libre dans le dual) de telle manière que le groupe engendré par ces réflexions soit isomorphe à W. La *chambre fondamentale* est $C = \{v \in V \mid \alpha_s(v) > 0, \forall s \in S\}$; c'est un cône simplicial dont l'adhérence $\overline{C}$ est réunion disjointe des facettes $C_J = \{v \in V \mid \alpha_s(v) > 0, \forall s \in S \setminus J, \alpha_s(v) = 0, \forall s \in J\}$ pour $J \subset S$. On note $A^c(W) = \mathcal{T} = \bigcup_{w\in W} w\overline{C} \subset V$ le *cône de Tits*. Le résultat remarquable est que $\mathcal{T}$ est un cône convexe, réunion disjointe des *facettes* wC_J (pour $w \in W$ et

$J \subset S$), que $\overline{C}$ est un domaine fondamental de l'action de W sur $\mathcal{T}$ et que, pour $J \subset S$, le fixateur de C_J est son stabilisateur et vaut $W(J)$. Ainsi le complexe simplicial $A(W)$ s'identifie à l'ensemble des facettes de $A^c(W)$ ordonné par l'inclusion des adhérences.

Voir ci-dessous figure 2, un exemple de rang 2 avec W diédral d'ordre 12.

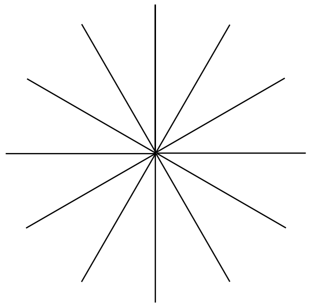


Fig. 2.

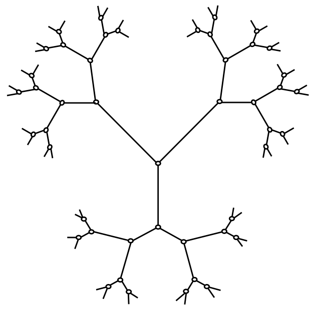


Fig. 3.

Plus généralement dans la suite, les éléments d'un complexe simplicial seront appelés *facettes* et $F \leqslant F'$ se lira « F est une face de F' ».

Le groupe de Coxeter W est fini si et seulement si $\mathcal{T} = V$. Dans ce cas il est agréable de remplacer $A^c(W)$ par une sphère unité $A^s(W)$ (pour un produit scalaire invariant par W). Par intersection avec $A^s(W)$ des facettes ci-dessus on obtient une décomposition simpliciale de cette sphère.

2.3. Définition des immeubles

Un *immeuble* (de type W) est un complexe simplicial $\mathcal{I}$ muni d'un *système d'appartements*, c'est-à-dire d'une collection $\mathcal{A}$ de sous-complexes appelés *appartements* telle que :

(I0) Chaque appartement est isomorphe au complexe de Coxeter $A(W)$.

(I1) Deux facettes de $\mathcal{I}$ appartiennent à un même appartement.

(I2) Si deux appartements contiennent les facettes F et F', ils sont isomorphes par un isomorphisme fixant F et F' ainsi que toutes leurs faces.

Il résulte de ces axiomes que toute facette de $\mathcal{I}$ est contenue dans une facette maximale appelée *chambre*. On définit comme en 2.2 les *cloisons*, les *types* et les *galeries*.

On supposera toujours les immeubles *épais* : toute cloison est face d'au moins trois chambres. L'immeuble est dit de *type sphérique* si W est fini.

À la figure 3 apparaît l'exemple d'un immeuble de rang 2 (le rang de W qui est ici le groupe diédral infini) sous la forme d'un arbre (sans sommet terminal). Les chambres (resp. les cloisons) sont les arêtes (resp. les sommets) du graphe. Les appartements sont les droites géodésiques.

L'immeuble $\mathcal{I}(V)$ de la section 1 est un immeuble sphérique épais de type $\mathfrak{S}_{n+1}$.

Si on remplace le système $\mathcal{A}$ par un système plus gros $\mathcal{A}'$ (vérifiant encore (I0) et (I2)), on a essentiellement le même immeuble. Il existe un système maximal d'appartements. Dans le cas sphérique, le système d'appartements est unique.

On peut associer à chaque facette de rang r de $\mathcal{I}$ un simplexe à r sommets et recoller tous ces simplexes selon leurs faces ; on obtient ainsi un espace topologique $|\mathcal{I}|$, *réalisation géométrique* de $\mathcal{I}$. Si $\mathcal{I}$ est de type sphérique les appartements de $|\mathcal{I}| = \mathcal{I}^s$ sont des sphères (isomorphes à $A^s(W)$).

2.4. Rétractions

Considérons une chambre C dans un appartement A de l'immeuble $\mathcal{I}$. Pour toute facette F, il existe un appartement B contenant C et F (axiome (I1)) et un isomorphisme φ de B sur A fixant C et toutes ses faces (axiome (I2)) et donc respectant les types. D'après l'axiome (I2) φF ne dépend pas du choix de B. On pose $\rho_{A,C}(F) = \varphi F$. L'application simpliciale $\rho_{A,C} : \mathcal{I} \to A$ ainsi construite est la *rétraction de centre C sur A*.

Ces rétractions sont des outils très puissants. Montrons par exemple :

Proposition. *Soient C, C' deux chambres d'un appartement A et $C = C_0, C_1, \cdots, C_n = C'$ une galerie de C à C' dans $\mathcal{I}$ de longueur minimale. Cette galerie est alors entièrement contenue dans A.*

Démonstration. Sinon il existe $i \geqslant 1$ avec $C_{i-1} \in A$ et $C_i \notin A$. Notons C_i' la chambre de A telle que C_{i-1}, C_i et C_i' admettent comme face la même cloison et $\rho = \rho_{A,C_i'}$. Il est clair que $\rho C_i = C_{i-1}$. On a donc une galerie $C = \rho C_0, \cdots, \rho C_i = C_i = \rho C_{i+1}, \cdots, \rho C_n = C'$ de C à C' dans A et de longueur $n-1$; c'est absurde. □

2.5. Étoiles

L'étoile F^* d'une facette F de $\mathcal{I}$ est le complexe simplicial formé des facettes dont F est une face. Les intersections de F^* avec les appartements de $\mathcal{I}$ contenant F définissent des appartements dans F^*. On munit ainsi F^* d'une structure d'immeuble de type $W(J)$ où J est le type de F.

Ce résultat permet des raisonnements par récurrence sur le rang.

Pour l'immeuble $\mathcal{I}(V)$ de la section 1 le lecteur vérifiera que l'étoile de la facette associée à un drapeau est le produit des immeubles associés aux espaces vectoriels quotients successifs de ce drapeau.

2.6. Groupes d'automorphismes

Considérons un groupe G d'automorphismes de $\mathcal{I}$ respectant les types et $\mathcal{A}$. Soient C une chambre dans un appartement A. On note B le fixateur de C dans G et N (resp. $T = B \cap N$) le stabilisateur (resp. le fixateur) de A dans G.

On dit que le groupe G est *fortement transitif* s'il agit transitivement sur les paires formées d'une chambre dans un appartement. Alors N agit transitivement sur les chambres de A. Comme A est isomorphe à $A(W)$ on obtient donc un isomorphisme de N/T sur W. Plus précisément (G, B, N, S) est un système de Tits :

Définition. *Un système de Tits est un quadruplet (G, B, N, S) où G est un groupe, B et N deux sous-groupes et S une partie de $W = N/(B \cap N)$, satisfaisant aux quatre axiomes suivants (pour $w \in W$, on note $\tilde{w}$ un représentant de w dans N) :*

(T1) *B et N engendrent G et $B \cap N$ est distingué dans N.*

(T2) *S est formé d'éléments d'ordre 2 et engendre W.*
(T3) *Pour tous $w \in W$ et $s \in S$, on a : $\tilde{s}B\tilde{w} \subset B\tilde{w}B \cup B\tilde{s}\tilde{w}B$.*
(T4) *Pour tout $s \in S$ on a : $\tilde{s}B\tilde{s} \not\subset B$.*

Le groupe B est le *sous-groupe de Borel* et W le *groupe de Weyl* du système.

2.7. L'immeuble d'un système de Tits

Si (G, B, N, S) est un système de Tits, alors (W, S) est un système de Coxeter et on a la *décomposition de Bruhat* $G = BNB$, plus précisément G est réunion disjointe des doubles classes $B\tilde{w}B$ pour $w \in W$.

Pour $J \subset S$, $P_J = \cup_{w \in W(J)} B\tilde{w}B$ est un sous-groupe de G contenant B dit *parabolique*. On obtient ainsi tous les sous-groupes de G contenant B.

Par la construction esquissée en 1.7, on obtient un immeuble $\mathcal{I}$ sur lequel G agit fortement transitivement en conservant les types.

2.8. Historique

L'élaboration de ces notions s'est faite dans un ordre essentiellement inverse de l'exposé dogmatique précédent. Au début F. Bruhat a découvert sa décomposition dans les groupes de Lie simples classiques [Bt-54]. Ensuite Harish-Chandra et C. Chevalley ont étendu ce résultat, puis J. Tits est parvenu à sa version axiomatisée des décompositions de Bruhat, les systèmes de Tits (selon le nom attribué par N. Bourbaki [Bi-68], J. Tits parlait de $BN-$paires) *cf.* [T-62b], [T-63b] et [T-64]. Les premiers exposés de la notion d'immeuble apparaissent dans [T-63a] et [T-65] (sous le nom de complexe structuré), puis avec plus de détails dans [T-74].

Cette notion de système de Tits, indissociable de celle d'immeuble, est particulièrement souple : on verra ci-dessous qu'elle s'est appliquée ensuite efficacement à de nouvelles situations. Elle est aussi assez forte : un groupe avec système de Tits est « presque » simple [T-64] [Bi-68, IV, 2.7], ceci fournit une preuve unifiée de la simplicité des groupes simples finis de type de Lie.

3. Immeubles de type sphérique

3.1. L'immeuble de Tits d'un groupe semi-simple

Si G est un groupe algébrique semi-simple sur un corps k, on peut, selon la méthode esquissée en 1.7, lui associer un immeuble $\mathcal{I}(G, k)$ sur lequel il agit. C'est son *immeuble de Tits*, il est de type sphérique, car le groupe de Weyl $W = N/T$ est fini. En fait les principaux résultats d'A. Borel et J. Tits [BlT-65] sur la structure d'un groupe algébrique semi-simple G se résument en l'existence d'un système de Tits (G, B, N, S) et ce système fournit l'immeuble. Si le groupe G est déployé, les travaux de Chevalley donnent ce résultat assez facilement ; on peut déduire le cas général par descente galoisienne sur l'immeuble.

3.2. Applications

Je ne vais en citer que trois.

(1) Si G est de rang relatif r sur k, la réalisation géométrique $\mathcal{I}^s(G,k) = |\mathcal{I}(G,k)|$ est homotope à un bouquet de $(r-1)-$sphères (une par appartement contenant une chambre donnée). Ainsi G agit sur l'homologie $H_{r-1}(|\mathcal{I}(G,k)|)$. C'est particulièrement intéressant si k est fini ; alors $\mathcal{I}^s(G,k)$ est fini et la représentation précédente est de dimension finie : c'est la représentation de Steinberg, bien connue des théoriciens des groupes finis, *cf.* [CLT-80].

(2) Soient G un groupe de Lie semi-simple et X son espace riemannien symétrique. Le choix le plus naturel pour l'espace à l'infini de X est souvent très lié à un immeuble sphérique [T-75].

Ainsi, pour G défini sur $\mathbb{Q}$, A. Borel et J.P. Serre ajoutent à X une frontière $\partial X = \overline{X} \setminus X$ réunion disjointe de morceaux contractiles indexés par les $\mathbb{Q}-$sous-groupes paraboliques de G *i.e.* par $\mathcal{I}(G,\mathbb{Q})$. Ce bord ∂X a le type d'homotopie de $\mathcal{I}^s(G,k)$ et le quotient de $\overline{X}$ par un sous-groupe arithmétique Γ de G est compact. Ceci permet en particulier de calculer la dimension cohomologique de Γ [BS-73].

On peut définir la *frontière de Tits* ou *bord visuel* de X comme quotient de l'ensemble des demi-droites par la relation « être à distance mutuelle bornée ». C'est un immeuble sphérique (avec une topologie spéciale) *cf. e.g.* [KL-97].

(3) Soient X un immeuble de type sphérique et Y un sous-ensemble fermé, convexe de $|X|$ ne contenant pas deux points opposés (dans une sphère $|A|$ pour un appartement A). Alors J. Tits a suggéré en 1962 que le groupe des automorphismes de X stabilisant Y a un point fixe dans Y. Cette conjecture, popularisée par D. Mumford [Md-65], est connue comme conjecture du centre de Tits ; elle est résolue pour les immeubles classiques [MT-06] et le cas utilisé par D. Mumford. Voir [Se-04] pour des applications intéressantes.

3.3. Généralisations

On peut construire d'autres immeubles de type sphérique analogues à ces immeubles de Tits des groupes semi-simples.

On a d'abord les immeubles des groupes classiques non algébriques. Dans la section 1 par exemple on peut considérer le cas où k est un corps gauche de dimension infinie sur son centre. On peut aussi envisager le groupe orthogonal d'une forme quadratique d'indice fini sur un espace vectoriel de dimension infinie.

Il existe des groupes (non algébriques) obtenus par torsion de groupes algébriques semi-simples (en caractéristique positive) : les groupes de Ree, de Suzuki ou de Tits. On peut construire leur immeuble par descente galoisienne comme pour les groupes algébriques. Sur un corps non parfait il y a aussi des groupes « mixtes » plus compliqués.

Les groupes finis simples généralisant les groupes algébriques simples finis, on peut chercher à leur associer des géométries ressemblant aux immeubles. Voir [T-80] et des articles de l'ouvrage contenant [T-86].

3.4. Classification des immeubles de type sphérique

Elle est accomplie dans l'exposé fondamental [T-74] datant essentiellement de 1968, pour les immeubles de type irréductible (différent de H_3 ou H_4) et de rang au moins égal à trois. Plus précisément deux problèmes sont résolus : déterminer tous ces immeubles à isomorphisme près (ils sont en gros comme décrit en 3.3) et déterminer leurs groupes d'automorphismes. Ainsi ce résultat est la généralisation du théorème fondamental de la géométrie projective.

La classification des immeubles finis est plus simple : *e.g.* un corps fini est commutatif et parfait et il n'y a pas d'immeuble fini de type H_3 ou H_4 ; voir [Rn-89].

Il n'est pas raisonnable d'essayer de classifier tous les immeubles de type sphérique et de rang deux (les polygones généralisés), sauf pour les immeubles vérifiant la condition de « Moufang » : ils sont associés à des systèmes de Tits « décomposés ». Cette classification a été achevée récemment par J. Tits et R. Weiss. Ces immeubles sont les pierres élémentaires des immeubles de rang plus élevé, selon le procédé de construction développé par M. Ronan et J. Tits [RT-87]. On peut donc en déduire une preuve simplifiée de la classification *cf.* [TW-03]. Un exposé assez succinct mais complet de la théorie des immeubles de type sphérique se trouve dans [W-03] ; la classification y est expliquée.

La détermination des ensembles de Moufang (ou immeubles de Moufang de rang 1) est encore en cours, voir [T-00].

4. Immeubles de type affine

4.1. Groupes semi-simples sur un corps ultramétrique

Soit G un groupe algébrique semi-simple sur un corps K complet pour une valuation discrète ω. Pour $G = \mathrm{PGL}_n$, O. Goldman et N. Iwahori [GI-63] construisent un espace analogue à l'espace symétrique du cas réel. Pour G déployé simplement connexe, F. Bruhat [Bt-64] construit des sous-groupes compacts maximaux dans G, puis N. Iwahori et H. Matsumoto [IM-65] exhibent un système de Tits de groupe de Weyl infini. F. Bruhat et J. Tits [BtT-66], [BtT-72], [BtT-84a], [BtT-84b], [BtT-87a], [BtT-87b] ont alors montré l'existence d'un système de Tits (et donc d'un immeuble $\mathcal{I}(G, K, \omega)$ sur lequel G agit) dans tout groupe semi-simple simplement connexe G, si le corps résiduel de K est parfait.

4.2. Appartements affines

L'appartement d'un immeuble affine est réalisé géométriquement comme un espace affine euclidien A^a muni d'un ensemble infini discret d'hyperplans (les *murs*) tel que le groupe W engendré par les réflexions orthogonales par rapport à ces murs stabilise cet ensemble de murs. Le groupe W est alors de Coxeter [Bi-68]. Dans la figure 4 ci-dessous sont représentés les 3 cas irréductibles de dimension 2 (et rang 3).

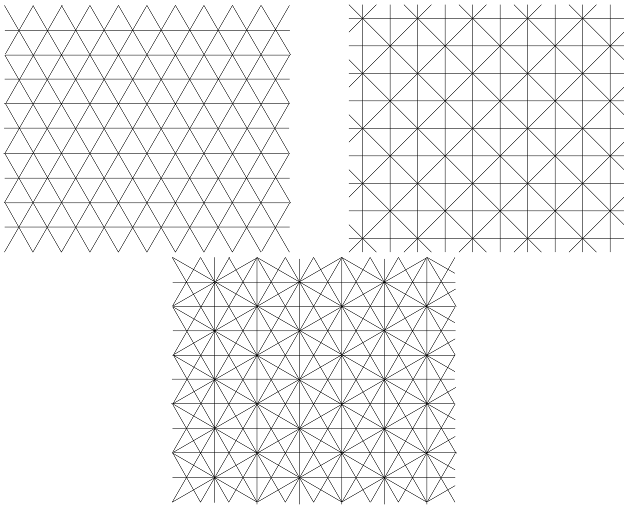


FIG. 4.

Les *chambres* sont les composantes connexes du complémentaire de la réunion des murs et on définit facilement des facettes, que l'on ordonne par l'inclusion des adhérences. Si W est irréductible, on obtient ainsi le complexe simplicial $A(W)$ et $A^a = A^a(W)$ est la réalisation géométrique $|A(W)|$. En fait on peut alors plonger $A^a(W)$ comme hyperplan affine dans $A^c(W)$ et les facettes se correspondent par intersection, *cf. e.g.* [Ru-08].

Le groupe de Weyl W est le groupe de Weyl affine d'un système de racines, c'est le produit semi-direct d'un groupe fini et d'un réseau de translations de $A^a(W)$. Dans le cas d'un appartement d'immeuble de groupe semi-simple, ce système de racines est très lié au système de racines relatif de ce groupe.

4.3. Métrique sur un immeuble affine

Soit $\mathcal{I}$ un immeuble de type W, groupe de Coxeter affine *i.e.* construit comme en 4.2 ci-dessus (avec W irréductible pour simplifier). La réalisation géométrique $\mathcal{I}^a = |\mathcal{I}|$ est réunion d'appartements isomorphes à $A^a(W)$; on dit que c'est un *immeuble affine*. La distance euclidienne des appartements s'étend en une distance d sur $\mathcal{I}^a$ et cet espace métrique est complet.

Si W est irréductible de rang 2 c'est un groupe diédral infini et $A^a(W)$ est une droite réelle. L'immeuble $\mathcal{I}^a$ est alors un arbre. La figure 3 de 2.2 représente l'immeuble $\mathcal{I}^a(\mathrm{SL}_2, K, \omega)$ quand le corps résiduel de K a deux éléments.

Les rétractions de $\mathcal{I}$ sur un appartement A de centre une chambre C, peuvent être définies sur la réalisation géométrique $\mathcal{I}^a$. Elles diminuent les distances mais conservent les distances à un point de la chambre C. Ceci permet de montrer la propriété suivante de courbure négative [BtT-72, 3.2].

(CN) Soient x, y, z trois points de $\mathcal{I}^a$ et m le milieu du segment $[y, z]$ (dans un/tout appartement contenant y et z) alors $d(x, m)$ est au plus égal à la distance de $\sigma(x)$ à m' pour un plongement isométrique σ de $\{x, y, z\}$ dans un plan euclidien, avec m' milieu du segment $[\sigma y, \sigma z]$.

4.4. Sous-groupes bornés maximaux

F. Bruhat et J. Tits [BtT-72] montrent le lemme de point fixe suivant :

Lemme. *Dans un espace métrique complet géodésique vérifiant la condition (CN) ci-dessus, tout groupe borné (i.e. stabilisant une partie bornée) d'isométries a un point fixe.*

Ainsi les sous-groupes bornés maximaux du groupe des isométries de cet espace correspondent bijectivement à certains de ses points. F. Bruhat et J. Tits en déduisent la classification des sous-groupes compacts maximaux d'un groupe semi-simple simplement connexe G sur un corps local (différent de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$) ; ils correspondent bijectivement aux sommets de l'immeuble affine. Il est intéressant de noter que dans le cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ le groupe G agit sur son espace riemannien symétrique qui vérifie aussi (CN) ; ceci permet de redémontrer la conjugaison des sous-groupes compacts maximaux de G.

4.5. Exemples

En s'inspirant de [GI-63] on peut définir une réalisation concrète de l'immeuble de $\mathrm{SL}_n(K)$ pour un corps local K. C'est un espace de normes sur K^n à homothéties près. Ses sommets sont les classes de réseaux de K^n à homothétie près. Pour $n = 2$, cet arbre est construit dans [Se-77] voir la figure 3 de 2.2. Le cas général est traité par F. Bruhat et J.Tits [BtT-84b] ; il est repris dans un contexte un peu différent dans [P-00].

Des réalisations analogues pour les autres groupes classiques apparaissent dans [BtT-87a].

4.6. Compactifications

Si G est un groupe algébrique semi-simple sur un corps local non archimédien K, son immeuble de Bruhat-Tits $\mathcal{I}^a(G, K, \omega)$ est localement compact. On peut le compactifier de plusieurs manières comme pour les espaces symétriques *cf.* 3.2 2). Expliquons-en une :

Si $\mathcal{I}^a$ est un immeuble affine, son bord visuel $\partial\mathcal{I}^a$ est défini comme en 3.2 2) ; on associe donc à chaque appartement sa sphère à l'infini. Ainsi $\partial\mathcal{I}^a$ est un immeuble sphérique (avec une topologie spéciale). Si $\mathcal{I}^a$ est localement compact, $\mathcal{I}^a \cup \partial\mathcal{I}^a$ est compact. Quand $\mathcal{I}^a = \mathcal{I}^a(G, K, \omega)$, $\partial\mathcal{I}^a$ est l'immeuble de Tits $\mathcal{I}^s(G, K)$ convenablement retopologisé.

Pour $G = \mathrm{SL}_2$ et K complet $\partial\mathcal{I}^a(\mathrm{SL}_2, K, \omega)$ est l'ensemble des bouts de l'arbre $\mathcal{I}^a(\mathrm{SL}_2, K, \omega)$ identifié à l'immeuble sphérique $\mathcal{I}^s(\mathrm{SL}_2, K)$, c'est-à-dire à l'espace projectif $\mathbb{P}_1(K)$.

Une autre compactification (dite polygonale) généralise l'une des compactifications par I. Satake des espaces riemanniens symétriques *cf.* [L-96].

4.7. Immeubles affines denses

Pour associer un immeuble à tout groupe algébrique semi-simple sur un corps ultramétrique, même pour une valuation réelle non discrète, F. Bruhat et J. Tits [BtT-72] élargissent la notion d'immeuble affine. Ils considèrent le cas où le système d'hyperplans de 4.2 n'est pas discret. Alors W n'est plus de Coxeter, il contient un sous-groupe non discret de translations de l'appartement affine $A^a(W)$. On obtient ainsi un « immeuble » $\mathcal{I}^a$ réunion d'appartements affines. Il y a encore une métrique mais l'immeuble n'est plus forcément complet. On peut encore définir un immeuble sphérique à l'infini.

Une définition abstraite de ce genre d'immeuble est donnée par J. Tits [T-86], voir aussi [P-00] ou [Ru-08].

4.8. Classification

La présence d'un immeuble sphérique à l'infini d'un immeuble affine et la classification préexistante des immeubles sphériques (irréductibles de rang $\geqslant 3$) sont les points de départ de la classification par J. Tits des immeubles affines irréductibles de dimension (= dimension des appartements) au moins 3 [T-86]. Il se place dans le cadre général des immeubles affines éventuellement denses (*cf.* 4.7) et montre essentiellement que ces immeubles sont des immeubles de Bruhat-Tits $\mathcal{I}^a(G, K, \omega)$, ou des analogues pour G un groupe classique non algébrique ou une version tordue des précédents *cf.* 3.3.

On trouvera un exposé détaillé de la théorie des immeubles affines (non denses) et de leur classification dans le livre de R. Weiss [W-09].

5. Développements récents

5.1. Réalisation métrique d'un immeuble quelconque

Les immeubles affines sont des exemples intéressants d'espaces à courbure négative ou nulle selon la définition de M. Gromov (prix Abel 2009 !). Ils sont « CAT(0) » : c'est essentiellement équivalent à la condition (CN) de 4.3.

On peut munir un immeuble sphérique $\mathcal{I}^s$ d'une métrique identifiant chaque appartement à une sphère euclidienne de rayon 1. On obtient ainsi un espace métrique CAT(1).

Pour un immeuble $\mathcal{I}$ plus général la réalisation géométrique $|\mathcal{I}|$ n'a pas de bonne propriété métrique. Si $\mathcal{I}$ n'a pas de facteur de type sphérique, une nouvelle réalisation géométrique $\mathcal{I}^m$ de $\mathcal{I}$ munie d'une métrique CAT(0) a été construite par M. Davis [D-98] (et simultanément par J. Tits, non publié) à partir des travaux de G. Moussong [Mg-88]. Dans $\mathcal{I}^m$ seules apparaissent les facettes sphériques de $\mathcal{I}$. Si $\mathcal{I}$ est affine on a $\mathcal{I}^m = \mathcal{I}^a$. Cette réalisation permet d'utiliser le lemme de point fixe de 4.4, par exemple pour montrer qu'un groupe fini agissant sur un immeuble irréductible non de type sphérique stabilise une facette sphérique.

5.2. Le point de vue « moderne » sur les immeubles

Ce nouveau point de vue a été introduit par J. Tits en 1981 dans [T-81] et précisé dans [T-92]. Dans un immeuble (simplicial) $\mathcal{I}$ associé à un système de Tits (G, B, N, S), l'ensemble $\mathcal{C}$ des chambres est égal à G/B. Pour gB et hB dans $\mathcal{C}$ on pose $\delta(gB, hB) = w \in W$ si $g^{-1}h \in B\tilde{w}B$ (décomposition de Bruhat). On obtient ainsi une application $\delta : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to W$.

Pour un système de Coxeter (W, S), on peut donc introduire la définition :

Définition. *Un immeuble de type (W, S) est un ensemble $\mathcal{C}$ (de chambres) muni d'une application $\delta : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to W$ (la $W-$distance) vérifiant pour tous $x, y, z \in \mathcal{C}$:*

(IM1) $\delta(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = y$.

(IM2) *Si $\delta(x, y) = w \in W$ et $\delta(y, z) = s \in S$, alors $\delta(x, z) \in \{w, sw\}$. Si de plus la longueur $\ell(ws)$ de ws (par rapport à S) est plus grande que celle de w, alors $\delta(x, z) = ws$.*

(IM3) *Si $\delta(x, y) = w \in W$ et $s \in S$, il existe $z \in \mathcal{C}$ tel que $\delta(y, z) = s$ et $\delta(x, z) = ws$.*

Cette définition est équivalente à la définition simpliciale (« démodée ») expliquée ci-dessus : une facette est remplacée par un ensemble de chambres (moralement les chambres qui la contiennent) appelé résidu. Plus précisément un *résidu de type $J \subset S$* est une classe d'équivalence pour la relation $x \sim y \Leftrightarrow \delta(x, y) \in W(J)$. Un appartement est une partie de $\mathcal{C}$ qui est $W-$isométrique à W (muni de la $W-$distance $\delta(w, w') = w^{-1}w'$) : on ne parle que du système complet d'appartements. Cette nouvelle définition s'avère plus souple que la précédente et se généralise au cas ci-dessous des immeubles jumelés (mais pas aux immeubles denses de 4.7).

Les livres de M. Ronan [Rn-89] et R. Weiss [W-03], [W-09] sont entièrement écrits dans ce langage. Celui de P. Abramenko et K. Brown [AB-08] présente les deux points de vue.

5.3. Les groupes de Kac-Moody et leurs immeubles jumelés

Les groupes de Kac-Moody (déployés) généralisent les groupes algébriques semi-simples déployés (groupes de Chevalley). Un exemple particulièrement intéressant et utile est constitué des groupes de lacets : $G(K) = G^{\circ}(K[t, t^{-1}])$ où G° est un groupe algébrique semi-simple sur le corps K.

Sur chaque corps K on peut définir de nombreux groupes de Kac-Moody (déployés) et ces groupes sont munis de systèmes de Tits très généraux : tout graphe avec des arêtes simples, doubles, triples ou étiquetées par ∞ apparaît comme graphe de Coxeter du groupe de Weyl d'un tel système. Mais il y a au moins deux classes de conjugaison de sous-groupes de Borel : deux sous-groupes de Borel opposés (B^+ et B^-) ne sont pas conjugués. On a donc en fait deux systèmes de Tits (G, B^+, N, S) et (G, B^-, N, S) avec deux décompositions de Bruhat $G = B^+NB^+ = B^-NB^-$, mais aussi une décomposition de Birkhoff $G = B^+NB^- = B^-NB^+$, *cf.* [T-87].

Cette structure de G peut se traduire par un système de Tits « jumelé » (G, B^+, B^-, N, S) *cf.* [T-92]. Du côté immeuble on en a en fait deux immeubles,

$\mathcal{I}^+$ associé à (G, B^+, N, S) et $\mathcal{I}^-$ associé à (G, B^-, N, S). Si le groupe de Kac-Moody est un groupe de lacets $G^\circ(K[t, t^{-1}])$, les deux immeubles $\mathcal{I}^+$ et $\mathcal{I}^-$ sont les immeubles de Bruhat-Tits de G° sur les corps ultramétriques $K(\!(t)\!)$ et $K(\!(t^{-1})\!)$.

La décomposition de Birkhoff se traduit par une *codistance* δ^* : $(\mathcal{C}^+ \times \mathcal{C}^-) \cup (\mathcal{C}^- \times \mathcal{C}^+) \to W$ (où $\mathcal{C}^\pm$ est l'ensemble des chambres de $\mathcal{I}^\pm$) défini par $\delta^*(gB^\varepsilon, hB^{-\varepsilon}) = w$ si $g^{-1}h \in B^\varepsilon \tilde{w} B^{-\varepsilon}$. Ainsi, selon la théorie développée par M. Ronan et J. Tits, on obtient un jumelage des deux immeubles.

5.4. Jumelages

Définition (*cf.* [T-92])**.** *Un jumelage de deux immeubles de type* (W, S) $(\mathcal{C}^+, \delta_+)$ *et* $(\mathcal{C}^-, \delta_-)$ *(au sens de 5.2) est une application* $\delta^* : (\mathcal{C}^+ \times \mathcal{C}^-) \cup (\mathcal{C}^- \times \mathcal{C}^+) \to W$ *telle que, pour* $x \in \mathcal{C}_\varepsilon$, $y \in \mathcal{C}_{-\varepsilon}$:

(J1) $\delta^*(y, x) = \delta^*(x, y)^{-1}$;

(J2) *Si* $z \in \mathcal{C}^{-\varepsilon}$, $\delta^*(x, y) = w \in W$, $\delta_{-\varepsilon}(y, z) = s \in S$ *et si* $\ell(ws) = \ell(w) - 1$, *alors* $\delta^*(x, z) = ws$;

(J3) *Si* $\delta^*(x, y) = w \in W$ *et* $s \in S$, *il existe* $z \in \mathcal{C}^{-\varepsilon}$ *tel que* $\delta_{-\varepsilon}(y, z) = s$ *et* $\delta^*(x, z) = ws$.

Si W est le groupe diédral infini, des immeubles jumelés de type (W, S) sont des arbres jumelés. On peut définir cette notion par une codistance entre sommets de $\mathcal{I}^+$ et $\mathcal{I}^-$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ *cf.* [RT-94].

5.5. Immeubles jumelés et groupes de type Kac-Moody

Si G est un groupe de Kac-Moody non déployé (mais en fait « presque-déployé ») sur un corps K, on peut, par descente galoisienne sur les immeubles jumelés de G sur une extension déployante, définir des immeubles jumelés pour G sur K et un système de Tits jumelé *cf.* [Ry-02].

La classification des immeubles jumelés a été entamée par J. Tits [T-92] et accomplie par B. Műhlherr *cf.* [Mr-02]. Cela nécessite des hypothèses de rang assez grand ou de Moufang (comme pour les cas sphérique ou affine) mais aussi d'autres hypothèses : il faut en particulier supposer que W est $2-$sphérique *i.e.* que sa matrice de Coxeter n'a pas de coefficient infini. On trouve bien sûr les immeubles des groupes de Kac-Moody presque déployés et aussi des torsions de ces groupes ou des groupes analogues. Au cours de ces torsions il faut considérer des systèmes de Coxeter (W, S) avec S infini (contrairement à nos hypothèses).

La généralisation des immeubles de Bruhat-Tits au cas des groupes de Kac-Moody sur un corps local pose quelques difficultés [Ru-06] [GR-08].

Un groupe de Kac-Moody sur un corps fini (assez grand) est un réseau dans le produit de certains groupes fermés d'automorphismes de ses deux immeubles. Pour les groupes de lacets on retrouve ainsi des réseaux de groupes semi-simples sur des corps locaux d'égale caractéristique p. Le cas général est à la fois semblable et différent par rapport à ce cas particulier *cf.* [CR-09].

6. Références

[AB-08] Peter ABRAMENKO et Kenneth S. BROWN, *Buildings : theory and applications*, Graduate texts in Math. **248** (Springer Verlag, Berlin, 2008).

[A-57] Emil ARTIN, *Geometric algebra*, (Interscience, New York, 1957), *cf. Algèbre géométrique*, (Gauthier-Villars, Paris, 1967).

[BS-73] Armand BOREL et Jean-Pierre SERRE, Corners and arithmetic groups, *Comm. Math. Helv.* **48** (1973), 436-491.

[BlT-65] Armand BOREL et Jacques TITS, Groupes réductifs, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **27** (1965), 55-151.

[Bi-68] Nicolas BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres IV, V et VI*, (Hermann, Paris, 1968).

[Bt-54] François BRUHAT, Représentations induites des groupes de Lie semi-simples complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **238** (1954), 437-439.

[Bt-64] François BRUHAT, Sur une classe de sous-groupes compacts maximaux des groupes de Chevalley sur un corps $\mathfrak{p}-$adique, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **23** (1964), 46-74.

[BtT-66] François BRUHAT et Jacques TITS, BN-paires de type affine et données radicielles affines, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A* **263** (1966), 598-601 ; voir aussi pages 766-768, 822-825 et 867-869.

[BtT-72] François BRUHAT et Jacques TITS, Groupes réductifs sur un corps local I, Données radicielles valuées, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **41** (1972), 5-251.

[BtT-84a] François BRUHAT et Jacques TITS, Groupes réductifs sur un corps local II, Schémas en groupes, Existence d'une donnée radicielle valuée, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **60** (1984), 5-184.

[BtT-84b] François BRUHAT et Jacques TITS, Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local, *Bull. Soc. Math. France* **112** (1984), 259-301. Erratum in [BtT-87a].

[BtT-87a] François BRUHAT et Jacques TITS, Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local, Deuxième partie : Groupes unitaires, *Bull. Soc. Math. France* **115** (1987), 141-195.

[BtT-87b] François BRUHAT et Jacques TITS, Groupes algébriques sur un corps local III, Compléments et applications à la cohomologie galoisienne, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **34** (1987), 671-698.

[CR-09] Pierre-Emmanuel CAPRACE et Bertrand RÉMY, Simplicity and superrigidity of twin building lattices, *Inventiones Math.* **176** (2009), 169-221.

[CLT-80] Charles W. CURTIS, Gustav LEHRER et Jacques TITS, Spherical buildings and the character of the Steinberg representation, *Inventiones Math.* **58** (1980), 201-210.

[D-98] Michael W. DAVIS, Buildings are CAT(0), in *Geometry and cohomology in group theory, Durham (1994)*, P. Kropholler, G. Niblo et R. Stőhr éditeurs, London Math. Soc. lecture note **252** (Cambridge U. Press, Cambridge, 1998), 108-123.

[G-97] Paul GARRETT, *Buildings and classical groups*, (Chapman and Hall, London, 1997).

[GR-08] Stéphane GAUSSENT et Guy ROUSSEAU, Kac-Moody groups, hovels and Littelmann paths, *Annales Inst. Fourier* **58** (2008), 2605-2657.

[GI-63] Oscar GOLDMAN et Nagayoshi IWAHORI, The space of $\mathfrak{p}-$adic norms, *Acta Math.* **109** (1963), 137-177.

[IM-65] Nagayoshi IWAHORI et Hideya MATSUMOTO, On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of $\mathfrak{p}-$adic Chevalley groups. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **25** (1965), 5-48.

[KL-97] Bruce KLEINER et Bernhard LEEB, Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and euclidean buildings, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **86** (1997), 115-197.

[L-96] Erasmus LANDVOGT, *A compactification of the Bruhat-Tits building*, Lecture notes in Math. **1619** (Springer, Berlin, 1996).

[Mg-88] Gabor MOUSSONG, *Hyperbolic Coxeter groups*, Ph. D. thesis, Ohio State University (1988).

[Mr-02] Bernhard MŰHLHERR, Twin buildings, in *Tits buildings and the model theory of groups, Wűrzburg (2000)*, K. Tent éditrice, London Math. Soc. lecture note **291** (Cambridge U. Press, Cambridge, 2002), 103-117.

[MT-06] Bernhard MŰHLHERR et Jacques TITS, The center conjecture for non exceptional buildings, *J. of Algebra* **300** (2006), 687-706.

[Md-65] David MUMFORD, *Geometric invariant theory*, Ergebnisse der math. **34** (Springer, Berlin, 1965). Seconde édition avec J. Fogarty, 1982. Troisième édition avec J. Fogarty et F. Kirwan, 1994.

[P-00] Anne PARREAU, Immeubles affines : construction par les normes et étude des isométries, *Contemporary Math.* **262** (2000), 263-302.

[Ry-02] Bertrand RÉMY, *Groupes de Kac-Moody déployés et presque déployés*, Astérisque **277** (2002).

[RS-95] Jűrgen ROHLFS et Tonny A. SPRINGER, Applications of buildings, in *Handbook of incidence geometry*, Éditeur F. Buekenhout, (Elsevier, Amsterdam, 1995), 1085-1114.

[Rn-89] Mark A. RONAN, *Lectures on buildings*, Perspectives in Math. **7** (Academic Press, New York, 1989).

[RT-87] Mark A. RONAN et Jacques TITS, Building buildings, *Math. Annalen* **278** (1987), 291-306.

[RT-94] Mark A. RONAN et Jacques TITS, Twin trees I, *Invent. Math.* **116** (1994), 463-479.

[Ru-06] Guy ROUSSEAU, Groupes de Kac-Moody déployés sur un corps local, immeubles microaffines, *Compositio Mathematica* **142** (2006), 501-528.

[Ru-08] Guy ROUSSEAU, Euclidean buildings, in « Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidité, Grenoble, 2004 », L. Bessières, A. Parreau et B. Rémy éditeurs, *Séminaires et Congrès* **18** (Soc. Math. France. 2008), 77-116.

[Su-95] Rudolf SCHARLAU, Buildings, in *Handbook of incidence geometry*, Éditeur F. Buekenhout, (Elsevier, Amsterdam, 1995), 477-645.

[Se-77] Jean-Pierre SERRE, *Arbres, amalgames,* SL_2, Astérisque **46** (1977). *cf. Trees*, Springer (1980).

[Se-04] Jean-Pierre SERRE, Complète réductibilité, exposé 932 in *Séminaire Bourbaki 2003/2004*, Astérisque **299** (2005), 195-217.

[T-55a] Jacques TITS, Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie, *Mémoire Acad. Roy. Belg.* **29** (3) (1955), 268 pp.

[T-55b] Jacques TITS, Groupes semi-simples complexes et géométrie projective, exposé 112 in *Séminaire Bourbaki* **3***, années 1954/55-1955/56*, Soc. Math. France (1996), 115-125.

[T-61] Jacques TITS, *Groupes et géométries de Coxeter*, preprint Inst. Hautes Études Sci. (1961), in [Wolf].

[T-62a] Jacques TITS, Groupes algébriques semi-simples et géométries associées, in *Algebraical and topological foundations of geometry, Utrecht (1959)*, H. Freundenthal éditeur, (Pergamon Press, Oxford, 1962), 175-192.

[T-62b] Jacques TITS, Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A* **24** (1962), 2910-2912.

[T-63a] Jacques TITS, Géométries polyédriques et groupes simples, in *Atti della* 2^a *reunione del Groupement des mathématiciens d'expression latine, Firenze (1961)*, Edizioni Cremonese, Roma (1963), 66-88.

[T-63b] Jacques TITS, Groupes simples et géométries associées, in *Proc. Intern. Congress Math., Stockholm (1962)*, (1963), 197-221.

[T-64] Jacques TITS, Algebraic and abstract simple groups, *Annals of Math.* **80** (1964), 313-329.

[T-65] Jacques TITS, Structures et groupes de Weyl, exposé 288 in *Séminaire Bourbaki* **9***, années 1964/65-1965/66*, Soc. Math. France (1996), 169-183.

[T-74] Jacques TITS, *Buildings of spherical type and finite BN pairs*, Lecture notes in Math. **386** (Springer, Berlin, 1974). Seconde édition (1986).

[T-75] Jacques TITS, On buildings and their applications, in *Proc. Int. Congress Math., Vancouver (1974)*, volume 1 (1975), 209-220.

[T-80] Jacques TITS, Buildings and Buekenhout geometries, in *Finite simple groups II, Durham (1978)*, Éditeur M.J. Collins, Academic Press (1980), 309-320.

[T-81] Jacques TITS, A local approach to buildings, in *The geometric vein. The Coxeter Festschrift*, C. Davis, B. Grűnbaum et F.A. Sherk éditeurs, Springer (1981), 519-547.

[T-85] Jacques TITS, Symétries, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. Gén. Vie Sci.* **2** (1985), 13-25.

[T-86] Jacques TITS, Immeubles de type affine, in *Buildings and the geometry of diagrams, Como (1984)*, L.A. Rosati éditeur, Lecture notes in Math. **1181** (Springer, Berlin, 1986), 159-190.

[T-87] Jacques TITS, Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields, *J. of Algebra* **105** (1987), 542-573.

[T-92] Jacques TITS, Twin buildings and groups of Kac-Moody type, in *Groups combinatorics and geometry (Durham, 1990)*, M. Liebeck et J. Saxl éditeurs, London Math. Soc. lecture note **165**, (Cambridge U. Press, Cambridge, 1992), 249-286.

[T-00] Jacques TITS, Groupes de rang un et ensembles de Moufang, Résumé de cours, *Annuaire du Collège de France* (2000), 93-109.

[TW-03] Jacques TITS et Richard M. WEISS, *Moufang Polygons*, Springer monographs in Math. (2003).

[W-03] Richard M. WEISS, *The structure of spherical buildings*, (Princeton U. Press, Princeton, 2003).

[W-09] Richard M. WEISS, *The structure of affine buildings*, Annals of math. studies **168** (Princeton U. Press, Princeton, 2009).

[Wolf] *Wolf prizes in mathematics*, volume 2, S.S. Chern et F. Hirzebruch éditeurs (World Sci. Publ., 2001).

EN HOMMAGE À HENRI CARTAN

(SUITE)

La vie et l'œuvre scientifique de Henri Cartan

Jean-Pierre Serre

Ce texte communiqué par l'Académie des Sciences a été prononcé par l'auteur à l'Académie le 24 février 2009.

Notre confrère Henri Cartan est mort en août 2008, au début de sa 105^{e} année. Pour beaucoup d'entre nous, il était le symbole du nouvel essor des mathématiques en France, après la deuxième guerre mondiale.

Curriculum[1]

Il était le fils aîné du mathématicien Elie Cartan (1869-1951), né à Dolomieu (Isère) et de Marie-Louise Bianconi, d'origine corse. Né à Nancy en 1904, il entre à l'ÉNS, rue d'Ulm, en 1923. C'est là qu'il noue des liens d'amitié avec des mathématiciens qui joueront un grand rôle dans sa vie, à commencer par André Weil, entré à l'ÉNS une année avant lui ; il y avait aussi Jean Dieudonné, Jean Delsarte, René de Possel, Charles Ehresman, etc. Il sort de l'ÉNS en 1926, bénéficie d'une bourse jusqu'à la soutenance de sa thèse en 1928, et devient brièvement professeur au Lycée Malherbe de Caen. Il est ensuite nommé à l'université de Lille, puis à celle de Strasbourg, où il enseigne de 1931 à 1939.

L'année 1935 est une année particulièrement faste, tant du point de vue professionnel que du point de vue personnel :

– avec ses amis Weil, Dieudonné, de Possel,... , il fonde le groupe Bourbaki, qu'il ne quittera qu'à l'âge statutaire de 50 ans.

– il épouse la jeune et charmante Nicole Weiss, fille de l'un de ses collègues physiciens de Strasbourg. De cet heureux mariage, qui dura jusqu'à sa mort (suivie, à six mois de distance, par celle de sa femme), naîtront cinq enfants : Jean, Françoise, Étienne, Mireille et Suzanne.

[1] On trouvera des renseignements plus détaillés sur la vie de Henri Cartan dans les deux interviews suivantes :

– M. Schmidt, *Hommes de Science*, Hermann, Paris, 1990, 32-41 ;
– A. Jackson, *Interview with Henri Cartan*, Notices AMS 46 (1999), 782-788.

En septembre 1939, au début de la guerre, il va à Clermont-Ferrand, lieu de repli de l'université de Strasbourg. Un an plus tard, il est nommé à la Sorbonne, où on le charge d'enseigner les mathématiques aux élèves de l'ÉNS. Un choix providentiel, qui permettra aux normaliens (et aussi à beaucoup de non-normaliens) de bénéficier pendant vingt-cinq ans[2] (1940-1965) de ses cours et de ses séminaires. Il quitte l'ÉNS en 1965, et, quelques années plus tard, pour fuir les disputes « Paris VI contre Paris VII » de l'ex-Sorbonne, il se fait nommer à Orsay, où il enseigne jusqu'à sa retraite en 1975 ; un amphithéâtre du bâtiment de mathématiques porte désormais son nom.

Travaux

Les sujets traités par Henri Cartan sont nombreux, mais il y en a un qui lui était particulièrement cher, c'est celui de la théorie des fonctions analytiques de variables complexes (devenue plus tard théorie des variétés complexes, et aussi « géométrie analytique »). Je vais commencer par là.

Sa thèse ([Oe 3], 1928) porte sur les fonctions analytiques d'une seule variable, ce qui était l'un des sujets les plus populaires en France à cette époque. Cartan continue les travaux d'André Bloch, et ceux de Nevanlinna ; il étudie notamment les propriétés des courbes analytiques dans des espaces projectifs de dimension quelconque (par exemple, des courbes ne rencontrant pas une famille donnée d'hyperplans). Ce genre de sujet était à la mode. Il le sera un peu moins par la suite (malgré les travaux d'Ahlfors et de H. et J. Weyl) Il l'est redevenu grâce aux travaux de Kobayashi sur les variétés hyperboliques (1970-1980 - cf. le rapport de Demailly [Dm]) et grâce aussi à ceux de Vojta (vers 1980) qui a créé un étonnant dictionnaire entre les invariants de Nevanlinna, et les hauteurs des points rationnels sur les variétés algébriques.

Peu de temps après sa thèse, Weil lui fait entrevoir les charmes des fonctions de plusieurs variables complexes, et Cartan est définitivement conquis par ce nouveau sujet. Entre 1930 et 1940, il publie de nombreux articles, en collaboration avec l'école allemande (Behnke, Thullen), avec laquelle il se crée des liens d'amitié que la seconde guerre mondiale n'entamera pas. On en trouvera un résumé dans [An, §§2-5]. Mentionnons en particulier :

– l'introduction dans [Oe 23] (avec Thullen) de la notion de « convexité » relativement à une famille de fonctions holomorphes ; ainsi que le résultat suivant [Oe 32] (en relation avec les travaux d'Elie Cartan) :

– le groupe des automorphismes d'un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ est un groupe de Lie réel, et le sous-groupe qui fixe un point est compact, et se plonge dans $GL_n(C)$.

À partir de 1940, ce sont les « problèmes de Cousin » qui l'attirent le plus, cf. [An, §6]. Il s'agit de construire des fonctions dont les singularités locales (additives ou multiplicatives) sont données. Est-ce possible ? Si ça ne l'est pas, quelles sont les conditions que l'on doit imposer aux données ? Le problème n'est raisonnable que si l'on se place dans un domaine d'holomorphie. C'est ce que suppose Cartan. Il arrive tout près du but, grâce notamment à un théorème sur les

2 Avec une interruption de deux ans : il est retourné à Strasbourg de 1945 à 1947 – hélas pour moi, car j'étais alors élève à l'ÉNS et je n'ai pu faire sa connaissance que lors de ma dernière année, celle de l'agrégation.

matrices holomorphes inversibles [Oe 35] mais il lui manque deux résultats auxiliaires (qu'il interprétera plus tard comme des énoncés de « cohérence »). C'est le mathématicien japonais K. Oka qui démontre le premier de ces deux résultats ; il publie la démonstration et l'envoie à Cartan, qui voit tout de suite comment on peut démontrer de la même manière le second résultat ([Oe 36, 38]) ; le premier problème de Cousin se trouve ainsi résolu, au moins pour les domaines d'holomorphie.

Le deuxième problème de Cousin, lui, n'a pas toujours de solution. Il y a des obstructions de nature topologique, qui reviennent à demander que le problème admette des solutions continues (c'est la moindre des choses lorsque l'on cherche des solutions holomorphes). Comment écrire concrètement ces obstructions, et surtout montrer qu'il n'y en a pas d'autres ? Je suppose (je n'ai jamais pensé à lui poser la question) que c'est l'une des raisons[3] qui ont amené Cartan à s'intéresser à la topologie algébrique, vers 1945-1950. Il y avait des analogies frappantes - pour qui savait les voir - entre certaines notions introduites par Oka (les « idéaux de domaines indéterminés »), et la théorie des faisceaux que venait de créer Jean Leray. Dans ses premiers Séminaires à l'ÉNS (1948-1951), Cartan reprend la théorie de Leray sous une forme un peu modifiée et plus facile à utiliser. Dans le séminaire suivant (1951/1952), il récolte les fruits de ce travail. Il commence par clarifier la notion de « cohérence », implicite chez Oka, définit les « faisceaux analytiques cohérents », et démontre une vaste généralisation des théorèmes du type Cousin : les célèbres « Théorèmes A et B ».

L'énoncé le plus fort est le « Théorème B » qui dit que les groupes de cohomologie supérieurs d'un faisceau analytique cohérent sont nuls, autrement dit, que tout problème (de type additif) raisonnable a une solution (si la variété sous-jacente est une « variété de Stein », généralisation naturelle des domaines d'holomorphie).

Les Théorèmes A et B sont des outils très puissants. Cartan et moi avons exposé quelques unes de leurs applications dans un Colloque à Bruxelles en 1952 ; il semble que ces théorèmes aient fait une forte impression sur les participants, car l'un d'eux (allemand) a dit[4] à son voisin « Les français ont des tanks (Panzern) ; nous avons des arcs et des flèches ». Il faut dire que l'idée d'appliquer la théorie (algébro-topologique) des faisceaux à des objets relevant de l'analyse (fonctions holomorphes) était une idée nouvelle ; elle a été reprise ensuite dans bien d'autres situations (solutions d'équations aux dérivées partielles, par exemple), et elle est devenue standard.

Une autre idée originale de Cartan (également devenue standard) est celle, développée dans le Séminaire 1953/1954, qui consiste à définir un espace analytique complexe (pouvant avoir des singularités) comme un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux. Chez Cartan, ce faisceau est un sous-faisceau du faisceau des fonctions ; Grauert-Remmert et Grothendieck ont montré un peu plus tard qu'il valait mieux ne pas faire cette hypothèse, de façon à accepter des éléments nilpotents.

---

[3] Autre raison : la traduction par Weil des problèmes de Cousin en termes de fibrés holomorphes à groupe structural le groupe additif (premier problème) ou le groupe multiplicatif (deuxième problème) - cf. [Oe 39, §5].

[4] Cité dans R. Remmert, Complex Analysis in « Sturm und Drang », The Mathematical Intelligencer 17 (1995), 4-11.

Dans les années qui ont suivi, Cartan n'a jamais cessé de s'intéresser aux fonctions de plusieurs variables complexes. Il a pris grand plaisir à exposer au séminaire Bourbaki certains travaux d'autres mathématiciens, et notamment ceux de Hirzebruch (exposé 84), de Grauert (exposé 115), de Douady (exposé 296) et de Ramis (exposé 354).

Changeons un peu de sujet, et venons-en à la Topologie. J'ai déjà cité le travail de clarification et d'exposition qu'il a fait sur la théorie des faisceaux dans les Séminaires 1948/1949 et 1950/1951. Il a accompli un travail analogue dans la théorie des espaces fibrés (Séminaire 1949/1950). Autres résultats : la suite spectrale donnant la cohomologie d'un revêtement galoisien (avec J. Leray), la méthode dite « killing homotopy groups » (en collaboration avec moi), et l'étude de la cohomologie réelle des espaces fibrés principaux des groupes de Lie (avec Chevalley, Koszul et Weil). Mais sa contribution la plus originale à la Topologie est sans doute la longue série d'exposés du Séminaire 1954/1955 (reproduits dans [Oe 93]) où il détermine l'homologie des complexes d'Eilenberg-Mac Lane (« ce qui m'a coûté le plus d'efforts », a-t-il dit dans une interview de 1982 – je le crois volontiers). Ce travail serait maintenant classé, non dans la rubrique « Topologie », mais dans celle qui s'appelle « Algèbre Homologique » : une terminologie introduite par Cartan et Eilenberg dans leur livre « Homological Algebra » ([CE], achevé en 1953, mais seulement publié en 1956). Un livre « fondamental » au sens précis de ce terme : il rassemble des résultats épars, les organise de façon systématique et les transforme en un instrument d'une grande puissance.

Cartan a travaillé sur d'autres sujets, que je me borne à mentionner :

– Classes de fonctions indéfiniment différentiables réelles (avec S. Mandelbrojt), [Oe 63-68] ;

– Topologie générale : introduction de la notion de filtre [Oe 61-62] ; construction de la mesure de Haar [Oe 69] ;

– Théorie du potentiel [Oe 70-75, et 84], [An III] ; voir le rapport de J.Deny [Dn] ;

– Analyse harmonique (avec R. Godement) [Oe 80] ;

– Espaces analytiques réels (avec F. Bruhat) [Oe 45-46], [An 13].

L'influence de Cartan

On ne peut pas réduire l'influence de Cartan à la simple liste des théorèmes qu'il a démontrés. Il a fait beaucoup plus que cela. Comme je l'ai dit au début, Cartan représentait (à la fois en France et à l'étranger) le renouveau des mathématiques en France après la seconde guerre mondiale. À quoi cela tenait-il ? Il est difficile de répondre avec précision. Il y a eu plusieurs facteurs :

– Les nombreux élèves qu'il a formés (par ordre chronologique : Deny, Koszul, Godement, Thom, moi-même, Cerf, Douady, Karoubi ... et j'en oublie) ; il ne leur donnait pas de sujet de recherche (estimant sans doute qu'un mathématicien qui ne se pose pas de questions n'est pas un vrai mathématicien), mais, une fois qu'ils avaient démarré, il les aidait à démontrer leurs résultats, à les clarifier et à les rédiger correctement. Cela lui prenait parfois beaucoup de temps (je pense en particulier à une certaine thèse de topologie sur laquelle lui – et moi – avons passé beaucoup d'heures). Mais l'élève en tirait grand profit !

– Autre raison de son influence : les séminaires Cartan. J'en ai mentionné quelques-uns plus haut. Il y en a eu seize (de 1948 à 1964) et ils ont tous été rédigés à l'exception de celui de 1952/1953 ; on en trouvera un résumé dans [Se]. Ce qui fait l'originalité et l'intérêt de ces séminaires, c'est qu'ils prennent les choses au début, et qu'ils donnent des démonstrations essentiellement complètes ; malgré cela, au bout d'une année (et d'une vingtaine d'exposés), ils aboutissent à des choses intéressantes, et parfois même nouvelles. Bien des mathématiciens, français et étrangers, ont appris la topologie ou les fonctions de plusieurs variables complexes dans ces séminaires[5].

– En marge des mathématiques, je mentionne aussi les efforts de Cartan pour améliorer les relations entre mathématiciens allemands et français après la deuxième guerre mondiale, ainsi que sa participation, avec L. Schwartz et M. Broué, au « Comité des Mathématiciens » qui venait à l'aide des mathématiciens emprisonnés pour raisons politiques dans divers pays (et notamment en URSS), par exemple L. Pliouchtch, A. Chtcharanski, A. Chikhanovitch et L. Massera.

Distinctions

Outre l'Académie des Sciences de Paris, Henri Cartan était membre d'une dizaine d'académies étrangères (Allemagne, Belgique, Danemark, Espagne, Finlande, Italie, Japon, Pologne, Russie, Suède, USA), ainsi que de la Royal Society de Londres. Il était membre honoraire de la London Mathematical Society.

Il était docteur honoris causa de l'ETH (Zürich), de l'université d'Athènes et des universités de Cambridge, Münster, Oslo, Oxford, Saragosse, Stockholm et Sussex. Il avait reçu la médaille d'or du CNRS en 1976, le prix Wolf (Israël) en 1980, et le Heinz R. Pagels Human Rights of Scientists Award en 1989.

Il était Commandeur des palmes académiques, Grand Officier de l'Ordre national du mérite et Commandeur de la Légion d'honneur.

Il avait été président de la Société Mathématique de France (1950) et de l'Union mathématique internationale (1967-1970). Il avait aussi été président, puis président d'honneur, du Mouvement fédéraliste européen (1974-1985).

Ouvrages de Henri Cartan

[Oe] *Œuvres - Collected Works*, edited by R. Remmert and J-P. Serre, 3 vol., Springer-Verlag, 1979.

[An] *Brève analyse des travaux*, Notice rédigée pour l'Académie des Sciences en 1973, reproduite dans [Oe vol.I, ix-xxiv].

Homological Algebra (avec S. Eilenberg), Princeton Univ. Press, Princeton, 1956 (traduit en russe).

[5] Les séminaires Cartan avaient un précédent : le « séminaire Julia », organisé entre 1935 et 1938 par Weil, Chevalley, Cartan, ... ; ici encore, il y avait un thème par année (corps de classes, espaces de Hilbert, travaux d'Elie Cartan, ...) et les exposés étaient rédigés. Et ils ont eu un successeur : les impressionnants SGA de Grothendieck à l'IHÉS (1960-1969), dont les démonstrations étaient encore plus complètes – si j'ose dire – et les résultats encore plus nouveaux. Depuis 1970, les séminaires de mathématique se sont multipliés, en France comme à l'étranger, mais aucun, à ma connaissance, n'a essayé de suivre le difficile modèle Julia-Cartan-Grothendieck ; on se contente d'inviter, semaine après semaine, un conférencier qui expose (en général sans démonstration) ses derniers résultats, et discute ensuite avec les spécialistes. Ce n'est pas la même chose.

Théorie élémentaire des fonctions analytiques, Hermann, Paris, 1961 (traduit en allemand, anglais, espagnol, japonais et russe).

Calcul différentiel, Hermann, Paris, 1967 (traduit en anglais et en russe).

Formes différentielles, Hermann, Paris, 1967 (traduit en anglais et en russe).

Séminaires de l'École Normale Supérieure (dits « Séminaires Cartan ») [Secr. Math. Inst. H. Poincaré, rue P. et M. Curie, Paris - W. A. Benjamin ed., New York, 1967.]

1948/1949 *Topologie algébrique*.

1949/1950 *Espaces fibrés et homotopie*.

1950/1951 *Cohomologie des groupes, suites spectrales, faisceaux*.

1951/1952 *Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes*.

1952/1953 *Groupes d'homotopie* (non rédigé).

1953/1954 *Fonctions automorphes et espaces analytiques*.

1954/1955 *Algèbres d'Eilenberg-Mac Lane et homotopie*.

1955/1956 (avec C. Chevalley) *Géométrie algébrique*.

1956/1957 *Quelques questions de Topologie*.

1957/1958 (avec R. Godement et I. Satake) *Fonctions automorphes*.

1958/1959 *Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires*.

1959/1960 (avec J. C. Moore) *Périodicité des groupes d'homotopie stables des groupes classiques, d'après Bott*.

1960/1961 (avec A. Grothendieck) *Familles d'espaces complexes et fondements de la géométrie analytique*.

1961/1962 *Topologie différentielle*.

1962/1963 *Topologie différentielle*.

1963/1964 (avec L. Schwartz) *Théorème d'Atiyah-Singer sur l'indice d'un opérateur différentiel elliptique*.

Autres textes cités :

[Dm] J-P. Demailly, *Variétés projectives hyperboliques et équations différentielles algébriques*, Journée en l'honneur d'Henri Cartan, SMF 1997, 3-17.

[Dn] J. Deny, *Sur la contribution de H. Cartan au développement de la théorie du potentiel*, Hommage à Henri Cartan, SMF 1975, 20-23.

[Se] J-P. Serre, *Les Séminaires Cartan*, Hommage à Henri Cartan, SMF 1975, 24-28.

EN HOMMAGE À THIERRY AUBIN

Thierry Aubin

(1942 – 2009)

Samy Bahoura, Adnène Ben Abdesselem, Philippe Delanoë,
Olga Gil-Medrano, David Holcman, et d'autres anciens élèves

La mort brutale, le 21 mars dernier, de notre directeur de thèse, à l'âge de 67 ans, nous a tous surpris. Sorti de l'École Polytechnique en 1961, il avait obtenu en 1969 son Doctorat ès Sciences (dirigé par Lichnerowicz), été professeur à Lille de 1968 à 1973, puis à Paris (université Pierre et Marie Curie) où il fut élu à l'Académie, correspondant en 1990, membre en 2003.

La *Gazette des mathématiciens* présente ici une dizaine de textes de collègues, amis, collaborateurs ou anciens élèves, réunis pour lui rendre hommage. De ce recueil émanera la silhouette complexe de l'homme disparu, irréductible au souvenir de chacun.

Notre communauté a perdu un acteur magistral des mathématiques du dernier tiers de siècle. C'est le sens des éloges prononcés d'entrée par Alice Chang et Paul Yang d'une part, par Richard Schoen d'autre part (comme de celui que Paul Malliavin a rédigé pour l'Agenda de l'Académie[1]). Un cœur de textes plus près des mathématiques, par Jerry Kazdan et trois anciens élèves, décrira ensuite à grands traits l'œuvre essentielle et l'enseignement de cet acteur. Enfin, deux collaborateurs (Abbas Bahri et François Coulouvrat), un élève récent et un ami de longue date, son collègue Mark Pinsky, témoigneront sur l'homme que la science les avait amenés à côtoyer.

Mais situons déjà pour le lecteur le domaine de recherches qui fut celui de Thierry Aubin. On en distingue les prémices dans l'approche par l'analyse du Théorème d'uniformisation des surfaces de genre $g > 1$ adoptée en 1907 par Henri Poincaré et dans celle, par la géométrie différentielle, proposée en 1915 par Albert Einstein dans sa théorie de la gravitation. Le problème central est ici celui de déformer d'une certaine façon une métrique riemannienne (ou lorentzienne) pour en rendre une certaine courbure, soit constante, soit égale à un tenseur prescrit. L'ambition d'Aubin fut, dès les années 60 (encore étudiant), de traiter des problèmes riemanniens de ce type sur des variétés compactes sans bord, en résolvant globalement sur celles-ci les EDP non linéaires traductions de ces problèmes. Cette ambition

[1] Voir : http://www.academie-sciences.fr/membres/A/Aubin_Thierry.htm

l'a conduit à travailler en thèse sous la direction d'André Lichnerowicz, voici sans doute pourquoi.

D'une part, Lichnerowicz avait inventé une méthode conforme pour résoudre l'équation des contraintes en relativité générale. Or, pour l'uniformisation des surfaces, Poincaré avait employé une méthode analogue, et Yamabe venait d'élargir pareille démarche aux variétés de dimension supérieure – avec une faille désormais célèbre. D'autre part, Lichnerowicz avait contribué à l'étude des variétés kählériennes par la géométrie différentielle ; or sur ces variétés, on peut contrôler la courbure de Ricci[2] par une seule fonction réelle, ce qui offre la perspective d'une possible résolution globale du problème inverse afférent, tel que Calabi l'avait posé en 1954 dans une célèbre conjecture. Enfin, Lichnerowicz avait calculé, pour divers types de tenseurs, des analogues naturels du laplacien et prouvé que leur différence avec le laplacien brut est toujours d'ordre 0 donnée par un terme en courbure, travail préparatoire fondamental pour déduire (par la méthode de Bochner) des résultats de rigidités en courbure positive, mais aussi pour construire des estimations *a priori* sur les-dits tenseurs lorsqu'ils sont, par ailleurs, solutions d'une EDP donnée. Dans ses travaux, Aubin allait s'inspirer de ces techniques d'analyse intrinsèque pour établir de difficiles estimations non linéaires.

Il est temps de donner la parole à nos contributeurs. Puissent leurs voix porter vers le lecteur et vers toute la communauté, l'hommage ici rendu à notre Maître.

Professor Aubin in our Memory

Sun–Yung Alice Chang & Paul Yang[1]

Professor Aubin is widely known for his contribution to the solutions of the Calabi conjecture as well as the Yamabe problem.

His work on the prescribed scalar curvature problem is perhaps not as well known but has had wide influence on the development in this area. To understand the scalar curvature equation on the sphere, he introduced the balancing condition on the conformal factors, and provided an improvement in the Sobolev inequality for such factors. This became the basic tool of the compactness argument for a lot of subsequent work on this equation and later lead to the solution of prescribing curvature problem with no assumption on the symmetry of the curvature.

Professor Aubin has also written several books about geometric PDE that have a wide influence in geometric analysis.

We consider Professor Aubin as one of the anchor in the field of geometric PDE in recent decades. He and his work will be in our memory.

[2] Communément un tenseur symétrique d'ordre 2.

[1] Princeton University, New Jersey, USA.

A tribute to Thierry Aubin

Richard Schoen[1]

Thierry Aubin was a very important mathematician whose work had great influence on the fields of Differential Geometry and Partial Differential Equations. He was instrumental in bringing to bear on geometric problems the powerful methods which were developed to handle nonlinear elliptic and parabolic PDE during the 1950s and 1960s. Aubin applied these methods in novel ways to fully nonlinear equations, and to delicate semilinear variational problems.

My own work was strongly influenced by Aubin's novel contributions to Yamabe-type problems. He uncovered a very deep phenomenon for the Yamabe problem which was the effect of the local geometry on the existence theory in higher dimensions. The many aspects of this phenomenon are still being explored today.

Aubin also emphasized the importance of sharp constants in geometric inequalities for their own beauty as well as for their importance in existence questions for minimizers of variational problems.

The geometric analysis community has sadly lost one of its true leaders with the passing of Thierry Aubin.

Un cours mémorable (Paris VI, DEA 1976-77)

Philippe Delanoë[1]

Thierry Aubin nous a quittés samedi 21 mars 2009. Il avait dirigé mes thèses à l'université Pierre et Marie Curie d'octobre 1977 à juin 1982 après que j'aie suivi son cours de DEA en 1976-77. Je témoignerai ici de ce cours exceptionnel ; il avait alors 34 ans.

Son cours de DEA à l'université Pierre et Marie Curie en 1976-77 visait à présenter plusieurs théorèmes publiés par lui en 1976 ; il fut d'une intensité tout à fait remarquable. Je me souviens qu'Aubin n'exposait que le strict nécessaire, consultant peu ses notes, entrant droit dans la pratique des calculs d'analyse dans des cartes avec des indices, à la manière des physiciens. Grâce à la lecture du merveilleux livre « Théorie des Champs » de Landau et Lifchitz, j'étais en pays de connaissance. Il admettait certains résultats hors du champ de ceux qui nous occupaient directement, donnait peu d'explications ou de commentaires, laissant chaque étudiant travailler seul sur le sens et la portée de son cours.

[1] Stanford University, California, USA.
[1] Université de Nice-Sophia Antipolis, Laboratoire J.-A. Dieudonné.

Tous ses résultats avaient pour cadre une variété riemannienne fermée de dimension n, dont on notera g la métrique. Le cours d'Aubin commençait par des outils de géométrie et d'analyse sur une telle variété : des rudiments riemanniens ; puis un chapitre sur les espaces de Sobolev issu de ses articles [BSM76, JDG76] ; et rapidement expliqué, un théorème sur la fonction de Green du laplacien, tiré de son article [JMPA74]. À ce stade nous devions savoir résoudre l'équation de Poisson $\Delta u = f$.

Puis on passait au problème de Yamabe[2] : en dimension $n > 2$, recherche d'une fonction $u > 0$ telle que la métrique conforme $u^{\frac{4}{n-2}} g$ soit à courbure scalaire constante et de même volume total que g. Ce problème se traduit par une EDP semi-linéaire elliptique du second ordre portant sur le facteur conforme u, avec exposant critique et donc perte de compacité pour l'injection de Sobolev $H_1^2 \hookrightarrow L^{2^*}$ où $2^* = \dfrac{2n}{n-2}$, un obstacle dans l'utilisation de la méthode variationelle directe. L'équation d'Euler-Lagrange implique pour une métrique conforme minimisante d'être à courbure scalaire constante, donc solution du problème de Yamabe. Dans son cours de DEA, Aubin nous a montré que le minimum μ en question (appelé invariant de Yamabe de la classe conforme) est au plus égal à celui μ_0 de la sphère standard et qu'une métrique minimisante existe dès que $\mu < \mu_0$, car on peut alors pallier au manque de compacité, un résultat qu'il avait publié dans [JMPA76]. Du travail restait à faire pour caractériser toutes les variétés qui vérifient l'inégalité cruciale $\mu < \mu_0$ (Aubin nous donna des exemples).

Le message de cette partie du cours était frappant : la géométrie, en donnant lieu à un exposant critique, apparaît source des problèmes d'analyse les plus pertinents. Un tel message frappe encore quand on lit son article [JFA79] sur la prescription de la courbure scalaire dans la classe conforme de la sphère standard (problème de Nirenberg), par le rôle crucial qu'y jouent les meilleures constantes dans certaines inclusions de type Moser-Sobolev.

Dans les dernières séances du cours, Aubin donnait des notions sur l'existence de métriques d'Einstein-Kähler dans le cas $c_1 < 0$, un résultat qu'il avait publié dans [CRAS76]. Il esquissait, pour l'équation de Monge-Ampère complexe qui traduit cette question, une résolution globale impressionnante de technicité, sur quoi le cours s'achevait.

Thierry Aubin connut bientôt ses premiers graves problèmes de santé. Deux ans après avoir soutenu ma thèse, j'ai été affecté au Laboratoire Dieudonné. De passage à Paris, je lui avais demandé une fois s'il accepterait qu'on organise un colloque en son honneur. Il avait décliné, sa santé ne lui permettant pas d'y participer. Désormais nous réfléchirons peut-être à l'idée d'un colloque sur l'héritage de ses intérêts mathématiques, des intérêts partagés par les meilleurs géomètres-analystes du monde.

Références

[JMPA74] Th. Aubin, Fonction de Green et valeurs propres du laplacien, *J. Math. Pures Appl.* **53** (1974) 347-371

[2] Pointé du doigt à la communauté (Yamabe étant décédé) par Neil Trudinger [*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **22** (1968) 265-274], alors thésard et qui avait remarqué une erreur grave en lisant la preuve de Yamabe.

[BSM76] TH. AUBIN, Espaces de Sobolev sur les variétés riemanniennes, *Bull. Sc. Math.* **100** (1976) 149-173
[JDG76] TH. AUBIN, Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev, *J. Diff. Geom.* **11** (1976) 573-598
[JMPA76] TH. AUBIN, Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, *J. Math. Pures Appl.* **55** (1976) 269-296
[CRAS76] TH. AUBIN, Equations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **283** (1976) 119-121
[JFA79] TH. AUBIN, Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire, *J. Funct. Anal.*32 (1979) 148-174

Thierry Aubin's Work on Prescribing Scalar Curvature

Jerry L. Kazdan[1]

In the past fifty years there has been a surge of work on problems that involve the interplay of differential geometry and analysis, particularly partial differential equations. Thierry Aubin was one of the true leaders. He had important insight on how to reduce geometry problems to proving fundamental inequalities. These will have a permanent place in mathematics.

Here I'll give a brief view of just one part of his work: to understand the scalar curvatures of Riemannian metrics that are pointwise conformal to a given metric g. To be more specific, let (M^n, g) be a compact Riemannian manifold of dimension $n \geq 3$ and let $g_1 = u^{4/(n-2)}g$ be a conformal metric (here $u(x) > 0$ is a smooth function and the exponent $4/(n-2)$ is used to make subsequent equations simpler). Let S and S_1 be the scalar curvatures of g and g_1 respectively. They are related by the equation

$$-\gamma\Delta u + Su = S_1 u^{N-1}, \tag{1}$$

where $\gamma = 4(n-1)/(n-2)$ and $N = 2n/(n-2)$. Two problems come to mind immediately:

– The first is to find $u > 0$ so that $S_1 =$ constant. This is the Yamabe problem. It can be thought of as a generalization of the uniformization theorem from complex analysis. Elsewhere in this article others will discuss Aubin's contributions to this question.

– The second is to specify a function S_1 and seek u so that this function S_1 is the scalar curvature of g_1. Thus, one seeks a conformal metric with prescribed scalar curvature. We will discuss Aubin's work on this problem. For convenience we assume that the given metric has constant scalar curvature $S = c$.

[1] Department of Mathematics, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA 19104-6395, USA.

Equation (1) has the form

$$-\Delta u + cu = hu^{\alpha}, \tag{2}$$

with $\alpha > 1$. Given c and h one seeks a positive solution u. Integrating this equation, since $u > 0$, we get a condition relating h to the sign of c. For instance, if $c > 0$, then $h(x)$ must be positive somewhere. The three cases $c > 0$, $c = 0$, and $c < 0$ are remarkably different.

Case 1 : $\mathbf{c} > 0$. Here the size of the exponent α is important. In equation (1), $\alpha = N - 1$, where $N = 2n/(n-2)$ is the critical case of the Sobolev embedding of H_1 in L_N. Aubin realized that determining the *best* constant in the Sobolev inequality was fundamental. In [1] he found the smallest constant B such that the Sobolev inequality

$$\|u\|_p^q \leqslant B^q \|\nabla u\|_q^q + A\|u\|_q^q$$

holds for all u in H_1^q, with some constant $A(B)$ independent of u. Here $p^{-1} = q^{-1} - n^{-1}$ with $1 \leqslant q < n$. In the application to (1), $q = 2$ so $p = 2n/(n-2)$ which is exactly the constant N.

In a subsequent paper [2], he found that if u satisfies additional natural orthogonality relationships, then the best constant B can be lowered.

He used these best constants to give basic information into when one can solve equation (1).

Case 2: $\mathbf{c} < 0$. In this case the size of the exponent $\alpha > 1$ is not important. A necessary condition is that $\int_M h\,dx < 0$, so $h(x)$ must be negative somewhere. It is easy to show that if $h(x) < 0$ everywhere then one can always solve (2). However in [3] Aubin and S. Bismuth, building on earlier work of Ouyang, Rauzy, Vasquez and Veron, gave important results on how the set where $h(x) \geq 0$ and the size of h there influence the solvability of (2).

For the two dimensional case, $n = 2$, Aubin obtained sharp inequalities analogous to the Sobolev inequalities. He used these to prove similar results for prescribing the Gauss curvature in this case.

References

[1] Aubin, Th., "Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev." *J. Differential Geometry*, **11** (1976), n° 4, 573–598.

[2] Aubin, Th., "Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire." *J. Funct. Anal.* **32** (1979), n° 2, 148–174.

[3] Aubin, Th.; B., Sophie, "Courbure scalaire prescrite sur les variétés riemanniennes compactes dans le cas négatif." *J. Funct. Anal.* **143** (1997), n° 2, 529–541.

Aubin's Contribution to Yamabe Problem

Olga Gil-Medrano[1]

If (M,g) is a compact Riemannian manifold without boundary, of dimension $n \geqslant 3$, there is at least one metric g' conformal to g with constant scalar curvature. This statement, that H. Yamabe proved in [9], became a problem once it was detected a weak point in the original proof, as N.Trudinger remarked in [8]. The geometrical problem of finding a metric of the form $g' = \varphi^{4/n-2}g$, with a smooth $\varphi > 0$ and with constant scalar curvature R', is expressed in terms of the existence of solutions of a given elliptic PDE in the manifold M. The equation relating R' with the scalar curvature of g, denoted R, via the Laplace operator of g is

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi + R\varphi = R'\varphi^{\frac{n+2}{n-2}}$$

and provides one of the more famous examples of nonlinear equation with critical exponents; if we consider the analogous equation where the exponent $\frac{n+2}{n-2}$ is changed by $q < \frac{n+2}{n-2}$ then the new equation has a solution, but the methods fail exactly for this exponent.

It is easy to see Yamabe equation as the Euler-Lagrange equation of the variational problem corresponding to the functional

$$J(\varphi) = \Big(\|\nabla\varphi\|_2^2 + \int_M R\varphi^2 \, dv_g\Big)\|\varphi\|_N^{-2}$$

with $N = \frac{2n}{n-2}$. Let us consider the Yamabe number $\mu(M,g)$ defined as the infimum of the functional on the set consisting of those elements of the Sobolev space $H_1(M)$ that are everywhere non negative and positive in at least one point.

If there is a smooth function φ, everywhere positive such that $J(\varphi) = \mu(M,g)$ then the conformal metric g' as above has volume 1 and constant scalar curvature equal to $\mu(M,g)$. This is not the only way to find a solution but this has been the method most frequently used and it was Yamabe's program. The gap in his proof can be overcome under certain hypothesis and, ten years after Yamabe's work, contributions by Trudinger and Aubin allowed to be certain that the result is true for $\mu \leqslant 0$. (see [1]).

Aubin's paper [2] has been a key stone for the complete solution of the problem. It is not a surprise to see how many authors have cited it since its publication. Firstly, he showed that for any compact Riemannian manifold of dimension n the infimum of the Yamabe functional verifies $\mu(M,g) \leqslant \mu(S^n, g_0) = n(n-1)Vol(S^n, g_0)^{2/n}$ where (S^n, g_0) is the n-dimensional round sphere of radius 1. This was achieved by using his own result concerning the best constant for Sobolev imbeddings in which he was working at the same time [3]. Secondly and more important, he showed that if for a manifold the inequality is strict then for this manifold there is a solution of the Yamabe problem by a function minimizing the functional J. After showing that this is the case for different classes of manifolds,

[1] Universidad de Valencia, Spain.

he proposed what is known afterwards as Aubin's Conjecture: $\mu(M, g) < \mu(S^n, g_0)$ for any manifold not conformal to the sphere.

Although nowadays there are many different solutions of the Yamabe problem, almost all the first ones where obtained by proving Aubin's Conjecture. In [2], Aubin showed that the inequality is strict for any compact Riemannian manifold which is not locally conformally flat and of dimension $n \geqslant 6$. The test functions used to obtain the result where constructed by using the Weyl tensor. More sophisticated test functions were constructed by Schoen [6] to extend the result to manifolds of dimension 3, 4 and 5. For a locally conformally flat manifold which is not conformal to the sphere, the conjecture was proved by Aubin in [2] with the hypothesis of the manifolds having finite fundamental group, some advances were done in [5] by showing Aubin's conjecture for a list of examples and for connected sums and finally the conjecture was proved by Schoen and Yau in [7].

The details can be seen in the good chapter that Aubin dedicates to Yamabe problem in his book [4] that I strongly recommend to anyone interested in the state of the art by the time of his writing in 98.

Let me finish with a personal comment. It was a privilege for me that T. Aubin accepted me among his students. I have always been grateful to him for proposing, as the subject of my Thèse de troisième cycle, in 1983 the study of the open cases on Yamabe problem concerning locally conformally flat manifolds, a subject on which many outstanding geometers were working at that time. This challenge, that I would never had faced without his encouragement, changed for ever my concept of mathematical research.

References

[1] AUBIN,TH., Métriques riemanniennes et courbure. *J. Diff Geo.* 4, (1970) 383–424.

[2] AUBIN,TH., Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. *J. Math. Pures Appl.*, 55 (1976), 269 – 296.

[3] AUBIN,TH., Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev et un théorème de Fredholm non linéaire pour la transformation conforme de la courbure scalaire. *J. Funct. Anal.*, 32 (1979) 148 –174.

[4] AUBIN, TH., *Some nonlinear problems in Riemannian geometry.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[5] GIL-MEDRANO,O., On the Yamabe problem concerning the compact locally conformally flat manifolds. *J. Funct. Anal.*, 66 (1986) 42-53.

[6] SCHOEN, R., Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature *J. Differ. Geom.*, 20 (1984) 479–495.

[7] SCHOEN, R. AND YAU, S. T. , Conformally flat manifolds, Kleinian groups and scalar curvature *Invent. Math.*, 92 (1988) 47-71.

[8] TRUDINGER, N., Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, (3) 22 (1968) 265–274.

[9] YAMABE, H., Conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds. *Osaka Math. J.* ,12 (1960), 21–37

Aperçu sur les travaux de Thierry Aubin en géométrie kählérienne

Adnène Ben Abdesselem[1]

Suivant Calabi [1, 2], étant donnée une variété kählérienne compacte (M, g), on cherche un changement de métriques kählérien, c'est-à-dire une fonction $\varphi \in C^\infty(M)$ telle que $g'_{\lambda\overline{\mu}} = g_{\lambda\overline{\mu}} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^\lambda \partial \overline{z}^\mu}$ définisse une métrique kählérienne[2], et tel que la métrique g' ainsi définie soit d'Einstein-Kähler, c'est-à-dire vérifie :

$$\mathrm{R}icci\,(g') = kg' \quad (*).$$

Le premier constat est d'ordre topologique. En effet, l'équation (*) impose à la première classe de Chern de M (notée c_1) d'être ou bien positive ($k > 0$), ou bien négative ($k < 0$) ou bien nulle ($k = 0$).

Dans sa thèse [3], T. Aubin met en équation le problème précité et en ramène l'étude à celle de l'existence d'une solution φ admissible de l'équation de type Monge-Ampère complexe suivante, qu'on peut appeler équation d'Aubin :

$$\det(g'g^{-1}) = e^{-k\varphi+f} \quad (E),$$

où f provient d'une donnée géométrique. Une normalisation restreint l'étude respectivement aux cas $k = 1$, $k = 0$ et $k = -1$ suivant le fait que c_1 est positif, nul ou négatif. Le cas nul est un cas particulier de la conjecture de Calabi [1, 2] selon laquelle tout représentant de c_1 est le Ricci d'une métrique obtenue par changement kählérien comme ci-dessus. Soulignons que des idées essentielles pour la résolution de l'équation (E) avec $k \leqslant 0$ se trouvent dans [3]. La preuve complète du cas $k = -1$ (ou $c_1 < 0$) est donnée par Aubin dans [4] et détaillée dans son article [5]. Ce dernier contient aussi une preuve presque complète de la conjecture de Calabi. La méthode[3] utilisée est la méthode de continuité. Pour le cas $k = -1$, l'équation de continuité considérée est

$$\det(g'g^{-1}) = e^{\varphi+tf} \quad (E_t),$$

et pour la conjecture de Calabi, Aubin considère l'équation

$$\det(g'g^{-1}) - 1 = t(e^f - 1) \quad (E'_t).$$

Dans les deux cas, on en cherche une solution[4] admissible φ_t pour $t \in [0, 1]$, et l'opérateur linéarisé de $\varphi \to \det(g'g^{-1})$ en $\varphi = \varphi_t$ issu de ces équations est inversible.

Il existait une forte concurrence internationale sur le sujet. La médaille Fields récompensa Shing-Tung Yau pour sa résolution [7] de la conjecture de Calabi, conjecture qu'Aubin avait démontrée dans [3] sous l'hypothèse que la métrique

1 Université Paris VI.
2 On dira alors que la fonction φ est *admissible*.
3 Alternativement, Aubin propose aussi une méthode variationelle inaugurée dans [3].
4 Connue pour $t = 0$, elle sera la solution désirée pour $t = 1$.

kählérienne de départ g est à courbure bisectionelle holomorphe non-négative, hypothèse presque levée dans [5] où seule manquait l'estimation C^0 des solutions de (E'_t), qui fut l'apport de Yau par rapport aux travaux d'Aubin.

Le cas $k = 1$ (ou $c_1 > 0$) présente des difficultés d'une autre nature. En effet, si certains espaces, à l'instar du projectif complexe, sont dotés de métriques d'Einstein-Kähler naturelles, les obstructions de Lichnerowicz[5] et de Matsushima montrent que certaines variétés à c_1 positif ne peuvent posséder de métriques d'Einstein-Kähler. Par ailleurs, la méthode de continuité semblait inapplicable car l'opérateur linéarisé n'était plus inversible, du moins si l'on gardait le paramètre t au même endroit que dans les deux premiers cas. Comme pour ces derniers, T. Aubin allait trouver l'idée essentielle, celle qui permet d'appliquer, encore une fois, la méthode de continuité. Il considéra l'équation

$$\det(g'g^{-1}) = e^{-t\varphi+f} \quad (E''_t),$$

et eût l'idée de recourir pour elle à un analogue complexe de l'inégalité de Lichnerowicz qui porte sur la première valeur propre du laplacien lorsque le Ricci est plus grand que la métrique à une constante multiplicative près. L'utilisation de cette inégalité allait lui permettre d'inverser l'opérateur linéarisé pour des petites valeurs de t et de poursuivre la preuve en utilisant le fait que pour $t = 0$, une solution est donnée par la conjecture de Calabi. Comme dans les deux premiers cas, il construit des estimées a priori (souvent très compliquées) et ramène l'étude du cas positif à la recherche de conditions permettant d'établir l'estimée C^0 des solutions de (E''_t). Il en fournit une portant sur l'intégrale des exponentielles des fonctions admissibles dans [6]. Son idée ainsi que les deux fonctionnelles qu'il introduit dans cet article s'avéreront cruciales et sont à l'origine d'importants travaux sur la question, dont la célèbre constante de Tian.

Voici donc, résumées en quelques lignes, les contributions de mon Maître dans ce domaine. Ces dernières, bien qu'essentielles, sont pour moi secondaires devant l'amitié que l'on se témoignait.

Puisse le Tout Puissant recevoir dans son infinie miséricorde celui qui m'a tant appris.

Références

[1] Calabi, E., The space of Kähler metrics, *Proceedings Internat. Congress Math. Amsterdam* **2** (1954) 206-207

[2] Calabi, E., On Kähler manifolds with vanishing canonical class, in : *Algebraic Geometry and Topology. A Symposium in Honor of S. Lefschetz*, Princeton Univ. Press (1955), 78-89

[3] Aubin, Th., Métriques riemanniennes et courbure, *J. Diff Geom.* **4** (1970) 383-424

[4] Aubin, Th., Equations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, *C. R. Acad. Sci. Paris* **283** :3 (1976) 119-121

[5] Aubin, Th., Equations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, *Bull. Sci. Math.* **102** :1 (1978) 63-95

[6] Aubin, Th., Réduction du cas positif de l'équation de Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes à la démonstration d'une inégalité, *J. Funct. Anal.* **57** :2 (1984) 143-153

[7] Yau, S.-T., On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978) 339-411

[5] Qui dirigea la thèse de T. Aubin.

Grand salut au maître et à l'ami

Abbas Bahri[1]

C'est avec tristesse que j'ai appris la nouvelle de la disparition de Thierry Aubin, qui fut un collaborateur et un ami.

Ses travaux sur la conjecture de Yamabe et sur l'équation de Monge-Ampère complexe (métrique de Kähler-Einstein) sont une page de l'histoire des mathématiques. Je suis sûr que d'autres ici la détailleront.

Thierry Aubin et moi avons eu une collaboration intense pendant cinq à six années. Nous avons écrit en collaboration deux articles sur la courbure scalaire et nous en avions un troisième en préparation, difficile, dont seulement les grandes lignes étaient tracées. Je dois maintenant le terminer seul, en restant fidèle à ces grandes lignes que nous avions pensées (cela prendra du temps).

Thierry Aubin était un excellent mathématicien, un grand géomètre. Sa pensée était claire, son exposition permettait à ses lecteurs d'aborder d'emblée des sujets difficiles et leur donnait l'illusion de faire tout de suite de la recherche avancée dans des domaines très techniques et compliqués. Ses livres montrent le talent d'un magicien qui vous invite dans un domaine comme si vous y aviez toujours été, comme si vous n'aviez pas besoin d'y pénétrer.

C'est une qualité qui s'est perdue dans la géométrie d'aujourd'hui, trop touffue et complexe (sans doute parce qu'elle se cherche, mais pas seulement), celle d'exhiber la beauté si naturelle à une pensée claire et incisive. Cette façon d'être appartenait à Thierry, elle est visible dans tous ses travaux et dans ses livres.

Thierry Aubin était aussi un être humain complexe, à la recherche de nouveaux horizons. Il a cherché, et trouvé je crois, des amis partout dans le monde : il a eu des élèves (plusieurs d'entre eux sont des amis personnels) français, mais aussi maghrébins. Il a bien sûr voyagé dans le monde entier, son nom et ses travaux étant partout connus et réputés.

Il m'a souvent rendu visite en Tunisie, où il a aussi séjourné de manière indépendante à l'invitation d'autres mathématiciens tunisiens, à celle de la

[1] Rutgers University, New Jersey, USA.

Société Mathématique de Tunisie. Je crois qu'il s'y plaisait, pour des raisons mathématiques, mais aussi pour des raisons de sympathie naturelle.

Je garde le souvenir d'un collaborateur précieux, d'un grand maître des équations de la géométrie ; et aussi d'un ami apprécié et bon vivant. Je regrette sa disparition et je la ressens comme une grande perte.

Ses livres et ses recherches resteront dans l'histoire de la connaissance et des mathématiques. Nous ne pouvons, c'est bien clair, tous en dire autant.

Alors, un grand salut à un maître consommé dans un art difficile, la Géométrie et plus généralement les Mathématiques, qui nous a brusquement quittés ; et un grand salut à l'ami qui est parti.

C'était mon patron

David Holcman[1]

T. Aubin nous a quittés le 21 mars 2009 après avoir combattu dignement la maladie pendant plusieurs années. Ce qui, lui comme beaucoup, l'embêtait le plus dans cette histoire, c'était d'avoir cotisé pour rien ; on devrait demander au fisc de nous rembourser. Sans doute, là où il est, et je l'espère, prend-on soin de lui avec le service qu'il attendait : les macarons de Ladurée, les chemises Yves Saint-Laurent, les parfums Guerlain et Chanel, tout ce qui fait, en fait, la grandeur de la France.

Aubin, comme nous l'appelions, ou le Biterrois, comme disait Cherrier, avait une personnalité complexe ; homme de grand talent mathématique, il était plutôt de cette génération de matheux qui cosignaient peu. Très malin, c'était un homme original, plutôt secret, qui parlait peu, mais savait aller à l'essentiel. Dans ses cours ou ses livres, il manquait un certain nombre d'étapes de calculs, ce qui donnait des couleurs et de la sueur à qui voulait entrer dans l'univers ludique mais assez fermé de l'analyse sur les variétés.

Aubin, c'était aussi mon patron de thèse, pas facile, plutôt exigent. Tout commença pour moi, fin 1995 : à peine arrivé en thèse, il m'avait demandé de borner l'énergie des solutions de l'équation de la courbure scalaire, ce qui n'était pas une mince affaire pour un étudiant fraîchement sorti du service militaire. Après un an d'errance, la thèse tourna dans une autre direction, celle de trouver des solutions de l'équation de Yamabe qui changent de signe. Mes discussions avec le maître pendant ces années furent brèves, assez peu fréquentes mais mémorables. En fait, la tradition dans l'équipe était que Cherrier supervisait les étudiants allant du côté de l'analyse complexe (Monge-Ampère) et Vaugon (Michel pour les intimes) aidait ceux qui travaillaient sur Yamabe, la concentration ou la masse, dont il était le spécialiste.

Aubin était imprédictible sur beaucoup de choses, mais il soutenait avec conviction ceux qu'il avait choisis. Chez Aubin, il fallait savoir calculer dans tous les sens, savoir aussi s'économiser par des astuces de calcul, utiliser les nablas, et ne pas se mettre en coordonnées, sinon à quoi cela servait d'avoir inventé ce symbole ? Aubin perpétuait cette idée que l'analyse ne peut se faire sans calculs, mais

[1] École Normale Supérieure, Paris.

avant ça, il fallait savoir quoi calculer, et là, il rappelait qu'il fallait apprendre la géométrie sérieusement, avant, pas après. Son cours de géométrie n'était pas facile et une génération d'étudiants se souvient de ceux qui parvenaient à dépasser la moyenne en Maîtrise. Heureusement que Vaugon s'occupait des TD, garnissait le cours d'Aubin d'exemples fondamentaux, ce qui permettait de comprendre le fond du problème.

Si Aubin s'accommodait assez bien de son isolement sur la place des mathématiques et de la géométrie riemannienne, c'est parce qu'il lui était indifférent, ce qui faisait aussi sa force. Si je dois ajouter quelque chose, c'est simplement qu'il savait apprécier la beauté sous ces formes les plus diverses.

Sa disparition laisse le vide d'une personnalité originale, solitaire, en marge des groupes de tendances, qui disait ce qu'il pensait. Derrière lui survit une petite collection d'élèves que nous sommes. Mais son message tel que je l'ai compris et appliqué est qu'en recherche, on se doit de faire ce qu'on veut, de toute façon, on fera ce qu'on peut.

Thierry Aubin, ou les incursions d'un mathématicien curieux en mécanique des fluides

François Coulouvrat[1]

« Mano sanem in corpore sanum ». J'ai choisi cette célèbre locution latine pour illustrer les circonstances de ma rencontre avec Thierry Aubin. Loin des sévères amphis de l'université Pierre et Marie Curie, ou des boiseries séculaires de l'Académie des Sciences, c'est... dans une piscine que nos chemins (ou plutôt, en l'occurrence, nos lignes) se croisèrent. Non pas pour d'audacieuses expériences de mécanique des fluides mais, plus prosaïquement à l'occasion de cours de natation dispensés au personnel de l'université dans le bassin de l'ancienne École Polytechnique. Thierry Aubin y pratiquait assidûment le dos crawlé pour apaiser certaines douleurs persistantes. J'étais alors un jeune chargé de recherche au CNRS, en « Sciences pour l'Ingénieur ».

Depuis quelques mois seulement, je m'intéressais à la propagation des ondes de choc acoustiques. À l'époque, le programme de recherche « ATSF » (Avion de Transport Supersonique du Futur) portait sur la faisabilité d'un successeur à Concorde. Parmi les nombreux défis soulevés par un tel projet, les contraintes environnementales ne sont pas les moindres. Entre autres, le bang sonique, ou détonation balistique, est la brutale compression sonore de l'air produite au sol par le survol d'un objet qui vole plus vite que la vitesse du son. Cette onde de choc n'est autre que la trace lointaine du système d'ondes de choc aérodynamiques plus intenses suscitées par la géométrie et la portance d'un avion. Bien qu'atténuées par l'éloignement, ces détonations persistent au sol et sont suffisamment gênantes pour interdire encore aujourd'hui le survol des terres à vitesse supersonique. Un des défis à relever est donc de modifier sensiblement la conception des avions

[1] Université Paris VI.

pour en réduire suffisamment la nuisance au sol. Parmi les principaux paramètres contrôlant celle-ci, figure le temps de montée, ou « raideur » des chocs. En effet, ceux-ci s'avèrent n'être pas des discontinuités strictes au sens mathématique du terme, mais des zones de variation continue, quoique très rapide. En mécanique des fluides classique, ce phénomène est décrit par l'équation de Burgers, archétype de l'équation de propagation diffusion non linéaire, selon laquelle la raideur du choc est contrôlée par un équilibre entre non-linéarités et viscosité : c'est la structure de choc établie par Taylor en 1910.

Toutefois, en atmosphère réelle, les phénomènes de dissipation dominants ne sont pas la viscosité, mais la relaxation des molécules diatomiques d'azote et d'oxygène possédant un degré interne de vibration qui, excitées par l'onde acoustique, « relaxent » avec une cinétique chimique connue. La propagation d'une onde de choc dans un tel milieu est décrite par une équation de Burgers généralisée. En présentant celle-ci à Thierry Aubin, il en a d'emblée saisi l'intérêt du point de vue mathématique : d'une part en démontrer rigoureusement l'existence et l'unicité des solutions pour une condition initiale quelconque, d'autre part en étudier le comportement local au voisinage des chocs en fonction de leur amplitude.

Dans un premier temps, Thierry Aubin montre l'existence locale des solutions en écrivant l'équation comme une équation de la chaleur modifiée, et en en déduisant la solution sous forme d'une suite itérative de solutions de cette dernière. Dans un second temps, il établit l'existence globale de ces solutions : celles-ci existent à tout instant, sont bornées par leur valeurs initiales et tendent vers zéro aux valeurs et aux temps infinis. Enfin, dans un dernier temps, Thierry Aubin étudie le comportement limite de ces solutions lorsque les paramètres visqueux et de relaxation sont petits, et que le rapport des temps de relaxation est petit également, toutes hypothèses parfaitement satisfaites dans l'atmosphère.

Après plusieurs résultats intermédiaires faisant appel à un vaste appareil mathématique d'analyse fonctionnelle et une série d'estimations et de majorations subtiles, Thierry Aubin démontre finalement le résultat principal de notre étude (Théorème 8). Suivant l'amplitude du choc, il existe un double « blow-up » (suivant la terminologie mathématique) ou double structure de choc (comme on dirait plutôt en mécanique) faisant intervenir, soit la viscosité et le mécanisme de relaxation le plus rapide (celle de l'oxygène) pour les chocs d'amplitude les plus fortes, soit uniquement les deux relaxations (azote puis oxygène) dans le cas médian. Seuls les chocs les plus faibles présentent un simple « blow-up » déterminé par la relaxation de l'azote seul. Certains de ces résultats, en présence d'un seul mécanisme de relaxation, avaient été anticipés intuitivement par une approche heuristique des plus grands mécaniciens des fluides. Les résultats obtenus par Thierry Aubin avec deux mécanismes de relaxation sont eux totalement originaux.

Dans tous les cas, Thierry Aubin a su apporter la puissance et la rigueur d'une démonstration élégante et sans faille, au modeste « physicien » que je suis. Ses démonstrations ont été publiées dans un article au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées [1], revue chère à son cœur. Cet article est cosigné, mais l'essentiel de la contribution est de la main de Thierry Aubin.

À travers cette collaboration ponctuelle mais fructueuse, j'ai pu ô combien apprécier et admirer la curiosité de Thierry Aubin, soucieux des applications de son expérience de mathématicien de haut vol à la réalité physique, la vivacité de son esprit brillant appréciant immédiatement la richesse des comportements physiques derrière l'obtuse équation, et son enthousiasme pour les défis intellectuels. Et tout cela en travaillant au coin de son bureau en toute simplicité avec un jeune chercheur d'une autre discipline croisé par hasard, et après 45 minutes d'efforts natatoires prolongés.

Chapeau bas, Monsieur Thierry Aubin !

Références

[1] Aubin, Th. & Coulouvrat, F. , Ondes acoustiques non linéaires dans un fluide avec relaxation, *J. Math. Pures Appl.* **77** (1998) 387–413

In Memory of Thierry Aubin

Mark A. Pinsky[1]

Thierry Aubin was one of the pioneers in what is now called *geometric analysis* – the use of partial differential equations to study problems in global differential geometry.

His most recent book "A Course in Differential Geometry" [AMS01], was published by the American Mathematical Society in 2001, following several months of negotiations with other publishers, who asked for "more words in the index", "more pictures", etc. Prior to 1999 I had been aware of the course notes which later evolved into the book. Since I was a Consulting Editor of the AMS, it was natural to nominate Aubin's book manuscript for publication, overlooking the petty criticism from other publishers. He was very pleased to be invited, formally through the offices of Sergei Gelfand, then Associate Publisher of the AMS. In turn, I was pleased and honored when Aubin wrote to me to help edit the text, much of this involving proper translation from French to "American English" in a form appropriate for graduate students. Working together by e-mail, we were able to make the necessary changes within one month.

On this note, we comment on the philosophy of the text, in the author's words. "The aim of this book is to facilitate the teaching of differential geometry. This material is useful in other fields of mathematics such as partial differential equations – to name one. We feel that workers in PDE would be more comfortable with the covariant derivative if they had studied it in a course such as the present one. Given that this material is rarely taught, we feel that it requires a substantial amount of effort, especially since there is a shortage of good references." Now we have an excellent reference for this interface.

References

[AMS01] Aubin, Th., *A course in Differential Geometry*, Graduate Studies in Math. **27**, American Mathematical Society, Providence, R.I. (2001)

[1] Northwestern University, Evanston, IL, USA.

ENSEIGNEMENT

De nouveaux programmes de mathématiques en seconde... et après ?

Daniel Duverney[1]

Le but de ce texte est d'apporter des informations sur l'évolution des programmes de mathématiques en classe de seconde. Il vise aussi à replacer le problème dans le cadre de la réforme du lycée en préparation, en lien avec le « socle commun de compétences et connaissances » instauré au collège par la loi d'orientation de 2005.

Rappelons que le site Internet de la SMF propose une documentation et des analyses, régulièrement mises à jour, sur la réforme du lycée. Toutes les références en ligne de cet article, et beaucoup d'autres, y sont disponibles ; elles permettent un accès direct aux documents originaux cités.

Le cadre du changement de programme

La réforme du lycée, qui devait initialement se mettre en place à la rentrée 2009 en seconde, a été reportée d'un an le 15 décembre dernier. Ce report n'aurait dû, en principe, occasionner aucun changement de programme à la rentrée 2009. En physique et chimie, par exemple, il n'y aura pas de changement de programme en seconde à la rentrée prochaine.

Pourtant, en mathématiques, un changement de programme était nécessaire, car l'instauration du « socle commun de compétences et connaissances » au collège a été l'occasion de modifications de programmes, notamment pour la classe de troisième (par exemple, l'introduction des vecteurs disparaissait du programme). En physique et en chimie, le « toilettage des programmes » pour tenir compte des objectifs du « socle commun » s'est limité à souligner, dans le texte du programme existant, les parties qui relevaient de ce socle et qui devaient donc être acquises, en principe, par tout élève en fin de collège.

En mathématiques, les modifications de programmes du collège ont été beaucoup plus importantes et ambitieuses. La DGESCO et l'inspection générale de mathématiques ont d'ailleurs publié un « document ressource » très complet qui en explique la philosophie et donne de nombreuses indications aux enseignants[2]. L'idée générale de ce document est qu'il n'est pas possible de mettre en œuvre le socle commun en mathématiques au collège sans des efforts pédagogiques particuliers et sans un changement de perspective, que l'extrait suivant semble résumer :

---

[1] Lycée Baggio, Lille.

[2] Document ressource pour l'enseignement des mathématiques dans le socle commun du collège, DGESCO, janvier 2009, `http://igmaths.net/`.

Bien entendu, tous les nouveaux savoirs ne seront pas nécessairement « construits par les élèves ». Des apports de type plus transmittif peuvent être faits par le professeur. (...) Pour autant, il est important, pour gérer la double exigence du programme et du socle commun, de continuer à valoriser les approches empiriques.

Quoi qu'il en soit, une commission comprenant deux membres de l'inspection générale de mathématiques, trois universitaires et un professeur de lycée s'est réunie régulièrement en novembre 2008 et pendant la première quinzaine de décembre. Elle a rédigé des propositions de programme de mathématiques pour la classe de seconde qui devait voir le jour à la rentrée 2009 dans le cadre de la réforme du lycée initialement prévue (avant son report, donc). Rappelons que cette réforme prévoyait, en principe, un tronc commun de mathématiques pour tous de 3h ou 3h30 hebdomadaires, éventuellement complété, pour les élèves qui le choisiraient, par un enseignement semestriel de 3h hebdomadaires pendant un semestre.

Le report de la réforme le 15 décembre a naturellement rendu les conclusions de cette commission caduques. Mais, comme nous l'avons dit, les modifications apportées aux programmes de collège rendaient impossible l'application en seconde des programmes antérieurs. Il fallait donc en rédiger de nouveaux, destinés cependant à demeurer transitoires ; en effet, la mise en place de la réforme du lycée en 2010 en seconde, si elle modifie réellement l'architecture des enseignements comme il en est question, rendra nécessaire l'écriture de nouveaux programmes.

La rédaction de ce programme transitoire a été réalisée par l'inspection générale de mathématiques, sans contact avec la commission qui s'était réunie fin 2008. La première version de cette rédaction a été soumise à consultation sur le site d'Eduscol au mois de mars 2009. La deuxième version, sensiblement modifiée suite à la consultation, a été publiée le 19 mai[3]. Après passage le 11 juin devant le Conseil Supérieur de l'Education, elle est devenue le programme officiel de la classe de seconde pour l'année scolaire 2009-2010.

Une consultation exemplaire

La mise en consultation de ces propositions de nouveaux programmes de seconde en mathématiques au mois de mars dernier a suscité, c'est le moins qu'on puisse dire, de fortes tensions. Deux des principaux points de friction ont été :

– la disparition de toute entrée nouvelle en géométrie, notamment de la géométrie non repérée et de la géométrie vectorielle ;

– l'introduction d'une part importante d'algorithmique, couplée avec une incitation très forte à l'utilisation systématique d'outils logiciels.

Pourtant, il faut signaler combien cette consultation a été exemplaire. Elle a constitué un exercice de « démocratie directe », pour reprendre un terme à la mode, tout à fait extraordinaire, centré sur l'utilisation d'Internet, où on a vu s'exprimer :

– de nombreux professeurs de lycée, soit à titre individuel, soit dans le cadre de conseils de professeurs d'un établissement[4] ;

[3] Pour ces deux textes, voir `http://eduscol.education.fr/D0015/consult_Maths.htm`

[4] Voir par exemple les « sujets de discussion » sur le site de l'APMEP : `http://www.apmep.asso.fr/`.

– des sociétés savantes (SMF, SFdS, Académie des sciences...) ;
– le Comité Scientifique des IREM ainsi que l'Assemblée des Directeurs d'IREM.

Cette expression a pris des formes diverses : pétitions (notamment sur la géométrie), forums (particulièrement celui de l'APMEP), organisation par les IPR de nombreuses réunions dans les lycées, sites Internet, etc.

Le point le plus remarquable est que, conformément à ce qu'avait annoncé Jacques Moisan, doyen de l'Inspection Générale de mathématiques, de nombreuses remarques, critiques et suggestions recueillies lors de la consultation ont effectivement été prises en compte. Certes, la version finalement publiée au mois de mai des nouveaux programmes est une version de compromis, mais il ne peut en être autrement.

La démarche suivie a été réellement constructive, le débat riche et documenté, malgré parfois des réactions violentes. Il faut souhaiter que cette consultation puisse servir de modèle à une gestion plus souple, moins autoritaire et moins conflictuelle de l'Éducation Nationale dans les mois à venir.

Un programme de seconde plus satisfaisant

Le programme issu de la consultation se compose de trois grandes parties « disciplinaires » :

– fonctions, équations et inéquations ;
– géométrie ;
– probabilités et statistique.

Ces trois grandes parties sont complétées par deux autres parties « transversales » :

– algorithmique ;
– notations et raisonnement mathématiques.

Celles-ci n'ont pas vocation à faire l'objet d'un enseignement spécifique ; leurs contenus doivent être introduits et mis en œuvre à l'occasion de problèmes, issus notamment des trois premières parties. Enfin, l'assimilation des contenus des deux parties « transversales » (algorithmique et logique) par les élèves est un objectif des trois années de lycée, et pas seulement de la classe de seconde.

La rédaction et les contenus des trois parties « disciplinaires » tiennent compte de nombre de remarques formulées à propos de la version mise en consultation au mois de mars. Notamment, le programme, s'il insiste sur la résolution de problèmes, ne la présente plus comme pouvant compenser des contenus appauvris ou une maîtrise des calculs insuffisante, ce qui semblait être initialement le cas.

En outre, les contenus ont été sensiblement étoffés par rapport à la proposition initiale. Ont notamment été ajoutés :

– les fonctions polynômes de degré 2 et les fonctions homographiques ;
– le cercle trigonométrique et la définition du sinus et du cosinus d'un nombre réel ;
– une initiation au calcul vectoriel dans le plan : vecteurs, égalités de deux vecteurs, coordonnées d'un vecteur dans un repère, somme de deux vecteurs, produit d'un vecteur par un réel, relation de Chasles ;
– de la géométrie non repérée du plan : configurations du plan, triangles, quadrilatères, cercles ;

– de la géométrie dans l'espace : solides usuels (parallélépipède rectangle, pyramide, cône, cylindre de révolution, sphère), positions relatives d'une droite et d'un plan.

L'ajout de ces contenus a notamment été rendu possible par la disparition des « thèmes d'étude ». Ce nouveau programme est, finalement, de facture assez classique, tout en permettant une prise en compte équilibrée des apports de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques. Il n'est pas très différent du programme actuel.

Il est, en outre, totalement indifférencié. Il ne laisse, en effet, aucune marge de différenciation au niveau des thèmes traités. Si la réforme de la classe de seconde qui se mettra en place en 2010 laisse la possibilité d'un renforcement en mathématiques comme cela semble prévu, il est clair qu'il ne pourra être conservé en l'état.

Autrement dit, ce programme, s'il règle de façon relativement satisfaisante le problème de l'enseignement des mathématiques en seconde « de détermination », compte tenu des besoins de formation des futurs scientifiques et techniciens, ne règle rien sur le fond. La question reste posée : quel avenir pour l'enseignement des mathématiques au lycée, notamment en seconde ? Quelles mathématiques, et pour qui ?

Un problème de fond

Il nous faut revenir ici sur un argument avancé par l'inspection générale de mathématiques pour justifier l'allégement des contenus, qui était très apparent dans le projet de programme mis en consultation au mois de mars dernier. Cet argument est le suivant : la seconde étant une classe de détermination, les mathématiques doivent s'adresser à tous les élèves ; il convient donc d'écarter des programmes tous les contenus qui mettent en difficulté 50% des élèves de seconde et qui, en outre, ne leur serviraient pas dans leurs études ultérieures.

Cet argument justifiait notamment la disparition de la majeure partie du programme de géométrie, ainsi que la minoration de l'importance d'une maîtrise raisonnable des calculs algébriques, dans les programmes mis en consultation au mois de mars dernier.

Cet argument est parfaitement recevable. Si on accepte comme acquis que le cours de mathématiques doit s'adresser à toute une classe d'âge (et l'argument vaut pour n'importe quelle discipline), il paraît nécessaire d'alléger ses contenus jusqu'à un minimum acceptable par tous. Autrement dit, il faut calibrer l'enseignement sur les 50% qui ont des difficultés, plutôt que sur les 50% qui s'en sortent bien ou plutôt bien.

Ceci amène tout de même à s'interroger sur le problème de la seconde indifférenciée, dont le principe est considéré comme intangible dans les projets de réforme du lycée. Pour quelle raison devrait-on obliger tous les élèves d'une même classe d'âge à suivre la même scolarité jusqu'à la fin de leur scolarité obligatoire (16 ans), en prolongeant ainsi jusqu'en seconde les difficultés évidentes de la mise en application du « socle commun » ?

Un premier élément de réponse est le suivant : il est faux de laisser croire que c'est exclusivement en « seconde de détermination » que se décide l'orientation. De fait, sur 100 élèves de troisième :

– 10 redoublent

– 60 vont en seconde générale et technologique
– 22 vont en lycée d'enseignement professionnel
– 8 quittent le système scolaire ou partent en apprentissage.

Ajoutons que, à la fin de la cinquième, environ 10% des élèves sont orientés en « 4^{e} technologique » ou partent en apprentissage[5].

Il en résulte assez clairement qu'une part très importante de l'orientation s'effectue au collège, et pas à la fin de la seconde. Sachant que beaucoup d'élèves de seconde de lycée ont déjà choisi leur orientation dès leur entrée au lycée, il semblerait donc que la seconde « de détermination » soit un mythe : l'essentiel de l'orientation se fait au collège. Dès lors, il y a une certaine hypocrisie à prétendre que réformer le lycée résoudra le problème de la hiérarchie des différentes voies de notre système éducatif.

Un deuxième élément de réponse est le suivant : les systèmes éducatifs, notamment en Europe, sont très variés. Dans un certain nombre d'entre eux, le « collège unique » dure moins longtemps qu'en France et la différenciation des études est plus précoce. Le site d'Eurydice[6] donne des éléments d'information à ce sujet. Une difficulté provient cependant du fait que l'enseignement au lycée y est classé selon deux catégories seulement : enseignement général (upper secondary general) et enseignement professionnel (upper secondary vocational). On peut toutefois remarquer que ce dernier terme semble contenir notre « enseignement technologique », qui se distingue de notre « enseignement professionnel » par le fait qu'il permet des études après le baccalauréat.

Dans le tableau ci-dessous, nous avons donc résumé, pour quelques pays européens, l'âge « normal » du baccalauréat général, et les âges « normaux » d'orientation vers l'enseignement technologique et vers l'enseignement professionnel :

Pays	Enseignement général (âge du bac)	Enseignement technologique (âge d'orientations vers)	Enseignement professionnel (âge d'orientations vers)
Allemagne	19 ans	12 ans	12 ans
Angleterre	18 ans	16 ans	16 ans
Belgique F	18 ans	14 ans	13 ans
Espagne	18 ans	16 ans	16 ans
Finlande	19 ans	16 ans	16 ans
France	18 ans	16 ans	15 ans
Italie	19 ans	14 ans	14 ans
Pays-Bas	18 ans	15 ans	12 ans
Pologne	19 ans	16 ans	16 ans
Suède	19 ans	16 ans	16 ans

Ce tableau ne saurait rendre compte, à lui seul, d'une situation très complexe. Pourtant, il montre que les accusations récurrentes portées sur l'injustice de notre système éducatif et sur la sélection « féroce » qu'il opère devraient être plus nuancées.

[5] Jean-Louis Auduc, *Le système éducatif français*, Scéren, 2003, page 77.
[6] `http://eacea.ec.europa.eu/portal/page/portal/Eurydice/PubContents?pubid=041FR`.

Curieusement, le discours qui sous-tend la réforme du lycée en préparation est que cette sélection est le fait de la voie scientifique du lycée, essentiellement par le biais des mathématiques. Ce discours, à l'évidence insuffisamment fondé, est potentiellement dangereux pour la formation des futurs cadres scientifiques, ingénieurs et techniciens de notre pays. Il reste présent dans les deux rapports [7] qui viennent d'être publiés sur le sujet.

Le débat récent sur les nouveaux programmes de seconde a montré qu'il est possible, au niveau de l'enseignement de notre discipline, d'arriver à un compromis raisonnable compte tenu des contraintes. Toutefois, ces contraintes sont-elles justifiées ?

Notre communauté doit continuer à travailler sur les orientations générales du système éducatif, produire des études fiables et documentées sur notre enseignement scientifique, son état actuel et son évolution, et faire en sorte que les politiques les prennent en compte.

Au-delà du problème ponctuel des programmes en seconde, la réforme du lycée est en cours. Ses orientations générales[8] ne sont pas véritablement remises en question, et elles ne prennent visiblement pas en compte tous les aspects d'un problème fort complexe.

[7] Le *rapport Descoings et le rapport Apparu*, disponibles sur le site de la SMF.

[8] Voir *Où va la réforme des lycées ?*, La Gazette n° 119, janvier 2009.

INFORMATIONS

Renouvellement du poste de Directeur du CIRM

(Unité mixte de service SMF-CNRS)

La SMF et le CNRS lancent un appel à candidatures pour la direction du CIRM. Le poste de directeur sera vacant à partir de janvier 2010.

Le CIRM est un des grands instruments de la recherche en mathématiques en France. Dans le cadre des changements intervenus dans l'enseignement supérieur et la recherche, la place du CIRM comme élément essentiel d'un réseau national de recherche en Mathématiques est appelée à devenir encore plus importante. Il en va de même de sa fonction de lieu privilégié d'interface avec les autres disciplines.

Le CIRM est dédié à l'accueil de rencontres dans le domaine des mathématiques et leurs interactions. Au-delà de cette mission traditionnelle, le futur directeur devra accompagner la diversification des activités du CIRM (écoles thématiques, projets « research in pairs », cours de niveau doctoral, ...) et veiller à leur coordination avec les autres grands instruments des mathématiques ; cette coordination est en effet appelée à se renforcer, tant au niveau national qu'au niveau européen. Un descriptif des missions et activités du CIRM se trouve sur son site :
`http://www.cirm.univ-mrs.fr/`

Plusieurs aspects de la fonction de directeur du CIRM sont en cours d'évolution : ainsi, la création toute récente du poste d'administrateur permettra au directeur de se décharger d'une partie de ses tâches administratives au profit des activités d'animation scientifique. Le futur directeur aura en particulier pour mission, conjointement avec le Conseil Scientifique, de prendre des initiatives pour optimiser l'impact scientifique des rencontres.

Par ailleurs, les réformes récentes ou en cours (loi LRU, évolution du CNRS, plan CAMPUS, ...) remettent en cause certains canaux traditionnels de financement du CIRM. Le futur directeur aura pour mission, conjointement avec le Conseil d'Administration, de mettre en place les éventuelles évolutions nécessaires pour assurer la continuité du financement du CIRM.

Le rapport du dernier comité d'évaluation du CIRM, en date de 2009, pourra être fourni à tout candidat qui en fera la demande.

Nomination : le directeur du CIRM est nommé pour quatre ans conjointement par la SMF et le CNRS, après consultation de la direction compétente du Ministère de la Recherche et de l'Enseignement Supérieur. Cette nomination doit en outre être approuvée par le Conseil d'Administration de la SMF.

Le directeur ne peut effectuer plus de deux mandats consécutifs.

Prérogatives et obligations : le directeur du CIRM exerce ses fonctions sous le contrôle du Conseil d'Administration du CIRM et du Président de la SMF. Il réside à Marseille ou à proximité. Il assure la gestion de l'ensemble des moyens du CIRM. Il est responsable du bon fonctionnement et du respect des conventions signées. Il rédige tous les deux ans un rapport d'activité.

Il a autorité sur l'ensemble du personnel, donne son accord à toute affectation de personnels auprès de l'unité ainsi qu'à tous moyens attribués à des membres de l'unité par des tiers. Il assiste aux réunions du Conseil d'Administration dont il prépare les délibérations avec le Président de la SMF et dont il met en œuvre les décisions. Il soumet à l'approbation du Conseil d'Administration du CIRM le projet de budget élaboré en concertation avec le président de la SMF, les demandes de moyens nécessaires à l'activité, ainsi que la répartition et l'utilisation de l'ensemble des moyens alloués.

Il assiste aux réunions du Conseil Scientifique dont il prépare les délibérations avec son Président. Il assure l'animation scientifique et met en œuvre le programme d'activités arrêté par le Conseil d'Administration sur proposition du Conseil Scientifique.

Le poste du directeur du CIRM est assorti d'une prime administrative.

Les candidats sont invités à envoyer avant le 30 octobre, par email ou par courrier une lettre de motivation et un Curriculum Vitae à la SMF :

Société Mathématique de France
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex, France
Email : smf@dma.ens.fr

Pour plus de détails, toute personne intéressée peut contacter : Pascal Chossat (Pascal.chossat@unice.fr), Michel Demazure (michel@demazure.com), Stéphane Jaffard (Jaffard@univ-paris12.fr).

Mathématiques et société, ce qui est en train de changer

Véronique Chauveau[1], Marie-Françoise Roy[2]

Dans le cadre de la préparation de MATHS A VENIR 2009[3], un atelier consacré à la thématique « Mathématiques et Société » a eu lieu à Rennes les 21 et 22 avril 2009. L'atelier a regroupé 35 participantes et participants. Des discussions ont eu lieu sur les thèmes suivants : « Mathématiques pour tous », « Les métiers des mathématiques », « Mathématiques et grand public » et « Mathématiques et société, ce qui est en train de changer ».

Les organisatrices de l'atelier avaient proposé de réfléchir aux questions suivantes :

– Quelles mathématiques enseigner et pour qui ?

– Quels sont les métiers des mathématiques qui n'existaient pas il y a 20 ans ?

– À quoi servent les mathématiques apprises dans les études pour les autres métiers ?

– Quels sont les acteurs de la dissémination mathématique dans le grand public ?

– Comment mettre en évidence pour tout citoyen que les mathématiques font partie de la culture ?

– Les mathématiciens ont-ils de nouvelles responsabilités sociales ? Si oui, lesquelles ? Comment les assumer ?

– Quelle est la place des mathématiciennes dans la communauté ?

– Mathématiques et discriminations. Les renforcent-elles ? Aident-elles à en sortir ?

L'atelier a permis de dégager deux thèmes de tables rondes pour le colloque de la Maison de la Mutualité les 1er et 2 décembre, dont les titres provisoires sont les suivants : « Quelle(s) formation(s) pour quelle(s) société(s) ? » et « Professionnel(le)s des mathématiques et société civile : comment développer la compréhension mutuelle ? »

Plutôt que de chercher à résumer pour la *Gazette* tout ce qui s'est dit à Rennes, nous avons préféré nous concentrer sur un des thèmes abordés, en donnant la parole à trois des intervenants dans la discussion.

René Padieu, s'est déclaré perplexe, par rapport à l'exercice proposé.

En mathématique, on m'a appris à traiter le problème en lisant l'énoncé : le titre de la table ronde en préparation est « mathématiques et société ». Or, autour de la table ici, nous sommes tous des matheux : des professionnels des mathématiques pour l'essentiel mais de toute façon, tous, avec une formation plus ou moins importante en mathématiques. La partie « mathématiques » est donc largement représentée. Mais où est la « société » ici ? Qui est le porte-parole de la société ? Nous ne tenons qu'un des deux termes du titre !

---

1 Vice-présidente de *femmes et mathématiques*.

2 IRMAR, Université Rennes I.

3 Voir `http://www.maths-a-venir.org`

Les mathématiques sont dans la société. Elles peuvent être une richesse de dialogue : M.-J. Durand-Richard rapporte l'opinion qu'elles permettraient la construction d'interfaces. Il ne s'agit plus seulement de l'interface entre maths et société, mais entre les divers acteurs de la société, les mathématiques étant là l'auxiliaire de cette construction. Or, les construire pour des acteurs sociaux suppose qu'ils soient associés à la construction : donc en particulier représentés dans le cadre de la réflexion de MATHS A VENIR 2009 !

Par exemple, j'ai eu à livrer des statistiques à des acteurs sociaux pour servir dans une négociation entre eux. J'étais dans une posture de « sachant » face à des syndicalistes ou des politiques « ignorants » qui ne comprenaient pas ce qu'est une moyenne ou un indice d'évolution ! Il ne s'agissait pas de leur fournir « ma » science, mais un outil pour « leur » dialogue.

Et là, même, les deux termes de fournisseurs et consommateurs conviennent-ils : fournisseurs de maths pour des consommateurs dans la société ? Car, celui qui « applique » les mathématiques est souvent, à l'inverse, fournisseur de concepts que le mathématicien développera (C'est ainsi que Heaviside, ingénieur, et Dirac, physicien, ont inventé la première des distributions, qu'ensuite L. Schwartz a théorisées et enseignées).

Donc, je suis dans ce manque et cette perplexité : comment allons-nous pouvoir donner la parole à cet autre interlocuteur qu'est la société ?

Pour Catherine Goldstein, quand nous parlons de « mathématiques et société », nous avons tendance à penser en termes de « nous » et « eux », la société est assimilée au grand public indifférencié des médias, et les discussions se restreignent vite aux problèmes d'enseignement, principalement ceux de formation initiale, ou aux problèmes de diffusion des mathématiques. Les intermédiaires à convaincre et à former sont toujours les mêmes, enseignants, journalistes. Même dans un cadre de distraction pure, comme les conférences de l'Espace des sciences de Rennes ou de la Bibliothèque François Mitterrand, où le public est volontaire et assez ciblé dans sa formation, il y a bien sûr déjà fort à faire pour dépasser l'effet à très court terme d'un simple spectacle. Mais les modes d'interaction entre mathématiques et société sont en réalité bien plus variés, de l'utilisation plus ou moins contrôlée de métaphores mathématiques pour décrire des phénomènes sociaux à l'expertise spécifique des mathématiciens dans des questions contemporaines, en passant par l'identification des besoins éventuels en mathématiques de professionnels multiples (ingénieurs, techniciens, artistes,...) et des canaux de leur information, par la vision des mathématiques véhiculée dans des films ou des séries populaires, etc. Nous-mêmes sommes, toutes et tous, membres de la société de plusieurs façons et lors des discussions de l'atelier, nous avons endossé à l'occasion des casquettes distinctes. Il conviendrait donc de faire la liste des lieux où on peut trouver des mathématiques, identifier les acteurs et les médiateurs dans chacun d'entre eux.

Faute de cette propédeutique, les questions que nous sommes tentés de nous poser en première instance semblent toujours les mêmes, et les solutions également. À cet égard, ce qui m'a frappée dans nos premières discussions est d'abord ce qui n'a pas (assez) changé depuis Maths à venir 1987. Regardons la plaquette « quels mathématiciens pour l'an 2000 ? » (disponible sur le site web de MaV 2009) élaborée dans la foulée du congrès de 1987 et distribuée alors à plusieurs milliers de responsables politiques, économiques, scientifiques. Nous y avions présenté l'importance des mathématiques dans la société à partir d'objets quotidiens, concrets, où intervenaient des mathématiques, nous avions évoqué la recherche en mathématiques en insistant sur la nécessité de son développement sur le long terme et des interactions fructueuses entre mathématiques théoriques et appliquées, nous avions posé déjà les questions du renouvellement des formations et des recrutements, des vocations (en particulier celles des filles), de la désaffection des études scientifiques, de la dissociation entre une image éventuellement positive de la discipline et l'engagement professionnel dans les métiers des mathématiques. Et de nombreuses suggestions avaient déjà été faites pour améliorer l'image des maths, depuis la mise en valeur de ses dimensions ludique ou historique, jusqu'aux conférences sur des mathématiques récentes, l'animation de stages pour les enseignants, etc. Il me semble donc que nous avons, ou devrions avoir, suffisamment d'acquis sur ces questions, pour en tirer profit, c'est-à-dire en particulier bénéficier d'évaluations sur les effets (bénéfiques ou non) de ces propositions. Le succès des actions ne devrait pas être mesuré seulement en nombre de personnes atteintes, les relations entre mathématiques et société devraient aussi pouvoir être examinées sur le moyen terme, au moins.

D'autres difficultés matérielles sont aussi restées les mêmes, par exemple, celles d'obtenir des données fiables et complètes sur les formations, les orientations des élèves, le rôle des parents, etc. L'enquête « Cinquante Lycées » en 1987 avait fourni des données très précieuses sur l'effet néfaste d'une seconde indifférenciée, le peu de relations entre de bons résultats en mathématiques et une orientation professionnelle en maths, et bien d'autres informations surprenantes. Les enquêtes internationales récentes, comme PISA toujours citée, sont bien plus superficielles, et les interprétations sociologiques souvent hâtives qui en sont faites bien plus sujettes à caution.

Parlons quand même de ce qui a changé.

Jean-François Méla a déjà indiqué certains de ces changements dans des articles antérieurs. J'en évoque brièvement quelques-uns :

– La nature des applications et donc des interactions sociétales : biologie, banques, etc. impliquent de nouvelles relations avec de nouveaux acteurs et médiateurs, de nouveaux problèmes éthiques ou économiques pour les mathématiciens.

– L'image générale des mathématiques : il y a 20 ans, l'image était celle héritée des années 1960, époque d'un énorme recrutement, les mathématiques étaient considérées par les responsables politiques comme une matière vieille et poussiéreuse, et assimilées aux seules maths pures. Il y avait alors un grand enjeu à les convaincre que les mathématiques étaient diversifiées, applicables et appliquées, et aussi à souligner les passages, tant au niveau des concepts que des personnes, entre les différentes parties des mathématiques. Les problèmes actuels semblent différents : ils sont à la fois de repérer les mathématiques (et les mathématiciens) hors des lieux traditionnels d'exercice, pour mieux intégrer les différentes composantes des maths, et aussi, de remettre en évidence les problèmes propres aux développements les plus théoriques, dont les échelles de temps en particulier ne sont pas nécessairement les mêmes. Un autre problème est que les changements de représentation des mathématiques dans la génération des

30-35 ans n'ont peut-être pas atteint également d'autres groupes, enseignants, formateurs, journalistes.

– Les échelles d'analyse et d'action : nous discutions il y a vingt ans des niveaux locaux, régionaux et nationaux. La dimension internationale est maintenant standard. Comment la prendre en compte de manière utile ne va pas de soi (les comparaisons purement disciplinaires de certaines enquêtes internationales ne prennent pas assez en compte les facteurs sociaux encore très différents des pays observés), et en particulier comment transférer de manière efficace des idées ou des informations, d'un pays à l'autre, d'une discipline à l'autre, d'une échelle à l'autre.

Quant à ce qui est en train de changer :

Même s'il est difficile de faire des propositions au moment de transformations importantes, il semble important de prendre mieux la mesure de certaines d'entre elles dès maintenant.

– Les nouveaux modes de management et d'évaluation de la recherche.

Une partie importante commence à échapper aux mathématiciens eux-mêmes, ce qui signifie d'autres cultures, d'autres valeurs et d'autres connaissances de base, avec lesquelles il est nécessaire d'interagir. Par exemple, il est arrivé qu'apparaissent dans des comptes rendus sur des projets d'ANR des questions comme « êtes-vous ou non en position de leadership dans ce domaine ? » Être « leader » n'est d'ailleurs pas forcément la meilleure réponse, car une stratégie de leadership systématique peut être très coûteuse. Des problèmes similaires se posent à propos des indicateurs bibliométriques utilisés couramment dans d'autres domaines et qui (malgré de nombreux rapports très négatifs) commencent à intervenir en mathématiques, à l'échelle internationale ; ou encore à propos de la concurrence (entre les formations) comme mode relationnel. Même si une partie importante des mathématiciens semble hostile à ces changements, je ne suis pas sûre qu'un simple refus puisse suffire, s'il n'est pas fondé sur une meilleure connaissance des disciplines (gestion, bibliométrie, etc.) qui les produisent en partie.

– Le rapport du court, du moyen ou du long terme.

La préservation de toutes ces échelles pour la formation en mathématiques semble cruciale. Le succès de certaines branches, qui est un moteur pour le renouvellement du domaine et un facteur de visibilité, ne doit pas nuire à un « développement durable »... Ce problème d'échelle du temps de développement ne se pose pas de la même façon pour toutes les disciplines et il semble important de disposer d'un bon argumentaire sur ce point.

Et une question « entre nous » pour finir : à quel point sommes-nous vraiment fragiles ? Peut-on vraiment envisager une société développée sans recherche mathématique avancée ? Quel est l'effet réel de la suppression des mathématiques dans une formation ? Des exemples récents (voir le rapport sur l'Australie) suggèrent que la vigilance est nécessaire. Il importerait donc de souligner les liens multiples entre mathématiques et sociétés, mais aussi de pouvoir expliquer l'intérêt social de maintenir une recherche hors des besoins dits « sociétaux » immédiats.

Marie-José Durand-Richard se fait l'écho des journées d'études organisées en mars dernier par le groupe *M2Real* à Lyon sur le thème : « Les mathématiques dans la société, leur rôle et leur place dans la formation et la pratique de l'ingénieur ».

M2REAL (les mathématiques du monde réel) est une association créée en 2007 à partir d'un projet de recherche sur les « Mathématiques pour l'Ingénieur » piloté par l'INSA de Lyon en partenariat avec des pays d'Amérique latine (Mexique, Argentine, Brésil, Venezuela...). L'initiative en revient à des enseignants de la filière *Amerinsa*, alertés par la disparité entre les différents types de difficultés éprouvées par les étudiants selon leur origine géographique et culturelle.

Le thème des journées s'est avéré plus vaste que le titre peut le laisser supposer. La question centrale a d'abord été de comprendre le hiatus trop souvent constaté entre la perception des mathématiques par les enseignants ou l'institution, et par les élèves ou les étudiants : un savoir libérateur pour les uns, mais figé, voire autoritaire pour les autres. La question récurrente : « à quoi ça sert les mathématiques ? » est significative de la difficulté des apprenants à appréhender la façon dont les mathématiques sont investies dans la société technicienne qui est pourtant la leur. Ce questionnement n'est cependant pas impertinence. Il s'inscrit dans une « quête de sens » caractéristique de l'humain, une recherche historiquement récurrente de son propre mode d'inscription dans la société et dans le monde.

Cette dichotomie constatée entre la représentation que l'apprenant et l'enseignant se font des mathématiques est encore plus prégnante lorsque l'enseignement est centré sur les technicités opératoires, notamment en algèbre, où la coupure entre calcul et signification est constamment réaffirmée. La représentation des mathématiques comme manifestation d'ordre et d'automatisme s'en trouve renforcée.

Or, les interventions de ces journées ont d'abord montré que cette coupure entre calculabilité et signification est le fruit d'une histoire enracinée dans une représentation des connaissances bien antérieures à Bourbaki. Elle s'articule sur une conception du langage très clairement exprimée au 17^{e} siècle par Descartes, et longuement réaffirmée depuis, selon laquelle il y aurait d'un côté une grammaire – la logique du calcul en mathématiques –, de l'autre un dictionnaire – donnant la signification –. Sous-jacente à cette affirmation de Descartes, on peut lire l'aspiration du philosophe à purifier à la fois cette grammaire et ce dictionnaire des « corruptions de l'usage » pour parvenir à un langage « parfait », et de ce fait, transparent au monde. La supériorité supposée d'une certaine mathématique n'est pas loin, qui s'affirme comme « pure » et regarde avec quelque condescendance toute forme de mathématiques faisant intervenir leur « usage ».

Il est aujourd'hui possible, voire urgent, de se référer à des conceptions renouvelées du langage, envisagé comme représentation de notre expérience sur le monde, renégociant en permanence – mais à long terme – les interactions entre ses acteurs. Les conceptions du langage inspirées de la pragmatique permettent par exemple de considérer la polysémie, non plus comme une « corruption de l'usage », mais comme une richesse du langage permettant à différents contextes de coexister. L'unicité de signification relève alors du contexte spécifique dans lequel il est socialement construit, et qu'il serait fallacieux d'évacuer. Les transferts conceptuels manifestent aussi des transferts de signification qui ne sauraient être négligés, y compris d'un point de vue internaliste, comme dans le cas où la relation d'égalité devient d'équivalence, d'équipollence, d'isomorphisme. Ce problème de la signification va donc bien au delà de l'introduction du ludique dans l'activité mathématique.

L'unité de ces journées réside fondamentalement dans l'idée que l'enseignement des mathématiques ne peut faire l'économie de cette diversité des significations lorsque se rencontrent l'élève, le professeur, et au delà les institutions qui sont derrière eux, la famille pour l'un, l'école et l'université pour l'autre, avec la représentation du statut social des mathématiques qu'elles véhiculent. Il ne s'agit pas de substituer cette perspective sociologique à l'enseignement des mathématiques, mais de l'intégrer dans la pratique collective des mathématiques en classe, en soumettant déjà à un examen critique les manuels, les programmes, et la représentation du statut social des mathématiques et de la fonction d'ingénieur. Une conception plus constructiviste des mathématiques pourra ainsi être investie, les situant comme élaboration d'interfaces pluridisciplinaires, formant un langage commun qu'il ne s'agirait pas de confondre avec une idéologie normative.

Les enquêtes et les expériences présentées au cours de ces journées ont manifesté le souci de prendre en compte la démarche cognitive des élèves en partant de leurs propres pratiques, et d'éclairer le processus de formalisation à partir de situations spécifiques. Cette perspective place l'élève au centre d'un processus d'apprentissage collaboratif, où le professeur préfère accompagner plutôt qu'imposer, et où l'ordinateur joue le rôle de compagnon intellectuel, plutôt que d'un recours pour éviter de penser. Des chercheurs en sciences de l'éducation au Vénézuela et au Mexique, qui travaillent sur l'articulation de l'enseignement secondaire et universitaire, se réfèrent ainsi à l'approche contextuelle que Patricia Camarena Gallardo développe depuis 1982 dans *La matemática en el Contexto de las Ciencias*, et dont on peut trouver de nombreuses références en ligne.

Ce qui est perçu comme universel apparaît ici comme ce qui fait consensus à un moment donné, une forme de rationalisation possiblement échangeable entre différents acteurs, pour autant que son utilisation fasse sens pour eux. Cette perspective permet de continuer à interroger la validité de ces formalisations dans leurs interventions en situation, c'est-à-dire d'interroger les conditions de stabilité et de rupture de ces interprétations partagées. Elle est également constitutive de lien social, et participe, dans les présentations qui en ont été faites, d'une recherche de démocratisation de l'enseignement des mathématiques.

Par ailleurs, la relation « mathématiques et société » a fait également apparaître des domaines nouveaux comme la cryptologie ou l'industrie pharmaceutique, qui installent des relations nouvelles entre mathématiciens et ingénieurs, qui supposent ou demandent un changement de culture susceptible d'interrogations.. Il semble en effet porteur de deux dangers potentiels, l'un intellectuel, l'autre socioculturel. Pour le premier, les difficultés d'une modélisation à tout prix, auxquels l'ingénieur est souvent soumis, témoignent de la nécessité de maintenir l'exigence d'une recherche fondamentale en mathématiques, en renonçant peut-être à les considérer comme « pures ». Pour le second, il conviendrait que la prise en compte du contexte ne conduise pas à s'enfermer dans une stricte technicité au service de l'entreprise. Poser la question du lieu des savoirs, et des conditions de leur échangeabilité, doit permettre de réfléchir sur les conditions de la démocratisation des connaissances, et non de leur réification.

The Year of Mathematics in Germany

Ehrhard Behrends[1]

The year 2008 was the "Year of Mathematics" in Germany. Generally it is considered as a great success. Several hundred people contributed with an abundance of original ideas, one cannot aim at a complete description of all the activities which have been realized.

The tradition of the "years of science" in Germany

Since the begining of this century each year is a "year of science" in Germany. Here is the complete list of the fields presented so far:

2000: physics, 2001: life sciences, 2002: geography , 2003: chemistry , 2004: technics , 2005: Einstein's year , 2006: computer science, 2007: humanities, and 2008: mathematics. (Since 2009 one has abandoned this concept. Rather than to present a particular science one chooses a "motto". 2009, for example, is the year "Forschungsexpedition Deutschland".)

There are certain events which had always been repeated: Big opening and closing ceremonies in different cities, the "Wissenschaftssommer" where in some city for one week special events are presented, the "Wissenschaftsschiff", a ship which serves as a travelling museum and which visits several dozens of ports all over Germany etc.

Why a "Year of Mathematics"?

It is a commonplace all over the world that the public understanding of mathematics is at a very unsatisfactory level. Most people think that "everything is known since centuries" and that mathematics is not related with really interesting problems, and there are very few who think of their mathematical school days with pleasure.

The result is a decrease in the number of students in the "hard" sciences, and in the next future the number of those who leave the university with a degree in these areas will not suffice to fill the vacant positions.

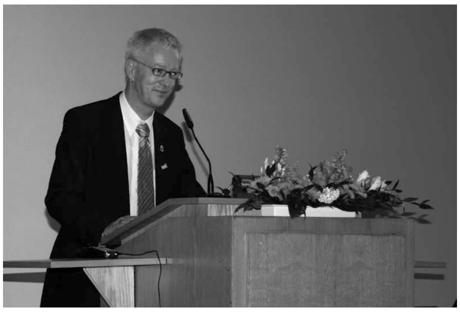
To change this was the pragmatic aspect of a "Year of Mathematics". But the goal was more ambitious: the mathematicians aimed at presenting their field as an indispensible part of human culture which plays a fundamental role in economy and various sciences.

[1] Free University of Berlin, Germany - behrends@math.fu-berlin.de.

Partners and sponsors

The mathematicians applied rather late to have the year 2008 as the "Year of Mathematics". From the beginning on it was clear that many members in the community would collaborate and that it would be a joint effort of all of the German mathematical societies (DMV, GAMM, MNU and GDM). It was surely also very important that a large foundation, the "Deutsche Telekom Stiftung", decided to act as a generous sponsor of such a year.

After the positive decision a very fruitful and effective collaboration began. The government was represented by the ministry of science and education, the mathematicians mainly by the DMV under their president Günter Ziegler from the Technical University in Berlin (see the picture).



The organizers had a budget of several million Euro at their disposal. A considerable part was used to hire the renowned advertising agency Scholz and Friends to guarantee a professional presentation of the activities. In fact, an abundance of creative suggestions were presented, e.g. the motto ("Du kannst mehr Mathe als Du denkst"[2]) of the year and the logo ("Mathe – alles, was zählt"[3]).

Wissenschaftsjahr 2008
Mathematik
Alles, was zählt

Some figures

Here are some figures in order to illustrate the extent of the activities:

– "Mathemacher": There were more than 1300 partners who prepared various acitivities like talks, exhibitions, special events, articles in newspapers,...

– School children: 34.000 schools received special information on mathematics.

– Exhibitions: Four great exhibitions attracted the attention of more than 500.000 visitors ("Zahlen bitte", "Mathema", "Imaginary", the science ship).

– More than 30 mathematical competitions of different levels were organized.

[2] "You know more of mathematics than you think".
[3] "Mathematics – everything that counts".

– The mathematical films of the "film festival" were shown in more than 100 cities.

– 3500 articles in journals and 2500 contributions in online media were concerned with mathematics.

– There were presented 500 broadcastings centering around mathematics in the TV and in the radio.

Examples of the activities

In the sequel we describe some of the activities in the German "Year of Mathematics".

Posters

Already in January 2008 one could see large mathematical posters at many places: in the streets, at the railway stations, at the airports, etc. They were thought of to transfer the message "Mathematics can be found everywhere". Here are two examples which concern knot theory and data compression.

Special events and competitions for school children

At nearly every German school there were organized special events for school children. Of particular importance was the "Mathekoffer" (the math trunk), a present sponsored by the Deutsche Telekom foundation. It contained hands-ons to visualize certain mathematical concepts like space and chance.

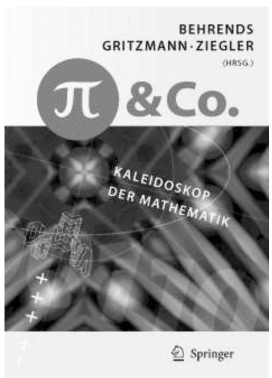
The science ship

The "science ship" is an ordinary transport ship which from September to March carries potatoes, charcoal etc. and which in summer time transfoms to a museum. For the 2008 exhibition the mathematical institutions from universities, from the Fraunhofer Gesellschaft and the Helmholtz Gesellschaft were asked to propose exhibits. An impressing collection was prepared which was presented on roughly 1000 square meters: films, hands-ons, exhibits, lectures, special information for school teachers etc. Never before this ship has had such a large number of visitors.

A special book for high-school graduates

Springer Verlag has had the idea to prepare a special book for high-school graduates. This "Kaleidoskop der Mathematik" was edited by E. Behrends (Berlin), P. Gritzmann (Munich) and G. Ziegler (Berlin). It contains a variety of popular articles on mathematics from the books of the German mathematical editors.

In each of the 3500 German high-schools the best graduate in mathematics has got this "Kaleidoskop" as a present. (together with a free membership in the DMV for one year).



A mathematical advent calendar

The "mathematical advent calender" is a competition for school children in the German speaking European countries. Each day between December 1st and December 24$^{\text{th}}$ there is presented on a special internet page a mathematical problem, the solutions are submitted electronically. The winners are invited to come to a prize ceremony in the Berlin Urania.

This calender was launched several years ago. It was repeated every year with increasing success, now there are thousands of participants from all over the world.

The science summer in Leipzig

The summer in 2008 was really hot, and during the hottest period the science summer took place in Leipzig. It consisted of numerous acivities, the most important part of the science summer was surely a large exhibition on the central square at the opera house. Here mathematical departments from universities as well as mathematical research institutes presented applications of contemporary mathematics. The science summer was a big success, many school children with their teachers but also families with their children visited the presentations.

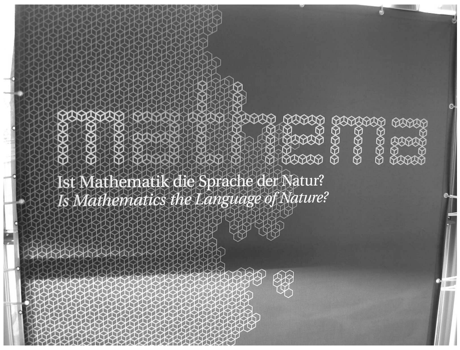
A media prize

It is now a commonplace that good relations with the media are of fundamental importance. Already in 2002 the DMV has invited journalists from the important German newspapers to a "working dinner" in a nice restaurant to discuss the problems with the presentation of mathematics in the journals. Also since several years a "media prize" is awarded for the best article on mathematics. In 2008 an additional prize was created: the prize for the best mathematical cartoon.

Mathematical exhibitions

Many mathematical exhibitions have been prepared for the mathematical year, some of them have been shown at several places. Also parts of the Mathematicum – a mathematical museum in Gießen – were presented in many cities.

The largest among these exhibitions is "Mathema" which is shown between November 2008 and August 2009 in the Technical Museum of Berlin (see `www.mathema-ausstellung.de`). The organizers aimed at presenting mathematics as an indispensible part of human culture.



The success of the "Year of Mathematics"

Was the "Year of Mathematics" a success? The answer is a clear "yes" if one compares with competing years: the largest number of articles in the media, the largest number of visitors on the science ship etc. It is, however, too early to decide whether the public understanding of mathematics really has changed considerably to the positive. It will surely be necessary to continue the efforts into this direction.

TRIBUNE LIBRE

Stéphane Mallat est l'un des fondateurs de la théorie des ondelettes. Ses contributions fondamentales dans ce domaine lui ont très vite valu une reconnaissance au plus haut niveau ; ainsi, il était conférencier plénier au Congrès International des Mathématiciens en 1998, à l'âge de 36 ans.

À côté d'une carrière académique spectaculaire, il a également mené une carrière industrielle remarquable, en fondant une start-up, et a connu l'expérience du chercheur amené à développer lui-même les conséquences technologiques ultimes des concepts qu'il a mis au point.

Cette trajectoire peu commune fait de Stéphane Mallat un témoin privilégié des relations entre le monde académique et l'entreprise, puisqu'il connaît les deux de l'intérieur. Au moment où il est question de redéfinir les relations entre Universités, Grandes Écoles et entreprises, ce témoignage sur la valorisation de la recherche sera une contribution précieuse à cette réflexion.

Stéphane Mallat est actuellement professeur à l'École Polytechnique et au Courant Institute.

Lettre ouverte à Valérie Pécresse

Stéphane Mallat[1]

Madame Valérie Pécresse
Ministre de la Recherche et
de l'Enseignement Supérieur

Madame la Ministre,

Lors d'un déjeuner réunissant des mathématiciens, vous nous avez demandé de vous adresser nos avis pouvant affiner votre vision des réformes engagées par votre ministère. La valorisation de la recherche étant l'un de vos axes prioritaires, je vous adresse ce témoignage d'une expérience personnelle, qui n'est pas toujours aligné avec les conclusions de votre ministère.

Avec trois anciens doctorants de l'École Polytechnique, en 2001 nous avons créé la société « Let It Wave », pour valoriser les résultats de notre recherche en mathématiques pour le traitement d'images. J'ai dirigé cette start-up qui a grandi et est devenue une société de semi-conducteurs pour la télévision haute définition, avec plus de 40 employés. En juin 2008, nous avons vendu la société à une compagnie américaine. « Let It Wave » est une histoire qui s'est bien finie pour ses investisseurs, pour les fondateurs et pour les 40 employés dont les emplois ont été pérennisés. C'est aussi un échec partiel du point de vue de la politique industrielle nationale car l'équipe et la technologie, qui sont porteurs de développements supplémentaires, n'ont pas été récupérés par un groupe français comme cela aurait

[1] Professeur de Mathématiques Appliquées École Polytechnique.

dû être le cas. Cet échec relatif reflète un problème plus général. Développer cette société sur les marchés ultra-compétitifs de l'électronique grand public, où la plupart des sociétés européennes ont disparu, m'a aidé à mieux comprendre certains blocages de la valorisation de la recherche telle qu'elle se pratique en France. Je suis revenu cette année à ma vocation première pour l'enseignement et la recherche, et cette distance me permet de vous envoyer cette vision, dégagée de tout intérêt ou champ de pression. Les propositions suivantes sont le résultat de cette expérience.

– Encourager par des mesures fiscales l'utilisation de consultants universitaires de longue durée (au moins 1 an) dans l'industrie. Cette mesure qui peut paraître anodine est centrale pour débloquer le fossé culturel entre universités (grandes écoles) et entreprises. Elle est importante pour renforcer la recherche et augmenter le recrutement de doctorants en entreprises, mais aussi pour inciter les enseignants-chercheurs à devenir des entrepreneurs. Les freins pour mettre en place ce consulting proviennent de problèmes réels, et le crédit d'impôt recherche n'est pas suffisamment incitateur, comme je l'expliquerai.

– Exposer et former les élèves et doctorants des écoles et universités scientifiques à la création de start-up en lien avec la recherche.

– Éliminer certaines fausses bonnes idées comme les thèses CIFRE, qui trop souvent ne sont pas adaptées à la formation de doctorants, et aux interactions des entreprises avec les universités. Réorienter les financements sur des bourses de thèses, liées à des projets de collaboration université-entreprise, portés par des chercheurs expérimentés.

– Réduire et mieux cibler les grands projets comme les pôles de compétitivité. Ces projets nécessaires dans certains domaines qui demandent des équipements coûteux, sont trop lourds dans un certain nombre de cas.

– Renforcer le rôle de l'OSEO/ANVAR comme agence de moyens pour des start-up et des PME technologiques, pour aider la phase d'émergence.

– Renforcer les liens entre grandes entreprises et start-up, mais aussi entre grandes entreprises et venture capitalistes, car ce manque de lien à un fort coût pour chaque partie, et pour l'aboutissement de la politique nationale de valorisation de la recherche.

Favoriser la création d'entreprises technologiques

Créer une start-up, c'est accepter un fort risque et s'engager dans une démarche de recherche pour développer une technologie et trouver un chemin d'accès à un marché porteur. Les bons enseignants-chercheurs ont un potentiel extraordinaire pour cela. Ils ont été formés à la recherche et à ses incertitudes et sont à la source de nouvelles innovations techniques. Par ailleurs, ils savent communiquer et convaincre à partir d'idées pas toujours mûres, que ce soit pour lever des fonds ou établir des collaborations. Dans la création et le développement d'une start-up, j'ai retrouvé les savoirs faire essentiels que j'avais développés comme enseignant-chercheur et responsable de département.

Aux US et en Israël, les universitaires sont un moteur fondamental de création d'entreprises, beaucoup moins en France. Pourquoi ? Car il faut tout simplement en avoir envie et cette envie préexiste à la démarche de création. En ce qui me concerne, cette idée était naturelle et attrayante car j'ai travaillé dix ans aux États-Unis, avec de nombreux collègues qui avaient créé une entreprise. Ces collègues ont quasiment tous fait du consulting en entreprise avant de créer leur société. Renforcer ce consulting est primordial pour toute la chaîne de valorisation.

Pour aider la valorisation de la recherche, de nombreux établissements en France ont mis en place des départements de valorisation, à l'image des universités américaines, avec des résultats mitigés. Il ne s'agit pas de nier des avancées importantes, comme la création d'incubateurs qui aident l'émergence de start-up, les formations offertes aux jeunes entrepreneurs, ou les contacts industriels ou légaux que peuvent apporter ces départements d'innovation. Cependant, il leur est difficile de motiver des chercheurs à créer leur société, car les membres de ces départements ont rarement une telle expérience, et ils ne sont pas eux-mêmes en prise de risque. Cette motivation peut venir du gain financier potentiel, mais c'est bien plus souvent la volonté d'avoir un impact sur le monde, de voir sa recherche aboutir à une réalisation utile et utilisée. Elle se bâtit soit avec des « rôles modèles », qui sont des personnes l'ayant fait et que l'on respecte, soit au contact de l'industrie, avec des ingénieurs ou des managers pour qui cet impact sur le monde est un moteur important.

La création d'entreprises nécessite du talent et de l'énergie mais pas forcément une grande expérience : la moyenne d'âge de création des plus grands succès en Californie est environ de 27 ans. Les élèves et doctorants de nos universités (et des grandes écoles) ont cette énergie et ce talent, mais il faut leur montrer qu'ils ont ce potentiel, et que c'est une voie possible. La création de start-up est un enseignement souvent réservé aux écoles de commerce alors que c'est aussi un moyen formidable d'établir un lien avec la recherche. Dans un cours de création de start-up que nous avons créé cette année à Polytechnique, 40 élèves ont parcouru les laboratoires de l'École, en physique, biologie, mathématiques, et ont monté des projets de start-up. Ils ont présenté les business plan à des investisseurs qui étaient impressionnés par le potentiel des équipes et des technologies. Ce type d'enseignement permet d'ouvrir un nouveau champ de possibilités pour ces élèves, en dehors de ce qu'ils imaginent être leur futur, à savoir les grandes entreprises, les cabinets de consultant ou les banques.

À l'université du Technion en Israël , ce sont les élèves qui de leur propre initiative organisent chaque année un concours où plus de 100 projets de start-up sont montés, avec des réalisations techniques innovantes réalisées par ces mêmes élèves. Le Technion est un modèle intéressant car à la source d'un nombre extraordinaire de start-up et d'innovations technologiques, dans un environnement économique plus difficile qu'en France. Dans cette université, la plus part des professeurs ont des activités de consulting ou ont eux-mêmes créé des start-up. Ils sont des modèles qui encouragent les élèves à en faire autant, bien que ces start-up ne soient pas toutes des succès. C'est une culture différente, où le risque n'est pas inhibant. Il est important de démystifier le risque pour les élèves français, en leur montrant que l'échec est une étape normale d'apprentissage, et que l'on rebondit avec une expérience et une vie bien plus riche. Faire évoluer cette culture est un processus lent, qui doit commencer à l'université.

C'est évidemment en entreprise que se trouve l'expérience et le savoir faire pour développer des produits et les commercialiser. C'est pour cela qu'un lien profond entre des universitaires et des ingénieurs ou managers est un atout majeur pour la création de sociétés. Cette connexion peut venir des ventures capitalistes, mais ils ont souvent un lien trop faible avec le milieu industriel ambiant, j'y reviendrai. Par ailleurs, il est difficile en France de recruter des managers de valeur dans des start-up à cause de leur perception du risque. Bien que située en France, nous avions plus de facilités pour recruter des managers américains de haut niveau que des français. Ce manque de mobilité entre grandes entreprises et start-up est pénalisant pour les start-up mais aussi pour les grandes entreprises qui ne développent pas la culture nécessaire pour acquérir les start-up françaises de valeur.

Renforcer le lien entre entreprises et recherche académique

Ce but est le Saint Graal des politiques de recherche et d'innovation et a mené à quelques fausses bonnes idées qu'il faut démystifier. Il y a cependant de vraies possibilités pour construire ce pont en France, qui est important pour les deux parties.

La recherche en milieu industriel

Ayant travaillé avec de nombreux groupes industriels, comme consultant universitaire ou comme industriel, et ayant eu à gérer la difficulté de maintenir une équipe de recherche dans une société en développement rapide, je voudrais faire part de quelques observations qui aideront peut-être à éviter des erreurs.

Si trop d'industriels ne développent pas de recherche dans leur entreprise ce n'est pas qu'ils sont idiots et qu'ils ne comprennent pas l'importance de l'innovation par la recherche, mais ils n'ont pas toujours le savoir faire nécessaire. Maintenir un équilibre entre finance, commercial, marketing et développement est une tâche difficile à laquelle les managers sont formés. L'équilibre entre développement et recherche est un équilibre tout aussi instable auquel beaucoup de dirigeants ne sont pas préparés car ils n'ont pas été exposés à la recherche. Un chercheur en milieu industriel doit à la fois aider à résoudre les problèmes technologiques, et être suffisamment libre pour chercher et innover. Au contraire, un ingénieur développe des produits au travers de processus contraignants qui optimisent l'équilibre entre temps de développement et respect d'un cahier des charges marketing. Il y a là un vrai fossé culturel et organisationnel.

La disparition de la recherche dans les entreprises ne se fait pas qu'en période de vaches maigres. Elle se fait souvent en période de développement rapide où la pression devient trop grande sur les chercheurs qui se transforment en ingénieur de développement pour aider à la sortie des produits. Pour protéger la recherche, certains industriels créent des laboratoires de recherche séparés des business unit, mais avec le risque alors d'éloigner la recherche de leurs problèmes technologiques. Il y a donc souvent des marches arrière pour réintégrer la recherche plus près des centres de développement, et l'on voit régulièrement ces effets de balancier sur les structures de R&D.

Réduction des thèses CIFRE : Convention Industrielle de Formation par la Recherche et l'Enseignement

Faire de la recherche dans le monde industriel est un métier passionnant mais difficile, qui demande un grand savoir faire et de la maturité. Cofinancer une thèse

CIFRE par un industriel et un universitaire et adopter un double encadrement universitaire et industriel peut sembler une idée excellente pour rapprocher ces deux mondes. C'est en réalité les raccrocher sur un maillon faible qui est écartelé. L'apprentissage de la recherche demande du temps, et nécessite un milieu ouvert et suffisamment protégé pour laisser la créativité s'épanouir. Ce milieu protégé est nécessaire car en recherche, il est difficile et angoissant d'affronter le vide et l'impasse, au lieu de s'occuper de problèmes techniques de moindre envergure. Un étudiant face à deux tutelles, qui n'ont pas les mêmes contraintes ni les mêmes objectifs, n'est pas en mesure de résister aux pressions divergentes qui s'exercent sur lui. J'ai vu de trop nombreux doctorants CIFRE souffrir de cet écartèlement. Dans les endroits où la valorisation se fait bien, aux US et en Israël notamment, il n'y a pas de thèse CIFRE, et pour cause !

Les thèses CIFRE sont défendues par les industriels et même les universitaires car tous ont peur de voir disparaître une source de financement. Même si les thèses CIFRE peuvent parfois rapprocher des industriels de la recherche académique, elles ont aussi un impact négatif important et sont surtout utilisées par les grandes entreprises. En pratique, les étudiants font souvent une grande partie de leur thèse dans l'environnement industriel. Cet environnement n'étant pas propice à une formation par la recherche, dans de nombreux cas, les docteurs CIFRE acquièrent une formation d'ingénieur plutôt que de chercheur. Ces deux métiers sont créatifs, mais ils sont différents. Par ailleurs, les thèses CIFRE deviennent des contrats de pré-embauche, ce qui peut à tort être considéré comme un succès par votre ministère. En recherche, il est important de lutter contre le recrutement local des anciens doctorants par leur laboratoire de thèse. Malgré les nombreux arguments à court terme en faveur de ces recrutements, on sait qu'en général cela restreint la diffusion des idées, des techniques, et que le jeune chercheur est moins autonome et créatif en restant dans son laboratoire de thèse. Ceci est évidemment valable pour la recherche industrielle.

Au travers du recrutement d'un doctorant, un industriel acquiert des nouvelles techniques et des nouveaux contacts avec des laboratoires universitaires de pointe. Si ce doctorant a fait une thèse CIFRE chez lui, il n'a pas besoin de l'initier à ses propres techniques mais il n'obtient rien de tout cela, et ce doctorant est typiquement moins bien formé pour faire de la recherche. Je recommande donc de réduire fortement les thèses CIFRE et de revenir au cadre normal, où l'étudiant est entièrement encadré dans l'université, avec une vraie liberté de recherche, éventuellement en contact avec des industriels. Ces bourses devraient être réallouées par exemple dans le cadre de projets financés par l'ANR. Il faut d'abord apprendre son métier de chercheur avant de pouvoir l'exercer dans le cadre plus difficile d'une entreprise.

Contrats de recherche université-industrie

Les contrats de recherche entre industriels et universitaires sont un très bon vecteur d'échange entre ces deux mondes, et sont formateurs pour les doctorants qui y participent (tout en faisant leur thèse à l'université). Cependant il faut aussi comprendre les limites de ce mode d'échange. Les contrats université-industrie ne débouchent pas souvent sur de véritables avancées technologiques. Ils apportent une mise à jour des connaissances des deux côtés, qui sont ensuite porteurs d'améliorations à moyen terme. Certains industriels espèrent qu'en passant un contrat de recherche, le chercheur va se concentrer sur leur problème comme le ferait le sous-traitant d'une société de service. C'est rarement possible car les problèmes industriels sont trop complexes. Comprendre et aborder les enjeux réels demande un investissement bien supérieur à celui que peut y mettre un chercheur, pour qui un contrat est une étape pour développer un programme de recherche plus large. C'est normal, car le but d'un chercheur doit être de faire aboutir sa vision tout en étant ouvert à l'extérieur pour la faire évoluer. Une société de service technologique (notre société Let It Wave en était une au départ), au contraire se doit de rentrer dans les détails technologiques pour les résoudre, car c'est ainsi qu'elle sera payée et acquerra un savoir faire utile dans le futur. C'est aussi pour ces raisons que la recherche universitaire, même appliquée, ne pourra jamais être financée majoritairement pas l'industrie ; elle ne l'est pas plus aux US qu'en France.

Conseils scientifiques

Afin de profiter d'expertises universitaires de haut niveau, certaines entreprises pensent que la solution est de constituer un conseil scientifique : c'est le plus souvent méconnaître la nature des problèmes. À titre personnel, j'ai fait partie pendant de nombreuses années du conseil scientifique de grandes entreprises françaises. Les conseils scientifiques fonctionnent très bien pour évaluer des laboratoires universitaires car évaluateurs et évalués sont dans un milieu homogène qu'ils connaissent bien. Une ou deux journées sont donc suffisantes pour acquérir une vision des forces et faiblesses pour un conseil scientifique en milieu académique.

Au contraire, ce type de conseil scientifique est peu utile et parfois contre-productif en entreprise, car il cache les vrais problèmes en légitimant un statuquo. Malgré leurs qualifications, les membres universitaires du conseil ne peuvent comprendre en profondeur l'étendue des problèmes techniques, scientifiques et structurels de la recherche dans une entreprise. Les débats sont trop rapides et superficiels, et entérinent les décisions du directeur scientifique ou technique, modulo quelques critiques pour justifier l'existence du conseil scientifique. Cela donne bonne conscience au management qui s'est « ouvert au monde académique », souvent d'ailleurs perçu comme un peu incompétent par les membres de la direction technique. Les conseils scientifiques qui fonctionnent le mieux sont constitués de consultants réguliers dans l'entreprise qui ont été éduqués en profondeur par l'entreprise, ce qui nous ramène au problème du consulting.

Grands projets et pôles de compétitivité

Un autre axe qui peut sembler naturel est de rapprocher les industriels et les universités au travers de grands projets comme les pôles de compétitivité. Ces projets sont parfois appréciés pour la visibilité et la médiatisation qu'ils ont. Comme chacun, j'ai participé à des grands projets de la sorte, en tant qu'universitaire et industriel, aux US et en France. Ce type de grand projets est nécessaire lorsqu'il s'agit de mettre en place des infrastructures coûteuses à partager par des communautés scientifique ou industrielles diverses comme c'est le cas pour le projet « NeuroSpin » en RMN et IRM pour la biologie avec le CEA, ou en nanotechnologies et il y a bien d'autres exemples. Cependant, lorsqu'il s'agit de domaines où les avancées ne dépendent pas d'investissements majeurs mais de créativité scientifique et technique sur des investissements de bien moindre envergure, ces grands projets sont inefficaces. C'est le cas par exemple dans certains domaines des STIC, où les coûts hors personnels sont réduits à l'achat d'ordinateurs ou de cartes électroniques et de composants. Ces chercheurs et industriels ont besoin de financements, mais la structure des grands projets amène la création de consortium trop lourds, avec des nouvelles structures inutiles, ce qui n'améliore pas les interfaces de recherche avec les PME.

Pour provoquer des échanges pluridisciplinaires et créatifs, je crois bien plus aux rencontres fortuites ou régulières, qu'aux grands projets orchestrés. Au « Courant Institute » où j'ai enseigné aux États-Unis, un grand salon occupe une place centrale, où sont passés beaucoup de mathématiciens de toutes nationalités. C'est au hasard des rencontres, autour de gâteaux et de café, que sont nés parmi les plus importants résultats de mathématiques appliquées. Favoriser les rencontres de qualité est un moyen extraordinairement efficace d'innovation scientifique et technique. C'est pour cela qu'il est si important de créer des campus et des instituts pluridisciplinaires localisés, où chercheurs, enseignants et élèves peuvent se rencontrer et échanger. Ce modèle cependant fonctionne mal avec les industriels. Même si une proximité géographique est utile pour établir des liens, un campus dans lequel on regroupe des grands industriels et des universités, ne provoque que marginalement ce type de rencontre. Le fossé pour mettre en place une collaboration est plus grand, et les ingénieurs de l'industrie ont rarement le luxe d'investir du temps dans ces rencontres du hasard.

Mobilité et consulting

La mobilité des chercheurs dans l'industrie est le moyen le plus efficace pour réduire le fossé entre industrie et université. L'embauche de docteurs formés dans des laboratoires universitaires est évidemment fondamentale. Je ne reviendrai pas sur le déficit de ces embauches en France, qui est un problème bien connu qu'il faut s'attacher à résoudre. Cependant, une priorité doit être de renforcer les échanges entre chercheurs universitaires confirmés et entreprises, ce qui est plus facile et fort efficace. La mobilité d'un chercheur pour aller en entreprise au cours d'un sabbatique a souvent été envisagée et encouragée, mais c'est une mesure marginale, et réservée aux grandes entreprises. Il est plus naturel pour un universitaire senior de créer sa propre entreprise que de rentrer dans le moule d'une société industrielle.

Inversement, la mobilité d'un chercheur de l'industrie vers l'université est un mouvement positif mais là encore ce sont des cas marginaux. Ce retour est possible pour des jeunes, mais après quelques années, il est difficile pour un chercheur industriel de se réadapter à l'université, d'enseigner, et de réduire son salaire. Le consulting est le levier le plus efficace pour rapprocher les chercheurs universitaires et les entreprises. Le pouvoir public a un rôle important à jouer sur cet aspect.

Le consulting reste insuffisant en France car il commence par une phase d'inefficacité pour l'industriel, qui n'y est pas forcément préparé, surtout dans une PME. Même si un chercheur universitaire possède une clef pour faire avancer une technologie, pour choisir la bonne clef il lui faut comprendre la nature d'un problème complexe et pluridisciplinaire. Cette première phase de formation peut nécessiter plus de 6 mois de consulting, à raison de un jour par semaine. Autrement dit, un universitaire est naïf pendant cette première période, si bien que les industriels ne voient pas a priori ce qu'il peut leur apporter. Et pourtant, une fois formé par l'industriel, un chercheur universitaire confirmé peut avoir un impact considérable. Il apporte des nouvelles connaissances, son savoir faire, des solutions innovantes, et un lien avec l'université pour recruter de bons étudiants avant ou après la thèse. Un universitaire réputé peut aussi donner du poids à la recherche dans une entreprise, la légitimer, et aider à la développer.

L'embauche de jeunes docteurs est parfois le résultat du succès d'un tel consulting. Inversement, l'universitaire découvre des nouveaux problèmes et des techniques qui font évoluer sa recherche académique. Il vaut donc mieux qu'un contrat de consulting soit de longue durée, au moins 1 an, typiquement un jour par semaine, ce qui permet d'établir une collaboration en profondeur. Un exemple emblématique d'efficacité de ce lien par le consulting est le rôle qu'a joué Jacques-Louis Lions en mathématiques appliquées, en faisant évoluer les techniques mathématiques au contact avec des problèmes industriels, et en réformant en profondeur le calcul numérique dans l'aéronautique et l'aérospatiale. Cela a mené par la suite au recrutement d'équipes étoffées de chercheurs en mathématiques appliquées dans ces industries. De plus, Jacques-Louis Lions a créé l'INRIA, un institut de recherche ouvert sur l'industrie, il est devenu Président du CNES, tout en maintenant une activité scientifique. Cela montre l'impact profond de ces types d'échanges.

Le but d'un universitaire consultant est d'abord de compléter son salaire, ce dont il a souvent besoin, même si a posteriori cela a aussi des retombées positives pour sa recherche. On ne peut attirer des universitaires de haut niveau qu'avec des salaires correspondants. Cela fait évidemment hésiter un industriel qui ne voit pas de bénéfice à court terme, et n'anticipe pas forcément qu'il y en a à moyen terme. C'est pour cela que l'État doit aider financièrement ce consulting de longue durée, notamment par l'impôt.

Le crédit impôt-recherche est destiné a priori à de telles subventions et a été renforcé, ce qui est une excellente chose. Cependant il aide relativement peu ce type de consulting universitaire car il ne fait pas de différence entre des activités de développement peu innovantes et la recherche, sauf pour le recrutement de jeunes doctorants ou pour de la recherche sous-traitée à des organismes ou des universités. S'il ne s'agit pas de recherches très en amont, sous-traiter la recherche pose des problèmes de confidentialité et de brevets, ce qui empêche un industriel d'utiliser ce procédé quand il s'agit de son cœur de métier. Par ailleurs, le but n'est pas de sous-traiter la recherche mais de plonger un universitaire dans le milieu industriel pour qu'il anime la recherche en entreprise. Il résulte qu'à coût égal, la même subvention est obtenue si on recrute un développeur qui est très utile à court terme ou un consultant universitaire qui l'est beaucoup moins. Le choix est souvent vite fait. Mettre en place des subventions ciblées pour des contrats de consulting universitaire de longue durée (1 an) est très important pour faire évoluer en profondeur les échanges entre universités et entreprises.

OSEO-ANVAR, capital risque et l'histoire d'un rachat industriel

« Let It Wave » a traversé toutes les étapes classiques d'une start-up : l'émergence en incubateur, une phase d'autofinancement avec des contrats de service complétés par une subvention de l'ANVAR, une levée de fond de 6 millions d'euros auprès de ventures capitalistes qui ont joué leur rôle de partenaire, et une seconde levée de fond internationale de 15 millions d'euros en parallèle avec une vente internationale. Cela m'a permis de vivre tous les problèmes de financement sur ce parcours du combattant et d'en tirer quelques enseignements.

Financement de l'émergence

L'OSEO-ANVAR est une institution importante qui aide à boucher le trou béant du financement de l'émergence des start-up technologiques. Nous avons obtenu le prix de la création d'entreprises innovantes de l'ANVAR en 2002. La préparation du dossier aussi bien que les financements résultants ont été une phase cruciale de maturation et d'accélération du projet. Notre société ne se serait pas développée aussi vite sans cette aide. Les fonds de capital risque ont tendance à ne pas investir dans des projets en émergence car le retour sur investissement est considéré comme trop risqué. Ce phénomène va plutôt en s'amplifiant. Cette phase d'émergence est aussi financée aux US par des subventions, depuis les « small business initiatives » de la NSF jusqu'aux nombreux contrats des agences de la défense ou d'autres départements d'état comme celui de l'énergie. L'OSEO-ANVAR a donc un rôle important à jouer, et il faut maintenir et développer ce type de financement.

Après notre première levée de fond, nous avons décidé d'accélérer le développement de la société en faisant passer nos produits du marché professionnel de la vidéo au marché grand public de la télévision haute définition. Cela correspondait à un projet d'entreprise bien plus ambitieux, mais qui augmentait considérablement les coûts de développements et donc les besoins de financement. Un prêt sans intérêt de l'OSEO nous a permis de changer de braquet, et de nous positionner favorablement pour une seconde levée de fond internationale.

Capital risque

Les mesures fiscales favorables à l'investissement dans des start-up ont permis la création de grand fonds d'investissement mais la compétence des ventures capitalistes gérant ces FCPI, notamment dans les banques ou chez les assureurs, n'a pas grandi aussi vite que leurs fonds. Or ces ventures capitalistes sont censés avoir un rôle moteur dans le développement des start-up. Être capable de sélectionner les projets risqués à fort potentiel demande un réseau et une grande expertise. Beaucoup de fonds manquent de cadres ayant une expérience suffisante, qu'elle soit industrielle, de direction ou de création d'entreprise, mais aussi tout simplement de connexions avec le tissu industriel français ou européen. Le manque de lien entre industriels et venture capitalistes est aussi un handicap pour le rachat des start-up françaises. Les sorties par rachat industriel sont actuellement les débouchés principaux des start-up, par opposition à des sorties en bourse, et une bien trop faible proportion vient enrichir le portefeuille technologique et les équipes des sociétés françaises. Il y a là une réflexion à organiser avec l'Association Française des Investisseurs en Capital, car nombre de ventures capitalistes sont conscients du problème.

L'histoire d'un rachat industriel, encore par des américains !

Le rachat des start-up technologiques françaises par des sociétés étrangères, en particulier américaine, est un problème bien connu. Cependant, contrairement à ce que l'on pourrait penser, ce n'est pas forcément un problème de capacité de financement. Plutôt que de théoriser sur des généralités, je voudrais l'illustrer en racontant l'histoire du rachat de « Let It Wave ».

Une société de semi-conducteur comme la nôtre a besoin de lever environ 50 millions d'euros avant d'atteindre l'équilibre. Fin 2007, nous faisions une seconde levée de fond internationale de 15 millions d'euros dans un contexte financier difficile. À partir de son savoir faire mathématique, algorithmique et d'architecture électronique, « Let It Wave » a développé une technologie et un premier produit de traitement vidéo, reconnus par ses concurrents et ses clients comme étant plus performants que la concurrence, avec de nombreux brevets. Nous avons été contactés par certaines des plus grandes sociétés mondiales de semi-conducteurs, dont Intel, AMD et une grande société de semi-conducteur franco-italienne, pour qui cette technologie offrait un avantage compétitif important. Les fondateurs de « Let It Wave » privilégiaient nettement un rachat par une société française, pour pérenniser le futur de la société et les emplois. Toutes ces sociétés ont envoyé plusieurs équipes de managers et d'ingénieurs pour évaluer le potentiel technologique, ainsi que les perspectives commerciales, marketing et financières de nos produits.

Côté américain, ces équipes étaient mixtes et incluaient des cadres qui avaient participé à nombre de start-up. Côté français, c'était une équipe de cadres compétents, mais ayant fait toute leur carrière dans cette société. Après quelques visites, aucun cadre de « Let It Wave » ne voulait d'un rachat par la société française. Ils préféraient nettement être intégrés dans une des sociétés américaines, dont les cultures étaient ironiquement bien plus proches de la nôtre, avec des ambitions qui maintenaient la part de rêve qui est au cœur de toute start-up.

Plus étonnant, au milieu de ce processus de rachat, la société française a racheté une société californienne, exactement dans notre domaine. Nous connaissions parfaitement cette société car le fondateur de sa technologie avait vendu ses parts et avait investi dans notre société. Cette société américaine était en vente sans succès depuis 3 ans, avec un portefeuille technologique devenu obsolète par manque d'investissement, ce qui a provoqué une perte rapide de ses parts de marché. Nous le savions et ses concurrents américains le savaient. Ce n'est qu'après le rachat que la société française a découvert l'état réel du portefeuille technologique, et cette erreur leur a coûté plus de 300 millions de dollars. C'est dommage car cette société française avait besoin de notre technologie et de notre capacité de recherche, qui lui aurait coûté beaucoup, beaucoup moins cher. Pour « Let It Wave », l'histoire s'est bien finie puisque nous avons accepté, avant l'effondrement des marchés, une offre d'une société américaine. Celle-ci a gardé tous les employés, pour maintenir la capacité d'innovation de notre structure.

La moralité de cette histoire est que l'imperméabilité de beaucoup de grands industriels français au monde des start-up, les rend mal préparés pour racheter ce type de société. C'est regrettable car c'est un échec pour l'aboutissement de la politique de recherche et d'innovation, c'est donc aussi un problème qu'il faut s'attacher à résoudre.

J'espère sincèrement, Madame la Ministre, que votre volonté d'améliorer la valorisation de la recherche portera ses fruits, car il y a un vrai besoin. Veuillez agréer, Madame la Ministre, l'expression de mes sentiments respectueux.

LIVRES

Combinatorics on words. Christoffel words and repetitions in words
J. Berstel, A. Aaron, Chr. Reutenauer et F. V. Saliola
AMS, 2009. 147 p. ISBN : 978-0-8218-4480-9. $51.00

Cet ouvrage trouve son origine dans deux cours de dix heures effectués par J. Berstel et Chr. Reutenauer en mars 2007, dans le cadre de l'école de printemps consacrée à la combinatoire des mots qui faisait partie du semestre thématique *Recent Advances in Combinatorics on Words* organisé au Centre de recherches mathématiques (CRM) de Montréal. Le texte se compose de deux parties. La première, correspondant aux cours dispensés par Chr. Reutenauer, est consacrée aux mots de Christoffel et à leurs applications en géométrie discrète, théorie des groupes et théorie des nombres. La seconde, reprenant les cours de J. Berstel, est centrée sur les répétitions dans les mots, finis et infinis.

Quoique la théorie des mots de Christoffel se soit développée au cours du dernier quart du XIX^e siècle, notamment dans des travaux de Christoffel, Smith et Markoff, la terminologie *mot de Christoffel* n'apparut qu'en 1990, dans un article de J. Berstel. Parmi les nombreuses définitions équivalentes des mots de Christoffel, les auteurs choisissent le point de vue géométrique suivant. Soient a et b deux entiers positifs premiers entre eux. Le chemin de Christoffel inférieur de pente b/a est le chemin reliant les points du plan $(0,0)$ et (a,b), formé de segments horizontaux et verticaux dont les extrémités ont des coordonnées entières, tel qu'aucun point du réseau $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ne se trouve dans la région du plan délimitée par ce chemin et la droite reliant les points $(0,0)$ et (a,b). Codant par x tout segment horizontal unité et par y tout segment vertical unité, le mot fini sur l'alphabet $\{x,y\}$ correspondant au chemin de Christoffel inférieur de pente b/a est, par définition, le mot de Christoffel (inférieur) de pente b/a. Ainsi, les mots de Christoffel (inférieurs) de pente 1 et 4/7 sont, respectivement, xy et $xxyxxyxxyxy$. Les chemins et mots de Christoffel supérieurs sont définis de manière analogue. La définition originale, qui figure dans l'article de 1875 de Christoffel, fait appel au graphe de Cayley et est présentée à la suite de la définition géométrique. Les six chapitres suivants sont notamment consacrés aux morphismes de Christoffel, à la factorisation des mots de Christoffel (tout mot de Christoffel w s'écrit de manière unique $w = w_1 w_2$, où w_1 et w_2 sont des mots de Christoffel ; il s'agit d'un résultat de J.-P. Borel et F. Laubie), à l'étude des éléments primitifs du groupe libre à deux générateurs, ainsi qu'à de nombreuses caractérisations équivalentes des mots de Christoffel, l'une d'elles établissant un lien entre les fractions continues, l'arbre de Christoffel et l'arbre de Stern-Brocot des nombres rationnels positifs. Enfin, au chapitre 8, les auteurs reformulent en termes de mots de Christoffel quelques-uns des résultats de Markoff démontrés dans ses célèbres mémoires sur les formes quadratiques binaires indéfinies.

Le fil conducteur de la seconde partie est le mot de Thue–Morse $\mathbf{t} = t_0 t_1 t_2 \ldots$, défini, pour tout entier $n \geq 0$, par $t_n = 0$ si l'écriture binaire de n comprend un nombre pair de chiffres 1, et par $t_n = 1$ sinon. De manière équivalente, **t** est le point fixe commençant par 0 du morphisme $\mu : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ défini par $\mu(0) = 01$ et $\mu(1) = 10$. Les auteurs démontrent qu'aucun sous-mot de **t** n'est de la forme $a\mathbf{w}a\mathbf{w}a$, où $a \in \{0,1\}$ et **w** est un mot fini. Le mot **t** leur sert de prétexte pour introduire les notions de suite automatique, de série génératrice, de langage formel, entre autres. Parmi les multiples résultats figurant dans le chapitre consacré exclusivement à l'étude des carrés (un carré est un mot de la forme **ww**, où **w** est un mot fini) dans les mots finis, mentionnons que tout mot de longueur n contient au maximum $2n$ carrés différents. S'y trouve également un algorithme permettant de déterminer en temps linéaire si un mot fini possède ou non au moins un sous-mot de la forme **ww**. Dans le dernier chapitre, les auteurs présentent plusieurs directions de recherches centrées sur des questions de répétitions dans les mots et de motifs évitables.

Cet ouvrage, fort agréable à lire et riche de plus d'une centaine d'exercices, peut sans hésitation être conseillé à tout étudiant de 4^e année ou au-delà qui souhaiterait un premier contact avec la combinatoire des mots. Une grande partie des résultats présentés (certains d'entre eux ne sont pas démontrés) furent établis durant ces vingt dernières années. L'index terminal et la bibliographie sont très complets ; le fait que chaque référence est suivie des numéros des pages où elle est citée est également à souligner.

Yann Bugeaud,
Université de Strasbourg

A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration

David M. Bressoud

Cambridge University Press, MAA Textbooks, 2008. 328 p.
ISBN : 978-0521-7118-38. $39.99

Dans la lignée de son précédent ouvrage (A Radical Approach To Real Analysis – ARATRA), David Bressoud poursuit le double but d'enseigner dans le même temps les mathématiques et leur histoire. Le fil qui nous conduit, via la théorie de l'intégration de Lebesgue, de la construction des réels à l'analyse fonctionnelle moderne, peut se résumer en la question suivante : quand une fonction possède-t-elle une série de Fourier qui converge vers cette même fonction ? Pour y répondre, il aura fallu clarifier les notions de fonction, de continuité, d'intégrale et de convergence : c'est-à-dire tout le programme de fondation de l'analyse réelle.

Il n'est en effet pas inutile de rappeler que Riemann inventa l'intégrale qui porte son nom dans le seul but de calculer des coefficients de Fourier de fonctions. C'est à ce point, qui concluait ARATRA, que David Bressoud reprend son récit (chap. 1). En s'autorisant à considérer des fonctions « arbitraires » (même dans la classe des fonctions Riemann-intégrables), Riemann ouvre une boîte de Pandore qui devra attendre Lebesgue pour être refermée. Il construit notamment une fonction f intégrable mais discontinue en tout rationnel de dénominateur pair ; alors $\int_a^x f(t)dt$ est continue mais non différentiable en ces points (chap. 2). Cet exemple est le déclencheur des considérations qui conduiront Cantor et ses successeurs à se pencher sur l'insoupçonnée complexité des nombres réels et à fonder la théorie des ensembles (chap. 3).

L'ensemble triadique de Cantor (chap. 4), modèle indémodable de fractale, concentre les problèmes que devront résoudre la théorie de la mesure et l'intégration de Lebesgue. Cet ensemble parfait, nulle part dense mais indénombrable est certes intuitivement « petit » mais formaliser cette intuition requerra d'immenses efforts. La fonction traditionnellement appelée « escalier du diable », qui lui est associée, est un contre-exemple aux versions les plus naïves du théorème fondamental de l'analyse. Ainsi se profile le lent développement de la théorie de la mesure (chap. 5) grâce aux efforts de Peano, Jordan, Borel et finalement Lebesgue et Carathéodory. L'exemple classique d'un ensemble non mesurable, dû à Vitali (accompagné d'une brève discussion sur l'axiome du choix), n'est pas omis.

Au milieu du livre (chap. 6) l'intégrale de Lebesgue est enfin construite et l'exposé devient plus classique : fonctions mesurables puis intégrables, convergence monotone, lemme de Fatou, convergence dominée, théorèmes d'Egorov et de Luzin. Avec une touche d'ironie, l'auteur nous rappelle que Lebesgue, non content de rendre obsolète l'intégrale de Riemann, résout en même temps le vieux problème consistant à caractériser en termes de continuité les fonctions Riemann-intégrables (ce sont les fonctions bornées continues presque partout... au sens de la mesure de Lebesgue). Le chapitre suivant (chap. 7) revient sur le théorème fondamental de l'analyse à la lumière de l'intégrale de Lebesgue. La boucle est enfin bouclée (chap. 8) par un retour sur la convergence des séries de Fourier. L'approche classique (Dirichlet, Cesàro revu par Lebesgue) montre ses limites et le livre se conclut sur l'introduction des espaces de Banach L^p (le théorème de Carleson-Hunt est juste mentionné) et la preuve du théorème de Riesz-Fischer dans l'espace de Hilbert $L^2([-\pi,\pi])$.

Ce livre est d'une lecture agréable, il est extrêmement complet et bien informé. Il est à recommander à tous les étudiants (et leurs professeurs) souhaitant approfondir le sujet ou disposer d'un ouvrage de référence. La présentation exhaustive de toutes les étapes de la construction de l'intégrale de Lebesgue (sans omettre les errements et fourvoiements de certains parmi les plus grands noms des mathématiques comme Cauchy, Duhamel, Hankel, Harnack, du Bois Raymond...) nécessite une première approche sélective si l'on s'intéresse aux mathématiques plus qu'à leur histoire : la théorie de l'intégration proprement dite commence seulement au chapitre 5. Chaque section est accompagnée de moult exercices (certains extraits de *Problems in Mathematical Analysis* par Kaczor et Nowak, AMS 2000–2003) avec des indications de solutions en annexe. On trouve également en annexe la preuve (par récurrence transfinie) de la cardinalité $\mathfrak{c}$ de l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ et une présentation succincte de l'intégrale de Kurzweil-Henstock (l'auteur justifie son choix – discutable – de ne pas y accorder plus d'importance malgré son intérêt pédagogique certain). Noter enfin qu'un erratum pour ce livre est disponible à l'adresse :
`http://www.macalester.edu/aratra/Lebesgue/LebesgueCorrections.pdf`

Jean-Marie Aubry,
Université Paris XII–Val-de-Marne