SOMMAIRE DU Nº 120

Éditorial

Chers lecteurs,

Le monde de l'enseignement et de la recherche français vit des moments troublés et difficiles. Pour défendre sa vision de l'avenir, notre communauté a su largement se mobiliser et prendre position sur ces questions essentielles que sont la refonte du statut des enseignants-chercheurs, les zones d'ombre de la politique des grands instituts scientifiques, ou encore la réforme du recrutement et de la formation des professeurs.

Le résultat des transformations en cours et de cette mobilisation sont encore incertains. La Gazette, *dont le rythme de conception est lent – de par sa publication trimestrielle, ses contenus se construisent sur des temps longs – peut difficilement rendre compte d'une actualité qui risquerait d'être dépassée lorsque la revue parvient à ses abonnés. Pour autant, nous rappelons une fois encore qu'elle veut être un lieu d'expression et de liaison entre tous les mathématiciens, et nous ne pouvons qu'encourager nos lecteurs à nous faire parvenir leurs témoignages, analyses et réactions, que la rubrique* « Courrier des lecteurs » *a vocation à accueillir.*

Signalons enfin l'hommage rendu à H. Cartan, appelé à se prolonger dans le prochain numéro.

Bonne lecture à tous.

— Zindine Djadli, Frédéric Patras

SMF

Mot du Président

Chers amis, chères amies,

Je me suis déjà exprimé ici sur le rôle que les Sociétés Savantes doivent, à mon avis, jouer dans les réformes actuelles de l'enseignement et de la recherche. Ces points de vue sont aussi développés plus en détail dans mes billets, sur le nouveau site web d'« Image des Mathématiques ». En ce qui concerne le détail de nos actions et prises de position, depuis quelques mois, la situation évolue si vite qu'il me semble plus pertinent de tenir les membres de la SMF au courant de nos activités dans ce domaine au moyen de courriels aux adhérents, quand l'actualité l'impose, et en rassemblant sur notre site web, à la page « réformes » l'ensemble des documents concernant ces activités.

Nos sociétés mènent, pour nombre d'entre elles, une réflexion de fond sur les réformes actuelles. Une question importante à laquelle nous sommes confrontés est la façon de faire connaître ces positions afin qu'elles puissent peser dans le débat qui a lieu sur la place publique (l'agora de notre époque étant certes les media, mais aussi, de plus en plus, une myriade de sites web) et surtout qu'elles soient prises en compte par nos tutelles. Pour que nos efforts ne soient pas vains, il est en effet nécessaire que les Sociétés Savantes expriment avec le plus de visibilité possible leur point de vue, et qu'elles soient reconnues comme interlocutrices à part entière par les responsables des ministères.

Dans cette perspective, une évolution importante a eu lieu à l'occasion de la réforme, dite de « masterisation des concours d'enseignants ». Nous nous sommes rendu compte que l'analyse qu'en faisait la SMF était très similaire à celle de la « Coordination Concours Lettre » (CCL) qui rassemble les Sociétés Savantes de littérature française. Après une rencontre et une confrontation de nos points de vue, nous avons décidé de lancer à l'ensemble des sociétés savantes un appel à signer une lettre ouverte au ministre X. Darcos dans laquelle nous lui ferions part de nos critiques sur cette réforme, et surtout, nous demanderions un moratoire d'un an afin de pouvoir établir un vrai dialogue entre la communauté académique et les responsables du ministère. Il est utile de souligner que nombre de sociétés savantes avaient déjà fait cette demande, chacune de son côté... et toujours en vain. Nous avons été étonnés par la réaction immédiate et quasi unanime de l'ensemble des sociétés que nous avions contactées, et qui ont répondu à notre appel avec enthousiasme. Le succès de cette lettre est même allé au delà, puisque des associations de professeurs du secondaire se sont jointes à nous. C'est, à ma connaissance, la première fois qu'une cinquantaine d'associations, représentatives de la quasi-totalité des disciplines académiques, entreprennent une démarche commune. Espérons qu'elle sera, cette fois-ci, couronnée de succès.

Cet épisode est, je crois, emblématique du rôle que nos sociétés pourraient être amenées à jouer concernant les réformes : d'un côté, continuer chacune à mener en interne un travail de fond de réflexion, et de proposition, au sein de chaque Conseil d'Administration, en liaison avec l'ensemble de leurs adhérents. Puis ne pas hésiter à se coordonner en dépassant tous les clivages disciplinaires, quand la convergence de leurs analyses et l'importance des enjeux l'exigent.

Le 26 mars 2009
Stéphane Jaffard

EN HOMMAGE À HENRI CARTAN

Henri Cartan et la rue d'Ulm[1]

Michel Demazure

Henri Cartan (Ulm, Sciences, 1923), né le 8 juillet 1904 à Nancy, est décédé à Paris le 13 août 2008, à l'âge de 104 ans.

À l'occasion de son centième anniversaire, la Société Mathématique de France et l'École normale supérieure avaient organisé en commun une Journée salle Dussanne. Nous remercions la SMF qui nous a permis d'emprunter nombre d'éléments au dossier mis en ligne à cette occasion et que l'on pourra consulter sur son site.[2]

Henri naît à Nancy où enseigne son père Elie Cartan (1869-1951, Ulm 1888), fondateur de la géométrie différentielle moderne. Il rejoint Paris lorsque son père est nommé à la Sorbonne et à l'École de physique et chimie de Paris. Il fréquente le lycée Buffon à Paris, puis le lycée Hoche à Versailles.

Il entre à la rue d'Ulm en 1923, passe l'agrégation en 1926 et soutient sa thèse en 1928, sous la direction de Paul Montel[3]. Il est alors nommé au lycée Malherbe de Caen, puis l'année suivante à la faculté des sciences de Lille. Il est nommé à Strasbourg en novembre 1931 et y exerce jusqu'en septembre 1939, où l'université se replie à Clermont-Ferrand. Enfin, en novembre 1940, très jeune pour l'époque, il est nommé maître de conférences de mathématiques générales à la faculté des sciences de Paris et chargé de l'enseignement des mathématiques à l'Ecole normale supérieure. Il y exerce de 1940 à 1965, à l'exception de deux années (45-47) où il est détaché à la faculté des sciences de Strasbourg. En 1965, il quitte ses fonctions à la rue d'Ulm, restant professeur à la faculté des sciences de Paris. Enfin en 1969, il est nommé professeur à la faculté des sciences d'Orsay, indépendante de Paris depuis 1965, embryon de la future Université de Paris-Sud créée en 1970, d'où il prendra sa retraite en 1975.

Les deux passages d'Henri Cartan à la rue d'Ulm, comme élève, puis comme professeur vont se révéler capitaux pour les mathématiques, à l'École, en France et dans le monde.

D'abord, c'est un groupe de normaliens des promotions 1922 (Jean Delsarte, André Weil), 1923 (Henri Cartan, Jean Coulomb, René de Possel) et 1924 (Jean

---

1 Nous remercions la revue *Archicube* qui nous a autorisé à publier cet article qui paraîtra aussi dans son n° 6 en juin 2009.

2 `http://smf.emath.fr/VieSociete/Rencontres/JourneeCartan/NoticeCartan.html`

3 Bien que peu significative dans le cas d'Henri Cartan, sa généalogie mathématique est la suivante : Paul Montel (Ulm 1894) a eu comme directeur de thèse Emile Borel (Ulm 1889), élève de Gaston Darboux (Ulm 1861), élève de Michel Chasles (X 1812), élève de Siméon Denis Poisson (X 1798), élève de Joseph Louis de Lagrange, immense... et sans diplôme.

Dieudonné, Charles Ehresman), animé par Weil et Cartan, complété de Claude Chevalley (Ulm 1926) et Szolem Mandelbrojt, qui constituera en 1935 le groupe Bourbaki[4], symbolisant le renouveau des mathématiques françaises. L'élimination massive des scientifiques français au front lors de la première guerre mondiale avait en effet laissé les jeunes mathématiciens français isolés, sans prédécesseurs immédiats[5], ne trouvant comme répondants parmi les mathématiciens français que ceux du siècle passé – à l'exception notable d'Elie Cartan et de Salomon Hadamard (Ulm 1884) – au moment même où des courants novateurs émergent à l'étranger, et avant tout en Allemagne.

Ainsi, Weil va d'abord en Italie, puis en Allemagne, notamment à Göttingen, avant de revenir soutenir à Paris sa thèse en 1928. Cartan, lui, établit en 1931 des relations suivies avec ses collègues allemands, qu'il poursuit à travers la seconde guerre mondiale[6] et pendant toute sa vie. Comme l'écrira en 1994 Martin Grötschel, président de la DMV[7], à l'occasion de la nomination de Cartan comme membre d'honneur de la DMV :

> *« Il y a 63 ans, en juin 1931, vous êtes venu à Münster pour y donner des conférences. C'est ainsi qu'ont débuté vos étroites relations scientifiques et personnelles avec Heinrich Behnke et son école d'analyse complexe, [...] L'amitié qui vous liait à Heinrich Behnke a survécu au temps de la terreur nazie et à la guerre ; dès 1946 vous veniez à Oberwolfach et en 1947 de nouveau à Münster. Vous avez ainsi donné à beaucoup de mathématiciens allemands, et surtout aux plus jeunes, le sentiment que malgré les malheurs que l'Allemagne avait infligés au monde, ils n'étaient pas exclus de la communauté internationale des mathématiciens. Par là-même, vous avez, dans les incertitudes de l'après-guerre, donné à beaucoup de nos collègues force et courage [...] »*

La situation universitaire parisienne n'a guère changé lorsque Cartan prend la direction des études mathématiques de la rue d'Ulm en novembre 1940. L'arrivée de l'hirondelle Cartan ne fait pas pour autant le printemps à la Sorbonne ; songeons par exemple qu'il devra attendre 1955 pour qu'un second mathématicien de la nouvelle école, Gustave Choquet (Ulm 1934) le rejoigne à Paris. Mais c'est le point de départ d'une révolution qui, en une quinzaine d'années, bouleversera complètement la donne, remettra les mathématiques françaises à leur place historique, l'une des toutes premières, et fera de Paris la capitale mathématique du monde tout au long des années 50 et 60.

Qu'on en juge simplement par cet échantillon de normaliens, ceux dont il a dirigé les thèses : Roger Godement (promotion 1940), Jean-Louis Koszul (1940), René Thom (1943) Jean-Pierre Serre (1945), Jean Cerf (1947), Jean-Paul Benzécri (1950), Pierre Cartier (1950), Adrien Douady (1954), Max Karoubi (1959), Jean-Pierre Ramis (1962). Certes, avec sa modestie habituelle, il a déclaré *« Beaucoup*

[4] Le nom de Bourbaki avait été introduit à l'occasion d'un canular par Raoul Husson (Ulm, 1923).

[5] Weil parlera d'une « génération sans maîtres », Cartan d'un « vide ».

[6] Notamment pour essayer d'obtenir des nouvelles de son frère physicien Louis, arrêté et déporté en 1943 pour faits de résistance. Louis fut exécuté en décembre 1943, mais sa famille n'apprit sa mort qu'en mai 1945.

[7] Deutsche Mathematiker Vereinigung, association professionnelle des mathématiciens allemands.

d'entre eux [les élèves de l'École] ont préparé des thèses sous ma direction. On dit habituellement "direction", mais dans ce cas, ma "direction" consistait à comprendre ce qu'ils avaient en tête. Alors, j'apprenais beaucoup. » Comme me l'a écrit Jean-Pierre Serre, *« La tradition de l'époque – qui a duré jusque vers 1955-1960 – était de ne pas donner de sujet de thèse. C'était typique avec Cartan : il ne suggérait rien, mais il aidait une fois qu'on avait commencé.* » Mais, comme le savent tous ceux qui ont eu le bénéfice de rédiger un texte devant lui être soumis, aucun mot, aucune virgule n'échappait à sa vigilance.

À l'École, son action et son attention ne se limitent évidemment pas à ses thésards, ni aux seuls mathématiciens. Il donne chaque année un cours aux trois promotions, et donc à tous les scientifiques en première année. Écouter un cours de Cartan ne laisse pas indifférent. Jean-Pierre Serre en témoigne : *« Je suis entré à l'ÉNS en 1945 et pendant les deux premières années*[8] *je n'ai eu droit qu'à des cours par Bouligand et Janet, qui étaient aussi peu enthousiasmants que possible (ceux de la Sorbonne n'étaient pas meilleurs). Ce n'est que dans ma dernière année (la 3e) que j'ai eu des cours de Cartan, accompagnés d'un séminaire. La différence était saisissante : enfin quelqu'un qui racontait des maths !* » Pour Gérard Debreu (promotion 1941), prix Nobel d'économie en 1983 : *« Of all the teachers I had during that period, Henri Cartan was the most influential. Indirectly, N. Bourbaki also fashioned my mathematical taste.* »

Cartan suit chaque élève attentivement, comme en témoignent ses célèbres petits carnets, restés confidentiels, dans lesquels il conserve les notes obtenues aux devoirs qu'il pose, les impressions qu'il tire de leurs exposés, etc. C'est ainsi que l'archicube physicien Etienne Guyon, nommé directeur de l'École en 1990, a vu Cartan lui faire part de ses commentaires recueillis 45 ans plus tôt. C'est aussi à l'École que se tient le séminaire Cartan, chaque lundi après-midi, pendant 15 ans, entre 1948 et 1964. Chaque année, un nouveau thème est choisi. Les exposés sont faits par Cartan, par d'autres mathématiciens établis et par des plus jeunes ; à la fin de l'année, les textes écrits, soigneusement revus par Cartan, sont dactylographiés puis publiés. Il n'y a guère de bibliothèque spécialisée dans le monde qui n'ait son exemplaire des séminaires Cartan ; ce sont, encore aujourd'hui, des documents de référence indispensables.

Évidemment, l'action de Cartan ne se limite pas au périmètre de l'École. Ce bref texte passe sous silence quantités de thèmes pour lesquels on se reportera au dossier de la SMF : son apport personnel à la recherche mathématique, son rôle clé dans Bourbaki, ses responsabilités professionnelles aux niveaux national et international, son action pour les droits de l'Homme, notamment par la création du Comité des mathématiciens qui obtiendra la libération de mathématiciens injustement emprisonnés à travers le monde par des régimes totalitaires, son engagement dans le mouvement fédéraliste européen...

J'ai connu Cartan dans beaucoup de rôles : professeur, président de mon jury de thèse, président du département de mathématiques commun Paris-Orsay lors de mon élection à Orsay, « administré » lorsqu'il est venu à Orsay rejoindre le département dont j'étais directeur, et bien d'autres. Mais il y a une chose qui me fait toujours penser à lui avec tendresse, au delà de l'immense respect qu'il attirait

[8] Comme nous l'avons dit plus haut, Cartan est à Strasbourg pendant les deux années universitaires 45-46 et 46-47.

spontanément, c'est son humour dévastateur dont les victimes ne se rendaient pas toujours compte.

Mon plus beau souvenir de lui est le suivant. Cela se passait pendant l'année 1956-1957. En prévision de l'Exposition universelle de Bruxelles 1958, un réalisateur, chargé de préparer un film sur la science française, vient tourner à l'École lors d'un cours de Cartan aux carrés mathématiciens, dont je faisais partie. Il installe sa caméra fixe au fond de la salle, tourne un moment en silence, puis interrompt Cartan :

> *« Monsieur le Professeur, excusez-moi, mais il ne faut pas que vous écriviez sur la droite du tableau, car cela sort du champ. »*
>
> *« Impossible »* , lui répond imperturbablement Cartan, *« si je dois écrire une longue suite exacte, »* (c'était un cours de topologie, avec d'immenses diagrammes pleins de flèches qui remplissaient le tableau) *« je n'y penserai pas et je dépasserai. »*

Une longue discussion collective s'ensuit, où chacun fournit une solution si-possible abracadabrante, et d'où ressort *in fine* la décision de faire s'allonger un élève [9] en travers devant le tableau, en dessous du champ de la caméra, pour marquer la limite. Le cours reprend. Heureusement le cinéaste au fond ne voit que nos dos, car nous avons de la peine à rester impassibles. Un peu plus tard, il intervient à nouveau et s'approche du tableau :

> *« Excusez-moi, Monsieur le Professeur, mais si vous mettiez une flèche de ce côté-ci, par exemple là, cela ferait une image plus équilibrée. »*
>
> *« Mais comment voulez-vous qu'il y ait une flèche là : cela voudrait dire qu'on pourrait envoyer ce groupe-ci dans celui-là. Or, si on prend l'exemple d'une sphère... »*
>
> *« Monsieur le Professeur, ce n'est pas du tout ce que je voulais dire. Je voulais simplement faire remarquer que l'image sera très déséquilibrée. »*
>
> *« Ce n'est rien. Je vais vous expliquer. Tout le monde peut comprendre : prenez une sphère... »*

Et ainsi de suite...

C'est pourquoi je pense que Cartan aurait apprécié certains titres de sa nécrologie dans les journaux américains comme ceux-ci :

« Henri Cartan, a mathematician known for meticulous proofs ... » ,
« Founder of the Secret Society of Mathematicians » ,
et surtout la première phrase de celui-là :
« Henri Cartan, 104, [...], died Aug. 13 in Paris. No cause of death was reported. »

[9] À mon souvenir, Pierre Kaplan.

Des problèmes aux structures : Henri Cartan et les problèmes de Cousin

Renaud Chorlay[1]

Les structures ne sont immuables ni dans leur nombre ni dans leur essence ; il est très possible que le développement ultérieur des mathématiques augmente le nombre des structures fondamentales, en révélant la fécondité de nouveaux axiomes, ou de nouvelles combinaisons d'axiomes, et on peut d'avance escompter des progrès décisifs de ces inventions de structures (...). ([2] p.45)

Ainsi Nicolas Bourbaki soutient-il, dans son texte sur l'Architecture des mathématiques, que les structures ne sont pas seulement des outils d'organisation et de clarification d'un divers mathématique donné par ailleurs ; bien plus, l'invention de structure s'ajoute à la gamme des gestes du mathématicien au travail. Rien dans ce texte célèbre ne laisse toutefois entrevoir comment l'on invente des structures, ni en quoi cela contribue directement à la résolution de problèmes. Le cas du travail de Henri Cartan sur les « problèmes de Cousin » éclaire remarquablement bien cet aspect : c'est à partir d'une famille de problèmes bien connus en théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes que Cartan introduit en 1940-44 une nouvelle structure, qui sera décrite quelques années plus tard comme celle de faisceau analytique cohérent. La rencontre, en 1952, entre cette ligne de recherche et une cohomologie des faisceaux jusque là développée dans un cadre plus purement topologique marque une étape importante dans le développement des mathématiques au XX^{e} siècle.

Des problèmes qui résistent

Cartan présente ainsi, dans une note aux Comptes Rendus de 1934, les deux « problèmes de Cousin » :

– *Premier problème de Cousin*

On suppose que le domaine considéré D est recouvert à l'aide d'une infinité dénombrable de domaines partiels D_i intérieurs à D, et que, dans chaque D_i, on a défini une fonction méromorphe f_i ; on suppose en outre que, chaque fois que deux domaines D_i et D_j ont une partie commune D_{ij}, la différence $f_i - f_j$ est holomorphe dans D_{ij}. On se propose de trouver une fonction F, méromorphe dans D, et telle que, dans chaque D_i, la différence $F - f_i$ soit holomorphe.

– *Deuxième problème de Cousin*

Mêmes hypothèses que pour le premier, sauf que les f_i sont remplacées par des φ_i holomorphes (dans D_i), et que, dans chaque D_{ij}, le quotient $\varphi_i : \varphi_j$ est supposé holomorphe et jamais nul. On se propose de trouver une fonction φ, holomorphe dans D, et telle que, dans chaque D_i, le quotient $\Phi : \varphi_i$ soit holomorphe et non nul. ([3] p.1285).

[1] Post-doctorant auprès de la Chaire d'excellence senior ANR *Ideals of Proof* (Professeur Michael Detlefsen), rattaché à l'équipe REHSEIS (UMR 7219 CNRS – Université Paris VII).

On peut formuler les problèmes plus géométriquement, en disant qu'on cherche dans le premier cas une fonction méromorphe de singularités données, dans le second cas une fonction holomorphe de lieu des zéros donné (avec multiplicités). À ces deux problèmes s'ajoute le « problème de Poincaré » : peut-on mettre toute fonction méromorphe dans un domaine D sous forme de quotient de deux fonctions holomorphes dans D ? Poincaré avait résolu le problème par l'affirmative dans le cas $D = \mathbf{C}^2$, dans un article de 1883 [25]. Il généralisait ainsi au cas de deux variables d'un théorème démontré récemment pour une variable par Weierstrass. Reposant sur des techniques de théories du potentiel annonçant sa méthode du balayage, la démonstration de Poincaré consistait à résoudre le deuxième problème de Cousin pour $\mathbf{C}^2$: si F est la fonction méromorphe donnée, le problème de Poincaré est résolu si l'on sait construire une fonctions holomorphe G telle que FG soit holomorphe dans $\mathbf{C}^2$; construire G, c'est construire une fonction holomorphe de lieu de zéros donné (avec multiplicités), correspondant au lieu singulier de F. Ainsi dans un domaine où le second problème de Cousin admet toujours une solution, le problème de Poincaré est toujours résoluble.

C'est Pierre Cousin qui, dans sa thèse soutenue en 1895 [13], formule parallèlement les trois problèmes et démontre qu'ils sont toujours résolubles dans les polycylindres[2] de dimension finie quelconque. La restriction à ce type de domaines lui permet de s'appuyer essentiellement sur des techniques relatives aux fonctions d'une seule variable complexe ; un logarithme permet de passer de l'étude du premier problème de Cousin (problème additif) à celle du second (problème multiplicatif), pour peu qu'on arrive à contrôler la multiformité. Ces théorèmes sont rapidement intégrés dans les monographies de référence sur la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, par exemple dans l'article de synthèse que W.F. Osgood rédige en 1901 pour l'*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften* [24].

Il semble que Cousin ait été un peu optimiste sur son contrôle de la multiformité des fonctions auxiliaires introduites au moyen d'un logarithme complexe, mais le défaut de son argumentation n'est apparu qu'assez tard, et indirectement : en travaillant sur le problème de Poincaré (avec hypothèse de coprimalité), T.H. Gronwall trouve en 1913 un contre-exemple aux résultats de Cousin. Un travail d'analyse des preuves de Cousin, mené avec Osgood, conduit en 1917 à la conclusion suivante [16] : la démonstration relative au premier problème est valide ; la démonstration relative au second problème (d'où dérive la solution du problème de Poincaré) n'est valide que dans les polycylindres dont au plus l'une des composantes n'est pas simplement connexe. Dans le cas contraire, non seulement la démonstration de Cousin introduit des fonctions auxiliaires multiformes là où Cousin pensait avoir éliminé toute multiformité, mais le théorème n'est tout simplement pas valide : Gronwall peut alors exhiber son contre-exemple au théorème de Poincaré (avec coprimalité) dans le produit de deux surfaces annulaires ($1 < |z| < 2$).

Dans la note de 1934 citée plus haut, un des objectifs de Cartan était de reprendre cette famille de problèmes dans des domaines plus généraux que les polycylindres, où l'« on s'aperçoit que les théorèmes de Cousin ne sont pas vrais pour tous

[2] « polycylindre » désigne un produit d'ouverts ; chaque variable complexe peut donc varier dans « son » domaine, indépendamment des autres.

les domaines, mêmes simplement connexes » ([3] p.1286). Pour ces domaines non polycylindriques, Cartan cherche à remplacer l'intégrale de Cauchy par l'« intégrale de Weil » [28]. Cartan et Weil reconnaissent toutefois bientôt que son existence n'est pas suffisamment assurée au delà de domaines définis par des inégalités polynomiales : le cas des domaines d'holomorphie[3], visé par Cartan, semble hors d'atteinte.

La longue résistance des problèmes de cette famille est illustrée par la synthèse que H. Behnke et K. Stein rédigent en 1937 pour l'union des mathématiciens allemands. L'accumulation de questions ouvertes, de résultats partiels, d'exemples et de contre-exemples élémentaires ou complexes est résumée en fin d'article par le tableau suivant ([1] p.192) :

	Cousin 1	Cousin 2	Poincaré	Möglich ?
1	+	+	+	+
2	+	+	-	-
3	+	-	+	-
4	+	-	-	+
5	-	+	+	+
6	-	+	-	-
7	-	-	+	+
9	-	-	-	+

La ligne 2, par exemple, se lit ainsi : il est impossible que les problèmes de Cousin 1 et 2 soient universellement résolubles (i.e. pour toutes données) dans un domaine et que le théorème de Poincaré n'y soit pas universellement résoluble (c'est le classique Cousin 2 $\Rightarrow$ Poincaré). La ligne 5 indique qu'on dispose d'un exemple de domaine dans lequel Cousin 2 est universellement résoluble, mais pas Cousin 1.

Les premières percées importantes sur le front des problèmes de Cousin viennent du Japon, avec K. Oka. C'est Cousin 1 qui cède le premier. Oka évite le recours à l'intégrale de Weil en décrivant ses domaines rationnellement convexes comme des sous-variétés analytiques de polycylindres (ce « truc » jouera un rôle plus loin), et établit que Cousin 1 est universellement résoluble dans ces domaines [20]. L'approximation des domaines d'holomorphie par des domaines rationnellement convexes permet de leur étendre ce résultat en 1937 [21].

On savait depuis le travail de Gronwall que les choses n'étaient pas si simples pour Cousin 2. Quelque semblables que puissent paraître les deux problèmes, la topologie du domaine joue un rôle dans le second qu'elle ne semble pas jouer dans le premier... quant à savoir quel rôle exactement, peu d'éléments sont disponibles en 1937 encore ; la tactique de Gronwall et Osgood avait été d'ajouter des hypothèses de simple connexité (sur toutes les composantes du polycylindre, sauf au plus une) pour éviter les problèmes topologiques plus que pour les étudier. C'est Oka [22] qui apporte les premières lumières sur ces délicates questions, en étudiant les liens entre

[3] Cartan présente la notion de « domaine d'holomorphie » de la manière la plus directe : « le domaine total d'existence d'une certaine fonction holomorphe » [3] p.1286.

Cousin 2 et son analogue purement topologique (le « problème généralisé ») : trouver une fonction continue de lieu de zéros localement donné par l'annulation d'une fonction continue[4]. Le problème généralisé étant purement topologique, l'étude du lien entre les deux problèmes permet de cerner le rôle de la topologie. Oka démontre en 1938 que « Quand D est un domaine d'holomorphie, s'il existe une solution non-analytique, les solutions analytiques le sont aussi » (entendre : existent aussi [22] p.8) ; ainsi, dans un tel domaine, non seulement Cousin 2 comporte un élément topologique, mais il est essentiellement topologique. Une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution continue est alors formulée par Oka en termes de « zéros balayables » ([22] p.15) : un tel lieu de zéros Σ dans D est balayable s'il existe un lieu de zéros continu dans $D \times [0,1]$ de restriction Σ dans $D \times \{0\}$, et de restriction vide dans $D \times \{1\}$[5].

Du problème à la structure

Henri Cartan reprend l'étude de Cousin 2 dans deux articles, ou plutôt un article en deux parties : *Sur les matrices holomorphes de n variables complexes* [4], *Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes* [5]. Il y introduit une nouvelle structure en mathématiques – celle d'idéal de fonctions holomorphes – et définit un programme de recherche, celui de « l'étude globale des idéaux de fonctions holomorphes ».

L'énoncé des problèmes de Cousin avait été remarquablement stable depuis Cousin. C'est par une reformulation à saveur algébrique que Cartan ouvre ses articles : *« (...) Construire une fonction holomorphe ayant des zéros donnés dans un domaine donné. »* Il faut, bien entendu, préciser ce qu'on entend par « zéros donnés ». Nous appellerons *donnée de Cousin* dans un domaine D la donnée, en chaque point x de D, d'une fonction f_x holomorphe au point x, ces fonctions satisfaisant à la condition suivante : tout point a de D possède un voisinage V dans lequel f_a est holomorphe et en tout point x duquel le quotient f_x/f_a est holomorphe et $\neq 0$. Cette dernière condition exprime que, dans l'anneau des fonctions holomorphes au point x, f_x et f_a engendrent le même idéal. Le problème posé par Cousin est alors : pour toute donnée de Cousin dans le domaine D, existe-t-il une fonction f, holomorphe dans D, telle que, pour tout point x de D, le quotient f/f_x soit holomorphe et $\neq 0$. ([5] p.149)

Ainsi formulé, Cousin 2 apparaît comme un représentant d'une famille beaucoup plus large de problèmes : *« Remarquons à ce propos que le "deuxième problème de Cousin ? se rapporte à l'étude globale des idéaux qui ont, au voisinage de chaque point, une base formée d'une seule fonction. En dehors de ce cas particulier, on n'a pas encore abordé, me semble-t-il, l'étude globale des idéaux. »* ([4] p.2). L'étude, nous dit Cartan, n'a pas à se restreindre aux idéaux principaux, ou, géométriquement parlant, aux sous-variétés analytiques de codimension (complexe) 1.

[4] Pour obtenir un analogue continu du problème analytique, Oka suppose que le lieu des zéros est d'intérieur vide ([21] p.9).

[5] Cette reformulation est due à H. Cartan, dans : Oka K., 1984. Collected papers (R. Remmert (ed.), R. Narasimhan (trans.)), Springer, NY, 1984.

Les liens avec les problèmes de Cousin sont multiples. Bien sûr, on voit dans la citation précédente que la nouvelle structure est introduite à partir d'une reformulation de ce que sont les « données de Cousin », mais deux autres liens sont à signaler. Premièrement, le nouveau programme de recherche vise l'étude d'un certain nombre de questions générales telles que : une fonction holomorphe sur une sous-variété analytique d'un domaine d'holomorphie est-elle toujours la restriction d'une fonction holomorphe sur ce domaine ? Si une famille finie de fonctions holomorphes définies sur un domaine d'holomorphie est sans zéro commun, l'idéal qu'elle engendre dans l'anneau des fonctions holomorphes contient-il 1 (*Nullstellensatz* analytique, que Cartan décrit comme un analogue de Cousin 2 pour une sous-variété analytique vide et non de codimension 1) ? Ces deux problèmes proviennent de l'étude des problèmes de Cousin : le premier a été soulevé par le « truc » d'Oka ; du second dépend la démonstration de l'existence de l'intégrale de Weil.

Deuxièmement, Cartan isole dans les méthodes de démonstration communes à Cousin et Oka une « opération élémentaire » : « pour passer de *données locales* à une *existence globale*, on procède à des assemblages successifs de morceaux » ([5] p.151). Cette étape élémentaire de recollement est triviale en codimension 1 mais repose dans le cas général sur un lemme de prolongement de matrices holomorphes de déterminant nulle part nul : c'est à la démonstration de ce lemme central qu'est consacré l'article de 1940.

Ainsi, la reformulation en partie algébrique d'un problème ancien et résistant (Cousin 2) permet-elle de définir un nouveau programme de recherche qui, bien que formulé comme étude de la nouvelle « structure », englobe une large famille de problèmes classiques, et repose sur la généralisation d'un pas de démonstration déjà familier.

L'étude de cette nouvelle structure abstraite conduit à deux types de questions. Premièrement, et c'est bien là l'enjeu de l'étude « globale », on doit étudier le lien entre l'idéal (ou le module) de fonctions holomorphes sur un domaine donné et la famille des idéaux « ponctuels » [6] qu'il induit en chaque point ; ou encore, on doit étudier le lien entre les idéaux associés à deux domaines, l'un inclus dans l'autre. Cartan souligne à ce propos l'aspect suivant :

Toute fonction holomorphe sur E peut être considérée comme une fonction holomorphe sur n'importe quel ensemble E' contenu dans E. Il en résulte que tout idéal sur E engendre un idéal sur E', lorsque $E' \subset E$; il importe de ne pas confondre ces deux idéaux : le second se compose de toutes les combinaisons linéaires finies, à coefficients holomorphes sur E', des fonctions du premier idéal. Ainsi, un idéal porte en puissance une foule d'idéaux, un sur chaque sous-ensemble de E. ([5] p.153)

Il s'en faut de beaucoup que les fonctions de l'idéal engendré sur un sous-domaine soient de simples restrictions de fonctions holomorphes dans E ; ce que l'on sait, c'est que les fonctions de l'idéal engendré sont combinaisons linéaires à coefficients holomorphes dans E' de restrictions de fonctions holomorphes dans E. Dans des termes qui ne sont pas ceux de Cartan en 1940-44 : le changement

[6] La notion d'anneau des fonctions holomorphes en un point, ou associée à un sous-domaine, n'est pas explicitée en 1940. Elle l'est en 1944, sans que des notions de limites inductives ou d'anneau local soient utilisées. La notion de limite inductive est par contre explicitement utilisée en 1950 ([7] p.31).

de domaine implique un changement d'anneau de base, et c'est là que réside la question fondamentale. On doit aussi noter que cette reformulation des problèmes de Cousin affecte aussi la notion de solution au problème de Cousin. Dans le problème classique, une solution à Cousin 2 était une fonction holomorphe (de zéros donnés) ; dans le nouveau cadre, une solution est un idéal de fonctions globales de lieu de zéros donné : le problème est affaibli, on admet les solutions formées de familles finies de fonctions globales.

Une deuxième famille de questions naît dans le cadre abstrait de l'étude de structure. Lorsqu'une « donnée de Cousin » est définie à partir d'un recouvrement ouvert, la famille d'idéaux ponctuels vérifie automatiquement une propriété qui n'est pas contenue dans la définition d'une famille d'idéaux ponctuels de fonctions holomorphes. Comme Cartan le note en 1950, « (...) avant de pouvoir faire le passage du local au global, il faut approfondir les propriétés locales, c'est-à-dire voir comment les propriétés ponctuelles s'organisent localement » ([7] p.30). C'est ici qu'il introduit la notion abstraite de cohérence :

Définition. Soit E un ensemble quelconque de l'espace à n dimensions complexes, et soit q un entier $\geqslant 1$ donné une fois pour toute. Supposons qu'à chaque point x de E ait été attaché un module M_x (à q dimensions) de fonctions holomorphes au point x. Nous disons que les modules ponctuels M_x forment un système cohérent, si tout point a de E possède un voisinage V sur lequel existe un module (à q dimensions) qui, en tout point x de l'intersection $V \cap E$, engendre le module ponctuel M_x. ([5] p.156)

En 1944, Cartan reconnaît qu'il n'a pas réussi à démontrer la cohérence de ce que nous nommerions le faisceau des relations entre un nombre fini de fonctions holomorphes dans un domaine ([5] p.160). Ces questions de cohérence s'imposent comme un chantier prioritaire : la cohérence du faisceau associé à une sous-variété analytique est démontrée par Cartan en 1950 [7] ; celle du faisceau des relations par Oka [23]. Dans ce dernier article (rédigé en 1948 par Oka alors qu'il connaissait l'article de Cartan de 1940 mais pas celui de 1944) contient la version « Oka » de la structure introduite par Cartan : celle d'« idéal holomorphe de domaines indéterminés ».

Fibrés, faisceaux

À partir de 1945 les questions de topologie algébrique passent au premier plan dans les travaux de Cartan, sans interaction directe avec le programme de recherche en théorie globale des idéaux de fonctions holomorphes. L'article *Méthodes modernes en topologie algébrique* [6] marque cette réorientation ; les deux traits « modernes » soulignés par Cartan sont d'une part le recours à l'homologie de Čech – qui permet de définir des invariants pour des espaces topologiques à partir de recouvrements ouverts, sans passer par des complexes et des triangulations – et, d'autre part, la formulation d'un unique théorème central algébrique en termes de suite exacte longue de groupes[7].

[7] Le terme de « suite exacte longue » est anachronique. Il n'y a pas non plus de flèches dans la présentation de Cartan en 1945 : il décrit une « suite de représentations canoniques... $\Gamma^r(F), \Gamma^r(E), \Gamma^r(U), \Gamma^{r-1}(E), \Gamma^{r-1}(E)$... » (où $U = E - F$) et explique le lien, pour trois groupes consécutifs, entre des images et des éléments annulés ([6] p.6).

Les problèmes de Cousin ne demeurent pas entièrement intouchés par la vague topologique, mais la première rencontre réelle n'est peut-être pas celle qu'on imagine. Dans une conférence de 1950 à l'ICM sur les *Problèmes globaux dans théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes*, Cartan présente une nouvelle formulation de Cousin 2 :

Une donnée de Cousin dans B définit un nouvel espace topologique E que voici : un point de E sera, par définition, un couple (z, f) formé d'un point z de B et d'un élément générateur f de l'idéal principal I_z attaché au point z ; on identifiera les couples (z, f) et (z', f') si $z = z'$ et si le quotient f/f' (qui est holomorphe et $\neq 0$ au point z) est égal à un au point z. Faisons opérer, dans cet espace E, le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$ des nombres complexes $\neq 0$. (...) Dans le langage de la topologie moderne, E est un espace fibré principal, de groupe $\mathbf{C}^*$, ayant B pour base. L'hypothèse selon laquelle les idéaux I_z forment un système cohérent exprime que chaque fibre possède un voisinage isomorphe au produit $U \times \mathbf{C}^*$ d'un ensemble ouvert U de B par la fibre $\mathbf{C}^*$; ceci permet de définir, sur E, une structure de variété analytique-complexe. (...) On voit aussitôt qu'une solution du problème de Cousin définit une section analytique de cet espace fibré. (...) Ainsi, pour que le problème de Cousin ait une solution (...) notre espace fibré E doit être trivial ; ([8] p.161)

Quoique cette structure d'espace fibré principal ait été introduite par Ehresmann et Feldbau quelques années auparavant [14], c'est à André Weil que Cartan doit cette reformulation de problèmes classiques au moyen de la notion de fibré. C'est du côté de la géométrie algébrique que Weil commençait à introduire systématiquement les structures de fibré (la variété de base étant munie de la topologie de Zariski) pour reformuler des problèmes classiques et établir des ponts avec la topologie. On en trouve une trace dans la conférence de 1949 intitulée *Fibre-spaces in Algebraic Geometry* [29]. Notons que dans cette formulation du problème de Cousin, la notion de *solution* redevient la notion classique : on cherche une fonction (maintenant vue comme section d'un fibré) et non un idéal de l'anneau des fonctions globales. Autre avantage : l'existence d'une question purement topologique sous-jacente à la question analytique apparaît ici en toute clarté.

Ce n'est qu'un peu plus tard qu'a lieu la rencontre réelle avec la cohomologie des faisceaux[8]. On doit constater que le programme de recherche sur les idéaux de domaines indéterminés ne se coulait pas directement dans le cadre de la cohomologie des faisceaux. Quelque « structural » qu'il ait été, le cadre proposé par Cartan en 1940-44 n'introduisait aucune notion de morphisme entre modules analytiques ; aucune notion d'image, de noyau ou de quotient n'intervenait, ne serait-ce que dans la définition du faisceau des relations. On peut faire l'hypothèse suivante : l'introduction d'anneaux ou de modules quotients aurait fait quitter le sol « concret » des familles de « vraies » fonctions, qui, dans la théorie de 1940-44, sont les éléments des idéaux et modules. Du côté des faisceaux c'est déjà le schéma général de mesure de l'inexactitude à droite du foncteur des sections qui organise l'exposé, comme

[8] Il ne peut être question de retracer ici en quelques lignes l'histoire des débuts de la cohomologie des faisceaux sur la période 1945-1952 ; nous renvoyons aux études de référence sur ce point ([15], [18], [19]). Par ailleurs, soulignons que le choix du travail de Henri Cartan comme fil directeur de la narration nous conduit à passer sous silence les travaux allemands de la même période, en particulier ceux de K. Stein.

on le voit dans le séminaire Cartan de 1950-51, consacré aux cohomologies des groupes et des faisceaux.

Des extraits de la correspondance entre Cartan et Serre montrent le lien en train de se faire, au printemps 1952. Dans une lettre datée du 30 avril 1952 ([27] p.278), Serre reformule les problèmes de Cousin au moyens des faisceaux (de modules) des fonctions holomorphes et méromorphes, ainsi que des faisceaux (de groupes multiplicatifs) des fonctions holomorphes (inversibles) et méromorphes (non nulles). Il énonce la condition de résolubilité de Cousin 1 et 2 en termes d'annulation de certains H^1 et énonce encore comme une conjecture l'annulation des H^n $(n \geqslant 2)$ du faisceau structural pour un domaine d'holomorphie. Le truc classique consistant à utiliser une exponentielle pour relier les deux problèmes de Cousin est aussi repris sous forme de suite exacte, les aspects purement topologique étant capturés dans $H^2(X, \mathbf{Z})$.

Ces conjectures sont devenues des théorèmes lorsque Cartan et Serre rédigent à l'automne 1952 les derniers exposés du séminaire Cartan consacré aux fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Le théorème A consiste en une reformulation dans le langage des faisceaux (mais pas de la *cohomologie* des faisceaux) du principal résultat du programme né en 1940 :

Théorème A. Soit X une variété de Stein[9], ou un compact d'une variété de Stein identique à son enveloppe. Soit F un faisceau analytique cohérent sur X. Alors, pour tout point $x \in X$, l'image, dans le O_x-module I_x, du module des sections $H^0(X, I)$, engendre I_x pour sa structure de module sur O_x. ([10] p.7)

Quoique ce soient les mêmes outils mis au point par Cartan qui permettent de démontrer le théorème B, l'idée de travailler au-delà de H^1 semble être celle de Serre :

Théorème B. Soit X une variété de Stein, ou un compact d'une variété de Stein identique à son enveloppe. Soit F un faisceau analytique cohérent sur X. Alors les modules de cohomologie $H^q(X, F)$ sont nuls pour tout entier $q \geqslant 1$. ([10] p.7)

Dans l'exposé consacré aux applications de ces théorèmes, Serre reformule les problèmes de Cousin en termes de surjectivité de l'application entre espaces de sections globales d'un faisceau et d'un faisceau quotient : un classique « système de parties principales » est interprété comme une section du faisceau quotient $\mathbf{M}/\mathbf{O}$, où $\mathbf{M}$ est le faisceau des germes de fonctions méromorphes, et $\mathbf{O}$ faisceau structural ([26] p.2) ; un diviseur (non nécessairement positif) est interprété comme une section globale du faisceau quotient $\mathbf{G}/\mathbf{F}$, où $\mathbf{G}$ est le faisceau multiplicatif des germes de fonctions méromorphes, et $\mathbf{F}$ celui des germes de fonctions holomorphes inversibles ([26] p.11).

Dans cette rencontre entre les deux lignes de recherche – théorie des idéaux de fonctions analytiques d'une part, cohomologie des faisceaux d'autre part – il semble que la première apporte les questions et la seconde les réponses. Il faut toutefois souligner que c'est la première qui apporte la notion de cohérence, ainsi

[9] Dans [9] : Après avoir défini la notion d'enveloppe d'holomorphie $\bar{K}$ d'un compact K, Cartan appelle variété de Stein une variété analytique complexe E, réunion dénombrable de compacts, et satisfaisant aux trois conditions : (α') « tout compact $K \subset E$ possède un voisinage ouvert V tel que l'intersection $V \cap \bar{K}$ soit compacte », (β) les fonctions holomorphes sur E séparent les points, (γ) tout point de E possède des coordonnées locales constituées par des éléments de $H(E)$, où $H(E)$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes sur E.

que l'idée de changement d'anneau de base associé à un changement d'ouvert ; on voit l'importance de cette rencontre pour les développements ultérieurs de la géométrie algébrique.

Concluons sur une note humoristique. Cartan et Serre présentent leur nouvelle théorie lors du *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables complexes*, à Bruxelles en mars 1953. R. Remmert rapporte qu'après avoir entendu leurs exposés, un auditeur allemand aurait commenté :

« Nous avons des arcs et des flèches ; les Français, eux, ont des tanks. » [10]

Références

[1] Behnke H., Stein K., 1937. Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null und Polstellenflächen, Jahr. DM-V 47, 177-193.
[2] Bourbaki N., 1948. L'architecture des mathématiques, in F. Le Lionnais (ed.) Les grands courants de la pensée mathématique, Cahiers du Sud, 1948. pp.35-47.
[3] Cartan H., 1934. Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes, Compt. Rend. Acad. Sci. 199, 1284-1287.
[4] Cartan H., 1940. Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, Jour. Math. Pures Appl. 19, 1-26.
[5] Cartan H., 1944. Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes, Ann. Sci. ÉNS 61 3e série, 149-197.
[6] Cartan H., 1945. Méthodes modernes en topologie algébrique, Com. Math. Helv. 18, 1-15.
[7] Cartan H., 1950. Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, Bull. SMF 78, 29-64.
[8] Cartan H., 1950. Problèmes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, Proc. ICM (Cambridge Mas. 30.8-6.9 1950), AMS, Providence (R.I)., 1952. pp.152-164.
[9] Cartan H., 1951-52. Théorie de la convexité (II), Sem. Cartan, É.N.S. Paris, 1951-52, exposé 9.
[10] Cartan H., 1951-52. Faisceaux analytiques sur les variétés de Stein, Sem. Cartan, É.N.S. Paris, 1951-52, exposé 18.
[11] Chorlay R., 2007. L'émergence du couple local-global dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux (1851-1953), Thèse d'histoire des mathématiques, Université Denis Diderot, Paris, 2007.
[12] Chorlay R., 2009. From Problems to Structures : The Cousin Problems and the Emergence of the Sheaf Concept, Archive for History of Exat Sciences, à paraître.
[13] Cousin P., 1895. Sur les fonctions analytiques de *n* variables complexes, Acta Math. 19, 1-61.
[14] Ehresmann C., 1941. Espaces fibrés associés, Compt. Rend. Acad. Sci. 213, 762-764.
[15] Gray John, 1979. Fragments in the History of Sheaf Theory, in M.P. Fourman, C.J Mulvey, D.S. Scott (eds.), Application of Sheaves, London Mathematical Society - Springer, NY, 1979. pp.1-79.
[16] Gronwall T., 1917. On the expressibility of a uniform function of several complex variables as the quotient of two functions of entire character, Trans. AMS 18, 50-64
[17] Hilton P., Hirzebruch F., Remmert R. (eds.), 1991. Miscellanea Mathematica, Springer, Berlin, 1991.
[18] Houzel C., 1990. A Short History : les débuts de la théorie des faisceaux, in M. Kashiwara, P. Schapira, Sheaves on Manifolds, Springer, New-York, 1990. pp. 7-22.
[19] Houzel C., 1998. Histoire de la théorie des faisceaux, in SMF, Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXe siècle, Séminaires et Congrès 3, Paris, 1998. pp.101-119.
[20] Oka K., 1936. Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles, Journal of Science of the Hiroshima University 6, 245-255
[21] Oka K., 1937. Domaines d'holomorphie, Journal of Science of the Hiroshima University 7, 115-130

[10] *« Wir haben Pfeil une Bogen, die Franzosen haben Panzer »* ([16] p.277)

[22] OKA K., 1939. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables III. Deuxième problème de Cousin, Journal of Science of the Hiroshima University 9, 7-19
[23] OKA K., 1950. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables VII. Sur quelques notions arithmétiques, Bull. SMF 78, 1-27
[24] OSGOOD W., 1901. Analysis der komplexen Grössen. Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen a) einer und b) mehrerer komplexen Grössen, Encyclopädie der mathematischen Wisenschaften II.2 (1921-1928), Leipzig, Teubner, 1901-1921. pp.1-114
[25] POINCARÉ H., 1883c. Sur les fonctions de deux variables, Compt. Rend. Acad. Sci. 96, 238-240
[26] SERRE J.-P., 1951-52. Application de la théorie générale à divers problèmes globaux, Sem. Cartan, É.N.S Paris, 1951-52, exposé 20.
[27] SERRE J.-P., 1991. Les petits cousins (lettres à H. Cartan, 1950-1953), in [Hilton et alii 1991] p.278-291.
[28] WEIL A., 1932. Sur les séries de polynômes de deux variables complexes, Compt. Rend. Acad. Sci. 194, 1304-1305.
[29] WEIL A., 1949. Fibre-spaces in Algebraic Geometry, Algebraic Geometry Conference (mimeographed), University of Chicago, 1949. pp.55-59 = Œuvres Scientifiques I (1926-1951), Springer, New-York, 1979. p. 411-413.

Divers aspects des opérations de Steenrod[1]

Jean Lannes

à Henri Cartan

Dans les deux premiers paragraphes on analyse les structures de l'homologie et de la cohomologie singulières à coefficients dans $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_2$ (attention le deuxième est un peu technique !). Au troisième on montre les opérations de Steenrod en action dans deux questions de topologie algébrique, le problème de l'invariant de Hopf un et la conjecture de Sullivan sur les points fixes homotopiques. Dans le dernier paragraphe on traite brièvement de la définition des opérations de Steenrod et de la démonstration de leurs propriétés essentielles.

1. Structure de l'homologie singulière

Le foncteur « n-ième groupe d'homologie » H_n, $n \in \mathbb{N}$, associe à un espace topologique X un groupe abélien $\mathrm{H}_n X$ et à une application continue entre espaces topologiques $f : X \to Y$ (ou plutôt à une classe d'homotopie d'une telle application) un homomorphisme de groupes abéliens $f_* : \mathrm{H}_n X \to \mathrm{H}_n Y$.

Soit k un anneau commutatif ; on introduit plus généralement des foncteurs $\mathrm{H}_n(X; k)$ et $\mathrm{H}^n(X; k)$ (appelés respectivement groupes d'homologie et de cohomologie à coefficients dans k) à valeurs dans la catégorie des k-modules. Si le groupe additif de k est sans torsion, on a $\mathrm{H}_n(X; k) = k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{H}_n X$; si k est un corps le k-espace vectoriel $\mathrm{H}^n(X; k)$ est dual du k-espace vectoriel $\mathrm{H}_n(X; k)$.

On note $\mathrm{H}^*(X; k)$ le k-module gradué $\{\mathrm{H}^n(X; k)\}_{n\in\mathbb{N}}$. En fait $\mathrm{H}^*(X; k)$ possède une structure plus riche que celle de k-module gradué : c'est une k-algèbre graduée

[1] Ce texte a déjà été publié à l'occasion de la journée annuelle 1997 de la SMF consacrée à Henri Cartan.

commutative ; en d'autres termes, on dispose d'un produit bilinéaire associatif $\mathrm{H}^*(X;k) \times \mathrm{H}^*(X;k) \rightarrow \mathrm{H}^*(X;k)$, noté $(u,v) \mapsto u \smile v$, avec $v \smile u = (-1)^{|u||v|} u \smile v$, $|\ |$ désignant le degré d'un élément de $\mathrm{H}^*(X;k)$.

Pour $k = \mathbb{Q}$, c'est la fin de l'histoire. On peut donner un sens à l'assertion suivante : la cohomologie rationnelle ne possède pas de structure plus riche que celle de $\mathbb{Q}$-algèbre graduée commutative (nous trichons un petit peu, il faut plutôt considérer ici la structure de coalgèbre de l'homologie, voir paragraphe suivant).

Pour $k = \mathbb{F}_p$, l'histoire continue. On se limitera aujourd'hui au cas $p = 2$.

1.1. Opérations de Steenrod en cohomologie modulo 2

Il existe des applications naturelles (les carrés de Steenrod)

$$\mathrm{Sq}^i : \mathrm{H}^n(X;\mathbb{F}_2) \rightarrow \mathrm{H}^{n+i}(X;\mathbb{F}_2)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\mathrm{Sq}^i(u+v) = \mathrm{Sq}^i u + \mathrm{Sq}^i v$;

(2) $\mathrm{Sq}^i u = 0$ pour $i > |u|$;

(3) $\mathrm{Sq}^{|u|} u = u \smile u$;

(4) $\mathrm{Sq}^0 u = u$;

(5) $\mathrm{Sq}^1 u = \beta u$, β désignant l'homomorphisme de Bockstein ;

(6) $\mathrm{Sq}^i \Sigma u = \Sigma \mathrm{Sq}^i u$, Σ désignant l'isomorphisme naturel, de degré un, de l'homologie (réduite) d'un espace (pointé) vers l'homologie (réduite) de sa suspension ;

(7) $\mathrm{Sq}^i(u \smile v) = \sum_{j+k=i} \mathrm{Sq}^j u \smile \mathrm{Sq}^k v$ (formule de Cartan) ;

(8) $\mathrm{Sq}^a \mathrm{Sq}^b = \sum_c \binom{b-c-1}{a-2c} \mathrm{Sq}^{a+b-c} \mathrm{Sq}^c$ pour $a < 2b$ (relations d'Adem).

(Les relations d'Adem ont été démontrées indépendamment, et par des méthodes très différentes, par J. Adem et H. Cartan.)

On montre que les carrés de Steenrod sont caractérisés par leur naturalité et les propriétés (2), (3), (4) et (7).

1.2. La catégorie des A-algèbres instables

Une $\mathbb{F}_2$-algèbre graduée commutative (dont le produit est noté $\smile$) munie d'opérations Sq^i vérifiant les propriétés (8), (4), (2), (7) et (3) ci-dessus est appelée une **A**-algèbre instable. La notation **A** désigne ici l'algèbre de Steenrod, c'est-à-dire la $\mathbb{F}_2$-algèbre graduée quotient de la $\mathbb{F}_2$-algèbre tensorielle en des « indéterminées » Sq^i de degré i par les relations d'Adem et la relation $\mathrm{Sq}^0 = \mathrm{Id}$; le mot instable fait référence aux propriétés (2) et (3). Les **A**-algèbres instables sont les objets d'une catégorie, notée $\mathcal{K}$, dont les morphismes sont les homomorphismes de $\mathbb{F}_2$-algèbres graduées commutant aux opérations de Steenrod.

On a tout fait pour que $\mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2)$ soit une **A**-algèbre instable. De même $\mathrm{H}_*(X;\mathbb{F}_2)$ est une **A**-coalgèbre instable ; nous ne décrirons pas en détails cette structure, disons simplement que la duale d'une **A**-coalgèbre instable est naturellement une **A**-algèbre instable. Cette fois encore il est impossible d'aller plus loin. Au prochain paragraphe nous donnerons un sens à l'assertion suivante : l'homologie modulo 2 ne possède pas de structure plus riche que celle de **A**-coalgèbre instable.

2. Structures de la cohomologie rationnelle et de la cohomologie modulo 2 (suite et fin)

Afin de préciser les assertions du paragraphe précédent concernant la cohomologie rationnelle ou modulo 2 d'un espace nous avons besoin d'introduire la notion de comonade sur une catégorie.

2.1. Les notions de monade et comonade sur une catégorie

Soit $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ la catégorie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels gradués $E = \{E^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dont le degré est noté en exposant ; les $\mathbb{Q}$-algèbres graduées commutatives sont les objets d'une sous-catégorie de $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ que l'on note $\mathcal{K}_{\mathbb{Q}}$. Le foncteur oubli $\mathcal{O} : \mathcal{K}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ admet un adjoint à gauche, le foncteur « algèbre symétrique » (version graduée) $\mathrm{Sym} : \mathcal{E}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{K}_{\mathbb{Q}}$; soit M le foncteur composé $\mathcal{O} \circ \mathrm{Sym} : \mathcal{E}_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$. L'endofoncteur M est une « monade » de $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$: on dispose de deux transformations naturelles $\mu : \mathrm{M} \circ \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ et $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}} \to \mathrm{M}$ vérifiant des axiomes analogues à ceux que vérifient la multiplication et l'élément neutre d'un monoïde (associatif avec élément neutre), voir [5]. Un « M-objet » de $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ est un objet E muni d'un $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$-morphisme $h : \mathrm{M}(E) \to E$ vérifiant des axiomes analogues à ceux que vérifient l'action d'un monoïde sur un ensemble, voir [5] ; les M-objets sont de façon évidente les objets d'une sous-catégorie de $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$. On constate ici que cette sous-catégorie coïncide avec $\mathcal{K}_{\mathbb{Q}}$: on dit que la sous-catégorie $\mathcal{K}_{\mathbb{Q}}$ de la catégorie $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ est définie par la monade M.

Autres exemples. Soit k un anneau, l'endofoncteur $k \bigotimes_{\mathbb{Z}} -$ de la catégorie des groupes abéliens possède une structure de monade et la sous-catégorie correspondante est celle des k-modules. De même la catégorie des groupes peut être définie par une monade de la catégorie des ensembles.

La notion de comonade est duale (au sens cette fois des catégories) de celle de monade ; comme précédemment à une comonade d'une catégorie est associée une sous-catégorie.

Revenons maintenant à l'homologie rationnelle ou modulo 2. Nous notons :

- $\mathcal{E}_*$ (resp. $\mathcal{E}_*^{\mathbb{Q}}$) la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels (resp. $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels) gradués $E = \{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dont le degré est noté en indice (nous sommes parfaitement conscient de ce que les catégories $\mathcal{E}^{\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{E}_*^{\mathbb{Q}}$ sont équivalentes !) ;
- $\mathcal{K}_*$ (resp. $\mathcal{K}_*^{\mathbb{Q}}$) la catégorie des **A**-coalgèbres instables (resp. des $\mathbb{Q}$-coalgèbres graduées commutatives).

On vérifie que les sous-catégories $\mathcal{K}_*$ et $\mathcal{K}_*^{\mathbb{Q}}$ des catégories $\mathcal{E}_*$ et $\mathcal{E}_*^{\mathbb{Q}}$ peuvent être définies par des comonades.

Soit $\mathcal{H}$ la catégorie homotopique des espaces topologiques (ses objets sont les espaces topologiques et ses morphismes sont les classes d'homotopie d'applications continues). Pour pouvoir formuler ce qui va suivre on distingue (provisoirement) les foncteurs homologie modulo 2 définis sur $\mathcal{H}$ et à valeurs respectivement dans $\mathcal{E}_*$ et $\mathcal{K}_*$ par les notations $\mathrm{H}_*(-;\mathbb{F}_2)$ et $\mathrm{H}_*^{\mathrm{e}}(-;\mathbb{F}_2)$; on introduit de même la notation $\mathrm{H}_*^{\mathrm{e}}(-;\mathbb{Q})$. Le foncteur $\mathrm{H}_*(-;\mathbb{F}_2) : \mathcal{H} \to \mathcal{E}_*$ est donc le composé du foncteur $\mathrm{H}_*^{\mathrm{e}}(-;\mathbb{F}_2) : \mathcal{H} \to \mathcal{K}_*$ et du foncteur oubli $\mathcal{K}_* \to \mathcal{E}_*$; même chose pour l'homologie rationnelle. En fait ces factorisations sont optimales :

Théorème 1. *Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie de $\mathcal{E}_*^{\mathbb{Q}}$ définie par une comonade. Si le foncteur $\mathsf{H}_*(-;\mathbb{Q}) : \mathcal{H} \to \mathcal{E}_*^{\mathbb{Q}}$ est le composé d'un foncteur $F : \mathcal{H} \to \mathcal{C}$ et du foncteur oubli $\mathcal{C} \to \mathcal{E}_*^{\mathbb{Q}}$ alors $\mathcal{K}_*^{\mathbb{Q}}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ et le foncteur F est le composé du foncteur $\mathsf{H}_*^{e}(-;\mathbb{Q}) : \mathcal{H} \to \mathcal{K}_*^{\mathbb{Q}}$ et du foncteur oubli $\mathcal{K}_*^{\mathbb{Q}} \to \mathcal{C}$.*

Mutatis mutandis,

Théorème 2. *Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie de $\mathcal{E}_*$ définie par une comonade. Si le foncteur $\mathsf{H}_*(-;\mathbb{F}_2) : \mathcal{H} \to \mathcal{E}_*$ est le composé d'un foncteur $F : \mathcal{H} \to \mathcal{C}$ et du foncteur oubli $\mathcal{C} \to \mathcal{E}_*$ alors $\mathcal{K}_*$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ et le foncteur F est le composé du foncteur $\mathsf{H}_*^{e}(-;\mathbb{F}_2) : \mathcal{H} \to \mathcal{K}_*$ et du foncteur oubli $\mathcal{K}_* \to \mathcal{C}$.*

Indications sur les démonstrations. Les démonstrations de ces deux théorèmes sont formellement les mêmes. Cependant, l'ingrédient essentiel, le calcul de la cohomologie rationnelle (resp. modulo 2) des espaces d'Eilenberg-Mac Lane $\mathsf{K}(\mathbb{Q}, n)$ (resp. $\mathsf{K}(\mathbb{F}_2, n)$), coûte moins cher dans le cas de l'homologie rationnelle ; dans les deux cas, ce calcul est dû à J.-P. Serre. Ci-dessous on traite seulement de l'homologie modulo 2.

Soit E un objet de $\mathcal{E}_*$, on montre qu'il existe un espace topologique $\mathsf{K}(E)$ ($\mathsf{K}(E)$ est un espace d'Eilenberg-MacLane « généralisé »), dépendant fonctoriellement de E, possédant les propriétés (1) et (2) ci-après.

(1) L'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(X, \mathsf{K}(E))$ (il s'agit donc de l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de X dans $\mathsf{K}(E)$ que l'on note aussi $[X, \mathsf{K}(E)]$) est fonctoriellement en bijection avec l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_*}(\mathsf{H}_*(X;\mathbb{F}_2), E)$.

Soit $\mathcal{O} : \mathcal{K}_* \to \mathcal{E}_*$ le foncteur oubli. Ce foncteur admet un adjoint à droite que l'on note $\mathsf{G} : \mathcal{E}_* \to \mathcal{K}_*$; $\mathcal{K}_*$ est définie par la comonade $\mathcal{O} \circ \mathsf{G}$ de $\mathcal{E}_*$. Soient $\iota : \mathsf{H}_*(\mathsf{K}(E);\mathbb{F}_2) = \mathcal{O}(\mathsf{H}_*^{e}(\mathsf{K}(E);\mathbb{F}_2)) \to E$ le $\mathcal{E}_*$-morphisme correspondant à $\mathrm{Id}_{\mathsf{K}(E)}$ *via* la bijection de (1) et $\tilde{\iota} : \mathsf{H}_*^{e}(\mathsf{K}(E);\mathbb{F}_2)) \to \mathsf{G}(E)$ le $\mathcal{K}_*$-morphisme adjoint. Le calcul de Serre évoqué ci-dessus se reformule ainsi :

(2) Le $\mathcal{K}_*$-morphisme $\tilde{\iota}$ est un isomorphisme.

Le théorème résulte maintenant formellement de (1) et (2). Nous n'en dirons pas plus (nous avons déjà infligé trop de jargon catégorique au lecteur !). Le lecteur désireux d'achever la démonstration pourra s'inspirer de la démonstration de l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ du théorème de Beck que l'on trouve dans le livre [5].

3. Les opérations de Steenrod en action

3.1. Le problème de l'invariant de Hopf un

Le « problème de l'invariant de Hopf un » peut se formuler de la façon suivante : soit $n \geqslant 1$ un entier. Existe-t-il un espace dont la cohomologie modulo 2 est isomorphe, en tant que $\mathbb{F}_2$-algèbre commutative graduée, à une « algèbre polynomiale tronquée » de la forme $\mathbb{F}_2[u]/u^3$ avec u de degré n ? On voit que la réponse est positive pour $n = 1, 2, 4, 8$ en exhibant les plans projectifs $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}_2(\mathbb{H})$ et $\mathbb{P}_2(\mathbb{C}\mathrm{a})$ ($\mathbb{C}\mathrm{a}$ pour Cayley). Le fait que la réponse soit négative pour toute autre valeur de n est le fameux théorème de J.F. Adams :

Théorème 3. *Soit $n \geqslant 1$ un entier. S'il existe un espace dont la cohomologie modulo 2 est isomorphe, en tant que $\mathbb{F}_2$-algèbre commutative graduée, à une algèbre polynomiale tronquée de la forme $\mathbb{F}_2[u]/u^3$ avec u de degré n, alors n est égal à 1, 2, 4 ou 8.*

À l'origine Adams a démontré ce théorème en utilisant, entre autres, certaines relations dans l'algèbre de Steenrod ; la « bonne » démonstration, découverte peu de temps après par Adams et Atiyah, utilise les opérations d'Adams en K-théorie qui sont à cette théorie ce que sont les opérations de Steenrod à la cohomologie modulo 2.

Cependant Adem, à l'aide des seules opérations de Steenrod, avait auparavant obtenu le résultat partiel suivant :

Théorème 4. *Soit $n \geqslant 1$ un entier. S'il existe un espace dont la cohomologie modulo 2 est isomorphe, en tant que $\mathbb{F}_2$-algèbre commutative graduée, à une algèbre polynomiale tronquée de la forme $\mathbb{F}_2[u]/u^3$ avec u de degré n, alors n est une puissance de 2.*

Ce théorème est un corollaire de la proposition suivante :

Proposition 5. *Soit $n \geqslant 1$ un entier. La $\mathbb{F}_2$-algèbre commutative graduée $\mathbb{F}_2[u]/u^3$ avec u de degré n admet une structure de* **A***-algèbre instable si et seulement si n est une puissance de 2.*

Démonstration du « seulement si ». Si $\mathbb{F}_2[u]/u^3$ admet une structure de **A**-algèbre instable alors on a $u^2 = \mathrm{Sq}^n u$. Par ailleurs, les relations d'Adem montrent que si n n'est pas une puissance de 2 alors Sq^n est une combinaison linéaire de $\mathrm{Sq}^j\mathrm{Sq}^i$ avec i et j strictement positifs. Comme $\mathbb{F}_2[u]/u^3$ est zéro en degrés strictement compris entre n et $2n$, il en résulte $\mathrm{Sq}^n u = 0$. Contradiction.

Nous terminons ce sous-paragraphe par une illustration du fait que les opérations de Steenrod commutent à la suspension (relation (6) du paragraphe 1).

Soient X_1, X_2, X_4 et X_8 les quatre plans projectifs évoqués ci-dessus. L'espace X_n est obtenu en « accrochant » une boule B^{2n} à la sphère S^n par une application $\mathrm{h} : \mathrm{S}^{2n-1} \to \mathrm{S}^n$ que l'on appelle l'application de Hopf. Soit r un entier, puisque l'opération de Steenrod $\mathrm{Sq}^n : \mathrm{H}^n(X_n;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^{2n}(X_n;\mathbb{F}_2)$ est non triviale, il en est de même pour $\mathrm{Sq}^n : \mathrm{H}^{n+r}(\Sigma^r X_n;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^{2n+r}(\Sigma^r X_n;\mathbb{F}_2)$, $\Sigma^r X_n$ désignant la r-ième suspension de l'espace X_n ; on en déduit que la r-ième suspension de l'application de Hopf, $\Sigma^r\mathrm{h} : \mathrm{S}^{2n-1+r} \to \mathrm{S}^{n+r}$, est homotopiquement non triviale pour tout r.

3.2. Autour de la conjecture de Sullivan

Dans les années 80 l'algèbre de Steenrod a à nouveau joué un rôle-clé dans la solution de la conjecture de Sullivan sur les points fixes homotopiques [6][3][2][1][4] et dans les développements qui en ont résulté.

Soit X un espace muni d'une action du groupe $\mathbb{Z}/2$. L'espace des points fixes homotopiques de cette action, que l'on note $X^{\mathrm{h}\mathbb{Z}/2}$, est l'espace des applications continues $\mathbb{Z}/2$-équivariantes de S^∞ dans X (la sphère S^∞ est la limite directe des sphères S^n, elle est munie de l'action antipodale). À la fin des années 60, D. Sullivan avait énoncé la conjecture suivante :

Si X est un CW-complexe fini alors l'application canonique de l'espace $X^{\mathbb{Z}/2}$ des points fixes ordinaires dans l'espace $X^{\mathrm{h}\mathbb{Z}/2}$ des points fixes homotopiques induit un isomorphisme en homologie modulo 2.

Dans le cas où l'action est triviale, la conjecture dit que l'application canonique de X dans l'espace $\mathbf{hom}(\mathrm{P}^\infty(\mathbb{R}), X)$ des applications continues de l'espace projectif infini $\mathrm{P}^\infty(\mathbb{R})$ dans X induit un isomorphisme en homologie modulo 2. En fait, H. R. Miller a montré que cette application canonique est une équivalence d'homotopie [6].

Voici maintenant quelques résultats homotopiques reliés à cette théorie dont la formulation fait intervenir l'algèbre de Steenrod (on rappelle que $\mathcal{K}$ désigne la catégorie des **A**-algèbres instables) :

Théorème 6. *Pour tout espace simplement connexe X dont la cohomologie modulo 2 est de dimension finie en chaque degré, l'application naturelle :*

$$[\mathrm{P}^\infty(\mathbb{R}), X] \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(\mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2), \mathrm{H}^*(\mathrm{P}^\infty(\mathbb{R});\mathbb{F}_2))$$

est une bijection.

Préthéorème 7. *Il existe un endofoncteur $\mathrm{T} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ et une transformation naturelle*

$$\mathrm{T}(\mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2)) \to \mathrm{H}^*(\mathbf{hom}(\mathrm{P}^\infty(\mathbb{R}), X);\mathbb{F}_2)$$

qui est un $\mathcal{K}$-isomorphisme, pour tout espace X vérifiant des conditions raisonnables.

Préthéorème 8. *Pour tout espace muni d'une action de $\mathbb{Z}/2$, vérifiant des conditions raisonnables, le $\mathcal{K}$-objet $\mathrm{H}^*(X^{\mathrm{h}\mathbb{Z}/2};\mathbb{F}_2)$ s'exprime fonctoriellement en termes du $\mathcal{K}$-morphisme $\mathrm{H}^*(\mathrm{P}^\infty(\mathbb{R});\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^\infty \times_{\mathbb{Z}/2} X;\mathbb{F}_2)$.*

Le lecteur trouvera une forme précise des énoncés 7 et 8 dans [4]. Leur démonstration fait essentiellement intervenir les propriétés « magiques » de la **A**-algèbre instable $\mathrm{H}^*(\mathrm{P}^\infty(\mathbb{R});\mathbb{F}_2)$. Celle-ci est en fait facile à décrire :

- on a $\mathrm{H}^*(\mathrm{P}^\infty(\mathbb{R});\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[t]$ avec t de degré 1, en tant que $\mathbb{F}_2$-algèbre graduée commutative ;
- l'action des carrés de Steenrod est déterminée par les propriétés (3), (2) et (7) du paragraphe 1 : on obtient $\mathrm{Sq}^i\, t^n = \binom{n}{i}\, t^{n+i}$ (formule encore due à H. Cartan).

4. Indications sur la définition des opérations de Steenrod et la démonstration de leurs propriétés

Introduisons tout d'abord quelques notations :

Soit G un groupe discret. On note $\mathrm{B}G$ l'espace classifiant de G ; $\mathrm{B}G$ est donc un espace connexe pointé dont le groupe fondamental est égal à G et dont le revêtement universel, que l'on note $\mathrm{E}G$, est contractile. En particulier $\mathrm{B}\mathbb{Z}/2$ a le type d'homotopie de $\mathrm{P}^\infty(\mathbb{R})$.

Soient m un entier et X un espace topologique, on note $\mathfrak{S}_m$ le m-ième groupe symétrique et on pose $\mathfrak{S}_m X = \mathrm{E}\mathfrak{S}_m \times_{\mathfrak{S}_m} X^m$.

Soit s un entier. On note

$$\Delta_s : \mathrm{B}(\mathbb{Z}/2)^s \times X \to \mathfrak{S}_{2^s} X$$

une « diagonale de Steenrod ». Cette application est induite par la diagonale ordinaire $X \to X^{2^s}$ et le plongement $(\mathbb{Z}/2)^s \hookrightarrow \mathfrak{S}_{2^s}$ déterminé par une numérotation des points de $(\mathbb{Z}/2)^s$; on vérifie que la classe d'homotopie de Δ_s est indépendante de cette numérotation.

Venons-en maintenant à la théorie des carrés de Steenrod. Celle-ci repose essentiellement sur l'énoncé suivant (voir [7]) :

Théorème 9. *Soient m et n deux entiers. Soient :*

– $\mathrm{Q}_m : \mathrm{H}^n(X;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^{mn}(X^m;\mathbb{F}_2)$ *l'application naturelle* $u \mapsto u \times u \times \ldots \times u$, *m fois u ;*

– $\rho : \mathrm{H}^{mn}(\mathfrak{S}_m X;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^{mn}(X^m;\mathbb{F}_2)$ *l'application naturelle induite par le revêtement* $\mathrm{E}\mathfrak{S}_m \times X^m \to \mathfrak{S}_m X$.

Il existe une unique application naturelle

$$\mathrm{P}_m : \mathrm{H}^n(X;\mathbb{F}_2) \to \mathrm{H}^{mn}(\mathfrak{S}_m X;\mathbb{F}_2)$$

telle que l'on a $\mathrm{Q}_m = \rho \circ \mathrm{P}_m$.

On rappelle que l'on a $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}\mathbb{Z}/2;\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[t]$ avec t de degré 1 ; compte tenu de la formule de Künneth, $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}\mathbb{Z}/2 \times X;\mathbb{F}_2)$ s'identifie donc à l'anneau de polynômes $\mathrm{H}^*(X;\mathbb{F}_2)[t]$. On définit les $\mathrm{Sq}^i u$ comme les « coefficients » de $\Delta_1^*\mathrm{P}_2 u$:

$$\Delta_1^*\mathrm{P}_2 u = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{Sq}^i u \; t^{n-i} \quad .$$

Le fait qu'il n'y ait pas au second membre de monômes de degré strictement supérieur à n tient à ce que toute application naturelle de $\mathrm{H}^n(-;\mathbb{F}_2)$ dans $\mathrm{H}^{n'}(-;\mathbb{F}_2)$ avec $n' < n$ est nulle ; on peut s'en convaincre par exemple en observant que toute classe d'homologie singulière de degré n est par définition « portée » par un CW-complexe de dimension n.

La propriété (1) du premier paragraphe est conséquence de la relation $\mathrm{P}_2(u+v) = \mathrm{P}_2 u + \mathrm{P}_2 v + \mathrm{tr}(u \times v)$, tr désignant l'application naturelle définie par le transfert du revêtement double $\mathrm{E}\mathfrak{S}_2 \times X^2 \to \mathfrak{S}_2 X$.

La propriété (3) résulte de la factorisation $\mathrm{Q}_2 = \rho \circ \mathrm{P}_2$ de l'énoncé 9. La propriété (2) devient une convention.

La formule de Cartan est conséquence de la relation $\mathrm{P}_2(u \smile v) = \mathrm{P}_2 u \smile \mathrm{P}_2 v$. La formule de Cartan implique également (6).

Enfin les relations d'Adem se démontrent en faisant appel à la diagonale de Steenrod Δ_2. Donnons quelques détails. On observe que l'on dispose d'une application naturelle $\nu : \mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_2 X \to \mathfrak{S}_4 X$ et que l'on a $\nu^*\mathrm{P}_4 u = \mathrm{P}_2\mathrm{P}_2 u$. On en déduit, identifiant cette fois $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}(\mathbb{Z}/2)^2 \times X; \mathbb{F}_2)$ à $\mathrm{H}^*(X; \mathbb{F}_2)[t_1, t_2]$:

$$\Delta_2^*\mathrm{P}_4 u = \sum_{i_1, i_2} \mathrm{Sq}^{i_1}\mathrm{Sq}^{i_2} u \;\; t_1^{n+i_2-i_1}(t_2(t_1+t_2))^{n-i_2} \ .$$

Les relations d'Adem résultent de ce que le second membre doit être symétrique en t_1 et t_2. Ce dernier point est impliqué par le fait suivant : pour tout automorphisme α de $(\mathbb{Z}/2)^2$ l'application $\Delta_2 \circ (\mathrm{B}\alpha \times \mathrm{Id})$ est homotope à Δ_2.

5. Références

[1] G. Carlsson, Equivariant stable homotopy and Sullivan's conjecture, *Invent. math.*, **103** (1991), 497-527.

[2] W. G. Dwyer, H. R. Miller et J. A. Neisendorfer, Fibrewise completion and unstable Adams spectral sequence, *Israêl J. Math.*, **66** (1989), 160-178.

[3] J. Lannes, Sur la cohomologie modulo p des p-groupes abéliens élémentaires, Proc. Durham Symposium on Homotopy Theory, 1985, *Math. Soc. L.N.S.*, **117**, Camb. Univ. Press, 1987, 97-116.

[4] J. Lannes, Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire, *Publi. Math. I.H.E.S.*, **75** (1992), 135-244.

[5] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, *Graduate Texts in Math.*, **5**, Springer, 1971.

[6] H. R. Miller, The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces, *Annals of Math.*, **120** (1984), 39-87.

[7] N. E. Steenrod et D. B. A. Epstein, *Cohomology operations*, Princeton Univ. Press, 1962.

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Réécriture et problème du mot

Yves Lafont[1]

Exercice classique : supposons que $ab = 1 = bc$ dans un monoïde (non commutatif). Peut-on en déduire que $ba = 1$? Même question si on suppose seulement que $ab = 1$. Plus généralement, peut-on déduire une identité $u = v$ à partir d'une liste d'axiomes $u_1 = v_1, \ldots, u_n = v_n$? C'est ce qu'on appelle le *problème du mot* pour les monoïdes.

En codant le problème de l'arrêt pour les machines de Turing, on démontre facilement que ce problème est indécidable. Autrement dit, il n'existe aucun algorithme qui puisse répondre oui ou non à cette question, étant donnés les mots u, v et $u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n$. Ce problème est aussi indécidable dans le cas des groupes. La première démonstration de ce théorème non trivial a été publiée par P. S. Novikov en 1955. Elle a été ensuite simplifiée par W. W. Boone en 1958, puis par divers auteurs.

La démonstration que nous présentons ici est inspirée par un article de S. Anderaa et E. Cohen [1]. Nous utilisons la *réécriture* à la place du *lemme de Britton*, et les *machines affines* à la place des *machines modulaires* introduites par ces auteurs.

La réécriture apparaît dans un contexte un peu inhabituel, car elle a été plutôt inventée pour résoudre le problème des mots, au moins dans les bons cas. À la fin de cet article, nous évoquerons d'autres applications de la réécriture.

Enfin, il faut savoir que la variante commutative de ce problème du mot est décidable. Pour cela, on utilise un analogue commutatif de la réécriture : les *bases de Gröbner*. Ceci illustre le fait que l'algèbre est généralement plus simple dans le cas commutatif.

Cet article commence par trois sections introductives, respectivement à la *réécriture*, aux *preuves d'indécidabilité*, et à la *théorie combinatoire des groupes*.

1. Groupes libres et réécriture

Definition 1. *(présentation de monoïde)*

Soit Σ un ensemble de symboles. Le monoïde libre Σ^* *est l'ensemble des mots formés avec ces symboles, c'est-à-dire les suites finies $a_1 \ldots a_n$ avec $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$, muni de la* concaténation $u, v \mapsto uv$. *L'unité de Σ^* est le* mot vide, *noté* 1.

[1] Institut de Mathématiques de Luminy (UMR 6206 du CNRS) Université de la Méditerranée (Aix-Marseille II).

Une présentation *du monoïde M (ou d'un monoïde M) est la donnée de deux ensembles Σ et $\mathcal{R} \subset \Sigma^* \times \Sigma^*$, tels que M soit isomorphe au quotient de Σ^* par la* congruence $\leftrightarrow^*_{\mathcal{R}}$ engendrée par $\mathcal{R}$, *c'est-à-dire la plus petite relation d'équivalence $\sim$ contenant $\mathcal{R}$ et compatible avec la multiplication.*

Si les deux ensembles Σ et $\mathcal{R}$ sont finis, on dit que le monoïde M est finiment présenté.

Si un groupe est finiment présenté, il l'est en tant que monoïde, et réciproquement.

Un cas simple est le groupe $\langle a\rangle \cong \Sigma^*/\leftrightarrow^*_{\mathcal{R}}$ où $\Sigma = \{a, \overline{a}\}$ et $\mathcal{R} = \{(a\overline{a}, 1), (\overline{a}a, 1)\}$. C'est le *groupe libre à un générateur* $\mathbf{F}_1$. On dit que ce dernier, en tant que monoïde, est présenté par le symbole a et son *inverse formel* $\overline{a}$, avec les relations suivantes :

$$a\overline{a} = 1, \qquad \overline{a}a = 1.$$

Pour calculer dans $\mathbf{F}_1$, on considère ces relations comme des *règles de réduction* :

$$a\overline{a} \to 1, \qquad \overline{a}a \to 1.$$

Definition 2. *(réductions)*

Si $u, v \in \Sigma^*$ et $(r, s) \in \mathcal{R}$, on écrit $urv \to_{\mathcal{R}} usv$ (réduction élémentaire).

Si $u_0 \to_{\mathcal{R}} u_1 \to_{\mathcal{R}} \cdots \to_{\mathcal{R}} u_n$, on écrit $u_0 \to^*_{\mathcal{R}} u_n$ (réduction composée).

On dit que le mot u est réduit *s'il n'existe aucune réduction élémentaire $u \to_{\mathcal{R}} v$.*

Dans notre exemple, un mot est réduit lorsqu'il est de la forme a^n ou $\overline{a}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$). De plus, pour tout mot $u \in \Sigma^*$, il existe un unique mot réduit $v \in \Sigma^*$ tel que $u \to^*_{\mathcal{R}} v$. C'est la *forme réduite de u*, notée $\widehat{u}$. Par exemple, la forme réduite de $a\overline{a}aaa\overline{a}$ est aa.

De ce fait, les mots réduits sont des représentants canoniques pour la congruence $\leftrightarrow^*_{\mathcal{R}}$. On peut donc identifier $\mathbf{F}_1$ avec l'ensemble de ces mots, muni du produit $u, v \mapsto \widehat{uv}$. On en déduit que le groupe multiplicatif $\mathbf{F}_1$ est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}$.

De même, on a le *groupe libre à deux générateurs* $\mathbf{F}_2 = \langle a, b\rangle$. En tant que monoïde, ce dernier est présenté par les symboles a, $\overline{a}$, b, $\overline{b}$, avec les règles suivantes :

$$(1)\quad a\overline{a} \to 1, \qquad (2)\quad \overline{a}a \to 1, \qquad (3)\quad b\overline{b} \to 1, \qquad (4)\quad \overline{b}b \to 1.$$

Un mot réduit est alors un produit alterné de mots réduits non vides pour $\langle a\rangle$ et pour $\langle b\rangle$. Par exemple, le mot $aabab\overline{a}$ est réduit. Ainsi, $\mathbf{F}_2$ est isomorphe au *produit libre* $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. On peut représenter les éléments de ce groupe comme les noeuds d'un arbre fractal (voir figure 1).

Pour obtenir une présentation du *groupe abelien libre à deux générateurs*, c'est-à-dire du produit cartésien $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, il suffit d'ajouter la relation de commutation $ba = ab$. Autrement dit, on a la *présentation de groupe* suivante :

$$\mathbb{Z}^2 \cong \langle a, b \mid ba = ab\rangle \cong \langle a, b \mid bab^{-1}a^{-1}\rangle.$$

Mais pour calculer la forme réduite d'un mot, il faut ajouter d'avantage de règles :

$$(5)\quad ba \to ab, \qquad (6)\quad b\overline{a} \to \overline{a}b, \qquad (7)\quad \overline{b}a \to a\overline{b}, \qquad (8)\quad \overline{b}\overline{a} \to \overline{a}\overline{b}.$$

Un mot réduit est alors le produit d'un mot réduit pour $\langle a\rangle$ et d'un mot réduit pour $\langle b\rangle$. Notez que les règles (6) à (8), en tant que relations, se déduisent des règles (1) à (5). Par exemple, la règle (6) se déduit de la façon suivante : $b\bar{a} = \bar{a}ab\bar{a} = \bar{a}ba\bar{a} = \bar{a}b$. On dit que ce calcul est une *dérivation*, et non une réduction, car certaines règles sont utilisées en sens inverse.

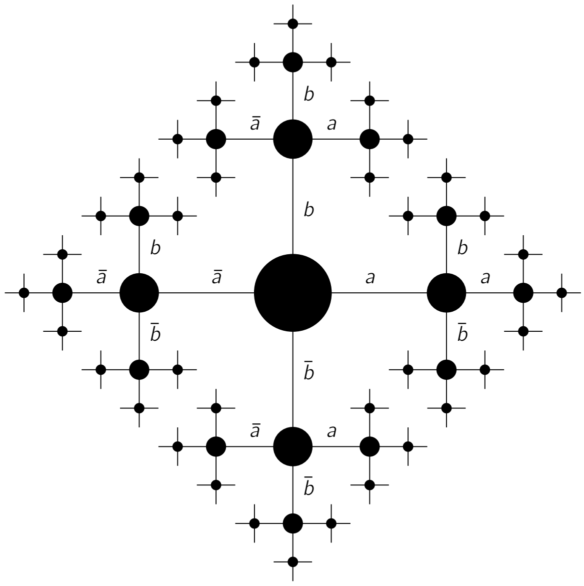


FIG. 1. le groupe libre $\mathbf{F}_2 = \langle a, b\rangle$

Nous venons de voir trois exemples de *présentations convergentes* (pour $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ et $\mathbb{Z}^2$).

Definition 3. *(présentation convergente)*

On dit qu'une présentation $\Sigma, \mathcal{R}$ *est* noetherienne *si on a la* propriété de terminaison : *Il n'existe aucune réduction infinie* $u_0 \to_{\mathcal{R}} u_1 \to_{\mathcal{R}} \cdots \to_{\mathcal{R}} u_n \to_{\mathcal{R}} \cdots$

On dit que la présentation est convergente *si, de plus, on a la* propriété de confluence : *pour tous* u, v, v' *tels que* $u \to^*_{\mathcal{R}} v$ *et* $u \to^*_{\mathcal{R}} v'$, *il existe* w *tel que* $v \to^*_{\mathcal{R}} w$ *et* $v' \to^*_{\mathcal{R}} w$.

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\ v \arrow[dr, "*"'] & & v' \arrow[dl, "*"] \\ & w & \end{tikzcd}$$

Notez que dans ce dernier cas, on obtient l'existence de la forme réduite par la propriété de terminaison et son unicité par la propriété de confluence. Ainsi, pour

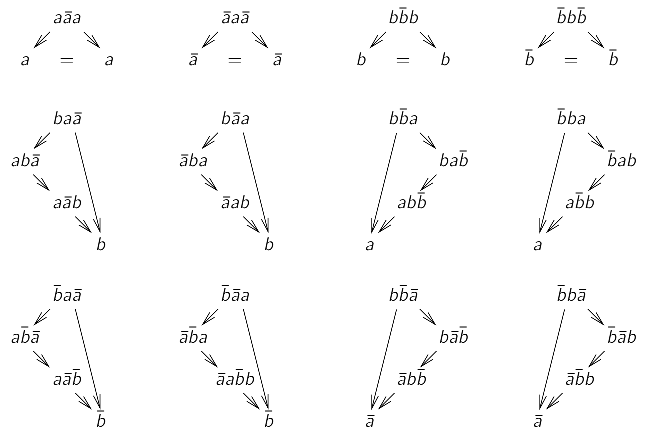


FIG. 2. confluence des 12 pics critiques pour la présentation de $\mathbb{Z}^2$

savoir si les mots u et v représentent le même élément dans $M \cong \Sigma^*/\leftrightarrow^*_{\mathcal{R}}$, il suffit de comparer les formes réduites $\widehat{u}$ et $\widehat{v}$.

La propriété de terminaison est immédiate pour la présentation de $\mathbf{F}_1$ et celle de $\mathbf{F}_2$, puisque la longueur des mots décroît. Pour la présentation de $\mathbb{Z}^2$, il faut totaliser le nombre de fois où un b (ou bien un $\overline{b}$) apparaît avant un a (ou bien un $\overline{a}$), c'est-à-dire le nombre de décompositions du mot de la forme $u\beta v\alpha w$ avec $\beta \in \{b, \overline{b}\}$, $\alpha \in \{a, \overline{a}\}$, et $u, v, w \in \Sigma^*$.

Pour montrer qu'une présentation noetherienne est convergente, il suffit de vérifier la confluence de chaque *pic critique*, qui correspond au chevauchement de deux règles. Par exemple, il y a 12 pics critiques à considérer pour la présentation de $\mathbb{Z}^2$ (figure 2).

Proposition 1. *(famille libre infinie)*
La famille infinie $(b^n a b^{-n})_{n\in\mathbb{Z}}$ *est libre dans le groupe* $\mathbf{F}_2 = \langle a, b\rangle$.

Autrement dit, on a un plongement du *groupe libre à une infinité de générateurs* $\mathbf{F}_\omega$ dans le groupe libre à 2 générateurs $\mathbf{F}_2$.

Preuve : Pour montrer cela, on construit une présentation convergente infinie de $\mathbf{F}_2$. On part de la présentation de $\mathbf{F}_2$ par les symboles a, $\overline{a}$, b, $\overline{b}$, avec les relations suivantes :

$$a\overline{a} = 1, \qquad \overline{a}a = 1, \qquad b\overline{b} = 1, \qquad \overline{b}b = 1.$$

Pour chaque $n > 0$, on introduit les 4 *générateurs superflus* suivants :

$$a_n = b^n a \overline{b}^n, \qquad \overline{a}_n = b^n \overline{a}\overline{b}^n, \qquad a_{-n} = \overline{b}^n a b^n, \qquad \overline{a}_{-n} = \overline{b}^n \overline{a} b^n.$$

Autrement dit, on ajoute à chaque fois le nouveau symbole et la relation qui le définit. On écrit aussi a_0 pour a, et $\overline{a}_0$ pour $\overline{a}$, puis on ajoute les *relations dérivables* suivantes :

$$a_n\overline{a}_n = 1 \text{ (pour } n > 0 \text{ ou } < 0), \qquad \overline{a}_n a_n = 1 \text{ (idem)},$$
$$b a_n = a_{n+1} b, \qquad b\overline{a}_n = \overline{a}_{n+1} b, \qquad \overline{b} a_n = a_{n-1}\overline{b}, \qquad \overline{b}\overline{a}_n = \overline{a}_{n-1}\overline{b}.$$

Finalement, on supprime les relations définissant les a_n et les $\overline{a}_n$ (pour $n > 0$ ou < 0) qui sont désormais dérivables. On obtient une nouvelle présentation de $\mathbf{F}_2$ par les symboles a_n (pour $n \in \mathbb{Z}$), b et $\overline{b}$, avec les relations suivantes, que nous écrivons comme des règles de réduction :

$$a_n\overline{a}_n \to 1, \qquad \overline{a}_n a_n \to 1, \qquad b\overline{b} \to 1, \qquad \overline{b}b \to 1,$$
$$ba_n \to a_{n+1}b, \qquad b\overline{a}_n \to \overline{a}_{n+1}b, \qquad \overline{b}a_n \to a_{n-1}\overline{b}, \qquad \overline{b}\overline{a}_n \to \overline{a}_{n-1}\overline{b}.$$

Notez que cette présentation ressemble beaucoup à la présentation convergente de $\mathbb{Z}^2$. En utilisant les mêmes arguments, on voit que cette présentation de $\mathbf{F}_2$ est convergente. De plus, elle contient une présentation du groupe libre $\mathbf{F}_\omega = \langle \Sigma \rangle$ où $\Sigma = \{a_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

On a donc un morphisme $\varphi : \mathbf{F}_\omega \to \mathbf{F}_2$ tel que $\varphi(a_n) = b^n a b^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Comme tout mot réduit pour la présentation de $\mathbf{F}_\omega$ est aussi réduit pour celle de $\mathbf{F}_2$, on en déduit que φ est injectif. Autrement dit, la famille $(b^n a b^{-n})_{n\in\mathbb{Z}}$ est libre.◀

Enfin, notons que tout monoïde M a une *présentation standard*, qui est convergente. Celle-ci est donnée par les symboles a_x (pour $x \in M$) et les règles suivantes :

$$a_x a_y \to a_{xy}, \qquad a_1 \to 1.$$

Les mots réduits pour cette présentation sont les a_x tels que $x \neq 1$ et le mot vide 1.

2. Problème du mot et machines affines

Definition 4. *(machine à registres déterministe)*

Une machine à 2 registres *est une suite de n instructions de l'une des deux formes suivantes :*

incrémenter x et aller à j,

si $x = 0$ alors aller à j, sinon décrémenter x et aller à k,

où x est l'un des 2 registres et $j, k \in \{0, \dots, n\}$.

Comme il n'y a pas d'instruction 0, on écrira *stop* à la place de *aller à 0*. Par exemple, la machine suivante calcule la multiplication de x par 2 (si on commence avec $y = 0$) :

(1) si $x = 0$ alors stop, sinon décrémenter x et aller à 2,
(2) incrémenter y et aller à 3,
(3) incrémenter y et aller à 1.

Definition 5. *(configurations et transitions)*

Une configuration *pour une machine $\mathcal{M}$ à 2 registres et n instructions est donnée par un triplet (i, x, y) avec $i \in \{0, \dots, n\}$ et $x, y \in \mathbb{N}$. Chaque instruction de $\mathcal{M}$ induit une ou deux* transitions *de l'une des formes suivantes :*

$$(i,x,y) \to_{\mathcal{M}} (j,x{+}1,y), \quad (i,0,y) \to_{\mathcal{M}} (j,0,y), \quad (i,x{+}1,y) \to_{\mathcal{M}} (k,x,y),$$
$$(i,x,y) \to_{\mathcal{M}} (j,x,y{+}1), \quad (i,x,0) \to_{\mathcal{M}} (j,x,0), \quad (i,x,y{+}1) \to_{\mathcal{M}} (k,x,y).$$

On note alors $\to^*_{\mathcal{M}}$ et $\leftrightarrow^*_{\mathcal{M}}$ le préordre et l'équivalence engendrés par ces transitions.

Par exemple, la machine ci-dessus correspond aux transitions suivantes :

$$(1,0,y) \to_{\mathcal{M}} (0,0,y), \qquad (1,x{+}1,y) \to_{\mathcal{M}} (2,x,y),$$
$$(2,x,y) \to_{\mathcal{M}} (3,x,y{+}1), \qquad (3,x,y) \to_{\mathcal{M}} (1,x,y{+}1).$$

Théorème 1. *(indécidabilité du problème de l'arrêt pour les machines à 2 registres)*

Il existe une machine $\mathcal{M}$ à 2 registres telle que le problème suivant soit indécidable : étant donnée une configuration (i,x,y) pour $\mathcal{M}$, a-t-on $(i,x,y) \to^*_{\mathcal{M}} (0,0,0)$?

Pour montrer ce théorème, on code le problème de l'arrêt pour une machine de Turing : si celle-ci utilise un alphabet à n symboles, on remplace le ruban par deux entiers dont les développements en base n correspondent aux parties gauche et droite du ruban.

Théorème 2. *(indécidabilité du problème du mot pour les monoïdes)*
Il existe une présentation finie $\Sigma, \mathcal{R}$ telle que le problème suivant soit indécidable : étant donnés deux mots $u, v \in \Sigma^*$, a-t-on $u \leftrightarrow^*_{\mathcal{R}} v$?

Preuve : Soit $\mathcal{M}$ une machine à 2 registres et n instructions. On introduit les symboles $a, b, c_0, \ldots, c_n, d, e$ et on code la configuration (i,x,y) par le mot $[i,x,y] = ab^x c_i d^y e$. Chaque transition de $\mathcal{M}$ correspond alors à une règle de l'une des formes suivantes :

$$c_i \to bc_j, \quad ac_i \to ac_j, \quad bc_i \to c_k, \quad c_i \to c_j d, \quad c_i e \to c_j e, \quad c_i d \to c_k d.$$

On obtient alors une présentation finie Σ, R sans pic critique telle que les trois énoncés suivants sont équivalents :

$$(i,x,y) \to^*_{\mathcal{M}} (0,0,0), \qquad [i,x,y] \to^*_{\mathcal{R}} [0,0,0], \qquad [i,x,y] \leftrightarrow^*_{\mathcal{R}} [0,0,0].$$

L'équivalence entre les deux derniers énoncés résulte de l'absence de pics critiques, qui implique la propriété de confluence même si on n'a pas la propriété de terminaison.

On a ainsi réduit le problème de l'arrêt pour $\mathcal{M}$ au problème du mot. Par le théorème 1, on obtient donc une présentation finie $\Sigma, \mathcal{R}$ pour laquelle ce dernier est indécidable. ◀

Il existe aussi une présentation finie Σ, R telle que le problème suivant soit indécidable : étant donné un mot $u \in \Sigma^*$, a-t-on $u \leftrightarrow^*_{\mathcal{R}} 1$?

Il suffit d'ajouter la règle $ac_0e \to 1$ à la présentation précédente, qui reste confluente.

Dans le cas des groupes, ce dernier problème est équivalent au problème initial, car on a $x = y$ si et seulement si $xy^{-1} = 1$. Pour montrer qu'un tel problème est indécidable, on voudrait plonger le monoïde précédent dans un groupe : étant donné $M \cong \Sigma^*/\leftrightarrow^*_{\mathcal{R}}$, on peut évidemment construire un groupe G en ajoutant un inverse formel $\overline{\alpha}$ pour chaque symbole $\alpha \in \Sigma$, avec les relations $\alpha\overline{\alpha} = 1$ et $\overline{\alpha}\alpha = 1$. On obtient alors un morphisme $\varphi : M \to G$, mais celui-ci n'est pas forcément injectif.

Considérons par exemple le monoïde M construit à partir de la machine $\mathcal{M}$ suivante :

(1) si $x = 0$ alors stop, sinon décrémenter x et aller à 2,
(2) incrémenter x et aller à 3,
(3) si $y = 0$ alors stop, sinon décrémenter y et aller à 3.

Dans ce cas, on obtient une présentation confluente de M avec les règles suivantes :

$$ac_1 \to ac_0, \quad bc_1 \to c_2, \quad c_2 \to bc_3, \quad c_3e \to c_0e, \quad c_3d \to c_3.$$

Comme c_1 et c_3 sont réduits pour cette présentation, on a $c_1 \neq c_3$ dans le monoïde M. Mais dans le groupe G, on a $c_1 = b^{-1}bc_1 = b^{-1}c_2 = b^{-1}bc_3 = c_3$, ce qui nous donne $ac_1de = ac_3de = ac_3e = ac_0e$. Pourtant, on n'a pas $(1,0,1) \to^*_{\mathcal{M}} (0,0,0)$.

Ainsi, l'existence d'inverses crée des « interférences » dans le codage de nos machines. En fait, cette méthode est vouée à l'échec, et il faut changer complètement de codage.

Definition 6. *(machine affine)*

Une machine affine *est un ensemble fini $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\bullet \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\bullet$, où $\mathbb{Z}^\bullet = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.*

Chaque $(p,q,p',q') \in \mathcal{A}$ définit une transition affine $p + qz \to_{\mathcal{A}} p' + q'z$ *(pour $z \in \mathbb{Z}$).*

On note $\leftrightarrow^*_{\mathcal{A}}$ la relation d'équivalence engendrée par $\to_{\mathcal{A}}$.

Théorème 3. *(indécidabilité du problème de l'équivalence pour une machine affine)*

Il existe une machine affine $\mathcal{A}$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que le problème suivant soit indécidable : étant donné $z \in \mathbb{Z}$, a-t-on $z \leftrightarrow^*_{\mathcal{A}} m$?

Preuve : Soit $\mathcal{M}$ une machine à 2 registres et n instructions. On pose $m = n+1$ et on code la configuration (i,x,y) par l'entier $[i,x,y] = i + m2^x3^y$. Chaque transition de $\mathcal{M}$ correspond alors à une ou deux transitions affines de l'une des formes suivantes :

$$\begin{array}{lll} i + mz \to j + 2mz, & i + m(2z{+}1) \to j + m(2z{+}1), & i + 2mz \to k + mz, \\ i + mz \to j + 3mz, & i + m(3z{+}1) \to j + m(3z{+}1), & i + 3mz \to k + mz, \\ & i + m(3z{+}2) \to j + m(3z{+}2). & \end{array}$$

On obtient ainsi une machine affine $\mathcal{A}$ qui satisfait les deux propriétés suivantes :

si $z \to_{\mathcal{A}} z'$, alors z est le code d'une configuration si et seulement si z' l'est ;
$(i,x,y) \to_{\mathcal{M}} (i',x',y')$ si et seulement si $[i,x,y] \to_{\mathcal{A}} [i',x',y']$.

Comme $\mathcal{M}$ est déterministe, les trois énoncés suivants sont équivalents :

$$(i,x,y) \to^*_{\mathcal{M}} (0,0,0), \qquad (i,x,y) \leftrightarrow^*_{\mathcal{M}} (0,0,0), \qquad [i,x,y] \leftrightarrow^*_{\mathcal{A}} [0,0,0].$$

Comme $[0,0,0] = m$, on a réduit le problème de l'arrêt pour $\mathcal{M}$ au problème ci-dessus. Il suffit alors d'appliquer le théorème 1. ◀

3. Extensions de Higman-Neuman-Neuman

On va démontrer ici quelques résultats classiques de théorie combinatoire des groupes en utilisant des techniques de réécriture.

On écrit $H \sqsubset G$ si H est un sous-groupe de G et $F \sqsupset G$ si F est une extension de G, c'est-à-dire si G est un sous-groupe de F.

On note $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ le sous-groupe de G engendré par les éléments $x_1, \ldots, x_n \in G$, et on dit qu'un tel sous-groupe est *finiment engendré*.

Proposition 2. *(extension HNN associée à un sous-groupe)*

Pour tout $H \sqsubset G$, il existe $F \sqsupset G$ et $t \in F$ tels que $H = \{x \in G \mid tx = xt\}$.

De plus, F est finiment présenté si G l'est et si H est finiment engendré.

Preuve : soit $F = \hat{G}/\leftrightarrow^*_{\mathcal{C}}$ où $\hat{G} = G * \langle b \rangle$ et $\mathcal{C} = \{(bu, ub) \mid u \in H\}$.

En partant de la présentation standard de G (voir la fin de la section 1), on obtient une présentation de F (en tant que monoïde) par les symboles a_x (pour $x \in G$), b et $\overline{b}$, avec les relations suivantes :

$$a_x a_y = a_{xy}, \qquad a_1 = 1, \qquad b\overline{b} = 1, \qquad \overline{b}b = 1, \qquad ba_u = a_u b \text{ (pour } u \in H).$$

On choisit alors un ensemble $H^\perp$ de représentants pour les *classes à droite modulo* H. Autrement dit, tout $x \in G$ a une unique décomposition $x = uv$ où $u \in H$ et $v \in H^\perp$. De plus, on peut supposer que $1 \in H^\perp$.

Pour chaque $v \in H^\perp \setminus \{1\}$, on introduit les générateurs superflus $b_v = ba_v$ et $b'_v = \overline{b}a_v$. On écrit aussi b_1 pour b et b'_1 pour $\overline{b}$, puis on ajoute les relations dérivables suivantes :

$$b_1 b'_v = a_v \text{ (pour } v \in H^\perp), \qquad b'_1 b_v = a_v \text{ (pour } v \in H^\perp),$$
$$b_v a_x = a_u b_w \text{ (si } u \in H,\ v, w \in H^\perp \text{ et } vx = uw), \qquad b'_v a_x = a_u b'_w \text{ (idem)}.$$

Notez que dans le cas où $x = u$ et $v = w = 1$, on retrouve la relation $ba_u = a_u b$.

On supprime les relations $b\overline{b} = 1$ et $\overline{b}b = 1$, ainsi que celles définissant les b_v et les b'_v, qui sont désormais dérivables. On obtient une présentation convergente du groupe F par les symboles a_x (pour $x \in G$), b_v et b'_v (pour $v \in H^\perp$), avec les règles suivantes :

$$a_x a_y \to a_{xy}, \qquad a_1 \to 1, \qquad b_1 b'_v \to a_v, \qquad b'_1 b_v \to a_v,$$
$$b_v a_x \to a_u b_w \text{ (si } u \in H,\ v, w \in H^\perp \text{ et } vx = uw), \qquad b'_v a_x \to a_u b'_w \text{ (idem)}.$$

Cette présentation de F contient la présentation standard de G, et tout mot réduit pour celle de G est aussi réduit pour celle de F. On en déduit que F est une extension de G. On vérifie de même que F est une extension de $\langle b \rangle$. En particulier, on a $b \in F$.

Si $x = uv$ où $u \in H$ et $v \in H^\perp$, la forme réduite de $b_1 a_x$ est $a_u b_v$ (ou b_v si $u = 1$), et le mot $a_x b_1$ est réduit (ou sa forme réduite est b_1 si $x = 1$). Ces formes réduites coïncident lorsque $v = 1$, c'est-à-dire $x \in H$. Autrement dit, $H = \{x \in G \mid bx = xb\}$.

Enfin, remarquons que si $\Sigma, \mathcal{R}$ est une présentation finie de G (en tant que monoïde), et si $u_1, \ldots, u_n \in \Sigma^*$ sont des mots dont les classes modulo $\mathcal{R}$ engendrent le sous-groupe H, alors on obtient une présentation finie $\Sigma', \mathcal{R}'$ de F (en tant que monoïde) en posant $\Sigma' = \Sigma \cup \{b, \overline{b}\}$ et

$\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \{(b\overline{b}, 1), (\overline{b}b, 1), (bu_1, ub_1), \ldots, (bu_n, ub_n)\}.$ ◄

Corollaire 1. *(réduction du problème de Magnus au problème du mot)*
Si G a une présentation finie $\Sigma, \mathcal{R}$ (en tant que monoïde) et le sous-groupe $H \sqsubset G$ est finiment engendré, alors on peut réduire le problème suivant au problème du mot pour une extension finiment présentée $F \sqsupset G$: étant donné un mot $u \in \Sigma^*$, la classe de u modulo $\mathcal{R}$ est-elle dans H ?

Notez que dans le cas particulier où $H = \{1\}$, on retrouve le problème du mot.

Definition 7. *(isomorphisme local)*
Un isomorphisme local de *G est un isomorphisme $\varphi : H \to H'$ avec $H, H' \sqsubset G$.*
On dit que $t \in G$ représente *φ si on a $txt^{-1} = \varphi(x)$ pour tout $x \in H$.*
On dit que le sous-groupe $K \sqsubset G$ est invariant par *φ si on a $\varphi(H \cap K) = H' \cap K$.*

Proposition 3. *(extension HNN associée à un isomorphisme local)*
Pour tout isomorphisme local $\varphi : H \to H'$ de G, il existe $F \sqsupset G$ et $t \in F$ tels que :

(1) *t représente φ ;*

(2) *$\langle K, t\rangle \cap G = K$ pour tout $K \sqsubset G$ invariant par φ ;*

(3) *F est finiment présenté si G l'est et si H est finiment engendré.*

Ici, $\langle K, t\rangle$ désigne le sous-groupe de F engendré par l'ensemble $K \cup \{t\}$.
Preuve : soit $F = \hat{G}/\leftrightarrow^*_{\mathcal{C}}$ où $\hat{G} = G * \langle b\rangle$ et $\mathcal{C} = \{(bu, \varphi(u)b) \mid u \in H\}$.

On introduit les deux ensembles $H^\perp$ et $H'^\perp$ comme dans la preuve de la proposition 2. On obtient ainsi une présentation convergente de F par les symboles a_x (pour $x \in G$), b_v (pour $v \in H^\perp$) et b'_v (pour $v \in H'^\perp$), avec les règles suivantes :

$$a_x a_y \to a_{xy}, \qquad a_1 \to 1, \qquad b_1 b'_v \to a_v, \qquad b'_1 b_v \to a_v,$$
$$b_v a_x \to a_{\varphi(u)} b_w \text{ (si } u \in H,\ v, w \in H^\perp \text{ et } vx = uw\text{)},$$
$$b'_v a_x \to a_{\varphi^{-1}(u)} b'_w \text{ (si } u \in H',\ v, w \in H'^\perp \text{ et } vx = uw\text{)}.$$

On en déduit que F est une extension de G et de $\langle b\rangle$. En particulier, on a $b \in F$.

Si $u \in H$, la forme réduite de $b_1 a_u b'_1$ est $a_{\varphi(u)}$ (ou 1 si $u = 1$). Ainsi, b représente φ.

Si $K \sqsubset G$, on choisit des ensembles de représentants $H^\perp$ et $H'^\perp$ compatibles avec K. Autrement dit, on peut supposer que tout $x \in K$ a une unique décomposition $x = uv$ où $u \in H \cap K$ et $v \in H^\perp \cap K$ (respectivement $u \in H' \cap K$ et $v \in H'^\perp \cap K$).

Supposons maintenant que K soit invariant par φ. D'après ce qui précède, si tous les symboles d'un mot ont leurs indices dans K, il en va de même pour sa forme réduite. On en déduit aisément que $\langle K, b\rangle \cap G \subset K$, et l'inclusion réciproque est immédiate.

Pour le reste, on procède exactement comme dans la preuve de la proposition 2. ◄

On peut facilement généraliser cette construction :

Proposition 4. *(extension HNN associée à plusieurs isomorphismes locaux)*
Pour toute suite $\varphi_1 : H_1 \to H_1'$, ..., $\varphi_n : H_n \to H_n'$ d'isomorphismes locaux de G, il existe $F \sqsupset G$ et $t_1, \dots t_n \in F$ tels que :

(1) *t_i représente φ_i pour chaque i ;*

(2) *$\langle K, t_1, \dots, t_n \rangle \cap G = K$ pour tout $K \sqsubset G$ invariant par chaque φ_i ;*

(3) *F est finiment présenté si G l'est et si les H_i sont finiment engendrés.*

Ici, $\langle K, t_1, \dots, t_n \rangle$ désigne le sous-groupe de F engendré par $K \cup \{t_1, \dots, t_n\}$.

Preuve : par récurrence sur n, en utilisant la proposition 3. ◀

4. Théorème de Novikov-Boone

Si $n \in \mathbb{Z}$, on pose $a_n = b^n a b^{-n} \in \mathbf{F}_2 = \langle a, b \rangle$. Notez que $a_{p+qn} \in \langle a_p, b^q \rangle$.

Lemme 1. *Si $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $q \neq 0$, alors le couple (a_p, b^q) est libre dans le groupe $\mathbf{F}_2$.*

Preuve : comme a et b^q sont d'ordre infini, le couple (a, b^q) est libre dans le groupe $\mathbf{F}_2 \cong \langle a \rangle * \langle b \rangle$. Il suffit alors d'appliquer l'*isomorphisme intérieur* $x \mapsto b^p x b^{-p}$. ◀

Lemme 2. *Si $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$ avec $q, q' \neq 0$, alors on peut construire un isomorphisme $\varphi : \langle a_p, b^q \rangle \to \langle a_{p'}, b^{q'} \rangle$ tel que $\varphi(a_{p+qz}) = a_{p'+q'z}$ pour tout $z \in \mathbb{Z}$.*

Preuve : par le lemme 1, on a $\langle a_p, b^q \rangle \cong \mathbf{F}_2 \cong \langle a_{p'}, b^{q'} \rangle$. Ainsi, on a un isomorphisme $\varphi : \langle a_p, b^q \rangle \to \langle a_{p'}, b^{q'} \rangle$ tel que $\varphi(a_p) = a_{p'}$ et $\varphi(b^q) = b^{q'}$, d'où le résultat. ◀

Si $P \subset \mathbb{Z}$, on note $[P]$ le sous-groupe de $\mathbf{F}_2$ engendré par l'ensemble $\{a_z \mid z \in P\}$.

Lemme 3. *Si $p, q \in \mathbb{Z}$, alors on a $\langle a_p, b^q \rangle \cap [\mathbb{Z}] = [p + q\mathbb{Z}]$.*

Preuve : comme $K = [p + q\mathbb{Z}]$ est invariant par l'isomorphisme intérieur $x \mapsto b^q x b^{-q}$ et $a_p \in K$, il apparaît que tout $x \in \langle a_p, b^q \rangle$ est de la forme uv avec $u \in K$ et $v \in \langle b^q \rangle$.

De plus, on a $K \sqsubset [\mathbb{Z}] \sqsubset \ker \pi$ où $\pi : \mathbf{F}_2 \to \langle b \rangle$ est défini par $\pi(a) = 1$ et $\pi(b) = b$. Dans le cas où $x \in [\mathbb{Z}]$, on obtient donc $1 = \pi(x) = \pi(u)\pi(v) = v$, d'où $x = u \in K$. Ainsi, on a $\langle a^p, b_q \rangle \cap [\mathbb{Z}] \sqsubset K$, et l'inclusion réciproque est immédiate.◀

Les deux lemmes suivants sont des conséquences immédiates de la proposition 1 :

Lemme 4. *Si $P, Q \subset \mathbb{Z}$, alors on a $[P] \cap [Q] = [P \cap Q]$.*

Lemme 5. *Si $z \in \mathbb{Z}$ et $P \subset \mathbb{Z}$, alors on a $z \in P$ si et seulement si $a_z \in [P]$.*

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème de Novikov-Boone :

Théorème 4. *(indécidabilité du problème du mot pour les groupes)*
Il existe un groupe finiment présenté pour lequel le problème du mot est indécidable.

Preuve : soit $\mathcal{A}$ une machine affine et soit $m \in \mathbb{Z}$.

Le lemme 2 associe des isomorphismes locaux $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de $\mathbf{F}_2$ aux transitions de $\mathcal{A}$. Par la proposition 4, on a une extension finiment présentée $F \sqsupset \mathbf{F}_2$ et $t_1, \dots, t_n \in F$ tels que chaque t_i représente φ_i.

On pose $H = \langle a_m, t_1, \dots, t_n \rangle$ et $K = [P]$ où $P = \{z \in \mathbb{Z} \,|\, z \leftrightarrow^*_{\mathcal{A}} m\}$. En utilisant le lemme 2, on obtient les deux propriétés suivantes :

si $z \to_{\mathcal{A}} z'$, on a $a_{z'} = \varphi_i(a_z) = t_i a_z t_i^{-1}$ pour un certain $i \in \{1, \dots, n\}$,

si $z \leftrightarrow^*_{\mathcal{A}} m$, on a $a_z = u a_m u^{-1}$ pour un certain $u \in \langle t_1, \dots, t_n \rangle$.

On a donc $K \sqsubset H$, et comme $a_m \in K$, on en déduit que $H = \langle K, t_1, \dots, t_n \rangle$.

Comme $K \sqsubset [\mathbb{Z}]$, on a $K = [\mathbb{Z}] \cap K$. Par les lemmes 3 et 4, on obtient :

$$\langle a_p, b^q \rangle \cap K = \langle a_p, b^q \rangle \cap [\mathbb{Z}] \cap K = [p + q\mathbb{Z}] \cap [P] = [(p + q\mathbb{Z}) \cap P].$$

On en déduit que K est invariant par chaque φ_i, d'où $K = H \cap \mathbf{F}_2$ par la proposition 4.

D'après le lemme 5 et la proposition 2, on a une extension finiment présentée $E \sqsupset F$ et $t \in E$ tels que les quatre énoncés suivants sont équivalents :

$$z \leftrightarrow^*_{\mathcal{A}} m, \qquad a_z \in K, \qquad a_z \in H, \qquad a_z t = t a_z.$$

Comme une égalité dans E revient à une équivalence modulo une certaine congruence engendrée $\leftrightarrow^*_{\mathcal{R}}$, on a ainsi réduit le problème de l'équivalence pour $\mathcal{A}$ et m au problème du mot pour E. Il suffit alors d'appliquer le théorème 3. ◀

5. Épilogue

Revenons maintenant à l'exercice du début. La réponse à la première question est oui, car on a $ba = babc = bc = 1$. Mais comment trouver cette réponse sans tâtonner ?

Il suffit de considérer la présentation définie par les générateurs a, b, c avec les règles $ab \to 1$ et $bc \to 1$. Cette présentation satisfait évidemment la propriété de terminaison, mais pas la confluence, à cause du pic critique suivant :

$$\begin{array}{ccc} & abc & \\ \swarrow & & \searrow \\ c & & a \end{array}$$

Pour y remédier, on ajoute la règle $c \to a$, qui est bien sûr dérivable en tant que relation, et qui produit un nouveau pic critique :

$$\begin{array}{ccc} & bc & \\ \swarrow & & \searrow \\ ba & & 1 \end{array}$$

De même, on ajoute la règle $ba \to 1$, qui donne cette fois une présentation convergente et qui permet de répondre à la question posée.

Par contre, la réponse à la deuxième question est non, car la règle $ab \to 1$ définit une présentation convergente (sans pic critique) pour laquelle les mots ba et 1 sont réduits.

On a utilisé l'*algorithme de Knuth-Bendix* qui construit une présentation convergente $\Sigma, \mathcal{R}$ à partir d'une présentation finie et d'un *ordre de terminaison* sur Σ^* : voir [3]. Mais cet algorithme ne permet pas de résoudre le problème du mot dans tous les cas.

Un contre-exemple classique à la méthode de Knuth-Bendix que l'on vient d'illustrer est la présentation du monoïde $\mathbf{B}_3^+$ des *tresses positives* par les symboles a, b et la relation $bab = aba$. Dans ce cas, l'algorithme ne termine pas. En fait, il est impossible de construire une présentation convergente finie de $\mathbf{B}_3^+$ sans ajouter de nouveau générateur. On y arrive si on introduit le générateur superflu $c = ab$.

En 1987, C. C. Squier construit un exemple de monoïde finiment présenté pour lequel le problème du mot est décidable, mais qui n'a aucune présentation convergente finie. Il utilise le critère suivant : si un monoïde M admet une présentation convergente finie, alors son groupe d'homologie $\mathrm{H}_3(M)$ est de type fini. Voir [4].

Ces travaux sont à l'origine d'une *théorie homotopique du calcul* qui relie la réécriture à l'algèbre homotopique en passant par la notion de *catégorie de dimension supérieure*. Cette théorie fournit de nouveaux outils pour calculer les invariants homologiques de groupes ou de structures algébriques plus générales. Voir [5] et [6] pour en savoir plus.

6. Références

[1] S. Anderaa & E. Cohen, Modular machines, the word problem for finitely presented groups, Collins' theorem. *Word Problems II. The Oxford book*, Adjan, Boone, Higman, North-Holland, 1980, p. 1–16.

[2] J. Stillwell, The word problem and the isomorphism problem for groups. *Bulletin AMS* 6, 1982, p. 33–56.

[3] D. Kapur & P. Narendran. The Knuth-Bendix completion procedure and Thue systems. *SIAM journal on computing* 14 (4), 1985, p. 1052–1072.

[4] C. Squier. Word problems and a homological finiteness condition for monoids. *Journal of Pure and Applied Algebra* 49, 1987, p. 201–217.

[5] Y. Lafont, Algebra and Geometry of Rewriting. *Applied Categorical Structures* 15, 2007, p. 415–437.

[6] Y. Lafont, F. Métayer, Polygraphic resolutions and homology of monoids. *Journal of Pure and Applied Algebra* 213 (6), 2009, p. 947–968.

HISTOIRE

Une histoire des séries infinies d'Oresme à Euler

Marc-Antoine Coppo

Le texte qui suit, issu d'un cours d'histoire des mathématiques dispensé à l'université de Nice, retrace dans ses grandes lignes directrices l'histoire des séries infinies depuis la période médiévale jusqu'à Euler.

On commence par évoquer la brillante et novatrice contribution d'Oresme datant du milieu du 14^e siècle dans laquelle est introduite pour la première fois, sous le nom de « tout », la notion même de somme d'une série infinie, incluant aussi bien le cas d'une série convergente que d'une série divergente telle que la série harmonique. Si elles accèdent alors au statut d'objet mathématique à part entière, les séries n'ont encore, à cette époque, que très peu d'applications et sont surtout considérées comme un approfondissement mathématique du concept d'infini. Tout change au 17^e siècle avec l'invention « mirifique » des logarithmes et le développement rapide des techniques d'intégration. Sous l'impulsion de Mengoli, Wallis, Newton et Gregory, notamment, les séries connaissent alors un extraordinaire renouveau et deviennent un outil fondamental du calcul infinitésimal. Enfin vient, avec le siècle des Lumières, l'âge d'or des séries caractérisé par une profusion de splendides identités découvertes par Euler, ainsi que par la mise en œuvre des premières méthodes systématiques de sommation des séries divergentes.

Le regard porté sur ces trésors de la littérature scientifique classique est celui d'un mathématicien avant tout désireux d'en éclairer la signification d'un point de vue contemporain. Cette relecture du passé, qui fait notamment usage de formulations et d'interprétations modernes souvent assez éloignées des énoncés originels (sauf en ce qui concerne le 18^e siècle) nous paraît, en dépit des risques de simplification et d'anachronisme qu'elle comporte, la mieux à même de retracer l'origine et l'évolution des idées et de les relier à des savoirs et des questionnements actuels.

La période médiévale

Le Français Nicole (Nicolas) Oresme est considéré comme le premier savant à avoir développé, dans ses *Questions sur la Géométrie d'Euclide* rédigées au milieu du 14^e siècle, une « théorie des séries » incluant une règle permettant de calculer la somme d'une série géométrique ainsi qu'une démonstration de la divergence de la série harmonique.

Étudiant en logique et en théologie au Collège de Navarre[1] à l'université de Paris, Oresme s'y distingue très vite et en devient grand-maître en 1356. Après

[1] Institut fondé par Jeanne de Navarre, épouse du roi Philippe IV (le Bel), petit-fils de saint Louis.

avoir enseigné pendant six ans au Collège de Navarre, Oresme entame ensuite une brillante carrière ecclésiastico-politique au service du roi Charles V (le Sage) dont il est successivement le secrétaire, le conseiller et le chapelain, sans cesser de s'intéresser aux questions scientifiques. Entre 1370 et 1376, à la demande du roi, il traduit en français la plus grande partie de l'œuvre d'Aristote qu'il enrichit de commentaires critiques (gloses) qui révèlent sa propre pensée scientifique : Oresme formule notamment l'hypothèse de la rotation de la terre sur elle-même en vingt-quatre heures, et celle, tout aussi audacieuse, de l'infinitude de l'univers. Pour le récompenser de ce travail considérable qui contribue au rayonnement de la langue française, le roi le sacrera en 1377 évêque de Lisieux et lui offrira trois anneaux d'or. Oresme meurt en 1382, deux ans après Charles V.

Tant par son style novateur que par son esprit à la fois critique et audacieux, Oresme aura joué un rôle capital dans le passage de la science médiévale à la science moderne.

Somme d'une série infinie

Dans les *Questions sur la Géométrie d'Euclide*, les séries apparaissent comme une représentation mathématique des notions d'infini par division et d'infini par addition introduites par Aristote dans sa *Physique*. En effet, une série géométrique de raison $\frac{1}{\lambda}$ est construite de telle sorte que, d'une part, chaque nouveau terme est obtenu à partir du terme précédent par division par λ et, d'autre part, chaque nouveau terme vient s'ajouter à la somme des termes précédents, ces deux opérations combinées étant répétées indéfiniment. L'apport conceptuel d'Oresme est d'avoir introduit sous le nom de « tout » la notion même de somme d'une série. Pour Oresme, une série de grandeurs (c'est le seul type qu'il considère) a toujours une somme, tantôt finie, tantôt infinie. Par son degré de généralité, cette conception très novatrice pour l'époque, qui dépasse le point de vue physique d'Aristote, permet d'affirmer qu'Oresme a jeté dans ses *Questions* les premières bases d'une théorie des séries infinies.

Oresme énonce en particulier une règle qui permet de calculer le tout (i.e. la somme) de la série géométrique de raison $\frac{1}{\lambda}$ pour un rationnel $\lambda > 1$, règle qui peut se traduire dans le langage moderne par la formule :

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} + \frac{1}{\lambda^4} + \cdots = \frac{1}{\lambda - 1}\,.$$

Cependant, il ne donne aucune démonstration ni même la moindre indication sur la manière dont il a trouvé cette « règle ».

En superposant verticalement des rectangles de base 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, etc. puis en divisant indéfiniment horizontalement chacun de ses rectangles, Oresme parvient aisément à calculer la somme[2] :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2\,.$$

[2] L'identité $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots = 2$ semble avoir été découverte à la même époque par l'anglais Richard Suiseth dit Le Calculateur, mais sa formulation est particulièrement obscure : voir p. 266 du livre de Boyer cité en référence.

D'autres résultats du même type donnés également par Oresme laissent penser qu'il aurait eu connaissance de la règle plus générale :

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2}+\frac{3}{\lambda^3}+\frac{4}{\lambda^4}+\cdots=\frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}$$

calculant la somme obtenue en effectuant le produit de deux séries géométriques de même raison, bien qu'il ne l'ait jamais explicitée

Divergence de la série harmonique

Le résultat le plus remarquable obtenu par Oresme dans ses *Questions* est la démonstration de la nature infinie de la somme de la série harmonique[3]. Rappelons qu'il s'agit du problème de la sommation de la série des inverses des nombres entiers naturels :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

La divergence vers l'infini de cette série est un résultat non trivial et, en apparence, très surprenant au regard de la croissance extrêmement lente de ses sommes partielles : on peut ainsi montrer qu'il faut ajouter plus de 10^{43} termes[4] de la série pour que la somme dépasse (enfin) 100. Cependant, l'intuition d'Oresme n'était pas de nature numérique, mais géométrique.

L'idée d'Oresme consiste à faire apparaître des groupes de 2^n termes consécutifs (pour $n=1,2,3,\dots$) tous supérieurs à $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}1 \quad &+ \quad \frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})\\ &+ \quad (\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16})+\cdots=1+\frac{1}{2}+A_1+A_2+\cdots\end{aligned}$$

avec

$$A_1=(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

$$A_2=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}A_3 &= \frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\\ &> \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

De manière générale,

$$A_n=\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^n+2^n-1}+\frac{1}{2^{n+1}}$$

est supérieur à 2^n fois $\frac{1}{2^{n+1}}$ c'est à dire à $\frac{1}{2}$. Il en résulte que :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{etc.}=1+\frac{1}{2}+A_1+A_2+A_3+\cdots>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots.$$

[3] Du grec *harmonia* qui signifie « juste rapport ».

[4] Le nombre exact de termes, calculé en 1968, est 15 092 688 622 113 788 323 693 563 264 538 101 449 859 497.

Or, la série de droite contenant une infinité de termes égaux à $\frac{1}{2}$, Oresme en conclut qu'« *il y a ici une infinité de parties dont chacune sera plus grande que la moitié d'un pied, donc le tout sera infini* » . On remarquera qu'Oresme a raisonné sur la somme de la série considérée *a priori* avant même de savoir si elle est finie ou infinie.

Conclusion

À la fin du 14e siècle, les séries acquièrent progressivement un statut mathématique à part entière mais, ne trouvant encore que très peu d'applications, elles sont surtout considérées comme un approfondissement mathématique des concepts d'infini par division et d'infini par addition.

Le renouveau du 17e siècle

Le 17e siècle est marqué par un extraordinaire renouveau de l'intérêt pour l'étude des séries en relation avec deux découvertes fondamentales : l'introduction des logarithmes[5] par John Neper (*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, Edimbourg, 1614) et Henry Briggs (*Arithmetica logarithmica*, Londres, 1624) d'une part, et le développement du calcul intégral par Cavalieri, Wallis puis Newton d'autre part. Ces deux directions se rejoignent au milieu du siècle avec la découverte que l'aire sous l'hyperbole est une fonction logarithmique, qu'on appelle alors « logarithme hyperbolique ».

Logarithme hyperbolique et série harmonique

Le prêtre italien Pietro Mengoli (1626-1686) suit l'enseignement de Cavalieri à l'université de Bologne. Après la mort de son maître en 1648, il lui succède comme professeur de mathématiques dans cette même université. Mengoli commence par retrouver, aux alentours de 1650, le résultat d'Oresme sur la divergence de la série harmonique en observant que :

$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}>\frac{3}{n}$$

puis, en regroupant les termes de la série harmonique trois par trois, il obtient alors la majoration :

$$\begin{aligned}1 \quad &+ \quad (\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10})+\cdots>1\\ &+ \quad \frac{3}{3}+\frac{3}{6}+\frac{3}{9}+\cdots=1+1+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+\text{ etc.}\end{aligned}$$

qui montre que la somme de la série ne peut être finie.

Au cours de ses recherches sur le logarithme hyperbolique, Mengoli est surtout le premier mathématicien à avoir calculé, en 1659, la somme de la série harmonique *alternée* :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

[5] Du grec *logos* (raison) et *arithmos* (nombres), littéralement « nombres de raisons ».

Pour cela, Mengoli remarque que :

$$\begin{aligned} 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n} &= (1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n})-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}) \\ &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} \end{aligned}$$

puis il montre que, lorsque n devient infiniment grand, la quantité $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$ devient infiniment proche de $\ln(2n)-\ln(n)=\ln 2$. Ce remarquable résultat sera plusieurs fois retrouvé durant la décennie suivante, notamment par Brouncker et Newton. Comme l'écrit R. Godement[6] : « *Il est difficile de ne pas déduire de ces raisonnements et de ces calculs que Mengoli avait déjà une idée assez claire de ce que sont un nombre et une intégrale* ».

Mengoli remarque également que :

$$\frac{1}{(n+1)(n+1)}<\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

d'où il déduit l'inégalité portant sur les séries :

$$\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{4.4}+\frac{1}{5.5}+\ldots<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=1$$

qui montre que la série des inverses des carrés parfaits a pour somme un nombre inférieur à 2, mais Mengoli échoue à calculer la valeur *exacte* de cette somme, célèbre problème qui ne sera résolu que 80 ans plus tard par Euler[7].

Produit infini de Wallis

À l'issue de la seconde Guerre Civile anglaise où il s'était notamment distingué par son aptitude à déchiffrer les codes secrets des Royalistes, John Wallis (1616-1703) est nommé en 1649 professeur de Géométrie à l'université d'Oxford (Savilian Chair) sur recommandation de Cromwell, poste qu'il occupera pendant 53 ans. En 1655-56, Wallis publie un important mémoire intitulé *Arithmetica infinitorum* (l'Arithmétique de l'infini) qui est considéré comme le premier traité d'analyse de l'histoire (c'est notamment dans cet ouvrage qu'on trouve pour la première fois le symbole ∞ pour désigner l'infini).

Wallis étend la formule $\int_0^1 x^a dx=\frac{1}{a+1}$ que Cavalieri avait établie pour a entier à tout rationnel $a=\frac{n}{m}$. C'est en interpolant la quantité $\int_0^1(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$ qui représente l'aire d'un quart de cercle de rayon 1 par les valeurs des quantités $\int_0^1(1-x^{\frac{1}{m}})^n dx$ pour n et m entiers (qu'il sait calculer), que Wallis découvre, à l'issue « *d'une des plus audacieuses investigations par intuition et analogie qui aient jamais abouti à un résultat correct*[8] », le célèbre produit infini qui porte son nom :

$$\frac{\pi}{4}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\times\frac{4\cdot 6}{5\cdot 5}\times\frac{6\cdot 8}{7\cdot 7}\times\cdots$$

[6] Voir p. 388 du tome I du livre de Godement cité en référence.
[7] Voir la section suivante.
[8] Selon le commentaire de C.H. Edwards : voir p. 171 du livre d'Edwards cité en référence.

et qui peut encore s'écrire[9] :

$$\frac{\pi}{4} = (1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{5^2})(1 - \frac{1}{7^2}) \cdots$$

Les techniques d'intégration « par interpolation » employées par Wallis dans son *Arithmetica infinitorum* tomberont assez rapidement en désuétude, cependant elles auront une profonde influence sur les mathématiciens anglais de la génération suivante, tout particulièrement sur le jeune Newton qu'elles conduiront notamment à la découverte de la célèbre série du binôme.

Série du binôme de Newton

Issac Newton (1642-1727) entre au Trinity College de Cambridge[10] en juin 1661. Il étudie de manière approfondie les ouvrages d'Euclide, Viète, Descartes et Wallis. À partir de 1665, il introduit des idées particulièrement novatrices en analyse qui font jouer un rôle central aux séries infinies : il montre notamment comment celles-ci permettent d'exprimer un grand nombre de quadratures. Sa méthode consiste à développer la fonction à intégrer en série de puissances puis à intégrer terme à terme en suivant la règle $x^m \to \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$ qu'il a apprise en étudiant l'*Arithmetica Infinitorum* de Wallis, mais qu'il applique à présent à une abscisse x quelconque. C'est en cherchant à exprimer l'aire $I_m(x) = \int_0^x (1-t^2)^{\frac{m}{2}}\,dt$ sous forme d'une série qu'il découvre la fameuse *série du binôme* qui porte désormais son nom :

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3 + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{24}x^4 + \cdots$$

avec $a = \frac{m}{n}$.

En développant $(1-x^2)^a$ pour $a = \frac{1}{2}$ par la formule précédente, et en utilisant l'identité :

$$\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{1.3.5.\cdots.(2n-3)}{2.4.6.\cdots.2n},$$

Newton obtient le développement en série de l'intégrale de Wallis :

$$I_1(x) = \int_0^x (1-t^2)^{\frac{1}{2}}\,dt = x - \frac{x^3}{2.3} - \frac{1}{2.4.5}x^5 - \frac{1.3}{2.4.6.7}x^7 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}x^9 - \cdots$$

En développant $(1-x^2)^a$ pour $a = -\frac{1}{2}$ et en utilisant l'identité :

$$\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = (-1)^n\frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.6.\cdots.2n},$$

Newton découvre par la même occasion le développement en série de l'arcsinus :

$$y = \arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7 + \cdots$$

[9] Cette écriture le fait apparaître comme un cas particulier d'une formule bien plus générale découverte près d'un siècle plus tard par Euler : le produit infini de la fonction sinus (voir la section suivante).

[10] Le Trinity College (collège de la sainte Trinité) était le plus important des collèges de Cambridge, fondé en 1546 par le roi Henry VIII.

En 1669, Newton expose ses résultats dans un article fondateur d'une quinzaine de pages au contenu prodigieux, intitulé *De analysi* (Sur l'analyse par équations infinies quant au nombre de termes), qui lui vaut d'occuper à l'âge de 27 ans la prestigieuse Lucasian Chair de mathématiques à l'université de Cambridge[11]. Un peu plus tard, dans *De methodis* (Sur la Méthode des séries infinies et des fluxions) rédigé durant l'hiver 1670-1671, Newton traite de nombreux exemples d'utilisation des séries pour le calcul numérique : il expose notamment une méthode de calcul de π reposant sur le développement en série de l'intégrale $\int \sqrt{x-x^2}dx$ grâce à la formule du binôme précédemment découverte. Plus précisément, Newton obtient l'identité :

$$\int_0^x (t-t^2)^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}} - \cdots$$

qu'il applique pour $x = \frac{1}{4}$. Il en déduit :

$$\int_0^{\frac{1}{4}} (t-t^2)^{\frac{1}{2}}dt = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} = \frac{2}{3}\frac{1}{2^3} - \frac{1}{5}\frac{1}{2^5} - \frac{1}{28}\frac{1}{2^7} - \frac{1}{72}\frac{1}{2^9} - \frac{5}{704}\frac{1}{2^{11}} - \cdots$$

et la convergence très rapide de cette série lui permet de donner une valeur numérique de π avec 16 décimales exactes.

Séries de Gregory

L'Écossais James Gregory (1638-1675), professeur de mathématiques et d'astronomie à l'université de Saint Andrews, avait parfait sa formation mathématique en Italie où il s'était notamment familiarisé avec les méthodes d'intégration de Cavalieri et avait rencontré Mengoli. Il était devenu par la suite un grand admirateur de Newton avec qui il correspondait très régulierement.

En 1675, il découvre, en s'inspirant des idées de Newton, deux séries désormais classiques qui sont restées attachées à son nom :

$$\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{1}$$

ainsi que

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{2}$$

En particulier la valeur $x = \frac{1}{3}$ dans (1) donne une série qui converge très rapidement vers $\ln 2$:

$$\ln 2 = 2 \times (\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \cdots),$$

et la valeur $x = 1$ dans (2) conduit à la célèbre série alternée de Leibniz :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Dans une fameuse lettre à Leibniz datant de 1676, Newton fait remarquer au philosophe allemand que la très belle identité précédente n'est qu'un cas particulier

[11] La chaire lucasienne avait été fondée par Henry Lucas et, selon les statuts, le titulaire de la chaire se devait d'exposer « une partie de la géométrie, de l'astronomie, de l'optique ou de tout autre discipline mathématique ». Les premiers cours de Newton eurent très peu de succès.

de la série (2) de Gregory (dont Leibniz ignore tout des travaux). Newton indique lui-même (sans démonstration) une identité analogue :

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots$$

dont on peut supposer qu'il l'a obtenue en intégrant terme à terme entre 0 et 1 le développement :

$$\begin{aligned} \frac{1+x^2}{1+x^4} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) \\ &= (1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \cdots) + (x^2 - x^6 + x^{10} - x^{14} + \cdots) \end{aligned}$$

Ce résultat sera retrouvé et généralisé au siècle suivant par Euler qui montrera par exemple que :

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

et

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \cdots$$

Conclusion

À la fin du 17e siècle, les séries ne sont plus considérées comme de simples curiosités mathématiques mais sont devenues sous l'impulsion de Newton et Gregory un outil fondamental du calcul infinitésimal. La voie est désormais ouverte pour le flot de développements en séries qui déferlera au siècle suivant.

L'Âge d'or

Le 18e siècle peut être considéré comme le véritable âge d'or des séries infinies en raison de la place exceptionnelle qu'elles occupent dans les travaux du plus grand mathématicien de ce siècle, Léonhard Euler.

Fils d'un théologien protestant, Euler nait à Bâle (Suisse) en 1707 et meurt 76 ans plus tard à Saint Petersbourg (Russie). Dans sa jeunesse, il suit l'enseignement de Jean (Johann) Bernoulli, célèbre mathématicien de son temps qui décèle très tôt chez son élève de prodigieuses capacités de mémorisation. À l'âge de 19 ans, l'Académie des sciences de Paris lui décerne un prix pour ses premiers travaux. Un an plus tard, il rejoint Daniel Bernoulli (un des fils de Jean) à l'Académie de St Petersbourg, un centre de recherche très important, où il reste 14 ans et écrit plus d'une centaine d'articles. Dès les années 1735-1740, la renommée scientifique d'Euler est établie dans toute l'Europe et, après la mort de son maître Jean Bernoulli en 1748, il est unanimement considéré par ses pairs comme le plus grand mathématicien vivant. En 1741, Euler quitte St Petersbourg pour rejoindre l'Académie des sciences de Berlin où il passe 25 ans. Ses relations avec Frédéric II de Prusse s'étant dégradées, il retourne à St Petersbourg en 1766, à la demande pressante de Catherine II de Russie qui lui réserve un accueil princier[12]. Pendant

[12] Amie de Diderot, Voltaire et D'Alembert, protectrice des sciences, des arts et des lettres, la tsarine Catherine II a gouverné en « despote éclairée ». Sous son règne, la Russie devint une très grande puissance européenne.

les 17 dernières années de sa vie, bien que quasiment aveugle, Euler trouve encore la force de rédiger, avec l'aide de ses fils et élèves, un important traité d'algèbre et 400 nouveaux articles ! Ses 82 articles spécifiquement consacrés aux séries infinies occupent 4 volumes de ses œuvres complètes *Opera Omnia* et nombre d'entre-eux figurent parmi les plus célèbres.

Euler a également entretenu une correspondance riche et fructueuse avec les plus grands mathématiciens de son temps, notamment avec son ami Christian Goldbach (196 lettres échangées de 1729 à 1764 dont un grand nombre porte sur les séries infinies).

Sa majestueuse *Introductio in analysin infinitorum* (Introduction à l'analyse infinitésimale) en deux volumes publiée en 1748-49 est considérée comme le premier grand traité d'analyse moderne et restera la référence incontournable pour tout mathématicien pendant près de 100 ans. Pour l'historien russe A. Yushkevich, ce livre d'Euler aura joué pour l'analyse un rôle comparable à celui des *Éléments* d'Euclide pour la géométrie.

Résolution du problème de Bâle

La résolution en 1735 du fameux *problème de Bâle*, c'est-à-dire la détermination de la somme de la série des inverses des carrés parfaits, universellement notée $\zeta(2)$, est le premier grand triomphe d'Euler (alors âgé de 28 ans) qui le rend célèbre dans l'Europe entière, notamment en raison de l'élégance et de l'apparente simplicité du résultat. Ce problème avait été initialement posé par Mengoli au milieu du 17$^{\text{e}}$ siècle, et les frères Jacques (Jakob) et Jean Bernoulli avaient déployé pendant des décennies une énergie considérable pour le résoudre, mais sans succès décisif.

Dès 1731, Euler avait découvert une brillante transformation de cette série qui permet d'en accélérer la convergence :

$$\zeta(2) = (\ln 2)^2 + 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4.4} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{16.16} + \frac{1}{32.25} + \cdots)$$

C'est à cette occasion qu'il introduit pour la première fois la fonction dilogarithme :

$$\mathrm{Li}_2(x) = \int_0^x \frac{-\ln(1-t)}{t}\,dt = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \cdots$$

qui vérifie $\mathrm{Li}_2(1) = \zeta(2)$ et l'équation fonctionnelle : $\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) = -\ln x \ln(1-x) + \zeta(2)$. En utilisant le développement : $\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \cdots$, Euler trouve alors la valeur approchée :

$$\zeta(2) = 1,644934\cdots$$

Assez curieusement, la méthode d'Euler pour déterminer la valeur *exacte* de $\zeta(2)$ exposée dans son article fondateur de 1734-35 *De summis serierum reciprocarum* est de nature algébrique. Elle repose sur la remarque suivante : si $P(x)$ est un polynôme de degré n vérifiant $P(0) = 1$ dont les racines sont $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, alors il admet la factorisation :

$$P(x) = 1 - a_1x + a_2x^2 - \cdots + (-1)^n x^n = (1 - \frac{x}{\alpha_1})(1 - \frac{x}{\alpha_2})\cdots(1 - \frac{x}{\alpha_n})$$

d'où il est facile de déduire, par identification des coefficients, les relations : $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n} = a_1$ et $\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n^2} = a_1^2 - 2a_2$. Euler applique alors très audacieusement ces identités à « *l'équation algébrique de degré infini* » :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{z}{6} + \frac{z^2}{120} - \frac{z^3}{5040} + \cdots = 0$$

avec $z = x^2$, dont les « racines » sont précisément $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, 16\pi^2, \cdots$. D'où il déduit les relations :

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \cdots = \frac{1}{6}$$

et

$$\frac{1}{\pi^4} + \frac{1}{16\pi^4} + \frac{1}{81\pi^4} + \frac{1}{256\pi^4} + \cdots = (\frac{1}{6})^2 - \frac{2}{120} = \frac{1}{90}$$

ce qui donne les extraordinaires formules :

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

et

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

Bien qu'en apparence très peu rigoureuse (même pour les critères de l'époque) et quasiment miraculeuse, la « démonstration » précédente est en fait justifiée par l'existence d'une factorisation de la fonction sinus en produit infini qu'Euler n'établira (presque) rigoureusement qu'en 1742 :

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= (1 - \frac{x}{\pi})(1 + \frac{x}{\pi})(1 - \frac{x}{2\pi})(1 + \frac{x}{2\pi})(1 - \frac{x}{3\pi})(1 + \frac{x}{3\pi})\cdots \\ &= (1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})(1 - \frac{x^2}{9\pi^2})\cdots\end{aligned}$$

En particulier, pour $x = \frac{\pi}{2}$, le produit s'écrit :

$$\frac{2}{\pi} = (1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{16})(1 - \frac{1}{36})(1 - \frac{1}{64})\cdots$$

ce qui est encore une autre façon d'écrire la formule de Wallis. Pour $x = \frac{\pi}{4}$, en multipliant le produit obtenu par celui de Wallis, Euler déduit aussi l'intéressante formule pour $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \times \frac{6\cdot 6}{5\cdot 7} \times \frac{10\cdot 10}{9\cdot 11} \times \frac{14\cdot 14}{13\cdot 15} \times \cdots$$

Au début du chapitre X de son *Introductio*, Euler considère une identité générale de la forme :

$$1 - A_1 z + A_2 z^2 - A_3 z^3 + A_4 z^4 - \cdots = (1 - \frac{z}{\alpha_1})(1 - \frac{z}{\alpha_2})(1 - \frac{z}{\alpha_3})(1 - \frac{z}{\alpha_4})\cdots$$

et, posant $S_p = \dfrac{1}{\alpha_1^p} + \dfrac{1}{\alpha_2^p} + \dfrac{1}{\alpha_3^p} + \dfrac{1}{\alpha_4^p} + \cdots$, il établit les relations algébriques suivantes :

$$S_1 = A_1\,;$$
$$S_2 = A_1 S_1 - 2A_2; \cdots;$$
$$S_p = A_1 S_{p-1} - A_2 S_{p-2} + A_3 S_{p-3} - A_4 S_{p-4} + \cdots + (-1)^{p-1} p A_p$$

qui sont une extension aux séries des formules de Newton déjà bien connues pour les polynômes. Il applique alors ces formules de Newton généralisées à l'identité :

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1 - \frac{\pi^2 z}{6} + \frac{\pi^4 z^2}{120} - \frac{\pi^6 z^3}{5040} + \cdots = (1-z)(1-\frac{z}{4})(1-\frac{z}{9})(1-\frac{z}{16})(1-\frac{z}{25})\cdots$$

avec $z = x^2$, ce qui lui permet de calculer de proche en proche les sommes :

$$\zeta(2p) = 1 + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{16^p} + \frac{1}{25^p} + \cdots$$

De cette manière, il trouve ainsi :

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}\,; \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}\,; \cdots; \zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{6825 \times 93555}.$$

Dès ses premiers calculs de 1735, il n'avait pas échappé à Euler que la somme $\zeta(2p)$ s'exprimait comme le produit de π^{2p} par un nombre rationnel. Cependant ce n'est que vingt années plus tard, en 1755, qu'il établira, en dérivant logarithmiquement le produit infini de la fonction sinus, la célébrissime relation :

$$\zeta(2p) = \frac{(2\pi)^{2p}}{2(2p)!}|B_{2p}|$$

qui ramène le calcul des sommes $\zeta(2p)$ à celui des *nombres de Bernoulli*[13] B_{2p}. Euler les calculera de proche en proche jusqu'à B_{34}.

En utilisant des idées analogues, Euler déterminera également les valeurs exactes des sommes *alternées* :

$$L(2p+1) = 1 - \frac{1}{3^{2p+1}} + \frac{1}{5^{2p+1}} - \frac{1}{7^{2p+1}} + \cdots$$

qui généralisent la série de Leibniz-Gregory :

$$L(1) = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Euler montre en particulier que :

$$L(3) = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32},$$
$$L(5) = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \cdots = \frac{5\pi^5}{1536}.$$

[13] Cette fameuse suite de nombres aux propriétés remarquables apparaît pour la première fois dans l'*Ars Conjectandi* de Jacques Bernoulli mais ne figure pas explicitement dans l'*Introductio* d'Euler. Sur une suggestion de De Moivre, c'est Euler lui-même qui proposera de les nommer ainsi.

De manière générale, il établit que $L(2p+1)$ est le produit de de π^{2p+1} par un nombre rationnel :

$$L(2p+1) = \frac{\pi^{2p+1}}{2^{2p+1}(2p)!} E_{2p}$$

où les E_{2p} sont désormais appelés les *nombres d'Euler*. Cependant, Euler ne parvint jamais à trouver une formule analogue pour la somme $\zeta(2p+1)$, conjecturant seulement que si $\zeta(2p+1)$ s'écrivait $K\pi^{2p+1}$, alors K devrait être une certaine fonction de p et de $\ln 2$.

Constante d'Euler

Euler précise la relation entre la série harmonique et le logarithme naturel (hyperbolique), déjà remarquée au siècle précédent par Mengoli, en donnant pour la première fois, dans une lettre à Jean Bernoulli, datée de 1740, le développement asymptotique :

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + \cdots - \frac{B_{2p}}{2pn^{2p}} - \cdots$$

où $C = 0,5772\cdots$ est la célèbre *constante d'Euler* qu'Euler exprime sous forme d'une série *divergente* :

$$C = \frac{1}{2} + \frac{B_2}{2} + \frac{B_4}{4} + \frac{B_6}{6} + \cdots$$

avec $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, etc., en précisant qu'on doit continuer la sommation jusqu'à ce que les termes de cette série alternée commencent à diverger[14].

Ce développement est en fait un cas particulier de la célèbre *formule d'Euler-MacLaurin* qu'Euler connaissait depuis 1734 :

$$f(1) + \cdots + f(n) = \int_1^n f(x)\,dx + C(f) + \frac{1}{2}f(n) + \sum_{k\geqslant 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n)$$

où $C(f)$ est une constante. Si f et ses dérivées successives tendent de manière monotone vers 0 quand x tend vers l'infini, alors : $C(f) = \lim[f(1) + \cdots + f(n) - \int_1^n f(x)\,dx]$. Dans le cas où $f(x) = \frac{1}{x}$, on obtient la formule précédente.

Sommes d'Euler-Goldbach

À partir d'une série d'échanges épistolaires avec Goldbach datant de l'hiver 1742-1743, Euler entreprend l'étude systématique des séries de la forme :

$$\zeta^\star(m,n) = 1 + \frac{1}{2^m}(1 + \frac{1}{2^n}) + \frac{1}{3^m}(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}) + \frac{1}{4^m}(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}) + \cdots$$

qu'on appelle désormais *Sommes d'Euler*. Dans son article de 1775, *Meditationes circa singulare serierum genus*, il montre notamment les remarquables relations :

$$\zeta^\star(2,1) = 2\zeta(3) \quad \text{et} \quad \zeta^\star(3,1) = \frac{1}{2}(\zeta(2))^2 = \frac{\pi^4}{72},$$

[14] C'est ce qu'on appellera au 19e siècle la « sommation au plus petit terme. » La constante C est la somme de la série au sens de Borel.

qui sont en fait deux cas particuliers de sa formule générale :

$$2\zeta^{\star}(m,1)=(m+2)\zeta(m+1)-\sum_{j=1}^{m-2}\zeta(m-j)\zeta(j+1)\,.$$

Conséquences arithmétiques de la divergence de la série harmonique

Dans son article de 1737 intitulé *Variae observationes circa series infinitas* (Diverses observations sur les séries infinies), Euler est le premier mathématicien à avoir compris les profondes implications arithmétiques de la divergence de la série harmonique. Il établit en effet une connexion avec la série des nombres premiers au travers de l'identité :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\frac{2.3.5.7.11\cdots}{(2-1)(3-1)(5-1)(7-1)(11-1)\cdots}$$

En inversant cette relation, Euler en conclut que :

$$0=(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})\cdots$$

où le produit est pris sur tous les nombres premiers. Ceci implique notamment la divergence vers l'infini de la série des inverses des nombres premiers ce qui constitue un raffinement du théorème d'Euclide sur l'infinité des nombres premiers. Les travaux d'Euler dans cette direction très prometteuse seront poursuivis au 19^{e} siècle par Dirichlet et Riemann, donnant naissance à la théorie analytique des nombres.

Premières études systématiques des séries divergentes

Dans son article de 1760, *De seriebus divergentibus*, Euler est aussi le premier mathématicien à avoir mis sérieusement en œuvre une théorie systématique d'étude des séries divergentes. Ce type d'objet, bien que d'usage fréquent à l'époque, est encore très mal maîtrisé, donnant lieu à des résultats contradictoires, sources de nombreuses confusions et controverses. Les méthodes de sommation élaborées par Euler vont grandement contribuer à éclaircir la question[15]. L'idée de base d'Euler consiste à identifier la fonction génératrice de la série, puis d'en prendre la valeur (ou la limite) en 1 lorsque c'est possible. C'est de cette manière qu'il justifie l'attribution de la valeur $\frac{1}{2}$ à la somme : $1-1+1-1+1-1+\cdots$ (déjà proposée par Leibniz) en raison du développement géométrique :

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

Sa célèbre étude de la série hypergéométrique de Wallis (qualifiée de série divergente *par excellence*) :

$$1-1!+2!-3!+4!-5!+\cdots$$

où il introduit, et résout, l'équation différentielle formellement vérifiée par la fonction génératrice :

$$\varphi(x)=x-1!x^2+2!x^3-3!x^4+4!x^5-5!x^6+\cdots$$

anticipe déjà sur les travaux d'Émile Borel au début du 20^{e} siècle.

15 Cependant, Euler semble avoir cru, à tort, qu'il était possible d'assigner de façon *univoque* une somme à n'importe quelle série divergente.

Conclusion

La profusion de splendides identités faisant intervenir les séries est un trait remarquable des mathématiques du 18e siècle. Après ce feu d'artifice tiré par Euler, les mathématiciens de la génération suivante vont désormais pouvoir se pencher sur les fondements théoriques de l'analyse.

Bibliographie

Livres

Au lecteur désireux d'approfondir l'étude des thèmes survolés dans cet article, on ne saurait trop recommander la lecture des excellents ouvrages qui suivent. À la fois très complet et agréable à consulter, le livre de Boyer est un grand classique généraliste. Le livre d'Edwards expose en détail les calculs de Wallis et de Newton. Les deux premiers volumes du magistral traité d'analyse de Godement contiennent des développements historiques d'un grand intérêt relatés dans un style jubilatoire. Il en est de même des deux premiers chapitres introductifs du classique de Hardy consacré aux méthodes de sommation des séries divergentes. Les chapitres VIII à XI du majestueux traité d'Euler demeureront à jamais une irremplaçable source d'inspiration et d'émerveillement. Enfin, d'une impressionnante érudition conjuguée à une remarquable clarté d'exposition, le livre de Varadarajan constitue certainement la meilleure référence sur les travaux d'Euler concernant les séries infinies.

C. Boyer, U. Merzbach, *A History of Mathematics*, 2e édition révisée, John Wiley & Sons, 1991.
C.H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, SpringerVerlag, 1994. L. Euler, *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, tome I, réimpression de l'édition française de 1796, Jacques Gabay, 2007.
R. Godement, *Analyse mathématique* I, 2e édition corrigée, Springer Verlag, 2001. R. Godement, *Analyse mathématique* II, 2e édition corrigée, Springer Verlag, 2003. G. Hardy, *Divergent Series*, Oxford, Clarendon Press, 1973.
V. S. Varadarajan, *Euler through time. A new look at old themes*, American Mathematical Society, 2006.

Articles

On pourra ensuite compléter cette étude par la lecture des articles plus spécialisés présentés ci-dessous.

R. Ayoub, *Euler and the Zeta Function*, Amer. Math. Monthly, 81 (1974), 1067-1086.
J. Babb, *Mathematical Concepts and Proofs from Nicole Oresme*, Science & Éducation 14 (2005), 443-456.
L. Euler, *Commentationes analyticae ad theoriam serierum infinitarum pertinentes*, Opera Omnia I-14 à I-16 (il s'agit de l'intégrale en quatre volumes des 82 articles d'Euler consacrés aux séries infinies). On pourra également consulter ces articles en ligne sur le site d'archives : `http ://math.dartmouth.edu/ euler/`.
E. Mazet, *La théorie des séries de Nicole Oresme dans sa perspective aristotélicienne*, Revue d'histoire des mathématiques, vol. 9, no 1 (2003), 33-80.
V. S. Varadarajan, *Euler and his work on infinite series*, Bulletin of the American Mathematical Society, **44** (2007), 515-539
D. T. Whiteside, *Newton's discovery of the general binomial theorem*, Mathematical Gazette, **45** (1961), 175-80.

ENSEIGNEMENT

L'étude PISA pour les mathématiques Résultats français et réactions

Antoine Bodin[1]

Le présent article reprend et adapte, pour la *Gazette*, une communication faite au second congrès Ibérien de mathématiques[2] ; il complète un article publié dans cette revue à la suite du colloque organisé conjointement en 2005 par la SMF et la société mathématique finlandaise [1].

En réalité, il y aurait peu de choses à ajouter à ce que l'on pouvait déjà dire en 2005 à propos de PISA, sinon que peu à peu la plupart des systèmes éducatifs cherchent à s'adapter à l'idéologie et à l'épistémologie induites par cette étude. Un peu partout, les programmes d'enseignement et de formation des professeurs sont en effet modifiés pour mieux intégrer les objectifs définis par PISA (donc par l'OCDE) ; en France même, des décisions récentes concernant le système éducatif ont été officiellement justifiées par les résultats obtenus à cette étude (programme du primaire, socle commun,...).

Les résultats français sont, le plus souvent, jugés médiocres et, en tout cas, loin de satisfaire les attentes. Les responsables de notre système éducatif se sont d'abord retranchés dans une réserve prudente mais dénoncent aujourd'hui la faiblesse de nos résultats, spécialement en mathématiques. En mathématiques, l'étude 2006 a en effet mis en évidence une baisse des résultats français par rapport aux résultats de 2003 ou de 2000 (baisse à la fois relative, par rapport aux autres pays, et absolue, par rapport à nous-mêmes) et rappelons que les résultats de 2003 n'avaient pas de quoi nous réjouir. Quoi qu'il en soit, à juste titre ou non, notre système éducatif, et en ce qui nous concerne plus spécialement, l'enseignement des mathématiques dans notre pays, est jugé, chez nous comme à l'étranger, en grande partie, en prenant les résultats de PISA comme point de référence. L'objet de cet article n'est pas de juger l'idéologie véhiculée par l'étude PISA, mais simplement de fournir quelques clés de lecture de ses orientations et de ses résultats et d'alerter sur certains risques de dérive.

Origine et buts de l'étude (Qui ? Pourquoi ?)

Rappelons que l'acronyme PISA désigne le programme pour l'évaluation internationale des élèves mis en place par l'OCDE depuis l'année 2000. Les 30 pays de l'OCDE plus un certain nombre de pays dits partenaires (58 pays en tout en

[1] IREM de Franche-Comté.

[2] Sous le titre « French Pisa Mathematics Results and Reactions » Second Iberian Mathematical Meeting Badajoz, October 3-5, 2008.

2006, 63 en 2009,...) participent tous les trois ans à une évaluation commune des compétences de base de tous les jeunes de 15 ans, à quelque place qu'ils se trouvent dans les systèmes éducatifs concernés. Il s'agit d'évaluer, de façon indépendante des programmes d'enseignement (les curriculums), la façon dont les jeunes sont prêts, vers la fin des scolarités obligatoires, à affronter les défis du monde dans lequel ils sont appelés à vivre.

Avec PISA, l'OCDE s'adresse en premier lieu aux décideurs et aux gestionnaires auxquels elle fournit des indicateurs pour le pilotage des systèmes éducatifs. Cela justifie, dans une certaine mesure, le nombre important des indicateurs produits et l'attention apportée à leur qualité technique. Les méthodologies mises en œuvre doivent, en particulier, recevoir l'assentiment de l'ensemble des gouvernements concernés et les indicateurs obtenus doivent supporter la comparabilité dans le temps et dans l'espace géographique. Dans cet article, nous n'évoquerons que quelques-uns de ces indicateurs et nous renverrons à d'autres études pour ce qui concerne les indicateurs de nature économiques, socio-économiques, sociaux, ainsi que les relations de ces indicateurs avec les indicateurs plus directement liés à l'éducation et aux résultats de l'éducation.

Précisons davantage les objectifs de PISA en utilisant les termes mêmes utilisés par l'OCDE :

« L'enquête PISA vise à évaluer dans quelle mesure les jeunes adultes de 15 ans, c'est-à-dire des élèves en fin d'obligation scolaire, sont préparés à relever les défis de la société de la connaissance. L'évaluation est prospective, dans le sens où elle porte sur l'aptitude des jeunes à exploiter leurs savoirs et savoir-faire pour faire face aux défis de la vie réelle et qu'elle ne cherche pas à déterminer dans quelle mesure les élèves ont assimilé une matière spécifique du programme d'enseignement. Cette orientation reflète l'évolution des finalités et des objectifs des programmes scolaires : l'important est d'amener les élèves à utiliser ce qu'ils ont appris à l'école, et pas seulement à le reproduire. »[3]

Ce qui est évalué est la littératie (ou littéracie), que l'OCDE définit ainsi :

« ... la notion de "littératie", ... renvoie à la capacité des élèves d'exploiter des savoirs et savoir-faire dans des matières clés et d'analyser, de raisonner et de communiquer lorsqu'ils énoncent, résolvent et interprètent des problèmes qui s'inscrivent dans divers contextes. » (idem)

Enfin, ce qui concerne les mathématiques :

« La littéracie mathématique est l'aptitude d'un individu à identifier et à comprendre le rôle que les mathématiques jouent dans le monde, à produire des jugements fondés sur les mathématiques, et à s'engager dans des activités mathématiques, en fonction des exigences de sa vie en tant que citoyen constructif, impliqué et réfléchi. » (ibidem)

Il est donc clair que les objectifs pris en compte par PISA ne recouvrent pas les objectifs de notre système éducatif. Dans un article précédent [2], nous avions pu estimer que, pour les mathématiques, le questionnement de PISA recouvrait 15% à 20% des programmes du collège. Certes, il s'agit, a priori, de la partie considérée comme la plus utile à tous ; il ne serait donc pas anormal de lui accorder une attention particulière, mais cela montre bien que l'on ne peut pas considérer que PISA évalue la qualité globale de notre système éducatif. En fait, selon les pays,

[3] OCDE 2004 – cadre de référence PISA.

l'adéquation de PISA aux curriculums en vigueur est plus ou moins grande, ce qui, a soi seul, explique, sans les justifier, une grande partie des différences observées.

L'organisation des études PISA

L'organisation est lourde et complexe ; nous renvoyons aux documents cités en référence pour plus de détails. Résumons seulement les points principaux :

– l'étude est périodique de période 3 ans (2000 ; 2003 ; 2006 ; 2009 ;...). À chaque occurrence de l'étude, une partie des questions est gardée secrète pour permettre les comparaisons ultérieures.

– trois domaines sont concernés (lecture, mathématique et science) avec en plus, en 2003, un domaine considéré comme transdisciplinaire : la résolution de problèmes.

– pour chacune des opérations, l'accent est porté sur l'un des domaines. En 2003, c'était les mathématiques avec environ le 2/3 du temps de passation des épreuves consacré aux questions de ce domaine (en 2006, l'accent portait sur les sciences ; en 2000 il portait sur la lecture ; l'accent portera à nouveau sur les mathématiques en 2012).

– les échantillons d'élèves passant les épreuves sont censés représenter statistiquement l'ensemble des jeunes de 15 ans des pays ou des systèmes concernés. Des procédures strictes de contrôle de la qualité des échantillons sont mises en œuvre. Des pays peuvent être sortis de l'étude pour manquement aux règles imposées pour l'échantillonnage (ce fut le cas du Royaume-Uni en 2003).

– tous les élèves ne passent pas toutes les questions de l'évaluation et, par le jeu des livrets d'évaluation, tous les élèves ne passent pas les questions dans le même ordre. Signalons au passage que les livrets d'évaluation étaient, en 2003, formés de 3 modules de mathématiques et d'un module d'un autre domaine.

– ce ne sont pas les enseignants des élèves qui administrent les épreuves et les codages des réponses sont faits par des personnes spécialement entraînées et indépendantes des établissements des élèves testés (théoriquement !).

Précisons que le temps de passation par livret est fixé à 2 heures et cela pour un nombre d'items de l'ordre d'une cinquantaine. Le temps moyen alloué pour répondre à un item est d'environ 2 minutes (mais une question peut comporter plusieurs items). Il suffit de jeter un œil sur les questions de lecture, ou de sciences, mais aussi de mathématiques, pour constater que les élèves n'ont que peu de temps pour chercher et qu'ils doivent décider rapidement de leurs réponses.

Comprendre les scores de PISA

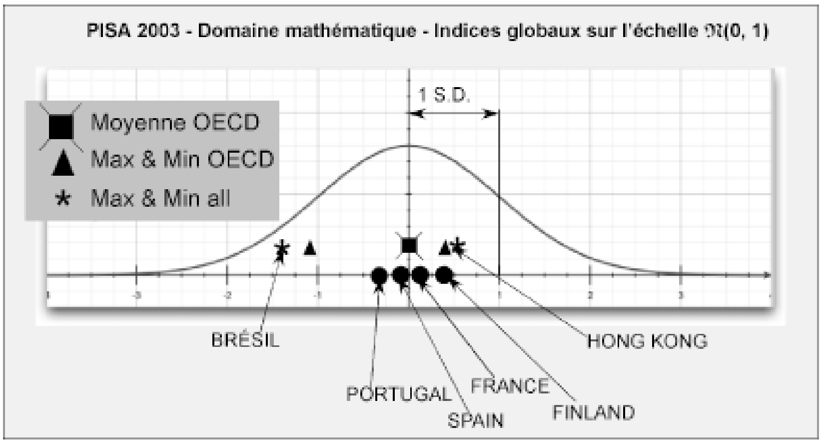
Les résultats de PISA sont rapportés à une échelle qui reste mystérieuse pour la plupart de ceux mêmes qui l'utilisent. En effet, que signifie la phrase suivante : *« En mathématiques, en 2003 ; le score de la France était 511, tandis que le score de la Finlande était de 544, soit un écart de 33 points.... »* ? Sur une échelle d'amplitude apparente de 1000 unités, 33 points, est-ce beaucoup ou est-ce négligeable ?

Pour pouvoir répondre à cette question, il faut avoir une idée de la façon dont les données sont traitées et dont ces « scores » sont calculés. En fait, une machinerie complexe est utilisée dont il n'est possible de donner ici qu'un aperçu.

Dans un premier temps, on connaît, par pays, les réussites-échecs de chaque élève à chacune des questions auxquelles il a été soumis. Cela permet de déterminer, toujours par pays, les taux de réussite à chacune des questions de l'étude (telle question a été réussie dans tel pays par x% et dans tel autre pays par y% des élèves l'ayant passée).

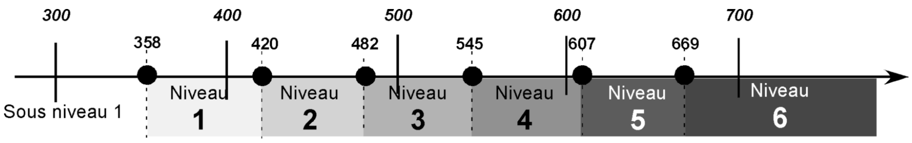
Partant des résultats bruts (en fait des codages en [0 ; 1]), une procédure d'affectation probabiliste permet de traiter les élèves n'ayant pas passé certaines questions comme s'ils les avaient passées. D'autres corrections et ajustements sont faits pour tenter de réduire certains biais qui auront été détectés et en particulier pour tenir compte des biais d'échantillonnage. La procédure d'attribution qui conduit finalement à attribuer un « score » à chaque élève est assez complexe et comporte de nombreuses itérations. Cette procédure est destinée à rendre comparable les résultats d'élèves n'ayant pas été soumis aux mêmes questions. Elle vise aussi à inférer sur l'ensemble des jeunes de 15 ans les résultats observés sur un échantillon représentatif (en France, par exemple, seuls 4300 élèves ont réellement passé des épreuves, c'est-à-dire environ 1000 élèves pour chacune des questions). Ce que l'on obtient à ce moment, c'est un indice qui reste assez proche des scores réels observés, mais ce n'est déjà plus un score au sens strict. La distribution des scores obtenus à ce premier niveau est alors transformée pour être ajustée à la distribution normale réduite N (0 ; 1). On obtient ainsi un indice de réussite (il ne faudrait plus parler ici de score).

L'indice de réussite de l'ensemble des jeunes de 15 ans de l'OCDE est donc ajusté à la loi normale N(0 ; 1) et l'on peut alors replacer les résultats d'un pays sur cette échelle (en se restreignant aux résultats de ce pays). On peut de même placer chaque individu sur cette échelle et parler, par exemple, d'un individu de niveau 2 par rapport à cet indice, cela pour dire que ses résultats se trouvent à deux écart-types de la moyenne par rapport à l'ensemble des jeunes de l'OCDE. Voici un exemple de présentation possible des indices de quelques pays.



Insistons sur le fait qu'à ce niveau, on a totalement perdu de vue les scores. La seule chose que l'on puisse dire de l'écart, par exemple, entre la France et la Finlande est qu'elle est de 33 centièmes d'écart-type sur l'échelle ainsi construite. Pour des raisons de lisibilité, on effectue une nouvelle transformation pour ajuster notre distribution à la distribution normale de moyenne 500 et d'écart-type 100. L'échelle de compétence mathématique de PISA est donc, finalement, l'échelle N (500 ; 100).

Conformément aux techniques issues de la psychométrie (théorie des réponses aux items), PISA définit alors l'indice de difficulté d'un item donné comme étant la valeur de l'indice global de compétence à partir duquel un individu a une probabilité au moins égale à 0,5 de réussir cet item. Cette organisation a permis à PISA de définir des niveaux de compétence. Là encore, la définition de ces niveaux est assez complexe et fait interagir une démarche qualitative (jugement d'experts) et une démarche quantitative. Après quelques itérations du processus et stabilisation du résultat, on a obtenu un découpage de l'échelle de compétences en 6 niveaux (plus un).



L'échelle de compétence de PISA

Un élève est donc au niveau 6 s'il a un indice de compétence égal ou supérieur à 669, tandis que dire qu'un item est au niveau 6, c'est dire que la probabilité d'un élève de niveau 6 de réussir cet item est supérieure ou égale à 0,5. Notons que la définition de ces niveaux permet d'assurer que, si l'on considère un ensemble d'items dont les indices de difficulté appartiennent tous, par exemple, à l'intervalle [607 ; 669], l'espérance mathématique du score d'un individu de niveau 5 sur cet ensemble d'items est supérieur ou égal à 50% (espérance mathématique de la loi binomiale de paramètre 0,5).

La façon dont la construction de cette échelle prend en compte l'analyse des tâches permet de donner un sens à ces niveaux et permet de les décrire (cf. [3]). On peut alors, par exemple, comparer les proportions d'élèves qui, dans chaque pays, se trouvent à tel ou tel niveau de compétence.

Les mathématiques dans PISA

S'il convient de savoir interpréter les scores de PISA, il est tout autant nécessaire de connaître le cadre de référence, lequel donne accès aux conceptions qui orientent l'étude, et le questionnement lui-même. Ces éléments sont facilement accessibles (cf. [3], [4] & [5]).

Pisa a une approche utilitaire des mathématique et se demande dans quelles classes de problèmes les compétences mathématiques pourront s'utiliser. L'idée n'est pas nouvelle et rejoint, en particulier, celle des problématiques de l'APMEP. Cependant, sur ce point, PISA s'est directement inspiré d'un ouvrage publié par le conseil national de la recherche des USA [6].

Le domaine mathématique est découpé en quatre sous-domaines : Quantité, Espace et forme, Relations et variations, Incertitude. Les expressions utilisées reflètent bien l'idée que ce ne sont pas les connaissances dans les domaines mathématiques classiques (géométrie, algèbre, ...) qu'il s'agit d'évaluer, mais bien la façon dont ces connaissances peuvent être mobilisées dans des situations relevant d'une analyse non scolaire des besoins.

Le terme d'incertitude, par exemple, recouvre ce que l'on peut appeler l'aléatoire ; du moins si l'on admet que les statistiques, lorsqu'elles ne se limitent pas au dénombrement, participent de l'aléatoire (choix des échantillons, etc.)

« Le terme "Uncertainty" est utilisé pour suggérer deux sujets liés : données et hasard. Aucun des deux n'est un sujet mathématique. D'une façon un peu rapide, on peut dire que les statistiques et les probabilités sont les domaine des mathématiques qui prennent en charge, respectivement, les données et le hasard »[4]

Cette distance prise avec les mathématiques savantes illustre le type de double transposition valorisé par PISA. Le « réel » est supposé constituer la source comme le cadre des situations d'évaluation proposées, tandis que les mathématiques plus ou moins savantes, apprises au cours de la scolarité, sont supposées se mobiliser naturellement dans les dites situations. D'une certaine façon, PISA porte sur ce que l'on a pu appeler les mathématiques mixtes, mais traduire, comme cela est souvent fait, « data » par statistiques et « chance » par probabilités abolit cette distance ; distance dont il n'est alors même plus possible de discuter la pertinence épistémologique.

PISA considère 3 grandes classes de compétences : Reproduction, Connexions et Réflexion. Ces classes servent, simultanément, à l'analyse des compétences (ce qu'il faut être en mesure de mettre en œuvre dans tel type de situation), à la création et à l'analyse des tâches proposées. La description complète de ces classes de compétences peut être trouvée, en particulier, dans [3].

Le cas français

Résultats globaux

Le tableau suivant rassemble, pour trois pays dont la France, les scores officiels du domaine mathématique pour les volets 2000, 2003 et 2006 de l'étude.

PISA : les « *scores* » en mathématiques

	Maths 2000	Maths 2003	Maths 2006
FRANCE	517	511	496
FINLANDE	536	544	548
ALLEMAGNE	490	503	504

La comparaison avec la Finlande s'impose dans la mesure où ce pays est souvent cité comme exemple. Nous avons ajouté l'Allemagne parce que dans ce pays, les résultats de l'enquête 2000, jugés mauvais, ont suscité des réactions importantes et des remises en cause sévères.

À l'observation de ce tableau, qui vient confirmer d'autres alertes, on comprend que ces résultats ne laissent pas (ou plutôt, ne laissent plus) indifférents les responsables de notre système éducatif.

Le tableau suivant présente les « vrais » scores moyens de l'ensemble des questions du domaine mathématique et de ses différents champs (sous-domaines). On

[4] David Moore dans [6].

constate que la différence entre les moyennes des scores français et finlandais est d'environ 6 points de pourcentage, soit une différence relative de plus de 10%. Cette différence est hautement significative d'un point de vue statistique.

Scores mathématiques PISA 2003					
	Maths TOUT	Quantité	Relations et variations	Espace et forme	Incertitude
France	53%	62%	53%	50%	48%
Finlande	59%	68%	56%	56%	56%
Japon	58%	65%	55%	59%	52%
OCDE	50%	58%	48%	48%	46%
TOUS	48%	56%	45%	46%	44%

Les différences de même type, pour chacun des champs de l'étude restent du même ordre (par exemple entre 3% et 8% selon les domaines, entre les résultats français et finlandais). Il s'ensuit que les analyses par domaine pour tenter d'expliquer ou de justifier des différences entre pays sont en général assez vaines. Ainsi, pour expliquer les mauvais résultats français relatifs au domaine « incertitude » on a fait valoir que notre curriculum faisait peu de place à l'aléatoire et que les statistiques étaient traitées chez nous d'un point de vue plus quantitatif que qualitatif, contrairement à ce qui se passe dans d'autres pays. Cela est en partie vrai, mais, surtout, les questions du champ « incertitude » sont perçues comme plus difficiles que celles des autres champs. Et cela dans tous les pays. Bien entendu, l'analyse par sous-domaines reste intéressante, mais à condition d'entrer dans le détail du questionnement.

Nous avons vu plus haut que PISA classait aussi les questions de l'étude en trois classes de compétence supposées hiérarchisées : Reproduction, Connexions et Réflexions (cf. [3]). On peut alors se demander si la faiblesse relative de la France se traduit de la même façon pour chaque classe de compétences.

Le tableau suivant conduit à répondre oui à la question.

	Reproduction	Connexions	Réflexion
Finlande	74,1%	55,2%	44,2%
France	68,7%	48,6%	38,6%
Japon	71,7%	53,2%	45,6%
OCDE	65,1%	45,7%	36,3%

Influence du format des questions ?

Le mode de questionnement de PISA peut aussi être interrogé. Il a souvent été dit que le mode de questionnement en QCM défavorisait nos élèves. En réalité, seulement le tiers des questions mathématiques de PISA sont des QCM simples ou complexes (28 questions sur 85). Les autres questions sont des QROC (Questions à Réponses Ouvertes et Courtes) : 58 questions sur 85).

On peut encore distinguer les QROC à réponse forcée, notées ici QROCF, questions pour lesquelles on attend un nombre un mot ou une expression, et les questions à réponse étendue, notées ici QROCE, pour lesquelles on attend une justification.

L'examen du tableau ci-dessous montre bien que les QCM ne creusent pas les différences. Compte tenu de l'importance donnée à l'argumentation et à la démonstration dans notre système, nous pensions que les résultats français des QROCE se rapprocheraient de ceux des pays qui sont en tête. Là encore, le tableau montre qu'il n'en est rien.

	QCM	QROC	QROCF	CROCE
Finlande	59,6%	58,3%	66,9%	48,3%
France	53,3%	51,9%	61,2%	41,1%
Japon	59,1%	56,9%	66,3%	46,0%
OCDE	51,2%	48,8%	58,6%	37,4%

Plus généralement, nous avons essayé de chercher des différences en faveur des résultats français, mais nous devons dire que nous n'avons rien trouvé de ce type. Ce qui frappe plutôt, c'est que, en quelque sorte, nous sommes uniformément moins bons que les têtes de classe (Finlande, Japon). Un peu moins bons ou beaucoup moins bons reste une question d'appréciation.

Classement suivant les niveaux de compétence

Nous avons vu plus haut que PISA définisait 6 (+1) niveaux de compétence. Le tableau suivant permet de comparer la répartition des jeunes de 15 ans de l'ensemble des pays de l'OCDE et de ceux de la France et de la Finlande par rapport à ces niveaux.

Niveau de compétence mathématiques	Inférieur à 1	1	2	3	4	5	6
OCDE	11,0%	14,6%	21,2%	22,4%	17,6%	9,6%	3,5%
FRANCE	5,6%	11%	20,2%	25,9%	22,1%	11,6%	3,5%
FINLANDE	1,5%	5,3%	16%	27,7%	26,1%	16,7%	6,7%

Ces chiffres confirment d'autres études (TIMSS en particulier), qui, depuis longtemps, mettent en évidence qu'en ce qui concerne les mathématiques pour tous, ou, si l'on veut, les mathématiques du citoyen, notre pays réussissait plutôt mal, en particulier avec les élèves les plus en difficulté. Un autre fait apparaît, qui peut contredire quelques certitudes : nous ne sommes pas très bons, non plus, en ce qui concerne la formation des meilleurs (niveaux 5 et 6), au moins pour les compétences visées par PISA. Moins bons que la Finlande, bien sûr, mais aussi que la Suisse, le Canada, le Japon, la Corée, etc.

Il faut certes éviter d'étendre sans précautions les conclusions ci-dessus à l'ensemble de la formation mathématique. Il est possible que l'insistance mise dans notre curriculum, et dans nos pratiques, sur des mathématiques plus formelles que celles prises en compte par PISA (place de la démonstration, du symbolisme, de l'algèbre, de l'analyse,...), puisse profiter à nos meilleurs élèves. Dans les études EVAPM, par exemple, les corrélations entre les réussites observées à des exercices de type PISA (concrets) et des exercices plus formels sont en général assez faibles.

De leur côté, nos collègues finlandais dénoncent une focalisation trop grande de leur enseignement secondaire sur les situations de la vie réelle et le fait que cela se paie ensuite par des difficultés d'abstraction, de rigueur, et de formalisation. [13].

Mais l'accès médiocre de l'ensemble des jeunes aux mathématiques reconnues utiles pour la vie et pour la vie citoyenne en particulier, n'est pas sans importance. Les meilleurs d'aujourd'hui seront les élites de demain et si ces élites ne sont, au mieux, à l'aise que dans le formalisme mathématique, c'est l'équilibre même de la société, pour ne pas dire la démocratie qui se trouvera menacée.

Tentatives d'explications

Pour une part les difficultés rencontrées doivent être rapportées aux difficultés générales de notre système éducatif, lesquelles doivent elles-mêmes être rapportées aux difficultés générales de notre société. J'ai montré ailleurs [2] qu'il suffirait d'« oublier » les 10% des jeunes les plus en difficulté pour nous retrouver au niveau de la Finlande (mais il faut déjà noter que pour des raisons obscures les DOM ont déjà été exclus de l'étude !).

D'autre part, les observateurs convergent pour expliquer que les élèves de notre système ont acquis des connaissances mais qu'ils ne sont pas bien préparés à mobiliser ces connaissances dans des situations qui ne sont pas soigneusement balisées. Ils savent faire (comparativement) si on leur dit ce qu'il faut faire mais sont désarmés s'ils doivent eux-mêmes mathématiser ou modéliser dans une situation qu'ils n'ont pas déjà, explicitement, rencontrée.

Ces mêmes observateurs, qu'ils soient français ou non, tendent à dénoncer une forme d'enseignement trop formel et trop procédural (bien que cela ne semble plus tout à fait vrai, au moins dans les premières années de l'enseignement secondaire).

Il faut encore noter que, entre les attaques visant l'« impérialisme des mathématiques », depuis longtemps dépassées en ce qui concerne l'enseignement obligatoire, et les rééquilibrages disciplinaires, la place des mathématiques dans la scolarité n'a pas cessé de se dégrader au fil des ans. Il n'est donc pas possible de rejeter totalement les faiblesses constatées sur des défauts ou sur des biais dus à l'étude elle-même.

Ces biais existent cependant, mais il y a deux sortes de biais que l'on a trop tendance à confondre dans une même réprobation de PISA : les biais techniques et les biais curriculaires et culturels. Les biais techniques sont nombreux et bien documentés (cf [7]). Il en existe à tous les niveaux des opérations : échantillonnage, recueil de l'information, condition de passation des tests, codage des réponses, traitements des données,... À des degrés divers, ces biais existent aussi pour les études nationales et certains sont inhérents à la démarche. Ils rendent ridicule l'excès de précision souvent affichée par les rapporteurs et les commentateurs de PISA (et le présent article n'y échappe pas qui donne des pourcentages à 0,1% près...), mais selon notre expérience personnelle de PISA et selon les comparaisons que nous avons pu faire dans le cadre de contre-enquêtes nationales (Observatoire EVAPM), ces biais ont peu d'incidence sur les conclusions que l'on peut raisonnablement tirer de cette étude.

Les autres biais invoqués sont les biais curriculaires et les biais culturels : PISA n'évaluerait pas de façon conforme aux programmes, aux pratiques et aux attentes qui sont habituelles dans notre pays ; de plus l'organisation de PISA s'effectuerait dans un cadre largement anglo-saxon.

Ces biais sont réels et puissants. Le biais curriculaire mesure une sorte de distance entre nos conceptions de l'enseignement des mathématiques et celles que l'OCDE cherche à promouvoir. Mais parler alors de biais conduit à penser que notre curriculum serait idéal, ce qui n'a rien d'évident. On peut dire la même chose du biais culturel : le présenter ainsi équivaut à conférer une supériorité absolue à notre culture nationale.

Il n'en reste pas moins que la façon dont PISA recouvre nos objectifs d'enseignement est très faible et qu'aucun locuteur francophone, ni même de langue latine, n'est membre de l'équipe mathématique de PISA, et que d'une façon générale, l'influence française dans l'organisation de cette étude est très faible. Cela est surtout dû aux carences de la gouvernance française (incapable de choisir entre l'exclusion justifiée et la présence active et efficace)[5].

Une certaine conception de la « vie réelle » (mot d'ordre directeur de PISA) et des mathématiques pour tous (mathématiques du citoyen) conduit à exclure de l'étude toute démonstration ou recherche de preuve et, pratiquement, toute manipulation symbolique. D'une certaine façon, on peut dire que PISA est plus proche du certificat d'études d'antan que de notre baccalauréat, à ceci près que les qualités d'analyse des situations, d'initiative et de critique y sont beaucoup mieux prises en compte.

On est alors en droit de se demander ce qu'il reste de l'éducation mathématique et craindre qu'une adaptation sauvage aux objectifs de PISA (adaptation en cours dans de nombreux pays) nous éloigne de valeurs essentielles de la formation mathématique. Il y a là matière à débat et sans doute à action pour qu'une grande partie des élèves puisse continuer à faire des mathématiques et à pouvoir accéder à des études scientifiques dans de bonnes conditions. Mais, simultanément, il est souhaitable que quasiment tous les jeunes abordent leur vie d'adultes avec les outils leurs permettant une insertion réussie aux points de vue personnel, social et professionnel. Cela, qui constitue l'objectif principal de PISA est aussi, dans notre pays, et plus généralement en Europe (au moins), l'objectif officiel du socle commun de connaissances et de compétences. Articuler ces deux exigences ne sera pas facile et mérite de mobiliser davantage les efforts de la communauté mathématique.

Rapport au verbal et aux autres domaines disciplinaires

Les corrélations entre les résultats des différents domaines de l'étude sont très élevées : beaucoup plus que ce que l'on trouve habituellement à l'intérieur même des mathématiques par exemple entre algèbre et géométrie ou géométrie et gestion de données.

PISA 2003 : corrélations 0CDE

	Lecture	Science	Résolution de problèmes
Mathématiques	0,77	0,82	0,89
Lecture		0,83	0,82
Science			0,79

5 L'OCDE a en effet été contrainte par le « gouvernement français » (sans doute quelque obscur gardien du temple) à se débarrasser de l'expert français qu'elle avait choisi pour les mathématiques. Il aurait, il est vrai, pu manquer de docilité.

Si l'on se place, non plus au niveau des individus, mais au niveau des pays, les coefficients de corrélation linéaire sont tous supérieurs à 0,95. Autrement dit, la connaissance du score d'un pays dans l'un des domaines permet d'avoir, directement, une bonne approximation du score de ce pays dans les autres domaines. À l'évidence, il y a un facteur commun à l'ensemble des domaines et ce facteur est très important.

L'importance prise dans le questionnement par la langue de communication est telle qu'il est probable que la langue soit ce facteur commun. En mathématiques comme dans les autres domaines, l'élève se trouve très souvent face à un texte important à lire, à comprendre, duquel il doit tirer les informations utiles et laisser de côté celles qui ne le sont pas. Comme l'exprime assez bien un chercheur anglais : *« dans PISA, il y a souvent peu de mathématiques à mobiliser, mais beaucoup à faire avant de pouvoir les utiliser. »* [8]. On peut alors penser que les caractéristiques linguistiques des langues utilisées influent aussi sur les résultats de PISA, et donc sur les différences entre pays.

Ces observations posent la question de la validité de l'étude relativement à ce qui peut faire la spécificité des mathématiques et donc, de la valeur des conclusions que l'on peut tirer sur la qualité de la formation mathématique des jeunes d'un pays à partir des seuls résultats de PISA.

Les réactions

Dans le monde, les réactions à PISA ont été très importantes et ont souvent conduit à de profondes remises ne cause et à des mesures spécifiques. Pour s'en convaincre, sur le seul plan mathématique, il suffit de consulter les sites des associations de spécialistes et, dans nombre de cas, des sociétés mathématiques nationales. En France, jusqu'à une période récente, après avoir fait quelques jours la une des journaux, PISA n'a pas intéressé grand monde, du moins officiellement. Les responsables ont tenté de minimiser la pertinence de l'étude en invoquant les biais évoqués plus haut. Les commentaires officiels ont surtout cherché à rassurer le public et les enseignants. *« En culture mathématique ...[les élèves] font preuve d'une relative aisance dans les activités qui reposent sur des supports "scolaires". Ils savent néanmoins tirer parti de l'enseignement théorique dispensé ...pour affronter des exercices qui ne sont généralement pas pratiqués dans le cadre de l'école française. »*

« Les scores français se situent de façon significative au-dessus du score moyen des pays de l'OCDE. »[6]

Le rapport public présentant une analyse assez complète de l'étude 2003 n'a été publié qu'en 2007[7] ! Ce rapport ne fait que confirmer les premières déclarations officielles et, creusant un peu les différents champs de l'étude, écrit :

Variations et relations : très bons résultats (!)

« ...une performance particulièrement solide en Variations et Relations, champ où les élèves français montrent leurs compétences en matière de lecture, d'interprétation et d'exploitation de documents graphiques (courbes, tableaux), ou encore d'application de relations mathématiques comme la proportionnalité. Le

[6] DEPP (Ministère de l'éducation nationale) 04/12/2005.
[7] Dossier DEPP 180 – 2007.

prélèvement d'information sur des supports divers est un point fort des élèves français, ce qui est probablement dû au fait qu'il est pratiqué dans plusieurs disciplines, dès le collège. »

Espace et formes : bon niveau (!)

« Dans le champ Espace et Formes, les élèves français montrent également un bon niveau de compétence sur l'interprétation des configurations, sur des calculs d'aires et de périmètres ou l'appréhension de figures dans l'espace. »

Quantité : réussite relativement plus faible

« Les performances sont plus moyennes dans le champ Quantité qui fait appel au travail sur les nombres et au calcul »

Incertitude : hors curriculum

Il est surtout remarqué que les probabilités ne faisaient pas partie du curriculum français de l'école obligatoire (alors même qu'un regard sur les questions et une prise en considération du concept d'incertitude montrerait que les probabilités ne sont pas vraiment concernées). Dans l'ensemble, le rapport se contente de pointer quelques points faibles : *« Les "points faibles" des élèves français semblent résider dans la capacité à effectuer des généralisations (par exemple, établir une formule) et, de façon générale, à prendre des initiatives sans se référer à un schéma connu, ou encore à faire des essais avant de répondre. »*

Malgré cette apparente indifférence le système a cherché à s'adapter :

– publication d'un décret définissant un socle commun de connaissances et de compétences précisant ce que tous les jeunes doivent maîtriser à la fin de leur scolarité obligatoire. Le décret se réfère explicitement à PISA.

– modification plus ou moins profonde des questions d'examen (Brevet des collèges et baccalauréat). En particulier les questions du Brevet cherchent à être moins formelles et davantage ancrées sur des situations de la « vie réelle ». Toutefois, l'essentiel est oublié, à savoir la dévolution au candidat des démarches à mettre en œuvre. On continue à baliser l'activité par un questionnement du type I. a), I. b)... en n'oubliant pas de préciser : en utilisant tel théorème, en appliquant telle procédure,... ce qui s'inscrit en totale contradiction avec les conceptions développées et évaluées par PISA.

– révision des programmes du collège pour y inclure une dose d'aléatoire.

– révision des programmes du primaire, pour les élèves de 6 à 11 ans, en se référant aux mauvais résultats enregistrés par PISA entre 15 et 16 ans et sur la base, à mon avis (et pas seulement !), d'une totale incompréhension des objectifs privilégiés par PISA.

Les résultats de PISA 2006 ont été accompagnés d'un changement radical dans les déclarations officielles, changement que les variations réelles des taux de réussite entre 2003 et 2006 expliquent moins que les récents changements politiques. Quoi qu'il en soit, un certain consensus existe maintenant pour affirmer que les choses ne vont pas aussi bien que ce qui avait pu être annoncé et que des mesures doivent être prises (mais bien sûr le consensus n'existe pas en ce qui concerne ces mesures).

Le discours officiel a donc changé. Par exemple, le ministre de l'éducation nationale interrogé par France Culture le 3 novembre 2007 déclarait : *« Il n'est pas normal – nous allons le voir bientôt dans une enquête PISA à propos de la compétence* *mathématique en fin de collège – que la France ne cesse de baisser. Nous sommes très en-dessous de la moyenne européenne »*

Ces mauvais résultats devaient conduire, selon le ministre, à « remettre de l'école dans l'école » et à « recentrer les missions de l'école primaire sur l'acquisition des savoirs fondamentaux ».

Toujours selon le ministre (12 décembre 2007) : *« ... la parution, au cours des dernières semaines, des deux enquêtes internationales PISA et PIRLS, a livré un constat alarmant sur l'état de notre système scolaire.... L'enquête PISA menée par l'OCDE auprès des élèves âgés de quinze ans montre que les résultats obtenus vers la fin de la scolarité obligatoire sont à la fois médiocres pour la culture scientifique, où la France se situe à peine dans la moyenne des pays de l'OCDE, inquiétants pour la compréhension de l'écrit, où la part des bons élèves recule et celle des élèves en difficulté régresse, et alarmants pour les mathématiques où les résultats de la France régressent et où la part des élèves les plus faibles augmente de 37%. »*

Les informations diffusées dans les médias emboîtent le pas.

Le quotidien *Le Monde*, qui n'est pas le plus acide, n'hésite pas à écrire (16 décembre 2007) : *« Alerte sur le « niveau » scolaire. Des signaux négatifs s'accumulent sur les performances de l'École en France. »*

Certes, le problème est réel et il est heureux que l'on s'en préoccupe, mais il convient de noter que comparativement, cette situation n'est pas plus catastrophique que celles de la plupart des pays comparables (Allemagne, Royaume-Uni, USA, sans parler de l'Espagne, de l'Italie ou du Portugal). Tous les pays, y compris ceux qui figurent en tête du palmarès ont de quoi être inquiets. En tout cas, si ces exagérations conduisent à prendre des mesures pertinentes et efficaces, et non à démoraliser davantage les enseignants, les alertes provoquées ou renforcées par PISA n'auront pas été inutiles.

On le sait, PISA n'est pas, en France, la seule source d'indicateurs sur les acquis mathématiques des élèves. Sur de nombreux points, PISA ne fait que confirmer d'autres études ou observations.

Malheureusement les sources d'information indépendantes sont rares et partielles. La France ne participe qu'avec réticence aux études internationales. Elle est sortie de TIMSS après 1995 et de ce fait n'a pas participé à l'étude de 2008 qui a répliqué l'étude menée en 1995 sur les acquis des futurs scientifiques en fin d'études secondaires. On peut toujours évoquer les insuffisances de ce type d'étude, mais d'une part cela nous prive d'indicateurs importants et de sources de réflexion utiles, et, d'autre part, cela nous fait regarder, dans le monde, comme des mauvais joueurs, qui préfèrent s'exclure des comparaisons possibles, chaque fois qu'elles risquent de tourner à leur désavantage.

Parmi les réflexions internes, en 2003, sous le titre « alerte aux mathématiques ? », l'association des professeurs de mathématiques (APMEP) a largement diffusé un texte résumant les résultats d'une étude à grande échelle (EVAPM) conduite à la fin de la classe de seconde. Cette alerte ne faisait que prolonger les inquiétudes manifestées après les études menées au niveau des classes terminales en 1999. Les mathématiciens prennent leur part dans la dénonciation des insuffisances du système. Ainsi, Laurent Lafforgue (Médaille Fields) écrit dans *Le Figaro* du 4 décembre 2004 : *« ... Les gens l'ignorent, mais on assiste à un naufrage ! On imagine encore que les petits Français sont bons en maths. Mais, ils sont désormais* *mauvais, et cela pose un problème aux universités et aux écoles supérieures, qui ont déjà commencé à baisser le niveau de leurs programmes. ... »*

D'une façon plus modérée, mais tout aussi ferme, Jean-Pierre Bourguignon[8] écrit dans *Le Monde* (4/12/2007) : *« On est obligé de reconnaître que le système scolaire français ne réussit pas à monter tout le monde à un niveau convenable. On peut craindre que, de ce point de vue, les écarts ne se soient récemment creusés encore. »*

Il serait facile de multiplier les citations.

Comme annoncé dans l'introduction, cet article a cherché à informer et à sensibiliser la communauté mathématique. J'ai ailleurs écrit un article destiné à sensibiliser les enseignants du secondaire tout en leur fournissant des instruments de réflexion et d'évaluation qu'ils peuvent utiliser avec leurs élèves [cf. [4] et le site de l'APMEP]. L'enjeu me semble être de tirer profit des résultats et des analyses de PISA pour améliorer la formation pour tous sans perdre ce qui a fait jusqu'à ces derniers temps la qualité habituellement reconnue de la formation mathématique des élites scientifiques (sachant cependant que d'autres élites se sont souvent complu à se glorifier de leur éloignement des mathématiques). Insistons encore sur le fait que cet article est gravement incomplet. Il manque en particulier une présentation complète du cadre de référence de l'étude et, surtout, le questionnement lui même. J'ai renoncé à présenter ici une ou deux questions, ce qui eût été trop réducteur, préférant laisser le lecteur se faire sa propre idée à partir des documents et diaporamas qu'il pourra trouver sur mon site [5]. Sur le même site on trouvera également les questions des domaines « lecture », « sciences » et « problem solving » (qu'il serait ambigü de traduire ici par résolution de problèmes).

Nous n'avons voulu traiter ici que du cas des mathématiques, mais, compte tenu des corrélations évoquées plus haut entre les résultats des divers domaines, il n'est pas sans intérêt de s'intéresser aux questionnements utilisés dans les autres domaines. De plus, le domaine « science » ne peut nous laisser indifférents. Les résultats de notre pays y sont encore, relativement, aux autres pays, plus mauvais qu'en ce qui concerne le domaine mathématique, mais il est certain que le curriculum correspondant est encore plus éloigné que le nôtre des objectifs de PISA.

Références citées

[1] Bodin, A. (2006) Un point de vue sur PISA. Gazette des mathématiciens n° 108. Société Mathématique de France (SMF). pp 54-59

[2] Bodin, A. (2006) Ce qui est vraiment évalué par PISA en mathématiques. Ce qui ne l'est pas. Un point de vue Français. Bulletin de l'APMEP. n° 463. p. 240-265.

[3] Bodin, A. (2005) Classification des questions d'évaluation et cadre de référence des études PISA pour les mathématiques – présentation commentée. (document de travail - site web)

[4] Bodin, A. (2008) : Lecture et utilisation de PISA pour les enseignants. Petit x ; n° 78, pp. 53-78, IREM de Grenoble.

[6] Steen, L. A. (ed.) (1990) On the shoulders of the giants - new approaches to numeracy. National Academic Press (Washington)

[7] Hopmann, S., Brinek, G, Retzl, M., (éds) (2007) PISA according to PISA. Wien : Lit Verlag,

[8] Ruddock, G & al. (2006) : Validation Study of the PISA 2000, PISA 2003 and TIMSS-2003 International Studies of Pupil Attainment. National Foundation for Educational Research. London

[8] Directeur de l'Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS).

[9] Bodin, A. (2007) What does Pisa really assess, in S. Hopman, G. Brinek, M. Retzl (eds) : PISA according to PISA. Wien : Lit Verlag.
[10] Bodin, A. (2006) Les mathématiques face aux évaluations nationales et internationales. De la première étude menée en 1960 aux études TIMSS et PISA ... en passant par les études de la DEP et d'EVAPM. Communication séminaire de l'EHESS. Repères IREM, n° 65, octobre 2006.
[13] Kari Astala, Simo K. Kivelä, Pekka Koskela, Olli Martio, Marjatta Näätänen, Kyösti Tarvainen, and 201 mathematics teachers in universities and polytechnics : The PISA survey tells only a partial truth of Finnish children's mathematical skills, Site de SOLMU http://solmu.math.helsinki.fi/

Accès aux documents complémentaires

[5] De nombreux documents et, en particuliers les questions rendues publiques et commentées sont téléchargeables à l'adresse : http://web.me.com/antoinebodin/pro/ Page « ÉTUDES INTERNATIONALES PISA ».
[11] Les rapport internationaux, en anglais et en français, peuvent être téléchargés à l'adresse : http://www.pisa.oecd.org/.
[12] Les documents et études officiels français peuvent être téléchargés sur le site du ministère à l'adresse : http://www.education.gouv.fr/pid53/evaluation-statistiques.

Nouveaux programmes de mathématiques en classe de seconde : une analyse

Daniel Duverney[1]

Bien que la réforme du lycée ait été reportée à la rentrée 2010, les changements de programmes réalisés à la rentrée 2008 en troisième dans le cadre du « Socle commun de compétences et connaissances » rendent nécessaire une réécriture des programmes de mathématiques de seconde pour la rentrée 2009.

Cette réécriture, essentiellement réalisée par l'Inspection Générale de mathématiques, est soumise à consultation jusqu'au 15 mai 2009. Les propositions de nouveaux programmes se trouvent sur le site d'*Eduscol*[2].

Le but de cette note est de fournir des éléments d'analyse sur ces nouveaux programmes, pour que les adhérents de la SMF puissent faire part de leurs réactions et que la Commission Enseignement puisse se prononcer, en avançant éventuellement des propositions de modifications. Le site Internet de la SMF, dans la rubrique « Réforme du lycée » rendra compte de l'évolution de la réflexion.

Notons d'abord que ces projets de nouveaux programmes présentent des aspects indéniablement positifs :

– une claire réhabilitation du raisonnement et de la démonstration comme une composante fondamentale de la démarche mathématique ;

– une incitation au développement de l'argumentation et de l'entraînement à la logique ;

– une réhabilitation des notations et du vocabulaire mathématique ;

– l'introduction d'outils logiciels et de l'algorithmique comme composante incontournable de la formation mathématique ;

[1] Lycée Baggio, Lille.
[2] http://eduscol.education.fr/D0015/consult_Maths.htm

– une introduction du calcul des probabilités et statistiques centrée plus sur les probabilités « géométriques » que sur l'approche fréquentielle liée à l'expérience statistique.

Cependant, dans ce cadre général, qui constitue une rupture relative et bienvenue par rapport aux précédentes réformes du lycée, ces propositions de programme laissent place à des améliorations, dont nous allons essayer de démontrer la nécessité.

L'objectif général

Le programme proposé s'inscrit dans la logique de la réforme du lycée : la classe de seconde, classe de détermination, où les mathématiques jouent de fait un rôle important de sélection[3], doit tenir compte des différentes possibilités d'orientations ultérieures. Ainsi, le programme de mathématiques de seconde doit s'adresser à tous les élèves, et ne doit pas être principalement conçu comme une préparation à la voie scientifique de première et terminale, qui occasionnerait des difficultés à une majorité d'élèves.

Pour autant, doit-on en conclure que « les capacités attendues doivent être en nombre relativement limité et maîtrisées par tous les élèves », comme le préconisent ces propositions de nouveaux programmes ?

La réponse est sans hésitation négative. Une telle conception, qui semble imposer de fait 100% de réussite, empêche a priori toute différenciation pédagogique et conduit à réduire les « capacités attendues » à un minimum commun, largement en deçà des capacités réelles d'une importante partie des élèves de seconde.

Cet alignement des capacités attendues sur les élèves les plus faibles était déjà perceptible dans le « socle commun des compétences et connaissances », inscrit dans la loi d'orientation de 2005. La SMF et les autres sociétés mathématiques avaient à l'époque tenté d'alerter les pouvoirs publics sur le danger, pour l'avenir de notre enseignement scientifique et technologique, d'un socle commun minimal qui prendrait la place du programme, sans être le moins du monde écoutées[4].

Il faut écarter des programmes cet objectif irréaliste. Le système de notation sur 20 permet une prise en compte efficace de la différenciation : une moyenne de 10 signifie, en principe, que les capacités attendues sont maîtrisées de manière satisfaisante (en quantité et en qualité), sans priver les élèves plus capables ou plus travailleurs de trouver un enseignement à leur niveau et à leur goût.

La lecture des propositions de programme pour la classe de seconde montre que, conformément à ce qui est écrit dans le préambule, les capacités attendues sont en nombre limité et, pour tout dire, insuffisant. Il convient d'en augmenter la liste ; nous ferons quelques propositions plus loin.

[3] On reproche beaucoup à la communauté mathématique ce rôle de sélection. Rappelons tout de même que le français et l'anglais jouent un rôle de sélection tout aussi important, et sont sans aucun doute plus discriminants socialement que les mathématiques.

[4] Voir « Socle commun et objectifs généraux de l'enseignement des mathématiques », `http://smf.emath.fr/VieSociete/PositionsSMF/Soclefinalavril2006.html`

« Techniques » et « résolution de problèmes »

Pour compenser ce niveau d'exigence visiblement très bas en termes de connaissances et de capacités, le projet de programme affirme que « l'objectif de formation pour chaque élève est ambitieux et centré sur la résolution de problèmes. L'acquisition de techniques, certes indispensable, n'est pas un objectif en soi, mais est au service de la pratique du raisonnement, qui doit être la base de l'activité mathématique des élèves. »

Cette affirmation mérite une étude approfondie. Le mot « problème » pose en lui-même question. En effet, la plupart des techniques utilisées en mathématiques vise à résoudre des problèmes de manière rapide et efficace ; elles se présentent d'ailleurs souvent sous la forme d'algorithmes.

Par exemple, l'algorithme de résolution de l'équation du second degré est tout à fait adapté à la grande majorité des élèves de seconde. Pourtant, la résolution de cette équation a été, pendant des siècles, avant la mise au point de cet algorithme, un problème redoutable.

Bien sûr, si un problème est plus complexe, on devra s'aider du raisonnement pour débrouiller la situation ; mais peut-on prétendre sérieusement qu'on saura résoudre de « vrais » problèmes si on ne dispose pas déjà d'une panoplie de techniques, d'une « boîte à outils » mathématique ? Cette boîte à outils doit se constituer et se maîtriser d'abord, et progressivement, par des exercices d'entraînement systématiques, si ennuyeux que ceux-ci puissent paraître parfois.

Il n'est pas évident, en outre, que les jeunes détestent à ce point « faire des gammes ». Il s'agit en effet d'une activité relativement rassurante où, le plus souvent, « le travail paye ». Ce n'est pas toujours le cas de la recherche de problèmes plus difficiles, où il n'existe aucune méthode standard, et qui peut décourager nombre d'élèves moyens et faibles, mais sérieux.

Certes, il convient d'équilibrer les deux types d'activités. Mais prétendre compenser les lacunes d'un enseignement systématique de techniques mathématiques par un entraînement à la résolution de problèmes est certainement une erreur pédagogique.

Les propositions de nouveaux programmes de seconde manifestent ainsi une nette insuffisance dans l'entraînement au calcul algébrique. On pourrait ajouter les rubriques suivantes :

– pratique soutenue d'équations se ramenant au premier degré ;

– équation du second degré (coefficients entiers numériques) ;

– pratique régulière des identités remarquables $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ et des techniques élémentaires de factorisation ;

– pratique régulière de la résolution de systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues.

L'introduction de l'informatique

L'introduction de l'informatique en cours de mathématiques est indispensable. Toutefois, influencée par la tendance « expérimentale » de l'enseignement de la physique qui règne en maître depuis 15 ans[5], cette introduction vise, dans la proposition

[5] Et destinée à reprendre des « parts de marché » dans les choix de spécialité ou d'options par les élèves, notamment au niveau du baccalauréat.

de nouveau programme de seconde, à développer la « possibilité d'expérimenter ». Elle « ouvre largement la dialectique entre l'observation et la démonstration et change profondément la nature de l'enseignement. »

Pour le coup, c'est sans doute accorder à l'outil logiciel un pouvoir excessif : les choses qui se « voient » ont-elles réellement besoin d'être démontrées ? Ne risque-t-on pas, en encourageant cette démarche et en la parant de toutes les vertus pédagogiques, de finalement favoriser la « démonstration empirique » qu'appelait de ses vœux Claude Allègre[6] ?

Certes, on peut imaginer qu'utiliser l'outil logiciel de manière systématique changera la nature de l'enseignement et rendra les élèves plus « actifs » en permettant une réelle « pédagogie d'investigation ». Il s'agit là d'une illusion. Elle a été dénoncée depuis longtemps par les promoteurs mêmes du Nuffield Project pour la physique, qui écrivaient :

« On peut regretter aujourd'hui qu'à la suite des projets Nuffield l'idée de tout fonder sur l'expérience pratiquée par les élèves se soit à ce point installée dans la conscience des professeurs que d'autres activités également valables ont eu tendance à disparaître. Aujourd'hui, il est facile de trouver une leçon de sciences où les élèves sont actifs avec leurs mains – et on peut dire, actifs avec bonheur – mais pas du tout actifs avec leurs esprits.[7] »

Le résultat sera le même en mathématiques. Fonder l'enseignement des mathématiques sur une approche « expérimentale » rendue possible par l'utilisation d'outils logiciels conduira, comme en physique depuis 15 ans, au déclin du raisonnement logico-déductif (contrairement à l'objectif affiché du projet de programme), avec des conséquences graves sur notre enseignement scientifique et technologique supérieur.

Donc, oui à l'introduction de l'utilisation de l'informatique et de bases d'algorithmique en cours de mathématiques en seconde. Non à la « pédagogie d'investigation » élevée au rang de dogme pédagogique, une activité dévoreuse de temps et aux résultats incertains. La résistance opiniâtre d'une grande partie des enseignants du secondaire à l'introduction de l'informatique en mathématiques vient d'ailleurs probablement d'un désaccord profond sur le rôle qu'on entend lui faire jouer[8]. Ce désaccord est justifié, comme l'était en son temps celui sur les excès des « maths modernes ».

L'introduction des techniques informatiques doit donc être raisonnable. Par exemple, en seconde, la résolution de l'équation du second degré, la résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues, la résolution d'une équation de la forme $f(x) = 0$ par la méthode de dichotomie fournissent des exemples de techniques simples et utiles, qui peuvent se travailler d'abord « à la main », puis se traduire par des algorithmes non triviaux et être exploitées en séances de travaux pratiques sur machine, accessibles à tous les élèves.

---

6 « L'enseignement des sciences au lycée », *Bulletin Officiel*, Hors série n° 2 du 30 août 2001, page 8, `http://www.education.gouv.fr/bo/2001/hs2/default.htm`

7 John Ogborn, « Les anglo-saxons sont-ils différents ? » in « Les sciences au lycée, un siècle de réforme des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger », Vuibert INRP, 1996, pages 273-285.

8 Sur ce sujet et ses liens avec l'épreuve pratique de mathématiques au bac S, voir pour plus de détails `http://educmath.inrp.fr/Educmath/en-debat/epreuve-pratique/d-duverney`

La place de la géométrie

Cette priorité accordée dans les propositions de nouveaux programmes à l'utilisation « expérimentale » d'outils logiciels se traduit, puisque cette activité est grande consommatrice de temps, à la suppression de pans entiers du programme, en particulier de la géométrie. Ne subsistent que quelques notions très élémentaires de géométrie analytique plane : droites et intersections de droites.

La disparition de toute géométrie du programme de seconde est inacceptable, pour plusieurs raisons :

– la géométrie fait partie de la culture mathématique commune que nous souhaitons voir acquérir par tous les élèves. La simplicité apparente de ses objets (points, droites, triangles, cercles, vecteurs, qui se « voient » tout autant que des colonnes de chiffres sur l'écran d'un ordinateur) et les possibilités esthétiques qu'ils offrent[9] plaident d'emblée pour que la géométrie occupe une place significative dans le programme.

– si on souhaite réhabiliter le raisonnement et la recherche de problèmes, il est curieux de supprimer la partie des mathématiques qui, à ce niveau, permet de présenter et mettre en œuvre des démonstrations significatives et instructives.

– enfin, les élèves de seconde qui se dirigeront vers des études scientifiques et techniques ont besoin d'un entraînement à la vision géométrique, centrale notamment en physique et en génie mécanique.

Voici quelques propositions pour un enseignement de géométrie en seconde, qui pourraient figurer dans le programme :

– triangles semblables. Relations trigonométriques dans le triangle rectangle. Théorème de Pythagore (démonstration).

– théorème de l'angle inscrit (démonstration). Tangente en un point d'un cercle. Tangentes menées d'un point à un cercle. Cercles inscrits et circonscrits à un triangle.

– somme des angles d'un triangle (démonstration). Surface du triangle (démonstration).

– vecteurs du plan (définis par leurs composantes), traduction géométrique en termes de « bipoints » (sans introduire ce mot). Somme de deux vecteurs, produit d'un vecteur par un scalaire ; exemples de « combinaisons linéaires ». Colinéarité de deux vecteurs. Relation de Chasles. Norme d'un vecteur ; relation avec le théorème de Pythagore.

On notera que les vecteurs ont désormais disparu du programme de troisième. Il est indispensable qu'ils soient maintenus en seconde, non seulement pour les besoins des futurs scientifiques, mais aussi pour les futurs élèves de la voie économique et sociale : la vision géométrique des « vecteurs » du plan est, en effet, un point d'appui précieux pour l'introduction ultérieure de notions de calcul matriciel.

[9] Voir par exemple le récent livre de Géry Huvent, « Sangaku, le mystère des énigmes géométriques japonaises », Dunod ; une bonne partie des énoncés colorés qui y sont proposés sont accessibles au niveau de la classe de seconde.

L'enseignement des probabilités et statistiques

Comme nous l'avons dit, les propositions de nouveaux programmes de seconde proposent de réhabiliter le langage de l'algèbre de Boole pour aborder l'étude des probabilités et statistiques et de fonder l'introduction des probabilités sur la notion d'équiprobabilité, contrairement aux programmes précédents qui privilégiaient le principe des fréquences et l'approche statistique.

Cette façon de présenter les probabilités et statistiques paraît plus simple et évite la difficulté, réelle, de la détermination expérimentale pratique de la probabilité d'un événement. Il ne s'agit pas ici de nier l'intérêt ni l'importance de ce problème, mais il paraît trop difficile pour être abordé au niveau de la classe de seconde, et donc les propositions de programmes semblent aller dans la bonne direction.

Toutefois, la partie « échantillonnage », qui vise à entraîner les élèves à la simulation statistique, devrait disparaître. Elle n'a pas sa place à ce niveau et semble avoir pour objet de faire manipuler un tableur pour arriver à un « questionnement ». Nous retrouvons ici le rôle alloué à l'informatique dans ces propositions de nouveaux programmes ; le temps passé à ces « expérimentations » serait sans l'ombre d'un doute du temps perdu.

L'étude des séries statistiques qui figure, à juste titre, dans les propositions de programme, suffit à organiser des séances de travaux pratiques où les élèves manipuleront un tableur.

Les « thèmes d'étude »

La réforme du lycée proposée par le ministère était une réforme précipitée. Son retrait a lui-même été précipité.

Ainsi, un premier programme a été rédigé en hâte, en trois semaines, par une commission restreinte de six personnes sur la base d'un tronc commun de 3h30 hebdomadaires complété par un module semestriel optionnel. Le retrait de la réforme a conduit l'Inspection Générale aux propositions que nous analysons ici. Celles-ci sont destinées à être mises en œuvre dans le cadre de la classe de seconde actuelle (4h hebdomadaires), de façon en principe transitoire ; dans ce cadre, les « thèmes d'étude » proposés dans le projet, reliquat du projet de programme du module semestriel optionnel, n'ont aucune raison d'être. Les 15 à 20 heures qui sont proposées pour leur mise en œuvre seront plus utilement employées à d'autres tâches, d'autant que deux des thèmes proposés paraissent trop difficiles dans le cadre des « mathématiques pour tous » en seconde.

Conclusion

Les désaccords exprimés ici sur ces propositions de nouveaux programmes sont des désaccords de fond, qui portent sur les objectifs mêmes de l'enseignement des mathématiques pour tous. On l'a vu, le problème porte sur l'introduction de l'informatique conçue comme un outil de mise en œuvre d'une « pédagogie d'investigation ». Grande dévoreuse de temps, cette façon de concevoir les processus d'apprentissage conduit à alléger les objectifs opérationnels et la maîtrise des éléments techniques des mathématiques.

La « pédagogie d'investigation » a été largement mise en œuvre dans le cadre de l'enseignement de la physique par l'introduction d'un enseignement

« expérimental » lors de la « rénovation pédagogique des lycées » en 1992[10]. Elle a fortement affaibli l'enseignement de la physique et provoqué la disparition de pans entiers de cette discipline dans l'enseignement secondaire : statique des solides et des fluides, moment d'une force par rapport à un axe, transferts de chaleur, aspect corpusculaire de la lumière (ne subsiste que l'aspect ondulatoire). Le tout s'est accompagné d'une diminution drastique de la modélisation mathématique, et a provoqué l'effondrement de l'enseignement de la physique dans l'enseignement supérieur.

Nos collègues physiciens finiront bien par retrouver le chemin d'une conception plus équilibrée et réaliste de l'enseignement de leur discipline dans le secondaire[11] (après tout, les matheux sont bien revenus des excès des « maths modernes »). Mais il ne faudrait surtout pas que l'enseignement des mathématiques emprunte la même voie.

On pourrait donc proposer, pour remplacer les « objectifs généraux » qui figurent dans les propositions de nouveaux programmes, le texte suivant :

« Le programme de mathématiques de seconde doit permettre aux élèves de :

– calculer efficacement (calcul mental, fractions, expressions littérales, résolution d'équations) ;

– maîtriser les notions de base de la géométrie du plan : droites, points, triangles, cercles, vecteurs ;

– conduire des raisonnements et des démonstrations élémentaires ;

– utiliser des outils logiciels (calculatrice et tableur) quand ils s'avèrent utiles. »

La Commission Enseignement de la SMF pourrait se fixer pour tâche de rédiger des propositions précises de contenus, dans le cadre de la consultation proposée par le ministère. Celles-ci pourraient réaliser une synthèse entre les propositions de l'Inspection Générale, les remarques qui précèdent, et les actuels programmes de seconde[12]. Ceux-ci, bien que largement ouverts à la « pédagogie d'investigation » et à la « simulation statistique », conservaient en effet un contenu mathématique consistant, notamment en géométrie et en calcul algébrique.

---

[10] Extrait du « rapport sur l'enseignement de la physique » (rapport Bergé), 1989 : « Trop peu d'efforts sont faits vers des formes plus actives et autonomes de l'appropriation des savoirs ; il est pourtant bien connu qu'on ne sait bien que ce que l'on est allé chercher soi-même. » `http://home.nordnet.fr/~dduverney/monsite/niveau3/berge.pdf`

[11] De ce point de vue, les programmes d'avant la « rénovation pédagogique des lycées », issus des travaux de la commission Lagarrigue, étaient dignes d'éloges.

[12] `ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2001/hs2/mathematiques.pdf`

PRIX ET DISTINCTIONS

Laurent Bienvenu, prix Gilles Kahn 2008

Christian Retoré

Le prix de thèse de Specif[1] a été créé en 1998 pour récompenser chaque année une excellente thèse en informatique. Gilles Kahn (1946-2006) a présidé les trois premiers jurys du prix, étant convaincu de l'intérêt de promouvoir les jeunes talents les plus prometteurs de la science informatique. En son honneur, le prix a pris depuis 2007 le nom de Prix de thèse Gilles Kahn et il est patronné par l'Académie des Sciences qui rend ainsi hommage à un de ses membres éminents.

Le jury du millésime 2008, présidé par Antoine Petit, a attribué le prix Gilles Kahn 2008 à Laurent Bienvenu pour sa thèse intitulée : *« Game-theoretic characterizations of randomness : unpredictability and stochasticity »* , effectuée à Marseille au Laboratoire d'Informatique Fondamentale (Université de Provence et CNRS) sous la direction de Bruno Durand et d'Alexander Shen.

Afin d'en dire quelques mots, imaginons deux personnes tirant à pile (P) ou face (F) dix mille fois. Le premier obtient la suite PPPPPP... (« dix milles fois P »), tandis que l'autre obtient une suite de type PFFPPPFPFFPF... Si la théorie des probabilités affirme que ces deux suites avaient a priori la même probabilité de survenir, notre intuition nous dit en revanche qu'a posteriori la seconde semble plus « aléatoire » que la première. Comment formaliser cette intuition ? Une réponse satisfaisante fut donnée dans les années 1960 par Chaitin et Kolmogorov : la première suite ci-dessus n'est pas aléatoire car elle est simple, dans le sens où elle admet une description courte (« dix mille fois P »), où « description » s'entend au sens algorithmique du terme. Ainsi, on définit la complexité de Kolmogorov d'un objet discret fini comme étant la taille du plus petit programme informatique qui l'engendre, les objets non-aléatoires étant alors définis comme ceux de petite complexité de Kolmogorov.

Pour les objets infinis, outre l'approche par la complexité de Kolmogorov, d'autres formalisations de la notion d'aléatoire sont possibles. Celle de Martin-Löf définit comme aléatoire un objet passant tous les tests statistiques calculables par algorithme, tandis que celle de Mises-Schnorr privilégie une définition par les jeux, où un objet est aléatoire si aucune stratégie calculable ne permet de le prédire de façon satisfaisante (l'objet, tel qu'une suite infinie de P et F, étant initialement caché).

La thèse de Laurent Bienvenu est une contribution à l'étude des liens entre ces trois approches (complexité de Kolmogorov, tests, jeux), où le point de vue « jeux » est privilégié. Dans un premier temps, il montre comment classifier les

[1] Société des Personnels Enseignants et Chercheurs en Informatique de France

objets non-aléatoires en fonction de la vitesse des gains des stratégies les prédisant. Il montre également comment un gain de stratégie peut s'interpréter comme une compression de données, et donne à la lumière de ce résultat une série de théorèmes reliant aléatoire et incompressibilité. Son étude porte également sur les interactions de la théorie algorithmique de l'aléatoire avec les mathématiques « classiques », bien évidemment la théorie des martingales, mais aussi des théorèmes comme le théorème de Kakutani (concernant les mesures de probabilité de Bernoulli), le lemme de Fatou, ou encore le théorème de Radon-Nikodym.

Ces questions, bel exemple du lien entre mathématiques et informatique, seront abordées dans un prochain numéro de la *Gazette*.

Cédric Villani reçoit un prix de la Société Mathématiques Européenne

Laurent Desvillettes, Alessio Figalli

Parcours de Cédric Villani

Cédric Villani est âgé de 35 ans, il est professeur de mathématiques à l'ÉNS Lyon depuis 2000, après avoir été élève puis agrégé-préparateur à l'ÉNS Ulm. Il est membre de l'IUF (junior) depuis 2006.

Il a été Conférencier invité à l'ICM 2006, et a obtenu les distinctions suivantes :

– Prix Louis-Armand (2001)
– Cours Peccot (2003)
– Harold Grad Lecture (2004)
– Prix Jacques Herbrand (2007)
– Prix de la SME (2008)

De la conjecture de Cercignani à l'hypocoercivité

L'analyse du comportement en temps long des systèmes dissipatifs (du type équations aux dérivées partielles ou équations intégrales) repose, lorsque l'on dispose d'une fonctionnelle de Lyapounov H (ou entropie) qui prend son minimum en 0 (en un unique point appelé équilibre), et de sa dissipation D, sur des inégalités fonctionnelles (parfois dites de coercivité) du type

$$\forall f \in F, \qquad D(f) \geq \Phi(H(f)). \tag{1}$$

Ici, F est un ensemble (de fonctions) stable par le flot du système dissipatif considéré, et la vitesse de convergence vers l'équilibre de la solution $t \mapsto f(t)$ du système sera d'autant plus rapide que Φ a une forte croissance en 0.

On sait par exemple depuis les années 70 démontrer la convergence exponentiellement rapide vers l'équilibre de nombreuses équations paraboliques de type Fokker-Planck, gâce à l'inégalité de Sobolev logarithmique (dans (1), D est dans ce cas l'information de Fisher relative à une gaussienne, et H l'information de Kullback relative à la même gaussienne), cf. [18].

La conjecture de Cercignani (cf. [3]) consistait à obtenir (1) lorsque H et D étaient l'entropie et la dissipation d'entropie relatives au noyau de Boltzmann (avec une section efficace bien choisie), F étant l'ensemble des fonctions dont la masse, l'impulsion et l'énergie étaient fixés, et Φ étant une fonction linéaire. Le noyau de Boltzmann (noté $Q(f)$) est un opérateur intégral non linéaire qui décrit l'effet des collisions élastiques binaires sur la distribution en vitesse des molécules dans un gaz raréfié monoatomique (cf. [7]).

Bien que certains contre-exemples montraient que pour beaucoup de sections efficaces (incluant la plupart des sections efficaces rencontrées dans la physique), la conjecture ne pouvait être vraie [8], des résultats positifs se rapprochant de la conjecture furent obtenus tout au long des années 90, en particulier grâce aux travaux de E. Carlen et M.C. Carvalho (qui montrent que (1) est valable pour certains Φ dans le cas de l'opérateur de Boltzmann), (cf. [6]), puis de L. Desvillettes et C. Villani, qui démontrent la conjecture pour le noyau de Landau (avec la section efficace des molécules maxwelliennes), (cf. [11]), et enfin de G. Toscani et C. Villani, qui démontrent (1) dans le cas du noyau de Boltzmann avec Φ « presque linéaire » dans le cas de sections efficaces réalistes (cf. [34]).

La démonstration de ce dernier résultat est très surprenante et élégante, car elle utilise le résultat obtenu pour le noyau de Landau, ainsi que le flot de l'équation de Fokker-Planck linéaire (qui sont des objets faisant intervenir des dérivées) alors que les objets intervenant dans l'estimation finale sont purement intégraux.

Dans un article qui clarifie l'ensemble des approches précédentes, C. Villani montre enfin qu'en fait la conjecture de Cercignani est vérifiée dans le cas de sections efficaces particulières (non physiques), et qu'elle est « presque » vérifiée dans tous les cas d'intérêt physique (cf. [36]).

Au début des années 2000, la preuve de la conjecture de Cercignani permettait de bien comprendre le comportement en temps long de l'équation de Boltzmann spatialement homogène (i.e. lorsque toutes les molécules d'un gaz raréfié ont la même distribution de vitesses en chaque point de l'espace). Par contre, le comportement en temps long de l'équation de Boltzmann complète, qui s'écrit

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f), \tag{2}$$

où $f := f(t, x, v)$ est la densité de molécules d'un gaz raréfié (monoatomique) qui au temps t et au point x (dans un domaine borné) possèdent la vitesse v, restait presque complètement inconnu.

La méthode d'étude qui repose sur les inégalités de coercivité telles que (1) était inopérante pour des équations du type (2) car la dissipation d'entropie D ne contrôlait pas le comportement de f par rapport à la variable x. L'existence d'un équilibre unique était néanmoins assurée grâce à un calcul de H. Grad datant des années 60 (cf. [17]), qui utilise de manière astucieuse le terme non coercif $v \cdot \nabla_x f$ (sauf dans des géométries très spécifiques liées à l'invariance galiléenne). On se trouvait donc vis-à-vis du comportement en temps long dans une situation semblable à celle des opérateurs hypoelliptiques vis-à-vis de la régularité. Le terme d'hypocoercivité apparaîtrait peu après du fait de cette analogie.

Un premier travail, réalisé par L. Desvillettes et C. Villani au début des années 2000 pour le cas très simplifié dans lequel Q était remplacé par un opérateur du type Fokker-Planck (donc linéaire), permettait de mettre en place une méthode reposant sur l'étude d'un système d'inéquations différentielles permettant d'obtenir la convergence « plus rapide que toute puissance négative » (ce que l'on note parfois $O(t^{-\infty})$) vers l'équilibre (cf. [12]). Ce travail a depuis été largement amélioré par B. Helffer et F. Nier ainsi que F. Hérau et F. Nier d'une part (qui ont développé des méthodes reposant sur les Laplaciens de Witten) (cf. [20] and [21]), et C. Villani d'autre part (dans le cadre de la mise en place des bases de la théorie de l'hypocoercivité dans le cas linéaire) (cf. [35]).

De nombreuses améliorations techniques ont permis au milieu des années 2000 d'obtenir un résultat équivalent de convergence en $O(t^{-\infty})$ vers l'équilibre dans le cas où Q est le véritable opérateur de Boltzmann, sous réserve que les solutions considérées soient régulières (par exemple pour les solutions perturbatives de Y. Guo) (cf. [14]). Ce résultat peut être vu comme une version quantitative des calculs de H. Grad, il utilise également une version raffinée des inégalités de Korn (qui relient la distance à une rotation rigide au gradient symétrisé d'un champs de $\boldsymbol{R}^3$ dans $\boldsymbol{R}^3$) (cf. [13]). L'interprétation physique de ce résultat est la suivante : un gaz raréfié (monoatomique) confiné dans une boîte (avec des conditions de réflexion spéculaire au bord) relaxe « plus rapidement que toute puissance négative » vers son état d'équilibre (une maxwellienne indépendante du point de l'espace considéré sauf dans quelques cas non génériques que l'on peut décrire).

Les conditions dans lesquelles apparaît l'hypocoercivité ont depuis été formalisées par C. Villani (cf. [35]) ainsi que par C. Mouhot et L. Neumann (cf. [28]), en particulier dans le cadre linéaire. Le cas non-linéaire, beaucoup plus complexe, reste imparfaitement connu et continue de faire l'objet de recherches intenses. Il est à présent possible de se passer du système d'inéquations différentielles et de raisonner directement sur les opérateurs dont un certain nombre de propriétés abstraites doivent être vérifiées : il s'agit là d'une avancée cruciale que les travaux de C. Villani ont précipitée.

C. Villani a sans aucun doute joué un rôle décisif dans l'émergence de la théorie de l'hypocoercivité, qui dépasse maintenant largement le cadre des seules équations cinétiques. De même son apport avait été essentiel lors de l'établissement des inégalités de coercivité reliées à la conjecture de Cercignani dans les années 90. Enfin les questions d'entropie n'épuisent pas les contributions de C. Villani à la théorie cinétique : celui-ci a également marqué l'étude des questions de régularité et d'existence en particulier grâce à des articles en collaboration avec R. Alexandre, L. Desvillettes et B. Wennberg (cf. [2]) d'une part, et R. Alexandre d'autre part (cf. [1]).

Transport optimal

Après les travaux fondateurs de Brenier à la fin des années 80, le transport optimal a été un domaine de recherche très actif, dans lequel Cédric Villani a joué un rôle très important. Son intérêt s'est porté sur plusieurs points de la théorie.

Dans [30], en collaboration avec Otto, il s'est intéressé aux liens entre les équations de diffusion et le problème du transport, en essayant surtout d'utiliser le transport optimal et le point de vue de Otto (qui avait étudié les équations de la chaleur et des milieux poreux en les voyant comme un flot gradient par rapport à la distance de Wasserstein [29]) pour étudier des inégalités du type Sobolev (en particulier les inégalités de Sobolev logarithmiques) et pour démontrer des résultats de convergence vers l'équilibre pour des équations aux dérivées partielles de type diffusion. Cet article a été un point de départ pour deux directions de recherche : d'abord c'est la première fois que des inégalités « de type Sobolev » (autres que l'isopérimétrique) apparaissent en connexion avec le transport, et en un certain sens cet article a annoncé beaucoup des développements qui ont suivi par la suite. De plus, toujours pour la première fois, la courbure de Ricci apparaît dans le transport optimal. Ces lignes de recherche ont été toutes deux développées par Villani.

Dans un papier avec Cordero-Erausquin et Nazaret [10], il utilise le transport optimal pour démontrer des inégalités de Sobolev et Gagliardo-Nirenberg optimales sur $\mathbb{R}^n$. Cette approche, simple et efficace, permet aussi de traiter les cas d'égalité et peut être généralisée au cas où on change la norme euclidienne en n'importe quelle autre norme sur $\mathbb{R}^n$.

Concernant les liens entre transport optimal et courbure de Ricci, Otto et Villani [30] et d'autres auteurs [9, 31] avaient montré que le transport optimal sur une variété (et plus particulièrement les propriétés des géodésiques dans l'espace des mesures de probabilité avec la distance de Wasserstein) avait un lien très fort avec la courbure de Ricci de la variété. Ce fait a été le point de départ pour Lott et Villani [26] et Sturm [32, 33] pour développer une théorie de la courbure de Ricci sur les espaces métriques (voir aussi [22]). L'idée est que des bornes par au-dessous sur la courbure de Ricci peuvent être exprimées en terme de certaines inégalités de convexité pour des fonctionnelles sur l'espace de mesure de probabilité. Alors ces inégalités deviennent le point de départ pour définir une notion de courbure de Ricci $\geqslant K$ en dimension N (ce qui rappelle la notion de courbure-dimension à la Bakry-Émery). Cette notion est d'une part assez robuste pour être stable pour la convergence par Gromov-Hausdorff, et d'autre part assez forte pour démontrer des résultats non-triviaux, comme par exemple des inégalités de Sobolev, le théorème de Bishop-Gromov et aussi une version faible du théorème de Bonnet-Myers.

Plus récemment, Cédric Villani s'est intéressé à la régularité du transport optimal sur les variétés. En fait il est bien connu que la régularité du transport revient à étudier des équations du type Monge-Ampère, mais seulement récemment, après les papiers de Ma, Trudinger et Wang [27] et Loeper [23], on a découvert que : d'abord, la régularité du transport optimal sur une variété est très différente du cas de $\mathbb{R}^n$ et la géométrie de la variété joue un rôle important ; ensuite, pour avoir la régularité, une condition nécessaire et (presque) suffisante est qu'une certaine combinaison des dérivées quatrièmes de la distance ait un signe (maintenant cette condition est appelée « MTW-condition »). Cette condition assez mystérieuse impose des restrictions très fortes sur la variété : elle implique que la courbure sectionelle soit positive et dit aussi que la courbure ne peut pas « bouger trop vite ». Un modèle de variété qui satisfait à cette condition est la sphère n-dimensionnelle [24] et, en dimension 2, ses perturbations [15]. Cédric Villani s'est intéressé surtout à la stabilité de la condition de MTW, en montrant une stabilité « faible » de cette condition sous la convergence de Gromov-Hausdorff [39]. Enfin, dans un papier avec Loeper [25], il étudie les liens entre cette condition et la géométrie du cut-locus de la variété en arrivant à montrer que si une variété non-focale satisfait à la condition de MTW, alors pour tout $x \in M$ chaque cut-locus cut(x), vu de T_xM grâce à l'inverse de la fonction exponentielle, définit le bord d'un domaine convexe. Ce résultat est le premier de ce type où on arrive à déduire une propriété géométrique aussi forte du cut-locus, et la découverte de ce lien a été un point de départ pour toute une théorie qui est encore en train d'être développée. Par exemple, en utilisant ce point de vue, Figalli et Rifford [15] ont démontré que, si on perturbe la métrique de la sphère 2-dimensionnelle, alors pour tout point x chaque cut-locus cut(x), vu de T_xM grâce à l'inverse de la fonction exponentielle, définit le bord d'un domaine strictement convexe, ce qui est un résultat géométrique complètement nouveau. Ce résultat est poussé encore plus loin par Figalli, Rifford et Villani [16], où ils montrent la présence d'une connexion très forte en dimension 2 entre la condition de MTW et la convexité des lieux focaux.

On rappelle enfin que Villani a écrit deux livres très importants [37, 38], qui sont devenus des textes de référence pour les jeunes chercheurs qui se lancent dans le sujet, et qui mettent de l'ordre dans un domaine qui continue à se développer dans plusieurs directions.

Références

[1] Alexandre R., and Villani C. On the Boltzmann equation for long-range interactions. *Comm. Pure Appl. Math. 55*, 1 (2002), 30–70.

[2] Alexandre R., Desvillettes L., Villani C. and Wennberg B. Entropy dissipation and long-range interactions. *Arch. Rat. Mech. Anal. 152*, (2000), 327-355.

[3] Bobylev A. V., Cercignani C. On the rate of entropy production for the Boltzmann equation *J. Statist. Phys. 94*, 3-4 (1999), 603-618.

[4] Brenier Y. Polar decomposition and increasing rearrangement of vector fields. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 305*, 19 (1987), 805–808.

[5] Brenier Y. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. *Comm. Pure Appl. Math. 44*, 4 (1991), 375–417.

[6] Carlen E., and Carvalho M. Entropy production estimates for Boltzmann equations with physically realistic collision kernels. *J. Statist. Phys. 74*, 3-4 (1994), 743–782.

[7] Cercignani C. The Boltzmann equation and its applications. Springer, Berlin, 1988.

[8] Cercignani C. H-theorem and trend to equilibrium in the kinetic theory of gases. *Arch. Mech. 34*, (1982), 231-241.

[9] Cordero-Erausquin D., McCann R.J., and Schmuckenschlager M. A Riemannian interpolation inequality à la Borell, Brascamp and Lieb. *Invent. Math. 146*, 2 (2001), 219–257.

[10] Cordero-Erausquin D., Nazaret B., and Villani C. A mass-transportation approach to sharp Sobolev and Gagliardo-Nirenberg inequalities. *Adv. Math. 182*, 2 (2004), 307–332.

[11] Desvillettes L., and Villani C. On the spatially homogeneous Landau equation for hard potentials. II. *H*-theorem and applications. *Comm. Partial Differential Equations 25*, 1-2 (2000), 261–298.

[12] Desvillettes L., and Villani C. On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating systems : the linear Fokker-Planck equation. *Comm. Pure Appl. Math. 54*, 1 (2001), 1–42.

[13] Desvillettes L., and Villani C. On a variant of Korn's inequality arising in statistical mechanics. *ESAIM Control Optim. Calc. Var. 8*, (2002), 603–619 (electronic). A tribute to J.-L. Lions.

[14] Desvillettes L., and Villani C. On the trend to global equilibrium for spatially inhomogeneous kinetic systems : the Boltzmann equation. *Invent. Math. 159*, 2 (2005), 245-316.

[15] Figalli A., and Rifford L. Continuity of optimal transport maps on small deformations of $\mathbb{S}^2$. Preprint, 2008.

[16] Figalli A., Rifford L., and Villani C. On the stability of Ma-Trudinger-Wang curvature conditions. In preparation.
[17] Grad H. On Boltzmann's *H*-theorem. *J. Soc. Indust. Appl. Math. 13*, 1 (1965), 259–277.
[18] Gross L. Logarithmic Sobolev inequalities. *Amer. J. Math. 97*, (1975), 1061–1083.
[19] Guo Y. Classical solutions to the Boltzmann equation for molecules with an angular cutoff. *Arch. Ration. Mech. Anal. 169*, 4 (2003), 305–353.
[20] Helffer B., and Nier F. In *Hypoellipticity and spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians*, Vol. 1862 of lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 2005.
[21] Herau F., and Nier F. Isotropic hypoellipticity and trend to the equilibrium for the Fokker-Planck equation with high degree potential. *Arch. Ration. Mech. Anal. 171*, 2 (2004), 151-218.
[22] Ledoux M. Géométrie des espaces métriques mesurés : les travaux de Lott, Villani, Sturm. *Séminaire Bourbaki*, 2008.
[23] Loeper G. On the regularity of solutions of optimal transportation problems. *Acta Math.,* to appear.
[24] Loeper G. Regularity of optimal maps on the sphere : The quadratic cost and the reflector antenna. Preprint, 2008.
[25] Loeper G., and Villani C. Regularity of optimal transport in curved geometry : the nonfocal case. Preprint, 2008.
[26] Lott J., and Villani C. Ricci curvature via optimal transport. *Ann. of Math.,* to appear.
[27] Ma X. N., Trudinger N. S., and Wang X. J. Regularity of potential functions of the optimal transportation problem. *Arch. Ration. Mech. Anal. 177*, 2 (2005), 151–183.
[28] Mouhot C., and Neumann L. Quantitative perturbative study of convergence to equilibrium for collisional kinetic models in the torus *Nonlinearity 19*, (2006), 969-998.
[29] Otto F. The geometry of dissipative evolution equations : the porous medium equation. *Comm. Partial Differential Equations 26*, 1-2 (2001), 101–174.
[30] Otto F., and Villani C. Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality. *J. Funct. Anal. 173*, 2 (2000), 361–400.
[31] von Renesse M.-K., and Sturm K.T. Transport inequalities, gradient estimates, entropy, and Ricci curvature. *Comm. Pure Appl. Math. 58*, 7 (2005), 923–940.
[32] Sturm K.T. On the geometry of metric measure spaces. I. *Acta Math. 196*, 1 (2006), 65–131.
[33] Sturm K.T. On the geometry of metric measure spaces. II. *Acta Math. 196*, 1 (2006), 133–177.
[34] Toscani G., and Villani C. Sharp entropy dissipation bounds and explicit rate of trend to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation. *Comm. Math. Phys. 203*, 3 (1999), 667–706.
[35] Villani C. Hypocoercivity. Memoirs Amer. Math. Soc. (to appear).
[36] Villani C. Cercignani's conjecture is sometimes true and always almost true. *Commun. Math. Phys. 234* (2003), 455–490.
[37] Villani C. Topics in optimal transportation. *Graduate Studies in Mathematics, 58*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
[38] Villani C. Optimal transport, old and new. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 338*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
[39] Villani C. Stability of a 4th-order curvature condition arising in optimal transport theory. Preprint, 2008.

Laure Saint-Raymond reçoit un prix de la Société Mathématiques Européenne

Isabelle Gallagher, François Golse

À moins de trente-quatre ans, Laure Saint-Raymond est l'une des mathématiciennes les plus actives de sa génération. Lauréate de l'un des prix de la Société Mathématique Européenne décernés au Congrès Européen de Mathématiques en 2008, elle vient de recevoir tout récemment le Ruth Lyttle Satter Prize de l'American Mathematical Society.

Elle est actuellement Professeur à l'École Normale Supérieure de Paris, après avoir été Chargée de Recherches au CNRS de 2000 à 2002, et Professeur à l'université Pierre-et-Marie-Curie de 2002 à 2007. Ses travaux portent sur deux thèmes bien distincts des équations aux dérivées partielles : d'une part l'étude des modèles cinétiques pour les gaz et les plasmas, et d'autre part l'analyse de modèles de la mécanique des fluides intervenant en géophysique. Ses contributions à l'un et l'autre de ces deux sujets ont été décisives, et nous allons essayer d'en donner une idée.

Le problème de la cohérence entre les équations classiques de la mécanique des fluides (c'est-à-dire des équations d'Euler ou de Navier-Stokes) et l'équation de Boltzmann de la théorie cinétique des gaz s'est posé très tôt. Mentionné explicitement dans les articles fondateurs de Maxwell et de Boltzmann sur le sujet, il sera formalisé par Hilbert qui le cite en exemple d'axiomatisation des lois de la physique dans son sixième problème (1900), et en propose une première approche mathématique (dans une variante linéarisée), comme application de ses travaux sur les équations intégrales (1912). La stratégie de Hilbert ne sera d'ailleurs complètement mise en œuvre qu'en 1980 par Caflisch, qui démontre que toute solution régulière locale en temps des équations d'Euler de la dynamique des gaz parfaits monoatomiques est limite d'une suite de solutions de l'équation de Boltzmann dans la limite où le libre parcours moyen des molécules est petit devant les distances typiques de l'écoulement ainsi modélisé. Malheureusement, cette stratégie n'est envisageable que dans la phase de régularité de l'écoulement limite décrit par les équations d'Euler ou de Navier-Stokes. Or, dans le cas des équations d'Euler des fluides compressibles, on sait depuis les travaux de Sideris (1986) que les solutions régulières développent en général des singularités au bout d'un temps fini. Dans le cas des équations d'Euler ou de Navier-Stokes en régime incompressible et en dimension d'espace égale à trois, le même problème est, à ce jour, encore ouvert.

En revanche, il existe, pour certaines équations de la mécanique des fluides, des solutions faibles (au sens des distributions) définies globalement. Dans le cas des équations de Navier-Stokes des fluides incompressibles en dimension trois, l'existence globale de solutions faibles fut démontrée par Leray en 1934 ; pour ce qui est de l'équation de Boltzmann, R. DiPerna et P.-L. Lions obtinrent, en 1990, l'existence globale de solutions faibles – en un sens toutefois un peu différent des solutions au sens des distributions. L'analogie entre les deux constructions est frappante : par exemple, le théorème H de Boltzmann, qui n'est rien d'autre que le second principe de la thermodynamique dans le contexte de la théorie cinétique des gaz, joue, dans la construction de DiPerna-Lions, un rôle analogue à celui de la conservation de l'énergie dans l'argument de Leray. Il était donc naturel de poser le problème étudié par Hilbert dans ce cadre – c'est-à-dire de montrer que les solutions de Leray des équations de Navier-Stokes en régime incompressible s'obtiennent comme limites de solutions au sens de DiPerna-Lions de l'équation de Boltzmann dans un certain régime asymptotique. Ce régime correspond à des écoulements gazeux à vitesse très faible devant la vitesse du son, pour lesquels le mouvement peut être considéré comme approximativement incompressible. Les solutions de Leray et de DiPerna-Lions n'étant a priori que des solutions faibles, on ne peut leur appliquer la stratégie proposée par Hilbert. C'est pourquoi un programme reposant sur des méthodes de compacité fut proposé à la fin des années 1980 pour démontrer la convergence des solutions de DiPerna-Lions de l'équation de Boltzmann vers les solutions de Leray des équations de Navier-Stokes ; les différentes étapes de ce programme furent réalisées au cours des années 1990 par différents auteurs. Mais un dernier obstacle demeurait, à savoir l'éventualité d'une accumulation, dans le processus de limite vers l'hydrodynamique, de particules de vitesses arbitrairement grandes. Cette dernière difficulté paraissait considérable, car les seules estimations dont on dispose sur les solutions, découlant du théorème H de Boltzmann, ne permettent pas de contrôler ce phénomène. En 2000, Laure Saint-Raymond proposa, pour y parvenir, un argument reposant sur les propriétés de dispersion de l'opérateur de transport, et sur le terme de production d'entropie. La mise en œuvre de cet argument dans le cas de l'équation de Boltzmann aboutit finalement en 2004 à une démonstration complète de la limite hydrodynamique, valable globalement en temps, et robuste à des pertes éventuelles de régularité des solutions.

Décrivons à présent sommairement les travaux de Laure Saint-Raymond dans le domaine des fluides géophysiques. Le programme qu'elle développe avec divers collaborateurs consiste à tenter de traduire en termes mathématiques puis en théorèmes, certains résultats connus des physiciens et océanographes et obtenus par des raisonnements heuristiques reposant sur des expériences physiques ou numériques ; un objectif à plus long terme étant de permettre d'approfondir leur propre connaissance et leur compréhension des modèles, afin d'améliorer par exemple leurs prévisions de phénomènes exceptionnels. Il s'agit là d'un vaste programme, les difficultés se situant tout d'abord dans la compréhension profonde des phénomènes physiques en question, puis dans leur formulation mathématique, et enfin dans l'énoncé et la démonstration de théorèmes pouvant ensuite être présentés à des physiciens (et susceptibles de les intéresser, donc dans des cadres physiques réalistes, et qui peuvent effectivement conduire à une compréhension nouvelle des phénomènes en question).

Donnons un exemple : on imagine sans peine que les équations régissant le mouvement des océans sur la planète sont extrêmement complexes et font intervenir de nombreux paramètres. Afin d'étudier ces équations (c'est-à-dire de montrer qu'elles possèdent effectivement des solutions, d'analyser leur stabilité par rapport aux paramètres ou à des perturbations, de connaître leur comportement qualitatif), il convient tout d'abord de les simplifier en identifiant et en isolant les caractéristiques principales permettant de décrire la dynamique de manière satisfaisante. Une analyse formelle des ordres de grandeur des différents paramètres permet ainsi par exemple, dans le cas d'une analyse à grande échelle du mouvement, de réduire les équations à un système d'équations aux dérivées partielles du même type que les équations de Navier-Stokes. Un travail mathématique important consiste alors à justifier ces simplifications, en démontrant que la solution de l'équation approchée possède bien une dynamique comparable à celle du système de départ. Cette question est en général extrêmement difficile, et pour la plupart des modèles utilisés par les physiciens ou océanographes, elle n'est pas résolue. Par rapport aux classiques équations de Navier-Stokes, les équations simplifiées des océans possèdent plusieurs facteurs caractéristiques, dus à la faible profondeur de l'océan par rapport à son étendue horizontale (à grande échelle), au forçage par le vent à l'interface avec l'atmosphère, et à l'effet de la force de Coriolis (les équations étant posées dans un repère en rotation : la Terre). Chacune de ces caractéristiques a une influence propre sur la dynamique, qui est susceptible d'expliquer certains phénomènes observés dans les océans. Par exemple, à des latitudes moyennes il est connu des physiciens (il s'agit d'un célèbre résultat dû à Taylor et Proudman au dix-neuvième siècle) que les particules de fluide tendent, sous l'effet de la force de Coriolis, à s'organiser en colonnes verticales et ainsi le mouvement tend à se stratifier et à ne plus dépendre de la variable de profondeur. Lorsque l'on se rapproche de l'équateur, l'effet de la force de Coriolis s'amoindrit, et de nouvelles structures et de nouveaux courants apparaissent. L'une des contributions récentes de Laure Saint-Raymond et de ses co-auteurs a été de mettre en évidence de manière rigoureuse la présence d'ondes nouvelles provoquées par ces variations de l'amplitude de la force de Coriolis, et à analyser leurs interactions avec les autres ondes présentes dans les océans (en montrant que ces ondes sont essentiellement découplées). Aux environs de l'équateur, il est également établi heuristiquement par les océanographes qu'il existe des zones de recirculation et des zones de ventilation : plus précisément dans certaines zones de l'océan, sous l'effet d'un vent suffisamment fort à la surface de l'eau, ces nouvelles ondes se retrouvent piégées. Dans un travail en cours, Laure Saint-Raymond a formalisé mathématiquement ce phénomène (sous forme de l'analyse microlocale du front d'onde des solutions) et ce piégeage a pu être mis en évidence par des techniques empruntées à la fois à l'optique géométrique et aux systèmes dynamiques.

Les travaux de Laure Saint-Raymond témoignent de la variété et de la profondeur des problèmes mathématiques que posent la mécanique des fluides et la physique statistique, auxquels elle a apporté des contributions remarquables.

INFORMATIONS

MATHS A VENIR 2009

Marie-Françoise Roy

MATHS A VENIR 2009 a pour but de contribuer au débat public sur l'avenir des mathématiques en France. Il veut faire connaître l'extraordinaire explosion que vit actuellement la recherche mathématique, dont les applications irriguent les domaines les plus variés, et décrire les interactions étroites qui se nouent avec le monde économique de l'industrie et des services, les autres branches de la science contemporaine, et la société dans son ensemble. Ces succès donnent à la communauté mathématique de nouvelles responsabilités, auxquelles il convient de réfléchir.

MATHS A VENIR 2009 sera marqué par un colloque qui se tiendra les 1er et 2 décembre 2009 à la Maison de la Mutualité à Paris. Il comprendra cinq conférences mathématiques accessibles aux non-spécialistes, données par

- Corinna Cortes (Google Research, New York)
- Olivier Faugeras (INRIA Sophia-Antipolis et ÉNS Paris)
- Etienne Ghys (CNRS, ÉNS Lyon)
- Pierre-Louis Lions (Collège de France, Paris)
- Wendelin Werner (Université Paris-Sud et ÉNS Paris)

ainsi que des tables rondes et des animations. Trois ateliers préparatoires : « Mathématiques et société », « Mathématiques et industrie » et « Mathématiques dans la science contemporaine » seront organisés au cours du printemps 2009 à Rennes, Paris et Lille.

MATHS A VENIR 2009 est une initiative de la SFdS, de la SMAI et de la SMF, soutenue par l'association femmes & mathématiques. Elle est coorganisée avec le CNRS, la Fondation Sciences Mathématiques de Paris, l'IHÉS et l'INRIA.

Un premier colloque MATHÉMATIQUES A VENIR s'est tenu à l'École Polytechnique en 1987 à l'initiative de la SMAI et de la SMF. Il a marqué durablement les esprits et contribué à une meilleure compréhension du rôle des mathématiques, et de la communauté des mathématiciennes et mathématiciens, dans la société. L'article de Jean-François Méla « Le premier colloque MATHÉMATIQUES A VENIR » dans cette *Gazette* nous replonge dans le contexte de l'époque.

Le monde a changé en 20 ans, les mathématiques aussi, MATHS A VENIR 2009 sera l'occasion de faire le point à la lumière de ces changements.

Pour suivre cette initiative, visitez à intervalles réguliers le site `www.maths-a-venir.org`. Il sera régulièrement alimenté en informations sur le colloque et les ateliers préparatoires, et s'enrichira d'éclairages variés au cours de l'année.

Le premier colloque MATHÉMATIQUES A VENIR[1]

Jean-François Méla[2]

Un virage stratégique pour les mathématiques françaises

J'ai eu le privilège de présider la SMF au moment du colloque MATHÉMATIQUES A VENIR, à une période charnière pour les mathématiques françaises. Non pas que leur qualité fût en cause – elles étaient toujours brillantes – mais leur situation était critique du point de vue du recrutement des jeunes et des moyens qui étaient alloués aux chercheurs. En 1986, 50% de l'effectif des enseignants-chercheurs et chercheurs avait entre 40 et 47 ans. Plus grave, il n'y avait eu, l'année précédente, que 16 postes de maîtres de conférences mis au concours qui n'avaient donné lieu qu'à 8 vrais nouveaux recrutements. Sur quelque 10.000 chercheurs CNRS on ne comptait que 219 mathématiciens, et on avait eu une mesure aberrante de suspension des concours 86, laissant dans une position précaire l'ensemble des candidats classés par les jurys, dont 15 jeunes mathématiciens – mesure contre laquelle la SMF avait élevé les plus vives protestations. Cependant, si faible que fût l'effectif des chercheurs CNRS, il était alors vital pour la discipline car – c'était avant l'expansion démographique étudiante des années 90 – le nombre de créations de postes universitaires était resté faible. On ne dénombrait que 250 mathématiciens de moins de 35 ans et la moitié d'entre eux était au CNRS. Ajoutons que la faible place des mathématiques dans cet organisme était d'ailleurs contestée. Ainsi nous avions entendu le directeur général du CNRS de l'époque nous déclarer que les mathématiques avaient « vocation à rester une discipline essentiellement universitaire, à cause de l'importance des tâches de formation dans cette discipline » et qu'il n'envisageait de créer d'unités mixtes en mathématiques « qu'à titre exceptionnel »[3]. Nous n'étions pas au CNRS une discipline majeure, mais plutôt la dernière roue du carrosse de notre département scientifique, sans même un directeur scientifique adjoint mathématicien, et avec des crédits indigents.

Paradoxalement, ce phénomène se produisait alors que les mathématiques avaient de plus en plus d'importance économique, mais nous avions à lutter contre l'image publique d'une « science morte », d'une formation de l'esprit, d'une matière à sélection... À titre anecdotique et pour mesurer le faible crédit dont nous jouissions, la France avait apporté un soutien misérable au congrès international des mathématiciens de Berkeley (1986) dont notre corps diplomatique avait été singulièrement absent.

---

[1] École Polytechnique, 9-10 décembre 1987.

[2] Professeur émérite à l'université Paris XIII.

[3] Le CNRS avait à l'époque le projet de distinguer parmi les unités associées celles qui avaient une valeur stratégique pour la politique scientifique – c'est de ces unités, baptisées unités mixtes, qu'il s'agit dans le discours du directeur général de l'époque. Toute ressemblance avec la situation actuelle est purement fortuite...

La SMF défendait une certaine idée de l'unité des mathématiques, à la fois de leur vitalité propre, comme de la richesse de leurs interactions avec les sciences et l'ingénierie. Mais nous n'avions pas encore su convaincre les décideurs qu'elles étaient une « ressource stratégique pour le futur », comme avaient réussi à le faire nos collègues américains à la suite du « Rapport David » [4]. Nous constations que notre profession était mal organisée et fort peu représentée dans les instances de décision. Nous étions décidés à agir, à la fois pour renforcer la SMF et pour faire entendre la voix des mathématiciens dans le débat public.

Une conception archaïque de la recherche mathématique prévalait dans les sphères dirigeantes. Nous faisions le pari que nous obtiendrions un changement de politique. Nous voulions donc pour cela donner un nouveau visage de notre profession. Il fallait d'abord en convaincre la majorité de nos collègues. Beaucoup d'entre eux considéraient, en effet, que tout ce qui s'écartait de la recherche individuelle était du temps perdu[5], que l'action collective était le fait de mathématiciens médiocres qui n'avaient rien de mieux à faire. Certains estimaient par ailleurs que l'on « se prostituait » en prétendant montrer l'utilité des mathématiques dans l'industrie... Nous n'aurions pas pu mener notre entreprise à bien sans l'appui de quelques excellents collègues[6] « au-dessus de tout soupçon » qui avaient compris l'importance de l'enjeu. Progressivement, de plus en plus de gens se sont laissés convaincre, et il est réconfortant d'entendre aujourd'hui beaucoup de virulents critiques d'alors ne pas tarir d'éloges sur le colloque MATHÉMATIQUES A VENIR.

Nous nous sommes attachés à coordonner nos initiatives avec la SMAI. Tout en respectant la diversité des collègues, les uns davantage préoccupés par l'avancement des études fondamentales, les autres par les applications, nous pensions que c'était le rôle historique de notre société de ne pas dissocier les deux aspects et de travailler dans l'intérêt général.

Le colloque MATHÉMATIQUES A VENIR

C'est dans cet esprit que nous avons décidé d'organiser avec la SMAI un grand colloque national qui fasse le point sur tous les aspects des mathématiques, et qui cherche à redéfinir, avec tous les intéressés, la place, le rôle et les conditions du développement des mathématiques en France. Nous voulions rendre sensible le dynamisme et la puissance de la recherche mathématique en cette fin de vingtième siècle, et expliquer pourquoi les mathématiques étaient importantes[7]. Ceci passait évidemment par la popularisation des applications les plus remarquables, mais le colloque les replaçait dans une vision d'ensemble du progrès des connaissances qui faisait toute sa place à la recherche fondamentale, et s'efforçait de montrer la dimension « d'aventure moderne » des mathématiques. Il y avait l'idée force « que les mathématiques s'appliquent partout, que la distance dans le temps entre les découvertes fondamentales et les applications se réduit vertigineusement » [8]. De

[4] *Renewing U.S. Mathematics. Critical Ressource for the Future.* National Academy Press (1984)

[5] On n'imagine pas aujourd'hui combien il a été difficile de convaincre la communauté dans son ensemble de s'organiser en laboratoires de type CNRS.

[6] Une mention spéciale doit être faite à Jacques Dixmier qui accepta de nous soutenir personnellement sans réserve et de présider le comité d'organisation du colloque.

[7] On se reportera aux actes du colloque publiés dans un supplément du *Bulletin de la SMF* (tome 115, 1987).

[8] Ibid.

fait, nous étions alors dans une phase d'expansion rapide de l'informatique. Les ordinateurs rendaient opératoires des mathématiques considérées jusque là comme des « jeux de l'esprit » (logique, théorie des nombres...). Nous disions (avec une certaine naïveté) : « la prochaine génération de mathématiciens risque d'être encore plus surprenante que la prochaine génération d'ordinateurs. »

C'était la première fois qu'un grand colloque de prospective était organisé sur les mathématiques. Il bénéficia de nombreux soutiens publics et privés, notamment de l'École Polytechnique qui l'accueillit à Palaiseau[9]. Il y eut plus de 800 participants. La manifestation eut un immense retentissement auprès des décideurs et de l'opinion. Il y eut d'innombrables articles de presse en France et même à l'étranger[10], des interviews télévisées[11]..., comme jamais dans le passé à propos des mathématiques.

Ce colloque dont le titre avait été soigneusement choisi, fut l'objet d'une vaste mobilisation et d'une préparation approfondie, sous le contrôle très serré d'un comité d'organisation qui tenait des réunions hebdomadaires dans les mois précédant la manifestation. De nombreux comités sectoriels travaillèrent et une dizaine de lettres d'information furent publiées pour tenir les collègues et surtout la presse, au courant de l'avancement des réflexions. Nous avons finalement réussi à mettre dans le coup tous ceux qui comptaient dans notre milieu, plus pas mal de décideurs. Le colloque comprenait, sur deux jours, des conférences plénières le matin et de grandes tables rondes l'après-midi, suivant trois grands axes : mathématiques et sciences ; mathématiques et industrie ; mathématiques et société. Pendant toute la durée du colloque un certain nombre d'activités étaient proposées : stands d'éditeurs, présentation de documents audiovisuels, démonstrations de logiciels...

Et ses conséquences

Les conséquences immédiates et à moyen terme en furent tangibles, au travers des changements politiques. Le ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche avait solennellement reçu les organisateurs du colloque en présence du Directeur de la Recherche et du Directeur Général du CNRS, pour les assurer de ses bonnes intentions. Celles-ci se sont trouvées concrétisées après le changement de gouvernement...

Jusque là les mesures gouvernementales en faveur de la recherche, en privilégiant les grands programmes, le soutien aux filières industrielles,... avaient laissé de côté les mathématiques. Dans les années qui ont suivi, le budget de la recherche

[9] Il faut mentionner ici le rôle joué par Bernard Ésambert, alors président du conseil d'administration de l'École Polytechnique, mais aussi directeur de banque de son état. En fait c'est lui qui nous avait donné l'idée d'un colloque délibérément tourné vers les médias et les décideurs politiques et économiques. Il avait accepté de présider le comité de parrainage dont les membres ont contribué à fournir les moyens financiers nécessaires à ce projet d'une envergure inhabituelle pour notre communauté.

[10] Science, par exemple, avait publié un article intitulé « French mathematicians push the panic button ».

[11] Nous avions même eu droit à l'ouverture du journal de 20 heures sur la principale chaîne de télévision !

mathématique s'est trouvé considérablement augmenté[12] et les besoins des laboratoires de mathématiques pris en compte dans les nouveaux contrats quadriennaux des universités. Un poste de directeur scientifique adjoint fut créé dans notre département CNRS, et même un directeur scientifique pour les mathématiques[13] fut institué auprès de la Direction de la Recherche, signe de l'importance nouvelle accordée à notre discipline.

L'ensemble de la recherche s'est structuré en laboratoires, en grande majorité associés au CNRS. Les collègues se sont convaincus que ceci ne nuisait pas au caractère « individuel » de la recherche, mais permettait une gestion rationnelle des crédits, des équipements, des personnels, des thésards et des post-docs, évitait la constitution de « ghettos de recherche », favorisait l'établissement de véritables interfaces entre les mathématiques et les applications...

Nous voulions enrayer la désaffection des jeunes pour les mathématiques et les sciences[14]. Nous affirmions « qu'il existe une profession de mathématicien, aux multiples facettes (..), qu'il y a des mathématiques à faire un peu partout » [15]. Dans le colloque MATHÉMATIQUES A VENIR nous avions volontairement minoré l'aspect enseignement, parce que les mathématiques étaient un peu trop confinées, pensions nous, dans leur rôle de formation, tandis que nous voulions en montrer la dimension « stratégique ». Il nous fallait cependant contribuer dans la mesure de nos moyens à la rénovation de leur enseignement au lycée, alors que l'épisode encore récent des « maths modernes » nous avait donné mauvaise réputation. Notre présentation des mathématiques dans toutes leurs dimensions nous démarquait des déformations « scholastiques ». Mais il s'agissait de répandre la bonne parole sur le terrain, auprès des jeunes. C'est ce qui a conduit au lancement de l'opération MATHÉMATIQUES A VENIR, cinquante lycées. Les objectifs de cette opération étaient de mieux connaître l'image que les jeunes avaient des mathématiques, de stimuler la réflexion des lycéens sur les différents aspects des activités mathématiques, d'organiser des débats publics, de provoquer la création de petites cellules de réflexion... Cette opération fut un succès. Même si elle ne s'est pas poursuivie telle quelle au-delà de quelques années, elle a stimulé nombre d'initiatives ultérieures.

Dans la lancée, la SMF a été à l'origine de la constitution d'un « groupe de réflexion et de proposition sur l'éducation scientifique », rassemblant différentes

---

[12] En 1986 les crédits récurrents pour la recherche mathématique, provenant de la recherche universitaire et du CNRS, étaient d'environ 25 MF pour 2500 enseignants-chercheurs et chercheurs. Ils sont aujourd'hui d'environ 18 M€ pour un effectif de 3.500, auxquels s'ajoutent d'importants crédits contractuels (ANR, Europe...).

[13] Le premier titulaire en fut Jean Giraud, disparu voici deux ans, qui eut une action éminente pour faire bénéficier les mathématiques de la relance de la recherche et de l'action universitaire.

[14] Ceci dans un contexte général de diminution relative continue des bacheliers de la section C. Cependant on doit noter que la proportion de bacheliers scientifiques parmi les bacheliers généraux est restée remarquablement stable depuis 50 ans autour de 50%. Le problème aujourd'hui, comme en 1987, est l'insuffisance de bacheliers scientifiques à dominante mathématique. Comme une partie substantielle des bacheliers S ne s'orientent pas vers les filières scientifiques après le bac, la désaffection pour les sciences et en particulier pour les études à contenu mathématique élevé reste aujourd'hui un problème préoccupant.

[15] Cf. discours du président de la SMF au colloque MATHÉMATIQUES A VENIR. Avec le recul, on peut seulement regretter que cette orientation ne se soit pas davantage concrétisée dans l'enseignement universitaire où nous sommes restés relativement « classiques » dans nos projets. Cependant on a vu se développer, par exemple, des filières « d'ingénieur mathématicien ».

sociétés savantes et associations de professeurs de sciences. Ce groupe a travaillé plusieurs années et a débouché en 1990 sur un grand colloque intitulé « Les objectifs de la formation scientifique » (26-28 avril 1990)[16]. Face aux carences multiples du système éducatif et à son incapacité à former davantage de scientifiques, il s'agissait, plus modestement, d'essayer de formuler les objectifs et les contenus d'une éducation scientifique, au regard de l'avancée des sciences et des techniques, dans un contexte européen.

On peut mentionner aussi dans la même lignée un « groupe de recherche sur l'utilisation de l'informatique dans l'enseignement des mathématiques » lancé avec l'Union des Professeurs de Spéciales, piloté à partir du CIRM, qui a organisé débats et rencontres sur ce sujet qui devenait alors d'une grande actualité. Ceci s'inscrivait dans un courant de réflexion sur l'enseignement en premier cycle et classes préparatoires, qui s'est poursuivi les années suivantes[17].

Et aujourd'hui ?

Aujourd'hui nous aurions quelques raisons d'être plus satisfaits de la place faite aux mathématiques. Notre recherche est souvent citée comme un fleuron de la science française – même si cette mention flatteuse est souvent utilisée pour rabaisser le reste. On nous fait désormais une place de choix au CNRS dont la direction cite les choix stratégiques faits par la communauté mathématique comme exemplaires, et fait figurer dans ses projets de réforme la création d'un « Institut des sciences mathématiques et de leurs interactions ». Cependant rien n'est jamais acquis... et il faut se féliciter du projet des sociétés savantes de mathématiques d'organiser une nouvelle édition de MATHÉMATIQUES A VENIR.

De nouveaux champs scientifiques se sont ouverts, notamment du côté de la biologie et de l'informatique. L'importance de la recherche pour le développement économique est devenue un leitmotiv, mais il en résulte une volonté de la piloter étroitement par des programmes finalisés qui ne correspondent guère à la dynamique propre des mathématiques. Il y a 20 ans se profilait une pénurie globale de mathématiciens au regard des besoins prévisibles. Aujourd'hui la réalité est plus complexe. Les docteurs n'ont pas toute la considération qu'ils devraient avoir dans les entreprises, mais les mathématiciens y ont maintenant leur place. Les études à l'université n'attirent pas les lycéens pour des raisons qu'il serait important d'analyser. Les laboratoires de mathématiques sont maintenant bien structurés mais la question de leur pilotage national est posée. Le nombre de postes de recherche à temps plein (permanents ou temporaires) reste notablement insuffisant en mathématiques, mais de nouvelles formes de mobilité entre les universités et les organismes, qui s'inspirent de la pratique assumée par notre discipline, sont à l'ordre du jour. Enfin dans la mesure où les mathématiciens sont davantage impliqués dans la modélisation des phénomènes, la question de leurs responsabilités vis-à-vis des utilisations qui sont faites des mathématiques se pose avec plus d'acuité[18].

Le futur colloque ne manquera pas de nouveaux sujets...

---

[16] « Colloque sur les objectifs de la formation scientifique » (1990) dont les actes ont été édités et restent encore d'une certaine actualité.

[17] Cf. supplément n° 48 de la *Gazette des Mathématiciens* (1991).

[18] La question s'est posée récemment à propos des mathématiques financières.

CIMPA, appel à projets et écoles de recherche

L'équipe de direction du CIMPA[1]

Présentation du CIMPA

Fondé en 1978, le Centre international de mathématiques pures et appliquées (CIMPA) a pour objectif de promouvoir la coopération internationale en mathématiques au profit des pays en développement dans le domaine de l'enseignement supérieur et de la recherche en mathématiques et leurs interactions, ainsi que dans les disciplines connexes. Pour remplir cette mission le CIMPA organise des écoles, des séminaires et anime des réseaux de chercheurs.

Notre action se concentre aux endroits où il y a une réelle volonté de faire émerger et de développer des mathématiques, et où un projet de recherche est envisageable.

Le CIMPA est une association Loi 1901 qui est un centre de l'UNESCO, basé à Nice, financé par le Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche, par l'université de Nice Sophia Antipolis et par l'UNESCO. Plusieurs universités françaises avaient souhaité accueillir un tel centre : Bordeaux, Marseille, Nice et Strasbourg.

Chaque année un appel à projets est réalisé afin d'organiser des écoles de recherche d'environ deux semaines dans les pays en voie de développement. Leur but est de contribuer à la formation par la recherche de la nouvelle génération de mathématiciennes et de mathématiciens. Le CIMPA a acquis une forte reconnaissance au niveau national et international et les évaluations régulières de l'activité du CIMPA font état de son bon fonctionnement.

Depuis 2007, le Conseil d'Administration du CIMPA a exprimé la volonté de faire évoluer le CIMPA en un centre européen afin que d'autres pays puissent apporter leur soutien financier et participer à ses activités scientifiques. Une telle évolution donnerait au CIMPA plus de moyens pour remplir sa mission : le CIMPA pourrait ainsi répondre aux nombreuses demandes des pays en développement que ses moyens actuels ne permettent pas de satisfaire.

L'équipe de direction du CIMPA est constituée par les RSR (responsables scientifiques régionaux) et par la responsable de la communication. Les activités du CIMPA sont soumises au contrôle d'un Conseil Scientifique indépendant, il est le garant de la qualité des diverses activités du CIMPA.

Aujourd'hui le CIMPA reçoit des subventions du Ministère de l'Education Nationale (DGRI et DREIC) et une contribution de l'UNESCO. Des personnels universitaires (un professeur d'université et un PRAG) sont mis à disposition du CIMPA par l'université de Nice Sophia Antipolis. L'Espagne, par l'intermédiaire du Ministerio de Ciencia y de Innovacion (MICINN) prévoit d'apporter une subvention au

[1] Claude Cibils (Montpellier II et Nice), Directeur et RSR Amérique Latine et Caraïbes ; Ahmad El Soufi, (Tours), RSR Pourtour Méditerranéen ; Michel Jambu (Nice), RSR Asie du Sud-Est Marie-Françoise Roy (Rennes I), RSR Afrique Subsaharienne ; Rosane Ushirobira (Dijon), Responsable de la communication ; Michel Waldschmidt (Paris VI), RSR Inde et Asie Centrale et de l'Ouest.

CIMPA en 2010, puis d'intégrer le CIMPA au même titre que la France une fois que les statuts aient affirmé le caractère européen de l'association.

L'appel à projets d'écoles de recherche pour 2011 a commencé le 1er mars 2009. La date limite pour déposer un pré-projet est le 15 juin 2009. Le projet complet devra être déposé avant le 1er octobre 2009. Le formulaire se trouve sur le site du CIMPA, `www.cimpa-icpam.org` vous pouvez aussi écrire à cimpa@unice.fr. Le Conseil scientifique se prononcera en fin d'année et le Conseil d'administration prendra les décisions en début d'année prochaine.

Écoles de recherche

La réflexion au CIMPA est permanente au sujet des écoles de recherche, nous sommes spécialement attentifs aux points suivants :

– assurer la formation par la recherche,
– aider les jeunes à acquérir une maturité mathématique,
– contribuer à l'organisation des mathématiques à l'endroit où se tient l'école (formation et recherche),
– relier les écoles de recherche à une contribution globale au développement mathématique.

Une « feuille de route » disponible sur le site du CIMPA trace les grandes lignes : une école de recherche dure deux semaines ou 10 jours, elle comporte entre 50h et 60h d'exposés. Environ les 2/3 du temps (et au moins la moitié) sont destinés à des cours pour les jeunes mathématiciens, des exposés de niveau plus élevé pouvant avoir lieu. Les cours sont assurés par des mathématiciens confirmés, les conférenciers préparent un résumé du cours et proposent des références, ils prévoient une rédaction de leur cours après l'école de recherche, sous leur responsabilité. Une section est prévue sur HAL (CEL) pour le CIMPA, où seront déposés ces documents.

Des forums concernant chaque école de recherche sont ouverts sur le site du CIMPA, nous espérons recueillir les impressions et les avis des participants.

Nos contraintes sont sévères car le budget du CIMPA est limité. Selon les cas le CIMPA propose une contribution comprise entre 5k€ et 10k€ par école de recherche, destinée aux 2/3 aux jeunes participants des pays de la région.

Un autre objectif est d'aider à la structuration sur place des mathématiques avec l'aide du CIMPA. Chercher et obtenir des financements est une étape aujourd'hui partout nécessaire et qui va dans ce sens. Cette démarche est aussi utile pour que les collègues s'affirment face à leurs institutions, tant au niveau formation que recherche. Une école CIMPA est l'occasion d'utiliser des outils de financement sur place, et de donner une impulsion (avec l'aide du CIMPA) à la construction d'une politique durable des mathématiques à l'endroit où se tient l'école.

Le CIMPA doit être actif, susciter et appuyer. Il doit éviter de se substituer : nous ne voulons pas tout faire ou tout financer, ce qui aurait un effet contraire à nos objectifs. D'ailleurs le voudrions-nous, nous ne le pourrions pas !

Le CIMPA préfère ne pas organiser des écoles dans des endroits déjà développés. D'une part ces lieux n'ont pas (ou plus) besoin d'aide pour structurer le travail mathématique, d'autre part ces écoles coûtent souvent cher. Notre objectif est plutôt de signer des conventions sur le modèle de celles que nous impulsons avec l'Argentine et l'Inde : la moitié au moins des ressortissants de ces pays se rendant à une école proche, et sélectionnée par le CIMPA, serait financé par ces pays.

Pour chaque école de recherche, le CIMPA participe à l'organisation tant administrative, scientifique que financière. Un collègue du CIMPA (le Directeur, le RSR, ou quelqu'un le représentant) assiste à l'école de recherche. Il présente le CIMPA et s'assure que l'école se déroule en accord avec la mission du CIMPA, en particulier vers les jeunes. Il intervient si nécessaire, par exemple pour que les cours soient d'un niveau accessible, ou pour assurer une communication entre les participants. Il établit les contacts avec les autorités locales, contribue à la réflexion sur l'évolution future des mathématiques, en formation et en recherche. Il s'assure que le budget complet est en accord avec les prévisions. Il a la responsabilité de rembourser les participants selon les prévisions, d'obtenir une copie de leur passeport, de faire signer les reçus fournis par l'administration du CIMPA et de conserver toute pièce originale (factures, cartes d'embarquement) justifiant le remboursement. Toutes ces procédures sont nécessaires, elles sont aussi à la source de la confiance que nous font nos tutelles, cela est souligné dans nos rapports d'évaluation.

L'apport financier du CIMPA peut être modifié selon les circonstances en diminution, de façon à pouvoir financer d'autres écoles de recherche, par exemple lorsqu'un financement est accordé en dernière minute suite aux démarches jointes des organisateurs et du CIMPA ou en augmentation au vu de circonstances exceptionnelles. Cette souplesse constitue une sorte d'assurance limitée, due au fait que nous tentons d'être bien plus qu'une simple source de financement.

Le CIMPA ne doit pas se désengager de l'organisation locale, mais l'accompagner, la susciter, l'impulser, et parfois l'anticiper. À chaque fois un puzzle se construit, chemin faisant. Nous tentons de le rendre le plus professionnel possible, en insistant pour réaliser des demandes bien construites, cohérentes et qui aboutissent. Cela rend service à l'image des mathématiques, au delà du financement concret à obtenir. Les organisateurs et le CIMPA sollicitent aussi les Ambassades, l'IMU ou l'ICTP.

Une alternative serait d'organiser deux fois moins d'écoles, qui seraient alors financées le double par le CIMPA. Moins d'efforts seraient alors requis de la part de tous. Quel serait alors le problème ? D'une part cela conduirait à refuser de très bons projets. D'autre part nous ne rendrions pas vraiment service à l'essor des mathématiques, un apport financier presque complet n'incite pas à prendre des responsabilités ou à s'approprier l'école de recherche. Un événement majeur clé en main n'est d'ailleurs pas toujours bien perçu sur place et il n'a que peu d'effets une fois les feux éteints. Aujourd'hui le CIMPA préfère ne pas emprunter cette voie.

Le CIMPA et les mathématiques globalement

L'action du CIMPA est à double sens, elle n'est pas seulement bénéfique pour les pays en développement. Elle sert aussi la recherche en mathématiques globalement, de même que les institutions confirmées, nous sommes aussi attentifs à cet aspect.

Plusieurs jeunes mathématiciens de pays développés assistent aux écoles de recherche CIMPA (mais ils ne sont pas financés par le CIMPA). Ils sont attirés par la qualité des cours et par l'ambiance de travail prévisible. Les effets bénéfiques sont donc aussi pour eux. De plus ils tissent des liens, apprennent à connaître les possibilités et les difficultés et acquièrent une maturité intéressante.

Les mathématiciens confirmés tirent bien entendu profit de la préparation d'un cours souvent accéléré et adapté, qui implique une réorganisation de leur travail avec pour but de l'exposer. Ils rencontrent des jeunes souvent très motivés, avec des formations diverses, demandeurs et dynamiques. Ils échangent avec eux, cela constitue parfois le germe de collaborations, de pré-docs, de post-docs, ou de visites. Parfois ils demandent à ces jeunes de rédiger en collaboration avec eux les notes du cours.

Ils se retrouvent aussi dans une ambiance favorable aux discussions et à la recherche. Une école de recherche CIMPA n'est certainement pas un colloque ou une conférence, pour autant des échanges et des travaux sont souvent initiés à cette occasion, par le hasard des rencontres qui n'auraient peut-être pas eu lieu autrement, ou par le fait d'une disponibilité inhérente à l'école de recherche.

Lorsque l'une des écoles de recherche CIMPA contribue fortement à la naissance d'une recherche solide à terme sur place, le CIMPA considère qu'il a réussi. Des exemples très marquants existent, parmi eux celui du Centre de mathématiques et de modélisation (CMM) de Santiago du Chili (Unité mixte internationale du CNRS), dont l'origine, du moins partielle, est une école de recherche CIMPA.

Le CNRS est membre du CA du CIMPA depuis peu, l'INRIA l'est depuis plus de dix ans. En France le CIMPA est l'un des quatre outils des mathématiques avec l'IHÉS, l'IHP et le CIRM. L'INRIA finance complètement tout participant de l'INRIA (conférencier ou participant sélectionné par le CIMPA) se rendant à une école de recherche CIMPA. Il est aussi naturel que les UMR ou les ANR soient sollicitées pour financer les conférenciers ou les participants retenus par le CIMPA. Souvent cela ne cause pas de difficultés car les responsables sont conscients de l'importance globale du CIMPA pour les mathématiques.

CARNET

André Revuz : témoignage personnel

Hugues Biratelle

Le 12 février 1996, en réaction à un article paru dans le n° 90 des *Chantiers de pédagogie mathématique*, bulletin de la régionale APMEP d'île-de-France (une contribution au débat « Le qualitatif s'oppose-t-il au quantitatif ? » proposé par la revue et invitant les professeurs à s'exprimer sur l'enseignement des mathématiques), André Revuz m'envoie une lettre, écrivant notamment « Je suis d'accord avec la quasi totalité de ce que vous y dites, et je me réjouis de voir qu'il y a des jeunes professeurs qui s'accommodent mal des programmes invertébrés actuellement en vigueur et de la fuite généralisée devant les démonstrations. Je ne peux que vous encourager à poursuivre dans la voie qui est la vôtre ». Quand on se trouve dans sa 4^{e} année d'enseignement, un tel soutien ne peut que vous donner du cœur à l'ouvrage.

Jusqu'alors, je n'avais vu son nom qu'associé à celui de Michel Queysanne en tant que co-directeurs d'une collection d'ouvrages du secondaire parus aux éditions Nathan et utilisés dans les années 1970 et aussi en tant que rédacteur de la partie « Intégration et mesure » dans l'*Encyclopedia Universalis*. Et là, il me contacte... Une correspondance voit le jour et une première entrevue dans son bureau de la tour 55/56 à Jussieu a lieu le mercredi 18 avril 1996. Consacrée à diverses questions d'ordre mathématique que je me posais à l'époque et relatives aux notions de longueur, de vecteur et d'angle, il me remet à cette occasion un ouvrage : *« Est-il impossible d'enseigner les mathématiques ? »* où il écrit *« À Hugues Biratelle, en cordial hommage en lui souhaitant qu'il prouve qu'il est possible d'enseigner les mathématiques. »* Au moment de se quitter, il me dit : *« Je sens que l'on va se revoir »*, ce qui se produit effectivement, à nouveau dans son bureau, à son domicile des Essarts-le-Roi ainsi qu'au mien. Il me prend en amitié et ça, c'est irremplaçable.

Nos entrevues ont pour objet la co-rédaction d'un ouvrage sur les angles. Nous avions constaté que l'état de l'enseignement de cette notion était déplorable et il avait répondu favorablement à l'idée de co-rédiger un ouvrage sur le sujet que je lui avais soumise. Voici une partie de l'introduction :

« De façon générale, dans toutes les langues usuelles, la polysémie est la règle : la plupart des mots ont plusieurs sens. Devant les nombreuses significations possibles d'un mot, nous choisissons la plus pertinente dans la situation donnée.

Le langage mathématique s'efforce, en général avec succès, d'éviter toute polysémie. Mais il y a des exceptions. La plus notable est celle du mot "angle" : les mathématiques elles-mêmes lui fournissent de nombreux sens. Afin d'éviter que la polysémie règne, ce qui provoquerait des malentendus, les mathématiciens ont fabriqué des expressions d'un seul tenant qui permettent de garantir l'unicité du *type d'angle désigné. Par exemple, dans un plan affine ou vectoriel euclidien, on peut citer : angle de secteur, angle de paire (de demi-droites et de droites), angle de couples (de demi-droites, de droites, de vecteurs non nuls), angle de rotation, angle cinématique.*

Dans de nombreux domaines non mathématiques, le mot angle est souvent utilisé et est polysémique. En voici quelques-uns : la langue courante (langue écrite et parlée quand on évoque par exemple les angles des rues ou les angles dans une habitation), les transports (automobiles, bateaux), l'art militaire, la balistique, l'orthopédie dento-faciale, la physiologie articulaire, la menuiserie, la topographie, la géodésie, la photographie, l'optique, les sciences physiques. En pratique, lors de l'emploi du mot, deux phénomènes langagiers liés à son caractère polysémique se produisent. D'une part, il arrive fréquemment que plusieurs points de vue différents – c'est-à-dire plusieurs sens attachés à ce mot – interfèrent ou que l'on passe subitement de l'un à l'autre. Mais il y a toujours un lien entre ces différents sens, et souvent une idée commune qui demeure en dépit des glissements de sens. D'autre part, on commet aussi des abus de langage : par exemple, un angle et sa "mesure" sont le plus souvent confondus. »

Notre plan est le suivant : réaliser tout d'abord deux inventaires, l'un consacré à l'utilisation des angles dans les domaines non mathématiques indiqués ci-dessus et un autre relatif à l'enseignement secondaire puis hiérarchiser les différents sens rencontrés du point de vue de leur importance au sein des mathématiques, proposer un traitement didactique de la question pour l'enseignement secondaire et terminer par un aspect théorique de la notion d'angle, de mesure et de rotation.

Notre travail se déroule dans de très bonnes conditions. Son statut d'universitaire et une grande différence d'âge entre nous ne lui font jamais adopter une attitude suffisante : « *Vos remarques et vos critiques sont les bienvenues* » m'écrit-il un jour. Il me traite d'égal à égal et de cela, j'en suis très fier, je ne m'en cache pas. Lorsque, dans une de mes lettres, je lui écris que je ne possède pas son « envergure mathématique », il me répond : « *Je ne suis qu'un mathématicien de classe moyenne.* » Une estime réciproque s'installe. Malheureusement, la lente dégradation de l'état de santé de sa femme Germaine à partir de 1996-1997, une énergie décroissante pour ce type de travail malgré une vivacité d'esprit jamais démentie et nos emplois du temps très remplis contribuent petit à petit à mettre en veille notre projet.

À partir du moment où nous entreprenons notre collaboration et que j'ai connaissance de sa carrière, de ses actions pour améliorer l'enseignement des mathématiques, de ses ouvrages et de ses multiples interventions, je constate que ses idées rejoignent les miennes. Dans mes cours, quand l'occasion se présente, notamment lors d'une question d'élève et sans dire à chaque fois qu'il en est l'auteur mais en pensant bien à lui, je les diffuse. Par exemple : « *Un calcul ne s'exécute pas, il se médite* », « *Sans les techniques de mise en œuvre, les idées, si belles soient-elles, sont impuissantes ; sans les idées qui les ordonnent et les dirigent, les techniques peuvent rapidement se transformer en un fouillis inextricable. Or, c'est une perversion fréquente de l'enseignement mathématique que d'insister plus sur les techniques que sur les idées* », « *Un cours de mathématiques doit toujours être totalement transparent ; on peut tout y justifier. Tout, à coup sûr, n'est pas* *justifié de la même manière : un théorème l'est par sa démonstration ; un axiome par sa plausibilité [...] ; une définition doit être justifiée par sa pertinence »* .

Je le vois une dernière fois le samedi 12 janvier 2002 à l'INRP, rue d'Ulm à Paris, lors d'une table ronde « Mathématiques et enseignement des sciences ». Il fait partie des intervenants et dit notamment que *« si un professeur prend le temps de bien motiver une notion sans asséner des vérités toutes faites, ensuite, ça roule comme un TGV »* .

Les mathématiques me passionnent et ma rencontre avec André Revuz a accentué le plaisir d'en apprendre encore et de les enseigner. En sa mémoire, mon métier n'a qu'un seul but : que les mathématiques restent vivantes.

André Revuz

(1914 – 2008)

Michèle Artigue, François Colmez, Aline Robert

André Revuz est né en 1914 dans un milieu modeste (son père était comptable, sa mère brodeuse). Élève brillant, il est reçu, après sa scolarité à la communale de la rue de Vaugirard, au concours d'entrée en sixième et il entre au lycée Buffon où, grâce à une bourse, il pourra poursuivre ses études secondaires jusqu'en Mathématiques Spéciales.

En 1934, il est reçu à l'École Polytechnique et à l'École Normale Supérieure. Il choisit l'ÉNS et épouse alors Germaine Chazottes, qu'il a rencontrée au lycée Buffon. Ils auront six enfants. En 1937, après l'agrégation de mathématiques, il est appelé à effectuer son service militaire. Libéré du service militaire en mars 1939, il est nommé élève-agrégé à l'ÉNS. En août 1939, la mobilisation générale l'empêchera de bénéficier d'une bourse de recherche « Arconati-Visconti ». En mai 1940, il est fait prisonnier de guerre, près de Boulogne, et il est transféré dans un camp d'officiers en Basse-Saxe. En captivité, André Revuz enseigne les mathématiques à quelques camarades de captivité étudiants et leur fait passer des examens qui seront validés après la guerre. Début 1943, André Revuz est rapatrié sanitaire. Il rejoint sa famille à Poitiers et termine l'année scolaire comme chargé de cours à la Faculté des Sciences de Poitiers. En octobre 1943, il est nommé au lycée de Poitiers en classe de Math-élem. Il s'engage dans la résistance locale. Durant l'année 1944/1945, il enseigne en Math-Sup au lycée Montaigne de Bordeaux.

En octobre 1945 André Revuz part avec sa famille à Istambul où il enseigne à l'Université Technique. (*« Vacances dans un pays merveilleux qui ignorait les* *"restrictions" dont souffrait l'Europe – écrit-il*[1] *»*). Rentré en janvier 1950, il est nommé chef de travaux à la faculté des Sciences de Paris. Il enseigne également à l'ÉNS de Saint-Cloud (jusqu'en 1955) et commence sa thèse sous la direction de son camarade de promotion Gustave Choquet (*« Chaque semaine, trois jours consacrés à l'enseignement et quatre à la recherche »* – écrit-il). Le 8 avril 1954, il soutient à Paris sa thèse intitulée Fonctions croissantes et mesures sur les espaces topologiques ordonnés ; siégeaient à son jury Arnaud Denjoy, Paul Dubreil et Gustave Choquet. Cette thèse est publiée aux Annales de l'Institut Fourier en 1954. Les travaux d'André Revuz étaient en partie corrélés avec certains résultats de la *« Théorie des capacités »* de Gustave Choquet, publiés également en 1954, aux mêmes *Annales de l'Institut Fourier*, puisque ces travaux traitaient des fonctions d'ensemble croissantes – dont les capacités étaient un cas particulier – et des fonctionnelles croissantes. En particulier, un des résultats d'unicité démontré par André Revuz eut une certaine importance dans la réflexion propre de Gustave Choquet.

En octobre 1956, André Revuz est nommé Maître de conférences à la faculté des sciences de Bordeaux puis, en octobre 1957, il devient Professeur à la faculté des sciences de Poitiers où il prendra la direction du département de mathématiques.

De 1955 à 1967 André Revuz donne des cours à l'ÉNS de Sèvres. Entre 1958 et 1961, il est examinateur au concours d'entrée à l'ÉNS Ulm. En octobre 1967, il est nommé Professeur à la Faculté des sciences de Paris et, en 1969, lors de la scission de l'université de Paris, il choisit l'université Paris VII (aujourd'hui université Paris-Diderot) et participe activement à sa création avec François Bruhat. Il y fonde l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques[2] dont il restera directeur jusqu'en 1979. Il prend également la direction du Centre Pédagogique Régional de l'Académie de Paris[3], direction qu'il occupera jusqu'en 1980. En octobre 1982, il prend officiellement sa retraite.

Cette rapide évocation de la carrière d'André Revuz ne révèle pas l'activité intense qu'il a déployée dès 1950 en direction de l'enseignement des Mathématiques. Cette activité s'est d'abord inscrite dans le cadre de l'Association des Professeurs de mathématiques de l'Enseignement Public [4] et le lecteur trouvera dans le *Bulletin de l'APMEP* de février 2009, un article de Paul-Louis Hennequin qui en détaille les facettes. Lui-même en retraçait l'histoire en ces termes : *« Il y avait un sentiment majoritairement partagé qu'une modernisation des contenus et des méthodes d'enseignement était indispensable. Moderniser les contenus au niveau des universités se fit très facilement. Le problème était plus difficile au niveau des lycées. Mais dès les années 50, il fit l'objet de réflexions au sein de l'APMEP : groupes de travail, petits colloques auxquels je participais. Une accélération se produisit grâce à l'organisation par G. Choquet et G. Walusinski, secrétaire de l'APM, en 58-59 et 59-60, des conférences SMF-APM, suivies par le "Cours de l'APM" que je donnais de 60 à 63, à l'instigation de nombreux membres de l'APM, et par les "Chantiers mathématiques", émissions télévisées organisées par l'INRP et animées par G.Th.Guilbaud et moi-même. »*

[1] Toutes les citations sont tirées d'un texte non publié écrit par André Revuz en 2006.
[2] IREM.
[3] CPR.
[4] APMEP.

À partir de 1958, très impliqué en effet dans l'APMEP, André Revuz est élu plusieurs fois à son Comité national et il présidera l'association pendant deux ans, de mai 1960 à mai 1962. Entre décembre 1956 et octobre 1959, le bulletin de l'association publie quatre articles importants dont il est l'auteur, intitulés respectivement : *Espaces projectifs* ; *Espaces euclidiens et espaces métriques* ; *Théorie de l'intégration* ; *Le langage simple et précis des mathématiques modernes*. La série de conférences qu'il donne à Paris fait ensuite l'objet d'une rédaction par Germaine et André Revuz qui est publiée en trois tomes par l'APMEP : *I Groupes, Anneaux, Corps* (1962) ; II *Espaces vectoriels* (1963) ; III *Éléments de topologie* (1966). Ces ouvrages deviendront immédiatement des ouvrages de référence pour la formation des enseignants.

En 1966, il est élu président de la SMF et souhaite alors renforcer les liens entre la SMF et l'APMEP. Ces efforts ne seront pas couronnés de succès comme il l'a raconté : *« [...] j'espérais à cette occasion créer des liens plus étroits entre la SMF et l'APM, mais je me suis heurté à un mur infranchissable. Quarante ans plus tard, le problème se repose avec peut-être plus de chances de trouver une solution. »*

C'est aussi en 1966 qu'est créée la Commission « Lichnérowicz » sur l'enseignement des mathématiques, une commission qui travaillera jusqu'en 1974 et qui est, dans les mémoires, attachée à la réforme des mathématiques modernes, ses succès mais aussi ses échecs. André Revuz en est un des membres les plus actifs. En particulier, il suit de très près le travail effectué dans la centaine de classes expérimentales de collège où des professeurs volontaires testent les propositions de programme de la Commission. Voici ce qu'il en disait : *« Ces classes restent pour moi un modèle de ce que devrait être l'enseignement : activité des élèves, responsabilité assumée par les professeurs pour distinguer ce qui marche de ce qui ne marche pas et savoir modifier la démarche en conséquence »*. Comme l'a montré la suite de l'histoire, ces réussites expérimentales ne permettaient pas de prédire ce que donnerait la mise en place de la réforme en grandeur réelle, et les difficultés rencontrées ont renforcé la conviction d'André Revuz que la clef de tout changement dans le système éducatif était la formation des enseignants : formation initiale et formation continue. Pour ce qui est de la formation initiale, en tant que directeur du CPR, il allait enrichir la formation donnée aux futurs enseignants pendant leur année de stage, organisant pour eux des cours de mathématiques orientés vers leur enseignement, mais aussi des cours de psychologie cognitive qui seraient assurés par Pierre Gréco. Concernant la formation continue, c'est au sein des IREM dont le projet initial avait été élaboré par l'APMEP qu'allait se déployer son action à partir des années 70.

Nommé en 1969 directeur de l'IREM de Paris, un des trois premiers IREM créés, il va faire de cette institution qui dispose dans ses premières années de moyens importants (12 demi-postes d'enseignants-chercheurs, 20 postes d'enseignants du secondaire détachés à mi-temps, 6 ATOS) une institution particulièrement dynamique, organisant de nombreuses formations, publiant de nombreuses brochures à destination des enseignants. C'est l'époque où la formation continue des enseignants qui s'exprime en termes de « recyclage » tend à mobiliser toutes les forces. Mais André Revuz est bien conscient qu'une formation de qualité doit s'appuyer sur la recherche, et il va mettre en place, à l'IREM comme à l'université Paris VII, les structures permettant cette recherche. À l'IREM, ce sont les groupes de travail et, en 1973, la création d'une école élémentaire expérimentale rattachée à l'IREM. À l'université, c'est la collaboration notamment avec Daniel Lacombe pour créer l'UF de didactique et faire habiliter un DEA de didactique des mathématiques. Il sera l'un des trois premiers créés en France dès 1975. À une époque où une telle démarche n'avait rien d'évident dans la communauté mathématique, ce sera aussi l'encouragement à mener des recherches en didactique des mathématiques et à passer des doctorats d'état pour les enseignants-chercheurs intéressés par les questions d'enseignement, notamment ceux qui travaillent à l'IREM, (Aline Robert, Régine Douady, Jacqueline Robinet, Michèle Artigue, Janine Rogalski...).

André Revuz, c'est aussi l'ouverture aux autres disciplines. Dans les premières années de l'IREM, quand les moyens en heures supplémentaires sont encore conséquents, il en fera bénéficier des collègues de différentes disciplines pour permettre à des groupes interdisciplinaires (mathématiques et sciences physiques, mathématiques et biologie, mathématiques et français,...) de fonctionner dans de bonnes conditions. Les quatre années précédant sa retraite, il sera, avec le physicien Jean Matricon, le moteur de la création d'une section expérimentale de DEUG à l'université, proposant un enseignement intégré de mathématiques et de physique, structure originale qui fonctionnera avec succès mais qui ne sera hélas pas poursuivie au-delà de 1985. Il participera également à des jurys de thèses utilisant des mathématiques, en histoire et en linguistique notamment.

Après sa retraite, il a continué à participer à beaucoup de séminaires ou autres réunions, mais, surtout, il est à l'origine de la création en 2002, alors qu'il approchait les 90 ans, du collectif *ActionSciences*[5], qui regroupe une douzaine d'associations pour la défense de l'enseignement de toutes les sciences. Et il en est resté, jusqu'à sa mort, l'un des piliers.

Ce qui précède pourrait laisser croire que les activités d'André Revuz se sont limitées à la sphère nationale. Ce n'est nullement le cas. Sa forte implication dans le mouvement de rénovation de l'enseignement des mathématiques l'amène à tisser, dès les années 50, des contacts avec ceux qui dans les autres pays travaillent à cette rénovation. Il participe aux travaux de la Commission pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques[6] créée en 1950. En 1967, il devient membre du comité exécutif de la Commission Internationale de l'Enseignement des Mathématiques[7], connue actuellement sous le sigle d'ICMI. Son mandat, de 1967 à 1970, se situe à une époque particulièrement importante pour cette institution, celle de sa renaissance sous la présidence d'Hans Freudenthal. Il en sera le plus proche collaborateur au sein de l'exécutif. Comme il l'a rappelé dans un entretien mené, il y a un an, pour préparer le centenaire d'ICMI, il s'agissait alors pour ICMI de s'affirmer par rapport à l'institution mère

[5] Ce collectif regroupe : Association des professeurs de Biologie-Géologie (APBG), Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), Conférence des Grandes Ecoles (CGE), Femmes et Mathématiques, Femmes et Sciences, Société Française de Chimie (SFC), Société Française de Physique (SFP), Société Française de Statistique (SFdS), Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI), Société Mathématique de France (SMF), Union des Professeurs de Classes Préparatoires aux Écoles Agronomiques (UPA), Union des Professeurs de Physique-Chimie (UdPPC), Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles (UPSTI), Union des Professeurs de Spéciales (UPS).

[6] CIEAEM.

[7] CIEM.

qu'était l'Union mathématique internationale, et de faire reconnaître le champ de l'éducation mathématique comme un champ de recherche et de pratique à part entière. Il y a œuvré avec conviction. Il a participé à l'édition des ouvrages *New Trends in Mathematics Teaching* préparés par ICMI et publiés par l'UNESCO. Il a notamment été président du comité éditorial du volume 2 publié en 1970. C'est pendant son mandat que le premier congrès ICME a été organisé en France, à Lyon, en 1969 et que la revue *Educational Studies in Mathematics* a été créée. Il sera membre de son comité éditorial jusqu'en 1990 et y publiera plusieurs articles : *Les pièges de l'enseignement des mathématiques* (vol. 1, 1968), *La notion de continuité dans l'enseignement du second degré* (vol. 4, 1972), *Transformations de l'enseignement des mathématiques en France* (vol. 9, 1978). Dès sa création au début des années 70 et jusqu'en 1992, il sera également membre du conseil scientifique de l'Institut für Didaktik der Mathematik de Bielefeld, une institution qui a joué un rôle essentiel dans le développement de la recherche didactique en Allemagne, et contribuera à l'établissement de collaborations fructueuses entre chercheurs français et allemands.

Cette notice serait incomplète si nous n'évoquions pas l'enseignant passionné et passionnant qu'était André Revuz. Il nous a marqués, comme il a marqué des générations d'enseignants et d'étudiants. Ses qualités d'enseignant tenaient notamment à sa volonté de faire comprendre au plus grand nombre d'étudiant(e)s, par-delà les symboles et les définitions, ce qui était en jeu dans ses cours : images, commentaires, questionnements, petits dessins, voire plaisanteries, émaillaient ses interventions, toujours très vivantes. Et il savait transmettre sa conviction profonde que ces mathématiques qu'il aimait tant étaient accessibles à tous. Le même dynamisme et la même passion pour la transmission intelligente des mathématiques l'ont habité à l'IREM, qu'il dirigeait avec un plaisir contagieux et beaucoup d'initiatives pour faire participer tous les acteurs (alors nombreux). Cette passion était aussi à l'œuvre quand il allait expérimenter dans les classes et ses articles sur l'enseignement de la continuité au lycée (l'article cité plus haut de *Educational Studies in Mathematics* comme celui publié avec Joëlle Pichaud dans le *Bulletin* 293 de l'APMEP en 1972, La notion de continuité dans l'enseignement du second degré : compte-rendu d'une expérience), qui nous paraissent aujourd'hui à la relecture d'une ambition hors d'atteinte n'étaient pas seulement le fruit d'une réflexion théorique. Ils exprimaient son vécu, ses qualités d'enseignant. Pour André Revuz, l'enseignement n'était pas pour autant quelque chose de simple – ce n'était pas parce qu'on savait bien les mathématiques qu'on savait bien les enseigner – même s'il reconnaissait là une condition nécessaire incontournable. Il se posait beaucoup de questions à ce sujet, ce qui était assez exceptionnel à ce moment là, et son enthousiasme pour toutes les tentatives scientifiques pour mieux comprendre les phénomènes liés à l'enseignement des mathématiques n'a jamais été mis en défaut ; de plus il a toujours fait confiance aux chercheurs, dans leur diversité, et il a encouragé de manière décisive tout ce qui, estimait-il, pouvait dans un avenir proche ou lointain améliorer cet enseignement des mathématiques qui lui tenait tant à cœur.

En direction du grand public, André Revuz a publié deux livres :

– en 1963, *Mathématique Moderne Mathématique Vivante*. Éditeur : Ocdl
– en 1980, *Est-il impossible d'enseigner les Mathématiques ?* Éditeur : PUF

Il a également dirigé deux collections d'ouvrages mathématiques : une collection de manuels scolaires avec son camarade de promotion Michel Queysanne (Éditeur Fernand Nathan à partir de 1969) et, au niveau universitaire, la « Série Mathématiques » de la « Collection U » (Armand Colin).

André Revuz n'était pas seulement un mathématicien et un enseignant. C'était aussi un montagnard et un alpiniste de talent, très attaché à la vallée de Vallorcine où il possédait un chalet et au Massif du Mont Blanc dont il a gravi plusieurs cimes importantes. Il appréciait l'effort physique : ainsi en mai-juin 1968, au moment des grandes grèves, il venait en vélo depuis les Essarts-le-Roi jusqu'à l'IHP pour participer en particulier aux assemblées des candidats à l'agrégation de mathématiques qui ont été décisives dans la création des IREM. Longtemps après sa retraite, il a continué à pratiquer le tennis.

André Revuz portait sur son activité un regard modeste. Il y a deux ans, il écrivait : « *Tout cela représente beaucoup de travail pour un bilan finalement très modeste. Mais je pense qu'il fallait faire ce travail et qu'il faut le poursuivre. En vérité, enseigner est un problème permanent.* » Mais il a été et reste un modèle pour tous ceux et celles qui ont voulu et veulent contribuer à l'amélioration de l'enseignement des mathématiques et ne laisser personne au bord du chemin, pour tous ceux qui savent le rôle crucial de la formation des enseignants, pour tous ceux qui connaissent la fragilité des systèmes éducatifs et sont convaincus de la nécessité de se révolter contre l'arbitraire et l'inconscience avec lesquels ils sont souvent gouvernés.

COURRIER DES LECTEURS

E la nave va ?

Nous nous sommes étonnés d'une certaine uniformité se dégageant des trois articles publiés dans la rubrique Actualité du numéro 119 concernant les mathématiques financières. Ce petit dossier prenait en effet toutes les apparences d'un plaidoyer *pro domo* accréditant trois idées qui méritent d'être sérieusement débattues : d'abord, les mathématiques financières ne seraient qu'une technique qu'il convient d'utiliser à bon escient, ensuite, la communauté des mathématiciens aurait depuis longtemps mis tout le monde en garde, enfin, les mathématiques et les mathématiciens ne sont pour rien dans le cataclysme actuel. Nous ne cherchons pas ici à jeter la pierre à qui que ce soit, la communauté mathématique ne pouvant que souffrir d'une guerre entre ceux qui jouent (ou ont joué) le jeu des mathématiques financières et les autres. Mais en prenant ces affirmations une par une, nous voulons expliquer pourquoi nous nous trouvons en parfait désaccord avec elles.

Certes, les mathématiques financières sont une technique. Mais pour réduire la technique à l'état de moyen pur et simple, « pour que le problème du "bon usage" soit résolu, [il faudrait] que les hommes soient en présence de fins claires et adaptées » [1]. Tant que la finalité d'une technique n'est pas questionnée, celle-ci peut poursuivre son existence propre et ses effets néfastes et positifs restent indissociables. De plus, pour garantir le bon usage de la technique financière, il faudrait non seulement que nous puissions le définir, mais aussi que nous soyons tous prêts, si cet usage nous apparaît détourné, à y refuser notre concours. Mais ce n'est évidemment pas le cas car les mathématiciens, pour paraphraser Simone Weil, au lieu de s'arrêter avec la science pour contempler ses limites et y réfléchir, « ont passé outre dans un furieux élan ». Au lieu de prendre le temps d'interroger la finalité d'une participation au jeu des mathématiques financières, on s'est efforcé d'y peser de tout son poids, en s'abritant des conséquences derrière une prétendue neutralité. Pire, en y apportant en fait la caution de cette neutralité, ce qui aux yeux du monde constitue un appui de poids au système financier actuel, tandis que ses anciens champions eux-mêmes, dans une posture où le grotesque le dispute au sinistre, n'ont maintenant plus à la bouche que « refondation » et « moralisation » ?

Deuxième affirmation : les mathématiciens avaient mis tout le monde en garde. Cela a été répété à l'envi depuis des mois dans la presse. Combien cette affirmation aurait gagné en crédibilité si

[1] Jacques Ellol, Le bluff technologique, Hachette, 1998.

ces mises en gardes avaient été énoncées *avant* que les signes menaçants de la dégringolade ne s'annoncent avec la crise des *subprimes*. En fait, à relire tous les textes qui ont été publiés avant la fin de l'année 2007, à grand renfort de caisse de résonance dans les journaux économiques (ou non), force est de constater que le ton était plutôt à l'affirmation péremptoire et à la certitude jupitérienne. L'un de nous deux (LM) a fait passer dans la *Gazette* entre 2001 et 2006 plusieurs appels à la vigilance. Il y demandait simplement que l'on réfléchisse au système qui se mettait en place en donnant aux mathématiques financières cette place démesurée, notamment dans l'enseignement. Mais combien pèse un article dans la *Gazette* face à une page dans le *New York Times* ou dans *Challenge* ?

Troisième affirmation : les mathématiques et les mathématiciens n'auraient aucune responsabilité. Parlons d'abord des mathématiques. Une façon édifiante de considérer la question est de se demander qui pâtit et qui profite des nouvelles techniques financières permises par les mathématiques. La technique financière, non seulement a profité à une petite caste de super-riches (parmi lesquels beaucoup se trouvent être nos anciens étudiants) dont le mode de vie farouchement individualiste est devenu le modèle en vogue et dont les fortunes font flamber les prix des centres-villes, mais en plus, elle nuit au plus grand nombre. Lorsque le système est en état de marche, il paupérise les petits producteurs en tétanisant les cours et se joue des salariés de certaines entreprises dont la cote monte quand elles les licencient. Lorsqu'il est en faillite comme aujourd'hui, il met à la rue les ménages qu'il a lui-même contribué à endetter, menace les déposants et fait fondre les économies des retraités qui ont cru en lui. Comme l'a dit récemment le tristement célèbre Jérôme Kerviel au Parisien, le trader fait un métier de technicien qui « s'appuie sur des équations, des calculs, des modèles mathématiques », mais « à aucun moment la banque ne vous dit : [...] Au bout de votre clavier, il y a de vraies gens, avec de vraies vies, faites attention à ce que vous faites, vous pouvez leur faire très mal ». Les mathématiques peuvent servir à couvrir certains risques, mais elles peuvent aussi concourir à en créer de nouveaux. Dans ces conditions, penser que « la finance française ne doit pas laisser passer les chances que la crise comporte pour notre pays » révèle une vision du monde pour le moins... naïve.

Parlons maintenant des mathématiciens. Certes, la phrase de Michel Rocard parlant de crime contre l'humanité était stupide, comme le sont souvent les formules d'hommes politiques qui cherchent la tournure médiatiquement percutante. Mais de là à balayer d'un trait toute question sur la responsabilité des mathématiciens, notre responsabilité collective en fait, il y a un pas qu'il nous semble délicat de franchir. Car nous avons vu, de nos yeux vus, des étudiants frais émoulus de nos filières universitaires, se vantant de créer des produits spéculatifs sur les stocks de produits de première nécessité. Nous avons vu comment l'appât du gain a progressivement écarté de certaines voies professionnelles moins rentables les élèves de l'X et d'autres Grandes Écoles que l'on incitait à la fabrication de produits financiers. Nous avons vu comment pendant des années l'urgence a été mise à monter en catastrophe des filières de mathématiques financières au risque de convaincre tous les étudiants en mathématiques que là seulement était la voie du salut. Voilà ce que furent les quinze dernières années, et les mathématiciens voudraient faire croire qu'ils sont totalement innocents dans cette affaire ? Ils seront d'ailleurs bien les seuls à le croire. Depuis plusieurs mois, quand nous rencontrons des collègues d'autres disciplines, nous entendons toutes sortes de commentaires ironiques sur nous à ce sujet. Un collègue physicien a même ajouté il y a quelques semaines, mi goguenard mi sérieux, commentant un article paru dans *Le Monde* : « Et vous dites que puisqu'ils se sont fait virer des banques vous allez leur faire faire des thèses. Voilà bien le mépris que les matheux ont pour la recherche universitaire ». Mesure-t-on les dégâts d'une telle attitude ?

Dans le désarroi général que la crise financière a suscité, les mathématiciens doivent remettre leur stratégie en question. Encore une fois, nous ne cherchons à accuser personne, mais nous ne pouvons accepter un *statu quo* défendu en notre nom. Il est grand temps pour la communauté mathématique de réfléchir collectivement à la nature de ses liens avec la finance.

Amaury Lambert et Laurent Mazliak
LPMA, Université Paris VI

Plaques commémoratives

En 1931, Jacques Herbrand, un jeune et brillant mathématicien de 23 ans, trouvait la mort dans un accident de montagne. Son père, ses amis, et les éditions Hermann, ont publié, au cours des années 1930, ses articles inédits et plusieurs fascicules mathématiques en hommage à son souvenir. En 2008, à l'occasion du centenaire de sa naissance, Françoise Delon, François Loeser et Angus Macintyre ont organisé un colloque d'une journée, dont la *Gazette des mathématiciens* a publié une partie des interventions dans son numéro 118. La Société Mathématique de France a financé la pose d'une plaque dans une chapelle alpine où est commémoré le souvenir d'alpinistes morts en montagne.

L'éditorial de la *Gazette* rapporte cet événement en ces termes :

« Il semblerait d'ailleurs que la mémoire de l'accident survenu à un "grand savant français", transmise de génération en génération, ait survécu dans la mémoire collective des guides de la vallée – la plaque qui vient d'être posée permettra d'en perpétuer définitivement le souvenir. »

L'adverbe « définitivement » m'a interloquée et a ainsi été le prétexte à l'écriture de cette lettre.

Le philosophe Jankélévitch a exprimé une opinion moins optimiste :

« La lutte n'est pas égale entre la marée irrésistible de l'oubli qui, à la longue, submerge toutes choses, et les protestations désespérées mais intermittentes de la mémoire. »

En 1947, les mathématiciens strasbourgeois inauguraient une plaque de marbre à la mémoire d'un des leurs, Jacques Feldbau, mort en déportation, à 30 ans, des suites de la « marche de la mort » (la mortelle évacuation d'Auschwitz en janvier 1945).

Jacques Feldbau est le premier mathématicien à avoir démontré qu'

« un fibré sur une base contractile est trivial », un de ces énoncés à la fois totalement abscons pour les non-mathématiciens et complètement essentiels pour les mathématiciens, qui l'utilisent tous, un jour ou l'autre – au point qu'on n'imagine plus aujourd'hui qu'il a bien fallu que quelqu'un l'énonce et le démontre, une première fois – c'était en 1939. Il a aussi démontré, avec Ehresmann, une très utile propriété de « relèvement des homotopies » et déduit la « suite exacte d'homotopie » – c'était en 1941. En 1941 toujours, Feldbau et Ehresmann inventaient les « fibrés associés »... mais le nom de Feldbau disparaissait de l'article avant sa publication : dans la France de 1941, « on » avait fini par se décider à supprimer les juifs des publications de l'Académie des sciences et Feldbau disparaissait comme auteur juif, avant d'être assassiné comme français juif.

En 1967, les mathématiciens strasbourgeois déménageaient, emmenant la plaque et la revissant à l'entrée de leur nouvelle bibliothèque. La photographie de Jacques Feldbau qui accompagnait cette plaque a disparu. En 2007, presque plus personne parmi les usagers de la bibliothèque à l'entrée de laquelle cette plaque est vissée n'avait la moindre idée de qui était Jacques Feldbau.

Les fibrés sur les bases contractiles n'en continuent pas moins à être triviaux, la suite des groupes d'homotopie d'une fibration persiste à être exacte, et nous avons toujours autant besoin de fibrés associés.

L'éternité des mathématiciens n'a pas grand chose à voir avec l'infini mathématique. Si rien n'est définitif, il est à espérer que la durée de vie de l'hommage rendu à Herbrand par, notamment, Hadamard, Chevalley, Emmy Noether et John von Neumann dans les années 1930, celle de l'hommage de 2008, ainsi que la durée de vie de ses mathématiques seront supérieures à celle d'une plaque de marbre...

Die Menschen sterben, die Gedanken bleiben (Les gens meurent, les idées restent).

Une version de cette lettre a été publiée par Images des mathématiques (`http://images.math.cnrs.fr/`) le 12 décembre 2008.

Michèle Audin
IRMA, Université Strasbourg I

LIVRES

Partial Differential Equations in General Relativity
Alan D. Rendall
Oxford University Press, Graduate Texts in Mathematics, vol. 16, 2008. 352 p.
ISBN : 978-0199-2154-16. $60

Ce livre est consacré aux aspects mathématiques de la relativité générale et en présente les développements les plus récents de manière concise. Il porte une attention particulière à la formulation des équations d'Einstein en un système hyperbolique symétrique avec contraintes couplé avec les équations d'évolution de la matière. Il est destiné aux étudiants de mastère, tant mathématiciens que physiciens, mais sera aussi apprécié des spécialistes de la relativité générale.

Rappelons que l'inconnue principale de la théorie est une variété lorentzienne de dimension quatre, (M, g), satisfaisant aux équations

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda\, g_{\alpha\beta} = 8\pi\, T_{\alpha\beta},$$

reliant le tenseur de courbure d'Einstein $G_{\alpha\beta}$ au tenseur de moment-énergie de la matière $T_{\alpha\beta}$. Le scalaire Λ représente la constante cosmologique de l'espace-temps, et les indices α, β varient de 0 à 3. (Par exemple, dans le vide le tenseur de courbure de Ricci d'une telle variété est identiquement nul.) Pour formuler le problème, on se donne une variété riemannienne de dimension trois (N, h) munie d'un champ de 2-tenseurs symétriques K. On cherche alors une variété lorentzienne (un développement maximal) satisfaisant aux équations d'Einstein avec la contrainte que (N, h) est isométriquement plongée dans (M, g) et admet K comme deuxième forme fondamentale.

Les deux premiers chapitres présentent les bases incontournables de la relativité générale d'un point de vue à la fois physique et mathématique : notions de géométrie lorentzienne, théorèmes d'incomplétude de Penrose et de Hawking, feuilletages $3 + 1$, et décompositions des équations d'Einstein.

L'auteur entre dans le vif de son sujet en mettant en parallèle différents modèles de matière : équations d'ondes pour les champs scalaires (à valeurs réelles ou à valeurs dans une variété), équations de Maxwell de l'électromagnétisme, équations de Yang-Mills, équations d'Euler des fluides compressibles et équation de Vlasov de la théorie cinétique des fluides raréfiés. Pour chacun de ces modèles, un Lagrangien détermine l'expression du tenseur de moment-énergie $T_{\alpha\beta}$ en fonction de la métrique lorentzienne et des variables physiques décrivant l'état de la matière.

Peu de résultats sont disponibles dans la littérature à ce niveau de généralité et, le plus souvent, des hypothèses sur les symétries de l'espace-temps sont nécessaires. L'auteur introduit ici les espaces-temps admettant un ou plusieurs champs de Killing : statiques, stationnaires, spatialement homogènes, etc.

Il consacre ensuite un chapitre à l'étude des espaces spatialement homogènes pour lesquels les équations d'Einstein se réduisent à des équations différentielles non-linéaires. En dépit de leur simplicité apparente, ces modèles sont intéressants pour l'interprétation physique de la théorie. Par ailleurs, leur étude mathématique est très délicate et fait appel à toutes les facettes de la théorie des équations différentielles : variété centrale, systèmes dynamiques, théorie des bifurcations, etc.

La deuxième moitié de l'ouvrage traite directement la résolution du problème de Cauchy pour les équations d'Einstein. L'auteur présente d'abord les résultats principaux d'existence sans hypothèse de symétrie ; ceux-ci sont centrés sur le théorème de Christodoulou et de Klainerman (stabilité de l'espace-temps de Minkowski). Il explique aussi les techniques d'analyse (harmonique) intervenant dans les démonstrations. Les derniers chapitres concernent les modèles possédant deux champs de Killing et l'auteur étudie en détail l'existence globale des solutions des équations d'Einstein et la nature géométrique de leurs singularités, ce qui lui permet de déterminer le comportement asymptotique des espace-temps construits.

En conclusion, il s'agit d'un ouvrage particulièrement bien organisé et documenté, dont la lecture est vivement recommandée et permet d'accéder à l'état de l'art sur le sujet.

Philippe G. LeFloch,
Université Paris VI

Cantor et la France - Correspondance du mathématicien allemand avec les français à la fin du XIX^{e} siècle
A.-M. Décaillot
Éditions Kimé, 2008. 372 p. ISBN : 978-2-84174-467-1. 29€

Tout a été dit sur Georg Cantor (1845-1918), le mathématicien allemand créateur de la théorie des ensembles, langage universel des mathématiques. David Hilbert, l'un des guides mathématiques du vingtième siècle rendait grâce à Cantor d'avoir amené les mathématiciens *« au Paradis dont nul ne pourra les chasser »*. Nous y sommes encore.

On a longuement analysé la vie de Cantor, l'hostilité que ses travaux ont suscitée chez ses collègues de la bonne université luthérienne de Halle, et surtout chez son ennemi Kronecker, on a même fait de lui un héros d'opéra [1], tant sa vie a été marquée d'événements tragiques, de conflits familiaux, de brimades professionnelles, de crises schizophréniques délirantes, jusqu'à sa mort après plus d'un an passé à l'asile psychiatrique de Halle. Cette personnalité complexe à conduit Cantor à des découvertes mathématiques capitales mais aussi par exemple à des années de recherches pour démontrer que Shakespeare n'avait pas existé ! Une grande partie de sa correspondance est encore non publiée. Anne-Marie Décaillot, historienne des mathématiques, s'est attachée aux courriers avec ses correspondants français, mathématiciens, philosophes, entre autres. Cette correspondance qu'elle a étudiée dans le texte allemand, prend souvent la forme de brouillons difficiles à déchiffrer. Elle est ici analysée, publiée et annotée de manière détaillée. Elle révèle un Cantor qui s'intéresse à la politique de la science, initiateur des relations internationales entre mathématiciens, malgré les tensions entre les deux grandes écoles. Cantor s'informe précisément des débats français, par exemple de la tentative de Jules Ferry en 1880 de réduire l'enseignement catholique (sa tentative aboutira à la séparation

[1] cf. Cantor à Halle, J.-M. Kantor, *La Quinzaine littéraire*, 2006.

de l'enseignement privé en 1905). Cantor prend évidemment partie pour l'enseignement « libre » contre le scientisme positiviste. Ses travaux mathématiques sont justifiés par une profonde connaissance de la philosophie et de la théologie. Ainsi montre-t-il dans ces lettres sa profonde connaissance de Spinoza, dont Anne-Marie Décaillot déconstruit correctement l'influence, des débats théologiques comme des courants ésotériques les plus variés (tel celui des rosicruciens que Leibniz connaissait aussi). Cantor se propose par sa théorie des nombres transfinis d'œuvrer au rapprochement entre la science et la religion : Dieu s'identifie à l'« ensemble de tous les ensembles » ! Le cri de Cantor :*« L'essence des mathématiques, c'est la liberté ! »* venait en apogée d'une réflexion approfondie de nature philosophique (de Platon à Spinoza en passant par Nicolas de Cues) et théologique. Mais l'irruption du sujet au cœur de la science a fait le bonheur des délires de tous ordres, en particulier avec la mathesis lacanienne.

Ces lettres inédites montrent que Cantor mérite mieux.

Jean-Michel Kantor,
Institut de Mathématiques de Jussieu

L'analogie dans la démarche scientifique. Perspective historique
M.-J. Durand-Richard, dir.
L'Harmattan, 2008. 312 p. ISBN : 978-2-296-05072-3. 31€

Consacrer un ouvrage au rôle de l'analogie dans la construction scientifique constitue une entreprise audacieuse et empreinte de modernité. Il suffit de rappeler que, de nos jours, l'analogie est à la source de la correspondance suggérée par Robert Langlands entre la théorie des nombres et la représentation des groupes. Les implications de cette correspondance donnent lieu à conjectures ; la résolution de l'une d'entre elles, due à Emil Artin, par Langlands et Tunnell est l'un des points de départ du travail d'Andrew Wiles sur le « grand » théorème de Fermat.

L'ambition des auteurs du livre rédigé sous la direction de Marie-José Durand-Richard[2] est d'approfondir la démarche analogique sous l'angle historique, dans une perspective pluridisciplinaire. La diversité des approches souligne à l'évidence la polysémie du terme « analogie », et l'usage diversifié qu'en font les philosophes, savants et scientifiques qui y ont recours. L'un des mérites de l'ouvrage est d'apporter de nombreux éléments qui contribuent à clarifier ces différentes fonctions, tout en réhabilitant la démarche de production de nouvelles idées qui en découle. Cette originalité est particulièrement mise en évidence dans le domaine mathématique. En effet, faire intervenir des analogies en mathématiques ne consiste pas seulement à observer des similitudes entre des situations différentes, mais aussi à « créer de nouveaux objets ou de nouvelles théories en mobilisant le modèle d'une théorie déjà existante » (p. 98), et à englober l'ensemble dans une nouvelle théorie plus générale.

La contribution de Christian Houzel est riche en exemples de cette situation. L'analogie entre les nombres décimaux et les polynômes, dont l'écriture se trouve calquée sur l'écriture décimale, est en ce sens significative comme chez l'algébriste arabe al-Karajî (10^{e}-11^{e} siècle). Les mathématiciens arabes initient un calcul sur

[2] Les auteurs sont P. Bromberg, C. Comte, G. Denis, M.-J. Durand-Richard, A. Herreman, C. Houzel, P. Huneman, M. Paty, A. Volkov.

les fractions décimales et sur des polynômes (en x et $1/x$) à partir du calcul usuel sur les nombres, parvenant à extraire des racines d'ordre quelconque. Ces méthodes ont un effet en retour sur la conception des nombres : les irrationnels sont dès lors perçus comme des quantités arithmétiques et non plus seulement comme des grandeurs géométriques. De telles pratiques opératoires influenceront Léonard de Pise et conduiront Raphaël Bombelli à les mettre en œuvre sur des écritures provisoirement insensées : les futurs nombres complexes.

Qu'il s'agisse de penser les séries infinies de puissances à partir des nombres obtenus grâce à leurs développements décimaux illimités, ou les nombres algébriques à partir des fonctions algébriques, dans chaque cas étudié par Houzel, l'analogie s'appuie sur l'idée de la stabilité opératoire de règles issues d'un champ mathématique donné et transposées dans un autre contexte. Le rôle du mathématicien est de produire des objets nouveaux, de spécifier la définition de ces objets en vue de garantir cette stabilité opératoire. On voit ici la fécondité structurante de l'analogie mathématique, bien éloignée d'une simple métaphore.

C'est en particulier en algèbre que l'analogie opère le transfert de procédures opératoires d'entités connues à d'autres entités qu'il s'agit de construire comme objets mathématiques nouveaux. La contribution de M.-J. Durand-Richard approfondit le recours à l'analogie au sein de l'École algébrique anglaise autour de Charles Babbage, John F. W. Herschel et George Peacock. Le calcul sur les « quantités impossibles », comme $\sqrt{-1}$, et sur les opérateurs différentiels développe une logique propre aux opérations que Peacock désignera comme le « langage du raisonnement symbolique » ou « l'algèbre symbolique », le passage formel au symbole s'accompagnant d'un renoncement au sens. Seules comptent désormais les lois générales qui structurent les opérations de l'algèbre symbolique. Le réseau des algébristes anglais vise à contrôler l'usage extensif de l'analogie, sans éliminer la richesse des résultats obtenus, tout en réaffirmant la généralité des opérations de l'esprit. Si les anglais ont conscience de l'importance de l'analogie, on peut remarquer cependant qu'ils n'assument pas complètement l'idée qu'elle peut conduire à la production d'idées nouvelles dans le domaine scientifique. À partir des travaux de Tarski (1939), la reconnaissance de structures algébriquement équivalentes permet un parallèle entre les énoncés démontrables dans chacun des systèmes. Un « principe de transfert » permet alors d'obtenir des énoncés vrais par passage d'un modèle d'une théorie complète à une autre, le transfert s'effectuant dans les deux sens. Le statut de l'analogie s'est alors transformé, du fait qu'elle permet d'établir des relations devenues réciproques entre les modèles qu'elle structure, ainsi qu'entre syntaxe logique et sémantique mathématique.

Une tout autre approche apparaît dans les mathématiques chinoises, longtemps décriées. Alexeï Volkov souligne qu'elles offrent plusieurs types de raisonnements par analogie. La démarche la plus fréquente est la « démonstration par un exemple » (p. 65), où le lecteur est jugé capable de comprendre une situation complexe à partir d'une étape plus simple. Les mathématiciens chinois préfèrent présenter en effet leur raisonnement à l'aide de cas particuliers conçus comme participant d'un modèle général. Ainsi les méthodes de calcul des aires de figures planes, ou des volumes, se ramènent à des calculs standard : un trapèze est comparé à un rectangle, un prisme trapézoïdal à un parallélépipède, etc. Une lecture herméneutique identifie ces « calculs emblématiques » à l'exercice de procédures algorithmiques fondées sur des analogies opératoires.

Alain Herreman insiste de son côté sur la méthode analogique mise en œuvre par Poincaré dans la définition de l'homologie, en référence à l'écriture algébrique équationnelle. Cette analogie, au fondement de la topologie algébrique, intervient tout d'abord au niveau « lexical », ce qui permet à Poincaré de transférer aux espaces les propriétés d'invariance opératoire des nombres. Les homologies peuvent être additionnées comme des équations ordinaires (p.115). Cette opération permet d'obtenir des invariants topologiques, tout en développant une vision porteuse de nombreuses recherches ultérieures.

Michel Paty analyse le sens de l'analogie chez Poincaré, dans le travail que ce dernier met en œuvre en relation avec la physique. Une première lecture permet de voir dans l'analogie non un principe d'explication, mais une « constatation d'identité profonde de structure dans les théories mathématiques ou dans les phénomènes physiques » (p.172). Cependant l'analogie semble avoir une fonction plus directe dans le raisonnement : l'utilisation par Felix Klein des propriétés des courants électriques lui permet de résoudre certaines questions relatives aux surfaces de Riemann. Inversement la forme d'une relation mathématique peut suggérer les relations qui lient des grandeurs physiques et cette « analogie mathématique » structurelle permet à la physique d'établir les lois générales des phénomènes. Dans l'histoire de la physique, ceci correspond par exemple au passage d'une mécanique newtonienne des forces à une physique mathématique lagrangienne et hamiltonienne. Un autre exemple est celui de l'électrodynamique de Maxwell, où ce dernier constate que « les équations deviennent plus symétriques quand on y ajoute un terme » (p. 182), devançant en cela l'expérience. Et Poincaré de conclure que Maxwell savait penser la physique selon les rapports mathématiques dont la symétrie est un trait significatif. Poincaré lui-même rapprochera deux problèmes, l'un lié à la théorie de la chaleur, l'autre à l'électrostatique, en montrant que tous deux se ramènent au problème de Dirichlet (trouver une fonction vérifiant une équation, avec certaines conditions aux limites) : « ces théories semblent des images calquées l'une sur l'autre » (p. 183). Plus qu'un outil de calcul, l'analyse mathématique aurait pour but de révéler « l'harmonie des choses » en les « faisant voir sous un nouveau biais » (p. 184) et en les regroupant par analogie. Michel Paty insiste sur le parallélisme entre l'épistémologie de Poincaré et les analyses de Kant. « Pour Poincaré, les mathématiques, essentiellement par l'Analyse, ont pour la physique la fonction de procurer une réalisation effective (ou une application ?) de ces lois transcendantales que sont les analogies de l'expérience au sens kantien. » (p. 188).

Claude Comte s'inscrit délibérément dans une démarche qui permet de déduire les lois fondamentales de la physique d'un petit nombre d'hypothèses générales, dont découle une unification des théories physiques. Centré initialement sur le modèle du levier d'Archimède, son raisonnement analyse le transfert de la structure mathématique exprimant les relations barycentriques du domaine de la statique, à ceux de la dynamique et de la cinématique relativistes, jusqu'à la théorie des champs de probabilité quantiques. Pour cet auteur, la théorie mathématique des groupes, incluant la notion d'invariance, permet l'expression des lois fondamentales de ces théories physiques, et l'analogie sert de critère de sélection dans la recherche de principes appropriés. À l'inverse, la rupture de l'analogie fait surgir des questionnements qui suscitent le progrès de la théorie : c'est en ce domaine que se situe le pouvoir heuristique de la démarche. Trois exposés, sur la conception aristotélicienne de l'analogie par Philippe Huneman, sur les sciences du végétal par Giles Denis, enfin sur la biologie moléculaire par Paul Bromberg, viennent heureusement compléter les analyses mathématiques et physiques.

L'exposé introductif de M. J. Durand-Richard tire les leçons d'une telle diversité d'approches, après une analyse des images de la science, telle qu'elle se donne à voir dans les théories achevées. Pour l'auteur, « l'empirisme logique a poussé à son paroxysme cette ambition philosophique d'un discours scientifique réduit à une syntaxe et à une sémantique, avant que le théorème d'incomplétude de Gödel ne vienne en ruiner l'utopie » (p. 3). Les mathématiques ne peuvent dès lors plus être interprétées stricto sensu comme une grammaire universelle du discours scientifique. Le langage formel apparaît fermé, clos sur lui-même, alors que les mathématiques et le discours scientifique demeurent ouverts, et par là porteurs d'une richesse polysémique bien vivante. La lecture « interne » des théories scientifiques achevées ne peut suffire, car elle peine à prendre en compte la production d'idées nouvelles.

La démarche analogique permet de mieux appréhender la complexité de la démarche scientifique, perçue comme un processus historique marqué par l'élaboration de significations nouvelles. Elle dépasse rapidement la métaphore lexicale, indice de rapprochement, pour étendre le champ opératoire. Qu'il s'agisse de l'extension de la notion de proportion entre des grandeurs, de la notion de morphisme entre des structures, ou de l'observation de l'identité opératoire entre le calcul de $(x+y)^n$ et celui de $d^n(xy)$, ce champ demeure en tout état de cause soumis à l'exigence de cohérence logique. La recherche de stabilités opératoires structurantes, sans que soit précisée la signification de ces phénomènes, conduit certes à l'installation du formalisme algébrique, du calcul fonctionnel ou du calcul symbolique. Et l'algèbre s'autorise à étendre des propriétés opératoires à de nouvelles entités, à établir des « formules » garantissant la concordance des résultats de deux calculs. L'analogie y gagne un nouveau statut lié au développement de l'algèbre. Mais ce processus « laisse en suspens l'interrogation sur la nature des signes utilisés et sur ce qu'ils sont censés représenter » (p. 19). Penser l'analogie permet donc d'appréhender la pleine signification du discours scientifique, et de prendre en compte cette suspension de la représentation, pour interroger la manière dont les processus opératoires modifient la référence de ce discours.

Anne-Marie Décaillot,
Université Paris V

Complex Analysis and CR Geometry

G. Zampieri

AMS, University Lecture Series, vol. 43, 2008. 200 p.
ISBN : 978-8218-4442-7. 45$

Née autour de l'année 1970 avec quelques mémoires de E. Bishop, S. Pinchuk, H. Alexander, S.M. Webster, G. Henkin, C. Fefferman, S.-S. Chern et J. Moser, K. Diederich, J.E. Fornaess, et déjà présente en germe dans les travaux de H. Lewy, L. Hörmander, J.J. Kohn, F. Treves sur l'hypoellipticité des systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles tels que le $\overline{\partial}$ tangentiel (années 1960), la géométrie de Cauchy-Riemann (dite CR) a maintenant acquis ses lettres de noblesse comme domaine de recherche en mathématiques, et elle incorpore aujourd'hui des problèmes et des techniques reliés à des sujets aussi divers et variés que les formules intégrales, la géométrie analytique locale, l'analyse harmonique, les connexions au sens d'Élie Cartan, les espaces homogènes, les courbes holomorphes au sens de Gromov, la géométrie symplectique, l'analyse microlocale, la théorie géométrique des équations aux dérivées partielles, la théorie des feuilletages, l'homologie de Flœr, etc. Complémentarité entre le champ réel et le champ complexe, encore un effet de l'unité des mathématiques. Comme dans de nombreux autres domaines relativement jeunes et en mutation permanente, on manque ici de monographies systématiques et « *up-to-date* ».

Auprès d'un public de (post-)doctorants vraiment novices, le livre modeste de G. Zampieri tente spécialement de rendre attractif la thématique du prolongement holomorphe *via* la méthode des disques analytiques, laquelle a connu son heure de gloire au début des années 1990, notamment avec les travaux de J.-M. Trépreau et d'A.Tumanov.

Sans prétention, le premier chapitre est consacré à un très classique rappel de la théorie de base des fonctions de plusieurs variables complexes, qu'on enseigne toujours dans les cours de niveau M2 de part le monde. Le lecteur croit reconnaître en partie le plan des premières pages du célèbre livre de L. Hörmander *An introduction to complex analysis in several variables* (North Holland, Amsterdam, 1966), ce « diamant », disait J. Détraz. Il y est question de formule de Cauchy, de développement en série entière, de théorème de convergence, de domaines de Reinhardt, de fonctions plurisousharmoniques, d'analyticité séparée, de forme de Levi, de théorème d'extension de Lewy, de théorème de Hanges-Treves sur la propagation du prolongement holomorphe le long de courbes holomorphes contenues dans un bord de domaine, de domaine d'holomorphie, de convexité holomorphe, de pseudoconvexité. Seule note de « nouveauté » à ce chapitre : la solution au problème de Levi (équivalence entre la notion de domaine pseudoconvexe et celle de domaine d'holomorphie) est traitée via une version du $\overline{\partial}$-Neumann dans certains domaines q-pseudoconvexes, en un sens précis propre à l'auteur, avant un passage à la limite par exhaustion.

Le chapitre 2 est consacré à quelques notions de base de la géométrie différentielle : champs de vecteurs, théorème de Frobenius, espaces symplectiques réels, formes normales locales de Darboux-Frobenius. Une section présente les estimées sous-elliptiques de Hörmander pour les systèmes de champs de vecteurs à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ satisfaisant à la condition d'accessibilité de Chow, l'ordre de sous-ellipticité n'étant pas optimal. Enfin, dans une courte dernière section, on regrettera que l'auteur se soit contenté de renvoyer à l'article original de H.J. Sussmann pour présenter la notion d'orbite d'un système de champs de vecteurs, parce qu'elle est intrinsèquement reliée aux propriétés de prolongement holomorphe des fonctions CR.

Le troisième et dernier chapitre constitue en principe le cœur de l'ouvrage. Structures presque complexes, variétés CR, sous-variétés génériques, sous-variétés totalement réelles, fonctions CR et applications CR apparaissent enfin. Fait symptomatique, le théorème de réalisation des structures presque complexes involutives, dû à Newlander-Nirenberg, est énoncé en tant que tel, mais G. Zampieri annonce dans la « démonstration » qu'il traitera le cas plongé (*sic* !) du théorème, énoncé élémentaire et beaucoup plus ancien, en fait dû à Levi-Civita, et qui dit seulement qu'une sous-variété réelle $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{C}^n$ dont les espaces tangents sont J-invariants est holomorphe. Le théorème facile de plongement des structures CR analytiques réelles est redémontré sans même mentionner le saut gigantesque qu'il faudrait faire pour restituer les travaux profonds de M. Kuranishi, S.M. Webster, T. Akahori, D. Catlin, J. Michel, dans le cas $\mathcal{C}^\infty$ ou $\mathcal{C}^{\kappa,\alpha}$, ce qui aurait éventuellement pu aiguiser la curiosité des meilleurs lecteurs : on attend depuis longtemps une telle monographie. Le théorème classique d'approximation uniforme des fonctions CR continues par des polynômes holomorphes dû à S. Baouendi-F. Treves apparaît. Dans les toutes dernières sections, en travaillant avec le fibré conormal, G. Zampieri reconstruit le théorème d'extension holomorphe à un wedge des fonctions CR définies sur une sous-variété générique minimale et il traite du défaut des disques analytiques attachés comme le faisait A. Tumanov dans son article original de 1988. Pour cette partie à mon humble avis, deux articles de survol élégants et concis mais peu cités de J.-M. Trépreau[3] et de A. Tumanov[4] restent, malgré une autre tentative précédente de Baouendi-Ebenfelt-Rothschild dans leur livre publié à Princeton, la meilleure référence à étudier.

Joël Merker,
École Normale Supérieure, Paris

[3] Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 21, Birkhäuser, Boston, MA, 1996, pp. 333–355.
[4] Lecture Notes in Math., **1684**, Springer-Verlag, Berlin, 1998, pp. 123–141.