SOMMAIRE DU Nº 131

SMF	
Mot du Président	3
MATHÉMATIQUES	
Une excursion semi-classique dans l'univers des guides d'ondes, N. Raymond	5
Aspects de la théorie des chemins rugueux, <i>J. Unterberger</i>	16
SOUVENIRS ET RÉFLEXIONS SUR 30 ANS D'EXISTENCE DU CIRM	
Avant-propos, P. Chossat, B. Helffer, G. Lachaud	35
Quelques souvenirs d'une ancienne présidente de la SMF, M. Martin-Deschamps	36
Le CIRM de 1985 à 1991, G. Lachaud	38
Souvenirs d'un directeur du CIRM, R. Coquereaux	40
Souvenirs en forme de dictionnaire amoureux, P. Chossat	43
Les ondelettes et le CIRM, M. Farge, A. Grossmann, Y. Meyer, T. Paul, JC. Risset,	
G. Saracco, B. Torrésani	47
HISTOIRE	
De Galois aux corps finis, A. Chambert-Loir	59
COOPÉRATION FRANCO-VIETNAMIENNE EN MATHÉMATIQUES	
Bref état des lieux et perspectives, L. Schwartz	71
Un nouvel institut à Hanoi, Ngo Bao Chau	76
Le Master de Mathématiques délocalisé à Ho Chi Minh Ville, M. Zinsmeister,	
T.G.T. Nguyen	77
INFORMATIONS	
Note du comité d'experts pour les PES 2011 en sections 25-26	81
Nouvelles du CNRS, V. Bonnaillie-Noël et Y. Brenier	84
Bilan des primes d'excellence scientifique (PES) CNRS 2011 , F. Balestié et P. Dehornoy	
Math-Bridge, <i>V. Durand-Guerrier, C. Mercat, J. Zsid</i> ó	
Cap'Maths: 3 millions pour les maths, <i>M. Andler</i>	
LIVEC	100

Mot du Président

Au moment où vous ouvrirez ce nouveau numéro de la *Gazette*, je serai déjà en retard pour vous souhaiter une bonne année 2012. L'année 2011 a été une année où beaucoup d'énergie a été dépensée, pas toujours avec succès, pour pouvoir poursuivre des projets vitaux pour la communauté mathématique dans un cadre pour le moins mouvant avec la mise en place de l'autonomie des universités et les vagues successives des programmes d'excellence donnant parfois quelques bouffées d'air à certains mais également des sentiments d'impuissance pour beaucoup d'autres.

Quelques points nous inquiètent particulièrement. Tout d'abord, le CNRS pour-suit la baisse des crédits affectés pour le fonctionnement de l'INSMI (15% au final en 2011 et semble-t-il 9,5%, pour 2012). On se retrouve ainsi pratiquement au niveau d'avant la création de l'INSMI. Cette augmentation sensible effectuée en 2010 se justifiait par la volonté de soutenir un des points forts de la science française et de permettre à l'INSMI de mener une politique nationale. L'affaiblissement de son financement a bien sûr des conséquences directes mais également diminue sa capacité d'influer sur la politique des mathématiques au niveau national.

L'exemple le plus criant est la situation intenable dans laquelle se trouvent les bibliothèques de mathématiques, face aux ambitions financières des gros éditeurs commerciaux, les décisions locales de leurs universités et le manque de moyens du RNBM. Pour ne rien arranger, le programme PRIAM (prenant la suite du projet d'equipex PurMath refusé dans la première vague) pour lequel nous avions beaucoup d'espoir semble être de nouveau refusé.

Les interventions de la SMF ont été constantes, discrètes pour, nous l'espérions, assurer leur succès et conjointes avec la SMAI et la SFdS pour montrer notre unité. Nous restons étonnés que le président du CNRS Alain Fuchs n'ait pas cru bon répondre à la lettre qui lui avait été adressée par les 3 présidents des sociétés savantes de mathématiques.

Au niveau de la SMF, cette situation intenable sur le long terme des bibliothèques met aussi en danger notre secteur des publications et plus généralement celle de tous les éditeurs académiques. Si les éditeurs commerciaux imposent 4% d'augmentation de chiffre annuel, si les crédits de l'INSMI diminuent de 9% et si le coût de l'édition augmente de 5%, le système actuel va craquer et l'autonomie des universités va conduire fatalement à la recherche de solutions « locales », ne

I SMF

tenant pas compte de la situation particulière des mathématiques, au détriment de tout ce travail commun dans le cadre du RNBM.

En ce qui concerne les programmes des lycées, la consultation réalisée par l'inspection générale avant l'été n'a débouché sur aucune modification notable dans la version finale. On trouvera sur notre site Web le communiqué que nous avons publié à ce propos conjointement avec l'APMEP.

Tout ceci ne semble pas bien rose et pourtant la vitalité des mathématiciens a permis le succès en 2011 de nombreuses opérations : 30 ans du CIRM, Semaine Galois, projet Cap'maths, lancement de CARMIN et de AMIES... Enfin l'espoir d'un grand IHP semble se concrétiser.

La SMF a poursuivi une action d'édition importante, tant au niveau de ses revues que pour ses collections : Correspondance Cartan-Weil, Selecta de Laurent Schwartz, réédition du séminaire Demazure-Grothendieck, coédition d'une traduction du Knuth en français, publication d'un numéro spécial de la *Revue d'histoire des mathématiques* dédié à Galois, sortie de la traduction française du livre de Behrends dans *La Série T* qui propose au grand public la découverte de 100 contributions pour faire connaissance avec les mathématiques. Pour toute cette activité elle reste tributaire de la fidélité de ses lecteurs mais aussi de l'aide de l'INSMI : nous voilà renvoyés au début de ce mot !

Comme nous l'avions annoncé c'est San Vu Ngoc qui a pris les commandes pour ce numéro. Le comité de la *Gazette* s'est élargi avec l'arrivée de M. Queffelec et C. Ehrhardt. F. Petit a émis le souhait de quitter le comité de rédaction tout en poursuivant sa tâche indispensable de relectrice. Cette *Gazette* évoquera en particulier les 30 ans du CIRM dans un dossier préparé par Pascal Chossat et Gilles Lachaud

Le 1^{er} janvier 2012 Bernard Helffer

MATHÉMATIQUES

Une excursion semi-classique dans l'univers des guides d'ondes

Nicolas Raymond¹

L'objet de ce petit article est de donner un aperçu de quelques interactions conceptuelles (et humaines!) au sein de la Physique Mathématique et notamment de voir comment, de la théorie de Ginzburg-Landau, on peut glisser vers la théorie spectrale et l'analyse semi-classique pour arriver dans le fascinant domaine des guides d'ondes.

1. De la supraconductivité aux guides d'ondes

Dans les années 50, Ginzburg et Landau ont proposé l'expression suivante pour l'énergie (fonctionnelle de Ginzburg-Landau) d'un supraconducteur soumis à un champ magnétique extérieur β (voir la modélisation physique dans [50]) :

$$\mathcal{G}_{\kappa,\sigma}(\psi,\mathbf{A}) = \int_{\Omega} |(i\nabla + \kappa\sigma\mathbf{A})\psi|^2 dx - \kappa^2 \int_{\Omega} |\psi|^2 dx + \frac{\kappa^2}{2} \int_{\Omega} |\psi|^4 dx + (\kappa\sigma)^2 \int_{\Omega} |\nabla \times \mathbf{A} - \boldsymbol{\beta}|^2 dx,$$

où $|\psi|^2$ représente une densité de paires d'électrons et $\nabla \times \mathbf{A}$ le champ magnétique régnant dans le supraconducteur. $\kappa>0$ est appelé paramètre de Ginzburg-Landau et dépend essentiellement de la nature du matériau (c'est la température en dessous de laquelle la résistivité du matériau est très faible) ; σ représente quant à lui l'intensité du champ magnétique appliqué. La caractérisation des minimiseurs de cette énergie (les états attendus pour le métal : normal ou supraconducteur) via les équations d'Euler-Lagrange amène à étudier (cf. [37, 38, 25, 26]) l'opérateur :

$$(i\nabla + \kappa \sigma \mathbf{F})^2 - \kappa^2$$
,

où ${\bf F}$ est défini par : ${\boldsymbol \beta}=\nabla\times{\bf F}$. Pour les supraconducteurs dits « de type II », on peut supposer que κ est grand (on obtient de tels supraconducteurs par la fabrication d'alliages) et cela mène naturellement à étudier les plus petites valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger magnétique $(-ih\nabla+{\bf A})^2$ dans la limite $h\to 0$, connue sous le nom de limite semi-classique.

¹ IRMAR, Université Rennes 1, UMR 6625, Rennes, France.

1.1. L'opérateur magnétique

Dans ce qui suit, on suppose que Ω est un ouvert borné régulier connexe et simplement connexe et que $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$. Rappelons succinctement la définition de l'opérateur magnétique. On pose :

$$\mathsf{Dom}(P_{h,\mathbf{A}}) = \{ \psi \in L^2(\Omega) : (-ih\nabla + \mathbf{A})^2 \psi \in L^2(\Omega) \text{ et } (-ih\nabla + \mathbf{A})\psi \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$
 et pour $\psi \in \mathsf{Dom}(P_{h,\mathbf{A}})$, on définit :

$$P_{h,\mathbf{A}}\psi=(-ih\nabla+\mathbf{A})^2\psi.$$

On peut classiquement montrer que $P_{h,\mathbf{A}}$ est auto-adjoint et à résolvante compacte de sorte que son spectre est une suite croissante de valeurs propres qui tend vers $+\infty$.

Un bref état de l'art Le cas le plus largement étudié est le cas du champ magnétique constant. En 2D, l'asymptotique ($h \rightarrow 0$) de la plus petite valeur propre a été obtenue dans le cas du disque par P. Bauman, D. Phillips et Q. Tang dans [3] (voir également [4] et [17]) et a été généralisée par B. Helffer et A. Morame dans [30] à des domaines bornés réguliers. L'asymptotique à tout ordre est prouvée par S. Fournais et B. Helffer dans [24]. En 3D, on peut mentionner le célèbre article de B. Helffer et A. Morame [32] donnant l'asymptotique à deux termes de la première valeur propre. Lorsque le champ magnétique est variable, moins de résultats sont connus. En 2D, l'article de K. Lu et X-B. Pan [37] fournit une asymptotique à un terme et [45] donne le deuxième terme sous des conditions génériques (pour l'asymptotique à tout ordre, voir [48]). En 3D, pour un équivalent de la première valeur propre, on peut citer [38] et pour une majoration à trois termes [46] (pour un développement à tout ordre sur un opérateur jouet voir [47]).

Nous pouvons enfin mentionner des travaux qui abordent les problèmes où le bord présente des coins [35, 42] et plus récemment ceux de M. Dauge et V. Bonnaillie-Noël [5, 7] et enfin la thèse de N. Popoff [44].

De nombreuses questions magnétiques semi-classiques demeurent largement ouvertes, en particulier en dimension 3. Ainsi, l'asymptotique des petites valeurs propres dans le cas d'un ouvert régulier et d'un champ magnétique variable (aussi bien dans le cas Dirichlet que le cas Neumann) est encore inconnue et semble être un problème délicat du fait de la perturbation de la structure symplectique induite par le champ magnétique. Par ailleurs, l'approximation précise des fonctions propres par une méthode BKW est ici en défaut ce qui rend plus ardue l'étude de l'effet tunnel purement magnétique (tandis que l'effet tunnel électrique est bien compris mathématiquement depuis les travaux de B. Helffer et J. Sjöstrand, voir par exemple [33, 34]). Dans le cas d'un ouvert non régulier, le même type de questions se pose (voir par exemple les approches numériques dans [8]).

1.2. L'opérateur modèle du problème à champ variable en dimension 3

Voyons maintenant comment nous sommes conduits de l'étude des problèmes à champ variable en dimension 3 à un opérateur modèle. Le principe est simple :

on approche le bord par un plan et un champ variable par un champ constant. Posons :

$$\Omega = \mathbb{R}^2_+ = \{ x = (s, t) \in \mathbb{R}^2, \ t > 0 \}.$$

Après quelques transformations supplémentaires (transformée de Fourier et translation), nous sommes amenés à étudier la réalisation de Neumann sur Ω de l'opérateur :

$$H(\theta) = -\Delta + V_{\theta} = -\partial_s^2 - \partial_t^2 + V_{\theta},$$

où $V_{ heta}$ est défini pour $heta \in (0, \frac{\pi}{2})$ par

$$V_{\theta}$$
: $x = (s, t) \in \Omega \longmapsto (t \cos \theta - s \sin \theta)^2$.

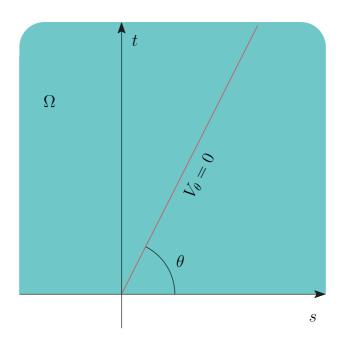


Fig. 1. Ligne d'annulation de V_{θ}

On peut remarquer que V_{θ} atteint son minimum le long de $t\cos\theta = s\sin\theta$, qui fait un angle θ avec $\partial\Omega$. Entre autres choses, on peut démontrer (cf. [31, 38]) :

Lemme 1.1. Il existe au moins une valeur propre de $H(\theta)$ en dessous du spectre essentiel et ce dernier est $[1, +\infty)$.

La figure 2 présente des simulations numériques pour la première fonction propre de $H(\theta)$ (le rouge représente le domaine où elle est grande et le bleu celui où elle est petite).

À partir du Lemme 1.1, c'est un résultat classique, combinant une estimée d'Agmon (cf. [1]) et un théorème de Persson (cf. [43]), qui permet de montrer que les fonctions propres associées vérifient des propriétés de localisation (près de (0,0)). Grossièrement, on peut dire que les fonctions propres vivent dans la vallée du potentiel. Ce résultat peut paraître surprenant car on ne comprend pas

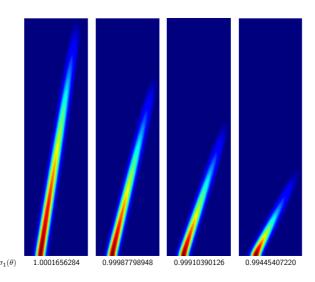


FIG. 2. Première fonction propre de $H(\theta)$ pour $\theta = \vartheta \pi/2$ avec $\vartheta = 0.9, 0.85, 0.8$ et 0.7.

bien la raison heuristique de l'existence du spectre discret²; on sent juste que c'est la combinaison de la condition de Neumann et du confinement partiel du potentiel qui crée un « piège » pour d'éventuelles fonctions propres. Après quelques changements de variables visant à mieux comprendre la dépendance en θ , nous sommes amenés à considérer l'opérateur sur Ω :

$$hD_s^2 + D_t^2 + (t - \zeta_0 - sh^{1/2})^2 - \Theta_0$$

pour $h=\tan\theta>0$ et où ζ_0 et Θ_0 sont des constantes universelles définies à partir de l'opérateur de de Gennes (cf. [14]) qui est la réalisation de Neumann sur \mathbb{R}_+ de :

$$H_{\xi} = -\partial_t^2 + (t - \xi)^2.$$

L'approximation de Born-Oppenheimer³ (voir par exemple [40]), à laquelle on se réduit par une méthode de projection, permet alors de considérer l'opérateur 1D effectif :

$$hD_s^2 + \mu(\zeta_0 + sh^{1/2}) - \Theta_0$$

où $\mu(\zeta_0+sh^{1/2})$ est la plus petite valeur propre (s étant fixé) de $H_{\zeta_0+sh^{1/2}}$. Ce type d'opérateur est alors très classique à étudier via les méthodes développées par Helffer et Sjöstrand dans le cadre de l'étude de l'effet tunnel (voir [33]). Alliant cet ensemble de considérations, un développement asymptotique à tout ordre des plus petites valeurs propres de $H(\theta)$ a pu être obtenu dans la limite $\theta \to 0$ (voir [6]) :

Question posée à l'auteur par Gilles Lebeau

³ approximation issue de la chimie quantique introduite par M. Born et R. Oppenheimer en 1927 dans [10] et qui consiste à considérer que les masses des électrons sont beaucoup plus faibles que les masses des noyaux.

Théorème 1.2. Les plus petites valeurs propres de $H(\theta)$ admettent des développements asymptotiques à tout ordre quand θ tend vers 0:

(0.1)
$$\sigma_n(\theta) \sim \sum_{j \geqslant 0} \gamma_{j,n} \theta^j$$

De plus, on a $\gamma_{0,n}=\Theta_0$ et $\gamma_{1,n}=(2n-1)\sqrt{rac{\mu''(\zeta_0)}{2}}$.

2. Le spectre des guides d'ondes

En utilisant la condition de Neumann sur le bord, nous pouvons symétriser $H(\theta)$ et obtenir l'opérateur sur \mathbb{R}^2 suivant :

$$-\partial_s^2 - \partial_t^2 + V_{\theta}(s,|t|)$$

et nous observons que le potentiel s'annule le long d'une ligne brisée; ce dernier semble jouer le rôle d'un « guide d'onde ».

Commençons par faire une remarque heuristique. Si nous symétrisons l'opérateur $H(\theta)$ et qu'on le regarde « de loin », on est très tenté de remplacer le piégeage transverse par une condition de Dirichlet. Ainsi, au lieu de considérer $-\Delta + V_{\theta}$, on examine plutôt le Laplacien de Dirichlet dans un coude d'angle 2θ . On vient d'utiliser un principe heuristique très simple : là où le potentiel est grand, on dit qu'il est infini et là où il est petit, on dit qu'il est nul⁴. Ce potentiel, très singulier, donne lieu au Laplacien de Dirichlet. Voici donc la situation à laquelle nous mènent nos considérations intuitives :

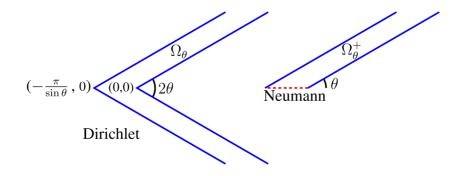


Fig. 3. Guide d'onde à coin Ω_{θ} et demi-guide Ω_{θ}^+ .

⁴ Que Francis Nier soit remercié pour cette instructive intuition!

2.1. Le résultat fondamental de Duclos et Exner

Le problème mathématique des guides d'ondes a suscité un regain d'intérêt dans les dix dernières années au travers de la physique expérimentale (micro-électronique). Les motivations physiques (et surtout technologiques) concernent essentiellement des problèmes de fabrication de micro-structures comme les films fins de semi-conducteurs, les feuilletages atomiques ou encore les fibres optiques. Les échelles mises en jeu dans ces problèmes sont mésoscopiques, c'est-à-dire intermédiaires entre l'échelle atomique et l'échelle macroscopique standard. Dans leur article [19], Duclos et Exner se sont intéressés au spectre discret du Laplacien de Dirichlet sur un tube « générique » (en dimension 2 et 3). Voici des exemples en 2D de tels tubes :

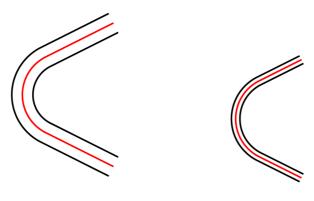


FIG. 4. Tube FIG. 5. Tube fin

En supposant que le guide d'onde devenait droit à l'infini et que la courbure de la ligne centrale n'était pas nulle, ils ont montré qu'il existait toujours une valeur propre sous le spectre essentiel (dans le cas d'une section circulaire). Nous pouvons d'ailleurs remarquer que le spectre essentiel provient de l'allure à l'infini du guide d'onde et qu'il est donné par $[\lambda,+\infty)$ où λ est la plus petite valeur propre du problème de Dirichlet sur la section transverse. Le principe de leur preuve est élémentaire et consiste essentiellement en une application du principe du mini-max (voir [49]). Considérant pour $\psi \in H^1_0(\Omega)$:

$$q(\psi) = \int_{\Omega} |\nabla \psi|^2 \, dx,$$

il s'agit de trouver une fonction ψ_0 telle que $q(\psi_0) < \lambda \|\psi_0\|_{L^2(\Omega)}$. On trouve alors une telle fonction en perturbant une suite de Weyl associée à λ . Duclos et Exner ont aussi effectué l'analyse du spectre dans la limite des guides d'ondes fins en utilisant la théorie des perturbations de Kato (cf. [36]) en vue de se ramener à un opérateur modèle 1D. Ce travail a été généralisé à des sections non nécessairement circulaires et en dimension quelconque dans [13].

2.2. Et avec un coin?

Si la courbure fait apparaître du spectre discret, il est alors assez naturel de se demander si une « courbure infinie » (notamment en dimension 2) n'accentuerait

pas le phénomène (voir Figure 2). Voici quelques exemples de guides d'ondes à coin :

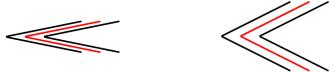


FIG. 6. Petite ouverture

FIG. 7. Guide d'onde cassé

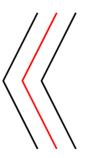
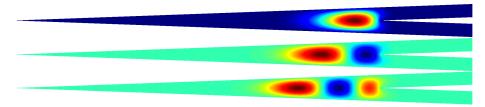


Fig. 8. Grande ouverture

Il se trouve que ce sujet a déjà fait l'objet d'analyses théoriques et expérimentales par des physiciens (voir [2, 12]). Ces auteurs ont en effet montré qu'il y avait encore du spectre discret sous le spectre essentiel. Quelques investigations mathématiques ont aussi eu lieu (voir [22, 28, 29]) et plus récemment, pour la dimension 3, on peut mentionner [23] pour le guide d'onde conique et dont les résultats sont en cours de raffinement dans la thèse de T. Ourmières [41]. Plus récemment encore, l'article [15] fournit des estimations numériques et démontre les propriétés élémentaires du spectre (existence par la méthode de Duclos-Exner, finitude du nombre de valeurs propres, monotonie, etc.).



 $\rm Fig.~9.~$ Première, deuxième et troisième fonctions propres avec $\theta \sim 0.2^{\circ}$

Par ailleurs, une analyse semi-classique fine du problème quand $\theta \to 0$ a permis d'estimer les plus petites valeurs propres du guide à coin dans [16] :

Théorème 2.1. Quand θ est assez petit, les plus petites valeurs propres existent et admettent des développements asymptotiques :

$$\mu_n(\theta) \underset{\theta \to 0}{\sim} \sum_{j \geq 0} \gamma_{j,n} \theta^{j/3} \quad \text{avec} \ \ \gamma_{0,n} = \frac{1}{4}, \ \ \gamma_{1,n} = 0, \ \ \text{et} \ \ \gamma_{2,n} = -2(4\pi\sqrt{2})^{-2/3} z(n),$$

où z(n) est le n-ième zéro de la fonction d'Airy (numéroté dans l'ordre décroissant).

Les ingrédients principaux de la preuve sont les mêmes que ceux utilisés dans [6], à savoir : l'approximation de Born-Oppenheimer, des estimées d'Agmon, la réduction à l'opérateur d'Airy par la méthode de Feshbach-Grushin et une construction de quasi fonctions propres par des développements en série formelle de type BKW. L'analyse du guide d'onde à coin mène également au problème de Dirichlet sur les triangles, notamment dans la limite des petits angles (voir [27, 9]).

2.3. Torsion et champ magnétique versus courbure

Torsion Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la courbure était favorable au spectre discret. On peut se demander ce qui se passe si l'on applique une torsion à un guide d'onde. C'est ce problème qui a été étudié dans [21]. Dans cet article, les auteurs ont montré que l'effet de la torsion jouait contre l'apparition du spectre discret sous le spectre essentiel.

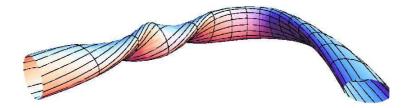


Fig. 10. Effet de torsion à gauche et effet de courbure à droite

On a même une propriété remarquable : après une légère torsion d'un guide d'onde droit, l'application d'une courbure ne fait pas immédiatement apparaître du spectre discret : il y a une compétition entre courbure et torsion (qui a été mise en évidence dans la limite des guides fins dans [11] via une analyse par Γ -convergence). Expliquons brièvement le principe du résultat (en présence de torsion et sans courbure). Pour $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, posons, pour $\psi\in H^1_0(\mathbb{R}\times\omega)$:

$$q_{\sigma}(\psi) = \|\partial_1 \psi - \sigma(t_3 \partial_2 - t_2 \partial_3)\psi\|^2 + \|\partial_2 \psi\|^2 + \|\partial_3 \psi\|^2.$$

Le Laplacien de Dirichlet se ramène en effet à cette forme quadratique après un choix de variables convenable et conjugaison par une transformation unitaire standard. Appelons E_1 la première valeur propre du problème de Dirichlet sur la section ω . Il est facile de voir que :

$$q_{\sigma}(\psi) \geqslant E_1 \|\psi\|^2$$
,

de sorte que la torsion ne fait pas apparaître de spectre discret sous le spectre essentiel. En fait, il y a même une augmentation stricte de l'énergie :

$$q_\sigma(\psi) - \textit{E}_1 \|\psi\|^2 \geqslant c(\textit{s}_0, \sigma, \omega) \int_{\mathbb{R} \times \omega} \frac{|\psi(\textit{s}, \textit{t})|^2}{1 + (\textit{s} - \textit{s}_0)^2} \, \textit{dsdt}, \quad \forall \psi \in \textit{H}^1_0(\mathbb{R} \times \omega),$$

où $c(s_0, \sigma, \omega) > 0$ si $\sigma(s_0) \neq 0$. Pour montrer cela, le point clef est l'utilisation d'une inégalité de Hardy 1D.

Champ magnétique L'expression de l'opérateur avec torsion évoque un problème avec champ magnétique et on peut se demander si le champ magnétique ne joue pas lui aussi contre la courbure. C'est l'objet de [20] où le problème est abordé en dimension 2 via les mêmes méthodes et où des résultats tout à fait analogues sont démontrés. Pour ce qui est de la dimension 3, le problème reste largement ouvert et, même en dimension 2, le problème de l'existence du spectre discret pour un guide d'onde plongé dans un champ magnétique uniforme (pour les grandes valeurs du champ) demeure complètement ouvert!

Enfin, nous pouvons mentionner des travaux transverses à la thématique des guides d'ondes et connus dans la littérature sous le nom de « guides d'ondes magnétiques » (voir [18] et les références nombreuses citées par les auteurs) qui traitent de l'effet Hall quantique. Il s'agit pour les auteurs d'analyser le laplacien magnétique en 2D dans le cas où le champ magnétique possède un saut au niveau de la droite x=0 et d'étudier la quantification du courant induit dans la direction y qui se comporte comme un guide d'onde. Leur analyse amène alors à considérer des problèmes semi-classiques faisant apparaître les opérateurs de de Gennes et d'Airy...

Remerciements L'auteur aimerait chaleureusement remercier ses collègues et collaborateurs pour les nombreuses et stimulantes discussions des pauses café, ainsi que la mystérieuse Mélina [39].

3. Références

- S. AGMON. Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations: bounds on eigenfunctions of N-body Schrödinger operators, volume 29 of Mathematical Notes. Princeton University Press, Princeton, NJ 1982.
- [2] Y. AVISHAI, D. BESSIS, B. G. GIRAUD, G. MANTICA. Quantum bound states in open geometries. Phys. Rev. B 44(15) (Oct 1991) 8028–8034.
- [3] P. BAUMAN, D. PHILLIPS, Q. TANG. Stable nucleation for the Ginzburg-Landau system with an applied magnetic field. *Arch. Rational Mech. Anal.* **142**(1) (1998) 1–43.
- [4] A. Bernoff, P. Sternberg. Onset of superconductivity in decreasing fields for general domains. *J. Math. Phys.* **39**(3) (1998) 1272–1284.
- [5] V. BONNAILLIE. On the fundamental state energy for a Schrödinger operator with magnetic field in domains with corners. Asymptot. Anal. 41(3-4) (2005) 215–258.
- [6] V. BONNAILLIE, M. DAUGE, N. POPOFF, N. RAYMOND. Discrete spectrum of a model schrödinger operator on the half-plane with neumann conditions. To appear in ZAMP (2011).
- [7] V. BONNAILLIE-NOËL, M. DAUGE. Asymptotics for the low-lying eigenstates of the Schrödinger operator with magnetic field near corners. Ann. Henri Poincaré 7(5) (2006) 899–931.
- [8] V. BONNAILLIE-NOËL, M. DAUGE, D. MARTIN, G. VIAL. Computations of the first eigenpairs for the Schrödinger operator with magnetic field. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196(37-40) (2007) 3841–3858.
- [9] D. Borisov, P. Freitas. Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in \mathbb{R}^d . *J. Funct. Anal.* **258** (2010) 893–912.
- [10] M. BORN, R. OPPENHEIMER. Zur Quantentheorie der Molekeln. Ann. Phys. 84 (1927) 457–484.
- [11] G. BOUCHITTÉ, M. L. MASCARENHAS, L. TRABUCHO. On the curvature and torsion effects in one dimensional waveguides. ESAIM Control Optim. Calc. Var. 13(4) (2007) 793–808 (electronic).
- [12] J. P. CARINI, J. T. LONDERGAN, K. MULLEN, D. P. MURDOCK. Multiple bound states in sharply bent waveguides. Phys. Rev. B 48(7) (Aug 1993) 4503–4515.

14

- [13] B. CHENAUD, P. DUCLOS, P. FREITAS, D. KREJČIŘÍK. Geometrically induced discrete spectrum in curved tubes. *Differential Geom. Appl.* 23(2) (2005) 95–105.
- [14] M. DAUGE, B. HELFFER. Eigenvalues variation. I. Neumann problem for Sturm-Liouville operators. J. Differential Equations 104(2) (1993) 243–262.
- [15] M. Dauge, Y. Lafranche, N. Raymond. Quantum waveguides with corners. *In progress* (2011).
- [16] M. DAUGE, N. RAYMOND. Plane waveguides with corners: small angle limit. Preprint (2011).
- [17] M. DEL PINO, P. L. FELMER, P. STERNBERG. Boundary concentration for eigenvalue problems related to the onset of superconductivity. Comm. Math. Phys. 210(2) (2000) 413–446.
- [18] N. DOMBROWSKI, F. GERMINET, G. RAYKOV. Quantization of edge currents along magnetic barriers and magnetic guides. *Preprint* (2011).
- [19] P. Duclos, P. Exner. Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions. Rev. Math. Phys. 7(1) (1995) 73–102.
- [20] T. EKHOLM, H. KOVAŘÍK. Stability of the magnetic Schrödinger operator in a waveguide. Comm. Partial Differential Equations 30(4-6) (2005) 539–565.
- [21] T. EKHOLM, H. KOVAŘÍK, D. KREJČIŘÍK. A Hardy inequality in twisted waveguides. Arch. Ration. Mech. Anal. 188(2) (2008) 245–264.
- [22] P. EXNER, P. ŠEBA, P. ŠŤOVÍČEK. On existence of a bound state in an L-shaped waveguide. Czech. J. Phys. 39(11) (1989) 1181–1191.
- [23] P. EXNER, M. TATER. Spectrum of Dirichlet Laplacian in a conical layer. *J. Phys.* **A43** (2010).
- [24] S. FOURNAIS, B. HELFFER. Accurate eigenvalue asymptotics for the magnetic Neumann Laplacian. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **56**(1) (2006) 1–67.
- [25] S. FOURNAIS, B. HELFFER. On the third critical field in Ginzburg-Landau theory. Comm. Math. Phys. 266(1) (2006) 153-196.
- [26] S. FOURNAIS, B. HELFFER. Spectral methods in surface superconductivity. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 77. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA 2010
- [27] P. FREITAS. Precise bounds and asymptotics for the first Dirichlet eigenvalue of triangles and rhombi. J. Funct. Anal. 251 (2007) 376–398.
- [28] L. FRIEDLANDER, M. SOLOMYAK. On the spectrum of narrow periodic waveguides. Russ. J. Math. Phys. 15(2) (2008) 238–242.
- [29] L. FRIEDLANDER, M. SOLOMYAK. On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip. Israel J. Math. 170 (2009) 337–354.
- [30] B. HELFFER, A. MORAME. Magnetic bottles in connection with superconductivity. J. Funct. Anal. 185(2) (2001) 604–680.
- [31] B. HELFFER, A. MORAME. Magnetic bottles for the Neumann problem: the case of dimension 3. Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 112(1) (2002) 71–84. Spectral and inverse spectral theory (Goa, 2000).
- [32] B. HELFFER, A. MORAME. Magnetic bottles for the Neumann problem: curvature effects in the case of dimension 3 (general case). Ann. Sci. école Norm. Sup. (4) 37(1) (2004) 105–170.
- [33] B. HELFFER, J. SJÖSTRAND. Multiple wells in the semiclassical limit. I. Comm. Partial Differential Equations 9(4) (1984) 337–408.
- [34] B. HELFFER, J. SJÖSTRAND. Puits multiples en limite semi-classique. II. Interaction moléculaire. Symétries. Perturbation. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 42(2) (1985) 127–212.
- [35] H. T. JADALLAH. The onset of superconductivity in a domain with a corner. J. Math. Phys. 42(9) (2001) 4101–4121.
- [36] T. Kato. Perturbation theory for linear operators. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin 1995. Reprint of the 1980 edition.
- [37] K. Lu, X.-B. PAN. Eigenvalue problems of Ginzburg-Landau operator in bounded domains. J. Math. Phys. 40(6) (1999) 2647–2670.
- [38] K. Lu, X.-B. Pan. Surface nucleation of superconductivity in 3-dimensions. J. Differential Equations 168(2) (2000) 386–452. Special issue in celebration of Jack K. Hale's 70th birthday, Part 2 (Atlanta, GA/Lisbon, 1998).

- [39] D. MARTIN. Mélina, bibliothèque de calculs éléments finis. http://anum-maths.univrennes1.fr/melina (2010).
- [40] A. MARTINEZ. Développements asymptotiques et effet tunnel dans l'approximation de Born-Oppenheimer. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 50(3) (1989) 239–257.
- [41] T. Ourmières. Guides d'ondes quantiques (thèse de doctorat). En cours. (2011-).
- [42] X.-B. PAN. Upper critical field for superconductors with edges and corners. Calc. Var. Partial Differential Equations 14(4) (2002) 447–482.
- [43] A. Persson. Bounds for the discrete part of the spectrum of a semi-bounded Schrödinger operator. Math. Scand. 8 (1960) 143–153.
- [44] N. POPOFF. Opérateur de Schrödinger avec champ magnétique en dimension 3. (thèse de doctorat). En cours. (2009-).
- [45] N. RAYMOND. Sharp asymptotics for the Neumann Laplacian with variable magnetic field: case of dimension 2. Ann. Henri Poincaré 10(1) (2009) 95–122.
- [46] N. RAYMOND. On the semiclassical 3D Neumann Laplacian with variable magnetic field. Asymptot. Anal. 68(1-2) (2010) 1–40.
- [47] N. RAYMOND. Semiclassical 3D Neumann Laplacian with variable magnetic field : a toy model. Preprint (2011).
- [48] N. RAYMOND. Semiclassical asymptotics for the twisted Neumann Laplacian with magnetic field. *Preprint* (2011).
- [49] M. REED, B. SIMON. Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York 1978.
- [50] D. SAINT-JAMES, G. SARMA, E. THOMAS. Type II Superconductivity. Pergamon, Oxford 1969.

Aspects de la théorie des chemins rugueux

Jérémie Unterberger

Le théorème de point fixe classique, bien connu, dû à Cauchy et Lipschitz assure l'existence et l'unicité des solutions $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ des équations différentielles de la forme

$$dy(t) = V(t, y(t))dt, y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$$

lorsque $V: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction lipschitzienne en y. Le développement concurrent des problèmes d'évolution, de l'analyse stochastique, de l'analyse non linéaire, de l'analyse numérique, de la théorie du contrôle, ainsi que des applications à la physique, a conduit à un élargissement considérable des problèmes envisagés ainsi que des hypothèses assurant l'existence d'une solution. La théorie des chemins rugueux ou rough paths, initiée par Terry Lyons à la fin des années 90, à l'intersection entre l'analyse classique des équations différentielles, la géométrie, l'analyse numérique et la théorie du contrôle, est la contribution la plus récente au sujet. Une approche inspirée par la théorie quantique des champs, notamment par la renormalisation, et reposant sur la combinatoire algébrique, due à l'auteur de ces lignes, complète cette approche initiale. Le but de cette notice est de replacer la théorie des chemins rugueux dans son contexte, de donner une vue d'ensemble actualisée du sujet, et d'expliquer l'apport des autres disciplines. La place impartie et les préférences personnelles ont conduit à privilégier une approche plus physique. Le lecteur souhaitant approfondir les aspects géométriques et probabilistes pourra se référer aux notes de cours de St-Flour de T. Lyons ou au livre de Peter Friz et Nicolas Victoir¹.

1. Introduction

Pénétrer dans la théorie des chemins rugueux demande un changement de perspective pour de nombreux lecteurs. L'extension la plus connue de la théorie de Cauchy-Lipschitz est celle due à Di Perna et Lions, dans laquelle les hypothèses de régularité Lipschitz en y sont affaiblies au profit d'un contrôle de la norme L^1_{loc} de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial y}$, ainsi que de la norme L^∞ de la divergence. L'équation de transport associée $\partial_t f(t,y) + V \cdot \nabla_y f(t,y) = 0$ admet alors une solution faible, permettant de résoudre l'équation différentielle ordinaire initiale pour *presque* toute condition initiale. Ce point de vue cinétique est utilisé par exemple pour l'étude des limites hydrodynamiques des équations cinétiques de type Boltzmann. Le passage de l'équation différentielle initiale à l'équation de transport s'effectue en supposant une condition initiale aléatoire, f(t,y) représentant la densité de probabilité à l'instant t. Lorsqu'on abandonne l'hypothèse de dérivabilité de V par rapport à y – typiquement pour des fonctions V höldériennes en y – il est bien connu que la solution n'est plus unique. Par exemple, $y'=2\sqrt{y},y(0)=0$ a pour solutions 0 et t^2 sur \mathbb{R}_+ , conduisant à un recollement C^1 arbitraire en t=0.

¹ T. Lyons, Z. Qian, *System control and rough paths* (Oxford University Press, 2002). P. Friz, N. Victoir, *Multidimensional dimensional processes seen as rough paths* (Cambridge University Press, 2010).

Le point de vue de la théorie des chemins rugueux n'est pas celui des équations de transport, mais plutôt (dans un même esprit mais avec une motivation et un langage différents) celui de la théorie du contrôle ou des processus de Markov. Le système est supposé dirigé (en anglais, « driven ») par d champs de vecteurs x_1, \ldots, x_d irréguliers, modélisant typiquement une force extérieure oscillant avec une grande fréquence ou une force aléatoire. On souhaite donner un sens aux équations du type

(1)
$$dy(t) = V_0(t, y(t))dt + \sum_{i=1}^d V_i(t, y(t))dx_i(t), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$$

lorsque x_i est continu mais non différentiable, les V_i étant vus comme des champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n . Pour éviter des pathologies, on demande que les chemins $t \mapsto x_i(t)$ soient localement² α -Hölder pour un certain exposant $\alpha \in]0,1[$, i.e.

$$||x||_{\alpha} := \sup_{0 \le t \le T} |x(t)| + \sup_{0 \le s, t \le T} \frac{|x_i(t) - x_i(s)|}{|t - s|^{\alpha}} < \infty.$$

Au contraire, les fonctions $(t,y)\mapsto V_i(t,y(t))$ devront être suffisamment différentiables, notamment par rapport à y (« lipschitziennes » d'ordre $\geq 1/\alpha$ en fait), afin de pouvoir appliquer la formule de Taylor – ce qu'on supposera par la suite. On peut assimiler dt à un contrôle $dx_0(t)$ régulier supplémentaire, et on supposera donc par la suite $V_0\equiv 0$ afin de simplifier les notations. De nombreuses extensions sont possibles, soit aux eds (équations différentielles stochastiques), soit aux équations aux dérivées partielles (problèmes d'évolution ou équations de Schrödinger), voire aux edps (équations aux dérivées partielles stochastiques). Comme dans le cas des équations de transport – mais pour des raisons tout à fait différentes –, les solutions éventuelles de ce type d'équations ne sont pas uniques dès que $\alpha \leq 1/2$ (dans le cas $\alpha > 1/2$, une extension de l'intégrale de Riemann a été obtenue par Young³ dès 1936). En effet, une résolution par itérations successives de l'éq. (1), à la façon de Cauchy,

$$y^{(0)}(t) = y_0, \quad y^{(n+1)}(t) = \int_0^t V(s, y^{(n)}(s)) ds + \sum_{i=1}^d V_i(s, y^{(n)}(s)) dx_i(s)$$

conduit au bout de $n \ge 2$ itérations à des *intégrales itérées*

$$x_{(i_1,...,i_n)}(s,t) := \int_s^t dx_{i_1}(t_1) \int_s^{t_1} dx_{i_2}(t_2) \dots \int_s^{t_{n-1}} dx_{i_n}(t_n)$$

s'interprétant à l'aide de la formule de Stokes comme des volumes délimités par la courbe $t\mapsto x(t)$. Par exemple, $x_{(1,2)}(s,t)$ est l'aire signée comprise entre la droite horizontale passant par x(s), la droite verticale passant par x(t) et la courbe. Or la définition de l'aire délimitée par une courbe de Jordan irrégulière est un problème bien connu en théorie de la mesure géométrique. La question peut s'énoncer ainsi dans le cadre höldérien qui nous intéresse ici : existe-t-il une suite de chemins $(x^n)_{n\geq 1}$ convergeant vers α au sens de la norme α -Hölder $|\cdot|$ | α telle que l'aire

² T étant un « horizon » de temps fini fixé.

³ L. C. Young. An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration, Acta. Math. **67**, 251–282 (1936).

engendrée $x_{(1,2)}^n(s,t)$ converge (en un sens à préciser)? La limite éventuelle, notée $x_{(1,2)}$ (qu'on peut appeler aire du chemin x associée à la suite d'approximations x^n) dépend-elle de l'approximation choisie?

La réponse est affirmative dans les deux cas; les différents couples possibles $(x, x_{(1,2)})$ s'appellent *chemins rugueux* (d'ordre 2). La convergence des aires est à comprendre au sens de la norme des chemins rugueux,

$$||x_{(1,2)}^n - x_{(1,2)}||_{2,2\alpha} := \sup_{0 \le s, t \le T} \frac{|x_{(1,2)}^n(s,t) - x_{(1,2)}(s,t)|}{|t - s|^{2\alpha}} \to_{n \to \infty} 0$$

A. Lejay⁴ a donné une construction générale montrant bien les difficultés, que nous illustrons sur un exemple élémentaire. Soit $x=(x_1,x_2)$ avec $x_1(t)=t,x_2(t)=0$, vu comme chemin α -Hölder $(\alpha<\frac{1}{2})$, et x^n le chemin obtenu en « intercalant » le long de x 2^n cercles tangents de rayon $2^{-(\alpha+\varepsilon)n}$, $\varepsilon>0$, parcourus à vitesse constante. Alors $||x-x^n||_{\alpha}\to 0$ mais l'aire $x^n_{(1,2)}$ diverge quand $n\to\infty$ dès que $\varepsilon<\alpha$, tendant vers $+\infty$, $-\infty$ ou toute valeur intermédiaire suivant la position des cercles par rapport à l'axe horizontal y=0 et leur sens de parcours. L'insertion de ces « bulles » microscopiques change la définition de l'aire limite.

Inversement, partant d'un chemin α -Hölder quelconque x et d'une suite d'approximations x^n ad hoc comme l'interpolation linéaire par morceaux, on peut s'attendre à ce que x^n ressemble naturellement aux chemins « à bulles » précédents et à ce que l'aire limite diverge par conséquent. L'*existence* d'un chemin rugueux est donc un problème non trivial (cf. section suivante).

Bien que la problématique soit déterministe, les motivations proviennent pour leur plus grande part du calcul stochastique. Lorsque x est un mouvement brownien à d composantes indépendantes, l'éq. (1) devient une équation de diffusion. Les trajectoires browniennes sont $(1/2-\varepsilon)$ -Hölder pour tout $\varepsilon > 0$, juste en-dessous de la régularité limite pour l'intégrale de Young. La théorie des chemins rugueux s'applique à ce cas particulier. Wong et Zakai ont montré que, si (x^n) est la suite des interpolations linéaires dyadiques régulières de x, alors $x_{(1,2)}^n$ tend vers l'intégrale de Stratonovich $\int_s^t (x_2(t_1) - x_2(s)) \circ dx_1(t_1)$. En fait, la théorie de Lyons redonne la solution des eds au sens de Stratonovich. En revanche, le calcul stochastique classique, qui s'appuie sur la nature markovienne des trajectoires et sur le calcul des martingales (et donc sur la propriété de variation quadratique bornée), ne s'applique pas à des processus de Markov plus irréguliers, ni au brownien fractionnaire B d'indice de Hurst $\alpha < \frac{1}{2}$. Ce dernier, introduit à l'origine par Kolmogorov et Mandelbrot, est défini comme le processus gaussien centré, nul en t=0 et d'incréments stationnaires de covariance $\mathbb{E}(B(t)-B(s))^2=|t-s|^{2lpha}$ (dont on considère d copies indépendantes). Lorsque $\alpha > 1/4$, L. Coutin et Z. Qian⁵ ont montré que l'interpolation linéaire par morceaux conduisait à un chemin rugueux bien défini, d'ordre 2 ou 3 suivant le cas. Ces résultats, couplés à une utilisation du calcul de Malliavin associé à ce processus gaussien et à des outils de théorie ergodique, ont permis d'obtenir des résultats significatifs (cf. paragraphe suivant).

⁴ A. Lejay. *An introduction to rough paths*, Séminaire de Probabilités XXXVII, Lecture Notes in Math. 1832, 1-59 (2003).

⁵ L. Coutin, Z. Qian. *Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions*, Probab. Theory Related Fields **122** (1), 108–140 (2002).

Inversement (nous y reviendrons) les résultats de Coutin et Qian ne s'étendent pas au cas $\alpha \le 1/4$: l'aire de Lévy « naturelle » diverge dans ce cas.

2. Trois approches des chemins rugueux

Trois approches complémentaires peuvent être distinguées.

2.1. Approche géométrique

L'approche classique, due à T. Lyons et poursuivie notamment par Friz, Victoir, Lejay... est *géométrique*. Elle conduit à une axiomatisation naturelle de la notion de chemins rugueux en termes de *sections de fibrés principaux* et repose sur l'utilisation explicite de suites d'*approximations*.

Le point de départ est la notion de *signature* d'un chemin régulier x, due à Chen. Définie formellement comme l'ensemble de ses intégrales itérées de tous ordres, elle caractérise le chemin en ce sens que la solution d'une équation différentielle dirigée par x du type (1) s'écrit comme une série formelle $\sum_{n\geq 0} \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_n\leq d} V_{i_1}\cdots V_{i_n} \mathrm{Id}(y_0) x_{(i_1,\ldots i_n)}(t_0,t), \text{ extension en quelque sorte des } \ll \text{ time-ordered expansions } \gg \text{ de la mécanique quantique. On peut plonger la signature dans l'algèbre tensorielle } T\mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^d \oplus (\mathbb{R}^d)^{\otimes 2} \oplus \ldots \text{ sur } \mathbb{R}^d = \{e_1,\ldots,e_d\},$

$$(2) \ X(s,t) := 1 + \sum_{1 \leq i_1 \leq d} x_{i_1}(s,t) e_{i_1} + \sum_{1 \leq i_1, i_2 \leq d} x_{(i_1,i_2)}(s,t) e_{i_1} \otimes e_{i_2} + \ldots \in T\mathbb{R}^d.$$

On vérifie facilement la propriété multiplicative ou de Chen, $X(0,t) = X(u,t) \otimes X(0,u)$. Projetée sur les composantes d'ordre 1, elle donne simplement la relation de Chasles pour les intégrales. Projetée sur les composantes d'ordre 2, elle mesure le défaut d'additivité des aires,

(3)
$$x_{(i_1,i_2)}(s,t) - x_{(i_1,i_2)}(s,u) - x_{(i_1,i_2)}(u,t) = (x_{i_1}(t) - x_{i_1}(u))(x_{i_2}(u) - x_{i_2}(s))$$

qu'on vérifie aisément sur un dessin. A cette propriété s'en ajoute une autre dite propriété géométrique ou de shuffle, une sorte d'identité de Chasles généralisée stipulant que l'intégrale sur un hyper-rectangle est égale à la somme des intégrales sur toute partition en simplexes du type $\{t>t_{j_1}>\ldots>t_{j_n}>s\}$, et s'ensuit du théorème de Fubini (cf. infra)⁶.

Ces propriétés permettent de géométriser la notion de chemin rugueux. Restreignons-nous provisoirement à un chemin rugueux $(x_1,x_2,(x_{(i_1,i_2)})_{i_1,i_2=1,2})$ d'ordre 2. Par la propriété de shuffle, $x_{(i_1,i_2)}(s,t)+x_{(i_2,i_1)}(s,t)=x_{i_1}(s,t)x_{i_2}(s,t)$; il reste donc une seule quantité indéterminée d'ordre deux, par exemple l'aire de Lévy $\mathcal{A}=x_{(1,2)}-x_{(2,1)}$. A son tour, la propriété de Chen (3) équivaut à

demander que
$$\mathbf{x}(s,t) = \mathbf{x}(u,t) \cdot \mathbf{x}(s,u)$$
 si $\mathbf{x} = \exp \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \mathcal{A} \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est l'image

de (x_1,x_2,\mathcal{A}) par le plongement habituel de \mathbb{R}^3 dans le groupe d'Heisenberg

⁶ Elle implique en particulier que l'intégrale restreinte à la diagonale d'un carré est nulle, ce qui exclut des termes du type d'Itô.

 $G^{(2)}$. Rappelons que ce groupe exponentie l'algèbre de Lie des matrices triangulaires supérieures strictes $\mathfrak{g}^{(2)} \simeq \operatorname{Vect}(X,Y,Z)$, où $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

 $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, vérifient les règles de commutation canoniques [X, Y] = Z, [X, Z] = [Y, Z] = 0 des opérateurs de position \hat{x} et d'impulsion $\hat{p} = i\frac{d}{dx}$ bien connues en mécanique quantique. Autrement dit, $\mathbf{x}(s,t)$ est l'incrément – au sens du produit non commutatif du groupe d'Heisenberg – du chemin $t \mapsto \mathbf{x}(0,t)$ à valeurs dans $G^{(2)}$. En d'autres termes, la signature (tronquée à l'ordre 2) d'un chemin régulier peut s'interpréter comme une section du fibré principal trivial sur $\mathbb R$ de fibre $G^{(2)}$; mieux, comme section horizontale, en ce sens que $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(0,t)$ appartient à la distribution invariante à gauche engendrée par e_1,e_2 au-dessus de l'identité, avec l'identification naturelle Lie $(G^{(2)})$ \simeq span $(e_1, e_2, [e_1, e_2] = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)$. On dira aussi que $\mathbf{x}(0,t)$ est le relèvement (horizontal) canonique de x. Plus généralement, on montre que la signature tronquée à l'ordre N peut s'interpréter comme section horizontale du fibré principal trivial sur $\mathbb R$ de fibre $G^{(N)}$, où $G^{(N)}$ est le groupe de Lie nilpotent libre d'ordre N (cas particulier de groupe de Carnot-Carathéodory) d'algèbre de Lie engendrée par e_1, \ldots, e_d . Le groupe $G^{(N)}$ est naturellement équipé d'une métrique sous-Riemannienne : seuls les chemins horizontaux sont de longueur finie, avec $d\mathbf{x}^2 = dx^2$. Autrement dit, la longueur d'un chemin $\mathbf{x}=(1,x(t),(x_{(i_1,i_2)}(t))_{i_1,i_2},\ldots)\in \mathcal{G}^{(N)}$ est par définition $\int |dx|(t)$, c'est-à-dire la longueur du chemin sous-jacent $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$. On montre facilement par des arguments de compacité que $G^{(N)}$ est un espace géodésique. La distance géodésique d_{CT} associée est appelée distance de Carnot-Carathéodory. Elle est localement équivalente à la distance associée à la norme $||\mathbf{x}(0,t)|| = \max_{n \leq N} \max_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq d} |x_{(i_1, \dots, i_n)}(0,t)|^{1/n}$, homogène sous les dilatations naturelles des groupes de Carnot-Carathéodory.

Ces considérations géométriques conduisent à : définir l'espace des chemins rugueux α -Hölder d'ordre N comme l'espace des chemins $\mathbf{x}: \mathbb{R} \to G^{(N)}$ α -Hölder pour d_{CT} – on parlera plus précisément de chemin rugueux au-dessus de x si x est la projection d'ordre 1 de **x** – ; montrer que, si $\alpha' < \alpha$, tout chemin rugueux α -Hölder **x** au-dessus de x est limite pour la norme α' -Hölder des relèvements canoniques d'une famille d'approximations régulières de x. La perte de régularité Hölder dans le théorème d'approximation précédent conduit à distinguer des chemins rugueux au sens fort ou faible, suivant qu'ils soient ou non limites au sens α -Hölder de relèvements canoniques. En pratique la distinction est peu importante. Il est en revanche important de savoir quel est le bon ordre de troncature N. On montre en fait que les intégrales itérées d'ordre $> N = |1/\alpha|$ sont fixées par celles d'ordre $\leq N$ par les contraintes de régularité pour un chemin rugueux α -Hölder. Inversement, une généralisation de l'argument des « bulles » montre facilement que les intégrales itérées d'un chemin α -Hölder sont indéterminés jusqu'à l'ordre N. Signalons enfin un théorème dû à Lyons et Victoir, hélas non constructif, montrant l'existence d'un chemin rugueux au-dessus d'un chemin α -Hölder quelconque.⁷

⁷ T. Lyons, N. Victoir. *An extension theorem to rough paths*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non SMF – Gazette – 131, janvier 2012

Les résultats fondamentaux de Lyons, Friz et Victoir concernant la résolution des équations différentielles s'ensuivent naturellement de ce théorème d'approximation. Si $(x^n)_{n\geq 1}$ est une suite régulière d'approximations de x (construite par exemple à partir de bouts de géodésiques sous-riemanniennes) dont les relèvements canoniques \mathbf{x}^n convergent vers un chemin rugueux \mathbf{x} , alors on montre que les solutions des équations différentielles $dy^n = \sum_i V_i(t,y^n(t)) dx_i^n(t)$ convergent au sens Hölder, la limite ne dépendant que de \mathbf{x} et non du choix exact de la suite approximante. Le recours simultané au calcul de Malliavin a permis de montrer dans le cadre des équations différentielles stochastiques (eds) dirigées par un brownien fractionnaire B d'indice $\alpha \in]1/4, 1/2[$: l'existence d'une densité régulière pour des eds hypoelliptiques, i.e. vérifiant le critère des crochets de Hörmander ; l'ergodicité de la mesure stationnaire associée (dans un sens à préciser pour ces processus non markoviens!).

2.2. Approche algébrique

La théorie algébrique des chemins rugueux est un pendant algébrique de cette théorie d'inspiration géométrique, introduite par M. Gubinelli en 2004. Si l'on oublie les structures géométriques, on montre facilement qu'un chemin rugueux α -Hölder est un ensemble de données $(x,x_{(i_1,i_2)},\ldots,x_{(i_1,\ldots,i_N)})$ vérifiant (i) la propriété de Chen; (ii) la propriété de shuffle; (iii) une propriété de régularité Hölder homogène, $||x_{(i_1,\ldots,i_n)}||_{2,n\alpha} < \infty$ pour tout $n \leq N$. Pour éviter le recours aux suites approximantes, Gubinelli définit un espace $\mathcal F$ de chemins contrôlés par x ainsi qu'une procédure d'intégration le long de x préservant $\mathcal F$, et montre un théorème du point fixe dans $\mathcal F$ pour les itérées successives de Cauchy associées à la résolution du problème (1).

Voyons brièvement ses arguments dans le cas $1/3 < \alpha < 1/2$ (chemins rugueux d'ordre 2). La fonction $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ est contrôlée par x si $y(t)-y(s) = \langle \Phi(s), x(t)-x(s)\rangle + R(s,t)$, où $\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ est α -Hölder et $||R||_{2,2\alpha} < \infty$. Pour $|t-s| \ll 1$, Φ représente un gradient discret de y; le schéma d'approximation de Simpson (d'ordre 2) des intégrales de Riemann conduit à tenter la définition suivante, $\int_s^t \langle y(u), dx(u) \rangle := \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} z(s+\frac{i}{n},s+\frac{i+1}{n})$, où $z(s,t) := \langle y(s),x(t)-x(s)\rangle + \langle \Phi(s),x^2(s,t)\rangle$, le terme de reste R n'apparaissant pas dans la formule. Pour montrer l'existence de la limite, Gubinelli introduit un complexe différentiel exact $0 \to C_1(\mathbb{R},\mathbb{R}^d) \overset{\delta_1}{\to} C_2(\mathbb{R},\mathbb{R}^d) \overset{\delta_2}{\to} C_3(\mathbb{R},\mathbb{R}^d) \overset{\delta_3}{\to} \cdots$ (seuls les 3 premiers termes servent en pratique), où $C_j(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ est un espace de fonctions continues en j variables et $(\delta_j f)(t_1,\ldots,t_{j+1}) = \sum_{i=1}^{j+1} (-1)^{i+1} f(t_1,\ldots,\check{t}_i,\ldots,t_{j+1})$. En particulier, $\delta_2 f \equiv 0$ si et seulement si f(s,t) vérifie la relation de Chasles. Une fonction f est dans C_2^{1+} si $||f||_{2,1+\varepsilon} < \infty$ pour $\varepsilon > 0$; une définition analogue peut être introduite pour des fonctions de 3 variables. Le lemme de la couturière (ou sewing lemma) montre qu'il existe une et une seule fonction $g \in C_2^{1+}$ (notée $\Lambda(h)$) telle que $\delta_2 g = h$ si $h \in C_3^{1+}$ et $\delta_3 h = 0$. Il s'applique ici à $g := \delta_2 z$. Son intérêt est le suivant : par construction, $(ld - \Lambda \circ \delta_2)(z)$ vérifie l'identité de Chasles, et

Linéaire 24 (5), 835–847 (2007). La preuve repose sur un choix arbitraire (non constructif) de relèvement pour des sections du fibré quotient de fibre \mathbb{R}^d correspondant à la projection sur les premières composantes.

 $\textstyle \sum_{i=0}^{n-1} (\Lambda \circ \delta_2)(z) (s+\frac{i}{n},s+\frac{i+1}{n}) = O(n^{-\varepsilon}) \to 0. \text{ La définition par sommes de Riemann équivaut donc à la définition laconique } \int_s^t \langle y(u),dx(u)\rangle := (\operatorname{Id} - \Lambda \circ \delta_2)(z),$ dont on vérifie immédiatement l'existence et les propriétés de régularité.

2.3. Approche physico-algébrique

Malgré les succès à porter au compte de la théorie générale des chemins rugueux que nous venons de brosser à grands traits, nombre de questions difficiles restaient pendantes vers 2007, en particulier après les résultats négatifs de Coutin-Qian et Unterberger concernant l'aire de Lévy « naturelle » du brownien fractionnaire B d'indice $\alpha \leq 1/4$, auxquelles les théorèmes d'existence et d'approximation de Lyons, Friz et Victoir ne permettaient pas de répondre : (1) existe-t-il un moyen explicite, constructif de définir un chemin rugueux au-dessus de B? Plus généralement, sait-on produire des chemins rugueux explicites au-dessus de tout chemin höldérien? (2) Si oui, de tels chemins rugueux s'obtiennent-ils à partir de suites approximantes explicites? (3) Tel ou tel chemin rugueux apparaît-il comme plus « naturel » qu'un autre, en un sens géométrique ou probabiliste? Questions à laquelle s'ajoute celleci, plus théorique : (4) sait-on classifier tous les chemins rugueux au-dessus d'un chemin quelconque?

Le point de vue développé par l'auteur de ces lignes dans une série d'articles, certains écrits en collaboration avec L. Foissy et J. Magnen (cités en dernière page), est que (i) la géométrie sous-Riemannienne utilisée dans l'approche des chemins rugueux est trop dégénérée et trop singulière pour donner des réponses satisfaisantes à ces questions. Des données non géométriques sont nécessaires pour lever cette dégénérescence et sélectionner des chemins rugueux particuliers; (ii) sans l'aide de la géométrie, les axiomes algébriques des chemins rugueux (en particulier, la propriété de shuffle) sont difficiles à vérifier, et appellent donc une nouvelle formulation algébrique. Le point (i) est de nature analytique et revient à la question suivante : comment éviter les singularités qui semblent apparaître naturellement lorsqu'on cherche à définir l'aire d'un chemin trop irrégulier? Le point (ii) est de nature purement algébrique : il concerne la classe générale des *chemins rugueux formels* vérifiant simplement les propriétés algébriques de Chen et de shuffle.

À l'aide d'une nouvelle méthode combinatoire que nous avons appelée *mise* en ordre normal de Fourier (ou Fourier normal ordering), et en nous appuyant fortement sur la philosophie et les outils de la théorie quantique des champs, ainsi que sur des méthodes d'algèbres de Hopf combinatoires, nous avons résolu les questions (1) et (4) et apporté des premiers éléments de réponse à la question (3), la question (2) restant encore en suspens. Les applications, notamment à l'étude des eds dirigées par *B*, relèvent du « work in progress »; nous n'en parlerons pas. Le reste de la notice est consacré à ces développements récents.

3. Une introduction à l'approche physico-algébrique L'aire de Lévy ordonnée en Fourier

Quiconque s'est confronté au problème de définition de l'aire de Lévy (par exemple pour le brownien fractionnaire d'indice $\alpha \leq 1/4$) sait que le problème est trivial dans la catégorie formelle – autrement dit, si l'on cherche simplement à satisfaire les contraintes algébriques définissant une aire, en laissant de côté

les questions de régularité Hölder. L'argument, élémentaire, se trouve dans l'article fondateur de Gubinelli. Si $x=(x_1,x_2)$ est un chemin α -Hölder, et $x_{(i_1,i_2)}$ un relèvement formel de x satisfaisant les propriétés de Chen et shuffle, alors $\tilde{x}_{(i_1,i_2)}(s,t):=x_{(i_1,i_2)}(s,t)+\varepsilon_{i_1,i_2}(f(t)-f(s))$, où ε est le tenseur antisymétrique $\varepsilon_{1,2}=-\varepsilon_{2,1}=1,\ \varepsilon_{i,i}=0$, satisfait également ces deux mêmes propriétés pour toute fonction f; la propriété de Chen notamment reste vraie car, dans le langage de Gubinelli, $\delta_2(f(t)-f(s))=\delta_2\circ\delta_1(f)=0$. Remplaçons maintenant l'intégrale mal définie

(4)

$$x_{(1,2)}(s,t) = \int_{s}^{t} dx_{1}(t_{1}) \int_{s}^{t_{1}} dx_{2}(t_{2}) = -(x_{1}(t) - x_{1}(s))x_{2}(s) + \int_{s}^{t} dx_{1}(t_{1})x_{2}(t_{1})$$

– somme d'un terme de bord et d'un incrément vérifiant la relation de Chasles – par $\tilde{x}_{(1,2)}(s,t):=x_{(1,2)}(s,t)-(f(t)-f(s))$, où $f(t)-f(s)=\int_s^t dx_1(t_1)x_2(t_1)$. Alors $\tilde{x}_{(1,2)}=-(x_1(t)-x_1(s))x_2(s)$, un terme de bord bien défini et donc candidat pour être une aire de Lévy. Malheureusement, $\tilde{x}_{(1,2)}$ est seulement α -Hölder, et non pas 2α -Hölder.

La chose intéressante est que ce procédé naı̈f marche lorsqu'on le couple à une mise en ordre normal de Fourier. Pour faire court, la substitution $x_{1,2} \leadsto \tilde{x}_{(1,2)}$ ne fonctionne bien que lorsqu'on l'applique à l'intégrale itérée d'une quantité du type $\sum_{|j_1| \le |j_2|} a_{1,j_1} a_{2,j_2} e^{ij_1t_1} e^{ij_2t_2}$ (pour un chemin 2π -périodique de composantes $x_i(t) = \sum_j a_{i,j} e^{ijt}$), ou plus généralement $\int_{|\xi_1| < |\xi_2|} d\xi_1 d\xi_2 a_1(\xi_1) a_2(\xi_2) e^{i(\xi_1 t_1 + \xi_2 t_2)}$. De telles quantités sont dites ordonnées en Fourier. Décomposant ces quantités suivant (4) et « jetant » l'incrément, il ne reste qu'un terme de bord, cette fois-ci 2α -Hölder. La preuve, assez élémentaire, de cette estimation Hölder est inspirée à l'origine des travaux de J.-P. Kahane⁸. Pour des chemins α -Hölder quelconques, il faut recourir (utilisant des normes Besov équivalentes aux normes höldériennes) à des partitions de l'unité dyadiques en Fourier ou décompositions multi-échelles, $x_i(t) = \sum_{j_i \in \mathbb{Z}} x_i^{j_i}(t)$, telles que $|\sup \mathcal{F}(x^j)| \subset [2^{j-1}, 2^{j+2}]$ par exemple ; on doit alors démontrer la convergence de séries doubles $\sum \sum_{j_2 \geq j_1} (\cdots)$.

Les séries ou intégrales complémentaires, $\sum_{j_1>j_2}$ ou $\int_{|\xi_1|>|\xi_2|}$, peuvent être réordonnées en Fourier si l'on applique tout d'abord le théorème de Fubini pour intervertir les deux intégrations. En sommant les deux termes, on a ainsi obtenu une intégrale double 2α -Hölder qui satisfait la propriété de Chen comme on vient de le voir. La propriété de shuffle est élémentaire à vérifier.

4. Intégrales arborescentes, intégrales squelettes. Algèbres de Hopf combinatoires

La mise en ordre normal de Fourier des intégrales itérées d'ordre supérieur fait apparaître de nouvelles structures : les *intégrales arborescentes*, comme on le voit sur l'exemple élémentaire suivant. Soit $I:=x_{(i_1,i_2,i_3)}(s,t)$: le théorème de Fubini donne (en permutant aussi bien les intégrales que les noms des variables d'intégration)

$$I = \left(\int_{s}^{t} dx_{i_{2}}(t_{1}) \int_{s}^{t_{1}} dx_{i_{3}}(t_{2}) \right) \cdot \int_{s}^{t} dx_{i_{1}}(t_{3}) - \int_{s}^{t} dx_{i_{2}}(t_{1}) \cdot \left(\int_{s}^{t_{1}} dx_{i_{3}}(t_{2}) \int_{s}^{t_{1}} dx_{i_{1}}(t_{3}) \right).$$

 $^{^{8}}$ J.-P. Kahane, *Some random series of functions*, Cambridge studies in advanced mathematics **5** (1985).

Par cette décomposition, le « time ordering » des intégrales est préservée, mais le deuxième terme est une intégrale sur un domaine plus compliqué qu'un simplex, qu'on peut représenter par un arbre ou une forêt (arbre non connexe). La correspondance entre arbres $\mathbb T$ et intégrales arborescentes $I_x^{ts}(\mathbb T)$ est définie par la règle suivante : chaque sommet d'un arbre porte une variable d'intégration variant entre s et t; les variables sont en ordre décroissant lorsqu'on monte le long d'une branche. On a donc montré : $I=I_x^{ts}(\mathbf 1_{i_2}^{t_3})=I_x^{ts}(\mathbf 1_{i_2}^{t_3}\cdot_{i_1})-I_x^{ts}(\mathbf 1_{i_2}^{t_3}\cdot_{i_1})$. La multiplicativité $I_x^{ts}(\mathbb T_1\mathbb T_2)=I_x^{ts}(\mathbb T_1)I_x^{ts}(\mathbb T_2)$ suggère de prolonger cette correspondance en un morphisme d'algèbres ; finalement donc, avec un changement de notation évident, $I_x^{ts}((i_1i_2i_3))=I_x^{ts}(\mathbb T^\sigma), \text{ où }\mathbb T^\sigma=\mathbf 1_{i_2}^{t_2}\cdot_{i_1}-\overset{i_3}{}^{i_2}\cdot_{i_2}^{i_1}$ est le graphe de permutation associé à la permutation $\sigma:(1,2,3)\to(2,3,1)$. La mise en ordre normal de Fourier nécessite de manière générale de décomposer $I_x^{ts}(\mathbb T),$ où $\mathbb T=(\ell_1\dots\ell_n)$ est un arbre tronc à n sommets, en la somme de n! sommes ou intégrales de Fourier restreintes à des domaines $j_{\sigma(1)}\leq\ldots\leq j_{\sigma(n)}$ ou $|\xi_{\sigma(1)}|\leq\ldots|\xi_{\sigma(n)}|$. Si l'on note μ^σ la mesure signée obtenue par projection de Fourier, $\mu^\sigma(dt_1,\ldots,dt_n)=\sum_{j_{\sigma(1)}\leq\ldots\leq j_{\sigma(n)}}\otimes_{i=1}^{n}dx_{\ell_i}^{i_i}(t_i)$ ou $\mathcal F^{-1}\left(\mathbf 1_{|\xi_{\sigma(1)}|\leq\ldots\leq |\xi_{\sigma(n)}|}\mathcal F\mu(\xi_1,\ldots,\xi_n)\right), \quad \mu=\sum_{i=1}^n dx_{\ell_i}(t_i),$ alors $I_x^{ts}(\mathbb T)=\sum_{\sigma\in\Sigma_n}I_\mu^{ts}(\mathbb T^\sigma).$

La propriété de Chen se réécrit commodément en termes du $\operatorname{coproduit} \Delta$ sur les arbres, définissant l'algèbre de Hopf des arbres enracinés décorés \mathbf{H}^d , introduite par Connes et Kreimer⁹ dans une série d'articles des années 1999-2000 consacrés à la compréhension algébrique de la formule des forêts de Zimmermann définissant un algorithme de renormalisation pour les intégrales de Feynman en théorie quantique des champs. Rappelons que la convolution de deux caractères $\chi_1, \chi_2: \mathbf{H}^d \to \mathbb{R}$ de \mathbf{H}^d est le caractère $\chi = \chi_1 * \chi_2: \mathbb{T} \to \sum_{(\mathbb{T}', \mathbb{T}'')} \chi_1(\mathbb{T}') \chi_2(\mathbb{T}'')$ où $\Delta(\mathbb{T}) = \sum_{(\mathbb{T}', \mathbb{T}'')} \mathbb{T}' \otimes \mathbb{T}'' \in \mathbf{H}^d \otimes \mathbf{H}^d$ (notation de Sweedler), le coproduit se construisant à partir de $\operatorname{coupures} \operatorname{admissibles^{10}}$. La propriété de Chen classique s'étend en la $\operatorname{propriété} \operatorname{de} \operatorname{Chen} \operatorname{arborescente}: I_x^{\operatorname{ts}}(\mathbb{T}) = I_x^{\operatorname{tu}} * I_x^{\operatorname{us}}(\mathbb{T}).$

D'un autre côté, la propriété de shuffle pour les intégrales itérées ordinaires équivaut au fait que I_x^{ts} définisse un caractère de l'algèbre de shuffle \mathbf{Sh}^d . Celle-ci est définie comme l'ensemble des mots $(i_1\cdots i_n),\ i_1,\ldots,i_n\in\{1,\ldots,d\}$ (identifiés de manière évidente à des arbres troncs, la racine portant la décoration i_1) muni du produit $(i_1\ldots i_{n_1})\pitchfork(j_1\ldots j_{n_2})=\sum_{\mathbf{k}\in Sh(\mathbf{i},\mathbf{j})}(k_1\ldots k_{n_1+n_2}),\ Sh(\mathbf{i},\mathbf{j})$ désignant l'ensemble des shuffles (« battages ») des listes \mathbf{i} et \mathbf{j}^{11} . Cette algèbre peut être munie du même coproduit Δ que \mathbf{H}^d en voyant les arbres troncs comme des arbres particuliers. (En revanche on remarque que les produits des deux algèbres sont très différents; \mathbf{Sh}^d doit en fait être vu comme un quotient de \mathbf{H}^d).

⁹ A. Connes, D. Kreimer. Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry, Comm. Math. Phys. **199**, 203–242 (1998). Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. (I) The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem, Comm. Math. Phys. **210**, 249–273 (2000). (II) The β -function, diffeomorphisms and the renormalization group, Comm. Math. Phys. **216**, 215–241 (2001).

 $^{^{10}}$ Une coupure admissible consiste en une suite de « coups de scie » tronçonnant l'arbre en une partie radicielle connexe \mathbb{T}' et un ensemble \mathbb{T}'' d'arbres comprenant chacun au moins une feuille. 11 c'est-à-dire l'ensemble des façons de mélanger les listes \mathbf{i} et \mathbf{j} en préservant l'ordre des deux listes

Les définitions précédentes montrent immédiatement que $\mathcal{R}I_x^{ts}$, défini comme la convolution $\mathcal{R}I_x^{tt_0}*(\mathcal{R}I_x^{st_0})^{-1}$ vérifie (Chen) et (shuffle) si $\mathcal{R}I_x^{tt_0}$ (intégrale itérée régularisée) vérifie (shuffle). En pratique, afin d'obtenir finalement des estimations höldériennes, on est conduit à régulariser les intégrales squelettes $\mathsf{Sk}\,\mathsf{I}_x^t$ obtenues par une limite formelle $t_0\to\infty$ (qu'on peut justifier au sens des distributions), donnée par des formules explicites qu'on n'écrira pas ici, et ne dépendant pas d'un temps de référence t_0 ; pour la classification formelle on peut remplacer les intégrales squelettes par des intégrales itérées ordinaires. Finalement, un chemin rugueux formel au-dessus de x est exactement défini par des caractères de l'algèbre de shuffle $\mathcal{R}\mathsf{Sk}\,\mathsf{I}_x^t$ tels que $\mathcal{R}\mathsf{Sk}\,\mathsf{I}_x^t({}_{\bullet\,i})$ soit égal à $\mathsf{Sk}\,\mathsf{I}_x^t({}_{\bullet\,i}) = \int \mathcal{F}(x_i)(\xi)e^{it\xi}d\xi$. Mais comment construire de tels caractères?

5. Théorème général de classification des chemins rugueux formels

Le premier théorème est le suivant, montré tout d'abord dans le cas général, puis réécrit pour le cas spécifique du brownien fractionnaire. Si $\mathbb T$ est un arbre à n sommets, on note $\mathcal P^{\mathbb T}Mes(\mathbb R^n)$ l'espace vectoriel des mesures signées du type $\mathcal P^{\mathbb T}\mu$ (cf. supra), où $\mathcal P^{\mathbb T}$ est la somme sur les échelles j_1,\ldots,j_n ou sur les variables de Fourier ξ_1,\ldots,ξ_n qui croissent en montant les branches. Lorsqu'on passe de x (chemin) à μ (mesure), on est conduit à supprimer les décorations mais à étiqueter les sommets par $1,\ldots,n$ de sorte que les étiquettes croissent en montant les branches; l'algèbre de Hopf associée n'est plus l'algèbre des arbres décorés, mais celle des arbres ordonnés en tas (ni commutative ni commutative). Ainsi $I_x^t(\ell_1\cdots\ell_n)$ devient $I_{\mu(x,\ell)}^t(\mathbb T_n)$, où $(\ell_1\cdots\ell_n)\in\mathbf{Sh}^d$ est un arbre tronc décoré, $\mathbb T_n$ est l'unique arbre tronc ordonné en tas à n sommets, et $\mu_{(x,\ell)}=\otimes_{i=1}^n dx_{\ell_i}(t_i)$. La relative complexité des notations est rendue nécessaire par le changement d'algèbre sous-jacente.

Théorème. (1) (formule du produit) Soit $\varphi_{\mathbb{T}}^t:\mathcal{P}^{\mathbb{T}}Mes(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R},\ \mu\mapsto\varphi_{\mathbb{T}}^t(\mu)=\varphi_{\mu}^t(\mathbb{T})$ une famille de formes linéaires telle que $\varphi_{dx_i}^t(\bullet)-\varphi_{dx_i}^s(\bullet)=x_i(t)-x_i(s),$ vérifiant la propriété multiplicative $\varphi_{\mu_1}^t(\mathbb{T}_1)\varphi_{\mu_2}^t(\mathbb{T}_2)=\varphi_{\mu_1\otimes\mu_2}^t(\mathbb{T}_1\wedge\mathbb{T}_2)^{12},$ et invariante par réindexation croissante concomitante des étiquettes et des composantes de \mathbb{R}^n . Alors $\chi_x^t(\ell_1\cdots\ell_n):=\sum_{\sigma\in\Sigma_n}\varphi_{\mu_{(x,\ell)}^\sigma}^t(\mathbb{T}^\sigma)$ est un caractère de l'algèbre de shuffle. Par conséquent, la convolution de l'algèbre de shuffle $J_x^{ts}(\ell_1\cdots\ell_n):=\chi_x^t*(\chi_x^s\circ S)(\ell_1\cdots\ell_n)=\chi_x^t*(\chi_x^s)^{-1}(\ell_1\cdots\ell_n), S$ étant l'antipode, définit un chemin rugueux formel au-dessus de x.

(2) (formule du coproduit) $J_x^{ts}(\ell_1\cdots\ell_n)=\sum_{\sigma\in\Sigma_n}(\varphi^t*(\varphi^s\circ S))_{\mu_{(x,\ell)}^\sigma}(\mathbb{T}^\sigma)$, où * est une convolution sur l'algèbre des arbres ordonnés en tas, donnée par la formule

$$(\varphi^{t} * (\varphi^{s} \circ \bar{S}))_{\nu} (\mathbb{T}) = (2\pi)^{-n/2} \int \mathcal{F}\nu(\xi_{1}, \dots, \xi_{n}) d\xi_{1} \dots d\xi_{n} \cdot \sum_{(\mathbb{T}', \mathbb{T}'')} \varphi^{t}_{\otimes_{v \in V(\mathbb{T}'')} e^{it_{v} \xi_{v}} dt_{v}} (\mathbb{T}') \varphi^{s}_{\otimes_{v \in V(\mathbb{T}'')} e^{it_{v} \xi_{v}} dt_{v}} (\bar{S}(\mathbb{T}))$$

 $^{^{12}}$ $\mathbb{T}_1 \wedge \mathbb{T}_2$ étant le produit non commutatif dans l'algèbre des arbres ordonnés en tas, obtenu en décalant les étiquettes de \mathbb{T}_2 de n_1 , nombre de sommets de \mathbb{T}_1 .

pour $\nu \in Meas(\mathbb{R}^n)$, $\nu = (2\pi)^{-n/2} \int d\boldsymbol{\xi} \mathcal{F} \nu(\boldsymbol{\xi}) \otimes_{j=1}^n e^{\mathrm{i} t_j \xi_j} dt_j$, \bar{S} désignant l'antipode de \mathbf{H}^d , et $V(\cdot)$ l'ensemble des sommets d'un arbre.

Le théorème précédent donne en fait une classification générale des chemins rugueux formels, en ce sens que toute application $x\mapsto \chi_x^t$, à valeurs dans les caractères de \mathbf{Sh}^d , et dont l'extension aux mesures est linéaire, s'obtient par ce procédé. Alors qu'il est a priori difficile de construire des caractères de l'algèbre de shuffle, le théorème montre que ces caractères s'obtiennent simplement à partir de formes linéaires quelconques sur les *arbres*, étendues trivialement aux forêts par multiplicativité.

Comme observé par L. Foissy, la démonstration découle du fait que $\sigma \in \mathbb{T}^\sigma$ s'étend par linéarité en un isomorphisme Θ de l'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques vers l'algèbre des arbres décorés en tas; plus précisément, la formule du produit, resp. du coproduit provient du fait que Θ respecte les produits, resp. coproduits des algèbres. La démonstration originelle utilise à la place des arguments de densité, partant de la constatation que le théorème est évidemment valable pour $\varphi^t = \operatorname{SkI}^t$ (intégrales squelettes ordinaires) lorsque x est régulier.

6. Schémas de régularisation, schéma de renormalisation

Pour sortir de la catégorie formelle et construire des chemins rugueux satisfaisant les axiomes de régularité Hölder, il faut donc définir des *procédures d'intégration* φ^t ayant de bonnes propriétés analytiques. On peut conjecturer au vu des résultats obtenus ci-dessous que toute procédure définie par un noyau de convolution vérifiant quelques bornes générales très simples en Fourier conviendrait, ce qui fournirait une sous-classe naturelle de chemins rugueux possédant des propriétés remarquables, notamment pour l'étude des équations différentielles stochastiques. Dans l'état actuel des choses, deux classes de chemins rugueux ont été définies. Dans les deux cas, les procédures d'intégration φ^t sont obtenues par *régularisation des intégrales squelettes* $\operatorname{Sk} \operatorname{I}^t(\mathbb{T})$, \mathbb{T} parcourant l'ensemble des arbres à n sommets, $2 \le n \le N$. Cellesci, réécrites dans des variables Fourier (ξ_1,\ldots,ξ_n) , contiennent un dénominateur $Q_{\mathbb{T}}(\xi) = \prod_{i \in V(\mathbb{T})} (\xi_i + \sum_{j \to i} \xi_j)$, où la somme porte sur les sommets j de l'arbre \mathbb{T} au-dessus du sommet i. Les divergences (cf. infra) proviennent des zones où ce dénominateur est petit.

6.1. Régularisation de domaine de Fourier

Soit $C_{reg}>0$ une constante arbitraire. On définit $\varphi^t_{dx^{j_1}_{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_n}_{i_n}}(\mathbb{T}),\ n\geq 2$ comme les intégrales squelettes canoniques si, pour tout sommet $i,\ |Q_{\mathbb{T}}(\xi)|>C_{reg}\sup_{j\to i}|\xi_j|$ sur le support en Fourier des x_{i_k} , i.e. si $|\xi_k|\in[2^{j_k-1},2^{j_k+2}]$. Sinon on pose $\varphi^t_{dx^{j_1}_{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_n}_{i_n}}(\mathbb{T})=0$.

Lorsque $\hat{C}_{reg} > N$, l'inégalité ci-dessus n'est jamais réalisée. Cette construction élémentaire (appelé « zero tree data »), qui correspond à choisir tout simplement $\varphi^t \equiv 0$, conduit à de nombreuses simplifications puisque le chemin rugueux correspondant est construit sans faire appel aux intégrales itérées canoniques. De fait, Nualart et Tindel, dans A construction of the rough path above fractional Brownian

motion using Volterra's representation (Ann. Prob. **39** (3), 1061–1096 (2011)), ont défini (en s'appuyant sur les travaux d'Unterberger) un chemin rugueux au-dessus du brownien fractionnaire sans utiliser le formalisme des intégrales arborescentes et tout le langage combinatoire qui l'accompagne. Il s'est avéré après coup que leur construction (à l'utilisation près d'opérateurs de Volterra au lieu de la transformation de Fourier) équivalait au cas « zero tree data ». On obtient des formules explicites assez simples, pour le brownien fractionnaire comme pour un chemin höldérien général.

6.2. Renormalisation des intégrales itérées du brownien fractionnaire

La construction précédente peut sembler *ad hoc*. En fait, le problème de régularisation d'intégrales de Fourier divergentes n'est pas nouveau; il constitue le noyau dur des difficultés rencontrées dans l'étude de l'électrodynamique quantique (puis plus généralement des particules élémentaires) depuis le milieu du XXe siècle, et résolues – dans le formalisme de la théorie des champs et notamment des *intégrales de Feynman* – par la *renormalisation*. Une présentation générale de cette problématique, en lien avec les questions qui nous occupent ici (à l'étude) demanderait trop de place, et nous supposerons dorénavant que le lecteur connaît le sujet.

Le lien entre les deux problématiques saute aux yeux dans le cas du brownien fractionnaire, qui s'écrit comme dérivée fractionnaire du brownien (la méthode s'étend sans aucun doute à des chemins höldériens quelconques au prix du choix d'une représentation similaire). La représentation harmonisable, $B_t = c_\alpha \int_0^t ds \int dW(\xi) \frac{e^{is\xi}}{|\xi|^{\alpha-1/2}} - W \text{ étant un brownien } complexe - \text{ permet de représenter les intégrales itérées de } B \text{ comme des } demi-diagrammes de Feynman, possédant des pattes externes doubles non contractées } \frac{dW(\xi)}{|\xi|^{\alpha-1/2}}, \text{ ainsi que des pattes internes simples } \frac{1}{\zeta} \text{ et des pattes internes doubles contractées.}$

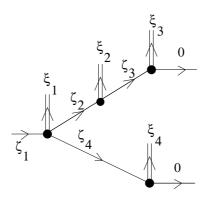


Fig. 1

Demi-diagramme de Feynman $G^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T})$ associé à $\mathbb{T}={}^3 \stackrel{1}{\mathbb{V}}_1$

Les pattes simples correspondent (en Fourier) aux intégrations itérées, alors que les pattes doubles contractées proviennent des contractions de Wick. Les

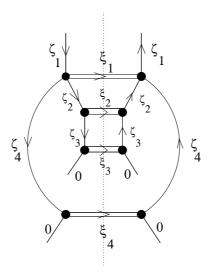


FIG. 2. Diagramme de Feynman $G(\mathbb{T}) = (G^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}))^2$ correspondant.

variances des intégrales itérées, elles, se représentent comme de véritables diagrammes de Feynman dans lesquels toutes les pattes doubles ont été contractées (cf. figure); elles s'obtiennent en plaçant les pattes doubles non contractées des demi-diagrammes contre un miroir. Un calcul élémentaire (comptage de puissance) montre que le degré de divergence d'un diagramme G avec |V(G)| vertex est $\omega(G) = 1 - \alpha |V(G)| - (1 - \alpha) N_{\varphi}(G)$, où N_{φ} est le nombre de pattes doubles externes. Pour un diagramme G provenant d'un arbre d'intégration \mathbb{T} , |V(G)|= $2|V(\mathbb{T})|$. Un tel diagramme est connexe sauf dans le cas exceptionnel où toutes les pattes doubles du demi-diagramme correspondant ont été contractées. Tenant compte de tous les cas possibles, on voit donc qu'il est naturel de renormaliser les demi-diagrammes correspondant aux intégrales itérées d'ordre $2 \le n \le N$. Une différence avec la procédure habituelle de renormalisation en théorie des champs est qu'on renormalise ici directement les variables aléatoires $\mathsf{SkI}_B(\mathbb{T})$ au lieu de renormaliser des diagrammes en ajoutant des contre-termes dans une intégrale d'action, en d'autres termes, en changeant la mesure. La procédure est plus simple et conduit à des intégrales itérées renormalisées qui sont toujours dans des chaos finis, i.e. obtenus en intégrant $dB_{i_1}(t_1) \otimes \ldots \otimes dB_{i_n}(t_n)$ contre un noyau bien choisi. En revanche, elle est plus ou moins arbitraire, en ce sens précisément qu'elle ne s'obtient pas par une redéfinition de la mesure.

Les méthodes multi-échelles (arbre de Gallavotti-Nicolò, sous-diagrammes dangereux...) développées par l'école constructive¹³, permettent de montrer simultanément la convergence des intégrales squelettes renormalisées et les bornes höldériennes adéquates. Prouver que les chemins rugueux reconstruits à partir de ces quantités ordonnées en Fourier (cf. Théorème précédent) sont eux aussi

¹³ On pourra lire par exemple à ce sujet le chapitre introductif de la thèse de doctorat de F. Vignes-Tourneret, Renormalisation des théories de champs non commutatives (arXiv:math-ph/0612014).

dans les bons espaces Hölder demande un travail combinatoire supplémentaire spécifique à cette théorie.

7. De la théorie constructive des champs aux chemins rugueux

Nous en venons pour finir à une construction d'un genre différent – qu'on peut voir comme aboutissement de tout ce qui précède -, valable pour le brownien fractionnaire uniquement (ou en tout cas pour des processus gaussiens de même régularité locale). La question centrale posée initialement était de définir un chemin rugueux « naturel » au-dessus de B. Tous les chemins rugueux obtenus précédemment peuvent être vus comme résultats d'une construction artificielle, ou en tout cas comme inachevée, puisque seul un théorème d'approximation général, non constructif, assure qu'ils sont des limites d'intégrales itérées au sens usuel. Nous montrons ici en revanche l'existence d'une théorie des champs en interaction, de mesure $\frac{1}{7}e^{-\lambda^2\int \mathcal{L}(\varphi)(x)dx}d\mu(\varphi)$, telle que $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$, de même loi que le brownien fractionnaire, admette une aire de Lévy. Cela peut sembler contradictoire à première vue : B est un processus gaussien, et modifier sa mesure par un poids non gaussien conduit a priori à un processus différent. Mais cet argument est faux : si l'on se réfère aux « bulles » d'A. Lejay, on comprend qu'une certaine limite en loi de processus en interaction – dans lesquels les caractéristiques microscopiques sont soigneusement modifiées - puisse être « libre » (i.e. gaussienne), tout en possédant une aire de Lévy différente de celle (divergente!) à laquelle on aurait pu s'attendre. C'est exactement l'esprit du théorème suivant, dans lequel on note de manière générale $x^{\to \rho}$ pour la somme sur les échelles de Fourier $\leq \rho$, $x^{\to \rho} := \sum_{i \leq \rho} x^{i}$. Le processus $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ est défini comme le processus stationnaire (divergent infra-rouge), de loi $d\mu(\varphi)$, dont les accroissements ont même loi que ceux du brownien fractionnaire (de sorte que φ s'interprète comme les intégrales squelette d'ordre 1 de B).

Théorème (Magnen, Unterberger). Soit $\alpha \in]1/6,1/4[$. Considérons pour $\lambda > 0$ suffisamment petit la famille de mesures de probabilités

$$\mathbb{P}_{\lambda,V,\rho}(\varphi_1,\varphi_2) = e^{-\frac{1}{2}\int\int_{V\times V} dt_1 dt_2 |t_1-t_2|^{-4\alpha}\mathcal{L}_{int}(\varphi_1^{\to\rho},\varphi_2^{\to\rho})(t_1,t_2) - \int\mathcal{L}_{bdry}^{\to\rho} d\mu^{\to\rho}(\varphi)},$$

où $\mathcal{L}_{int}(\varphi)(t_1,t_2)=\lambda^2\sum_{\pm}\partial\mathcal{A}^{\pm}(t_1)\partial\mathcal{A}^{\pm}(t_2)$ est un terme d'interaction quadratique en les deux intégrales squelettes \mathcal{A}^{\pm} ordonnées en Fourier non triviales associées aux aires

 $\int_{t_1 \gtrless t_2} d\varphi_1(t_1) d\varphi_2(t_2), \text{ et } \mathcal{L}_{bdry}^{\to \rho} \text{ est un } \text{ * terme \'evanescent * *, multipli\'e par un facteur exponentiellement petit quand } \rho \to \infty, \text{ servant \`a * lisser * le cut-off ultra-violet. Alors } (\mathbb{P}_{\lambda,V,\rho})_{V,\rho} \text{ converge quand } |V|, \rho \to +\infty \text{ vers une mesure de probabilit\'e} \mathbb{P}_{\lambda}, \text{ et } (\varphi^{\to \rho}, \varphi^{\to \rho}_{(i_1,i_2)}) \text{ converge en loi vers un chemin rugueux au-dessus du brownien fractionnaire tronqu\'e \`a l'ordre 2.}$

Voyons quelques éléments de la démonstration, en laissant de côté le « terme évanescent » $\mathcal{L}_{bdry}^{\to \rho}$, dont l'utilité n'apparaît que lorsqu'on regarde les détails des bornes constructives. Par construction, cette théorie est juste renormalisable (en d'autre termes, l'interaction intégrée est homogène de degré 0). En utilisant la

transformation de Hubbard-Stratonovich¹⁴, on introduit deux particules gaussiennes d'échange $\sigma_{\pm}(t)$ de covariance $\mathbb{E}\sigma_{\pm}(s)\sigma_{\pm}(t)=|s-t|^{-4\alpha}$ et on réécrit la fonction de partition $Z=Z(\lambda)$, poids total de la mesure pénalisée, sous la forme

(5)
$$Z := \int e^{-\int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}_{int}(\varphi_1, \varphi_2, \sigma)(t) dt} d\mu(\varphi) d\mu(\sigma),$$

οù

(6)
$$\mathcal{L}_{int}(\varphi_1, \varphi_2, \sigma)(t) = i\lambda \left(\partial A^+(t)\sigma_+(t) - \partial A^-(t)\sigma_-(t)\right).$$

Tout ceci est mal défini mathématiquement puisque (1) σ est un processus à valeurs distributions et $\partial \mathcal{A}^{\pm}$ n'est pas du tout défini quand $\alpha \leq 1/4$; (2) on intègre sur \mathbb{R} une quantité invariante par translation puisque construite à partir de champs stationnaires.

Supposons le paramètre de couplage λ assez petit. La théorie perturbative des champs suggère alors de développer formellement l'exponentielle du Lagrangien et de calculer les moments polynomiaux de φ ou σ , par exemple, $\frac{1}{Z}\mathbb{E}\left[\sigma(x_1)\dots\sigma(x_n)e^{-\int \mathcal{L}_{int}(\varphi_1,\varphi_2,\sigma)(t)dt}\right],$ également appelée fonction à n points de σ et notée $\langle\sigma(x_1)\dots\sigma(x_n)\rangle_\lambda$. En utilisant la formule de Wick, on peut représenter cette quantité comme une somme sur des diagrammes de Feynman, $\sum_{\Gamma} A(\Gamma)$, où Γ parcourt l'ensemble des diagrammes à n pattes σ externes, et $A(\Gamma)$ est l'évaluation correspondante. Par intégration par parties fonctionnelle (suivant la formule dite de Schwinger-Dyson¹⁵), on obtient

(7)
$$\langle |\mathcal{F}(\partial A^{\pm})(\xi)|^2 \rangle_{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2} |\xi|^{1-4\alpha} \left[1 - |\xi|^{1-4\alpha} \langle |(\mathcal{F}\sigma_+)(\xi)|^2 \rangle_{\lambda} \right].$$

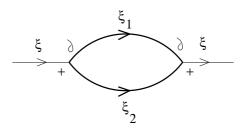


FIG. 3. Diagramme bulle. Les lignes en gras sont des champs φ , les lignes simples des champs σ .

Considérons (en utilisant un cut-off ultraviolet brutal à $|\xi| = \Lambda$) le terme de plus bas degré en λ dans le terme entre crochets : il est essentiellement égal (au signe près) à l'évaluation du diagramme bulle à demi amputé, cf. Fig. 3,

une extension en dimension infinie de l'identité $\mathbb{E}e^{i\lambda X} = e^{-\sigma^2\lambda^2/2}$ pour $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

¹⁵ une extension en dimension infinie de la formule bien connue pour les vecteurs gaussiens, $\mathbb{E}\left[\partial_{X_j}F(X_1,\ldots,X_n)\right]=\sum_j C^{-1}(i,j)\mathbb{E}\left[X_jF(X_1,\ldots,X_n)\right]$ si C est la matrice de covariance de (X_1,\ldots,X_n) .

SMF - Gazette - 131, janvier 2012

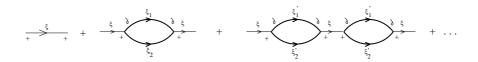


FIG. 4. Deux premiers termes de la série de bulles.

(8)
$$= \lambda^2 |\xi|^{4\alpha - 1} \int_{|\xi_1| < |\xi - \xi_1|}^{\Lambda} d\xi_1 |\xi_1|^{1 - 2\alpha} |\xi - \xi_1|^{-1 - 2\alpha} \sim_{\Lambda \to \infty} K \lambda^2 (\Lambda/|\xi|)^{1 - 4\alpha},$$

une quantité divergente mais *positive*. Si l'on resomme *formellement* la série de bulles comme dans la Fig. 4, on obtient

$$\frac{1}{\lambda^{2}} |\xi|^{1-4\alpha} \left[1 - \frac{1}{1 + K' \lambda^{2} (\Lambda/|\xi|)^{1-4\alpha}} \right] = \frac{1}{\lambda^{2}} |\xi|^{1-4\alpha} \cdot \frac{K' \lambda^{2} (\Lambda/|\xi|)^{1-4\alpha}}{1 + K' \lambda^{2} (\Lambda/|\xi|)^{1-4\alpha}}
\to_{\Lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda^{2}} |\xi|^{1-4\alpha}.$$
(9)

Ainsi, le propagateur « nu » $\frac{1}{|\xi|^{1-4\alpha}}$ a été remplacé par le propagateur renormalisé $\frac{1}{|\xi|^{1-4\alpha}+K'\lambda^2\Lambda^{1-4\alpha}}$, qui s'annule dans la limite $\Lambda\to\infty$. Dans des termes plus physiques, l'interaction en $\frac{1}{|\xi|^{1-4\alpha}}$ a été totalement écrantée (« screened ») par un contre-terme de masse infini $K'\lambda^2\Lambda^{1-4\alpha}$. Les diagrammes plus compliqués – d'ordre plus élevé en λ – apparaissant dans l'éq. (7) s'annulent également quand $\Lambda\to\infty$. Il reste simplement :

(10)
$$\langle |\mathcal{F}\mathcal{A}^{\pm}(\xi)|^2 | \rangle_{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2} |\xi|^{-1-4\alpha}.$$

Des arguments de comptage de puissance standards montrent en revanche que les diagrammes connexes avec 4,6,... pattes externes σ sont convergents. La fonction génératrice des moments connexes de l'aire de Lévy (le logarithme de la fonction génératrice usuelle) n'est donc pas modifiée par l'interaction, sauf le terme de degré 2 (la variance), qui a été rendu fini. Quant à la loi du champ φ ou de B, elle est inchangée à la limite $\Lambda \to \infty$, toujours pour les mêmes raisons.

La théorie constructive des champs permet de rendre ces arguments rigoureux. Elle est fondée sur un développement multi-échelle des champs dans l'espace de Fourier (dit : vertical), complété par un développement dit horizontal dans l'espace direct, dans des intervalles dyadiques Δ^j de taille 2^{-j} – une sorte de développement en ondelettes simplifié –, permettant lui-même un développement en cluster. Le principe est le suivant. Le champ $\psi = \varphi$ ou σ se décompose comme une somme $\sum_j \sum_{\Delta j} \psi^j \big|_{\Delta^j}$. L'interaction diverge parce que cette somme est doublement infinie. Le développement en cluster permet de réécrire la fonction de partition $Z_V^{\to\rho}$ (avec un cut-off ultraviolet d'échelle $j=\rho$ et un cut-off de volume V dans l'espace direct) comme une somme,

$$(11) Z_{V}^{\rightarrow \rho} = \sum_{n} \frac{1}{n!} \sum_{\mathbb{P}_{1}, \dots, \mathbb{P}_{n} \text{ non-overlapping}} F_{HV}(\mathbb{P}_{1}) \dots F_{HV}(\mathbb{P}_{n}),$$

où $\mathbb{P}_1,\ldots,\mathbb{P}_n$ sont des *polymères* disjoints, i.e. des ensembles d'intervalles dyadiques Δ connectés par des liens horizontaux et verticaux; au cours du développement, la mesure gaussienne a été modifiée de sorte que les composantes des champs appartenant à des polymères différents sont devenues indépendantes.

L'idée maintenant est que (i) la fonction $F_{HV}(\mathbb{P})$ est d'autant plus petite que le polymère est étendu, tant horizontalement (en raison de la décroissance polynomiale des corrélations à grande distance) que verticalement, ce qui conduit à l'image d'îles horizontales maintenues ensemble par des ressorts verticaux ; (ii) les liens horizontaux et verticaux dans \mathbb{P} (une fois qu'un seul intervalle de \mathbb{P} a été fixé) suppriment l'invariance par translation responsable des divergences. Une astuce combinatoire classique, appelée développement de Mayer, permet de réécrire l'éq. (11) comme une somme similaire sans les conditions de non-overlap. La procédure permet de resommer en une exponentielle les parties locales des graphes divergents, conduisant au contre-terme de masse évoqué ci-dessus dans le cas particulier du modèle $(\varphi, \partial \varphi, \sigma)$. Finalement, on trouve, dans la limite $|V|, \rho \to \infty$, que l'énergie libre $\ln Z_V^{\to \rho}$ est une somme sur chaque échelle de quantités extensives dépendant de l'échelle considérée, i.e. $\ln Z_V^{\to \rho} = |V| \sum_{j=0}^{\to \rho} 2^j f_V^{j\to \rho}$, où $f_V^{j\to \rho}$ converge quand $|V| \to \infty$ vers une quantité finie de l'ordre de $O(\lambda)$. On retrouve l'idée que chaque intervalle dyadique Δ^j d'échelle j contient un degré de liberté.

La sommation formelle de la chaîne de bulles ci-dessus prend alors tout son sens si λ a été choisi assez petit pour que la série converge à l'échelle maximale ρ .

8. Quelques références

Les références « classiques » sur le sujet sont l'article fondateur de T. Lyons de 1998, Differential equations driven by rough signals (Rev. Mat. Iberoamericana 14 (2), p. 215-310) et le livre de T. Lyons et Z. Qian, System control and rough paths (Oxford University Press, 2002). Le livre de P. Friz, N. Victoir, Multidimensional dimensional processes seen as rough paths, paru à Cambridge University Press en 2010, est un ouvrage de référence essentiel. Deux articles introductifs d'A. Lejay, notamment An introduction to rough paths (Séminaire de Probabilités XXXVII,

Lecture Notes in Math. 1832, p. 1-59) paru en 2003, ainsi qu'un livre de F. Baudoin, *An introduction to the geometry of stochastic flows* (Imperial College Press, 2004) peuvent compléter agréablement la lecture. La théorie algébrique de M. Gubinelli est exposée dans l'article fondateur de 2004, *Controlling rough paths* (J. Funct. Anal. **216**, p. 86–140). Pour les applications aux eds et aux edps, on pourra lire notamment les articles de M. Hairer, T. Lyons, T. Cass, P. Friz, S. Tindel et A. Lejay disponibles sur arXiv.

L'article fondateur de 2010 sur l'ordre normal de Fourier, dû à l'auteur de ces lignes, est Hölder-continuous paths by Fourier normal ordering (Comm. Math. Phys. 298 (1), p. 1-36). La classification formelle est expliquée avec les concepts algébriques adéquats dans Ordered forests, permutations and iterated integrals (2010), en collaboration avec L. Foissy (preprint arXiv :1004.5208). Les chemins rugueux renormalisés sont introduits dans le preprint A renormalized rough path over fractional Brownian motion (arXiv :1006.5604). Finalement, l'utilisation des arguments de théorie constructive des champs permettant la construction de chemins rugueux au-dessus du brownien fractionnaire (travail en commun avec J. Magnen) se trouve dans l'article en deux parties, From constructive theory to fractional stochastic calculus. (I) An introduction : rough path theory and perturbative heuristics. (II) The rough path for $\frac{1}{6} < \alpha < \frac{1}{4}$: constructive proof of convergence, à paraître à Ann. Henri Poincaré; les méthodes constructives, peu connues en-dehors d'un petit cercle d'experts, sont expliquées en détails pour des lecteurs connaissant la théorie perturbative des champs dans Mode d'emploi de la théorie constructive des champs bosoniques. Avec une application aux chemins rugueux (à paraître à Confluentes mathematicae).

34 – Publicité –



Astérisque 339 **Séminaire Bourbaki** Volume 2009/2010, exposés 1012-1026

Comme les précédents volumes de ce séminaire, qui compte maintenant plus de mille exposés, celui-ci contient quinze exposés de synthèse sur des sujets d'actualité : cinq exposés concernant les groupes dans différents contextes, trois de physique mathématique, deux liés au programme de Langlands, deux de géométrie algébrique, un de géométrie différentielle, un sur les algèbres amassées et un sur les matrices aléatoires.

As in the preceding volumes of this seminar, which now counts more than one thousand talks, one finds here fifteen survey lectures on topics of current interest: five lectures around group theory, three about mathematical physics, two related to Langlands' program, two on algebraic geometry, one about differential geometry, one on clusters algebras, and one about random matrices.

ISBN: 978-2-85629-326-3

Prix public* : 70 € - prix membre* : 49 €

* frais de port non compris





Institut Henri Poincaré 11 rue Pierre et Marie Curie F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

SOUVENIRS ET RÉFLEXIONS SUR 30 ANS D'EXISTENCE DU CIRM

Avant-propos

Pascal Chossat, Bernard Helffer, Gilles Lachaud

Le CIRM, Centre International de Rencontres Mathématiques de Luminy, est un des deux ou trois principaux centres de conférences dédiés aux mathématiques dans le monde, à égalité en tout cas avec le centre d'Oberwolfach dans la Forêt Noire. Il est à la fois bien connu dans le milieu mathématique en France et peu ou insuffisamment connu dans la communauté mathématique internationale. C'est pourtant un outil d'une remarquable efficacité pour l'organisation d'ateliers et de groupes de travail, couvrant tout le registre des mathématiques, des plus fondamentales aux plus appliquées. Réunissant plus de 3000 mathématiciens par an dont un peu moins de la moitié viennent d'autres pays d'Europe et d'ailleurs, son attractivité est la résultante de plusieurs éléments : l'efficacité de son personnel, son soutien financier très substantiel aux rencontres sélectionnées par son conseil scientifique, sa bibliothèque de niveau international, ses équipements informatiques et hôteliers et son environnement : calanques, campus de Luminy... Le CIRM est né en 1981, il y a trente ans. Établi sous la tutelle de la Société Mathématique de France, garante de son indépendance scientifique et de son ouverture à tous les mathématiciens, il a été associé au CNRS en 1992, devenant une « unité mixte de service » avec les avantages que cela entraîne, notamment l'affectation de personnels du CNRS et l'assurance d'une dotation annuelle pour son fonctionnement. Il faut ici souligner le soutien constant dont le CIRM a bénéficié de la part de ses tutelles, notamment du ministère de la recherche (le MESR selon la terminologie actuelle). Il est considéré comme un maillon essentiel du dispositif des « grands instruments » des mathématiques et fait partie intégrante du nouveau labex CARMIN. On peut donc être (raisonnablement) confiant sur la pérennité de ce bel outil au service de tous les mathématiciens.

La fête des trente ans du CIRM organisée par son directeur Patrick Foulon avec l'aide enthousiaste et efficace de tous les personnels du CIRM et de la maison de la SMF s'est articulée sur plusieurs axes : des conférences scientifiques, une soirée « grands moments du CIRM », deux commémorations d'une part de Jean Morlet et d'autre part de Philippe Flajolet, une journée vers les lycéens commençant par des conférences et se poursuivant par une rencontre entre chercheurs et lycéens avec la participation de Gilles Godefroy, Jean-Pierre Kahane, Valérie Berthe, Jean Pierre Bourguignon et Cédric Villani. Une séance plus formelle a réuni partenaires et tutelles du CIRM, autorités locales ou universitaires et le MESR était représenté par Jacques Stern. Cela a été l'occasion de rappeler à tous l'importance d'un

financement régulier pour le CIRM, de montrer sa vitalité, de présenter ses projets scientifiques et de lancer en particulier la rénovation de la maison Jean Morlet. La SMF était très présente avec de nombreux membres de son Conseil d'Administration et de nombreux anciens présidents, et la présidente de la SMAI Maria Esteban nous avait fait l'amitié de venir. Enfin la soirée « grands moments du CIRM » a été l'occasion de retrouvailles avec quelques-uns des acteurs de la création du CIRM, ceux ou celles qui ont dirigé le CIRM ou présidé la SMF à quelques moments-clés de son histoire.

En résonance avec cette fête, nous avons demandé à des mathématiciens, utilisateurs et aussi anciens directeurs du CIRM, de nous faire part de leurs témoignages, de leurs souvenirs et de leurs réflexions sur ce centre. C'est une façon de lui rendre hommage, et de rendre hommage à celles et ceux qui ont contribué parfois au prix de beaucoup d'abnégation à faire du CIRM cet instrument exceptionnel dans le paysage de la recherche en France et dont les mathématiciens de notre pays sont fiers.

Quelques souvenirs d'une ancienne présidente de la SMF (discours à la cérémonie des 30 ans du CIRM)

Mireille Martin-Deschamps

Lorsque j'ai été élue présidente de la SMF en juin 1998, je suis devenue du même coup présidente du Conseil d'Administration du CIRM. En juin 98, le CIRM avait 17 ans, et avait entamé son régime de croisière. Sur le plan scientifique, on pouvait être satisfait, le taux de remplissage était de 45 semaines par an, ce qui n'est pas si loin de ce qu'il est aujourd'hui. La sélection des colloques était sans doute un peu moins sévère, mais les choses se passaient bien. Pourtant, le CIRM a été un objet constant de préoccupation pendant tout mon mandat.

D'abord sur le plan matériel. Les financements publics assuraient le fonctionnement de base, mais nous étions en permanence à la recherche de subventions spécifiques. En particulier après presque 20 ans, les bâtiments avaient besoin d'une bonne remise à niveau. Nous avons lancé début 99 un projet baptisé un peu pompeusement CIRM 2000, projet de rénovation et d'aménagement de la bastide. Inutile de dire qu'il n'a pas été réalisé en 2000, mais qu'il s'est étalé sur de nombreuses années, faute de trouver rapidement les financements nécessaires. En même temps, la place venait à manquer pour loger les congressistes. La solution trouvée a été la mise à disposition d'une partie du centre (voisin) de formation du CNRS, largement inutilisé par le CNRS. Les travaux d'aménagement de ce centre se sont terminés à l'été 99.

Mais les problèmes les plus sérieux ont été d'ordre juridique. Plusieurs problèmes se sont télescopés : renouvellement de la convention, renouvellement du poste de directeur, et conflit avec l'administration fiscale, sans oublier le renouvellement du bail emphytéotique...

Depuis sa création, le CIRM était un établissement sous la tutelle de la SMF. Pour lui permettre de fonctionner, une convention entre la SMF, le CNRS et le ministère chargé de la recherche, qui étaient les deux principaux financeurs, avait créé en 1993 une Unité Mixte de Service (UMS). Cette double structure permettait d'une part d'avoir une grande souplesse de gestion, d'autre part de conserver au CIRM son caractère national, et de garantir son indépendance vis-à-vis des structures scientifiques locales. Cette structure avait fait l'objet d'une convention prenant fin au 01 janvier 2000. En même temps, le mandat du directeur (Jean-Pierre Labesse) arrivait à expiration au 31 août 99. Le CNRS a alors proposé de modifier la structure du CIRM, qui était dans une situation juridiquement singulière, en partenariat à la fois avec le ministère et le CNRS (alors que le CNRS était sous tutelle du ministère) et d'affecter à sa direction un poste administratif de haut niveau. Nous n'étions évidemment pas d'accord, nous étions très attachés au fait que le directeur du CIRM soit un scientifique. À ce moment-là, avec peut-être un peu de paranoïa, nous avons craint que la CNRS ne prenne le contrôle du CIRM. Nous avons fait le gros dos, laissé passer l'orage, en demandant à Jean-Pierre Labesse de rester pour une année supplémentaire et en espérant que les choses se débloqueraient l'année suivante. Finalement nous sommes effectivement arrivés à un accord, nous avons trouvé un nouveau directeur, et le statut du CIRM a été modifié : il est devenu en juillet 2000 une UMS SMF/CNRS, sous la responsabilité conjointe de la SMF et du CNRS. Pendant que les choses se clarifiaient du côté du CNRS, c'est du ministère des finances que sont venues des menaces. En 1997, la SMF avait été soumise à un contrôle fiscal qui aurait pu avoir des conséquences extrêmement graves, mais qui s'était heureusement bien terminé. Puis le gouvernement a décidé de prendre de nouvelles mesures concernant la fiscalité des associations. Nous avons alors accompli au printemps 99 les démarches pour nous conformer aux dispositions de la nouvelle instruction fiscale. Nous pensions que ce serait simple, mais c'est là que les vrais ennuis ont commencé. Nous avions plaidé la non-lucrativité de nos activités et demandé à ne pas être fiscalisés. La lettre du correspondant aux associations fixant le statut fiscal de la SMF est arrivée à la mi-juin. Si les activités d'édition étaient déclarées non-lucratives, cette réponse concluait aussi à l'assujettissement de la SMF aux impôts commerciaux pour la partie de son activité concernant le fonctionnement du CIRM, considérée comme lucrative. À la suite de nos protestations, une lettre (en novembre 2000) signée de la secrétaire d'état au budget affirmait que la partie hôtellerie du CIRM n'était pas nécessaire à son fonctionnement, qu'elle portait préjudice aux restaurateurs et hôteliers locaux, bref que c'était une activité commerciale, donc soumise aux impôts commerciaux. Les conséquences étaient graves et risquaient de compromettre l'avenir du CIRM et de la SMF. Cette affaire a duré des années. Nous nous sommes battus pour convaincre les pouvoirs publics de l'intérêt pour la France d'un institut comme le CIRM. Il a fallu quatre ans, un changement de gouvernement et des interventions auprès du nouveau secrétaire d'état au budget. En juin 2004, après des années de dialogue de sourds avec l'administration fiscale, j'ai été convoquée au ministère du budget avec Michel Waldschmidt, président de la SMF depuis 2001. Nous avons été reçus par le chef du service juridique de la Direction Générale des Impôts qui nous a annoncé, à notre grand soulagement, qu'était enfin reconnu le caractère non lucratif des activités d'hôtellerie et restauration du CIRM.

Le CIRM de 1985 à 1991

Gilles Lachaud

On a dit que le CIRM était un rêve collectif, autrement dit une utopie. Ce terme a plusieurs sens, et signifie aussi bien un lieu imaginaire qu'une communauté intentionnelle, comme on dit au Québec. En 1985, il y a un quart de siècle, le lieu n'était plus imaginaire, mais le rêve n'était pas encore profondément enfoncé dans le sol. Il restait à prouver la viabilité du projet, et à répondre à la question : – y-a-t-il une vie (mathématique) après le périphérique parisien? La réponse à cette question n'allait pas de soi à l'époque, et les « cirmo-sceptiques » en doutaient. Cette espèce a disparu, et la communauté mathématique a gagné.

C'est peut-être dans des lieux comme l'IHP et le CIRM que l'action de la communauté mathématique française est la plus visible : on y voit des personnes et des institutions, la SMF, le CNRS, le ministère (MESR), conjuguer leurs volontés pour réaliser un projet.

Car le CIRM est un lieu nécessaire. On peut faire des mathématiques partout : dans un tramway comme Henri Poincaré, dans un asile comme André Bloch, ou dans une prison comme André Weil. Mais les mathématiques sont aussi une activité de communication, et là le lieu a son importance, car il prend une fonction symbolique : c'est un point de convergence, qui devient un signe de la communauté, une place où l'activité se condense et où l'identité des participants se conforte. On entend souvent dire : « le colloque X, j'y étais! »

Pour remplir ce rôle, la bastide de Luminy bénéficie d'un atout : son environnement unique dans le massif des calanques. Le lieu était déjà habité par les moines cisterciens au XI^e siècle.

J'ai connu le CIRM en 1984, comme président du Conseil Scientifique, et j'ai pris la fonction de directeur en octobre 1985. J'ai découvert un espace qui venait de renaître, quatre ans auparavant, d'une longue période de déshérence, et il restait à imaginer ce qu'il pouvait devenir. Avec une petite équipe, nous avions un esprit de pionniers, avec la volonté de faire croître l'activité, et aussi un projet : la construction de la bibliothèque, qui était programmée par la SMF.

Mais tout n'allait pas de soi. La collection des ouvrages du CIRM était logée provisoirement dans les locaux de la bibliothèque universitaire de Luminy, et on ne pouvait y accéder qu'aux heures d'ouverture de cette bibliothèque. Dans un premier temps, pour parer au plus pressé, nous avions demandé un accès par un escalier séparé, ce que refusaient les instances locales. Il a fallu un arbitrage en février 1986, tenu à l'emplacement même de cet escalier, entre Gaston Deferre (Ministre d'État) et Jean-Pierre Chevènement (alors Ministre de l'Éducation Nationale) pour que cet escalier soit construit, et la décision de la construction de la bibliothèque a été prise. Mais les crédits attribués se faisaient attendre et n'ont été débloqués que quelques semaines avant les élections présidentielles de mai 1988.

La construction de la bibliothèque ne s'est pas faite sans mal, ni sans oppositions, car la bastide rénovée suscitait des convoitises. Mais la SMF a défendu le projet contre vents et marées (durant les présidences de Jean-François Méla, Michel Demazure, Gérard Schiffmann, et Jean-Louis Koszul était délégué permanent

de la SMF au CIRM). Le concours d'architecte a été remporté par Guy Daher (Grand prix de Rome) et Marie-France Chatenet. La construction n'a pas été sans surprises : lors du débroussaillage, on a retrouvé un hangar datant de l'occupation allemande; en construisant les fondations, on a trouvé un réseau de chauffage qui n'était sur aucune carte; l'amphithéâtre prévu s'est retrouvé avec... un plancher horizontal, car on n'avait pas prévu que le rocher de la calanque affleurait au niveau du sol.

Entre-temps, les représentants de la SMF, du CNRS (François Kourilsky, Jean-Pierre Ferrier) et du Ministère (notamment Claude Godbillon et Jean Giraud) avaient envisagé la création d'un mini-campus sur le site de Luminy, comprenant la bastide, la bibliothèque, une Maison de la SMF et un laboratoire du CNRS orienté vers l'interface mathématiques-informatique. Tous ces projets ont été réalisés, et le laboratoire est devenu l'Institut de Mathématiques de Luminy. Ce projet a d'ailleurs été complété par la construction de l'annexe du CIRM, qui a d'abord été un centre de formation du CNRS, construite à la place des écuries de la bastide, un bâtiment métallique de la fin du XIXe siècle (la construction de l'amphithéâtre est venue plus tard, et on envisage maintenant la réhabilitation du chalet, qui sera le pavillon Jean Morlet). Ces constructions ont été complétées par l'aménagement de la deuxième salle de restaurant sous les arcades de l'ancienne église, et la construction de la Maison de la SMF. À partir de ce moment, personne n'a plus contesté la légitimité de la SMF comme titulaire légal et officiel du site : la bibliothèque et la maison de la SMF ont finalement été inaugurées pour les 10 ans du CIRM, en 1991 (Jean-Pierre Bourguignon était président).

Pendant cette période, la fréquentation du CIRM a presque doublé : on est passé de 20 colloques en 1986 à 37 en 1991. On n'était pas encore au taux de remplissage d'aujourd'hui, avec 3 000 visiteurs et 51 semaines d'activité. Certains événements ont fait date :

- en 1986, un colloque de neurosciences, une réunion de la Commission des bibliothèques de mathématiques, un colloque de cryptographie mathématique (déjà), ainsi que des congrès de 400 personnes : le Congrès International de Physique Mathématique, organisé par M. Mebkhout, le Congrès de Combinatoire, organisé par Claude Berge et Denis Bresson;
- durant toute la période, de nombreux colloques mathématiques-informatique se sont tenus, certains d'entre eux organisés par Gérard Rauzy et Philippe Flajolet, au moins sept colloques sur les ondelettes, et des colloques d'histoire des mathématiques organisés par Pierre Souffrin;
- en 1989, les Journées Arithmétiques (300 personnes) se sont tenues au CIRM, ainsi qu'une réunion de l'European Mathematical Council, mais il a fallu attendre 2007 pour que la première Journée annuelle de la SMF se tienne hors Paris, et elle a eu lieu au CIRM.

À cette époque, tout le monde était polyvalent. Il y avait Maurice Galeski, qui a mis sur pied la bibliothèque du CIRM (assisté de Véronique et de Christian Munusami, et de Simone Arnaud), et qui s'est totalement investi dans la construction du bâtiment, et aussi Anna Zeller-Meier, responsable des colloques, Joëlle Katchadourian aux finances et Muriel Milton qui s'occupait de l'hôtellerie. Sans oublier Robert Rolland qui a créé l'informatique du CIRM, en y installant le premier ordinateur, offert par IBM.

Pour finir, on peut émettre un vœu ambitieux, qui a été évoqué en son temps avec le paysagiste Gilles Clément. Sur les 4 hectares dévolus au CIRM, la flore et les ombrages sont bien fournis, mais les espaces forestiers n'ont pas pu être restaurés. Les vignes ont disparu, ainsi que le verger, hormis deux grands tilleuls, un marronnier et quelques arbres fruitiers. Grâce aux efforts des générations d'occupants du lieu qui nous ont précédés depuis plusieurs siècles, un massif forestier unique a été constitué autour de la bastide. C'est l'un des rares ensembles de type septentrional de la région, à l'opposé de la forêt méridionale des calanques qui l'environnent. Nous devons à ceux qui nous suivent la préservation et l'enrichissement de ce patrimoine écologique qui est le nôtre.

Souvenirs d'un directeur du CIRM

Robert Coquereaux

Écrire deux ou trois pages sur mes souvenirs de directeur du CIRM, c'est-à-dire sur les années 2000-2005, n'est pas un exercice facile. En effet, j'aurais voulu pouvoir décrire les transformations du site, parler des arrivées et des départs au niveau du personnel, mentionner quelques événements, scientifiques ou non, qui ont marqué cette période, tout en émaillant ma prose de quelques anecdotes. Mais la longueur imposée de cette contribution, soumise à des règles d'édition compréhensibles, ne me permet pas d'évoquer tous les thèmes que j'aurais souhaité développer.

Au niveau du site, je me contenterai de donner une liste très simplifiée des transformations opérées pendant les années 2000-2005 : restructuration et aménagement du patio allant de pair avec le déplacement de la chaufferie, réouverture de l'entrée historique et dallage de la cour d'honneur (le CIRM n'est-il pas un vrai château?), création de la salle de détente du bâtiment principal et d'une bagagerie, restructuration de la salle de restaurant, création du parking (auparavant les voitures stationnaient sur le terre-plein situé à l'extrémité du bâtiment principal, sous les fenêtres du directeur), réhabilitation – ou plutôt reconstruction – du « Billard » (nom donné à la maisonnette située au milieu des bois) qui s'est transformé en salle de travail bucolique... C'est aussi à cette époque que l'intégralité de l'ancien Centre de Formation du CNRS, rebaptisé « Annexe », a été confiée au CIRM et que l'activité de Research in Pairs (ou en Paix!), devenue plus tard « Recherche en binômes », qui avait déjà été initiée par mes prédécesseurs, a pu vraiment décoller.

Mais le projet le plus important, sans aucun doute, a concerné la réalisation de l'auditorium actuel. La volonté de doter le CIRM d'une salle de conférence moderne et fonctionnelle, venant remplacer la salle située au rez-de-chaussée du bâtiment bibliothèque existait depuis quelques années déjà, mais le feu vert n'a été donné qu'au tout début de mon mandat. Après mille et une réunions avec l'architecte et avec différents entrepreneurs, je pensais naïvement, dès la fin de ma première année, que cet auditorium verrait le jour rapidement. Que nenni : certains des crédits promis ne sont pas arrivés à temps, il a alors fallu attendre, reprendre les discussions avec les entrepreneurs, établir de nouveaux devis – passage à l'euro et

augmentation des prix, aller quémander des subsides complémentaires auprès des collectivités locales (je me souviens avoir arpenté pas mal de couloirs en compagnie de Mireille Martin-Deschamps, alors Présidente du Conseil d'Administration), et attendre les crédits promis... qui ont fini par arriver. Ce n'est donc qu'au cours de ma dernière année au CIRM que les travaux de l'auditorium ont commencé. Ils se sont poursuivis et se sont terminés après mon départ, sous la houlette d'un nouveau directeur, Pascal Chossat. Puisque nous parlons de cet auditorium, je voudrais ici mentionner les noms de deux personnes qui ont largement contribué, par leurs remarques judicieuses, à améliorer de diverses façons le projet initial, je veux parler de Joseph Oesterlé et de Jean-Pierre Bourguignon (soit dit en passant, le système de tableaux noirs mobiles a été réalisé par la même société que celle qui s'était occupée de l'auditorium de l'IHÉS).

Au niveau des personnels, la période en question a vu arriver de nouvelles têtes, mais d'autres nous ont quittés pour goûter une retraite méritée. Marie Goretti Vichy Dejean est arrivée vers le début de mon mandat, pour prêter main forte à Maurice Bourguel au service informatique, ainsi que Jean Michel Madranges, venu seconder Charles Mariani. Quant à Véronique Arnouil, une transfuge de la Formation Permanente, et à Florence Raphaël, elles sont plutôt arrivées vers la fin. Au niveau des départs, trois personnes ont quitté le CIRM vers la fin de mon mandat, avant d'avoir le plaisir de rencontrer le directeur suivant : Maurice Bourguel, Anna-Zeller Meier, et Monique Ferrer. Pour des raisons de place, je ne citerai pas ceux qui étaient déjà là lors de mon arrivée, et qui sont restés après mon départ (certains pour peu de temps). Tous ont joué, ou continuent à jouer, un rôle important dans la vie du CIRM, et certains, ou plutôt certaines, ont joué un rôle majeur dans ma formation initiale de directeur du CIRM! Je ne citerai pas non plus les mouvements opérés au sein des personnels chargés de la restauration (au sens large) mais on ne doit pas oublier que ces personnes contribuent grandement au succès et à l'aura internationale du CIRM; comme chacun sait (?) elles ne sont pas placées sous l'autorité du directeur mais sous celles d'Olivier Sylvain, gérant de la société EUREST, Gardien des Clefs, et Maître queux dans cette grande maison.

Je suis physicien théoricien de formation, et je voudrais citer quelques rencontres situées a l'interface entre physique et mathématique, et qui ont été, selon moi, aussi bien remarquables que remarquées : la rencontre en l'honneur d'Alexander Kirillov (2001), une rencontre sur les problèmes ouverts dans la théorie des quasi-cristaux (octobre 2002), les mois thématiques (sessions résidentielles) de février 2003 sur les probabilités et la mécanique statistique, et de février 2004 sur les algèbres d'opérateurs et la géométrie non commutative en mathématique et en physique. Dans le même esprit, l'année suivant mon départ s'est tenue la conférence « Affine Hecke algebras, the Langlands program and conformal field theory » (juin 2006). Cette dernière conférence a inauguré le nouvel auditorium.

En ce qui concerne les aspects institutionnels et d'une certaine façon, politiques, de la vie du CIRM, au fil des Conseils d'Administration qui se sont succédés sous la présidence de Mireille Martin-Deschamps, puis de Michel Waldschmidt, les années 2000-2005 ont vu la structure du CIRM se stabiliser, tant au niveau de son statut, qu'au niveau de son financement. D'une part les rapports qui existaient, ou plutôt n'existaient pas, avec l'université de la Méditerranée, se sont normalisés. Par ailleurs certaines épées de Damoclès ont été mises au fourreau, parmi celles-ci

je me dois de citer : la décision de Bercy concernant le non-assujettissement à la TVA et le renouvellement du bail emphytéotique avec le Rectorat. Bien que n'ayant personnellement pas joué un rôle majeur au niveau des entretiens qui ont conduit aux prises de décisions correspondantes, je dois avouer que ces deux affaires ont occasionné, à mon niveau, un surcroît de travail non négligeable et m'ont fait passer (ainsi qu'à plusieurs autres) quelques nuits blanches! Le nombre de Rencontres du CIRM, pendant les années 2000-2005, n'a cessé de croître. Afin d'éviter des problèmes de facturation interne totalement factices dûs à l'ambivalence du rôle légèrement schizophrénique du CIRM, à la fois hôte et organisme attribuant des subventions, il avait été décidé de ne plus attribuer de subventions aux organisateurs, mais d'offrir un certain pourcentage de gratuité aux rencontres, en établissant une graduation qui tenait compte aussi bien des besoins manifestés que du niveau scientifique. Pendant ces années, le rôle du Conseil Scientifique, qui se réunissait plus souvent à Paris qu'à Marseille, sous la présidence de Jean-Pierre Ramis (et de Daniel Barlet, en 2005), était de suggérer des améliorations, pour chacune des rencontres projetées, et de chiffrer, en accord avec le directeur, le taux de gratuité dont elles allaient bénéficier, taux qui, de fait, était le plus souvent proche de 1/3. Il fallait donc à la fois « remplir le CIRM » et adopter une attitude sélective. Étant donné que le nombre de semaines demandées se trouvait être plus ou moins égal au nombre de semaines disponibles, le conseil scientifique favorisait les colloques jugés les plus intéressants au niveau des dates demandées. Quelques rencontres étaient repoussées à l'année suivante mais très peu était vraiment refusées.

Je voudrais conclure cette contribution par quelques commentaires peut-être un peu plus personnels. Mon activité de recherche, au début de l'année 2000 occupait facilement 100% de mon temps, mais peut-être avais-je envie d'ouvrir une parenthèse, pour mener une expérience différente... On m'avait dit que le travail de direction du CIRM allait constituer une sorte de tiers-temps pouvant parfaitement s'intégrer, moyennant un dépassement horaire raisonnable, à mon activité de recherche. Jean-Pierre Labesse, avec qui j'avais eu de nombreuses discussions avant d'accepter ce poste, m'avait prévenu que cela n'était pas tout à fait vrai... Je ne l'ai pas cru et j'ai eu tort. Je ne pense pas que mes activités de recherche aient été ralenties pendant mes années CIRM, mais le dépassement horaire qui en a résulté a été tout a fait déraisonnable! Cela étant dit je ne regrette pas cette expérience, qui fut très riche. J'ai rencontré une quantité de gens exercant des métiers dont j'ignorais jusqu'à l'existence, j'ai appris une foule de choses nouvelles, j'ai pu mener à bien un certain nombre de projets extrêmement concrets, et j'ai été amené à régler des problèmes que je n'aurais jamais rencontrés dans une vie « ordinaire » de chercheur. Donc non, je ne regrette pas.

Le travail de directeur du CIRM s'apparente, par bien des côtés, à celui d'un chef d'entreprise. C'est un travail aux multiples facettes, incluant aussi bien des tâches scientifiques qu'administratives, et chargé d'un lourd fardeau de responsabilités. Les activités vont de la prospective scientifique à la psychologie expérimentale en passant par la comptabilité publique et privée, la gestion de la carrière des personnels, la maîtrise d'ouvrage, les relations internationales, et j'en passe... Autrefois, le directeur du CIRM devait avoir des talents d'homme-orchestre, ou tout au moins il lui fallait les acquérir. Récemment, il a été décidé de recruter un administrateur de métier, de haut niveau, et de l'installer aux côtés du directeur du CIRM. Voilà une excellente décision.

Souvenirs en forme de dictionnaire amoureux

Pascal Chossat

J'ai choisi de présenter mes souvenirs de la période 2005-2010 où j'ai eu la chance et la responsabilité de diriger le CIRM, sous la forme d'un \ll dictionnaire amoureux \gg , à la manière d'une célèbre collection mais de façon plus succincte bien sûr. Je présente à l'avance mes excuses pour les inévitables omissions que le lecteur relèvera peut-être.

Accueil. Centre névralgique du CIRM, en tout cas pour les participants aux rencontres. Se présente sous la forme d'un bureau avec un guichet ouvert sur le hall d'entrée dans la bastide. Y officient des bonnes fées grâce auxquelles la plupart du temps, les problèmes petits ou grands des participants se trouvent résolus comme par un coup de baguette magique. Et cela valait aussi pour le directeur que j'étais...

Annexe. Ce bâtiment situé en contrebas du groupe « bastide » appartient à la délégation régionale du CNRS qui y organisait jusqu'à 2006 ses sessions de formation permanente. Une aile est constituée de salles de réunions et bureaux, l'autre de chambres et de studios. Après avoir progressivement autorisé le CIRM à utiliser les chambres pour ses rencontres (je crois que c'est à l'époque de Brasselet que cela a débuté), la DR du CNRS a complètement cédé l'usage de ces locaux au CIRM et a rapatrié sa formation permanente sur le campus Joseph Aiguier. Cette extension des capacités d'accueil du CIRM a constitué un événement important pour le développement de ses activités (petits groupes, sessions thématiques...).

Auditorium. La construction de l'auditorium a été préparée (et lancée) par mon prédécesseur et j'ai eu l'honneur de mener ce projet à son terme. Mis en service fin 2006, et après une période de « rodage » et de mise au point, ce bâtiment fait à présent l'unanimité aussi bien pour son utilité (évidente) que pour ses qualités audiovisuelles, son confort d'utilisation et sa capacité (95 places assises).

Bastide. Que de chemin parcouru depuis l'époque pionnière où la bastide, unique bâtiment du CIRM, concentrait à la fois l'hôtellerie, la salle de conférence et les bureaux! Cette maison typiquement provençale possède un cachet qui fait partie des attraits du CIRM, qu'il faut conserver et cultiver!

Bibliothèque. La bibliothèque du CIRM n'a pas à rougir de la comparaison avec celles d'autres centres équivalents dans le monde. Sa récente extension et mise aux normes (faisant suite à la mise en service du nouvel auditorium qui a « libéré » l'ancienne salle de conférence) permet à la bibliothèque de devenir un pôle documentaire en mathématiques dans un large quart sud est du pays et au-delà.

Bouillabaisse. Une institution dont on peut dire qu'elle est célèbre dans le monde entier puisque chaque année des milliers de mathématiciens en provenance de toutes les parties du monde viennent au CIRM et peuvent la déguster le jeudi soir! Et c'est

P. CHOSSAT

à juste titre : les poissons choisis par le chef cuisinier sont garantis « provençaux » et elle est accompagnée d'un très bon vin blanc de Cassis.

Calanques. La proximité des calanques (bientôt parc national) n'est pas le moindre des attraits du CIRM. La belle et sauvage calanque de Sugiton n'est qu'à 40 mn de marche de la bastide. J'aimais m'y promener en fin d'après-midi, surtout au printemps, pour admirer les couleurs de la roche et de la mer au soleil couchant.

CEMRACS. Créé il y a 15 ans sous les auspices de la SMAI, le Centre d'Eté Mathématiques de Recherche Avancée en Calcul Scientifique prend ses quartiers au CIRM en juillet et août. Grâce au CEMRACS, le CIRM fonctionne en continu pendant l'été tout en permettant à son personnel de prendre des congés indispensables après une année d'activité intense. J'ai milité pendant mon mandat pour que le CEMRACS s'intègre plus dans le fonctionnement du CIRM. Bonne idée ou pas ? La question était débattue, en tout cas c'est une pépite à ne pas perdre.

Chapelle. L'ancienne chapelle qui jouxte la bastide est à présent une salle de réunion. Un piano, prêt d'une collègue qui travaillait sur le campus de Luminy, permet à des musiciens de travailler et parfois de donner de petits concerts. Je reviendrai sur cet aspect du CIRM dans l'article « événements ».

Communication. J'avais regroupé dans un service tout ce qui concernait les « relations extérieures » (en dehors des tutelles) : diffusion des informations, relations avec les collectivités locales, réseau ERCOM (des centres de mathématiques européens), collection des actes des rencontres et des cours (avec le soutien de la cellule Mathdoc), site Web, etc. Pour les deux personnes qui s'en occupaient c'était une tâche vraiment difficile car la « comm » est un métier et nous n'avions pas ou peu d'expérience dans ce domaine. Nous avons procédé par tâtonnements, essais et erreurs, et au total nous avons, je crois, assuré l'essentiel.

Conseil scientifique. Le conseil scientifique du CIRM examine les demandes de rencontres et il les classe en fonction de leur qualité, de leur intérêt... C'est une mission difficile, parfois ingrate. Le directeur du CIRM assiste aux réunions du CS et rappelle si nécessaire les contraintes budgétaires et autres qui peuvent impacter les choix finaux des rencontres. Dans l'enthousiasme qui a suivi la création de l'INSMI au CNRS, j'avais simplifié la procédure d'attribution des subventions aux colloques en proposant que pour chaque colloque les séjours de 40 participants soient pris en charge entièrement, ce qui entraîne un surcoût pour le CIRM. Cette règle semble donner de bons résultats après un an de fonctionnement mais bien entendu des ajustements sont nécessaires...

Événements (voir aussi Piano). Le CIRM est aussi un site d'accueil pour des événements de nature artistique, du fait de sa situation privilégiée mais aussi parce que de nombreux mathématiciens apprécient l'art et particulièrement la musique (qu'ils pratiquent souvent eux-mêmes). J'ai le souvenir d'un concert par le quatuor à cordes d'Aix-en-Provence, donné à l'occasion de l'inauguration de l'auditorium

en juin 2006. Ce fut l'occasion de tester l'acoustique de cette salle et le résultat fut heureux. Un moment véritablement magique!

FRUMAM. La Fédération de Recherche des Unités de Mathématiques de Marseille a joué un rôle important au CIRM en organisant (subventionnant) chaque hiver une session constituée de rencontres et d'écoles se succédant pendant 4 à 6 semaines sur un thème donné. C'est avec le soutien de la FRUMAM que j'ai pu lancer en 2008 le programme de sessions thématiques d'une durée de 3 mois avec résidence de mathématiciens invités et activités alliant colloques, petits groupes et cours doctoraux.

IML. L'institut de mathématiques de Luminy, UMR du CNRS et de l'université de la Méditerranée, interagit naturellement très fortement avec le CIRM. La plupart des directeurs du CIRM ont été ou sont membres de l'IML (les exceptions étant Robert Coquereaux, membre du CPT, et moi-même, membre du laboratoire J.-A. Dieudonné à Nice). On ne doit pas s'étonner et encore moins regretter que le CIRM ait parfois joué le rôle de soutien logistique à des activités de l'IML (et dans une moindre mesure du Centre de Physique Théorique qui se trouve aussi sur le campus de Luminy). Cela a participé au développement du centre. D'ailleurs la bibliothèque du CIRM est aussi celle de l'IML qui la subventionne en partie.

Informatique. L'informatique du CIRM se distingue de celle d'une unité de recherche par la quantité de variables qu'il faut ajuster et coordonner en permanence : accès internet des participants (qui changent chaque semaine), gestion informatique de la bibliothèque, multiplicité des bâtiments, gestion des rencontres, gestion du parc de machines des services internes, etc. Le fonctionnement harmonieux de tout cela, d'une façon dynamique et réactive en raison du renouvellement hebdomadaire de la « clientèle », est un impératif. Si une défaillance se manifeste, c'est tout le fonctionnement qui est perturbé. Fort heureusement là aussi une bonne fée est aux manettes...

Maison du jardinier. Cette ruine recouverte de tags trône lamentablement au milieu du parc, entourée d'arbres qui la cachent partiellement. Ce fut dans le temps jadis une jolie petite maison, dépendance de la demeure principale (bastide) des maîtres des lieux. Les idées n'ont pas manqué pour réhabiliter cette ruine. L'orientation actuelle est d'aménager un vrai appartement qui hébergera les titulaires de la chaire Jean Morlet qui sera attribuée au CIRM par l'université d'Aix-Marseille Université. Le nom de Jean Morlet est attaché à l'aventure des ondelettes qui est évoquée par ailleurs dans ce dossier (Marie Farge) car le CIRM y a fortement contribué.

Pianos. Pendant longtemps un piano a siégé dans la chapelle du CIRM. C'est une tradition que des mathématiciens viennent en jouer pour se détendre ou s'exercer, et cela déborde le strict cadre des participants aux rencontres du CIRM. En 2006 j'ai installé un piano demi-queue (un Blüthner pour les connaisseurs...) dans l'auditorium pour profiter de l'acoustique de cette salle et y organiser à l'occasion de petits concerts. Le piano est reparti en même temps que moi (c'était mon piano)...

P. CHOSSAT

Lors de la cérémonie des 30 ans, j'ai eu le plaisir de voir qu'un nouveau piano demi-queue avait remplacé le mien.

Rencontres. Sous ce terme on regroupe les différents types d'activité du CIRM : ateliers (la forme initiale des rencontres), petits groupes (se tiennent souvent en parallèle des ateliers), recherches en binôme (l'analogue des « research in pair » du centre d'Oberwolfach), et maintenant sessions thématiques. La gestion quotidienne de ces rencontres est complexe car elle doit être coordonnée. Tous les secteurs interagissent les uns avec les autres. J'ai vu combien cela pouvait être parfois difficile et il faut remercier le personnel du CIRM de permettre à cet ensemble de fonctionner de façon harmonieuse et la plupart du temps transparente pour les participants aux rencontres.

Restaurant. Le restaurant du CIRM a subi plusieurs extensions depuis les débuts du centre. En 2009 une vaste entreprise de rénovation et de mise aux normes a été effectuée dans la salle de restaurant et dans les cuisines, grâce au soutien apporté par la société en charge de la restauration. Ce restaurant jouit d'une très bonne réputation, et si la gastronomie n'est pas toujours là (c'est quand même un restaurant d'entreprise...), il s'y concocte chaque semaine des plats de très bonne qualité, parfois vraiment savoureux (voir plus haut, bouillabaisse...).

SMF. Le CIRM est un établissement de la Société Mathématique de France. Cette tutelle permet au CIRM de bénéficier d'une certaine souplesse dans son fonctionnement, indispensable vu ses activités d'accueil, mais surtout d'un soutien de la communauté mathématique et d'une garantie que les orientations et choix « stratégiques » serviront au mieux l'intérêt scientifique. D'autre part une « maison de la SMF » jouxte l'auditorium sur le parc du CIRM et s'occupe de la logistique de ses publications.

Université de la Méditerranée. Les rapports entre le CIRM et l'université de la Méditerranée n'ont pas toujours été faciles. C'est que sans être sous sa tutelle, le CIRM dépend quand même en partie de cette université par son implantation sur le campus de Luminy. À mon arrivée au CIRM j'ai trouvé chez le président Berland une oreille attentive et bienveillante à cette question. Un résultat de cette « diplomatie » a été la normalisation d'un poste de l'université pour la bibliothèque dont le statut était précaire depuis plus de vingt ans. On ne peut que souhaiter la pérennité de ces rapports de bon voisinage.

Les ondelettes et le CIRM

Marie Farge¹, Alex Grossmann ², Yves Meyer ³, Thierry Paul ⁴, Jean-Claude Risset ⁵, Ginette Saracco ⁶, Bruno Torrésani ⁷

Le formalisme de la transformée en ondelettes continue naquit de la rencontre improbable et fructueuse entre Jean Morlet, spécialiste de la sismique réflexion qu'il utilisait pour l'exploration pétrolière chez Elf-Aquitaine, et Alex Grossmann, chercheur CNRS spécialiste de mécanique quantique au Centre de Physique Théorique (CPT) du CNRS à Marseille. Nous ne parlerons pas ici des aspects techniques de la théorie des ondelettes car Albert Cohen vient de l'exposer de façon remarquable, par sa clarté et sa cohérence, dans le numéro précédent de la *Gazette des Mathématiciens* [33], auquel nous convions le lecteur à se reporter. Nous nous contenterons de montrer comment les ondelettes se sont développées et quel rôle a joué le CIRM dans leur diffusion.

Jean Morlet et Alex Grossmann

Jean Morlet est né à Paris le 1^{er} août 1931. Après avoir étudié à l'École Polytechnique d'où il sortit en 1952, puis à L'ENSPM (École Nationale des Pétroles et des Moteurs), il entra en 1958 comme ingénieur de recherche au service de la CEP (Compagnie d'Exploration Pétrolière). Quelques années plus tard il participa à la fusion entre la CEP et la SNPA (Société Nationale des Pétroles d'Aquitaine) qui formèrent ainsi le consortium pétrolier Elf, ensuite absorbé en 2000 par la société Total. Jean Morlet consacra toute sa carrière à l'exploration pétrolière, domaine dans lequel il devint un chercheur mondialement reconnu. C'est à l'époque de la société Elf, dans les années 1970, qu'il chercha à améliorer les méthodes d'analyse et de traitement des signaux sismiques utilisés en géophysique.

Toute sa vie Jean Morlet fut un grand admirateur de Dennis Gabor, père de l'holographie et de la transformée de Fourier à fenêtre glissante (de forme gaussienne), encore appelée « transformée de Gabor ». Jean Morlet utilisait beaucoup celle-ci et en connaissait bien les avantages mais aussi les limites quand on souhaite analyser des signaux hautement instationnaires, tels les explosions ou les chocs émis par les camions-vibrateurs utilisés en sismique réflexion pour sonder la structure du soussol. Pour essayer de comprendre celle-ci sans effectuer de forages on envoie dans le sous-sol des paquets d'ondes, appelés « ondelettes », et on enregistre les signaux rétrodiffusés (réfléchis par les couches géologiques) grâce à des micros placés à la surface du sol. Ces signaux sont ensuite analysés par transformée de Gabor puis

¹ ÉNS, Paris.

² Génopole, Evry.

³ ÉNS, Cachan.

⁴ École Polytechnique, Palaiseau.

⁵ LMA, Marseille.

⁶ CEREGE, Aix.

⁷ LATP, Marseille.

traités grâce à des algorithmes de type problème inverse, ce qui permet de reconstruire la structure interne du sous-sol, en espérant ainsi détecter de manière non destructive les cavités susceptibles de contenir du pétrole.

Pour réduire la taille des fichiers à traiter sans dégrader leur information, Jean Morlet eut l'idée d'échantillonner les signaux de façon adaptative, en remplaçant la modulation du paquet d'onde élémentaire de la transformée de Gabor par sa dilatation. On obtient ainsi une famille d'ondelettes de forme constante (en particulier le nombre d'oscillations reste constant), dont le support spatial varie proportionnellement au paramètre de dilatation, tandis que le support spectral varie de façon inversement proportionnelle, ce qui correspond à un banc de filtres à bande passante relative constante. Jean Morlet établit de façon empirique les formules d'analyse et de synthèse et présenta ses premiers résultats en octobre 1975, lors du 45° Colloque International de la SEG (Society of Exploration Geophysicists) à Denver, puis en novembre 1980, lors du 50° Colloque International Annuel de la même société qui se tenait à Los Angeles. Ces premiers travaux furent publiés dans deux articles parus en 1982 dans la revue Geophysics [4-5].

Jean Morlet montra en octobre 1981 cette nouvelle transformée à Roger Balian, condisciple de la même promotion que lui à l'École Polytechnique, spécialiste de physique statistique et de mécanique quantique, qui dirigeait le Service de Physique Théorique du CEA-Saclay. Ce dernier venait de publier un article important, intitulé « Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique », où il montrait que les fonctions utilisées par la transformée de Gabor ne peuvent pas engendrer de bases orthogonales [3]. Roger Balian conseilla alors à Jean Morlet d'aller voir Alex Grossmann à Marseille. Quand ils se rencontrèrent au CPT en Décembre 1981 Alex Grossmann fit immédiatement le lien avec les représentations en espace de phase de la mécanique quantique, sujet dont il avait découvert l'intérêt grâce à Daniel Kastler, également chercheur au CPT, qui fut l'un des fondateurs du Campus de Luminy et du CIRM. Alex Grossmann démontra que la transformée en ondelettes continue est trivialement inversible en tant qu'inverse d'une transformation unitaire entre deux espaces de Hilbert, ceci provenant du fait qu'il s'agit d'une représentation de carré intégrable du groupe affine. Par ailleurs, la nécessité d'une condition d'admissibilité, que doivent satisfaire les ondelettes et qui n'a pas d'analogue dans le cas de la transformée de Gabor (associée quant à elle au groupe de Weyl-Heisenberg), s'explique par le fait que le groupe affine n'est pas unimodulaire. Alex Grossmann et Jean Morlet publièrent ensemble ces résultats en 1984 dans trois articles [5-7], dont un parut dans le SIAM Journal of Mathematical Analysis sous le titre « Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape » [7], article qui est la référence en matière de transformée en ondelettes continue. De 1985 à 1989 Alex Grossmann et Jean Morlet rédigèrent conjointement douze autres articles sur les ondelettes.

Les ondelettes au CPT, au LMA et à l'École Polytechnique

Si les ondelettes ne sont pas nées au CIRM, tous deux ont presque le même âge et se sont développés conjointement. En effet, dans le milieu des années 1980 deux groupes de chercheurs travaillaient ensemble à Marseille à côté du CIRM. D'une part, sur le campus de Luminy au Centre de Physique Théorique (CPT) du CNRS il y avait Alex Grossmann entouré de ses thésards (Thierry Paul, Matthias







Jean Morlet, Alex Grossmann et Yves Meyer

Holschneider et Marc Duval-Destin) et de ses collaborateurs (Ingrid Daubechies de l'Université Libre de Bruxelles, Jean-Pierre Antoine et Romain Murenzi de l'Université de Louvain-la-Neuve ainsi que Philippe Tchamitchian et Bruno Torrésani au CPT). D'autre part, sur le campus Joseph Aiguier se trouvaient au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA) du CNRS plusieurs chercheurs qui se sont intéressés très tôt aux ondelettes : Jean-Claude Risset, Daniel Arfib, Richard Kronland-Martinet, Ginette Saracco, Pierre Dutilleux, Frédéric Boyer, Philippe Guillemain et Nathalie Delprat.

L'équipe « Informatique et Acoustique Musicale », animée par Jean-Claude Risset au LMA, était dotée d'un processeur audio numérique SYTER, conçu par Jean-François Allouis au sein du Groupe de Recherche Musicale (GRM) de l'INA (Institut National de l'Audiovisuel) et commercialisé par la société Digilog implantée à Aix-Les-Milles, ce qui apporta de nouvelles possibilités de calcul pour la transformée en ondelettes continue. Richard Kronland-Martinet, en collaboration avec Jean Morlet et Alex Grossmann, programmèrent la transformée en ondelettes continue sur SY-TER et produisirent ainsi de nombreuses analyses et synthèses de différents types de sons musicaux. Pour affiner l'analyse des sons ils développèrent des outils graphiques permettant de visualiser le module et la phase des coefficients d'ondelettes et ils montrèrent que les synthèses sonores effectuées à partir des coefficients d'ondelettes étaient pratiquement parfaites. Ils publièrent leurs résultats dans un article paru en 1987 [11], dont certaines figures illustrèrent également le premier article de vulgarisation présentant les ondelettes [13]. Toujours au LMA, mais dans l'équipe « Acoustique Sous-marine et Ultra-sons » dirigée par Claude Gazhanes, Ginette Saracco développa en 1986 un second code de transformée en ondelettes continue, appelé ONDEL, qu'elle utilisa pour étudier la propagation acoustique sous-marine d'ondes sonores et ultra-sonores en régime transitoire, dont les résultats furent publiés en collaboration avec Alex Grossmann et Philippe Tchamitchian [16]. En appliquant une idée suggérée par Jean Morlet, Matthias Holschneider, Richard Kronland-Martinet, Philippe Tchamitchian et Pierre Dutilleux mirent au point un algorithme rapide, basé sur la factorisation des bancs de filtre associés aux ondelettes, qu'ils nommèrent « algorithme à trous » et dont ils exposèrent le principe dans deux articles publiés en 1989 [16].

Dès 1985 Yves Meyer, professeur au Département de Mathématiques de l'École

Polytechnique, vint de temps en temps travailler à Marseille avec Jean Morlet, Alex Grossmann, Ingrid Daubechies et Thierry Paul. Ce fut grâce à Jean Lascoux, directeur du Centre de Physique Théorique de l'École Polytechnique, qu'Yves Meyer découvrit l'article SIAM publié par Alex Grossmann et Jean Morlet en 1984 [8]. En lisant celui-ci, il reconnut du premier coup la formule de reproduction de Calderon [2], résultat connu des analystes et qu'Alex Grossmann avait retrouvé sans le savoir. Ingrid Daubechies et Alex Grossmann écrivirent un article sur les bases obliques d'ondelettes (frames) [9], qu'ils cosignèrent avec Yves Meyer, où ils montraient comment on peut discrétiser la représentation en ondelettes continues tout en préservant la conservation de l'énergie, ceci à condition de choisir un échantillonnage suffisamment dense du demi-plan espace-échelle où vivent les ondelettes. En fait Yves Meyer pensait que la représentation en ondelettes ne permettrait pas d'aller plus loin et de construire des bases orthogonales (telles que le produit scalaire entre les fonctions de base soit nul). En effet, elle donnerait probablement lieu à la même obstruction que la représentation de Gabor, comme l'avait montré Roger Balian [3], pour laquelle on ne peut pas avoir à la fois la complétude de la représentation et l'indépendance des fonctions de base. Rappelons ici qu'Alfred Haar avait construit en 1910 [1] une base orthonormée d'ondelettes dont les fonctions sont à support compact et discontinues, alors qu'Yves Meyer les souhaiterait aussi régulières que les fonctions de Gabor ou les ondelettes de Morlet. Cependant, et contrairement à sa première intuition, Yves Meyer réussit à construire une base orthogonale d'ondelettes régulières (appartenant à la classe de Schwartz) et à support non compact qu'il présenta en 1985 lors d'un séminaire Bourbaki, dont le texte parut sous le titre « Principe d'incertitude, bases Hilbertiennes et algèbres d'opérateurs » [8]. En fait, une autre base orthogonale d'ondelettes régulières et à support non compact, construite à partir de fonctions splines d'ordre élevé, avait été trouvée en 1983 par Jan-Olov Stromberg lorsqu'il était à l'Université de Princeton. Ce résultat avait été publié dans les actes d'une conférence en hommage à Antoni Zygmund, mais Yves Meyer l'avait oublié et la construction qu'il a trouvée est différente. Celle-ci fut généralisée aux fonctions à plusieurs variables par Pierre Gilles Lemarié, dans le cadre de son travail de thèse qu'il effectuait sous la direction d'Yves Meyer, et ils publièrent ensemble en 1986 un article sur les bases orthogonales d'ondelettes régulières, qui est considéré comme la référence sur ce sujet [10]. A partir des travaux précédents Ingrid Daubechies développa les bases d'ondelettes orthogonales régulières à support compact et montra en 1988 comment celles-ci peuvent être construites à partir de filtres miroirs en quadrature [14].

C'est en lisant le texte du séminaire Bourbaki d'Yves Meyer [8] que Stéphane Mallat, alors en thèse aux États-Unis à l'Université de Pennsylvanie, fit le lien entre les ondelettes orthogonales, les filtres miroirs en quadrature et les filtres pyramidaux qui étaient à l'époque d'utilisation courante en traitement d'images. Stéphane Mallat contacta Yves Meyer et c'est lors de leur première rencontre à Chicago en 1986 qu'ils développèrent ensemble le formalisme de l'analyse multirésolution. À partir de celle-ci Stéphane Mallat mis au point l'algorithme rapide de transformée en ondelettes orthogonales, connu sous le nom d'« algorithme de Mallat » [15]. Stéphane Mallat découvrit ainsi que l'analyse par ondelettes orthogonales constitue un cas particulier de la technique de codage sous-bande (qui utilise également des filtres miroirs conjugués) développée par Daniel Esteban et Claude Galand dès 1977

au centre IBM de La Gaude, près de Nice, donc à peu près à la même époque où Jean Morlet créait l'analyse en ondelettes continues.

En 1987 Philippe Tchamitchian, qui avait fait sa thèse avec Yves Meyer à l'université d'Orsay et était ensuite venu rejoindre le CPT à Marseille, construisit des bases inconditionnelles biorthogonales [12] pour lesquelles on peut choisir des couples de fonctions de natures très différentes, par exemple très régulières pour l'analyse et quasi-singulières pour la synthèse, qui cependant préservent nombre de propriétés des bases orthogonales. En reprenant la construction trouvée par Ingrid Daubechies [14], Albert Cohen, qui était en thèse avec Yves Meyer à l'université Paris-Dauphine, et Jean-Christope Feauveau, qui faisait également une thèse mais en informatique, construisirent en collaboration avec Ingrid Daubechies des bases d'ondelettes biorthogonales à support compact, qui sont aujourd'hui très utilisées en pratique [22].

La RCP « Ondelettes » CNRS-Elf-Aquitaine

Le nombre de personnes s'intéressant aux ondelettes commençant à grandir, Jean Morlet et Claude Jablon (directeur de la recherche d'Elf-Aquitaine), Alex Grossmann et Eduardo de Rafael (directeur du CPT) ainsi-que Jean-Claude Risset eurent l'idée de proposer au CNRS la création d'une RCP (Recherche Coopérative sur Programme) consacrée aux ondelettes. Le département SPI (Sciences pour l'Ingénieur) du CNRS déclina cette offre mais le département MPB (Math et Physique de Base) apporta son soutien financier, conjointement avec la société Elf-Aquitaine. La « RCP 820 Ondelettes » fut ainsi créée en 1985 avec un budget minimal mais cependant suffisant pour prendre en charge quelques missions.

Grâce à cette RCP plusieurs disciplines se regroupèrent autour de quelques thèmes de recherche susceptibles d'utiliser les ondelettes, tels que : analyse mathématique (Alex Grossmann et Yves Meyer), traitement de signal en géophysique (Jean Morlet), représentation en mécanique quantique (Alex Grossmann et Thierry Paul), théorie des groupes et discrétisation (Alex Grossmann), reproduction et modification du son (Jean-Claude Risset et Richard Kronland-Martinet).

Le soutien financier apporté par la RCP permit d'organiser la première rencontre entièrement consacrée aux ondelettes, qui eut lieu en novembre 1986 au Centre d'Études et de Recherches d'Elf-Aquitaine à Pau, mais qui n'a malheureusement pas donné lieu à la publication de comptes-rendus. La RCP remboursa également les déplacements des chercheurs collaborant à distance. A titre d'exemple, l'article d'Ingrid Daubechies (Bruxelles), Alex Grossmann (Marseille) et Yves Meyer (Paris) sur les bases obliques d'ondelettes [9] le mentionne explicitement, car l'exposant a) de son titre « Painless nonorthogonal expansions a) » renvoie à une note précisant que ce travail a été accompli dans le cadre de la « RCP Ondelettes ».

Les ondelettes au CIRM

Grâce à la convivialité et à la souplesse administrative que le CIRM offrait au milieu des années 80, un groupe de chercheurs venant d'horizons et de disciplines variés qui s'intéressaient aux ondelettes prirent l'habitude de se retrouver, une ou deux fois par an, dans le cadre accueillant de la bastide et de son parc ombragé. Ainsi

le premier colloque international sur les ondelettes fut-il organisé au CIRM par Jean-Michel Combes, Alex Grossmann et Philippe Tchamitchian, du 14 au 18 Décembre 1987, sur le thème « Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space », ceci grâce au soutien financier du CIRM, de la SMF, de l'université d'Aix-Marseille II, du Conseil de Régional PACA (Provence-Alpes-Côte d'Azur), du LMA et du CPT, et il donna lieu au premier ouvrage consacré aux ondelettes et publié par Springer dans la collection « Inverse Problems and Theoretical Imaging » [15]. C'est dans cet ouvrage que l'on trouve la première publication de Romain Murenzi, qui effectuait sa thèse avec Jean-Pierre Antoine de l'université de Louvain-la-Neuve et cherchait à généraliser la transformée en ondelettes continue en dimension supérieure. Il montra pour cela qu'il fallait remplacer le groupe affine utilisé en dimension un par le groupe Euclidien muni des dilatations.

L'impulsion donné par ce premier colloque international permit d'organiser une « Année Spéciale Ondelettes », qui eut lieu en 1989-1990 et fut financée par le département MPB du CNRS, tout comme la « RCP Ondelettes » qui l'avait précédé. Ce soutien financier permit à Thierry Paul, Alex Grossmann et Yves Meyer d'organiser au CIRM, du 29 mai au 2 juin 1989, le second colloque international sur les ondelettes, intitulé « Wavelets and Applications ». Plus de 100 chercheurs, dont près du quart venaient de l'étranger, y participèrent, en particulier Ingrid Daubechies qui était à l'époque aux Bell Labs, Stéphane Mallat qui était au Courant Institute à New York, Ronald Coifman de l'université de Yale et Greg Beylkin, chercheur chez Schlumberger à Ridgefield. Ce dernier présenta pour la première fois « l'algorithme BCR » (Beylkin-Coifman-Rokhlin), qui permet de comprimer les opérateurs intégraux de type Calderon-Zygmund grâce à la représentation en base d'ondelettes, ce qui permet d'effectuer beaucoup plus rapidement les produits matrice-vecteurs [20]. Comme le nombre des participants était largement supérieur aux capacités de la salle de réunion dont disposait le CIRM à l'époque, l'université d'Aix-Marseille II prêta un amphithéâtre pour les exposés, mais les participants non Marseillais étaient toujours logés au CIRM. Les actes de ce second colloque international sur les ondelettes furent publiés conjointement par Masson et Springer en 1991 [20].

L'année 1990 marqua un tournant car les premiers ouvrages présentant les ondelettes parurent cette année là : « Les ondelettes en 1989 », édité par Pierre-Gilles Lemarié et publié par Springer [17], ainsi que les deux volumes de l'ouvrage de référence d'Yves Meyer, intitulé « Ondelettes et Opérateurs », publié par Hermann [18], dont la traduction anglaise parut deux ans plus tard chez *Cambridge University Press*. Toujours en 1990, la SMF consacra sa Journée Annuelle aux ondelettes avec deux exposés, donnés le 5 mai 1990 à Paris, l'un par Marie Farge sur la transformée en ondelettes continue et l'autre par Yves Meyer sur les ondelettes orthogonales, dont la SMF publia les textes [19].

Les ondelettes en France et à l'étranger

Dans la foulée du second colloque international, qui attira au CIRM de nombreux chercheurs étrangers, les ondelettes essaimèrent au niveau international et depuis 1990 il est quasiment impossible de suivre de façon exhaustive leur diffusion, aussi bien vers de nouveaux lieux que vers de nouveaux domaines d'application. On peut cependant citer à titre d'exemple plusieurs conférences qui furent

organisées à l'étranger à partir de cette époque. Ainsi en décembre 1990 Marie Farge, Julian Hunt et Christos Vassilicos organisèrent-ils à l'université de Cambridge (Royaume-Uni) une conférence internationale sur « Wavelets, Fractals and Fourier Transforms : New Developments and New Applications » qui donna lieu à la parution d'un ouvrage chez Oxford University Press [26]. En Juin 1991, la direction des mathématiques de la *National Science Foundation* (CBSM-NSF) demandèrent à Ingrid Daubechies de donner une série de dix cours sur les ondelettes, dans le cadre de la conférence CBMS qui se tenait à Lowell dans le Massachusetts (États-Unis) qui furent publiés en 1992 par le SIAM (*Society of Industrial and Applied Mathematics*) sous le titre « Ten lectures on Wavelets » [24].

Pour l'année 1991-1992 Bruno Torrésani et Philippe Tchamitchian organisèrent au CPT à Marseille une seconde « Année Ondelettes » qui donna lieu à plusieurs manifestations : un troisième colloque international sur « Wavelets and Applications » en Mars 1992 au CIRM mais dont les actes ne furent pas publiés, une rencontre au CPT sur « Ondelettes et Mécanique Quantique », puis une autre au LMA sur « Ondelettes et Traitement du Signal » et enfin deux au CIRM sur « Ondelettes et Turbulence » puis « Ondelettes et Analyse Mathématique ». Cette activité internationale à Marseille renforça les échanges entre les chercheurs qui travaillaient en France et ceux qui commençait à s'intéresser aux ondelettes à l'étranger, avec en particulier la venue de David Donoho et lain Johnstone de l'université de Stanford, de Ronald Coifman et Victor Wickerhauser de l'université d'Yale, de Martin Vetterli de l'université Columbia à New York, Hans Georg Feitchinger et Karllheinz Gröchenig de l'université de Vienne (Autriche), sans oublier Ingrid Daubechies qui était à cette époque aux Bell Labs à Murray Hill et Stéphane Mallat au Courant Institute à New York, tous deux habitués du CIRM. En juin 1992, Sylvie Roques, Yves Meyer et Romain Murenzi organisèrent à Toulouse le quatrième colloque international sur les ondelettes, dont les actes furent publiés en 1992 par les Éditions Frontières [23]. C'est dans cet ouvrage que se trouvent les premières annonces de trois développements importants, à savoir les ondelettes sur l'intervalle, proposé par Ingrid Daubechies et Albert Cohen, les paquets d'ondelettes, développé par Ronald Coifman, Yves Meyer et Victor Wickerhauser, et l'utilisation des ondelettes pour l'estimation statistique non-paramétrique proposé par David Donoho et lain Johnstone [23]. L'année 1992 vit également la parution de l'ouvrage collectif « Wavelets and their Applications » chez Jones and Bartlett [21], ainsi que celle du premier ouvrage de la collection « Wavelet Analysis and its Applications » que Charles Chui, mathématicien de l'université A&M du Texas à College Station et spécialiste des fonctions splines, créa chez Academic Press [25].

En décembre 1993 Charles Chui, Ronald Coifman et Ingrid Daubechies créerent un nouveau journal intitulé « Applied and Computational Harmonic Analysis » (ACHA), tout d'abord publié par *Academic Press* puis par *Elsevier* quand ce dernier absorba *Academic Press* en 2000. Les prémisses d'ACHA furent discutés lors de rencontres informelles qui eurent lieu au CIRM au cours desquelles Ingrid Daubechies, Ronald Coifman, Victor Wickerhauser, Stéphane Jaffard et les auteurs de cet article débattirent pour savoir si la création d'un nouveau journal était vraiment nécessaire et quel pourrait en être le titre. Il fut en particulier décidé que le mot « ondelettes » n'apparaîtrait pas dans le titre, ceci afin de préserver l'ouverture d'esprit qui avait jusqu'alors prévalue au sein de notre communauté et éviter les

risques de sectarisme que nous commencions à pressentir. Ce journal a le facteur d'impact le plus élevé (3.144 en 2011) des 44 revues de mathématiques publiés par *Elsevier* et il en est à son 32^e volume.

Le retour des ondelettes au CIRM

En juillet 1997 Ginette Saracco et Matthias Holschneider, tous deux à l'époque au laboratoire Géosciences de Rennes, et Bruno Torrésani du CPT organisèrent au CIRM un colloque international, intitulé « Perspectives in Mathematical Physics », qui réunit une soixantaine de chercheurs de différentes disciplines, allant de la mécanique quantique à la génétique, dont le point commun était d'avoir un jour travaillé avec Alex Grossmann. Lors de ce colloque de nombreuses communications furent présentées sur des sujets fort variés, ainsi qu'un hommage à Alex Grossmann au cours duquel Ingrid Daubechies et Thierry Paul retracèrent l'ensemble de sa carrière et les nombreux domaines auxquels il a contribué, ceci avec un humour savoureux dont les participants se souviennent encore.

À la suite du décès de Jean Morlet en 2007, le CIRM souhaita pérenniser sa mémoire. L'idée fut alors lancée de restaurer la maison du jardinier qui tombait en ruine et d'en faire une « Maison Jean Morlet » destinée à accueillir des chercheurs qui pourront y séjourner pour des périodes de longue durée, afin de profiter au mieux du cadre et des conditions de travail exceptionnelles offertes par le CIRM. Depuis 2008 une souscription « Maison Jean Morlet » est ouverte auprès de la SMF pour financer ce projet et plusieurs mathématiciens de différents pays (dont le Brésil, les États-Unis et Singapour) ont déjà fait des dons. La Fondation Total a également offert en 2010 une somme substantielle qui va permettre d'entreprendre la réfection de la toiture afin d'éviter les risques d'éboulement de cet élégant bâtiment qui témoigne du style d'origine de la bastide.

L'année suivante, en octobre 2008, eut lieu au CIRM un colloque en mémoire de Jean Morlet, intitulé « Continuous Wavelet Transforms and Morlet's Wavelets : 1978-2008 », qui fut organisé par Ginette Saracco, actuellement au Centre Européen de Recherche et d'Enseignement des Géosciences de l'Environnement (CEREGE) à Aix-en-Provence. Celui-ci donna lieu à la publication d'un compterendu, dont un exemplaire est disponible à la bibliothèque du CIRM, et à deux numéros spéciaux de la revue ACHA intitulés « Continuous Wavelet Transform in Memory of Jean Morlet » [27].

En conclusion, le CIRM a joué un rôle de médiateur en accueillant à partir de 1987 les chercheurs de différentes disciplines s'intéressant aux ondelettes et en permettant ainsi la fertilisation croisée entre mathématiques, statistiques, physique quantique, acoustique, traitement de signal et d'image, mécanique des fluides, analyse numérique, et nombre d'autres. Le CIRM a indéniablement joué dans la diffusion des ondelettes un rôle de catalyseur et d'accélérateur, ce qui est précisément sa vocation.



Maison Jean Morlet

Références

- [1] Haar A., 1910, Zur Theorie der orthogonalen Funktionsysteme, $\it Math.~Ann.,~69,~331-371$
- [2] Calderon A. P., 1964, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, *Studia Mathematica*, *XXIV*(2), 113-190
- [3] Balian R., 1981, Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique, C. R. Acad. Sci. Paris, 292(2), 1357-1361
- [4] Morlet J., Arens G., Fourgeau E., Giard D., 1982, Wave propagation and sampling theory Part I: Complex signal and scattering in multilayered media Part II: Sampling theory and complex waves, Geophysics, 47(2), 203-236
- [5] Goupillaud P., Grossmann A., Morlet J., 1984, Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis, *Geoexploration*, 23(1), 85-102
- [6] Goupillaud P., Grossmann A., Morlet J., 1984, Cycle-octave representation for instantaneous frequency-spectra, *Geophysics*, 49(5), 669-669
- [7] Grossmann A., Morlet J., 1984, Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM J. Math. Anal.*, 15(4), 723-736

SMF - Gazette - 131, janvier 2012



Maison Jean Morlet

- [8] Meyer Y., 1985-1986, Principe d'incertitude, bases Hilbertiennes et algèbres d'opérateurs, *Séminaire N. Bourbaki, Astérisque (SMF), 662, 209-223*
- [9] Daubechies I., Grossmann A., Meyer Y., 1986, Painless nonorthogonal expansions, *J. Math. Phys.*, 27(5), 1271-1283
- [10] Lemarié P. G., Meyer Y., 1986, Ondelettes et bases Hilbertiennes : Hommage à A. P. Calderon, *Rev. Mat. Iberoamericana*, *2*, *1-18*
- [11] Kronland-Martinet R., Morlet J. and Grossmann A., 1987, Analysis of sound pattern through wavelet transforms, *Int. J. Pattern Recogn. and Artif. Intell.*, 1(2), 273-301
- [12] Tchamitchian P., 1987, Biorthogonalité et théorie des opérateurs, *Revista Mathematica Iberoamericana*, 3(2), 163-189
- [13] Jaffard S., Rioul O., Meyer Y., 1987, L'analyse en ondelettes, *Pour la Science, Septembre 1987, 28-37*
- [14] Daubechies I., 1988, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, Comm. in Pure and Applied Math., 41(7), 909-996

SMF - Gazette - 131, janvier 2012

- [14] Mallat S., 1989, A Theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation, *IEEE Trans. on Pattern Anla. and Machine Intell.*, 11(7), 674-693
- [16] Combes J.M., Grossmann A., Tchamitchian P., eds., 1989, Wavelets, time-frequency methods and phase space, *Springer*
- [17] Lemarié P. G., ed., 1989, *Les ondelettes en 1989*, Lecture notes in Mathematics, vol. 1438, Springer
- [18] Meyer Y., 1990, Ondelettes et opérateurs- Volume I : Ondelettes Volume II : Opérateurs de Calderon-Zygmund, Hermann
- [19] Farge M. et Meyer Y., 1990, Les ondelettes, *Journée Annuelle de la SMF, 5 Mai 1990*
- [20] Meyer Y., ed., 1991, Wavelets and applications, Masson et Springer
- [21] Coifman R. and Ruskai B., eds., 1992, Wavelets and their applications, Jones and Bartlett
- [22] Cohen A., Daubechies I., Feauveau J.-C., 1992, Biorthogonal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.*, 45(5), 485-560
- [23] Roques S., Meyer Y., eds., 1992 *Progress in wavelet analysis and applications* Éditions Frontières
- [24] Daubechies I., 1992, Ten lectures on wavelets, SIAM
- [25] Chui C., 1992, An introduction to wavelets, « Wavelet analysis and its applications », vol. 1, Academic Press
- [26] Farge M., Hunt J. and Vassilicos C., eds., 1993, Wavelets, fractals and Fourier transforms: New developments and new applications, Institute of Mathematics and its applications conference series, vol. 43, Oxford University Press
- [27] Saracco G., Arneodo A., Beylkin G.,, eds., 2010, Special Issue on Continuous Wavelet Transform in Memory of Jean Morlet, *Appl. Comput. Harm. Anal.*, 28(2-3), 129-346

Complément de lecture en français

- [28] Cohen A., 1992, Ondelettes et traitement numérique du signal, Masson
- [29] Farge M. et Jaffard S., 1993, *Les ondelettes*, La Science au Présent, Encyclopedia Universalis, tome 1, 189-190
- [30] Burke Hubbard B., 1995, Ondes et ondelettes La saga d'un outil mathématique, Belin
- [31] Kahane J.-P. et Lemarié-rieusset P. G., 1998, Série de Fourier et ondelettes, Cassini
- [32] S. Mallat, 2000, *Une exploration des signaux en ondelettes*, Les Éditions de l'École Polytechnique
- [33] A. Cohen, 2011, *Sur la route des ondelettes*, Gazette des Mathématiciens, 130,19-36

Remerciements

Nous voudrions remercier la famille de Jean Morlet, Jacqueline, Magali et Corinne Morlet, ainsi qu'Albert Cohen, Matthias Holschneider, Stéphane Mallat et Peppino Terpolilli pour les précisions qu'ils nous ont apportées lors de la rédaction de ce texte.

Qu'est-ce qu'un corps?

Un *corps* est un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication, et de deux éléments distincts 0 et 1, qui vérifient les propriétés suivantes :

- pour tous a et b, a + b = b + a (commutativité de l'addition);
- pour tous a, b et c, (a+b)+c=a+(b+c) (associativité de l'addition);
- pour tout a, a+0=a; pour tout a, il existe un unique élément b tel que a+b=0 (on le note -a);
 - pour tous a, b et c, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$;
- pour tout a, $a \times 1 = a$; pour tout $a \neq 0$, il existe un unique élément b tel que $a \times b = 1$ (on le note 1/a);
- pour tous a, b et c, $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ (distributivité de la multiplication sur l'addition).

La soustraction est alors définie par la formule a-b=a+(-b), la division par un élément non nul par la formule $a/b=a\times (1/b)$. Pour tout $a,\ a\times 0=0$, $a\times (-1)=-a$, etc.

Comme exemples de corps, il faut citer l'ensemble des nombres rationnels — c'est le calcul des fractions qu'on apprend à l'école élémentaire — ainsi que ceux des nombres réels et complexes. Ces trois corps sont infinis — ils contiennent une infinité d'éléments (par exemple 1, 2, 3, etc.)

On peut faire de l'ensemble $\{0,1\}$ un corps avec les lois d'addition et de multiplication données par les tables

où seule la formule 1+1=0 n'est pas explicitement forcée par les axiomes ci-dessus. C'est donc un corps à deux éléments; l'importance pratique que l'informatique a donné à la numération binaire le rend fondamental.

Plus généralement, si n est un entier $\geqslant 2$ on peut tenter de munir l'ensemble $\{0,1,\ldots,n-1\}$ d'une structure de corps en disant que la somme (le produit) de deux éléments est le reste de la division par n de leur somme (de leur produit). Cela en fait un anneau: la seule propriété qui manque est l'existence d'un inverse pour tout élément autre que 0. Lorsque (et seulement lorsque) n est un nombre premier, c'est un corps que Carl Friedrich Gauss avait étudié en grand détail dans ses Disquisitiones Arithmeticae (1798).

De Galois aux corps finis¹

Antoine Chambert-Loir²

Le 25 octobre 2011 marque le bicentenaire de la naissance d'Évariste Galois. Les découvertes du fougueux jeune homme, notamment sur les structures algébriques nommées corps finis, ont profondément marqué les mathématiques.

Cet automne, les mathématiciens célèbrent le 200^e anniversaire de la naissance d'Évariste Galois. Au cours de sa brève et tumultueuse vie, ce mathématicien prodigieux, dont l'œuvre tient pourtant en à peine 60 pages, a fait plusieurs découvertes fondamentales relatives à la théorie des équations polynomiales. En particulier, on lui doit l'émergence des notions de groupe et de corps fini, des structures algébriques qui jouent aujourd'hui un rôle crucial dans de nombreux domaines des mathématiques et de leurs applications.

Le 200e anniversaire de la naissance de Galois offre l'occasion de revenir sur ces travaux qui ont marqué l'histoire des mathématiques et dont la postérité reste bien vivante. Nous passerons ainsi des équations polynomiales aux équations en congruence, qui permettent d'introduire les corps finis, puis nous terminerons par l'une des applications de la théorie des corps finis, le cryptage dit asymétrique.

Commençons par les équations polynomiales. Les équations qui nous intéressent ici ont une seule inconnue, qui représente un nombre et que nous noterons x. Elles prennent la forme d'une relation mettant en jeu des sommes de puissances entières et positives $(x, x^2, x^3, etc.)$ de ce nombre. La plus grande puissance qui apparaît dans l'équation est le « degré » de l'équation.

Les équations polynomiales de degré 1 sont élémentaires. Un exemple est l'équation 3x - 5 = 0, dont la solution s'obtient en faisant passer le terme constant (ici, 5) dans le second membre et en divisant l'équation par le coefficient de x (ici, 3). On trouve ainsi la solution x = 5/3.

1. Existe-t-il une formule pour la solution?

En degré 2, l'équation prend la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont trois paramètres, avec $a \neq 0$; un exemple d'une telle équation est $x^2 - x - 1 = 0$ (dont une des deux solutions est le nombre d'or). On sait résoudre toutes les équations de degré 2 depuis environ quatre siècles; la solution générale est donnée par la formule $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$. Cette dernière est bien connue des lycéens, et

¹ Cet article reprend le texte, destiné à un public très large, qui est paru dans le numéro 408 d'octobre 2011 de la revue Pour la Science.

² Université Rennes 1.

l'on peut même dire qu'elle fait partie du patrimoine culturel ; on la trouve ainsi un peu partout dans les bandes dessinées de Marcel Gotlib, souvent en conjonction avec son personnage d'Isaac Newton. Par exemple, pour l'équation du nombre d'or, $x^2-x-1=0$, on trouve $x=(1\pm\sqrt{5})/2$; le nombre d'or lui-même est la racine positive de l'équation, c'est-à-dire $x=(1+\sqrt{5})/2$.

2. Nombres, équations, groupe de Galois

Pour la théorie des nombres, le cas où les coefficients a, b et c de l'équation sont des nombres entiers est le plus important; on voit que les solutions sont des nombres rationnels précisément dans le cas où le discriminant b^2-4ac est un carré parfait (le carré d'un entier). Lorsque le discriminant est négatif, cette solution fait apparaître des nombres qu'on avait, un temps seulement, qualifiés d'imaginaires (parce qu'un carré ne saurait être négatif), mais dont l'utilité est telle qu'ils ont rapidement acquis une place centrale en mathématiques et dans les sciences en général. On les nomme aujourd'hui « nombres complexes », bien qu'une fois passée la surprise de leur découverte, leur maniement n'ait rien de si complexe.

Décidons d'introduire un nombre i tel que $i^2=-1$. C'est l'apanage des mathématiciens de pouvoir décréter ce genre de chose, qui ressemble au « Que la lumière soit! » de la Bible. Cependant, comme jadis, c'est là que les choses sérieuses commencent : il faut s'assurer que l'on n'a ni créé un chaos absolu ni tout envoyé dans le néant. Que peut-on faire avec une telle racine « imaginaire » de -1? On peut considérer des nombres de la forme x+yi (où x et y sont des nombres réels) et les additionner : la somme de x+yi et de x'+y'i est égale à (x+x')+(y+y')i. On peut aussi les multiplier : en développant le produit (x+yi)(x'+y'i) des deux nombres précédents, on trouve qu'il est égal à $xx'+(yx'+xy')i+yy'i^2$, c'est-à-dire à (xx'-yy')+(yx'+xy')i puisque $i^2=-1$.

Autrement dit, l'ensemble des nombres de la forme x + yi est stable par addition et multiplication; il est aussi stable par soustraction, et l'on peut aussi diviser par un nombre de cette forme, sauf si x = y = 0.

Pourquoi l'introduction des nombres complexes est-elle cruciale en mathématiques et dans beaucoup d'autres domaines scientifiques ? Parce qu'une propriété fondamentale des équations polynomiales leur est liée : toute équation polynomiale, à coefficients réels ou complexes, possède exactement autant de solutions que son degré (supposé au moins égal à 1). J'insiste : avec les nombres réels, usuels, il existe des équations très simples sans solutions, par exemple $x^2+1=0$ (dont les solutions seraient des racines carrées de -1), mais dès qu'on introduit cette racine carrée de -1 notée i, toutes les équations polynomiales ont des solutions.

Le problème persiste, en revanche, de trouver des formules pour ces solutions. En degrés 3 et 4, il existe des formules analogues à celle dont on dispose pour le degré 2, qu'ont découvertes au XVI^e siècle les mathématiciens italiens Jérôme Cardan, Tartaglia (surnom de Niccolo Fontana), Ludovico Ferrari. Mais elles sont plus compliquées et font intervenir des racines cubiques et quartiques (du quatrième ordre).

Au XIX^e siècle, le mathématicien norvégien Niels Abel découvrit que les racines de certaines équations du cinquième degré ne peuvent pas être calculées par des

formules générales semblables. L'un des apports les plus connus de Galois est d'avoir compris pourquoi il en était ainsi.

Une équation polynomiale étant donnée, Galois introduisit le groupe formé par les permutations de ses « racines » (ses solutions) qui préservent les relations algébriques satisfaites par ces racines. Cela signifie que si l'on a, par exemple, deux racines a et b vérifiant $a+b^2=1$, leurs images a' et b' par une permutation du groupe doivent aussi satisfaire $a'+(b')^2=1$. Ce groupe est aujourd'hui appelé le « groupe de Galois » de l'équation considérée.

Galois prouva que l'on peut calculer les solutions d'une équation polynomiale à l'aide de radicaux si et seulement si le groupe de Galois de l'équation possède une certaine propriété technique, nommée « résolubilité » en référence à ce résultat. Si le groupe n'est pas résoluble, il est impossible d'exprimer les solutions de l'équation à l'aide d'une formule construite avec des radicaux.

3. Des congruences aux corps finis

Abordons maintenant une autre découverte importante de Galois : les corps finis, que les Anglo-Saxons nomment d'ailleurs *Galois fields*. Cette découverte fait l'objet d'une petite note d'une dizaine de pages parue en 1830 et intitulée *Sur la théorie des nombres*. D'une certaine façon, Galois se proposait de combiner la théorie des équations polynomiales avec celle des congruences. Rappelons ce qu'est cette dernière.

Parmi les plus anciens ouvrages de mathématiques figure le Sunzi Suangjing, texte chinois du V^e siècle environ, où l'on trouve le problème suivant : « Nous avons un nombre inconnu de choses. Si nous les comptons par trois, il en reste deux ; si nous les comptons par cinq, il en reste trois, si nous les comptons par sept, il en reste deux. Trouver le nombre de ces choses. »

Appelons x l'inconnue; c'est un nombre entier et la phrase centrale du problème affirme que x est égal à 2 plus un multiple (indéfini) de 3, à 3 plus un multiple de 5, et à 2 plus un multiple de 7. On résume ces égalités, à un multiple près de 3, 5 ou 7, par le mot « congruence ». En d'autres termes, on dit que x est congru à 2 modulo 3, à 3 modulo 5, et à 2 modulo 7, ce que l'on écrit $x\equiv 2\pmod{3}$, $x\equiv 3\pmod{5}$, $x\equiv 2\pmod{7}$. Les entiers 3, 5 et 7 sont les « raisons » de ces congruences.

4. Une chinoiserie?

Le *Sunzi Sunangjing* explique comment résoudre ces congruences, c'est-à-dire comment trouver les entiers x qui les vérifient. Ce « théorème des restes chinois », comme on le nomme parfois, dit d'ajouter 2×70 , 3×21 et 2×15 (cela fait 140+63+30=233) et de soustraire 105 tant que le résultat est supérieur à 106. Dans cette formule, 70, 21 et 15 ont été choisis parce que 70 est multiple de 5 et de 7 ($70=2\times5\times7$) et est congru à 1 modulo 3 (car $70=1+69=1+3\times23$), 21 est multiple de 3 et de 7 et est congru à 1 modulo 5, 15 est multiple de 3 et de 5 et est congru à 1 modulo 5. En outre, $105=3\times5\times7$. Dans cet exemple, on trouve donc que x est congru à 23 modulo 105: trois congruences modulo les nombres premiers 3, 5 et 7 ont été transformées en une seule congruence ayant pour raison le produit $105=3\times5\times7$ de leurs raisons.

Le développement de l'algèbre a permis de comprendre que, dans le calcul des congruences, on peut négliger complètement le multiple indéfini et calculer comme si la raison était nulle. Par exemple, modulo 13, on a $6\equiv -7$ puisque $6-(-7)=13\equiv 0$; de même, $5\times 7\equiv 35\equiv 3\times 13-4\equiv -4$. On peut aussi résoudre des équations en congruences; examinons par exemple la congruence $3x-5\equiv 0\pmod 7$; si l'on multiplie l'équation par 2, on trouve $6x-10\equiv 0\pmod 7$. Mais $6\equiv -1\pmod 7$ et $-10=-14+4\equiv 4\pmod 7$, si bien que l'équation devient $-x+4\equiv 0\pmod 7$, d'où $x\equiv 4$. Inversement, si $x\equiv 4$, $3x\equiv 12\equiv 5\pmod 7$.

Il y a en revanche quelques subtilités nouvelles. Par exemple, 2 et 3 ne sont pas multiples de 6 (ils ne sont pas nuls modulo 6), mais leur produit l'est. Autrement dit, le produit de deux nombres peut être nul (en congruence) sans qu'aucun d'eux ne le soit.

Ce phénomène d'apparence pathologique — un produit égal à zéro alors que les facteurs sont non nuls — ne se présente pas lorsque la raison est un nombre premier, c'est-à-dire un entier positif divisible seulement par 1 et par lui-même. En effet, d'après un résultat d'Euclide, le produit de deux entiers ne peut être multiple d'un nombre premier p sans qu'au moins l'un des deux ne le soit. Pour cette raison, les congruences modulo p, où p est un nombre premier, sont les plus fondamentales en mathématiques.

Ainsi, avec le développement de la théorie des équations et celui de la théorie des nombres, est née peu à peu une théorie des équations polynomiales modulo un nombre premier. Le grand mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss avait lui-même largement étudié ce sujet dans lequel, comme le dit Galois lui-même, il s'agit de résoudre une équation en considérant que tout multiple d'un nombre premier donné est nul.

Par exemple, comment résoudre l'équation du nombre d'or, $x^2-x-1=0$, modulo la raison 7 ou modulo la raison 11? On peut commencer par raisonner comme en algèbre classique. Modulo 7, on peut écrire : $0=x^2-x-1\equiv x^2-8x-1\equiv (x-4)^2-17\equiv (x-4)^2-3\pmod{7}$; s'il existe une solution entière x de cette congruence, il faut que 3 soit un carré modulo 7; or les carrés modulo 7 sont $0, 1, 2^2=4, 3^2=9\equiv 2, 4^2\equiv (-3)^2\equiv 2, 5^2\equiv (-2)^2\equiv 4$ et $6^2\equiv (-1)^2\equiv 1$. On constate en particulier que 3 n'est pas un carré modulo 7 et cette équation en congruence n'a donc pas de solution.

Modulo 11, on écrit plutôt : $0=x^2-x-1\equiv x^2-12x-1\equiv (x-6)^2-37\equiv (x-6)^2-4\pmod{11}$. Par conséquent, $(x-6)^2\equiv 4\equiv 2^2$, d'où l'on déduit (comme d'habitude!) que $x-6=\pm 2$. On trouve ainsi deux solutions modulo 11, à savoir x=4 et x=8.

5. Équations polynomiales et congruences

Alors que ses prédécesseurs s'étaient contentés de chercher les solutions entières de congruences polynomiales, Galois s'est intéressé aux espèces de nombres complexes (ou, comme il dit, aux « quantités imaginaires ») que l'on peut définir à partir d'une congruence polynomiale, de la même façon qu'on avait créé les nombres complexes à partir d'une solution « imaginaire » de l'équation $x^2+1=0$.

Galois considère donc une raison, qui est un nombre premier p et, un polynôme arbitraire F(x) de degré d et à coefficients entiers. Il fait deux hypothèses sur ce polynôme F(x): d'une part, que le coefficient de x^d ne soit pas un multiple

de p et, d'autre part, qu'on ne puisse pas factoriser F modulo p, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de polynômes F_1 et F_2 tels que $F \equiv F_1F_2 \pmod{p}$. Galois dit que la congruence $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$ est « irréductible ». Par exemple, si p=13, on ne peut pas prendre $F=x^2+1$, car $x^2+1\equiv (x-5)(x-8)\pmod{13}$, mais on peut vérifier que le choix p=11 et $F=x^2+1$ convient; il en est de même du choix p=13 et $F=x^2-2$, ou encore p=7 et $F=x^2-x-1$.

Nous avions introduit un symbole i pour désigner une racine de l'équation $x^2+1=0$ et vu que l'on pouvait calculer naturellement avec lui. Faisons de même ici : traitons la lettre x, non plus comme une inconnue, mais comme une solution de la congruence $F(x)\equiv 0\pmod p$. Cela donne lieu à un ensemble de p^d « nombres » : tous ceux de la forme : $a_0+a_1x+...+a_{d-1}x^{d-1}$, où $a_0...,a_{d-1}$ sont des entiers compris entre 0 et p-1 (il y a p choix pour chacun des d coefficients, d'où p^d nombres distincts). Ces nombres peuvent être additionnés (on additionne les coefficients de type a_0 , ceux de type a_1 , etc., en soustrayant p si leur somme dépasse p), ou soustraits. De façon peut-être plus surprenante, on peut aussi les multiplier : si l'on développe le produit de deux nombres de la forme $a_0+a_1x+...+a_{d-1}x^{d-1}$, on voit apparaître des puissances de x avec un exposant qui peut dépasser d-1; mais la congruence $F(x)\equiv 0\pmod p$ permet de remplacer x^d par un nombre admissible, x^{d+1} aussi, etc.

Par exemple, si $x^3+2x-1\equiv 0\pmod 5$, alors $x^4+2x^2-x\equiv 0$, et par conséquent $x^4\equiv -2x^2+x\equiv 3x^2+x\pmod 5$. On en déduit que $x^5\equiv 3x^3+x^2\equiv 3(3x+1)+x^2\equiv x^2+9x+3\equiv x^2+4x+3\pmod 5$, etc. Enfin, et c'est là qu'intervient l'hypothèse que la congruence $F(x)\equiv 0$ est irréductible, on peut aussi diviser par tout nombre différent de 0.

On obtient ainsi un ensemble de p^d nombres avec lesquels on peut calculer de façon naturelle : addition, soustraction, multiplication, division par tout élément non nul, ces opérations obéissant aux règles usuelles (commutativité, associativité de l'addition et de la multiplication, distributivité de la multiplication sur l'addition). C'est un exemple de ce qu'on appelle en mathématiques un corps (voir l'encadré page 58); et comme il n'a qu'un nombre fini d'éléments, on dit que c'est un corps fini.

Dans sa note, Galois explique ensuite un certain nombre des propriétés de ces corps finis. Il commence par démontrer que dans un corps fini ayant p^d éléments, tout élément a vérifie $a^{(p^d)} = a$; cela généralise la congruence classique, dénommée « petit théorème de Fermat », selon laquelle $a^p \equiv a \pmod{p}$ pour tout entier aet tout nombre premier p. Il démontre aussi qu'il existe une « racine primitive » de cette équation $a^{(p^d)} = a$, autrement dit un élément non nul a tel que la suite $0, 1, a, a^2, ..., a^{(p^d-2)}$ décrive exactement le corps fini. Pour construire un corps fini de « cardinal » pd, c'est-à-dire ayant p^d éléments, par la méthode expliquée par Galois, il faut partir d'un polynôme F de degré d qui est irréductible modulo p. Galois explique alors qu'un tel polynôme est un facteur modulo p du polynôme $x^{(p^d)} - x$. Peu après, le mathématicien et astronome français Joseph Serret a démontré que l'on peut effectivement trouver un tel facteur, de sorte que, pour chaque puissance p^d d'un nombre premier p, il existe un corps fini de cardinal p^d . Et ce corps est même unique au sens où, pour deux corps finis de même cardinal (obtenus par exemple en suivant la construction de Galois pour deux polynômes F_1 et F_2), on a un dictionnaire reliant un à un les éléments des deux corps qui est compatible avec les règles de calcul (les mathématiciens disent que les deux corps sont isomorphes).

6. Des corps finis à la cryptographie

Dans les décennies qui ont suivi la note de Galois, plusieurs mathématiciens ont complété les travaux de Galois et formalisé la notion de corps telle qu'elle est présentée dans l'encadré page 58. À la mort de Gauss, en 1855, on a retrouvé un huitième chapitre de ses *Disquisitiones*, qu'il avait écrit en 1797 mais qui n'a été publié par le mathématicien allemand Richard Dedekind qu'en 1863. Dans ce texte, Gauss développait une théorie très proche de celle que Galois avait inventée.

La théorie des corps finis a rapidement montré son importance pour les mathématiques. C'en est aujourd'hui un outil crucial, y compris dans des domaines qui, à première vue, semblent ne pas relever de l'arithmétique tels que la théorie des fonctions automorphes et le programme de Langlands (un grand ensemble de conjectures techniques liant algèbre, théorie des fonctions et théorie des nombres).

Les corps finis sont aussi au cœur des télécommunications modernes et des mécanismes intimes du réseau Internet, en particulier dans tout ce qui touche à la sécurité du commerce électronique. Lorsque vous achetez en ligne un livre, un disque ou un appareil photo, vient inévitablement le moment du paiement où il vous faut transmettre votre numéro de carte bancaire. Évidemment, vous aimeriez être certain qu'aucune personne non autorisée ne puisse obtenir ce numéro et l'utiliser à son profit. On est ainsi face à un problème classique de cryptographie : transmettre un message à son destinataire, et que seul ce dernier puisse en avoir connaissance.

Jusque vers 1975, les seuls procédés connus de cryptographie étaient symétriques. L'émetteur et le destinataire conviennent d'un code secret, lequel sert aussi bien à coder un message qu'à le décoder. Dans sa *Vie des douze Césars*, l'historien romain Suétone écrivait à propos de Jules César qu'il « y employait, pour les choses tout à fait secrètes, une espèce de chiffre qui en rendait le sens inintelligible (les lettres étant disposées de manière à ne pouvoir jamais former un mot), et qui consistait, je le dis pour ceux qui voudront les déchiffrer, à changer le rang des lettres dans l'alphabet, en écrivant la quatrième pour la première, c'est-à-dire le *d* pour le *a*, et ainsi de suite ». Comme le suggère très bien Suétone, si vous savez comment Jules César procède pour coder un message, vous êtes aussitôt en mesure de déchiffrer un message qu'il a écrit, même si vous n'en êtes pas le destinataire.

Un tel mécanisme n'est pas très utile pour le commerce en ligne puisqu'un site Web ne peut pas matériellement prendre contact avec tous ses clients potentiels et convenir, avec chacun d'entre eux, d'un tel code secret. En 1976, les Américains Whitfield Diffie, Martin Hellman et Ralph Merkle proposèrent un nouveau type de procédé, nommé aujourd'hui cryptographie asymétrique.

Dans ce schéma, n'importe qui est capable de coder des messages, mais seul son destinataire peut les décoder. Pour cela, le destinataire dispose de deux clefs; l'une est connue de tous et permet de coder les messages, tandis que l'autre, qui permet de décoder les messages, est gardée secrète. En 1978, au mit, Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman inventèrent un tel protocole, appelé depuis rsa et très largement utilisé aujourd'hui, y compris dans des consoles de jeu.

Du point de vue mathématique, on peut penser à la cryptographie comme à deux ensembles de symboles, celui des messages et celui des messages codés (un message étant alors une suite de symboles), et à deux applications, l'une qui transforme un symbole en un symbole codé et l'autre qui transforme un symbole codé en un symbole en clair. Dans le schéma de Jules César, les deux ensembles sont les lettres de l'alphabet (latin); la fonction qui code un message décale les lettres de trois crans vers la gauche, celle qui décode les décale de trois crans vers la droite.

Pour obtenir un protocole asymétrique pratique et fiable, il faut que la fonction de codage soit facile à calculer, mais qu'au contraire la fonction de décodage soit difficile à calculer si l'on ignore le code secret, même si l'on connaît la fonction de codage. Dans le cas d'une généralisation du chiffre de César où l'on permuterait les lettres d'une façon plus subtile qu'un simple décalage, il suffirait de 24 essais (le nombre de lettres de l'alphabet latin) pour savoir à quelle lettre correspond une lettre chiffrée. Cela prendrait donc juste un peu plus de temps de déchiffrer un message que de le crypter.

Mais lorsque l'ensemble des messages est très grand $(10^{100}$ éléments, par exemple), il devient impossible de coder tous les messages possibles en espérant tomber sur un message chiffré donné : cela prendrait plus de temps que la durée de vie du Système solaire!

Face à ce problème, l'algèbre est potentiellement très utile, car se donner une formule est une façon très économique de définir une application, même entre ensembles gigantesques, et les corps finis fournissent de façon naturelle de tels ensembles tout en étant très faciles à construire.

7. La théorie de Galois

La théorie de Galois irrigue une grande partie des mathématiques d'aujourd'hui, de la théorie des nombres à celle des équations différentielles.

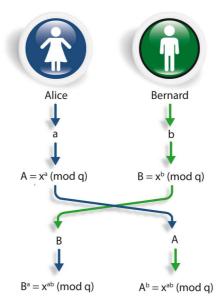
Dans cet ordre d'idées, expliquons comment, suivant W. Diffie et M. Hellman, deux individus, que nous appellerons Alice et Bernard, peuvent convenir d'un code secret même si Charles espionne leur conversation.

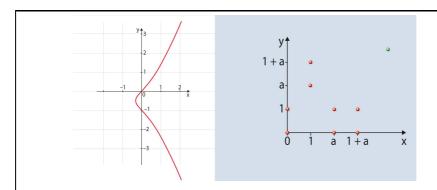
Pour cela, nos deux amis choisissent un corps fini, de cardinal q, ainsi qu'une racine primitive x (c'est-à-dire un élément x tel que la suite $0,1,x,x^2,...,x^{q-2}$ décrive tous les éléments du corps).

Alice et Bernard commencent par choisir chacun un nombre entier compris entre 1 et q-1, sans le divulguer. Supposons qu'Alice ait choisi l'entier a et que Bernard ait choisi l'entier b. Alice communique alors à Bernard la valeur de x^a , tandis que Bernard communique à sa correspondante la valeur de x^b . Il est important de remarquer que, bien que x^a soit défini comme le produit de a facteurs égaux à a, un tel produit peut être calculé très rapidement. Alice calcule alors a0 dans le corps fini, et Bernard calcule a1 Ainsi, les deux ont pu calculer l'élément a3 du sera leur secret commun (voir la figure ci-dessous).

Imaginons que Charles ait espionné tout l'échange entre Alice et Bernard; il connaît donc x, x^a et x^b . L'efficacité du système repose sur le fait que personne ne sait efficacement calculer x^{ab} à partir de ces données. Une solution consisterait à retrouver la valeur de a; c'est ce qu'on appelle le problème du « logarithme discret », a étant en quelque sorte le logarithme en base x de x^a . La méthode évidente pour ce faire consiste à calculer successivement x^2 , x^3 , etc., jusqu'à ce

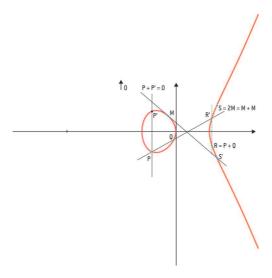
qu'apparaisse la valeur x^a ; mais, si a est choisi très grand, elle n'a aucune chance d'aboutir avant l'extinction du Soleil... Il existe cependant d'autres méthodes, plus subtiles et un peu plus efficaces. Pour que le système de communication secrète soit sûr, l'existence de ces méthodes impose que q-1 ait au moins un facteur premier de très grande taille.





L'équation d'une courbe plane est de la forme f(x,y)=0, à l'instar de l'équation $y^2+y=x^3+x^2+x$ de la courbe elliptique ci-dessus. Mais une telle équation peut aussi être considérée dans un corps fini, et non sur le corps des nombres réels. Ainsi, dans le corps à 4=22 éléments (p=2,d=2) formés par les polynômes 0, 1, a et 1+a (où l'on a 1+1=0 et $a^2=a+1$), la courbe elliptique considérée possède huit points (graphe ci-dessus) en plus du point 0 à l'infini.

L'addition dans une courbe elliptique



courbes elliptiques, Les qui n'ont pas du tout la forme d'une ellipse, ont été nommées ainsi parce que leurs équations ont un lien avec le calcul de la longueur d'arcs d'ellipses. Une courbe elliptique E est définie par une équation cubique qui peut être mise sous la forme $y^2 = x^3 + ux + v$, où *u* et *v* sont des nombres réels tels que $4u^3 + 27v^2$ soit non nul (sinon, la courbe a un point singulier).

Une particularité des courbes elliptiques est qu'on peut

définir une addition entre leurs points. L'addition de deux points P et Q d'une courbe elliptique E est définie ainsi : si la droite passant par P et Q rencontre la courbe en un troisième point R', le point R=P+Q est le symétrique de R' par rapport à l'axe (horizontal) de symétrie de la courbe. Si la droite passant par P et Q est verticale, on considère que R est à l'infini ; le point à l'infini est défini comme étant le Q de l'addition. Et quand Q est confondu avec Q0, la droite tangente à la courbe en Q0 définit le point Q1 est égale au point Q2 si et seulement, la somme de trois points Q3, Q4, Q5 est égale au point Q5 si et seulement si ces trois points sont alignés.

Muni de cette addition, l'ensemble des points de la courbe elliptique forme un groupe additif (structure algébrique munie d'une addition, supposée associative, où il existe un élément neutre noté 0 et où chaque élément a possède un inverse a' tel que a+a'=0).

Une courbe elliptique peut aussi être considérée sur un corps F différent de celui des nombres réels (voir l'encadré page 66). Dans ce cas, les paramètres u et v sont des éléments de F et le groupe E(F) des points de la courbe elliptique E est formé des solutions (x,y) de l'équation $y^2=x^3+ux+v$ considérée dans le corps F, auquel on adjoint un point à l'infini 0.

Signalons que les courbes elliptiques ont joué un rôle central dans la preuve par Andrew Wiles du « grand théorème de Fermat », selon lequel il n'existe pas d'entiers strictement positifs a, b, c tels que $a^n + b^n = c^n$ pour un entier n supérieur à 2.

On gagne un peu en sécurité et en souplesse en remplaçant le calcul dans un corps fini par un calcul dans une structure algébrique plus compliquée. L'une des méthodes en vue consiste à utiliser le groupe des points d'une courbe elliptique définie sur un corps fini (voir les encadrés page 67 et 66). En d'autres termes, on se donne un corps fini assez grand F, une courbe elliptique E définie par une équation dont les coefficients appartiennent à F et un point P de cette courbe (dont les coordonnées appartiennent à F). L'intérêt des courbes elliptiques est que l'on peut y définir une addition entre points. Comme précédemment, Alice et Bernard choisissent des entiers a et b, calculent l'une aP et l'autre bP; leur secret commun est le point (ab)P de la courbe E. De tels protocoles sont implantés dans tous les systèmes de télécommunications modernes et témoignent de l'actualité de l'oeuvre de Galois. Mais l'héritage de Galois est loin de se réduire au cryptage et au codage de données. Ce que l'on nomme aujourd'hui théorie de Galois est un édifice complexe qui irrigue une bonne partie des recherches mathématiques modernes, de la théorie des nombres à celle des équations différentielles, en passant par la géométrie algébrique et le programme de Langlands, dont la démonstration du célèbre théorème de Fermat constitue une retombée.

8. Bibliographie

- [1] N. VERDIER Galois, le mathématicien maudit, Belin-Pour la Science, 2011.
- [2] C. EHRHARDT, Évariste Galois, la fabrication d'une icône mathématique, Éditions de l'EHESS, à paraître, octobre 2011.
- [3] P. PESIC, Abel, Galois et les équations algébriques, Pour la Science, nº 366, avril 2008.
- [4] R. LANGLANDS, Le programme de Langlands, Pour la Science, n° 361, novembre 2007.
- [5] A. CHAMBERT-LOIR, Algèbre corporelle, Éditions de l'École Polytechnique, 2005.
- [6] L'art du secret, Dossier Pour la Science, nº 36, juillet-octobre 2002.

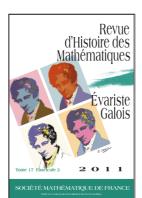
Galois, héros tragique des mathématiques



Évariste Galois, né le 25 octobre 1811 à Bourg-la-Reine, au sud de Paris, est mort à moins de 21 ans le 31 mai 1832, tué dans un duel auguel il n'avait pu se soustraire et ce. dans des circonstances obscures. Le duel était semble-t-il lié à une « infâme coquette et [...] deux dupes de cette coquette ». Galois s'intéresse dès l'âge de 16 ans aux mathématiques, qui deviendront l'une de ses passions, avec la politique. Mal préparé, il échoue deux fois au concours d'entrée à l'École polytechnique, la plus prestigieuse de l'époque. Il parvient toutefois à intégrer l'École préparatoire, avatar de ce qui était et redeviendra l'École normale supérieure. Mais il en est expulsé début 1831. Peu

après, il remet à l'Académie son mémoire « Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux ». Ce texte est d'abord égaré par l'Académie, puis rejeté par Sylvestre Lacroix et Denis Poisson, mathématiciens qui l'examinent sans le comprendre. L'œuvre mathématique de Galois restera dans l'ombre jusqu'à ce que Joseph Liouville, sollicité par le frère d'Évariste et par son ami Auguste Chevalier, la redécouvre et en comprenne la portée. Il la présente à l'Académie en 1843, et commence à la publier en 1846.

– Publicité – 69



Revue d'histoire des mathématiques

Numéro spécial «Évariste Galois» Tome 17, Fascicule 2

Ce numéro spécial «Évariste Galois» de la Revue d'histoire des mathématiques présente des recherches originales et actuelles d'histoire des mathématiques autour de l'œuvre d'Évariste Galois et de sa postérité, ou plutôt de ses postérités, principalement au XIXe siècle.

This special issue of Revue d'histoire des mathématiques offers the reader original research articles in the history of mathematics centred on the works of Évariste Galois and their posterity-or rather posterities-mainly concentrating on the nineteenth century.

Sommaire/Contents

Caroline Ehrhardt - Évariste Galois and the Social Time of Mathematics

Catherine Goldstein - Charles Hermite's Stroll through the Galois Fields

Frédéric Brechenmacher - Self-portraits with Évariste Galois (and the shadow of Camille Jordan)

Tom Archibald - Differential Equations and Algebraic Transcendents: French Efforts at the Creation of a Galois Theory of Differential Equations 1880-1910

Anne-Gaëlle Weber, Andrea Albrecht - Évariste Galois ou le roman du mathémati-

prix public* : 38 € - prix membre* : 27 € * frais de port non compris

> Société Mathématique de France





Institut Henri Poincaré 11 rue Pierre et Marie Curie F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

COOPÉRATION FRANCO-VIETNAMIENNE EN MATHÉMATIQUES

Bref état des lieux et perspectives

Lionel Schwartz

Ce texte a pour but de présenter un état des lieux de la coopération en mathématiques entre la France et le Vietnam. Celle-ci a une longue et riche tradition derrière elle que l'on évoquera brièvement. Le prix Clay puis la médaille Fields de Ngo Bao Chau l'ont « boostée » et elle entre dans une nouvelle phase qui sera décrite ci-dessous après un bref rappel historique. Le contexte a évolué ces dernières années, et ceci a été analysé en détails dans un colloque du COPED (Comité des pays en développement, Académie des Sciences) en juin 2010.

Les nouvelles formes prises par cette coopération sont, dans l'ordre où ils apparaîtront ci-dessous (qui n'est pas l'ordre chronologique) le LIA (laboratoire international associé) Formath Vietnam du CNRS (LIAFV dans la suite), les masters internationaux de Hanoi et Ho Chi Minh Ville, le Vietnam Institute of Advanced Studies in Mathematics (VIASM) fondé par Ngo Bao Chau, le congrès des sociétés savantes à venir en août 2012 à Hue.

Le système d'enseignement et de recherche au Vietnam a toujours entretenu, malgré les vicissitudes, des liens étroits avec le système français. Le pays a toujours eu un très bon niveau de formation de base en mathématiques. Dans les années 80 du siècle dernier, l'influence majeure sur les mathématiques vietnamiennes a été celle de l'école soviétique. Dans les années 1990 les collègues vietnamiens en France et les collègues français ont commencé à s'unir sous la bannière du PICS (programme international de coopération scientifique) « Formath Vietnam » du CNRS pour coordonner les multiples collaborations en mathématiques qui existaient entre les deux pays. Cela a été fait avec l'aide du CNRS, de l'AUF (agence universitaire de la francophonie), de l'Ambassade de France au Vietnam et de nombreuses universités.

Cette période est décrite dans deux références qu'il convient de citer ici : un texte de Pierre Cartier intitulé « mathématicien sans frontière » que l'on trouvera sur http://images.math.cnrs.fr/spip.php?page=recherche&reche=cartier et un très beau PowerPoint de Ngo Viet Trung, directeur de l'Institut de mathématiques de la VAST (Vietnamese Academy of Sciences and Technology) - présenté lors d'un colloque du COPED de l'Académie des Sciences en juin 2010. On le trouvera sur le lien http://www.math.ac.vn/algebra/nvtrung/Fund_math_viet.ppt On rappellera ici l'influence à long terme qu'ont eue les visites d'Alexandre Grothendieck et Laurent Schwartz à Hanoi dans les années difficiles,

ainsi que celles de Henri Van Regemorter et du CCSTVN (comité de coopération scientifique et technique avec le Vietnam).

Les premiers coordonnateurs des PICS côté français ont été Nguyen Thanh Van (Toulouse) et Frédéric Pham (Nice), puis Jean-Pierre Ramis (Toulouse). Les partenaires vietnamiens ont été divers, mais quatre institutions y ont joué un rôle majeur. Il s'agit de l'Institut de mathématiques du Vietnam (Vien Toan Hoc, section de la VAST) dont le directeur était Ha Huy Khoai, l'université pédagogique (Dai Hoc Su Pham, ou « Hanoi ENS ») avec Do Duc Thai, l'université des sciences naturelles de l'université nationale du Vietnam à Hanoï avec Dinh Dung et celle de Ho Chi Minh-Ville, enfin les Écoles Polytechniques de Hanoi et Ho Chi Minh Ville. Les actions des PICS ont été particulièrement actives à Hanoï, dans les universités du Nord et à l'université de Dalat dans le sud. À la suite du travail pionnier d'Alain Pham la coopération avec le Sud a pris un véritable essor depuis les années 2000. Et en ce qui concerne Ho Chi Minh-Ville, les relations avec la France avaient commencé dans les années 90 par des directions de thèses.

Comme il est dit dans le PowerPoint de Ngo Viet Trung, malgré des résultats substantiels, cette coopération (et celle avec d'autres pays) ne s'est pas avérée suffisante pour assurer le renouvellement des enseignants en mathématiques dans les universités. En outre la proportion de doctorants retournant au Vietnam a récemment fléchie, et ceux qui reviennent sont souvent accablés de charges administratives.

Le LIAFV

La convention portant création du laboratoire associé Formath Vietnam (LIAFV) a été signée par les différentes parties en octobre 2011. On la trouvera sur le lien http://www.math.univ-paris13.fr/FMV/ (ce site web est en cours d'évolution). Le LIAFV est un laboratoire « sans mur » qui est la continuation des PICS du même nom des années 90. Ces PICS s'étaient prioritairement centrés sur la formation des doctorants. Le LIAFV reprend cette priorité : il favorise par ses interventions l'encadrement de thèses d'étudiants vietnamiens, il soutient les masters « internationaux » de Hanoi et Ho Chi Minh Ville où sont pour une part recrutés ces doctorants. Il a aussi pour vocation de soutenir régulièrement séminaires et congrès où se rencontrent mathématiciens français et vietnamiens. Son rôle central est évidemment d'apporter un soutien aux collaborations entre les deux pays, de soutenir les coopérations existantes et d'en développer de nouvelles; et ceci en particulier en mathématiques appliquées. Les principales collaborations actuelles sont dans les domaines suivants : analyse et géométrie complexe, topologie, singularités, algèbre commutative et géométrie différentielle pour ce qui est des mathématiques fondamentales; EDP, optimisation, traitement d'images et mathématiques discrètes pour ce qui est des mathématiques appliquées. Un effort particulier est en cours sur les probabilités et statistiques. En ce qui concerne les applications des mathématiques, il faut ici rappeler que le laboratoire UMMISCO de l'IRD avec Pierre Auger a une antenne très active à Hanoï. Le LIAFV s'attachera à se coordonner avec ce laboratoire.

Les unités suivantes sont membres du LIAFV : l'Institut de Mathématiques de Toulouse, la Fédération Denis Poisson, le Laboratoire Analyse Applications Géométrie, Paris 13. Côté vietnamien l'institut de mathématiques de la VAST est

membre du LIAFV. Le LIAFV admet des membres associés, il a vocation à soutenir, selon ses moyens, toute coopération scientifique de qualité avec le Vietnam. Son comité scientifique reflète cette ouverture. Les coordinateurs scientifique du LIAFV en sont Le Tuan Hoa (VIASM, Hanoi) et Lionel Schwartz (université Paris 13).

Les Masters

Le rôle des masters dans le recrutement des étudiants en thèse n'a pas besoin d'être souligné. Deux masters, dans lesquels des enseignants français interviennent, jouent un rôle particulièrement important à ce propos. Le master international de Hanoi (MIM) et celui de Ho Chi Minh Ville (anciennement du Pôle Universitaire français). On va décrire la situation de celui de Hanoi, et très brièvement celle de celui de Ho Chi Minh Ville. Un article à part lui est consacré dans ce numéro de la Gazette

Le MIM (master international de mathématiques de Hanoi) a fonctionné jusque cette année suivant le schéma suivant : les étudiants sont sélectionnés au terme d'un « M0 » et suivent la première année du M1 à Hanoi. Certains des enseignements sont faits par des enseignants français et allemands. La liste des intervenants apparaît sur le site du LIAFV. Les étudiants sélectionnés au terme du M1 vont suivre le M2 en France (ou en Allemagne, la majorité venant en France) dans une université partenaire. Les universités suivantes ont signé une convention « d'accueil » : Rennes, Strasbourg, Nice, Paris 6, Paris 11, Paris 13, Limoges, Marseille, Grenoble. Ces étudiants bénéficiaient jusque cette année d'une bourse, dite 322, du gouvernement vietnamien. La première génération d'étudiants de cette filière est arrivée en France en 2007. Le flux d'étudiants a été de 12 à 15 par an. Les étudiants sont principalement allés à Paris Centre, Paris 13, Marseille, Toulouse, Limoges, Strasbourg. Au terme du M2 à peu près 50% ont obtenu des allocations (Paris Centre, Paris 13, Marseille, Toulouse, Limoges), et les premières thèses doivent être soutenues cette année.

Ce master arrive à son terme sous cette forme cette année ; en effet le programme « 322 » qui donnait les bourses vietnamiennes de M2 aux étudiants se termine. Il doit être remplacé par un nouveau programme, appelé « 911 ». Ce nouveau programme prévoit des bourses de thèses sous divers régimes : thèses entièrement au Vietnam, thèses « sandwich », thèses entièrement à l'étranger. Malheureusement il ne prévoit pas de bourses de M2. Afin de faire face à cette difficulté, le master MIM sous sa forme actuelle va disparaître. Plusieurs pistes (complémentaires) sont envisagées pour sa relève. Toutes ces pistes conservent un M1 à Hanoi avec une intervention d'enseignants français plus réduite. À la sortie du M1 deux options sont envisagées :

- les meilleurs étudiants postulent sur des bourses de M2 en France, éventuellement ils viennent faire des stages (de M1) de 2 mois en France pour bien assurer leur intégration ultérieure en M2. Après un M2 en France ils peuvent postuler sur une allocation ou une bourse « $911\, \rm \gg$. Toute suggestion pour trouver les bourses de M2 en France est évidemment bienvenue, divers mécanismes mis en place ces dernières années pourrait être utiles à cet égard ;
- un M2 à Hanoi avec une intervention plus forte d'enseignants français (entre autres), le stage de M2 pouvant être organisé en France, cette dernière option a

un coût bien moindre que celui d'une bourse complète. Au terme de ce M2 les étudiants sélectionnés auront vocation à postuler sur des bourses $\ll 911$ ».

Des discussions sont en cours pour mettre en place ce nouveau dispositif.

Le master de Hô Chi Minh-Ville a lui débuté au niveau M2 en 2006. Il faisait partie du Pôle Universitaire Français (PUF) à Ho Chi Minh Ville et se déroule à l'université des sciences naturelles. C'est un M2 « Analyse Mathématique et Applications », co-habilité entre les universités d'Orléans et Tours, délocalisé à Ho Chi Minh Ville. Ce master se propose de développer les mathématiques appliquées au Vietnam dans leur version moderne de la modélisation et au contact avec d'autres disciplines ou de l'industrie. Des enseignants français donnent cinq cours au premier semestre, un sixième est donné par la partie vietnamienne. Les meilleurs étudiants viennent en France au second semestre réaliser leur stage. Ce master a maintenant établi un partenariat avec l'École Polytechnique et Paris 13. Dans la mesure où il fait l'objet d'un bilan très détaillé par ailleurs on ne s'y étendra pas ici. On signalera seulement que les premières thèses d'étudiants qui en sont issus ont été soutenues. Le soutien du PUF révolu, ce master reçoit dorénavant, pour les missions des enseignants français, un soutien du gouvernement vietnamien.

Parallèlement à ces deux masters, plusieurs universités et écoles ont une tradition d'accueil d'étudiants vietnamiens; par exemple, Polytechnique a un accord avec l'université Nationale du Vietnam à Hanoi et reçoit chaque année des étudiants de sa classe d'excellence dans le master Paris 11-Polytechnique.

Il ressort de ce qui a été dit plus haut que le flux d'étudiants vietnamiens en doctorat en France a augmenté de façon significative. Le congrès de lancement du LIAFV qui s'est déroulé à Paris 13 et Paris 7 les 23-24-25/11 en a été l'illustration. Durant ce congrès 15 doctorants vietnamiens (ou docteurs récents) ont pu présenter leurs travaux, dans des domaines très divers allant de la géométrie et l'algèbre aux probabilités et à l'optimisation. Ils ont pu écouter 3 exposés « généraux » en géométrie, analyse et mathématiques appliquées et 6 exposés plus spécialisés donnés par des mathématiciens impliqués dans la coopération. Il y avait une trentaine de participants doctorants et une quinzaine de « seniors ». Une liste – exhaustive autant qu'il est possible – des étudiants vietnamiens en thèse en France (ou sous direction d'un mathématicien en poste en France) se trouve sur la page web du LIAFV. Compte tenu des oublis on peut estimer ce nombre à 80.

Il est encore trop tôt pour juger de ce que deviennent tous ces étudiants, puisque les thèses commencent à être soutenues, et donc la question est pour l'essentiel au futur. Dans le passé la situation a été diverse. La mise en place du VIASM (voir plus loin) sera un encouragement au retour pour les docteurs vietnamiens.

Une question récurrente revient à propos de l'intégration des étudiants en master et en thèse : celle de la langue. Les étudiants venant des masters évoqués plus haut ont eu des cours de français et/ou d'anglais. Le résultat est inégal, certains étudiants parlent très bien le français (ou l'anglais), d'autres non. L'expérience du rédacteur de ces lignes est qu'au niveau de la thèse il n'y a pas de difficultés sérieuses — à partir du moment où il y a échanges réguliers entre le doctorant et son encadrement (au sens large) scientifique. Au niveau du master, dans des cours à effectifs importants, l'intégration peut être plus délicate (cependant il y a des exemples d'intégration parfaitement réussis dans un tel contexte). Dans des cours à effectifs réduits, moyennant une attention minimum, l'insertion est facile.

Le VIASM « Vietnam Institute of Advanced Studies in Mathematics »

À la suite de la médaille Fields de Ngo Bao Chau, le gouvernement vietnamien a apporté son soutien à son projet de création du « Vietnam Institute of Advanced Studies in Mathematics » : le VIASM. Une de ses fonctions est de donner des possibilités de stages post-doctoraux aux doctorants vietnamiens de retour au pays et d'aider au retour des docteurs vietnamiens. Il organisera aussi des périodes thématiques. Il est décrit en détails par Ngo Bao Chau dans un autre article de ce numéro de la Gazette.

Le congrès joint des sociétés savantes : VMS-SMF

Pour terminer cet article il convient de rappeler le premier congrès bilatéral des sociétés savantes VMS (Vietnam Mathematical Society) et SMF qui aura lieu à Hue – ancienne capitale impériale du Vietnam – en août 2012. Il y aura une douzaine d'exposés pléniers, et à l'heure où ces lignes sont écrites la seconde annonce est très proche de sa sortie, avec la liste des sessions parallèles qui y seront organisées. Voici quelques indications (volontairement vagues) sur ces sessions algèbre-géométrie-topologie, théorie des représentations, analyse complexe, mathématiques discrètes, EDP-analyse, optimisation, probabilités-mathématiques financières). Les inscriptions seront ouvertes au printemps. En ce qui concerne le financement, côté français le LIAFV et un programme ARCUS soutenu par le MAE et les régions IDF et Midi-Pyrénées apporteront un soutien en priorité aux orateurs pléniers et aux jeunes dans la mesure (restreinte) du possible. Du côté vietnamien des soutiens serait trouvés pour les exposants vietnamiens. Les collègues intéressés sont invités à chercher dès maintenant des sources possibles de financement. On trouvera les informations sur le site de la SMF: http://smf.emath.fr/content/congres-commun-smf-vms.

Un nouvel institut à Hanoi

Ngo Bao Chau

Un nouvel institut de mathématique a été fondé à Hanoi en 2011. Il s'appellera Institut des Hautes Études Mathématiques du Vietnam, et adoptera l'abréviation VIASM (Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics). À la différence de l'actuel institut de mathématiques, le nouveau n'aura pas de chercheurs permanents mais fonctionnera avec des chercheurs invités et des périodes thématiques. En plus des chercheurs invités qui séjourneront à l'Institut pour une période de quelques mois, il y aura des positions post-doctorales pour une durée de deux ans. Nous viserons particulièrement les nouveaux docteurs vietnamiens formés à l'étranger mais ces positions sont ouvertes à d'autres catégories.

Outre le rôle évident de faire avancer la recherche en mathématiques, le VIASM se donne comme mission de hausser la qualité de recherches en mathématiques faite dans les universités vietnamiennes par le biais d'une coopération avec les mathématiciens étrangers ainsi que des vietnamiens d'outre-mer. L'institut favorisera aussi les coopérations régionales.

Les mathématiciens français qui ont eu une longue tradition de coopération avec les mathématiciens vietnamiens seront particulièrement bienvenus.

L'institut sera principalement financé par le gouvernement vietnamien. Toutefois, un effort sera fait en direction des contrats de recherches appliquées avec les industriels vietnamiens.

L'institut est pour l'instant doté d'un directeur scientifique (Ngo Bao Chau), d'un directeur exécutif (Le Tuan Hoa) et d'un conseil scientifique. Le choix des invités et des programmes sera fait par le conseil scientifique généralement au printemps de chaque année pour l'année suivante.

En attendant un emplacement définitif, le VIASM occupera une partie d'un bâtiment appartenant à l'Ecole polytechnique qui se trouve dans le centre de Hanoi. Les travaux de rénovation de ce local devraient être terminés à la fin de l'année 2011.

L'inauguration officielle du VIASM est prévue pour le 17 janvier 2012.

Le Master de Mathématiques délocalisé à Ho Chi Minh Ville : bilan et perspectives

Michel Zinsmeister¹, Thi Gia Tram Nguyen²

Bref historique

La coopération en mathématiques entre les universités d'Orléans et d'Ho Chi Minh Ville (HCMV) a commencé à la fin des années 90 à l'initiative d'Alain Pham, enseignant-chercheur à l'université d'Orléans. Entre 2000 et 2005, plusieurs chercheurs d'Orléans sont intervenus dans le cursus de la classe « Honors » de mathématiques de l'université des Sciences de HCMV et les premières collaborations sont nées à cette occasion. En 2006, le MAPMO, qui est l'UMR de mathématiques à Orléans, a répondu à l'appel d'offre du PUF (Pôle Universitaire Français) du Ministère des Affaires Étrangères (MAE) en soumettant un projet de délocalisation du M2 « AMA » cohabilité par Orléans et Tours à l'université des sciences de HCMV. Le ministère a retenu ce projet, ce qui a permis le démarrage du Master avec un flux d'une vingtaine d'étudiants. Le financement par FSP du Ministère pour 3 ans autorisait la gratuité du diplôme : les étudiants ne déboursent en effet que les frais d'inscription à l'Université d'Orléans, ce qui représente quand même plus d'un mois de salaire d'un enseignant vietnamien par exemple. Durant le premier semestre, les étudiants doivent valider 5 modules enseignés à HCMV par des enseignants français. Ce qui a immédiatement provoqué le succès de ce Master est, outre la quasi-gratuité, la structure de son deuxième semestre qui consiste en stages offerts en grande majorité dans des laboratoires français. Dans un premier temps, ces stages se déroulaient majoritairement à Orléans et à Tours grâce à un financement de la Région Centre. À partir de 2009, le Master a pu élargir son offre de stage grâce à la signature d'un partenariat avec l'université Paris 13 et l'Ecole Polytechnique. Après la fin du financement par le MAE, c'est le Ministère d'Éducation et de Formation Vietnamienne qui a pris le relais. Assuré pour 5 ans, ce financement va même permettre de doubler l'offre de cours à partir de l'année 2011-2012.

Bilan

Le public principalement visé par ce Master est la classe « Honors » de l'université des sciences de Ho Chi Minh Ville, mais pas seulement. Dans un souci de diversité une large publicité a été donnée dans tout le Vietnam et beaucoup d'étudiants viennent de l'université de Pédagogie voisine, ou encore d'autres villes du Sud du Vietnam comme : CanTho, Quy Nhon...

Il y a deux classes « Honors » au Vietnam : une à Hanoi et une à HCMV et les critères sévères de sélection en font des classes du niveau des ÉNS ou de l'École Polytechnique en France. Il faut savoir que 90% des étudiants de ces classes

Professeur à l'université d'Orléans, Responsable du Master Mathématiques délocalisé au Vietnam.

² Chargée des missions du Pôle Universitaire Français de Ho Chi Minh Ville (PUF-HCM).

n'effectuent pas leur Master au Vietnam. Avant que le Master PUF n'existe, la plupart des étudiants de la classe « Honors » de HCMV partait aux États-Unis. Il faut dire que la concurrence avec les États-Unis est rude. Tout d'abord le système vietnamien est calqué sur le système américain avec un « Bachelor », l'équivalent de notre licence, en 4 ans. Par ailleurs, en partant aux États-Unis dans une « graduate school », un étudiant vietnamien est assuré de disposer d'un salaire pendant 5 ans et a la quasi-certitude de pouvoir finir son PhD. La partie vietnamienne désirait diversifier ces lieux de formations : en effet les étudiants partant aux États-Unis y restent en général alors que ceux étudiant en Europe ont plus tendance à rentrer au Vietnam après leur thèse. L'objectif de ce programme est naturellement la recherche, à travers des thèses et des collaborations scientifiques à plus long terme. Sur les quatre premières années du Master, qui totalisaient 97 étudiants, 42 ont commencé une thèse soit 43% et s'il ne fallait qu'une preuve du succès de ce programme, ce serait ce chiffre.

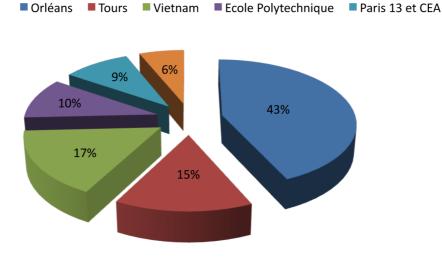
Voici quelques tableaux illustrant le bilan de ces 4 premières promotions. Dans le premier, qui donne les effectifs des quatre promotions, on montre en cinquième colonne le nombre de thèses ayant démarré dans chacune d'elles : naturellement ce chiffre manque encore pour la promotion en cours.

Année	Nombre d'étudiants	Stage en France	Stage Vietnam	Thèse
2007-2008	19	15	4	12
2008-2009	24	23	1	15
2009-2010	30	22	8	15
2010-2011	24	21	3	

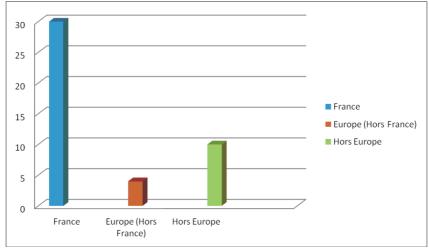
Tableau donnant l'origine des étudiants sur les 4 premières promotions :

Univ.		Univ.	Univ.	Univ.	Univ.
des sciences		de pédagogie	de Quy Nhon	de Can Tho	de Hanoi
42	17	20	8	9	1
étudiants	étudiants				
de la	de la				
filière	filière				
« Honors »	normale				

Quelques commentaires sur ces tableaux : dans le graphique donnant la répartition géographique des thèses, toutes celles composant la rubrique « hors-Europe » concernent les États-Unis, sauf une en Australie. L'attraction vers les État-Unis reste forte, même pour les étudiants du Master délocalisé. Dans le tableau donnant la répartition des thèses en France la rubrique « autres » est composée de : Limoges, Rennes (INSA), Lille, Nantes, Besançon, Marseille, Cergy-Pontoise. Ce chiffre montre que la diversification des sources de thèse est en cours. À Orléans et Tours, 9 thèses ont démarré : ce chiffre peut sembler faible eu égard à l'implication des deux universités, mais en fait il est miraculeux car les deux écoles doctorales d'Orléans et de Tours ne décernent aux mathématiques que 3 ou 4 bourses de thèse par an. Ce simple fait justifie à lui seul la nécessité de diversification.



Répartition des lieux de stages pour les 4 premières promotions

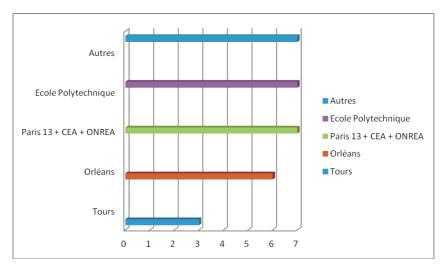


Répartition géographique des Thèses pour les 3 premières promotions

Perspectives

Le Master vietnamien est maintenant une action phare de la toute nouvelle Fédération Poisson qui unit les laboratoires de mathématiques d'Orléans et Tours. Mais comme le montre le partenariat avec l'École Polytechnique et l'université Paris 13, la vocation de ce Master est nationale.

Tout d'abord, il faut mentionner qu'il existe un autre Master franco-vietnamien. C'est le Master International de Hanoi qui a été créé par Ngo Bau Chau et qui est complémentaire du Master d'HCMV tant géographiquement (il est au nord) que thématiquement (il est concentré sur les mathématiques pures tandis que celui d'HCMV est plus orienté vers les applications).



Répartition géographique des thèses en France pour les 3 premières promotions

D'autre part la coopération franco-vietnamienne en mathématiques s'est récemment dotée d'un outil très efficace de coordination sous la forme du LIA (Laboratoire International Associé) « Formath Vietnam ». Grâce à cette structure, nous espérons donner au Master HCMV une dimension nationale en associant le plus possible d'universités tant à l'offre de cours qu'à celle des stages.

Nous lançons donc un appel à propositions des stages pour les années à venir et nous sommes preneurs de toute proposition résumée en une dizaine de lignes au format pdf précisant le sujet, le lieu et des références (si possible électroniques) du stage. Nous précisons que si les missions au Vietnam des enseignants (billet d'avion + séjour) sont prises en charge par la subvention vietnamienne, ce n'est pas le cas des stages dont il faut trouver le financement, soit à peu près 3000 euros (1000 euros de voyage + 2000 euros pour 3 mois de séjour).

INFORMATIONS

Note d'information du comité d'experts pour les PES universitaires 2011 en sections 25-26

Depuis 2009 la Prime d'Encadrement Doctoral et de Recherche (P.E.D.R.) a été remplacée par la Prime d'Excellence Scientifique (P.E.S.). L'attribution de la P.E.S. est du ressort des universités, mais à titre transitoire (jusqu'en 2012 inclus) elles peuvent décider de faire appel à un comité national pour l'évaluation et le classement des dossiers des candidats dans chaque discipline. Les membres du comité des sections 25-26 ont souhaité informer la communauté mathématique des principes utilisés lors de cette expertise, tout en préservant comme il se doit la confidentialité des débats. Le texte qui suit vise à indiquer aux candidats les critères d'évaluation des dossiers, et à fournir aux représentants des mathématiques au sein des conseils des établissements, compétents en ce qui concerne l'attribution de la P.E.S., des éléments utiles à la défense des dossiers dont ils seront chargés. Le comité des sections 25-26 s'est réuni les 8 et 9 septembre 2011 à l'IHP. Il était constitué de Olivier Biquard, Henri Carayol, Indira Chatterji, Serge Cohen, Pierre Del Moral, Stéphane Descombes, Thierry Gallay, Josselin Garnier (président), Emmanuel Grenier, Vincent Guedj, Olivier Guédon, François Hamel, Yanick Heurteaux, Marc Hoffmann, Alain Joye, Stéphane Labbé, Emmanuel Lesigne, Gilbert Levitt, Dominique Picard, Luc Robbiano, Judith Rousseau, Lionel Schwartz, Sylvia Serfaty, Didier Smets, Emmanuel Trélat, et Emmanuel Ullmo.

Remarque. Les P.E.S. pour les chercheurs des organismes de recherche (C.N.R.S., I.N.R.I.A.) font l'objet de procédures distinctes dont il ne sera pas question ici. De plus certains universitaires ont droit d'office à la P.E.S. : membres de l'I.U.F., lauréats de certains prix nationaux ou internationaux.

La mission du comité est de classer les dossiers en trois catégories : A, B et C. Il est du ressort des universités de décider ensuite de l'attribution ou non de la P.E.S. et de son montant. La plus grosse réserve émise par le comité dans ce système est la dissociation entre l'évaluation et la décision d'attribution, dont les modalités varient d'une université à l'autre. La lettre de cadrage du ministère précise : les enseignants-chercheurs dont les dossiers ont été classés A devraient bénéficier de la P.E.S., ceux dont les dossiers ont été classés B pourraient en bénéficier, et ceux dont les dossiers ont été classés C ne devraient pas en bénéficier. Le ministère exige qu'au plus 20% des dossiers soient classés A, et au plus 30% soient classés B. Comme dans les comités des autres sections, le comité en sections 25-26 remplit au maximum ses contingents en A et B. Il semble que la lettre de cadrage soit à

peu près respectée par les établissements : en effet, en 2010, le taux de satisfaction (proportion de collègues qui ont eu la prime parmi ceux qui avaient postulé) était de 47% en sections 25-26 (43% toutes sections confondues).

Les dossiers ont été séparés en trois groupes suivant le grade des candidats : maîtres de conférences (MCF), professeurs de seconde classe (PR2), et professeurs de première classe (PR1) ou de classe exceptionnelle (PREX). Comme les années précédentes, le comité a choisi d'appliquer les mêmes proportions de notes A, B et C dans ces trois groupes.

D'une part, ce choix revient à donner un net avantage aux MCF par rapport aux PR2 et aux PR1-PREX. Cette décision a été discutée à nouveau cette année, et le comité a décidé de continuer cette pratique, pour plusieurs raisons, dont la principale est la nécessité de préserver une certaine attractivité des postes pour les jeunes chercheurs en mathématiques. Il faut noter que de très jeunes MCF ont cette année encore été classés A ou B, et que donc ils ne doivent pas hésiter à postuler. De manière générale, il serait très souhaitable que les mathématiciens postulent largement à la P.E.S. Certains membres du comité ont proposé d'inciter les directeurs de laboratoire en mathématiques à encourager les enseignants-chercheurs de leur unité à postuler aussi largement que possible à la P.E.S.

D'autre part, ce choix d'imposer des quotas égaux aux trois groupes MCF, PR2 et PR1-PREX, qui est propre à la communauté mathématique, a conduit à un niveau d'exigence extrêmement élevé pour les PR2 et encore plus pour les PR1-PREX. Il y a en effet dans ces deux groupes un grand nombre d'excellents dossiers, si bien que l'application des quotas a conduit à noter B des dossiers présentant des recherches de tout premier plan, et en C les dossiers de collègues qui bénéficient d'une très forte reconnaissance internationale. Il est certainement plus difficile d'être classé A ou B pour un PR1-PREX en mathématiques que dans beaucoup d'autres disciplines.

La fiche d'évaluation fournie par le ministère précise quatre catégories pour lesquelles des notes A, B ou C sont attribuées à chaque dossier. Ces quatre notes, ainsi que la note globale, sont transmises par le ministère aux universités, et aucune autre information n'est transmise. Ces catégories sont :

- la production scientifique,
- l'encadrement doctoral et scientifique,
- le rayonnement scientifique,
- les responsabilités scientifiques.

L'évaluation est concentrée sur la période de quatre ans qui va du 1^{er} janvier 2007 au 31 décembre 2010. Le comité a considéré que ces quatre catégories n'avaient pas le même poids pour l'obtention de la P.E.S. La production scientifique a joué un rôle prépondérant dans l'évaluation des dossiers. La publication d'articles dans des revues mathématiques les plus sélectives joue un rôle important dans l'évaluation de la production scientifique, la qualité des revues étant plus importante que leur nombre. Néanmoins d'autres facteurs ont été pris en compte. Le rayonnement a aidé dans certains cas à identifier des dossiers dont l'activité de recherche avait une influence marquante même lorsque les publications étaient faites dans des revues moins connues. Les catégories encadrement doctoral, rayonnement et responsabilités scientifiques ont été prises en compte, en particulier pour les PR2 et pour les PR1-PREX. Le comité a considéré que l'absence d'encadrement doctoral ou de responsabilités administratives dans le dossier d'un PR2 et surtout d'un PR1-PREX

était une anomalie qui devait être compensée par une activité scientifique particulièrement brillante. Le comité a considéré qu'il n'était pas du ressort de la P.E.S. de récompenser une activité administrative particulièrement intense mais qu'il était anormal qu'un PR ne prenne pas sa part d'activités administratives. La même règle a été appliquée aux MCF « expérimentés » en activité depuis une petite dizaine d'années au moins.

Pour les MCF « jeunes » (dans les six années après le recrutement) le comité a considéré que les catégories encadrement doctoral et responsabilités scientifiques n'avaient en général pas grand sens, ce qui l'a conduit à noter cette catégorie B même pour des dossiers qui ne contenaient que peu d'éléments dans ce domaine, et à ne pas les pénaliser dans l'évaluation globale dans la mesure où ils présentaient une activité de recherche de très haut niveau. Par contre la présence d'éléments (encadrements de M2, co-encadrements de thèse, responsabilité d'un séminaire, etc.) a été appréciée positivement. Pour ces jeunes MCF, l'autonomie acquise par rapport au directeur/travaux de thèse est un élément d'appréciation important.

Comme chaque année, les membres du comité ont fait de leur mieux pour arriver au résultat le plus juste et le plus impartial possible. Néanmoins, les quotas A/B/C imposés ont obligé à des décisions difficiles. Dans ces conditions, être classé C ne doit pas être considéré comme une appréciation négative du dossier par le comité, mais simplement comme le résultat de choix difficiles et fortement contraints. Le comité encourage très fortement les candidats qui n'obtiendront pas la P.E.S. en 2011 à postuler à nouveau en 2012, d'autant plus que la pression dans chaque groupe peut varier d'une année à l'autre. Le comité tient à affirmer que les notes attribuées sont relatives et résultent de l'application de quotas une année donnée dans un groupe donné, et que ces notes ne constituent pas une évaluation absolue de l'activité de recherche. Nous attirons aussi l'attention des candidats sur la nécessité de donner toutes les informations nécessaires dans le formulaire de candidature et dans le C.V. joint; les dossiers mal remplis peuvent pénaliser le candidat.

Le comité a appliqué de manière stricte les règles de déontologie de base : aucun membre ne s'est exprimé sur les dossiers des candidats dont il était personnellement proche, de ses collaborateurs ou anciens étudiants, ou sur les dossiers des collègues de son université ou de son laboratoire.

Nouvelles du CNRS

Virginie Bonnaillie-Noël et Yann Brenier

Remplacement au comité national

Gaëtan Chenevier et Bertrand Deroin, membres élus du collège B1, ont postulé. Un avis de vacance a été publié en octobre et 10 personnes ont candidaté pour les remplacer. La section a élu Christophe Cornut, CR1 à l'IMJ et Cyril Houdayer, CR2 à l'UMPA.

Session d'automne 2011

Voici un compte-rendu des interventions de Guy Métivier et Patrick Dehornoy lors de la session d'automne du comité national.

Budget 2012. Le conseil d'administration du CNRS se réunit début décembre et le budget 2012 ne sera pas connu avant cette date.

Les prévisions pour 2012 sont difficiles, car le budget global du CNRS serait juste reconduit, avec une masse salariale en augmentation (représentant environ 83% du budget total), ce qui diminuerait d'autant les autres dépenses. L'INSMI espère une diminution de son budget inférieure à la moyenne générale. Il répercuterait la baisse de la façon suivante :

- inférieure à la moyenne en ce qui concerne la dotation de base des laboratoires ;
- très inférieure à la moyenne en ce qui concerne les outils transversaux et nationaux (CIRM, IHP, RNBM, Mathrice, MathDoc);
 - conforme à la moyenne pour l'international et les GDR;
- plus importante sur les crédits spécifiques (crédits non récurrents des laboratoires : équipements informatiques, bibliothèque, colloques...). Les laboratoires ont d'ailleurs en général assez peu de demandes spécifiques.

PES 2011.

Pour le compte-rendu de la campagne PES 2011 pour l'INSMI, voir le texte de F. Balestié et P. Dehornoy ci-après.

UMI. Ce paragraphe résume quelques échanges avec Pascal Chossat, chargé des relations internationales.

L'INSMI privilégie actuellement les programmes de positionnement « stratégique » sur le long terme. Dans la mesure où il faut faire des choix, c'est sur ces programmes que l'INSMI porte principalement l'effort. En mathématique, le concept d'UMI ne va pas de soi, il faut l'adapter à la spécificité du milieu. Ce peut être une plateforme de coopération du type « LIA étendu ».

Deux nouvelles UMI sont créées à Pise et Montréal dont les directeurs sont respectivement Laurent Habsieger et David Sauzin. L'UMI IFCAM à Bangalore est encore en phase de négociation. Elle constituerait une plateforme destinée à « arroser » l'ensemble des centres en Inde (et en France) qui sont intéressés par les collaborations en mathématiques appliquées. L'INSMI, l'INSIS, l'INP, l'INSU, également l'INRIA, sont d'accord pour être partenaires, ainsi que les universités de

Toulouse, de Nice, l'école Polytechnique, l'ÉNS Paris. L'INSMI attend des financements de tous les partenaires. Par ailleurs, un projet de LIA en mathématiques fondamentales à Chennai est en cours de négociation avec comme porteur David Sinnou. Ce projet est soutenu par les 2 fondations de mathématiques. Il aura en fait la même vocation que l'IFCAM mais sera financé côté indien par le National Board of Higher Math, alors que le projet IFCAM sera financé par le department of Science and Technology du gouvernement indien, dont l'action est plus orientée vers les applications et la technologie.

Les UMI à Santiago du Chili (CMM), Vienne et Eindhoven ont été évaluées lors de la session d'automne par le comité national qui a donné un avis favorable à leur renouvellement.

Concours 2012

L'an dernier, le CNRS avait choisi de maintenir l'emploi. Cette année, l'objectif du CNRS est de remplacer en volume global les départs à la retraite. D'après le journal officiel du 30 novembre, sont au concours les postes suivants :

- 8 directeurs de recherche de 2^e classe (concours 01/01),
- 1 chargé de recherche de 1^e classe (concours 01/02),
- 8 chargés de recherche de 2^e classe (concours 01/03),
- 4 chargés de recherche de 2^e classe sur des thématiques d'interactions des mathématiques avec d'autres disciplines (concours 01/04),
- -1 chargé de recherche de $2^{\rm e}$ classe affecté dans un laboratoire relevant de la section 07 : mathématiques pour les sciences de l'information et la communication (concours 01/05),
- -1 chargé de recherche de 2^e classe : mathématiques et diversité génétique, affecté dans un laboratoire à Lyon (concours 01/06),
- -1 chargé de recherche de 2^e classe : modélisation et analyse d'images de matériaux anciens, affecté au laboratoire IPANEMA à Gif-sur-Yvette (concours 01/07),
- $-\,1\,$ chargé de recherche de 2^e classe, affecté dans un laboratoire de mathématiques prioritairement sur les thématiques « image et/ou algorithmique parallèle » (concours 07/06 dont la phase d'admissibilité est gérée par la section 7),
- 1 chargé de recherche de 2^e classe : modélisation mathématique du vivant préférentiellement en lien avec l'imagerie médicale et biologique (concours 43/05 dont la phase d'admissibilité est gérée par la CID 43).

La section 1 reste sceptique sur le double fléchage thématique et géographique et espère qu'il y aura un vivier suffisant pour ces postes d'échange afin de maintenir le niveau du concours.

Par ailleurs, le décret ajoutant une phase de pré-sélection au concours 2012 n'est pour l'instant pas voté. S'il est voté suffisamment tôt, la phase de pré-sélection aura lieu le 16 février 2012. Notons que la phase de pré-sélection ne concernerait que les concours pour les chargés de recherche. Les concours pour les postes de directeurs de recherche resteraient identiques. Les auditions auront lieu le 16 avril 2012 à l'Institut Henri Poincaré à Paris et les délibérations du 17 au 20 avril 2012.

Dans un message adressé aux directeurs de laboratoires, Patrick Dehornoy a insisté sur plusieurs points importants :

Tous les postes, en particulier les postes de DR2, sont ouverts à tous les candidats : étrangers, mais aussi enseignants-chercheurs des universités françaises; l'INSMI souhaite que le flux entre CNRS et les universités existe dans les deux directions et les enseignants-chercheurs ne doivent donc pas hésiter à postuler.

Tous les postes de DR sont l'objet d'un concours et, à ce titre, doivent correspondre à un véritable projet scientifique accompagné d'une mobilité, qu'elle soit géographique, thématique, institutionnelle, ou fonctionnelle.

Pour ce qui concerne les postes de CR2 profilés « interactions des mathématiques », les projets de recherche devront comporter un volet pluridisciplinaire, et les candidats devront indiquer les partenaires ou les équipes des autres disciplines avec lesquels ils envisagent de collaborer.

Comme l'an passé, il sera demandé aux candidats admissibles d'indiquer (au moins) deux propositions de laboratoires d'affectation, dont au moins un hors de la région Île-de-France; il est de l'intérêt des laboratoires, en particulier en province, d'anticiper cette procédure et de chercher à convaincre les candidats de les inclure dans leurs souhaits d'affectation.

Le nombre de chaires n'est pour l'instant pas défini. Il devrait être de l'ordre d'une quarantaine pour le CNRS.

Mandat 2012-2016

Renumérotation des sections

Un projet d'arrêté fixant la liste des sections du Comité national de la recherche scientifique pour le mandat 2012-2016 est soumis au conseil d'administration début décembre. La numérotation de certaines sections devrait être modifiée en raison principalement de l'ajout d'une nouvelle section. En effet, la section 7 *Sciences et technologies de l'information (informatique, automatique, signal et communication)* évalue plus de 500 chercheurs et serait donc scindée en deux sections qui seraient les futures sections 6 et 7 dont le périmétrage n'est pas encore complètement arrêté. L'ajout d'une nouvelle section et la volonté de laisser les sections regroupées par institut en limitant les modifications de numérotation devraient mener à la renumérotation de 4 sections, sans en changer le périmètre. Nous aurions alors :

section 01: ancienne section 03,
section 03: ancienne section 06,
section 30: ancienne section 20,
section 41: ancienne section 01.

Plusieurs sections changent légèrement leur intitulé sans changer de périmètre. L'INSB (Institut des sciences biologiques), regroupant les sections 20 à 28, a proposé une redéfinition complète des périmètres des sections. Les CID (Commissions Inter-Disciplinaires) devraient être redéfinies de la façon suivante (selon le compterendu du conseil scientifique du CNRS des 14 et 15 novembre 2011) :

CID50 : évaluer et promouvoir les chercheurs qui ont des fonctions dans l'administration de la recherche;

SMF - Gazette - 131, janvier 2012

- CID51: modélisation physique bio (bioinformatique, bio synthétique, bio systémique,...);
- CID52 : environnements sociétés : du fondamental à l'opérationnel (changements planétaires, nature et biodiversité,...);
- CID53 : eéthode, pratiques et communication des sciences et techniques (épistémologie, histoire, philosophie);
- CID54 : interface biologie avec sciences de la matière et ingénierie (instrumentation, nanoparticules microfluidique).
- Il y aura donc 41 sections et 5 CID pour le mandat 2012-2016. Les mathématiques seraient donc en dernière position des sections. Le libellé de la section 41 sera « Mathématiques et interactions des mathématiques » et ses mots clés :
- logique et fondations, combinatoire, algorithmique, aspects mathématiques de l'informatique, cryptographie, algèbre, théorie des groupes, théorie des représentations;
- théorie de Lie et généralisations, théorie des nombres, géométrie arithmétique, géométrie, géométrie algébrique, géométrie complexe, topologie, analyse, analyse fonctionnelle, analyse harmonique, analyse globale;
- systèmes dynamiques et équations différentielles ordinaires, théorie ergodique, équations aux dérivées partielles, physique mathématique, probabilités, statistiques, modèles stochastiques, traitement de données, aspects mathématiques du traitement du signal et de l'image, analyse numérique et calcul scientifique;
 - théorie du contrôle et optimisation, théorie des jeux;
- Modélisation et interfaces des mathématiques avec les sciences et la technologie, histoire des mathématiques.

Élections

Les sections du comité national de la recherche scientifique (CoNRS) renouvellent leurs membres pour le mandat 2012-2016. Les missions du CoNRS et des sections sont décrites aux adresses suivantes :

www.cnrs.fr/comitenational/doc/BrochureCoNRS/BrochureCoNRS2011.pdf http://www.dgdr.cnrs.fr/elections/scn/actualites/default.htm

Les élections se dérouleront selon la procédure déterminée par le décret n°2011 – 676 du 15 juin 2011 et de l'arrêté du 15 juin 2011. Le vote a lieu par correspondance.

Chacune des 41 sections comprend 21 membres : 7 nommés et 14 élus à raison de 3 membres pour les collèges A1, A2, B1 et C et 2 membres pour le collège B2. Pour les collèges A et B, le scrutin est plurinominal majoritaire à deux tours. Les élections du collège C se font au scrutin de liste à la représentation proportionnelle au plus fort reste.

Les personnels fonctionnaires affectés dans une unité de recherche ou de service propre ou associée au CNRS sont inscrits d'office sur les listes électorales qui seront consultables à partir du 12 décembre 2011. La date limite d'inscription sur les listes électorales ou de réception des demandes de rectifications est fixée au 16 janvier 2012. Les réclamations seront recevables jusqu'au 13 février et les listes électorales rectificatives seront consultables à partir du 17 février 2012.

Les candidatures pour le premier tour des collèges A1, A2, B1 et B2 doivent parvenir avant le 20 février à 12h et avant le 26 mars pour le collège C.

Des informations plus précises sont disponibles sur le site du CNRS : http://www.dgdr.cnrs.fr/elections/scn/dispositif/modescrutin.htm

Les informations du comité national sont mises à jour sur le site http://cn.math.cnrs.fr/

Bilan des primes d'excellence scientifique (PES) CNRS 2011

Françoise Balestié, Patrick Dehornoy¹

Depuis 2009, les chercheurs CNRS sont éligibles à la prime d'excellence scientifique (PES). Il existe trois niveaux de prime, correspondant respectivement à un montant annuel de 3500 €, 7000 €, et 10000 €. Une partie des primes est attribuée de façon automatique aux récipiendaires de prix et distinctions, suivant une liste fixée par arrêté, tandis qu'une autre partie est attribuée sur proposition des instituts au vu des demandes déposées par les candidats. L'année 2010 a été la première où la procédure complète a été mise en place, et 2011 était donc la seconde.

Déroulement de la procédure, conditions d'éligibilité

L'appel à candidature a été diffusé courant 1^{er} trimestre 2011. Un comité de (pré)sélection s'est réuni en juin, les décisions ont été prises en octobre, pour mise en place des primes en décembre 2011.

Les dossiers, électroniques et légers, consistent en un formulaire récapitulant l'activité au cours des quatre années précédant la demande, à compléter par un curriculum vitæ complet et, le cas échéant, les documents attestant des prix et distinctions.

Tous les chercheurs titulaires peuvent postuler. Il est demandé aux chercheurs ne postulant pas au titre des prix et distinctions recensées dans la liste jointe en annexe de s'engager à enseigner au cours des quatre années suivantes. La non-acceptation de cette clause entraîne la non-recevabilité du dossier.

En 2011, les demandes étaient traitées en fonction de la section de rattachement au Comité National des chercheurs (et non de l'institut d'affectation). Le nombre de candidatures déposées par les chercheurs dépendant de la section 01 a été de 58, soit 16% d'un effectif total de 367 chercheurs, ou 18% d'un effectif total de 324 si on laisse de côté les 43 chercheurs déjà bénéficiaires d'une PES. Le taux de candidature était de 26% chez les CR2 non déjà bénéficiaires, 14% chez les CR1, 20% chez les DR2, et 25% chez les DR1 et DRCE. Parmi les 58 demandes, les deux tiers (39) étaient des deuxièmes candidatures, tandis qu'un tiers (19) étaient des premières candidatures, dont 10 déposées au niveau CR2.

¹ INSMI-CNRS

Sélection des dossiers

Comme en 2010, la section 01 du Comité National de la Recherche Scientifique n'a pas souhaité participer à la sélection. L'examen des dossiers de candidature a été effectué par un comité ad hoc composé de Rémi Abgrall, Marie-Pierre Béal, Philippe Besse, Pascal Chossat, Patrick Dehornoy, François Loeser, Guy Métivier (président), Fabrice Planchon, et Christoph Sorger.

Le comité a constitué une liste ordonnée de propositions tenant compte du cadrage initial de l'enveloppe des primes et de la possibilité de remplacer des primes à 7000 € par un nombre double de primes à 3500 €. La décision finale a été en 2011 de n'attribuer que des primes à 3500 €. Comme en 2010, Les principes retenus pour l'évaluation des dossiers et la constitution de la liste des propositions ont été les suivants :

- priorité forte aux dossiers des chercheurs CR2 entrés au cours des trois dernières années (conformément à une suggestion de la section 01 du Comité National de la Recherche Scientifique),
 - dans le cas des CR1, priorité à l'excellence scientifique des dossiers,
- dans le cas des DR, et spécialement DR1 et DR0, priorité aux dossiers qui, en sus d'une activité scientifique excellente, manifestent un fort engagement au service de la collectivité.

Le comité a pris en compte l'ensemble de la situation professionnelle des candidats, et considéré les chercheurs occupant des postes secondaires comme non prioritaires.

La liste finale des chercheurs attributaires de la prime a été décidée par la direction du CNRS à partir de la liste des propositions ci-dessus, dont l'ordre a été intégralement respecté.

Au total, 24 primes à $3500 \in$ ont été attribuées, au titre de la catégorie « niveau élevé d'activité scientifique avec condition d'enseignement ». Ceci représente un taux de succès global de 41% des demandes, et de 18% du total des chercheurs non déjà bénéficiaires de la PES. En termes de grade, la liste des nouveaux bénéficiaires contient

- 9 CR2 (soit 75% des demandes de cette catégorie et 26% des CR2 non déjà bénéficiaires de la PES),
- 6 CR1 (soit 30% des demandes de cette catégorie et 14% des CR1 non déjà bénéficiaires de la PES
- 4 DR2 (soit 25% des demandes de cette catégorie et 20% des DR2 non déjà bénéficiaires de la PES),
- 5 DR1-DRCE (soit 50% des demandes de cette catégorie et 25% des DR1-DRCE non déjà bénéficiaires de la PES).

En termes de parité homme-femme, la liste des nouveaux bénéficiaires contient 5 femmes, soit 21% du total, à rapporter à un effectif total de 58 chercheuses, soit 16% du total de 367 chercheurs en section 01, et au chiffre de 10 demandes déposées par des femmes; le taux de succès des candidatures déposées par des femmes a donc été de 50%.

Parmi les 24 nouveaux bénéficiaires relevant de la section 01 (mathématiques), 22 sont affectés dans un laboratoire INSMI, 1 dans un laboratoire INP, et 1 dans un laboratoire INS2I. Ils appartiennent à 21 laboratoires différents, 3 laboratoires se

trouvant héberger 2 bénéficiaires. Enfin, symétriquement aux chercheurs relevant de la section 01 affectés dans un laboratoire non INSMI, signalons parmi les nouveaux bénéficiaires de la PES un chercheur relevant de la section 07 (informatique) et affecté dans un laboratoire de l'INSMI.

Annexe: Textes légaux régissant la PES

http://www.dgdr.cnrs.fr/drh/carriere/cherch/pes_textes.htm

Décret n° 2009-851 du 8 juillet 2009 instituant la prime d'excellence scientifique

http://www.legifrance.gouv.fr/affichTexte.do;jsessionid=96CAD40C 6A10CF81D0A13C3EB900716B.tpdjo07v_3?cidTexte=LEGITEXT00002083442 9&dateTexte=20101103

Extrait: La prime d'excellence scientifique peut également être attribuée aux chercheurs régis par le décret du 30 décembre 1983 susvisé qui s'engagent à effectuer pendant une période de quatre ans renouvelable, dans un établissement d'enseignement supérieur, un service d'enseignement correspondant annuellement à 42 heures de cours, 64 heures de travaux dirigés ou toute combinaison équivalente. Ce service d'enseignement doit être accompli en priorité dans l'établissement au sein duquel ils effectuent leurs recherches.

Circulaire d'application du 24 juillet 2009 pour la mise en œuvre de la prime d'excellence scientifique dans les EPST

http://media.enseignementsup-recherche.gouv.fr/file/dossier_enseignantschercheurs/20/4/circulaire_PES_EPST_117204.pdf

Liste des distinctions scientifiques mentionnée à l'article 1^{er} du décret du 8 juillet 2009 susvisé :

1. Prix Nobel; 2. Médaille Fields; 3. Prix Crafoord; 4. Prix Turing; 5. Prix Albert Lasker; 6. Prix Wolf; 7. Médaille d'or du CNRS; 8. Médaille d'argent du CNRS; 9. Lauriers de l'INRA; 10. Grand Prix de l'INSERM; 11. Prix Balzan; 12. Prix Abel; 13. Les prix scientifiques attribués par l'Institut de France et ses académies; 14. Japan Prize; 15. Prix Gairdner; 16. Prix Claude Lévi-Strauss.

Math-Bridge

Viviane Durand-Guerrier, Christian Mercat, Julianna Zsidó

Le taux d'échec dans les matières scientifiques parmi les étudiants en première année à l'université est un phénomène commun à la majorité des pays européens. Le projet européen Math-Bridge s'inscrit dans les efforts européens pour aborder cette problématique en proposant des outils ou des mesures afin de diminuer le taux d'échec.

Dans ce qui suit nous allons présenter brièvement le projet européen Math-Bridge, ensuite la plate-forme avec ses fonctionnalités et le contenu. Pour terminer nous décrivons quelques possibles scénarios d'usage de Math-Bridge.

1. Le projet européen et les partenaires

Le projet européen Math-Bridge [1] est financé par le programme européen eContent Plus et les institutions partenaires du projet, qui sont des universités ou des instituts de recherche. Le but est de fournir une large base de données de cours personnalisés de remédiation en mathématiques, informatisés dans une plateforme en ligne. Le groupe cible est les étudiants en première ou deuxième année de formation post-baccalauréat ayant des mathématiques dans leurs cursus.

Les partenaires suivants fournissent du contenu mathématique sous forme de cours de remédiation :

- université de Vienne (Autriche) : mathe-online
- université de Kassel (Allemagne) : VEMA
- université Technique de Tampere (TUT, Finlande) : Basic Skills Test
- université de Sarrebruck (Allemagne) : LeAM calculus
- université ouverte des Pays-Bas : exercices interactifs reposant sur des raisonneurs.

Le contenu venant des partenaires de nationalités et de langues différentes, il a été nécessaire de fournir un important travail de traduction des contenus pour offrir les cours et exercices en plusieurs langues européennes (allemand, anglais, espagnol, finnois, français, hollandais, hongrois).

En France, l'université Montpellier 2 participe au projet et l'université Claude Bernard, Lyon 1 est un partenaire associé. L'équipe de l'UM2 est l'équipe coordinatrice de l'évaluation des scénarios d'usage mis en place dans les différents pays partenaires et responsable des traductions françaises.

2. La plate-forme

En termes techniques, Math-Bridge est un environnement informatique pour l'apprentissage humain (EIAH) muni d'un tuteur intelligent. Il est développé par le DFKI (institut allemand de recherche en l'intelligence artificielle). Son point fort est qu'il s'adapte aux besoins et au niveau de chaque utilisateur. Voir une copie d'écran de la plate-forme dans la figure 1.

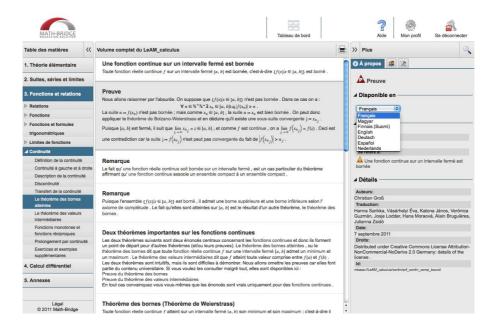


Fig. 1. La plate-forme Math-Bridge

Le système prend en compte les réponses aux exercices et en fonction du nombre d'exercices faits et de la justesse des réponses, il modélise les connaissances de chaque utilisateur. (C'est ce qui est appelé « modèle d'apprentissage ».)

Ce modèle d'apprentissage et l'organisation du contenu comme expliquée dans la section 3 permettent la création automatique de documents électroniques personnalisés appelés « livres » (figure 2). Ces livres peuvent avoir différents buts : découvrir une nouvelle notion, travailler des exercices sur un point précis, avoir un résumé du cours, réviser les points faibles, etc. Chaque scénario de création de livre va élaborer une suite cohérente de contenus, puisés dans la base de données, dans des proportions et dans un ordre dépendant de ce choix et du modèle d'apprentissage de l'étudiant.

La plate-forme offre des outils d'édition et de création de contenu pour les auteurs et un outil manuel d'assemblage de « livres » pour les tuteurs, ainsi que des outils et rapports pour visualiser la performance des étudiants et en tirer des statistiques si besoin.

De plus elle offre des forums, des boutons « utile » et « pas utile » pour que les étudiants et les enseignants puissent donner une évaluation personnelle du contenu. Les utilisateurs peuvent également ajouter des notes personnelles.

3. Le contenu mathématique

Pendant les préparations didactiques du projet, l'ensemble des thèmes mathématiques a été organisé hiérarchiquement sous la forme d'une ontologie des concepts pertinents pour le groupe cible, voir par exemple la figure 3 pour les concepts en algèbre. L'organisation des concepts mathématiques dans une telle structure arborescente n'a pas été évidente. Certaines branches de mathématique

MATH-BRIDGE 93

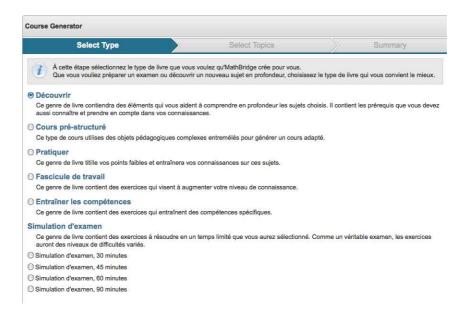


Fig. 2. Création automatique de livres

comme par exemple la théorie des catégories n'apparaissent pas, parce qu'en début d'université, elles ne sont enseignées dans aucun pays européen; d'autres concepts mathématiques sont pertinents dans un pays mais pas dans un autre. La profondeur de l'ontologie qui correspond au niveau d'entrée en détail d'une théorie, a été également un point de discussion.

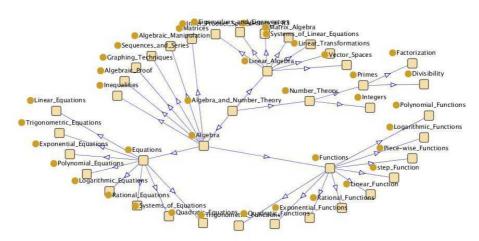


FIG. 3. Une partie de l'ontologie, autour d'« algèbre »

Les cours mathématiques, qui sont organisés en livres (virtuels), sont découpés en objets d'apprentissage, comme par exemple définition, lemme, théorème, preuve, exemple, exercice. La figure 4 montre tous les types d'objets d'apprentissage.

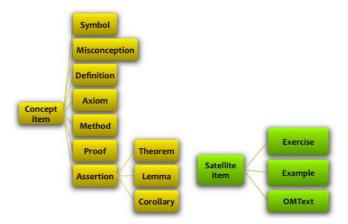


FIG. 4. Les différentes types d'objets d'apprentissage

Un objet de type « Symbol » représente un concept de l'ontologie. Tous les objets d'apprentissage sont reliés entre eux (par différents types de relations possibles) et à des concepts de l'ontologie. Par exemple l'objet d'apprentissage « Preuve du théorème des valeurs intermédiaires » est relié à l'objet « Théorème des valeurs intermédiaires » et cet objet est relié au concept « Fonctions continues » dans l'ontologie.

La plupart du contenu est disponible en plusieurs langues. Les traductions respectent les différences culturelles des mathématiques entre les différents pays et les différentes communautés, linguistiques ou disciplinaires, dans les notations (par exemple les différentes notations pour les coefficients binomiaux, les notations i ou j pour l'unité imaginaire), dans le vocabulaire (par exemple un corps est appelé field en anglais) et dans les traditions (par exemple différents noms associés à un (même) théorème). Pour l'aspect multilingue de Math-Bridge et ses potentialités à ce propos, voir par exemple [2] et [4].

Les exercices peuvent être de différents types, allant du QCM à l'assistance par un outil de calcul formel, en passant par les exercices où les variables de la question sont tirées aléatoirement selon une certaine loi. Les réponses peuvent être littérales ou sémantiques, l'application de certaines procédures de simplification de calcul formel pouvant être appliquées avant l'analyse de la réponse.

Le contenu actuel est et restera libre d'utilisation par les élèves et les professeurs. Le moteur faisant fonctionner la plate-forme est sous licence libre. Cependant, pour avoir accès à des outils fins de diagnostics et d'analyse du comportement des étudiants, une adhésion de l'université au consortium sera demandée et cette adhésion sera vraisemblablement payante dans le futur de manière à couvrir les frais d'hébergement, de maintenance et de développement. Un conseil : demandez à ce que votre université devienne partenaire associé!

4. Scénarios d'usage de Math-Bridge

Math-Bridge offre par ses riches fonctionnalités un large choix de possibilités d'usage, allant du travail en autonomie complète des étudiants jusqu'à l'insertion

SMF - Gazette - 131, janvier 2012

de Math-Bridge dans les travaux dirigés ou pratiques sous la responsabilité totale du professeur.

À l'université Montpellier 2, nous avons testé deux scénarios sur les deux bouts de l'échelle : l'insertion de Math-Bridge dans quatre séances de TP dans l'UE Analyse 1 en 2010/2011 et l'encouragement du travail autonome en complément de l'UE Analyse et Algèbre 1 en 2011/2012.

Le scénario en Analyse 1 a été le suivant. Dans l'UE Analyse 1, outre les cours magistraux et les travaux dirigés, nous avons prévu quatre séances de travaux pratiques pendant tout le semestre. Parmi les 17 groupes de TD, les enseignants de 8 groupes ont choisi de faire leurs TPs sur Math-Bridge (les autres sur Maple). Nous avons créé uniquement des exercices interactifs pour entraîner les étudiants à résoudre des exercices typiques. La première séance a concerné les nombres complexes, la deuxième les généralités des fonctions continues (injectivité, théorème des valeurs intermédiaires, limites), la troisième les dérivées, tangentes, développements limités et la quatrième l'intégration. Comme le contenu était en accord avec le cours et les travaux dirigés et couvrait exactement nos besoins, les étudiants ont facilement accepté de travailler sur le contenu proposé. Dans ce scénario d'usage, les étudiants ont très peu de liberté, l'enseignant décide et planifie la façon d'utiliser Math-Bridge.

Le scénario en Analyse et Algèbre 1 en 2011/2012 est le suivant. Cette UE est organisée sous la forme de cours—TD intégrés, donc à tout moment les étudiants se retrouvent séparés en groupes, et chaque groupe a son enseignant qui assure la totalité des cours et les TDs. Pour utiliser Math-Bridge, nous avons contacté tous les étudiants par mail, en leur envoyant un tutoriel d'inscription sur la plate-forme et en les encourageant à aller explorer le contenu et les fonctionnalités de la plate-forme. Au cours du semestre, nous avons envoyé plusieurs fois des messages de rappel d'encouragement pour utiliser Math-Bridge. Comme le semestre est en cours, nous n'avons pas encore analysé les traces de l'usage sur Math-Bridge. Ce scénario d'usage encourage le travail autonome des étudiants, c'est—à—dire, de laisser identifier chaque étudiant lui—même s'il a des lacunes dans ses connaissances mathématiques (avec l'aide de Math-Bridge) et d'y remédier avec l'aide de Math-Bridge. Ce scénario suppose plus d'initiative propre et de maturité de chaque étudiant mais en même temps il est individualisé et volontaire.

Les autres partenaires du projet ont, bien sûr, d'autres scénarios d'usage qui sont également possibles : l'usage de Math-Bridge dans un cours de remédiation en mathématiques offert aux étudiants avant le début de leur premier semestre (en première année). Soit en fixant un objectif de réussir un certain nombre d'exercices pendant le cours de remédiation, soit en faisant les cours de remédiation en autonomie entièrement sur Math-Bridge, soit en mélangeant des phases d'apprentissage autonome et guidé par un tuteur.

5. Limites de Math-Bridge

Bien sûr, Math-Bridge n'est pas la seule plate-forme en ligne offrant les cours de remédiation en mathématiques, mais à notre connaissance, elle se distingue des plates-formes similaires par deux aspects principaux. Premièrement, elle s'adapte aux besoins mathématiques de chaque utilisateur, par la création automatique de livres. Deuxièmement, cette plate-forme est multilingue avec la possibilité pour

l'utilisateur de changer très facilement de langue. Le revers de la médaille est que la création de contenus est (pour l'instant) assez lourde. Pour que le modèle d'apprentissage et la création automatique de livres fonctionnent, les objets d'apprentissage doivent être enrichis par des informations supplémentaires (qu'on appelle « méta-données »), par exemple pour un exercice interactif, il faut renseigner son objectif pédagogique, préciser qu'il s'agit d'un exercice d'entraînement, indiquer sur quels concepts mathématiques il porte, quelles compétences et connaissances sont visées, indiquer son degré de difficulté, etc. De ce fait, la création de contenu demande outre des connaissances mathématiques et didactiques, également une bonne connaissance de la manière dont les contenus sont structurés dans Math-Bridge, ce qui freine le développement de nouveaux contenus adaptés aux différents contextes d'utilisation envisageables.

Un autre point crucial est le fait que plus la base contient d'objets d'apprentissage, mieux la création automatique de livres fonctionne. Ceci est dû au fait que, pendant la création automatique, les livres sont assemblés selon les méta-données correspondant à la demande de l'utilisateur. Si le système ne trouve pas d'objets annotés par les méta-données recherchées, le livre assemblé ne correspondra peutêtre pas suffisamment bien aux besoins de l'utilisateur. Étant donné que le projet a débuté il y a seulement deux ans et demi et que les contenus sont structurés en cinq collections venant des partenaires (comme décrit dans la section 1), la base de donnée n'est pas encore suffisamment riche pour que la création automatique fonctionne d'une manière optimale sur les curricula susceptibles d'être concernés dans les différentes langues.

Afin de pouvoir dépasser cette difficulté, un outil de création de contenu très facilement maniable est en cours de développement. Ceci devrait faciliter l'édition et la création de contenu pour Math-Bridge et contribuer à enrichir la base au fil du temps si suffisamment d'institutions l'utilisent.

Une dimension essentielle (non-technique) est la question de scénarios d'usage possibles. Nous en avons présenté plusieurs (section 4), mais pour l'instant nous ne sommes pas en mesure de dire lesquels seraient les plus adaptés pour utiliser au mieux les possibilités de Math-Bridge.

6. Références

- Math-Bridge project, funded by the eContentplus programme, ECP-2008-EDU-428046 Coordination: DFKI, Stuhlsatzenhausweg 3, D-66123 Saarbrücken, Germany http://www.math-bridge.org/
- [2] Melis, E.; Goguadze, G.; Libbrecht, P.; Ullrich, C. (2009). Culturally Adapted Mathematics Education with ActiveMath, Artificial Intelligence and Society, Special Issue on Enculturating HCI, Volume 24, pp. 251 - 265
- [3] Mercat C. (2009). Math-Bridge, un pont (européen) entre lycée et université, *MathémaTICE*, no. 16, http://revue.sesamath.net/spip.php?article244
- [4] Zsidó J.; Durand-Guerrier V. (2011). Math-Bridge, une plateforme multilingue, à paraître dans les Actes du 16ème école d'été de didactique des mathématiques, Carcassonne

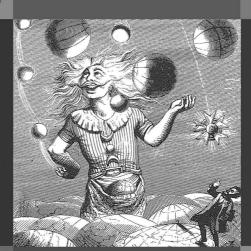
Société Mathématique de France PRIX D'ALEMBERT PRIX ANATOLE DECERF

Prix décernés par la Société Mathématique de France et par la fondation Anatole Decerf (sous l'égide de la fondation de France)

Ils visent à encourager la diffusion de la connaissance des mathématiques vers un large public.

D'un montant de 2000 euro chacun, ils récompenseront :

- une œuvre ou un parcours ayant intéressé le public aux développements des mathématiques
- un ouvrage d'enseignement, de vulgarisation ou de pédagogie des mathématiques



FONDATION DE FRANCE

> candidatures à déposer avant le : jeudi 15 mars 2012

> > Société Mathématique de France IHP - 11 rue Pierre et Marie Curie 75231 Paris cedex 05 http: smf.emath.fr

Société Mathématique de France Société Mathématique de France Bibliothèque nationale de France

un texte, un mathématicien

2012

mercredi 18 janvier 18h30 **Emmanuel Giroux**

Les colonnes de Gergonne, dualité, controverse et paradoxe



mercredi 8 février 18h30

Tadashi Tokieda

Science à partir d'une feuille de papier

mercredi 14 mars 18h30

Gauss et les débuts de la théorie des nombres moderne



Tangente

{BnF

mercredi 4 avril 18h30 Sylvia Serfaty

Le calcul révolutionnaire du jeune mathématicien turinois

de France





Société

Mathématique



Bibliothèque François Mitterrand – Grand auditorium Quai F. Mauriac 75013 Paris – métro : quai de la Gare ou Bibliothèque Entrée libre – http://smf.emath.fr/BNF/2012

Cap'Maths: 3 millions pour les maths

Martin Andler¹

Dans un article paru dans le numéro 128 de la *Gazette*, j'avais présenté le projet Cap'Maths qui avait été soumis, en février 2011, au Commissariat général à l'investissement dans le cadre de l'appel à projets « Culture scientifique et technique et égalité des chances ».

Par un communiqué du 14 septembre 2011, Luc Chatel, ministre de l'Éducation nationale, de la jeunesse et de la vie associative, Laurent Wauquiez, ministre de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, Frédéric Mitterrrand, ministre de la Culture et de la communication, Maurice Leroy, ministre de la Ville, Eric Besson, ministre chargé de l'Industrie, de l'énergie et de l'économie numérique et René Ricol, Commissaire général à l'investissement ont annoncé les premières décisions : Cap'Maths faisait partie des 12 projets sélectionnés par le jury présidé par Bernard Chevassus-au-Louis parmi les 70 projets candidats, avec une subvention de 3 millions d'euros!

À l'heure de la mise sous presse de la *Gazette* (12 décembre 2011), Animath, porteur du consortium Cap'Maths, est sur le point de signer la convention avec l'Agence nationale de rénovation urbaine, l'organisme qui est gestionnaire de cet appel pour le compte de l'État. Dès que la signature sera intervenue, nous pourrons lancer le financement des actions Cap'Maths.

Pour une présentation détaillée des objectifs de Cap'Maths, je renvoie à mon article de la *Gazette* 128, ainsi qu'au site d'Animath (www.animath.fr) sur lequel on trouvera l'ensemble du dossier. Rappelons seulement en quelques lignes les points principaux de cette entreprise :

- développer les actions de culture mathématique en direction du grand public et plus particulièrement en direction des jeunes;
- mettre l'accent sur les actions s'adressant aux jeunes des zones socialement défavorisées et/ou géographiquement isolées, ainsi qu'aux filles;
 - permettre par ces actions de réduire l'échec scolaire et le décrochage;
 - encourager l'engagement des jeunes dans des études scientifiques longues.

Progresser dans cette direction s'appuiera d'abord sur les structures associatives et institutionnelles existantes, en leur donnant les moyens d'amplifier leurs actions. Rappelons que quasiment toutes les associations et structures menant de telles actions sont dans Cap'Maths, et que celles qui ne le sont pas ont vocation à rejoindre le consortium. Mais progresser suppose une professionnalisation croissante de leur mode de fonctionnement, en permettant ainsi aux acteurs, le plus souvent enseignants, enseignants-chercheurs et chercheurs volontaires, de se concentrer sur le contact avec le public. Un autre volet important est de développer la cohérence des actions menées, ainsi que leur visibilité, en particulier sur le web.

Le financement de 3 millions est prévu pour couvrir une période de quatre années, de début 2012 à fin 2015. Et après ? La convention mentionnée ci-dessus est très claire : nous devons mettre en place une structure pérenne, qui pourrait être une

¹ Université de Versailles St-Quentin, président d'Animath.

100 M. ANDLER

fondation, qui continuera le travail mené d'ici là; en particulier, cette structure aura la capacité de lever des fonds publics et privés.

Gouvernance

Cap'Maths est gouverné par un conseil d'orientation et un comité de pilotage, composé des représentants des membres du consortium.

Conseil d'orientation de Cap'Maths: Académie des sciences (section de mathématiques): Jean-Pierre Demailly. Académie des sciences (section des sciences mécaniques et informatiques): Yves Meyer. Association des directeurs d'IREM: Anne-Marie Aebischer. Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public: Eric Barbazo. Conférence des présidents d'université: Jean-Yves Mérindol. Femmes et mathématiques: Catherine Bonnet. Institut national des sciences mathématiques CNRS: Elise Jeanvresse. Institut national de recherche en informatique et automatique: Antoine Petit (Thierry Viéville). Ministère de l'éducation nationale (DGESCO): Jérôme Teillard. Ministère de l'éducation nationale (IGEN): Charles Torossian. Société française de statistique: Jean-Michel Poggi. Société de mathématiques appliquées et industrielles: Maria Esteban (Anne de Bouard). Société mathématique de France: Bernard Helffer (Nalini Anantahraman). Union des professeurs de spéciale: Serge Belhassen.

Il se réunira pour la première fois le 24 janvier 2012 et précisera alors son propre mode de fonctionnement.

Fonctionnement

Cap'Maths fonctionnera par appels à projets. Le premier appel devrait intervenir dès la signature de la convention. Il devrait donc être paru avant la publication de cette Gazette, avec un délai pour déposer des projets au 31 janvier. En moyenne, les projets financés par Cap'Maths devraient apporter un co-financement au moins égal à 50% du total. Toute structure, de quelque nature qu'elle soit, peut proposer un projet dans le cadre de cet appel.

L'appel à projets concerne toute activité allant dans le sens des objectifs généraux de Cap'Maths. Toutes les informations sont disponibles sur notre site www.animath.fr.

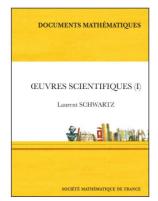
Mobilisation

S'il s'en fait beaucoup actuellement en matière de culture mathématique et en direction des jeunes, Cap'Maths ne réussira pas sans une mobilisation bien plus forte des mathématiciens, qu'ils soient universitaires, chercheurs, enseignants etc. Il y a énormément à faire en matière d'animation mathématique en direction des jeunes, et *chaque département ou laboratoire* devrait être porteur de plusieurs initiatives allant dans cette direction : club ou cercle de mathématiques pour élèves motivés, stages pendant les vacances dans le cadre de MathC2+, conférences de vulgarisation dans le cadre des conférences « Un texte, un mathématicien » ou des Promenades mathématiques, etc. Pour le bon fonctionnement de Cap'Maths, il serait très utile d'avoir des correspondants locaux (dans les universités) et académiques (pour le monde scolaire).

Mais cet effort ne pourra être soutenu dans la durée que si les institutions, universités, CNRS, Inria, les UFR, laboratoires et départements, et au delà, la communauté mathématique elle-même, s'engagent et soutiennent les projets et les collègues qui les mènent. Soyons honnêtes, cela est très loin d'aller de soi : pour chaque collègue qui s'investit dans la popularisation des mathématiques, le choix est bien souvent pénalisant sur le plan de la carrière. Si l'on veut vraiment en faire plus, nous avons besoin que les doctorants, post-docs, jeunes maîtres de conférences, ainsi que les collègues confirmés s'impliquent. Et nous devons leur permettre de le faire sans sacrifier leur travail de recherche, leur enseignement, voire leur vie familiale.

Il y a pour nous un enjeu crucial et qui devrait être mobilisateur : attirer des étudiants dans des cursus à forte composante mathématique, et les faire venir à l'université dans nos licences et nos masters. Or nous sommes aujourd'hui dans une situation où l'attractivité des cursus que nous proposons est insuffisante par rapport à la concurrence des écoles d'ingénieurs et de gestion ou les études médicales. Plus grave encore, le nombre de lycéens susceptibles de faire ce genre d'études est globalement trop faible. C'est sur ces deux aspects que nous pouvons agir, en particulier par le développement des actions d'animation mathématique en direction des jeunes.

102 – Publicité –



Documents Mathématiques 9-10-11 Œuvres scientifiques (I), (II), (III) Laurent Schwartz

DM 9. Ce premier volume des œuvres scientifiques de Laurent Schwartz couvre la première moitié de ses travaux en Analyse et EDP. Après une préface de Claude Viterbo enrichie de quelques photos, on y trouvera une notice sur les travaux scientifiques, par Laurent Schwartz lui-même, quelques documents originaux (lettres, notes de cours), une présentation de la théorie des distributions pour laquelle Laurent Schwartz a reçu la médaille Fields en 1950, par Bernard Malgrange, ainsi qu'une sélection d'articles couvrant la période de 1944 à 1954.

Prix public*: 70 € - Prix membre: 49 €

DM10. Ce second volume des œuvres scientifiques de Laurent Schwartz couvre la seconde moitié de ses travaux en Analyse et EDP. Après un texte d'Alain Guichardet sur Laurent Schwartz et les séminaires, on pourra y lire une sélection d'articles couvrant la période de 1954 à 1966.

Prix public* : 70 € - Prix membre : 49 €

DM11. Ce troisième volume des œuvres scientifiques de Laurent Schwartz regroupe ses travaux en théorie des espaces de Banach (1970-1996), introduits par Gilles Godefroy, et en Calcul des probabilités (1968-1987), présentés par par Michel Émery, ainsi que quelques articles de nature historique (1955-1994).

Prix public*: 70 € - Prix membre: 49 €

Prix spécial pour les trois volumes avec un DVD offert contenant deux conférences de Laurent Schwartz ainsi que l'ensemble des œuvres numérisées.

> Prix public : 190 € Prix membre des volumes groupés : 130 € *frais de port non compris

> > Société Mathématique de France







Institut Henri Poincaré 11 rue Pierre et Marie Curie F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

LIVRES

Quantitative arithmetic of projective varieties

T. Browning

Birkhaüser 2009, Progress in Math. 277, 160 p., ISBN 978-3-0346-0128-3,19 €

L'objet de ce livre est l'étude du nombre de points rationnels de hauteur bornée sur les variétés algébriques.

Expliquons cette problématique sur un exemple. La hauteur exponentielle d'un point P de l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{Q})$ de coordonnées homogènes $(x_0:\ldots:x_n)$ peut être définie par

$$H(x_0:\ldots:x_n)=\sqrt{x_0^2+\cdots+x_n^2}$$

lorsque x_0, \dots, x_n sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble. On peut alors considérer l'ensemble

$$\mathbf{P}^{n}(\mathbf{Q})_{H \leqslant B} = \{ P \in \mathbf{P}^{n}(\mathbf{Q}) \mid H(P) \leqslant B \}$$

pour tout nombre réel B. Ainsi nous avons représenté sur la figure 1 l'ensemble des points $(x,y)\in \mathbf{Q}^2$ tels que $|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1$ et $H(1:x:y)\leqslant 20$.

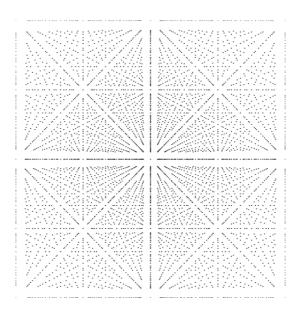


FIG. 1. Le plan projectif

104 LIVRES

Étant donné une famille finie de polynômes homogènes f_1, \ldots, f_m à coefficients dans \mathbf{Q} , il est naturel de vouloir comprendre le comportement asymptotique de l'ensemble

$$V_{H \leqslant B} = \{ P \in \mathbf{P}^n(\mathbf{Q})_{H \leqslant B} \mid f_i(P) = 0 \text{ pour } i \in \{0, \dots, m\} \}$$

lorsque B tend vers $+\infty$.

Deux approches de cette problématique sous-tendent l'ouvrage de T. Browning. La première consiste à chercher des majorations uniformes du cardinal de $V_{H\leqslant B}$ faisant intervenir le nombre m d'équations et les degrés de ces équations, mais indépendantes des coefficients des polynômes f_1,\ldots,f_m . La seconde, dont le cadre est fourni par le programme initié par V. V. Batyrev et Y. Manin vers 1989, a pour but d'interpréter de manière aussi fine que possible le comportement asymptotique de l'ensemble $V_{H\leqslant B}$.

Ce livre constitue une excellente introduction à ces deux approches et présente un choix judicieux des méthodes utilisées. En ce qui concerne les majorations uniformes, il contient en particulier une introduction aux techniques de recouvrement développées par D. R. Heath-Brown et P. Salberger qui permettent de se réduire au cas des courbes pour lesquelles on dispose des majorations de E. Bombieri, J. Pila. Pour le programme de Manin, T. Browning donne un état de la recherche actuelle pour les surfaces de Del Pezzo et présente la méthode du cercle ainsi que les techniques de descente issues des travaux de J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et P. Salberger qui permettent, via ce qu'on appelle des torseurs versels, de se ramener à des variétés dont la nature arithmétique est plus simple.

Un seul tout petit regret : dans son étude heuristique des surfaces cubiques qui clôt l'ouvrage, j'aurais aimé que l'auteur considère aussi ce que suggère l'utilisation des torseurs versels dans ce cas, mais il est vrai que la description des torseurs versels des surfaces cubiques fait intervenir le système de racines E_6 , ce qui complique cette étude.

Emmanuel Peyre, Université Joseph Fourier