SOMMAIRE DU N° 135

SMF

Mot de la Présidente

Le dernier trimestre 2012 a été dominé par la tenue des assises de l'enseignement supérieur et la recherche, avec les nombreuses discussions et prises de position qui les ont accompagnées. La SMF s'y est associée, seule ou avec la SFdS et la SMAI. Une contribution commune aux trois sociétés a été déposée sur le site des assises, et nous avons été reçus par des conseillers de la Ministre Geneviève Fioraso pour parler de la structuration des mathématiques en France et des menaces liées au système auteur-payeur des publications. Les questions de formation des enseignants ont particulièrement interpelé la SMF. Quelles seront les décisions finales, dans ce domaine comme dans d'autres ? Nous ne le savons pas au moment où j'écris ces mots. Les attentes, les espoirs, les inquiétudes, sont importantes. La SMF a tenté d'expliquer dans ses prises de position, qui sont accessibles sur notre site, ce qui nous semble particulier à notre discipline ainsi que les enjeux qui l'attendent. Des tribunes sont là pour accueillir des contributions argumentées sur certains sujets. Il est bien entendu souhaitable que la SMF mène ses réflexions en liaison avec tous ses partenaires, en particulier dans le domaine de l'enseignement, et elle veillera à multiplier les contacts au cours de l'année 2013.

Lorsque cette *Gazette* vous parviendra, l'année 2013 « Mathématiques de la planète Terre » battra déjà son plein. Et tout particulièrement l'opération « Un jour, une brève », dont la SMF est l'un des partenaires. Vous trouverez dans ce numéro une description des activités liées à cette année spéciale et je ne peux que me faire l'écho, ici, de l'appel à l'aide des organisateurs.

La nécessité de réfléchir aux moyens d'attirer les jeunes vers les disciplines scientifiques et le désir de faire comprendre ce qu'est la recherche en mathématiques au grand public nous entraînent vers des activités de communication auxquelles la plupart d'entre nous sont mal préparés tandis que d'autres s'y lancent avec bonheur. Certaines des activités de la SMF et ses partenaires sont de vrais succès, comme « Une question un chercheur » à l'IHP, dont les vidéos sont disponibles sur notre site, ou la journée des prix de l'académie des sciences, cette année à Tours. Le besoin de faire circuler l'information amène la SMF à utiliser de nouveaux outils. Nous avons maintenant un compte Twitter, accessible à partir du site de la SMF.

Du côté des publications la vente d'automne est terminée. Un nouveau site est en préparation. Des changements sont en cours, dont les lecteurs de la *Gazette* seront tenus au courant. Ils ne portent évidemment pas sur la qualité des textes à laquelle nous sommes profondément attachés, mais visent à garantir l'équilibre de l'activité d'édition de la SMF.

Il me reste à vous souhaiter, à tous et à toutes, une excellente année 2013. Espérons que la bonne santé des mathématiques françaises, particulièrement mise en valeur par la moisson des prix 2012, perdurera. Les préoccupations actuelles sont importantes. En particulier vis-à-vis des effectifs d'étudiants, des décisions quant à l'enseignement des mathématiques, des choix concernant les structures de l'enseignement supérieur et de la recherche ainsi que leur financement. Les prévisions sont difficiles à faire. C'est dans ce contexte incertain que tous nos vœux vont aussi à la communauté mathématique.

Le 2 janvier 2013
Aline Bonami

MATHÉMATIQUES

La conjecture de Poincaré

Gérard Besson

En cette année du centenaire de la disparition de H. Poincaré nous ne pouvions pas ne pas évoquer son apport à la topologie et en particulier ce qui est connu comme la « conjecture » de Poincaré et sa preuve par G. Perelman. L'histoire de ce problème est emblématique de ce qu'une question bien posée peut apporter aux mathématiques. On lui doit des développements importants en topologie mais aussi en géométrie et en analyse géométrique. Au moment où ces lignes sont écrites nous apprenons la disparition de W. Thurston, un acteur majeur de cette histoire. C'est lui qui a placé le problème dans un cadre géométrique plus vaste ouvrant ainsi la porte à l'analyse sur les variétés. Quelques années après le travail de Thurston l'outil principal, le flot de Ricci de R. Hamilton, était en place et deux décennies après la preuve était faite. Dans le texte qui suit nous essayons de présenter le long et passionnant chemin vers la solution. Mais que reste-t-il à faire en dimension 3 ?

1. Introduction

Dans son étude de la topologie algébrique dont il pose les fondements Henri Poincaré commet une faute dans la preuve du théorème de dualité qui porte son nom. C'est P. Heegard, dans sa thèse, qui la relèvera (voir [2] pour un historique plus complet). Pour revenir sur ces questions, Poincaré publie entre 1899 et 1904 les cinq compléments à l'*Analysis Situs* ([20]). Il y est question de la notion de groupe fondamental. Ici, pour être le plus élémentaire possible, nous nous contenterons de définir la *simple connexité*. Pour simplifier nous considérons une variété connexe, orientable et fermée, c'est-à-dire compacte sans bord. Une telle variété, appelée X car c'est l'inconnue, est de nos jours dite *simplement connexe* si toute courbe fermée tracée sur elle se rétracte continûment sur un point. La terminologie actuelle diffère de celle utilisée par Poincaré qui utilisait l'expression « simplement connexe » pour désigner une sphère. Toutes les sphères $\mathbf{S}^\mathbf{n}$ pour $n \geqslant 2$ sont simplement connexes, ce sont bien sûr les exemples fermés les plus simples. Dans le second complément à l'*Analysis Situs*, publié en 1900, Poincaré énonce qu'une sphère de dimension $n \geqslant 2$ est caractérisée par la nullité de tous ses nombres de Betti d'ordres différent de 0 et n. Il n'en donne aucune preuve, fort heureusement car l'énoncé est faux ! En 1904, dans le cinquième complément, il construit un contre-exemple à cette affirmation utilisant une technique due à Heegard. À la fin du cinquième complément il pose alors la question suivante : « *Est-il possible que le groupe fondamental d'une variété V de dimension 3 se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas la* [sphère] *?* ». Il n'utilisait pas le terme « sphère », mais l'expression « simplement connexe », comme il a été signalé plus haut. Bien qu'il ne s'agisse pas à proprement parler d'une conjecture, il est (était) coutume d'énoncer la question sous la forme suivante :

Conjecture 1.1 (Conjecture de Poincaré)**.** *Soit X une variété fermée et simplement connexe de dimension 3 alors X est homéomorphe à $\mathbf{S}^3$.*

Dans les années qui suivirent plusieurs tentatives ont été faites, soit pour confirmer soit pour infirmer la conjecture. Par exemple, dans un article de 1934 ([29]), J. H. C. Whitehead suggère une méthode très simple : si on enlève un point à une variété X de dimension 3, fermée et simplement connexe, on obtient une variété ouverte contractile ; or la seule variété ouverte contractile de dimension 3 est $\mathbf{R}^3$, X est donc la compactification en un point de $\mathbf{R}^3$, c'est-à-dire est homéomorphe à $\mathbf{S}^3$. Rappelons qu'une variété ouverte (c'est-à-dire non-compacte et sans bord) est dite *contractile* si elle se rétracte continûment à l'intérieur d'elle-même sur un de ses points. L'année suivante il s'aperçoit que la deuxième assertion est fausse ([30]) et construit une variété ouverte de dimension 3 qui est contractile mais non homéomorphe à $\mathbf{R}^3$ et qui porte maintenant son nom ([31]). On peut considérer cette assertion comme une version non compacte de la question de Poincaré, alors Whitehead montre que cette conjecture « non compacte » est fausse ! Nous reviendrons plus loin sur les variétés de Whitehead.

La question posée par Poincaré a été un formidable moteur pour la recherche en géométrie et topologie mais au fond elle ne nous apprend que peu de choses sur les variétés de dimension 3, tout au plus permet-elle de caractériser l'une d'elles, la sphère. Il faut attendre les travaux de W. Thurston dans les années 70 pour qu'il n'y ait plus aucun doute sur la véracité de la conjecture et surtout pour qu'une image complète de la dimension 3 se dégage.

2. La conjecture de géométrisation

Les surfaces topologiques fermées, connexes et orientables sont obtenues en recollant à la sphère $\mathbf{S}^2$ des tores à un trou par somme connexe. Elles sont classifiées par leur genre, c'est-à-dire le nombre de tores nécessaires à leur construction (voir la figure 1).

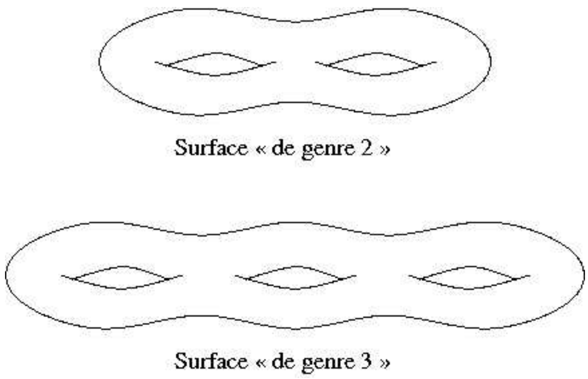


FIG. 1. Genre d'une surface

Du point de vue de la géométrie, elles sont à classer en trois catégories : celle qui porte une géométrie elliptique (genre 0), celle qui porte une géométrie plate (genre 1) et celles qui portent une géométrie hyperbolique (genre $\geqslant 2$). La sphère $\mathbf{S}^2$ peut être munie d'une métrique riemannienne de courbure constante $+1$. Le tore à un trou peut être décrit comme un quotient riemannien du plan euclidien par un réseau. Il existe donc une infinité de métriques riemanniennes plate sur un tore. Enfin, les surfaces de genre supérieur ou égal à 2 portent une infinité de métriques hyperboliques, c'est-à-dire dont la courbure est constante égale à -1.

Qu'en est-il de la dimension 3 ?

Il faut d'abord réduire le problème et c'est l'objet de la décomposition de Kneser. Rappelons que la *somme connexe* $Z = X \sharp Y$ de deux variétés X et Y de dimension n consiste à retirer un boule topologique (homéomorphe à une boule euclidienne) dans X et dans Y et à recoller les variétés à bord ainsi obtenues le long de leur bord qui est homéomorphe à une sphère $\mathbf{S}^{n-1}$.

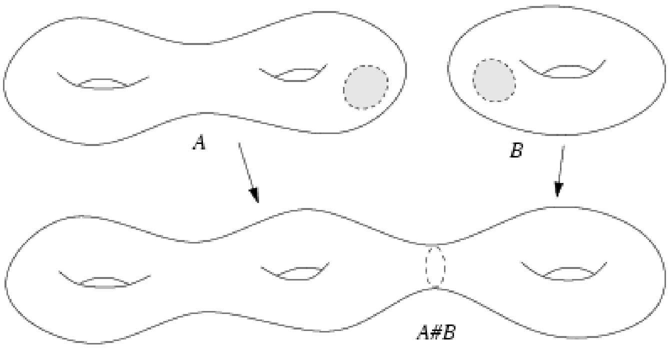


FIG. 2. Somme connexe

Une variété X est dite triviale si elle est homéomorphe à une sphère (voir [19]). Enfin, une variété de dimension 3, fermée, connexe, orientable et non triviale est dite première si elle n'admet pas de décomposition $X = Y \sharp Z$ en somme connexe de deux variétés non triviales. La terminologie est bien choisie, les variétés premières jouent, pour les variétés de dimension 3, le rôle des nombres premiers. Alors,

Théorème 2.1 (H. Kneser)**.** *Toute variété X fermée, connexe, orientable et non triviale de dimension* 3 *admet une décomposition en somme connexe de la forme :*

$$X = X_1 \sharp X_2 \sharp \ldots \sharp X_k \, ,$$

où les X_k sont des variétés fermées, connexes, orientables et premières.

Cette formulation est celle de J. Milnor dans ([19]) où il montre également qu'elle est essentiellement unique (à permutation près). Dans cette décomposition les sphères $\mathbf{S}^2$ qui ne bordent pas des boules sont celles le long desquelles on fait les sommes connexes, sauf dans le cas de $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$ où les sphères $\{\star\} \times \mathbf{S}^2$ ne bordent pas de boules mais la variété est quand même première (essayez de la décomposer en somme connexe !).

C'est la différence qu'il y a entre les variétés *irréductibles* et les variétés premières. Une variété X orientable et de dimension 3 est dite irréductible si toute sphère $\mathbf{S}^2$ plongée dans X borde une boule topologique $\mathbf{B}^3$ plongée. Ainsi $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$ est première mais pas irréductible, et c'est la seule parmi les variétés fermées. En conséquence, dans la décomposition ci-dessus certains X_k sont homéomorphes à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2$ et les autres sont irréductibles. Ce sont donc les variétés irréductibles qu'il nous faut connaître. Pour des définitions plus complètes et plus précises le lecteur peut se reporter à l'introduction de [4].

Afin d'atteindre les briques de base, celles qui sont, par exemple, hyperboliques, plates ou sphériques, il faut encore décomposer les variétés irréductibles fermées. Rappelons quelques définitions. Une surface orientable de genre au moins 1, plongée dans une variété fermée de dimension 3, est dite *incompressible* si le plongement induit une injection de son groupe fondamental. Une variété fermée, orientable de dimension 3 est dite *atoroïdale* si elle ne contient aucun tore essentiel. Une excellente référence pour les prémices de la topologie de dimension 3 est [15]. On a alors,

Théorème 2.2 (Décomposition JSJ)**.** *Pour une variété X, fermée, de dimension* 3*, irréductible et orientable il existe une collection $\mathcal{T} \subset X$ de tores incompressibles et disjoints telle que chaque composante de $X \setminus \mathcal{T}$ est soit atoroïdale, soit Seifert. Une telle collection avec un nombre minimal de tores est unique à isotope prêt.*

La décomposition s'appelle JSJ car elle a été construite simultanément par W. Jaco et P. Shalen ([16]) et K. Johannson ([17]). On voit apparaître ici une nouvelle classe de variétés, celles dites de *Seifert*. Il s'agit de variétés feuilletées par des cercles où chaque cercle a un voisinage tubulaire saturé. Essentiellement, il s'agit de fibrations en cercles sur des orbifoldes de dimension 2, c'est-à-dire de vraies fibrations en cercles à l'exception de quelques points de l'espace des feuilles. Dans [15, 33], on trouvera des définitions plus précises. Elles ont été classifiées bien avant les travaux de Thurston et Perelman par H. Seifert [28]. La conjecture de Thurston, dite de géométrisation, peut alors s'énoncer comme suit.

Conjecture 2.3 (Conjecture de géométrisation)**.** *Une variété fermée, irréductible et orientable de dimension* 3 *peut être découpée le long d'une collection finie de tores, deux à deux disjoints, en des variétés* géométriques.

C'est une version édulcorée qui est énoncée ici. Il existe un énoncé pour les variétés à bord et non orientables que l'on trouve dans [6] où un traitement très complet est proposé. Le mot nouveau est « géométriques ». La conjecture propose de décomposer notre variété de dimension 3 en sous-variétés géométriques. Précisons la notion.

Une variété riemannienne est *homogène* si son groupe d'isométries agit transitivement et elle est dite *unimodulaire* si elle admet un quotient de volume fini. Une *géométrie* est une variété riemannienne homogène, simplement connexe et unimodulaire. Une variété X est *géométrique* si elle est un quotient d'une géométrie M par un sous-groupe discret de $\mathrm{Isom}(M)$, son groupe d'isométries, agissant librement sur M. Notons qu'une variété géométrique peut être ouverte. En dimension 2 on ne compte que trois géométries, toutes de courbure constante. En dimension 3, Thurston montre qu'il y a huit géométries. Trois sont de courbure constante (homogènes et isotropes) : $\mathbf{S}^3$, $\mathbf{R}^3$ et l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^3$. Deux sont des produits : $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$

et $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$. Les trois autres sont le groupe d'Heisenberg $\mathbf{Nil}$, le revêtement universel $\mathbf{SL}^2(\mathbf{R})$ et enfin le seul groupe résoluble simplement connexe et unimodulaire de dimension 3, noté $\mathbf{Sol}$ (voir [34] et [24]).

La conjecture affirme donc qu'après découpage d'une variété irréductible le long de tores bien choisis, les variétés ouvertes obtenues portent des métriques riemanniennes bien particulières. Parmi elles certaines seront des variétés hyperboliques éventuellement à pointes, celles-ci correspondant aux tores de bord, s'il y en a. Toutes les autres géométries sont construites à l'aide de variétés de Seifert.

En dimension 2 des découpages analogues existent. On peut, par exemple, découper une surface compacte le long d'une collection de cercles en sorte que les variétés obtenues après remplissage des cercles par des boules soient des tores à un trou. Ce pourrait être l'analogue de la décomposition de Kneser. Une autre collection de cercles donne le découpage en « pantalons », surfaces bordées par trois cercles qui sont les briques de base de la géométrie hyperbolique de dimension 2. Ce serait plutôt là l'analogue de la décomposition JSJ. Mais l'analogie a ses limites car, en particulier, une sphère et un tore de dimension 1 sont les mêmes objets.

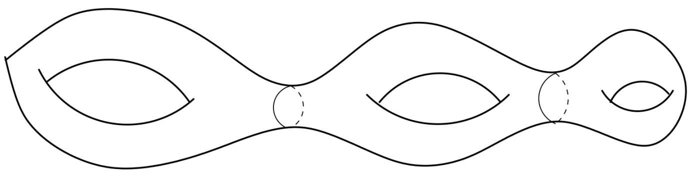


FIG. 3. Décomposition en 3 tores

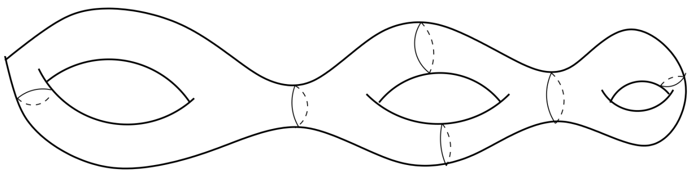


FIG. 4. Décomposition en 4 pantalons

On voit que cette conjecture de géométrisation, qui n'est pas si facile à énoncer, donne une image complète de la topologie des variétés de dimension 3. La géométrisation des variétés de Seifert était connue (voir [5]). Par ailleurs, W. Thurston a démontré un cas important, celui des variétés de *Haken*, c'est-à-dire des variétés compactes, orientables, irréductibles qui contiennent une surface fermée plongée de manière incompressible ou dont le bord est non vide.

Théorème 2.4 (Théorème d'hyperbolisation de Thurston)**.** *La conjecture de géométrisation est vraie pour les variétés de Haken.*

Et la conjecture de Poincaré ? Elle en est une conséquence, car une fois la classification prouvée il suffit de constater que, parmi les variétés géométriques, la seule variété fermée simplement connexe est la sphère.

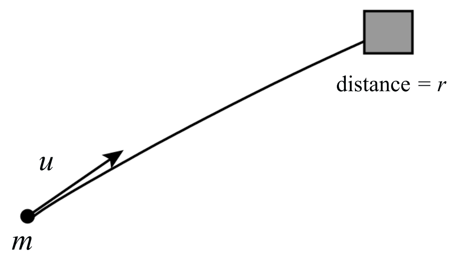


FIG. 5. Courbure de Ricci et volume

Il y a deux points très importants sur lesquels il faut insister. Tout d'abord la conjecture de Poincaré est replacée dans un cadre général qui permet de décrire toutes les variétés de dimension 3 ; la cohérence de l'ensemble est telle qu'il n'est plus possible de douter de la véracité de ces conjectures. Ensuite, la géométrie riemannienne fait son entrée sur la scène, elle fournit des outils nouveaux et en particulier ouvre grand la porte à l'analyse !

3. Le flot de la courbure de Ricci

L'invariant fondamental de la géométrie riemannienne est la courbure ; nous devrions dire les courbures. Il s'agit toujours de mesurer l'écart entre l'espace considéré et l'espace euclidien qui est isométrique à son espace tangent en chaque point. Suivant le point de vue choisi, on définit le tenseur de courbure, monstrueux objet algébrique, la courbure sectionnelle qui en est une simplification, la courbure de Ricci dont nous allons longuement parler et enfin la courbure scalaire qui est une fonction à valeurs réelles sur la variété (d'où son nom). C'est la courbure de Ricci qui est l'acteur principal de cette aventure.

Faire de la géométrie, c'est essentiellement mesurer des longueurs de courbes, des distances et des angles. L'outil qui le permet est la métrique riemannienne, souvent notée g, qui est un produit scalaire euclidien sur chaque espace tangent dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ du point base. Dans le cas de l'espace $\mathbf{R}^n$ muni d'un produit scalaire euclidien, celui-ci ne varie pas d'un point à l'autre. Dans le cas général, la courbure rend compte de cette variation. La courbure de Ricci est liée à l'élément de volume. Plus précisément, si en un point m on considère un vecteur unitaire u, la géodésique, courbe réalisant la distance, partant de m et tangente à u est définie de manière unique et sa longueur est la distance tant qu'on la parcourt sur de petites longueurs r. Tout point dans un voisinage de m se représente donc par un couple (u, r). On décrit ainsi une carte autour de m. Alors pour u et r donnés, le volume d'un cube élémentaire C (grisé sur la figure) est son volume euclidien corrigé par un terme qui fait intervenir la courbure de Ricci.

La formule est

$$\mathrm{vol}_g(C) = (1 - \frac{r^2}{6}\mathrm{Ric}(u,u) + o(r^2))\,\mathrm{vol}_{\mathrm{eucl}}(C).$$

La courbure de Ricci apparaît donc au deuxième ordre et, par conséquent, est quadratique en *u* (comme la notation le suggère). En fait c'est une forme bilinéaire symétrique sur chaque espace tangent, c'est-à-dire un objet de même nature que la métrique. Là réside une partie de son intérêt, prescrire la courbure de Ricci c'est s'imposer autant de contraintes qu'il y a de degrés de liberté.

Une variété est dite d'*Einstein* si sa courbure de Ricci est constante, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ telle que

$$\mathrm{Ric} = \lambda g\,.$$

La recherche de métriques d'Einstein est une activité importante à laquelle des livres entiers sont consacrés (voir la « bible » [1]) et comme leur nom l'indique leur origine est dans les travaux d'A. Einstein en relativité ([35]). En dimension 3 les métriques d'Einstein sont de courbure sectionnelle constante, ce qui réduit les possibilités aux trois géométries : elliptique, plate et hyperbolique. Les métriques riemanniennes d'Einstein sont les points critiques d'une fonctionnelle naturelle (voir ([1]).

Le flot de Ricci est un système dynamique sur l'espace des métriques riemanniennes décrit par l'équation différentielle ci-dessous. On cherche une famille de métriques $g(t)$ ($\mathcal{C}^\infty$ en t) telle que :

$$\frac{dg}{dt} = -2\mathrm{Ric}_{g(t)}\,. \tag{1}$$

Cette équation a un sens précisément car la courbure de Ricci et la métrique sont des objets de même nature. Les dessins ci-dessous montrent ce qui se passe pour la métrique canonique sur une sphère, qui disparaît en un temps fini mais a un passé infini et sur un espace hyperbolique, qui a un passé fini mais un futur infini.

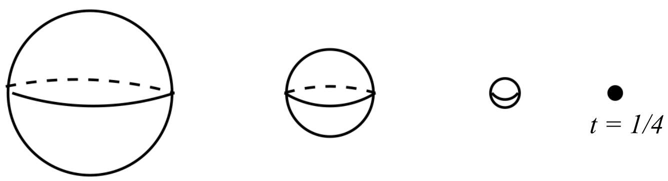


FIG. 6. Évolution d'une sphère standard

FIG. 7. Évolution d'une variété hyperbolique

D'où vient l'idée du flot de la courbure de Ricci ? Le premier article dans lequel un résultat fort est obtenu comme fruit de l'étude de ce flot est celui de R. Hamilton de 1982 ([13]). Certains attribuent à Daniel Friedan, physicien théoricien, la paternité de cette idée ([12]). Toutefois, Dan Friedan lui-même, se réfère à Jean-Pierre Bourguignon (voir [7], question 3.24) qui pose effectivement la question d'un flot sur l'espace des métriques riemanniennes tangent à la courbure de Ricci vue comme un champ de vecteurs sur cet espace. Ce point de vue est séduisant mais malheureusement moins efficace que l'approche de Richard Hamilton. Dans ([13]), l'idée de départ est de suivre le gradient d'une fonctionnelle naturelle, l'intégrale sur la variété de la courbure scalaire, dont les points critiques seraient les métriques d'Einstein. Malheureusement, cela produit une équation d'évolution sans solutions, même en temps petit ! En la modifiant, R. Hamilton introduit le flot de la courbure de Ricci (éventuellement une version normalisée afin que le volume de la variété reste constant). Elle est traduite en une équation d'évolution vectorielle faiblement parabolique, c'est-à-dire à quelques (importants) détails techniques près en une équation de la chaleur non-linéaire. Il faut prouver l'existence de solutions en temps petit et ensuite étudier leur évolution. Le premier résultat frappant est le suivant.

Théorème 3.1 (R. Hamilton [13]). *Si X est une variété fermée de dimension 3 qui admet une métrique riemannienne de courbure de Ricci strictement positive alors X admet une métrique de courbure constante positive.*

En d'autres termes X est le quotient de la sphère $\mathbf{S}^3$ par un sous-groupe de son groupe d'isométries. Ce résultat était conjecturé par J.-P. Bourguignon. Si X est supposé simplement connexe alors la conclusion est celle de la conjecture de Poincaré avec « malheureusement » une hypothèse supplémentaire sur la courbure. Mais c'est ouvertement pour prouver les conjectures de Poincaré et de Thurston que R. Hamilton se lance dans une étude systématique du flot de Ricci (voir [14]). Le compte à rebours est lancé !

Pour prouver le théorème ci-dessus, le schéma est le plus simple possible : on montre que la famille de métriques converge vers une métrique de courbure constante (d'Einstein). On se convainc en effet aisément que les métriques riemanniennes d'Einstein sont des points limites du système dynamique (1) après normalisation (on impose le volume constant, par exemple). L'équation à étudier est une équation de la chaleur non linéaire dont la courbure de la donnée initiale (la métrique $g(0)$) représenterait une distribution de chaleur sur X. L'évolution tend à la répartir uniformément sur toute la variété. Ce schéma fonctionne parfaitement en dimension 2 comme le montre R. Hamilton dans un article ultérieur. En dimension 3, l'hypothèse sur la courbure de Ricci permet de le faire fonctionner également. Dans les autres cas, des singularités peuvent apparaître, c'est-à-dire des temps pour lesquels la courbure devient infinie sur une partie de la variété. En dimension 4, R. Hamilton tente de franchir ces singularités en modifiant X par chirurgie. Essentiellement, il s'agit de découper un voisinage du lieu où la courbure (scalaire) devient infinie, de reboucher de manière standard et enfin de relancer le flot avec une nouvelle métrique sur la variété, éventuellement non connexe, ainsi obtenue. Toutefois, R. Hamilton se heurte au problème d'une possible accumulation des temps de chirurgie.

C'est alors que le dernier personnage fait son apparition, il s'agit de G. Perelman qui dépose entre novembre 2002 et juillet 2003 trois articles sur ArKiv ([21], [22] et [23]). Au moment où il s'intéresse au flot de Ricci, ce n'est pas un illustre inconnu, il a déjà fait quelques coups d'éclat et son apport est considérable. Son travail est d'une inventivité extraordinaire et, en même temps, un tour de force technique. D'abord il montre que le flot de Ricci peut être interprété comme le flot du gradient d'une fonctionnelle dont les variables sont la métrique riemannienne et une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur X. Ensuite, il décrit exactement le voisinage des points où la courbure scalaire est grande pour la métrique qui évolue. Le seuil est universel et le voisinage est métriquement proche d'un cylindre (essentiellement). C'est l'outil qui permet de faire une chirurgie efficace. On montre ainsi que les temps de chirurgie ne s'accumulent pas. Il reste à étudier l'évolution de la métrique en grand temps.

Pour prouver la conjecture de Poincaré, G. Perelman montre que si X a un groupe fondamental fini le flot de Ricci, avec chirurgies s'arrête en temps fini, c'est-à-dire que la courbure scalaire devient grande partout. Comme on connaît la géométrie dans le voisinage d'un point où la courbure scalaire est grande, on en déduit que X est recouverte par de tels voisinages (dits canoniques) ; il suffit alors de constater que si X est simplement connexe ce ne peut être que la sphère. Si le groupe fondamental de X est infini, il faut alors étudier l'évolution de la métrique lorsque le temps devient infini. Remarquons que l'on retrouve ici la dichotomie des figures 6 et 7. On notera aussi que, dans le premier cas, on ne sait pas démontrer que la courbure tend à être constante, contrairement au théorème de Hamilton. En fait, la seule situation pour laquelle on sait prouver que la métrique converge c'est lorsqu'elle devient hyperbolique. On peut énoncer une version simple des résultats de G. Perelman sous la forme suivante.

Théorème 3.2 (G. Perelman, [21, 22, 23])**.** *Soit X une variété de dimension 3 fermée, orientable et atoroïdale, alors*

i) *si $\pi_1(X)$ est fini, alors X est un quotient de $\mathbf{S}^3$,*
i) *si $\pi_1(X)$ est infini, alors X est hyperbolique ou Seifert.*

Les remarques suivantes peuvent aider le lecteur.

– L'équation (1) se traduit, pour l'évolution de la courbure, par une équation de réaction-diffusion. Pour la courbure scalaire, par exemple, nous obtenons,

$$\frac{d\mathrm{Scal}}{dt} = \Delta \mathrm{Scal} + 2|\mathrm{Ric}|^2 .$$

La norme du tenseur de Ricci apparaît ; retenons qu'il s'agit d'un terme quadratique en la courbure. Dans une telle équation, le Laplacien est le terme de diffusion qui tend à « étaler » la courbure sur la variété, à la rendre constante. Le terme quadratique est la réaction qui tend à conduire à l'explosion, c'est-à-dire à faire tendre Scal vers l'infini. C'est une compétition entre ces deux aspects qu'il faut arbitrer. R. Hamilton montre que, pour les surfaces, la diffusion gagne toujours, de même pour les variétés de dimension 3 de courbure de Ricci positive, c'est l'essence de [13]. Dans les autres cas, la réaction joue son rôle et la courbure scalaire peut tendre vers l'infini sur certaines parties de la variété. Un des outils analytiques le plus utilisé dans cette théorie est le principe du maximum pour les équations paraboliques. Il permet un contrôle fin de l'évolution de la courbure scalaire régie par l'équation ci-dessus.

– Le plus surprenant pour ceux qui ne connaissent pas la version linéaire, l'évolution de la chaleur, est la non-localité du flot. Le fermé E sur lequel la courbure est nulle peut être très grand, mais si ce n'est pas tout X la métrique évolue, même sur E, bien que sa dérivée initiale y soit nulle. On peut imaginer que le flot

« explore » toute la variété avant de démarrer. C'est ce caractère global qui est l'un des principaux intérêts pour la topologie.

– Toutefois, si la courbure est proche de zéro au voisinage d'un point, on peut estimer le temps nécessaire pour qu'elle devienne nettement non nulle. À défaut de localité, Perelman introduit la notion de pseudo-localité qui permet une estimation de ce temps. C'est un outil puissant, très utile dans bien d'autres problèmes.

– On pourrait dire beaucoup plus sur le flot de Ricci en dimension 3, mais ce n'est pas le propos de ce texte. On trouvera dans ([2]) un exposé grand public de la technique et dans ([4, 18, 8, 10, 11]) tous les détails.

On mesure le chemin parcouru par la question posée par H. Poincaré. D'un problème de topologie à l'énoncé élémentaire, on arrive après 70 ans de travail à une question de géométrie-topologie dont le but est une classification complète des variétés de dimension 3. W. Thurston clarifie tellement bien la situation que dans la foulée R. Hamilton introduit et développe l'outil analytique central et 20 ans plus tard G. Perelman pose la dernière pierre de l'édifice.

La situation en dimension 3 est-elle complètement comprise ?

4. Et après ?

D'autres conjectures concernant les variétés de dimension 3 sont en train de « tomber » comme la conjecture « virtuellement Haken » dont la preuve a été annoncée récemment (voir [36]) et la conjecture de Cannon (voir [37]). Le plus étonnant est que les méthodes d'attaque de ces deux questions sont totalement différentes de celle décrite ci-dessus. La topologie est donc mûre pour clore le chapitre de la dimension 3. Mais pour la géométrie c'est loin d'être le cas.

L'ensemble des variétés topologiques fermées de dimension 3 est dénombrable mais ce n'est pas le cas pour les variétés ouvertes, c'est-à-dire non compacte sans bord. Il est connu qu'il existe une infinité non dénombrable de variétés de dimension 3 contractiles et non homéomorphes à $\mathbf{R}^3$. En particulier, la majorité de ces variétés n'a aucun quotient qui est une variété fermée et certaines n'ont pas de quotient du tout. On peut voir l'introduction de [32] pour une liste exhaustive de références.

La construction de Whitehead produit un exemple de variété contractile et non homéomorphe à $\mathbf{R}^3$. Rappelons l'idée que l'on peut approfondir grâce à [38], texte qui est accompagné de dessins. On considère une suite de tores pleins (appelés aussi tores solides) emboîtés,

$$\cdots T_i \subset T_{i-1} \subset \cdots \subset T_2 \subset T_1.$$

Le tore plein T_i est plongé dans T_{i-1} comme le voisinage tubulaire d'une courbe nouée. Plus précisément, la réunion de cette courbe et du méridien de T_i constitue l'*entrelac de Whitehead* (c'est là que les images de [38] sont utiles !). Le tore solide T_1 est un sous-ensemble de la sphère $\mathbf{S}^3$, c'est-à-dire $\mathbf{R}^3$ auquel on a ajouté un point. L'intersection suivante, appelée *continuum de Whitehead*,

$$W = \cap_i T_i$$

est un sous-ensemble de $\mathbf{S}^3$ de type Cantor. Alors, on vérifie que la variété $X = \mathbf{S}^3 \setminus W$ est contractile et n'est pas homéomorphe à $\mathbf{R}^3$. Cette construction autorise de multiples variantes. Voici quelques faits remarquables.

– $X \times \mathbf{R}$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^4$ et $X \times X$ à $\mathbf{R}^6$.
– On peut construire un nombre non dénombrable d'exemples.
– On peut construire un nombre non dénombrable d'exemples similaires qui ne sont pas plongeables dans $\mathbf{S}^3$.

Alors se pose la question de savoir quelles sont les métriques riemanniennes dont ces espaces peuvent être munis. En fait la question peut être

Question 4.1. *Si E est un fermé de $\mathbf{S}^3$ quelle est la « plus belle » métrique sur $\mathbf{S}^3 \setminus E$?*

Telle quelle, la question est un peu absurde, mais il existe des cas pour lesquels elle est très pertinente. Par exemple, une partie des travaux de W. Thurston décrit les structures géométriques sur le complémentaire dans $\mathbf{S}^3$ de nœuds ou d'entrelacs (qui sont des fermés de $\mathbf{S}^3$). Dans la même veine, J. Souto montre dans ([25]) qu'il existe des ensembles de Cantor de $\mathbf{S}^3$ tels que leur complémentaire est hyperbolique. Qu'en est-il alors lorsque $E = W$?

La variété de Whitehead ne peut pas porter de métriques de courbure négative ou nulle car sinon, par un théorème d'Hadamard, elle serait difféomorphe à $\mathbf{R}^3$. Pour la même raison mais grâce à un résultat plus récent elle ne peut pas porter de distance CAT(0). Le résultat de ([9]) montre qu'elle ne peut pas porter de métriques de courbure scalaire uniformément positive, c'est-à-dire supérieure à un nombre strictement positif. Des résultats analogues figurent dans [3]. Mais nous ne savons rien, pour l'instant, des métriques admissibles sur de tels espaces. Une autre question est de savoir comment le flot de Ricci se comporte. Les résultats de ([9]) montrent que celui-ci ne peut pas s'éteindre en temps fini.

Rien ne dit que la réponse à la question 4.1 sera intéressante, mais il faut constater que nous ne connaissons rien de la géométrie de la majorité des variétés de dimension 3. Les contre-exemples à une extension aux variétés ouvertes de la conjecture de Poincaré recèlent encore de nombreux mystères et c'est un espace vierge qu'il nous faut explorer. C'est la question posée par H. Poincaré en 1904 qui trouve ici, plus de cent ans après, un écho fascinant.

5. Références

[1] Arthur L. Besse, *Einstein Manifolds*, Reprint of the 1987 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
[2] Laurent Bessières, Gérard Besson et Michel Boileau, *La preuve de la conjecture de Poincaré d'après Perelman* L'héritage scientifique de Poincaré, 263–277. Éric Charpentier, Étienne Ghys et Annick Lesne éditeurs. Ed Belin, Échelles, Paris 2006, ISBN 2-7011-4332-2.
[3] Laurent Bessières, Gérard Besson et Sylvain Maillot, *Ricci flow on open 3-manifolds and positive scalar curvature*, Geom. & Topol. 15 (2011), no 2, 927-975.
[4] Laurent Bessières, Gérard Besson, Michel Boileau, Sylvain Maillot et Joan Porti, *Geometrisation of 3-manifolds*, tracts in mathematics 13, European Mathematical Society, 2010.
[5] Michel Boileau, Sylvain Maillot et Joan Porti, *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures*. Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses, 15. Société Mathématique de France, Paris, 2003.
[6] Francis Bonahon, *Geometric structures on 3-manifolds*, in : Handbook of geometric topology, 93-164, North-Holland, Amsterdam, 2002.
[7] Jean-Pierre Bourguignon, *Ricci curvature and Einstein metrics*, in Proc. Conf. Differential Geometry and Global Analysis, Berlin, Lect. Notes in Math. 838 (1981), 42–63, Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

[8] Cao Huai Dong et Zhu Xiping, *A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures : Application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow*, Asian Journal of Mathematics 10 (2) : 168–498.
[9] Stanley Chang, Shmuel Weinberger et Guoliang Yu, *Taming 3-manifolds using scalar curvature*, Geom Dedicata (2010) 148 :3–14.
[10] John Morgan et Gang Tian, *Ricci Flow and the Poincaré Conjecture*, Clay Mathematics Institute. ISBN 0-8218-4328-1.
[11] John Morgan et Gang Tian, *Completion of the Proof of the Geometrization Conjecture*, arXiv :math/0809.4040, 2008, http ://arxiv.org/abs/0809.4040v1
[12] Daniel Friedan, *Nonlinear Models in $2+\varepsilon$ Dimensions*, Physical Review Letters 45 (1980) 1057.
[13] Richard Hamilton *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Diff. Geom 17 (1982), 255–306.
[14] Richard Hamilton *Non-singular solutions of the Ricci flow on three manifolds*, Comm. Anal. Geom. 7 (1999), 695-729.
[15] Alan Hatcher, *Notes on basic* 3*-manifolds topology*, Cornell University, Ithaca, New-York, 2000. http ://www.math.cornell.edu/Hatcher/3M/3Mdowloads.html 209
[16] William Jaco et Peter Shalen, *Seifert fibered spaces in* 3*-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. 21 (1979), 220, 3.
[17] K. Johannson, *Homotopy equivalence of* 3*-manifolds with boundary*, Lecture Notes in Math. 761, Springer, Berlin 1979. 3
[18] Bruce Kleiner et John Lott, *Notes on Perelman's papers*, Geometry & Topology, volume 12, pp. 2587-2855, 2008.
[19] John Milnor, *A unique decomposition theorem for 3-manifolds*, American Journal of Mathematics 84 (1962), 1–7.
[20] Henri Poincaré, *Œuvres*, tome VI, Gauthiers-Villars (Paris), 1953.
[21] Grigory Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv :math.DG/0211159 [math.DG].
[22] Grigory Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, arXiv :math.DG/0303109 [math.DG].
[23] Grigory Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, arXiv :math.DG/0307245 [math.DG].
[24] Peter Scott, *The geometries of 3-manifolds*, (errata) Bull. London Math. Soc. 15 (1983), no. 5, 401-487.
[25] Juan Souto Matthew Stover, *A Cantor set with hyperbolic complement*, to appear in Conformal Geometry and Dynamics.
[26] Herbert Seifert et William Threlfall, *Topologische Untersuchung des Diskontinuitätsbereicheendlicher Bewegungsgruppen des dredimensionalen sphärischen Raumes*, Math. Ann., 104 (1931), 1-70. 2
[27] Herbert Seifert et William Threlfall, *Topologische Untersuchung des Diskontinuitätsbereicheendlicher Bewegungsgruppen des dredimensionalen sphärischen Raumes (Schluß)* , Math. Ann., 107 (1933), 543-586. 2
[28] HerbertSeifert,*TopologiedreidimensionalergefarserterRümer*, Acta Math.60(1933),147-238. 2
[29] John Henri Constantine Whitehead, *Certain theorems about three-dimensional manifolds (I)*, Quarterly J. Math., 5, 308–320, 1934.
[30] John Henri Constantine Whitehead, *Three-dimensional manifolds (corrigendum)*, Quarterly J. Math., 6, 80, 1935.
[31] John Henri Constantine Whitehead, *A certain open manifold whose group is unity*, Quarterly J. Math., 6, 268–279, 1935.
[32] David Wright, *Contractible open manifolds which are not covering spaces*, Topology, vol 31, 2, 281–291.
[33] `http://en.wikipedia.org/wiki/Seifert\_fiber\_space`
[34] `http://en.wikipedia.org/wiki/Geometrization\_conjecture`
[35] `http://en.wikipedia.org/wiki/Einstein\_manifold`
[36] `http://en.wikipedia.org/wiki/Virtually\_Haken\_conjecture`
[37] `http://en.wikipedia.org/wiki/James\_W.\_Cannon`
[38] `http://en.wikipedia.org/wiki/Whitehead\_manifold`

Ce qu'Alan Turing nous a laissé

Maurice Margenstern[1]

En ce centième anniversaire de la naissance d'Alan Turing, il est tout à fait intéressant de souligner que la *Gazette des mathématiciens* veuille lui rendre hommage. Je suis heureux de l'opportunité qui m'est offerte de faire sentir au lecteur, à travers ces quelques pages, toute l'importance de la vie et de l'œuvre d'Alan Turing. Ce qu'il nous a laissé en effet n'a pas fini de changer le monde.

1. Introduction

Alan Turing a laissé peu d'articles, moins d'une dizaine en tout, autant dire que selon les critères actuels d'évaluation des scientifiques, sa production serait considérée comme négligeable. Or, l'œuvre d'Alan Turing n'est rien moins que la naissance d'une science nouvelle, l'informatique, dont tout le monde reconnaît qu'elle constitue une révolution majeure de notre temps.

L'année 1936 marque une date importante dans l'histoire des sciences. Elle est une date de convergence révélant un concept nouveau. Depuis le début des années trente du siècle dernier, Alonzo Church est à la recherche d'un fondement sûr des mathématiques : la crise des fondements est encore très présente dans les esprits. Pour cela, il définit un langage formel très réduit lui permettant d'exprimer une large classe de fonctions. C'est le λ-calcul que Church mettra plusieurs années à perfectionner. Dans le même temps, un jeune étudiant, Stephen Kleene, travaille sur les fonctions récursives, objet d'études de plusieurs mathématiciens, qui s'efforce de caractériser ces fonctions définies à partir de la notion de récurrence. Leurs travaux s'ordonnent autour de la notion d'algorithme qui commence à se dégager. Chruch annonce déjà une thèse qui porte son nom, stipulant que toute fonction calculable, le terme n'est pas encore formellement défini, peut s'exprimer par un terme du λ-calcul. La thèse n'est pas encore acceptée par Gödel quand un nouveau venu apporte un nouveau concept qui va changer les perspectives. Il s'agit d'Alan Turing avec la machine qui porte son nom. C'est en 1936 que Turing publie son célèbre article *On computable numbers with an application to the Entscheidungs problem* dans les prestigieux *Proceedings of the London Mathematical Society*, voir [10]. Cette même année, Turing, Kleene et Church démontrent que les termes du λ-calcul, les fonctions récursives et les machines de Turing calculent le même ensemble de fonctions. Un nouveau concept est né. Gödel va tout de suite comprendre son importance et la machine de Turing va le convaincre d'accepter la thèse de Church.

Il est intéressant de constater que l'année 1936 s'est produite avant l'année 1945, année de la construction des premiers ordinateurs. Nous avons ici le premier exemple de l'application immédiate à l'échelle de l'histoire d'un concept théorique de première importance. Qu'une science nouvelle, l'informatique, trouve sa date de naissance en 1936 ne nous surprendra pas, mais avant d'aborder cette question, le lecteur voudra peut-être en savoir plus sur ce qu'a démontré Turing.

[1] Professeur émérite de l'université de Lorraine, Laboratoire d'Informatique Théorique et Appliquée, EA 3097.

2. La machine de Turing : puissance et limites

La machine de Turing est un objet théorique très facile à définir. Elle consiste en trois éléments. Un ruban, une tête de lecture/écriture dite plus simplement tête de la machine et une liste d'instructions. Le ruban, infini des deux côtés pour la commodité, est divisé en cases dont chacune contient un symbole appartenant à un ensemble fini appelé l'*alphabet* de la machine. La tête de la machine est posée sur une case dite *case vue*. La tête se trouve dans un *état* appartenant à un autre ensemble fini appelé *les états* de la machine, et la liste d'instructions est une suite finie de mots de la forme $\mathbf{q}xMy\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ représentant des états, x et y des lettres de l'alphabet, M un mouvement de la tête de la machine. Ce mouvement de la tête nous conduit à décrire le fonctionnement de la machine. La machine fonctionne à des instants successifs d'une horloge discrète. À chaque temps, la machine exécute une instruction, dite l'*instruction courante*. Pour déterminer cette instruction, on regarde la lettre x contenue dans la case vue et l'état $\mathbf{q}$ de la machine. Dans la liste des instructions, il y en a une et une seule qui commence par $\mathbf{q}x$ par construction de la liste. Soit $\mathbf{q}xMy\mathbf{p}$ cette instruction. La tête de la machine remplace x par y dans la case vue, la tête se déplace sur le ruban en fonction de ce qu'indique M et la tête se trouve dans le nouvel état $\mathbf{p}$. Trois mouvements sont possibles : aller sur la case voisine de gauche, aller sur la case voisine de droite, rester sur la case vue, M vaut respectivement G, D et S.

Le temps étant discret, on désigne les instants par des entiers naturels. Il y a un instant initial, habituellement 0, et à cet instant on définit la **configuration initiale**. On suppose que toutes les cases du ruban sauf un nombre fini d'entre elles contiennent un même symbole fixé à l'avance et qu'on appelle le **blanc**. Une case contenant le blanc est dite **vide**. La configuration initiale est le plus petit segment du ruban contenant toutes les cases non vides ainsi que la case vue. Le mot du ruban constitué par la configuration initiale est aussi appelé la **donnée** de la machine. À partir de là il est facile de définir la configuration C_t au temps t. En effet, C_{t+1} contient au plus une case de plus que C_t, soit à gauche de la case la plus à gauche de C_t, soit à droite de sa case la plus à droite. On dit enfin que le calcul de la machine s'arrête s'il existe un temps T pour lequel le nouvel état de l'instruction courante est l'**état d'arrêt** ou bien l'instruction courante ne change ni la lettre de la case vue, ni l'état de la machine, ni la position de la tête sur le ruban. Quand le calcul de la machine s'arrête, on dit aussi qu'il s'agit d'un calcul fini.

Cette description, assez proche de la description originelle de Turing, est plus proche de celle de Post qui publia la même année que Turing, mais quelques mois plus tard la même notion de machine que lui. Si la machine de Turing décrite dans l'article de Post l'est plus simplement que dans l'article de Turing lui-même, l'article de Turing va beaucoup plus loin que celui de Post. C'est que dans son article, Turing tire deux propriétés fondamentales de son modèle : l'universalité et les problèmes indécidables.

Mais avant, nous donnons un exemple très simple de machine de Turing pour les lecteurs qui n'en seraient pas suffisamment familiers.

L'alphabet de la machine comporte trois lettres, 0, 1 et $\star$, le blanc étant 0. La donnée sera de la forme $\ldots 01^n \star 1^m 0 \ldots$, où 1^h signifie qu'on a h 1 contigus. On peut encore le définir par : 1^0 est vide et 1^{h+1} s'écrit 1^h1. La machine que nous considérons est représentée par une table. En effet, comme une instruction d'une machine de Turing est déterminée par deux informations, la lettre contenue dans la case vue et l'état de la machine, on peut disposer le reste de l'instruction dans une table à deux entrées comme celle qui est indiquée par la Table 1. Ainsi, l'instruction $\mathbf{q}xMy\mathbf{p}$ se trouve-t-elle sous la forme $yM\mathbf{p}$ à la ligne $\mathbf{q}$ sous la colonne x. Dans la Table 1, suivant la convention introduite par Minsky, on écrit toujours M et on n'écrit y ou $\mathbf{p}$ que s'ils sont différents de l'élément courant correspondant. Cela rend la table plus lisible en mettant mieux en évidence le mouvement de la tête de la machine. En exécutant ce programme, on constate qu'il transforme $\cdots 01^n \star 1^m 0 \cdots$ en $\cdots 01^{n+m} 0 \cdots$. Cette machine effectue donc l'addition en unaire de deux nombres naturels écrits en unaire. Le programme effectue cette opération de la façon suivante. Au départ, la tête de la machine est dans l'état 1 sur le 1 le plus à gauche, à défaut sur $\star$. La tête se déplace alors vers la droite toujours dans l'état 1, passe l'étoile qu'elle remplace par 1, passe la nouvelle plage de 1 et s'arrête sur le premier 0. Là elle repasse à gauche dans l'état 2. Elle rencontre ainsi le 1 le plus à droite dans l'état 2. Elle remplace ce 1 par 0 et repart à gauche dans l'état 3. Rencontrant le 0 le plus à gauche, elle s'arrête sur le voisin de droite de ce symbole, ce qu'indique le point d'exclamation à la troisième ligne de la table 1. Le lecteur peut vérifier que la machine trouve bien $0 + 0 = 0$ et $n + 0 = 0 + n = n$.

	0	1	$\star$
1	$G\,2$	D	$1\,D$
2		$0\,G3$	
3	$D!$	G	

TAB. 1. Un programme de machine de Turing pour l'addition en unaire

On constate que la description du mouvement de la tête de la machine nous renseigne assez complètement sur le résultat de son action. Nous allons utiliser cette propriété au prochain paragraphe.

2.1. Puissance : l'universalité

L'universalité est sans doute la propriété la plus spectaculaire. Elle s'énonce intuitivement de la façon suivante : il existe une machine de Turing U qui, à partir d'une description d'une autre machine de Turing M et d'une donnée de M va calculer la même chose que M. On dit aussi que U **simule** M.

Cette description de M et de ses données fait entrer en scène une notion tout à fait fondamentale qui est au cœur de la science informatique : le **codage**. On ne peut pas définir de machine universelle sans définir un codage. Mais qu'est-ce qu'un codage ? L'écriture elle-même n'est-elle pas un codage ? Le codage est toujours présent comme nous venons de le remarquer et, dans le même temps, il est très arbitraire. On peut varier les codages à l'infini et il n'y en a pas un qui s'impose vraiment parmi tous ceux qu'on peut choisir. Les raisons dites de commodité sont le plus souvent dictées par l'habitude. Dans les ouvrages traitant de la récursivité, il n'est pas rare de voir qu'on s'en affranchit dès que possible.

L'existence d'une machine universelle est assez facile à prouver. C'est ce que nous allons faire ici pour les machines à un ruban et une tête comme nous venons de les définir. Avant de définir le codage, nous allons d'abord décrire un *scénario* : ce que fait la machine universelle. Pour cela, il faut planter le décor : le ruban de la machine universelle U est partagé en deux parties. À gauche, sur un segment suffisamment grand, un codage C de la machine M qu'il s'agit de simuler. À droite, les données D de M elles aussi codées. La machine U va installer deux repères, l'un dans C et l'autre dans D. Le repère dans C est positionné sur l'instruction courante et le repère dans D l'est sur la case vue par M. La tête de U va donc faire des allers et retours entre le repère de C et celui de D tant que l'instruction courante n'aura pas été complètement réalisée. La première tâche est d'écrire y à la place de x, puis, quand c'est fait, de placer le repère de C sur le nouvel état et enfin, de positionner le repère de D sur la nouvelle case vue.

Précisons un peu les choses. La table des instructions de la machine peut être linéarisée en écrivant sur le ruban le codage de chaque ligne, l'un après l'autre. Chaque segment correspondant au codage d'une ligne i de la table est constitué par les codages concaténés des codages des instructions que la machine est susceptible d'appliquer quand elle se trouve dans l'état correspondant à la ligne i. Avant d'indiquer un codage, remarquons que U est censée être une machine universelle pouvant simuler n'importe quelle machine M, y compris des machines qui ont un alphabet plus gros que celui de M et un nombre d'états plus grand. C'est la raison pour laquelle le codage est inévitable car c'est lui qui va permettre de coder un nombre arbitraire de symboles en n'utilisant qu'un nombre fini fixé de symboles ainsi que de coder un nombre arbitraire d'états. En théorie, on n'a besoin que de deux symboles distincts pour effectuer un tel codage. Mais pour obtenir une machine plus facile à comprendre, nous en utiliserons une dizaine.

Pour coder les lettres de M, nous utiliserons un seul symbole : $\mathtt{1}$. Si a_1, ..., a_k sont les lettres de l'alphabet de M, nous coderons a_i par $\mathtt{1}^i$. Ainsi, si le blanc est représenté par a_1, il sera codé $\mathtt{1}$. De même, les n états de M seront codés par un seul symbole $\mathtt{a}$, $\mathtt{a} \neq \mathtt{1}$, en utilisant de même une énumération des états de M de 1 à n. La partie du ruban destinée aux données de M contient un codage de la configuration courante. Chaque case du segment qui sert de support à cette configuration est codée par $\mathtt{U1}^i$ où a_i est la lettre contenue dans cette case. Le symbole $\mathtt{U}$ est un délimiteur à gauche permettant de reconnaître le codage de la configuration. Dans la case vue, on trouve $\mathtt{W}$ à l'endroit de la case que U est en train d'examiner. Il s'agit du $\mathtt{U}$ initial lorsque U commence l'exécution de l'instruction courante. Dans le codage de la table, on a deux délimiteurs, eux aussi à gauche : $\mathtt{X}$ délimite les lignes de la table et $\mathtt{Y}$ délimite une instruction. Un second $\mathtt{W}$ est placé dans l'instruction courante. Au début de l'exécution de l'instruction, W remplace le Y qui délimite l'instruction. Dans le codage d'une instruction, on ne code que $yM\mathbf{p}$ sous la forme $1^y\mathtt{M}\mathtt{a}^p$ où on suppose que y est la position de ce symbole dans l'alphabet a_1, ..., a_k de M, que $\mathbf{p}$ est le p^{e} état dans l'énumération des états de M et que M est une des lettres G, D et S représentant un mouvement respectivement à gauche, à droite ou sur place. Le symbole de la case vue est en fait codé par le nombre de Y qui figurent avant le symbole M utilisé par l'instruction courante avant que W y figure depuis le X le plus à droite avant cette instruction. Le nombre de X à gauche de l'instruction représente l'état courant de la machine. On suppose bien sûr que les symboles 1, a, G, D, S, U, X, Y et W sont deux à deux distincts.

Tous les détails sont présents pour transcrire ce que doit faire U, ce qui se déduit aisément du scénario que nous avons brossé. Nous arrêtons ici ce qui fait l'objet d'un véritable cours. Signalons une implantation simple en deux dimensions, [3].

Il y aurait beaucoup à dire sur les machines de Turing universelles. On me permettra de faire référence à une série de travaux sur les *petites machines de Turing universelles*. À partir de la fin des années cinquante, sous l'impulsion de Shannon, des travaux se sont évertués à obtenir des machines universelles avec le plus petit nombre possible d'états et de symboles. Il n'est pas possible d'entrer dans le détail de ces travaux. Mentionnons simplement que les plus petites machines ont 4 symboles et 6 états, [7] et que ce résultat est assez récent. Il me semble en outre que ces résultats absolument non triviaux qui peuvent paraître folkloriques au premier abord doivent faire réfléchir. Si on code la table de la machine 6×4 de T. Neary, [7], avec l'alphabet utilisé par l'ADN, en reprenant le codage décrit ici, on obtient une suite de molécules qui ressemble à de l'ADN mais qui n'en est pas, bien-sûr, mais en plus, ce brin de faux ADN est plus petit que le plus petit virus bactériologique. De quoi je pense expliquer certains phénomènes observés sur les colonies de bactéries, voir par exemple [1], ainsi que l'échec prévisible d'une course effrénée aux antibiotiques. Le prochain paragraphe expliquera au lecteur non averti la raison de cette mise en garde.

Mais auparavant, il est bon de tirer un premier enseignement, sur lequel Turing a lui-même insisté.

Avec l'existence d'une machine de Turing universelle qui plus est, assez facile à construire, capable de calculer n'importe quelle fonction, pourvu qu'on sache la programmer, on se rend compte qu'on n'a pas besoin de construire des machines spécialisées pour accomplir une tâche particulière. Au fond, il suffit d'une seule machine pour tout faire. Et comme cette machine est relativement simple, chacun est en principe capable de la programmer pour ses propres besoins de calcul. Comme le pensait Turing, cette voie est celle qu'a choisie une partie de l'informatique, ce dont témoigne la diffusion immense des ordinateurs personnels de par le monde. Corollaire de ce choix : un immense effort de programmation qui a fait et fait toujours l'objet d'importantes recherches. Si assez tôt cet effort a pu s'appuyer sur des compilateurs assez rapidement de plus en plus efficaces, on le doit au support théorique : un compilateur n'est pas autre chose que l'implantation d'une machine universelle. Pour autant, l'obtention de machines spécifiques reste un domaine vivace qui fait lui aussi l'objet d'importantes recherches. Le prochain paragraphe nous permettra de comprendre pourquoi.

2.2. Limites : les problèmes indécidables

C'est que la découverte de Turing présente un double caractère. La médaille de l'universalité a un revers : les limites de la calculabilité algorithmique. En termes simples, si l'universalité permet de calculer tout ce qui est calculable par une seule machine, on ne peut pas en revanche tout calculer.

En effet, dans son article fondateur, voir [10], la formalisation de sa machine permet à Turing de donner une réponse à un des problèmes posés par Hilbert en 1900 au Congrès international des mathématiciens qui s'était tenu à Paris. En effet, comme l'indique le titre de cet article, Turing répond à l'*Entscheidungsproblem*, c'est-à-dire, au problème de la décision, et il répond par la négative. Précisément, Turing démontre qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de résoudre le problème de la décision c'est-à-dire permettant de savoir si un énoncé clos du calcul des prédicats du premier ordre est démontrable ou pas. La preuve repose sur la démonstration d'une propriété en apparence plus faible concernant un problème particulier, le *problème de l'arrêt des machines de Turing*. En effet, en utilisant le codage que nous avons défini au paragraphe précédent, on peut ordonner ces codes lexicographiquement de sorte que nous pouvons les énumérer. On dira qu'on a *numéroté* les machines de Turing. On peut aussi numéroter les données des machines de Turing en suivant les mêmes principes sachant qu'on peut facilement énumérer toutes les suites finies de nombres naturels. Ainsi peut-on formuler le problème suivant : existe-t-il une machine de Turing A qui appliquée à (x, y) avec x et y nombres naturels, va donner pour résultat 1 si la machine de Turing de numéro x appliquée à sa donnée de numéro y s'arrête et va donner pour résultat 0 si la machine ne s'arrête pas quand on la lance sur cette donnée. Si une telle machine A existait, on pourrait construire une machine B qui fonctionnerait ainsi : B appliqué à x vaut 1 si A appliqué à (x, x) vaut 0 et B ne termine pas son calcul si A appliqué à (x, x) vaut 1 : il suffit de lancer B dans une boucle infinie si le calcul de A sur (x, x) vaut 1. La machine B a un numéro b. Que se passe-t-il si on applique B à b ? Si B appliqué à b termine son calcul, par définition de B, on trouve 1. Ce qui veut dire que A appliqué à (x, x) vaut 0, ce qui signifie, par définition de A, que la machine de numéro b, c'est-à-dire B, appliquée à b ne termine pas son calcul. Contradiction puisqu'on a supposé que B termine son calcul. Donc B ne termine pas son calcul. Donc A appliqué à (b, b) vaut 0 et donc, par construction de B, B termine son calcul et vaut 1. De cette nouvelle contradiction, on déduit que A ne peut pas exister. On dit que le problème de l'arrêt est **indécidable** puisqu'il n'admet pas d'algorithme de décision.

Tout comme Turing, effectuons un pas de plus. Désignons par $\mathbf{K}$ l'ensemble des entiers positifs n tels que la machine de numéro n appliquée à sa donnée de numéro n termine son calcul. Par ce qu'on vient de voir, il n'existe pas d'algorithme permettant de savoir si n n'est pas dans $\mathbf{K}$. Sinon, comme il est facile de montrer qu'on peut énumérer n par un algorithme, en faisant fonctionner ces deux algorithmes en parallèle on saurait toujours si n est dans $\mathbf{K}$ ou dans son complémentaire $\overline{\mathbf{K}}$. De cette propriété de $\mathbf{K}$, on déduit presque immédiatement que le problème de la décision est indémontrable. En effet, il suffit d'écrire que M s'arrête sur la donnée de même numéro m que M si et seulement si on peut prouver $\exists w\, A_M(w)$ où A_M est une formule du calcul des prédicats construite à partir de M et ne contenant que des quantificateurs bornés. En effet, A_M dit que

w est le code d'une suite finie d'entiers w_i, $i \in \{0..N+1\}$ où w_i est le code d'une configuration de M, que w_0 est la donnée de numéro m de M avec la tête de M sur la case qui convient, information contenue dans m, que w_{i+1} se déduit de w_i par l'application d'une instruction unique de la table de M, que $w_N = w_{N+1}$ et que pour tout $i < N$, $w_{i+1} \neq w_i$. Le codage étant fixé, on déduit $N+2$, la longueur de la suite codée par w par des fonctions primitives récursives, c'est-à-dire, obéissant à un schéma de récurrence simple, il n'est pas possible d'en dire plus ici, et que l'extraction des w_i à partir de w et les diverses contraintes portant sur w_i et w_{i+1} sont vérifiables par des fonctions également primitives récursives construites à partir des caractéristiques de M. Il est alors clair que si on a un algorithme de décision pour les formules du calcul des prédicats du premier ordre, on a un algorithme de décision pour l'appartenance d'un entier positif à $\mathbf{K}$.

En utilisant une machine universelle, on voit en fait que le problème de l'arrêt d'une telle machine sur ses données est indécidable. Cependant, pour une machine universelle U, on peut exhiber une donnée sur laquelle la machine universelle ne s'arrête pas. En effet, on construit à partir de U une machine M de la façon suivante. Les données de M sont celles de U. On obtient M sur la donnée de numéro x en appliquant la machine de numéro x à sa donnée de numéro x, ce qu'on peut noter $U(x,x)$. Puis, quand le travail de U est terminé, s'il se termine, on remplace la première lettre de la configuration finale de U par une autre lettre. Ceci suppose qu'on travaille avec un alphabet comportant au moins deux lettres, mais sinon, on ne fait que des trivialités. Soit m un numéro de la machine M. Lançons M sur m. Si U s'arrête sur m, on n'obtiendra pas le résultat de l'application de M à m à cause de la définition du travail de M. Mais ceci contredit l'universalité de U. Donc U ne s'arrête pas sur m. En creusant un peu cette preuve, on peut voir qu'en fait il y a un nombre infini de données sur lesquelles la machine U ne s'arrête pas.

On voit donc qu'on ne peut pas construire une machine universelle qui s'arrête sur toutes ses données. Il s'agit là d'un fait essentiel. On pourrait donc penser qu'une machine universelle est un objet dont il vaudrait mieux se passer. Ce serait perdre de vue le fait que par ailleurs, une telle machine est susceptible de calculer tout ce que nous savons produire de façon effective. Par cette expression, nous soulignons le fait que nous n'utilisons que des ressources finies : temps, espace, programme, et que les résultats aussi sont finis. De la sorte, si on dit qu'une machine universelle calcule la fonction sinus, on entend par là que si l'on donne la valeur approchée d'un angle, on obtiendra une valeur approchée de son sinus. Mieux, si on veut une précision donnée pour cette valeur, on sait quelle approximation de la valeur de l'angle il convient de fournir.

On terminera par une dernière conséquence de l'indécidabilité de l'arrêt. Cela ne figure pas dans les œuvres de Turing, cela résulte d'un théorème démontré plus tard par Rice, mais Turing aurait pu le démontrer. Disons qu'un nombre réel récursif est une suite de 0 et de 1 définie par une machine de Turing. Par exemple, on donne n à la machine et celle-ci nous retournera les n premiers termes de la suite. On conviendra que le réel représenté est $\sum_{k=0}^{\infty} a_k 2^{-k}$ où $\{a_k\}$ est la suite fournie par la machine. On a la propriété suivante : *il n'existe pas d'algorithme permettant de dire si un réel récursif est nul ou non*. La preuve est très simple. On définit une suite de nombres réels a_n de la façon suivante. On pose $a_{n,m} = 0$

si $C(n,n,m+1) \neq C(n,n,m)$ où $C(x,y,t)$ est la configuration au temps t de la machine de numéro x sur sa donnée de numéro y, et $a_{n,m} = 1$ dans le cas contraire. On voit donc que $a_n = 0$ si et seulement si la machine de numéro n ne s'arrête pas sur sa donnée de numéro n. Par ce qu'on a vu plus haut, ceci est indécidable, d'où notre assertion.
De ce que nous venons de voir, nous déduisons qu'on ne peut pas toujours prédire le comportement ultérieur d'un algorithme sur une donnée. S'il s'agit d'une donnée qu'on « maîtrise », le contrôle peut être envisagé. Si c'est une donnée inconnue, c'est un tout autre problème. Par ailleurs, le problème de l'arrêt est le plus simple qu'on puisse se poser au sujet des algorithmes. Et ce n'est pas le plus intéressant. On aimerait beaucoup disposer d'algorithmes pour nous dire si un programme qu'on a écrit est correct, c'est-à-dire que non seulement il se termine pour toutes les données « raisonnables », mais qu'il donne en plus le résultat attendu. C'est encore plus indécidable que le problème précédent : si même on savait résoudre le problème de l'arrêt, on ne saurait pas résoudre celui-là.

La situation est-elle si désespérée qu'il y paraît ?

Non, et cela pour deux raisons. La première est que les ordinateurs, bien qu'ils soient conçus, comme nous le verrons, à partir de l'idée d'une machine universelle, ne fonctionnent que dans un domaine fini : temps, espace et programme. La seconde est qu'en partant de ce qu'on maîtrise et en progressant par extensions successives, on peut aboutir à un domaine sûr et suffisamment vaste pour couvrir les besoins qui nous intéressent.

Le travail de Turing a beaucoup influé l'étude des fonctions récursives. Jusque là, les gens butaient sur le problème de définir ces fonctions de façon à ce qu'elles restent **totales**, c'est-à-dire définies partout. Kleene démontra qu'il y avait des fonctions universelles en simulant ses fonctions par des machines de Turing et il comprit que la non-totalité de ces fonctions était une propriété incontournable. Il vit aussi que si on abandonnait la condition de totalité, on obtenait un ensemble d'axiomes beaucoup plus simple débouchant sur une théorie beaucoup plus féconde.

Turing avait étudié le λ-calcul de Church. Sachant qu'il était équivalent à ses machines il savait qu'il contenait des termes universels et il en explicita un dans son article de 1936. Afin de parer à la difficulté soulevée par la non-totalité d'une fonction universelle, Church et Turing transposèrent au λ-calcul la notion de **type** que Russel avait introduite dans les *Pincipia Mathematica*. Turing montra que le λ-calcul typé ainsi obtenu était peu expressif : on obtient au plus les polynômes. On est très loin de la fonction d'Ackermann déjà connue à cette époque. C'est Gödel qui trouva la voie en 1958 avec son système T, [5]. Dans ce système typé, on admet un schéma de récurrence fonctionnelle qui permet d'aller bien au-delà des fonctions primitives, tout en restant dans un ensemble de fonctions totales. C'est un domaine passionnant qui a aujourd'hui des prolongements théoriques très importants débouchant sur des vérificateurs et des assistants de preuve semi-automatiques très performants.

3. La machine à oracle

Le problème de l'arrêt a été ressenti comme un mur infranchissable. Après l'article de Turing, la thèse de Church est énoncée de la façon suivante : tout algorithme peut être implanté sous forme d'une machine de Turing.

Bien que Turing semble avoir accepté la thèse de Church, il fut le premier à imaginer un moyen de s'en abstraire. En effet, on lui doit une extension de la notion de machine de Turing appelée **machine à oracle**, voir [11]. Afin de bien comprendre comment fonctionne cette machine, il convient de remarquer que la machine de Turing elle-même peut-être modifiée de nombreuses façons sans rien changer aux théorèmes que nous avons cités ce qui, au passage, souligne la robustesse de cette notion. Ainsi, on peut ajouter une ou plusieurs têtes sur le ruban de la machine. On peut aussi rajouter des rubans avec un nombre éventuellement différent de têtes sur chacun d'eux. Toutes ces variantes peuvent être simulées par une machine classique avec un ruban et une tête telle que nous l'avons définie au départ.

La machine à oracle est une machine de Turing ordinaire disposant d'un ruban supplémentaire avec une tête de lecture seulement sur ce ruban. La machine à oracle calcule comme une machine de Turing ordinaire sauf à certains moments où elle peut consulter le ruban supplémentaire qu'on appellera **oracle**. Une telle démarche comptera pour un pas de calcul. L'oracle possède deux propriétés essentielles : son ruban est infini et ce qui est écrit dessus et qui est donné au départ est arbitraire. On peut, par exemple, décider que l'oracle contient une suite de 0 et de 1 tels que la i-ième case du ruban contient 1 si et seulement si i est dans $\mathbf{K}$. On voit donc qu'une telle machine peut résoudre le problème de l'arrêt. On peut utiliser cette machine pour savoir si un nombre réel récursif est nul ou pas.

On se pose bien-sûr la question de savoir dans quelle mesure la nouvelle puissance des machines à oracle dépend de l'oracle. Si on fixe un oracle, on a immédiatement une infinité de machines : toutes les machines de Turing ordinaires vont pouvoir être adaptées pour fonctionner avec un oracle. L'oracle étant fixé, on pourra coder les machines à oracles et les numéroter comme les machines de Turing ordinaires. Cependant, si on prend la solution du problème de l'arrêt comme oracle, on va s'apercevoir qu'on peut à nouveau formuler des problèmes que les machines à oracle ne pourront pas résoudre, en particulier le problème de l'arrêt d'une machine à oracle : le raisonnement est exactement le même que précédemment. On peut ainsi construire une hiérarchie de fonctions. Cette hiérarchie n'est pas du tout isomorphe à $\boldsymbol{N}$ comme pourrait le laisser penser ce qui vient d'être dit. On peut munir l'ensemble des machines à oracle d'un ordre naturel : $A \leqslant B$ si et seulement si on a une machine de Turing ordinaire M définie sur tous les entiers positifs telle que x est le numéro d'une donnée de A sur laquelle A s'arrête si et seulement si $M(x)$ est le numéro d'une donnée de B sur laquelle B s'arrête. Muni de cet ordre, les oracles donnant l'arrêt de l'oracle précédent en partant de l'ensemble $\mathbf{K}$ sont bien strictement croissants et la hiérarchie des machines à oracle contient un sous-ensemble isomorphe à $\boldsymbol{Q}$ puisqu'entre deux éléments de la hiérarchie on peut en insérer un troisième. Mais en partie seulement car il y a aussi des éléments incomparables pour l'ordre ainsi défini, voir [8, 9].

4. Les ordinateurs

Une autre partie importante de l'œuvre de Turing concerne ses travaux et ses écrits sur les ordinateurs réels.

4.1. Du côté de la technologie

On ne sait pas assez que Turing s'est impliqué dans la construction des premiers ordinateurs. Certes, Turing n'a pas pris part aux travaux des Américains dans ce domaine, mais leur chef de file, von Neumann connaissait le travail de Turing de 1936. C'est ce qui ressort du témoignage de Ulam rapporté par Hodges, voir [6]. On sait qu'il y a eu quelques contacts entre Turing et von Neumann pendant le séjour de Turing à Princeton. Il semble qu'il n'ait pas été question de l'article fondamental de Turing, mais d'articles moins importants sur des sujets mathématiques plus traditionnels posés par von Neumann pour la thèse que Turing était en train de préparer et qu'il devait soutenir assez rapidement en 1938. On sait la part prise par Turing dans le travail mené au Royaume-Uni pour décoder le système de cryptage utilisé par l'Allemagne nazie pendant la second guerre mondiale, voir notamment [6]. La compétence apportée par Turing lui a valu d'être envoyé aux États-Unis pendant la guerre pour quelques semaines. Ce fut une occasion pour Turing de rencontrer à nouveau von Neumann et de faire connaissance avec Claude Shannon. On sait moins que Turing a présenté un projet de construction d'un ordinateur, le projet ACE, AUTOMATIC COMPUTING ENGINE. C'était en 1946, lorsque le gouvernement britannique a décidé de construire ses propres ordinateurs. Il y eut deux autres projets concurrents, et c'est le projet présenté par Newman qui a été retenu. Une version très réduite de l'ACE a été construite en 1950, mais Turing ne faisait déjà plus partie de l'équipe qui le réalisa.

Pourtant, l'ACE de Turing présentait une avancée très importante. Le système d'exploitation qu'il avait conçu reposait sur une conception proche de celle de nos jours. Ainsi, le système décrit dans l'ACE disposait d'un registre d'**adresses**. Le système mettait en œuvre un mécanisme d'appel des programmes identique à celui qui est utilisé aujourd'hui. Le **contexte** d'un programme est l'ensemble des variables locales qu'il manipule. Quand un programme est lancé depuis un autre programme, on sauve le contexte du programme appelant ainsi que l'adresse de retour dans l'appelant sur une pile du système d'exploitation dédiée à cet effet. Lorsque le programme appelé se termine, il suffit de dépiler l'adresse de retour et le contexte pour se retrouver dans le programme appelant au bon endroit, les variables locales retrouvant les valeurs qu'elles avaient au moment de l'appel. Les variables globales peuvent avoir été modifiées par le programme appelé, c'est conforme à leur fonction. Ce mécanisme implante parfaitement les appels de programme, y compris les appels récursifs, qu'il s'agisse de récursion simple ou de récursion croisée. C'est une structure que les étudiants en informatique apprennent aujourd'hui. Cette idée a été trouvée par Turing et figure explicitement dans son projet dans des termes évidemment différents de ceux d'aujourd'hui, mais la lecture du rapport ne laisse aucun doute à ce sujet, voir [2]. Il est intéressant de noter également que Turing accorde beaucoup d'attention à ce que nous appelons le logiciel et considère clairement le matériel comme susceptible de changements importants. Ainsi, Turing s'intéresse à la représentation des instructions de la machine pour les programmeurs, de façon à ce qu'ils puissent comprendre leur rôle et leur fonctionnement, ce qu'interdirait une représentation codée telle qu'elle l'est dans la machine. Ainsi introduit-il l'idée de **macros** qui peuvent être déployées par la machine elle-même. Il est clair que Turing envisageait la programmation comme nous le faisons aujourd'hui. Cependant, comme le projet de Turing s'inscrivait dans un concours à caractère confidentiel, son projet de l'ACE est resté dans l'ombre de nombreuses années. Il n'a été connu qu'au début des années soixante-dix, ce qui explique la datation de [2]. Cependant, ce mécanisme d'appel des programmes a été redécouvert dans les années soixante produisant les `push` et `pop` d'aujourd'hui. Une vingtaine d'années ont été perdues faute d'avoir pris le bon projet...

Cet aspect de l'œuvre de Turing est largement méconnu aujourd'hui. Le biographe de Turing que nous avons cité attribue une part de cette situation à von Neumann. Comme indiqué dans le témoignage de Ulam, von Neumann connaissait déjà le travail [10] de Turing vers 1939 au plus tard. Or, von Neumann ne va mentionner Turing qu'en 1948, dans sa fameuse conférence de Hixon, voir [15]. S'il rend hommage à son travail théorique, von Neumann cantonne la contribution de Turing au domaine théorique, passant sous silence son activité pratique qu'il connaissait pourtant fort bien.

Il est bon que ce centenaire soit une occasion de rappeler cet aspect de l'œuvre de Turing et de souligner sa volonté de faire travailler dans un même lieu théoriciens et ingénieurs, ce qu'il n'a pas toujours pu réaliser. Il a pu le faire pendant la second guerre mondiale, ce qui lui a permis de briser les codes secrets de l'Allemagne nazie. C'est cette circonstance de la guerre avec, du côté américain les calculs préparatoires à l'élaboration de la bombe atomique, qui ont fait qu'une lente évolution des calculatrices électro-mécaniques amorcée au début du 20^{e} siècle s'est trouvée formidablement accélérée par la rencontre avec de grands esprits, dont Turing qui avait trouvé le modèle théorique où s'inscrivait le futur des machines rudimentaires qui existaient alors.

4.2. Les ordinateurs pensent-ils ?

Cette question est certainement la plus connue de l'œuvre de Turing considéré par beaucoup comme le père de ce qu'on appelle aujourd'hui l'intelligence artificielle. Turing s'est vivement intéressé à cette question, et son approche mérite d'être rapportée. La partie la plus connue est exposée dans un article de Turing intitulé *Computing machinery and intelligence*, voir [13], publié dans *Mind*. Ce qui n'est qu'effleuré dans cet article de *Mind* est développé dans *Intelligent machinery*, publié un peu avant dans un rapport technique et, de ce fait, bien moins connu.

Déjà dans son article fondamental [10], pour justifier la notion d'état de sa machine, Turing fait appel à l'analyse de ce qui se passe chez un calculateur. Dès le début de l'article il prévient : *We may compare a man in the process of computing a real number to a machine which is only capable of a finite number of conditions....* Dans la section 9 de l'article, pour justifier sa formalisation, Turing revient sur la comparaison avec l'homme. *The behaviour of the computer at any moment* commence-t-il. Rappelons-nous, en 1936 il n'y a aucune ambiguïté, *computer* est ici un être humain. D'ailleurs la suite dissipe toute ambiguïté. Turing dit : *Le comportement du calculateur est déterminé à chaque instant par les symboles qu'il observe et par son "état d'esprit" à cet instant.* De même qu'il justifie la prise en compte d'un alphabet fini, par le fait qu'un nombre infini de symboles induirait des différences infinitésimales, Turing justifie qu'un calculateur ne peut avoir qu'un nombre fini d'états d'esprit. Un nombre infini les rendrait arbitrairement proches, entraînant la confusion.

C'est donc par une analyse du comportement humain dans une activité de calcul que Turing est arrivé à sa notion de machine. Au lendemain de la guerre, Turing va inverser le raisonnement : si une machine s'avère capable de mener certaines actions comme un être humain, on devra dans ce cas lui attribuer les mêmes qualificatifs que ceux qu'on donne à l'homme dans ce cas, en particulier, on pourra qualifier la machine d'intelligente. C'est ce que Turing développe dans l'article de *Mind*, voir [13]. Il propose de tester l'intelligence d'une machine par sa capacité à imiter l'activité de l'homme : il propose donc de faire ce test sous la forme d'un **jeu d'imitation**.

Afin de préciser son propos,Turing prend soin de restreindre le domaine de la comparaison. *Nous ne souhaitons pas pénaliser une machine pour son incapacité à briller dans un concours de beauté ni à pénaliser un homme pour avoir perdu dans une course contre un avion.* Ainsi, le test que Turing propose dérive d'un jeu entre trois personnes A, B et C : A est un homme, B est une femme et C doit deviner qui de A et de B est une femme en leur posant des questions, sans les voir ni les entendre, par le truchement de petits papiers tapés à la machine. De plus, C ne connaît ses interlocuteurs que sous des noms X et Y et il ne sait pas qui est A ou B. Turing propose de remplacer B par une machine. Voir [4], une opinion en faveur du test de Turing.

L'intelligence est un vaste sujet et l'intelligence artificielle n'a pas la prétention d'imiter l'intelligence humaine. La métaphore qui me semble le mieux s'appliquer à l'intelligence artificielle comparée à l'intelligence humaine est celle du vol des avions comparé à celui des oiseaux. Il y a des points communs à la fois sur ce qui est partagé dans les deux cas et dans ce qui les différentie. Ainsi l'utilisation des lois de la logique dans un cas répond à celle des lois de la physique dans l'autre cas. De la même façon, les machines peuvent accomplir des calculs dont un être humain ou même toute une armée d'êtres humains ne viendraient pas à bout. Et les avions peuvent transporter des charges qu'aucun oiseau ni aucun groupe d'oiseaux ne pourraient faire et ils peuvent voler à des vitesses multipliant par plus de dix celle des oiseaux les plus rapides.

Cependant, dans l'article de *Mind*, Turing fait une intéressante prophétie pour l'an 2000 :

Je crois qu'à la fin du siècle, le vocabulaire et l'éducation générale de l'opinion auront tellement changé qu'on pourra parler de machines qui pensent sans s'attendre à être contredit.

Le lecteur d'aujourd'hui appréciera.

Turing consacre plusieurs pages de cet article à l'apprentissage des machines. Cependant, c'est dans un autre article sur le même sujet que celui de *Mind* qu'on trouve une description d'une méthode d'apprentissage destinée aux machines. Dans cet article, *Intelligent machinery*, voir [12], Turing décrit des machines de deux types, A et B, qu'il appelle *non-organisées* et qu'on peut rapprocher des actuels neurones artificiels bien que les schémas utilisés par Turing fassent penser à des automates finis et que les machines de type A soient en fait des circuits de portes *NAND* qui sont capables, à elles seules de simuler toute fonction booléenne. Partant d'une analogie avec l'évolution d'un enfant, Turing suppose ses machines initialisées aléatoirement et propose de leur faire passer une batterie de tests avec punition et récompense à la clé dans le but de leur apprendre à reconnaître certaines situations.

C'est tout simplement le début de la théorie de l'apprentissage artificiel tel qu'on le pratique aujourd'hui. Dans le même article, Turing envisage un autre type de machine non-organisée mais dans un autre sens qu'il appelle machine de type P. Il s'agit d'une machine universelle au départ sans ruban dont le programme serait incomplet. Les données incomplètes sont partiellement complétées aléatoirement et la machine est appliquée. Si elle est punie, les changements sont effacés. Si elle est récompensée, les changements sont définitifs. Et ce processus est répété jusqu'à satisfaction.

Dans cet article, Turing fait une très intéressante remarque au sujet des machines des types A et B :

il est clair qu'il n'est pas besoin d'un système de gènes très compliqué pour produire quelque chose qui ressemble à une machine de type A ou de type B.

Au vu de ce qu'on sait aujourd'hui sur les petites machines de Turing universelles, on pourrait compléter cette remarque de Turing en ajoutant que le bagage génétique nécessaire à la production d'une machine de type P n'est pas non plus très volumineux.

5. Les autres travaux de Turing

Il n'est pas possible dans le cadre de cet article de passer en revue tous les travaux de Turing. Mentionnons simplement qu'il s'est beaucoup intéressé à la morphogenèse et à la biologie. Il est intéressant de remarquer que sa découverte du calcul discret n'a pas changé la vision de Turing presque unanimement partagée par l'opinion scientifique de son temps du caractère continu de la réalité.

Ainsi, écrit-il dans l'article de *Mind*, [13] :

Le système nerveux n'est certainement pas une machine à états discrets. Une petite erreur dans l'information sur la taille d'un influx nerveux arrivant à un neurone peut produire une large différence dans la taille de l'influx sortant. On peut en déduire qu'ainsi, on ne puisse imiter le comportement du système nerveux par un système à états discrets.

Turing revient plusieurs fois sur cette question et tempère quelque peu sa position en observant :

Dans le système nerveux, les phénomènes chimiques sont au moins aussi importants que les phénomènes électriques.

Et il précise :

C'est une fiction commode de considérer que dans un système d'éclairage, chaque interrupteur est soit ouvert soit fermé. Il doit y avoir des positions intermédiaires, mais pour la plupart des usages, nous pouvons l'oublier.

Le cahier des charges d'une pièce destinée à un ordinateur est précisément d'assurer une valeur booléenne au-delà de tout aléa, la seule contrainte étant une activité dans des conditions normales de température, de pression, d'hygrométrie et autres paramètres physiques. À l'intention de ceux qui croient que le passage d'un neutrino peut troubler la mémoire d'un ordinateur et provoquer éventuellement des erreurs de calcul sinon un crash de la machine, il convient de signaler que l'implantation du 1 et du 0 se fait sur des massifs de molécules dont l'agencement est suffisamment complexe et différencié pour résister à l'érosion du temps pendant une période suffisamment longue. Je sais par expérience personnelle qu'une clé USB que je possède depuis plus de cinq ans est passée déjà deux fois dans une machine à laver. Je ne l'avais pas fait volontairement, bien-sûr, et à chaque fois, je me suis contenté d'attendre assez longtemps que la clé soit bien sèche. Elle n'avait rien perdu de ses enregistrements. Je continue de l'utiliser de temps à autres pour la projection de mes transparents et quand il y a une erreur sur les transparents, soyez sûrs que la clé n'y est pour rien, j'assume.

Turing n'a malheureusement pas connu les développements théoriques qu'il a initiés. Sa disparition tragique dans les circonstances que l'on sait l'aura empêché d'y apporter une contribution très certainement majeure. Ou peut-être se serait-il définitivement orienté vers la biologie à laquelle il a commencé à s'intéresser quelques années avant sa mort. Peut-être aurait-il su proposer aux biologistes un modèle foncièrement nouveau ? Il avait toute l'autorité pour le faire et les développements théoriques venus après lui n'auraient pas manqué de l'inspirer. À son époque, les travaux mettant définitivement en évidence la structure de l'ADN et son rôle dans l'hérédité n'étaient peut-être pas connus de Turing. Son article sur les bases chimiques de la morphogenèse, voir [14], est très révélateur à ce sujet. Cet article se conclut sur une intéressante remarque. Suite à de très longs développements mathématiques cependant élémentaires sur la base de simplifications importantes, Turing dit :

Il serait cependant possible de traiter quelques cas particuliers en détail à l'aide d'un ordinateur. Cette méthode a l'avantage qu'il ne serait pas autant nécessaire de faire des hypothèses simplificatrices comme il l'est quand on fait une analyse d'un type plus théorique. Il serait même possible de prendre en compte les aspects mécaniques du problème aussi bien que les aspects chimiques en appliquant ce type de méthode. L'inconvénient essentiel de la méthode est de n'obtenir que des résultats sur des cas particuliers. Mais ce désavantage est sans doute comparativement de peu d'importance. Même avec le problème de l'anneau considéré dans cet article, pour lequel une analyse mathématique raisonnablement complète a été possible, le traitement calculatoire d'un cas particulier a été des plus éclairants.

C'est un des aspects, et non des moindres, que l'informatique apporte aux mathématiques : un formidable outil d'exploration permettant d'accéder à des mondes jusque-là inaccessibles voire inconnus. Les développements tant matériels que logiciels depuis Turing ont plus que décuplé la puissance de cet outil. Nous n'avons pas eu le temps de l'évoquer avec assez de précision dans cet article, mais les développements logiciels ont été rendus possibles par les progrès théoriques, aussi bien ceux qui concernent la théorie des langages formels que ceux qui concernent la théorie de la démonstration pour ne citer que ces deux exemples.

6. Références

[1] E. Ben Jacob, Social behavior of bacteria : from physics to complex organization, *European Physical Journal B*, **65**(3), (2008), 315-322.

[2] B.E. Carpenter, R.W. Doran, The other Turing machine, *The Computer Journal*, **20**(3), (1977), 269-279

[3] N. Dershowitz, G. Dowek, Universality in Two Dimensions, see `https://who.rocq.inria.fr/Gilles.Dowek/Publi/universality2d.pdf`

[4] J.-B. Ganascia, En défense du test de Turing, `http://www.cnrs.fr/ins2i/IMG/pdf/JGGanasciaTuring.pdf`

[5] K. Gödel, Über Eine Bischer Noch Benützte Erweiterung des Finiten Standpunktes, *Dialectica*, **12** (1958), 280-287. (On a hitherto unexploited extension of the finitary standpoint, *Journal of Philosophical Logic*, **9** (1980) - English translation).
[6] A. Hodges, *Alan Turing, the enigma*, Vintage, (1988), London, UK
[7] T. Neary and D. Woods. Four small universal Turing machines. *Fundamenta Informaticae*, **91**(1), (2009), 123-144
[8] P. Odifreddi, *Classical recursion theory*, **125**, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, (1989).
[9] H. Rogers, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, (1967), McGraw-Hill ; new edition : (1987), MIT Press
[10] A.M. Turing, On computable real numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society*, ser. 2, **42**, 230-265, (1936).
[11] A.M. Turing, Systems of logic based on ordinals, *Proceedings of the London Mathematical Society*, (1939), s2-**45**(1), 161-228
[12] A.M. Turing, *Intelligent Machinery*, National Physical Laboratory Report. In Meltzer, B., Michie, D. (eds), (1969), *Machine Intelligence* 5, Edinburgh : Edinburgh University Press, 3-23.
Reproduced with the same pagination in :
Ince, D.C. (ed.), (1992), *Collected Works of A.M. Turing : Mechanical Intelligence*, Amsterdam, North Holland
[13] A.M. Turing, Computing machinery and intelligence, *Mind*, (1950), **59**, 433-460
[14] A.M. Turing, The Chemical Basis of Morphogenesis, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series B, Biological Sciences*, (1952), **237**(641), 37-72
[15] J. von Neumann, The general and logical theory of automata, dans *Collected works, vol.5, Design of computers, theory of automata and numerical analysis*, (1963), Macmillan, 288-328

Alan Turing et la résolution numérique des équations différentielles

Gilles Dowek

L'article *The Chemical Basis of Morphogenesis*, publié en 1952, tient une place à part dans l'œuvre d'Alan Turing : alors que, dans ses travaux antérieurs, il s'est beaucoup intéressé à des structures discrètes, telles ses célèbres machines, Turing décrit, dans cet article, les processus de réaction-diffusion responsables de la morphogénèse, en modélisant les concentrations des différents réactifs avec des fonctions à valeur réelle, dépendant d'un temps continu et d'un espace, soit discret soit continu, ce qui le mène à des systèmes d'équations différentielles ordinaires dans le premier cas et à des équations aux dérivées partielles dans le second.

Même si le continu n'est pas totalement absent des travaux antérieurs de Turing – ainsi les machines de Turing sont motivées, en 1936, par la volonté de définir une notion, non de fonction calculable, mais de réel calculable – ce choix peut surprendre : en modélisant les concentrations, le temps et l'espace de manière discrète, Turing aurait pu décrire les phénomènes morphogénétiques en utilisant des automates cellulaires, définis quelques années plus tôt par Stanislaw Ulam et John Von Neumann, et qui font rapidement émerger des formes complexes.

Mais, quelles qu'en soient les raisons, cette incursion de Turing dans l'analyse lui a permis d'aborder – une fois de plus, en pionnier – une question qui refera surface à la fin du XX^{e} siècle : celle de la valeur des démonstrations effectuées avec un ordinateur. Dans la treizième et dernière partie de cet article, intitulée « Non-linear theory. Use of digital computers », Turing constate, en effet, que les équations auxquelles il parvient peuvent être résolues explicitement, uniquement quand la vitesse de réaction dépend linéairement des concentrations, ce qui est exceptionnel. Dans le cas général, la résolution des équations est plus difficile et Turing évoque la possibilité de résoudre ces équations en utilisant un ordinateur. Bien entendu, cette idée de résolution numérique des équations différentielles n'était pas entièrement nouvelle, puisqu'elle avait été évoquée deux siècles plus tôt par Euler dans son *Institutionum calculi integralis*, mais les ordinateurs, récemment apparus en 1952, donnent à ces méthodes une applicabilité sans précédents.

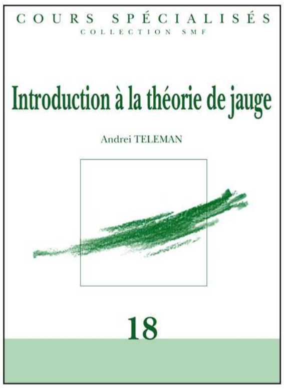
En comparant ainsi les résolutions exacte et numérique des équations de réaction-diffusion, Turing comprend déjà beaucoup des avantages et inconvénients de la résolution numérique. Du côté des avantages, qui selon Turing dominent, la possibilité de traiter des cas beaucoup plus complexes. Turing évoque le cas non linéaire, mais aussi la possibilité de prendre en compte la mécanique des systèmes modélisés, de la même manière qu'il prend en compte leur chimie. Du côté des avantages également, la possibilité visualiser les solutions. De même que le caractère algorithmique du calcul intégral avait donné des ailes aux mathématiciens de la fin du XVII^{e} siècle, qui avaient pu commencer à étudier des courbes – la chainette, la cycloïde, ... – trop complexes pour être abordées avec les épuisantes méthodes archimédiennes, la possibilité de calculer et représenter les solutions qu'offre la résolution numérique donnera des ailes aux mathématiciens de la seconde moitié du XX^{e} siècle, qui n'auront plus à faire ce gigantesque effort de visualisation des courbes et des surfaces. Même si, en 1952, les ordinateurs n'offraient que des possibilités très frustes de visualisation, Turing remarque déjà que, même dans le cas linéaire où le calcul exact des solutions est possible, le traitement calculatoire a été « *most illuminating* ».

Mais, malgré son enthousiasme, Turing comprend aussi les limites de cette démarche, qui permet de traiter des cas particuliers, mais non le cas général. Pour illustrer cette différence, considérons par exemple l'équation du mouvement, dans le champ gravitationnel du Soleil, d'une comète dont nous connaissons la position et la vitesse « initiales ». La résolution numérique, pour quelques valeurs particulières des conditions initiales nous montrera des trajectoires parfois elliptiques, parfois hyperboliques, mais elle ne nous donnera pas l'assurance que cette trajectoire est à coup sûr une conique, ni une condition sur les conditions initiales qui nous indique quand cette trajectoire est une ellipse, une parabole ou une hyperbole. En d'autres termes, même pour un cas particulier, la résolution numérique nous dit *que* la trajectoire est telle ou telle, mais elle ne nous dit pas *pourquoi*.

Même s'il n'utilise pas encore ces mots, on sent poindre derrière l'analyse de Turing une question : une démonstration d'une proposition A doit-elle nous dire que la proposition A est vraie ou pourquoi elle est vraie ? Et cette question sera récurrente à chaque fois qu'un ordinateur sera utilisé pour résoudre un problème mathématique : la démonstration de Appel et Haken du théorème des quatre couleurs, ou la démonstration de Hales de la conjecture de Kepler, nous disent que ces propositions sont vraies, mais il est exact qu'elles ne nous disent pas pourquoi.

Naturellement, les questions esthétiques et le sentiment intime de compréhension sont hors du champ des mathématiques elles-mêmes, mais il y a aussi des problèmes mathématiques derrière ces questions : à quelle condition pouvons-nous dire qu'une démonstration est explicative ou non ? Et à supposer que nous parvenions à une telle définition, les propositions qui ont une démonstration ont-elles toujours une démonstration explicative ? Et pouvons-nous démontrer que le théorème des quatre couleurs, par exemple, n'a que des démonstrations non explicatives ?

Autant de questions auxquelles que nous ne faisons aujourd'hui qu'entrevoir de maigres éléments de réponse.



Cours Spécialisés 18

Introduction à la théorie de jauge

Andrei Teleman

Le but de ce cours spécialisé est de donner une introduction solide à la théorie de jauge et d'en présenter en détail quelques applications importantes en topologie différentielle 4-dimensionnelle, notamment le théorème de Donaldson sur la forme d'intersection d'une 4-variété différentiable et la conjecture de Van de Ven sur la classification topologique-différentiable des surfaces complexes. Ce cours est essentiellement dédié à la théorie de Seiberg-Witten, qui est accessible aux étudiants, mais il contient aussi des éléments de la théorie de Donaldson : le groupe de jauge d'un fibré principal, les équations de Yang-Mills, les équations d'anti-dualité, des exemples d'espaces de modules de connexions de Yang-Mills.
Il est accessible aux étudiants ayant suivi des cours de géométrie différentielle et de topologie algébrique, et qui ont des notions de base de l'analyse moderne (espaces de Sobolev, distributions, opérateurs différentiels).

The goal of these lecture notes is to give a solid introduction to the mathematical gauge theory and to explain in detail some of its important applications in 4-dimensional differential topology, e.g. the Donaldson theorem concerning the intersection form of differentiable 4-manifolds, and the Van de Ven conjecture concerning the differential topological classification of complex surfaces. This book deals essentially with Seiberg-Witten theory, which is easily accessible to the students, but also contains elements of Donaldson theory: the gauge group of a principal fiber-bundle, Yang-Mills equations, ASD-equations, examples of moduli spaces of Yang-Mills equations.
These lecture notes are fully accessible to the students who attended lectures on differentiable geometry and algebraic topology, and have a basic background in modern analysis (Sobolev spaces, distributions, differential operators).

prix public* : 60 € - prix membre* : 42 €
frais de port non compris

Société Mathématique de France

SMF

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F-75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

HISTOIRE

Poincaré et la logique

Gerhard Heinzmann[1]

On a souvent accusé les mathématiciens et les philosophes français du 20ᵉ siècle d'une certaine résistance à la logique mathématique. Parmi les raisons invoquées, on trouve non seulement les disparitions prématurées de Jean Nicod (1893-1924), de Jacques Herbrand (1908-1931) et de Jean Cavaillès (1903-1944) mais également les polémiques de Poincaré. Ce dernier, du haut de son autorité mathématique, ridiculise la nouvelle logique (Russell, Peano, Couturat) et les fondements des mathématiques, que ceux-ci soient ensemblistes (Cantor, Zermelo) ou « formalistes » (Hilbert). Il y a là une part de vérité, mais seulement une part. Il aura fallu le centenaire de sa mort et l'intérêt que suscite ce genre de commémoration pour comprendre l'attitude de Poincaré face aux antinomies logiques notamment à travers l'application de la logique non standard d'Hintikka au concept poincaréien de prédicativité [22]. Il aura aussi fallu une petite centaine d'années pour comprendre que l'argument principal de Poincaré contre la nouvelle logique ne provient pas d'une difficulté à concevoir que le raisonnement mathématique puisse se traduire en raisonnement logique, mais dans le constat qu'une telle transposition serait dépourvue des valeurs épistémiques nécessaires à la compréhension mathématique. Un bon exemple de raisonnement mathématique est le principe de l'induction complète. Quant à savoir s'il est préférable de le considérer comme définition, comme schéma d'axiomes formels, comme théorème de la théorie des ensembles bien-ordonnés ou s'il faut faire appel à l'intuition pour le justifier, cela reste une question ouverte. La variante ensembliste est la solution la plus répandue, mais repousser ainsi le problème philosophique initial vers la relation entre logique et théorie des ensembles, n'est-ce pas mettre la charrue avant les bœufs ? En effet, on peut imaginer des solutions à ce problème qui n'impliquent qu'un engagement ontologique bien plus faible. L'intuition de Poincaré semble répondre à ce critère. Par la suite, nous n'insisterons pas sur les insuffisances de l'argumentation de Poincaré contre la logique mathématique, discipline alors émergente dont il ne poursuit pas les développements en détail. Au contraire, nous allons voir dans quelle mesure la position prétendument « conservatrice » de Poincaré, par opposition à celle, dite « moderne », de Hilbert, suscite plus de compréhension aujourd'hui qu'hier.

[1] Laboratoire d'Histoire des Sciences et de Philosophie, archives Henri Poincaré (UMR 7117), université de Lorraine/CNRS, Nancy.

1. Les deux sens du « cantorisme »

Selon Philip Jourdain [23], Poincaré est sans aucun doute un des plus grands mathématiciens mais en ce qui concerne la philosophie et la logique mathématique il personnalise le fait qu'un grand mathématicien n'est ni nécessairement un grand philosophe ni un grand logicien. Les polémiques de Poincaré contre la « nouvelle » logique ont en effet une forme outrancière :

> « Pour démontrer un théorème, il n'est pas nécessaire, ni même utile de savoir ce qu'il veut dire. On pourrait remplacer le géomètre par le piano à raisonner imaginé par Stanley Jevons ; ou, si l'on aime mieux, on pourrait imaginer une machine où l'on introduirait les axiomes par un bout pendant qu'on recueillerait les théorèmes à l'autre bout, comme cette machine légendaire de Chicago où les porcs entrent vivants et d'où ils sortent transformés en jambons et en saucisses. Pas plus que ces machines, le mathématicien n'a besoin de comprendre ce qu'il fait » [47, p. 134].

Il n'est alors pas étonnant que son image d'adversaire de la logique se soit maintenue jusqu'à aujourd'hui. Ainsi, il y a quelques années, Georg Kreisel me demandait si la phrase wittgensteinienne, utilisée par Kreisel comme titre d'un article, à savoir : « *Der unheilvolle Einbruch* » *der Logik in die Mathematik* (« La désastreuse invasion » de la logique en mathématiques) [Wittgenstein (1975), 145)] n'était finalement pas une citation de Poincaré. Jusqu'à présent, je ne l'ai jamais trouvée.

En fait, la polémique de Poincaré ne doit pas nous dispenser de regarder de près sa position par rapport à la logique au sens large, c'est-à-dire incluant la théorie des ensembles. Il connaissait les travaux de Georg Cantor par Gösta Mittag-Leffler et il les utilise dans sa théorie des fonctions fuchsiennes dès 1882 [28, p. 1167]. Il était impliqué dans la traduction française des mémoires de Cantor sur les *Punktmannigfaltigkeiten* publiés dans les *Acta Mathematica* **2**, 311-408. Bien plus encore, lorsque Poincaré était, en 1885, secrétaire de la *Société mathématique de France*, récemment fondée, il a saisi l'opportunité de proposer Cantor comme membre de cette société [18, p. 22]. Il avait d'ailleurs rencontré Cantor en 1884 à Paris et lui a rendu visite en mai 1895 à Halle [5, p. 188] [7, p. 281]. L'expression *der unheilvolle Einbruch der Logik in die Mathematik* est plutôt une adaptation de Wittgenstein d'une remarque de Frege dans son compte rendu de la *Philosophie de l'arithmétique* de Husserl où Frege regrette les ravages provoqués par l'*Einbruch der Psychologie in die Logik* [15, p. 332]. Mais, il est vrai que dans une discussion avec Russell, Poincaré semble confondre psychologie et logique. À nouveau, je crois que les choses ne sont pas si simples.

Tout d'abord, il faut évidemment prendre conscience de l'ambiguïté du terme « logique » : en tant *qu'ars iudicandi* (l'art de justification) il signifie la syllogistique, comme *ars inveniendi* (l'art de l'invention) la psychologie de l'invention, il désigne la logique formelle, la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo ou la topologie des ensembles de points de Cantor. C'est à travers ces homonymies que s'expliquent des affirmations en apparence contradictoires d'Alexandr Aleksandrov et d'Abraham A. Fraenkel, relevées par [10, p. 65 et p. 80] : Le premier écrit « que Poincaré fut le premier mathématicien qui comprit aussi bien l'importance que la fécondité des théories de Cantor pour l'analyse mathématique et donc pour toutes les mathématiques » [1, pp. 250-251], le second note que l'attitude de Poincaré était

« typique » du changement de la position des mathématiciens, qui avaient commencé par accepter les théories cantoriennes et qui, après la découverte des antinomies de la théorie des ensembles, accueillirent les projets pour une « réhabilitation » de cette théorie avec « un air de moquerie » [14, p. 3]. Tandis que le premier jugement concerne la logique en tant que méthode logico-ensembliste s'adressant à des problèmes mathématiques comme la théorie des fonctions, le deuxième jugement concerne la « logique » en tant qu'outil de formalisation et de domaine d'une cardinalité infinie actuelle :

> « *Il n'y a pas d'infini* actuel ; les Cantoriens l'ont oublié, et ils sont tombés dans la contradiction. Il est vrai que le Cantorisme a rendu des services, mais c'était quand on l'appliquait à un vrai problème, dont les termes étaient nettement définis, et alors on pouvait marcher sans crainte. Les logisticiens l'ont oublié comme les Cantoriens » [34, pp. 212-213].

Je reviendrai au problème de l'infini actuel (§3). Retenons que sa critique n'aveugle pas le jugement de Poincaré concernant les travaux de Zermelo : malgré ses fortes réserves sur la théorie axiomatique des ensembles, la correspondance nous montre qu'il soutient la publication du célèbre article de Zermelo *Sur les ensembles finis et le principe d'induction complète*, d'abord auprès de Xavier Léon (pour la publication dans la *Revue de métaphysique et de morale*) et ensuite auprès de son ami Mittag-Leffler qui le fait paraître en 1909 dans les *Acta Mathematica* (1909).

La maîtrise de Poincaré du cantorisme dans le premier sens se trouve bien confirmée mais d'une manière souvent implicite dans beaucoup de travaux mathématiques allant de 1882 jusqu'à 1912. Par contre, ses réflexions sur la logique en tant que fondement et critère de rigueur en mathématiques sont surtout traitées dans les articles suivants, portant explicitement sur ces sujets :

1899 « La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement » [27],
1900 « Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques » [28],
1905/06 « Les mathématiques et la logique » [31],
1906 « Les mathématiques et la logique » [32],
1906a « À propos de la logistique » [33],
1908a « L'avenir des mathématiques » [35],
1909 « La logique de l'infini » [36],
1909a « Réflexions sur deux notes de M. A. S. Schönflies et de M. E. Zermelo » [37],
1909b « Über transfinite Zahlen » [38],
1912 « La logique de l'infini » [39].

Pour terminer ces considérations bibliographiques, il convient d'ajouter à cette liste les correspondances de Poincaré avec Brouwer, Cantor, d'une part, Couturat, Hilbert, Zermelo, d'autre part ; il faut finalement mentionner des remarques éparses sur la logique, contenues dans des articles sur la philosophie des sciences et concernant, en particulier, ses polémiques avec Russell au sujet du statut des axiomes de la géométrie et du principe de l'induction complète. En tant que principe de démonstration, ce dernier appartient naturellement à la fois au domaine de la logique et à l'arithmétique.

2. Psychologie, intuition et logique

Avant 1905, les réflexions de Poincaré sur la logique sont liées à la relation entre psychologie et intuition dans le raisonnement et la compréhension des mathématiques. Depuis Aristote, la compréhension des *mathemata* est liée à l'apprentissage. Et on sait bien que Poincaré insiste sur le fait que l'enseignement et l'apprentissage en mathématiques ont nécessairement recours à l'intuition et au raisonnement par analogie [13, p. 42]. Les mêmes capacités sont également indispensables pour créer des faits nouveaux en mathématiques. Ainsi, on peut concéder que la notion d'intuition concerne la psychologie de la pensée mathématique. Or, une fois admise la distinction entre le contexte d'apprentissage et d'invention, d'une part, et le contexte de justification d'autre part, on pourrait donc penser que Poincaré refuse la logique mathématique parce qu'elle ne fournit pas d'explication psychologique au processus d'invention. Puisque les logicistes sont exclusivement concernés par la justification, Poincaré et les logicistes semblent donc poursuivre des objectifs fort différents. Ceci est la thèse que défend [16, p. 64] dans son article *Poincaré against the Logicists*.

En fait, cette interprétation n'est pas nouvelle mais fut déjà avancée, en 1913, par Pierre Boutroux en faveur, cette fois-ci, d'une défense de Poincaré : « L'erreur des panlogiciens provient de ce qu'ils ne veulent raisonner que sur la science déjà faite. Or, la science la plus instructive pour le philosophe, c'est la science qui se fait ; si nous voulons connaître les caractères les plus profonds de la pensée mathématique, c'est au moment de l'invention qu'il faut la saisir » [2, pp. 255-256].

Selon Boutroux, Poincaré a donc abordé la question la plus intéressante et la dispute sur la logique revient à la question de savoir si oui ou non il existe une logique de l'invention. Boutroux argumente qu'il n'en existe pas selon Poincaré : « À la suite d'un long travail inconscient ou subconscient, dit Poincaré, l'idée décisive jaillit tout à coup comme un éclair et elle s'impose immédiatement avec une certitude absolue. Pourquoi ? Nous l'ignorons. Le psychologue doit se contenter de donner un nom à cette vision instantanée de l'esprit qui se manifeste dans l'invention : il l'appelle "intuition" » [2, pp. 256-257]. Selon Boutroux, Poincaré traite donc la question psychologique de l'invention et celle-ci échappe à toute analyse logique.

Il est intéressant de relever que Louis Couturat acquiesce à l'opposition faite par les « adversaires de la logistique » entre la logique et l'invention. Pour ce dernier une telle opposition tendrait à « rabaisser l'œuvre de la logique » et à « assimiler implicitement l'œuvre scientifique à une œuvre d'art » [6, p. 260, p. 263]. Selon Couturat, vouloir opposer la logique de la démonstration à la logique de l'invention, est illusoire parce que la dernière n'existe pas : « la logique qui démontre reste [...] la seule logique possible. En dehors d'elle, on ne peut que faire la *psychologie* de l'invention » [6, p. 265].

Derrière l'argument de Goldfarb en faveur d'une opposition de principe entre logique et psychologie se cache donc le refus de Couturat et de Boutroux de ne pas vouloir distinguer entre la logique comme *ars iudicandi et ars inveniendi*. Accepter avec Brouwer le psychologisme ou dénoncer avec Goldfarb une confusion de catégories semble dorénavant la seule manière d'interpréter ses dires.

Mais ce débat d'exégètes ne reflète que partiellement le propos de Poincaré qui, lui, ne souhaite pas distinguer entre logique et psychologie. Ainsi en 1909, il clôt un débat avec Russell en ces termes : « M. Russell me dira sans doute qu'il ne s'agit pas de psychologie, mais de logique et d'épistémologie ; et moi, je serai conduit à répondre qu'il n'y a pas de logique et d'épistémologie indépendantes de la psychologie ; cette profession de foi clora probablement la discussion parce qu'elle mettra en évidence une irrémédiable divergence de vues » [36, p. 482]. On peut donc penser que Poincaré a choisi consciemment un chemin qui évite les deux côtés de l'alternative.

En effet, l'usage que fait Poincaré du mot « psychologie » ne permet pas de réduire la signification de ce dernier au sens moderne. En témoigne la position de Poincaré dans les fondements de la géométrie et, particulièrement, sa distinction entre l'espace sensible et l'espace géométrique. L'évolution qu'il conçoit du premier vers le second peut être interprétée selon deux perspectives, l'une logique et l'autre psychologique. La genèse logique de la géométrie est une *reconstruction* de la pensée géométrique qui ne prend pas en compte les détours historiques mais qui explique le résultat par son *développement* logique le plus pertinent. Par contre, la genèse psychologique de la géométrie est une *description* du développement historique à travers les siècles. Ainsi exprimés, Poincaré a très bien distingué les deux points de vue : largement influencé par l'adaptation biologique darwinienne, il traite la genèse psychologique dans l'esprit de l'empirisme évolutionnaire. Il n'y aurait donc aucune difficulté, si Poincaré n'utilisait pas dans son exposition de la genèse logique de la géométrie le terme « psychologique ». Cependant, dans ce contexte, il l'utilise dans un autre sens : il appelle une réflexion « psychologique » dès qu'une dimension de compréhension se trouve impliquée ou dès qu'une genèse – « indispensable pour l'intelligence complète d'une science » – est opposée à l'*exposition* logiquement correcte d'un résultat sans que son *développement* logique soit pris en compte [29, p.153]. En d'autres termes, l'expression « psychologique » concerne ici la question épistémologique du développement d'un standard de clarté concernant les présuppositions conceptuelles d'une démonstration ou d'une théorie. Ainsi, le refus de Poincaré de distinguer la psychologie de la logique et de l'épistémologie ne signifie pas qu'il confond la question *quid iuris* et la question *quid facti*, c'est-à-dire ce qui est de droit et ce qui est de fait ; il ne signifie pas non plus qu'il se limite aux faits psychologiques mais il exprime au contraire l'exigence philosophique de supplémenter l'exposition systématique des résultats scientifiques par une enquête épistémologique (= « psychologiques »).

Ainsi, il devient davantage plausible que, pour Poincaré, l'intuition soit nécessaire en mathématique non seulement dans le contexte de l'invention mais également dans le contexte de la justification.

Il faut d'abord remarquer que le terme « intuition » est lui aussi bien ambigu. Dans *La Valeur de la science*, Poincaré distingue trois sortes d'intuitions :

(1) un appel aux sens et à l'imagination (important pour obtenir les « conventions » en géométrie),
(2) une généralisation par induction (empirique) et
(3) l'intuition du nombre pur, celle d'où provient l'axiome de l'induction.

« Les deux premières sortes ne peuvent nous donner la certitude », mais, dit-il « qui doutera sérieusement de la troisième, qui doutera de l'Arithmétique ? Or, dans l'Analyse d'aujourd'hui, quand on veut se donner la peine d'être rigoureux, il n'y a plus que des syllogismes ou cet appel à cette intuition du nombre pur, la seule qui ne puisse nous tromper. On peut dire qu'aujourd'hui la rigueur absolue est atteinte » [30, p.33]. Contrairement à ce que le passage souvent cité : « La logique qui peut seule donner la certitude est l'instrument de la démonstration : l'intuition est l'instrument de l'invention » [30, p.37] ; SM, 130] pourrait faire croire, la logique n'est ni le seul moyen pour atteindre une certitude ni en dehors du champ de l'intuition. La déclaration en question constituait seulement un résumé d'une discussion à propos de la distinction entre l'intuition *sensible* et de procédures *analytiques*. Une démonstration analytique, appelée par Poincaré une *vérification*, se fonde sur le syllogisme, la substitution, la définition nominale et les transformations algébriques. Elle n'est pas (encore) mathématique, puisque le procédé d'inférence est *constructif* au sens de *combinatoire*. L'intuition pure donne également la certitude et permet de *démontrer* et non seulement d'inventer [30, p.39]. Poincaré attribue explicitement la certitude des règles logiques (analytiques) à l'intuition [30, pp. 32-33].

Comme il fut exposé à différents endroits, Poincaré s'oppose à partir de 1905 à la thèse des logiciens qui prétendent pouvoir démontrer, une fois admis les principes de la logique, toutes les vérités mathématiques sans recours à l'intuition. Or, Poincaré suspecte que les logiciens font en vérité une utilisation équivoque du terme logique, qu'ils ne visent plus l'ancienne, mais une « nouvelle logique » contenant des principes de démonstration synthétiques ou des formations de concepts non logiques. Et il a évidemment raison. Non seulement la logique moderne des prédicats est plus riche que la logique traditionnelle (la syllogistique), mais pour faire face à l'idée de réductionnisme, on est même conduit à l'élargir encore par certains postulats ensemblistes d'existence. Quelle est alors la distinction entre la généralité logique et la généralité algébrique (mathématique) ? Contrairement à la tradition algébriste allant de John Wallis et de George Peacock à Hilbert, Poincaré abandonne la prétendue neutralité du raisonnement formel par rapport au domaine en considération, insiste sur la non-invariance du raisonnement mathématique par rapport à son contenu et avance, pour ainsi dire, une conception *locale* du raisonnement selon laquelle « une "lacune" n'est plus une lacune logique, mais plutôt une lacune dans la *compréhension mathématique* » [8, p. 366], [8, p. 360] et, en tant que telle, une lacune qui ne peut pas être éliminée grâce à une formalisation.

3. L'induction complète

Selon Poincaré, la « vraie » intuition pure peut être distinguée d'une simple évidence sensible par le fait qu'elle réfère à ce que l'on peut faire à la place de ce qui existe : elle ne concerne donc pas la capacité de saisir un objet ou une vérité mais la capacité de concevoir une règle. En ce sens, l'intuition pure n'est pas dirigée vers le même objet que l'intuition sensible ou l'imagination [30, p. 39]. Elle est la conscience d'une capacité de l'esprit et l'expérience nous donne l'occasion d'utiliser cette capacité.

Ainsi, par exemple, la certitude du raisonnement par induction complète, considérée par Poincaré comme jugement synthétique *a priori* provient du fait qu'il est l'affirmation de l'intuition directe de la puissance de l'esprit de « concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible » [29, p. 41]. On dirait aujourd'hui qu'une telle intuition – bien qu'elle soit induite par l'expérience – se rapporte à un schème d'action qui est *a priori* parce qu'il est le résultat de notre propre créativité. Pour saisir ce schème, l'intuition est nécessaire puisqu'il n'est pas sous forme close, mais seulement représentée par une répétition indéfinie se rapportant à différents niveaux : le schème consiste en une vue d'ensemble d'une réitération potentielle au niveau des objets et d'une vue d'ensemble d'une réitération potentielle du *modus ponens*. Cette sorte d'intuition pure ou intellectuelle permet de dire à Poincaré que le raisonnement par récurrence est l'expression d'un nombre infini de syllogismes hypothétiques, « condensés pour ainsi dire en une formule unique » [29, pp. 38-39]. L'arithmétique élémentaire possède ainsi le privilège d'être fondé sur une capacité, ce qui contribue essentiellement à sa compréhension. Poincaré donne en gros trois arguments en faveur de sa position intuitive par rapport à l'induction complète.

– *Un système formel contenant l'induction complète comme axiome sera circulaire*. Dans son article *Les mathématiques et la logique* [31], Poincaré prend conscience du fait que la maîtrise d'un schème ne peut être facilement formalisée sans commettre une *petitio principii* : pour produire, comprendre et démontrer la non-contradiction des définitions dans un système formel, il nous faut, dit-il, bien utiliser le nom d'un nombre, les adjectifs numéraux ou au moins les pluriels [31, p. 830]. La valeur de cet argument, repris par Hadamard, Fraenkel, Wittgenstein et Bernays, dépend naturellement de sa forme exacte.

– *Le problème de traductibilité*. Si l'on poursuit avec le système *formel* contenant l'induction complète l'intention de clarifier ou de simplifier l'arithmétique informelle, il faut traduire une familiarité pratique dans un système formel. Or quel critère choisir pour une telle traduction ? Dans la seconde partie de son article *Les mathématiques et la logique* [32], Poincaré souligne que cette traduction reste parmi les desiderata même si les logicistes réussissent à donner une justification du formalisme à l'intérieur de leur propre système, c'est-à-dire s'ils trouvent une démonstration de non-contradiction [31, p. 23]. Poincaré commence donc en 1906 à s'éloigner de sa célèbre formule disant qu'en mathématiques le mot exister « signifie exempt de contradiction » [31, p. 819].

– *Le problème de l'imprédicativité*. Toute tentative de *définir* le principe d'induction à l'intérieur de la théorie des ensembles présupposerait des méthodes non-prédicatives (voir §4). Puisque sans ce principe l'arithmétique serait impossible, Poincaré est obligé de *postuler* l'induction complète comme un principe synthétique *a priori*. Le problème de l'infini actuel, nécessaire pour la définition des nombres réels, se règle de la même manière. L'induction complète est seulement le procédé le plus simple parmi d'autres constructions analogues, formant les espèces d'un même genre [34, p. 160]. De tels principes sont donnés par la conscience de notre faculté à construire un continu en chaque dimension, appelée *intuition topologique* ou de concevoir des groupes, appelée *intuition algébrique*. Les deux concepts du groupe et du continu préexistent, selon Poincaré, dans notre esprit et l'expérience permet de prendre conscience de ce fait [40, p. 157][29, p. 107]. De la même manière, Poincaré considère l'axiome du choix comme « un jugement synthétique » a priori sans lequel la « théorie cardinale » serait impossible [32, p. 313]. Ainsi se désamorce l'argument de Zermelo, à savoir que le refus de l'infini actuel entraîne l'abandon de l'Analyse moderne [48, p. 11] : Poincaré refuse l'existence formelle, c'est-à-dire la définition imprédicative d'un infini actuel mais le *postule* comme donné intuitif.

4. Les antinomies

Selon Poincaré, les antinomies découvertes au tournant du siècle – à l'image des paradoxes, dits de Russell ou de Richard – sont la conséquence d'un usage abusif de l'intuition à l'égard des entités abstraites. Et cet usage abusif est lui-même suggéré par la méthode erronée du réalisme conceptuel (platonisme)[2]. Il y a d'après Poincaré deux formes de définitions directes d'un ensemble. L'une correspond au point de vue de l'extension, c'est-à-dire, selon Poincaré, au « nominalisme » : une collection se constitue par l'adjonction de nouveaux membres ; l'autre correspond au point de vue de la compréhension, au « réalisme » conceptuel des « cantoriens » : les objets, distincts seulement par leur nombre, préexistent comme collection à leur classification. La position « pragmatiste » de Poincaré reflète une conciliation de ces méthodes, semblable au « conceptualisme » traditionnelle. Une définition formée selon la méthode « inversée » des cantoriens peut être « corrigée » en la complétant par une deuxième partie qui ajoute un complément « pragmatique » à l'hypostase d'une entité abstraite. Pour le pragmatiste, un objet « n'existe que quand il est pensé [...] par un sujet pensant » [40, p.94] et « quand il est susceptible d'être défini en un nombre fini de mots » [38, p. 231]. Relevons que si Poincaré semble avoir repris cette formule de Lebesgue et Borel, il se distingue des deux : pour lui,

[2] Historiquement, la trilogie platonisme – conceptualisme – nominalisme a ses racines dans la dispute sur les universaux au Moyen-Âge. Et cette dispute fut elle-même déclenchée par la discussion de Porphyre (232-304) sur la manière d'être des Prédicables [cinq classes de prédicats : genre (ce qui est dit de plusieurs choses de même espèce est dit du genre), espèce (ce qui est dit de choses numériquement différentes est dit de l'espèce), différence, propre, accident] dans son introduction aux « Catégories » d'Aristote. Il se demandait, sans en donner une réponse, si ces Prédicables avaient une existence indépendante des réalités individuelles, si elles existaient seulement avec les choses sensibles ou dans nos représentations.

Comment arrive-t-on à ces questions ? Lorsque Aristote analyse ces questions, le modèle de phrase qui semble servir de fil directeur, *Socrate est un homme*, présente cette particularité qu'est en position de sujet un nom propre de ce que l'on appelle substance individuelle qui ne peut venir en place de prédicat. Cependant ce n'est pas le type le plus courant de phrase déclarative que l'on est amené à énoncer. Dans un traité scientifique on trouvera plus vraisemblablement des phrases comme *le cheval est un équidé*. Qu'en est-il quand *cheval* est en position de sujet ? Si l'on se laisse emporter par le rôle analogue que jouent *Bucéphale* et *cheval* dans les phrases *Bucéphale est un cheval* et *le cheval est un équidé*, on sera conduit à admettre que *cheval* désigne une substance d'un type analogue que Bucéphale : Aristote considérait qu'il y avait non seulement des substances premières (les individus) mais également des substances secondes (les « espèces » et les « genres »).

Quel type de réalité ont ces substances secondes (que l'on appelle aussi des « universaux ») ? Au Moyen-Âge, les positions dans la querelle des universaux s'opposent de la manière suivante.

– Réalisme (Anselme) : *Universalia sunt realia* (Les universaux sont des objets existants), *Universalia sunt ante res* (Les universaux précèdent les objets concrets).
– Conceptualisme (St. Thomas, Albert le Grand, Abélard) : Universalia sunt realia (Les universaux sont des objets existants), *Universalia sunt in rebus* (Les universaux sont « dans » les objets concrets).
– Nominalisme (Roscelin, Dun Scott, Occam) : *Universalia sunt nomina* (Les universaux sont des noms), *Universalia sunt post res* (les objets concrets précèdent les universaux).

Le réaliste-platoniste interprète un terme général (un « nom commun ») comme nom d'un objet abstrait, le conceptualiste demande en plus certaines conditions de construction de l'objet abstrait (Russell considère en 1911 que les singuliers et les universaux sont deux catégories irréductibles) et le nominaliste dit qu'un nom commun est caractérisé par une dénotation multiple d'objets concrets.

l'exigence d'être définissable en un nombre fini de mots n'est pas suffisante si la définissabilité est dissociée de la construction des individus. Ainsi, Poincaré infirme une affirmation de Schoenflies à ce sujet. L'ensemble des fonctions constantes sert d'exemple :

> « Quand on dit "une fonction constante", on a une formule d'un nombre fini de mots et qui s'applique à une infinité de fonctions ; mais qui ne les définit pas, qui définit seulement leur relation avec un certain nombre, à savoir la valeur constante de la fonction. Pour achever de définir une de ces fonctions, il faut définir cette valeur constante. C'est seulement si cette valeur constante peut être définie en un nombre fini de mots, que la fonction elle-même pourra l'être » [37, p. 224].

Il semble alors cohérent de dire avec Heyting que la définissabilité en un nombre fini de mots doit être lue comme un gage de constructibilité finie. Brouwer se distingue évidemment à cet égard de Poincaré parce qu'il refuse au langage ce rôle de critère nécessaire pour la constructibilité. En 1912, il écrit dans *Intuitionism and Formalism* :

> « Dans la construction [...] le langage ordinaire ou un langage symbolique quelconque ne peut avoir un autre rôle que de servir comme un moyen auxiliaire et non-mathématique. [...] Pour cette raison, l'intuitionnisme ne peut jamais se sentir assuré de l'exactitude d'une théorie mathématique donnée par des garanties telles que [...] la possibilités de définir ses concepts en un nombre fini de mots » [3, p. 128].

Dans une note il renvoie à l'article publié en 1912 par Poincaré [39]. Il est maintenant évident pourquoi l'existence formelle de l'infini actuel est pour Poincaré inconcevable. La définition d'un ensemble infini au sens actuel dans une même formule comportant un nombre fini de mots est impossible :

> « Et en effet ce qui caractérise précisément une définition, c'est qu'elle permet de distinguer l'objet défini de tous les autres objets ; si elle s'applique à une infinité d'objets, elle ne permet pas de les discerner les uns des autres ; elle n'en définit aucun ; elle n'est plus une définition » [37, p. 224].

On sait que Poincaré espère éviter les antinomies connues en se limitant aux définitions prédicatives [20]. Le fait que les solutions prédicatives des antinomies éliminent également les antinomies « linguistiques » (Peano), leur donnait aux yeux de Russell et de Poincaré une supériorité intrinsèque. C'est Russell qui a introduit les termes « prédicatif » et « non-prédicatif » pour fixer la différence entre deux sortes de fonctions propositionnelles : celles qui déterminent et celles qui ne déterminent pas une classe. Il appelle les premières « prédicatives » et les deuxièmes « non-prédicatives ». Pour Poincaré, les définitions non prédicatives sont une forme de cercle vicieux.

Prenons l'exemple de l'antinomie de Richard.

Examinons tous les nombres décimaux qui peuvent être définis à l'aide d'un nombre fini de mots. Ces nombres décimaux forment un ensemble E, et il est facile de voir que cet ensemble est dénombrable, c'est-à-dire, il est possible de numéroter les nombres décimaux de cet ensemble de un au premier ordinal infini, omega.

Poincaré souligne ensuite comment, en référence à E, nous pouvons définir un nombre décimal N qui n'est pas dans E. N est donc définissable en un nombre fini de mots et impossible à définir, car il n'appartient pas à l'ensemble E contenant tous les nombres définissables en un nombre fini de mots.

Il formule un principe pour éviter le cercle qui mène au célèbre principe de Russell. Ce principe est célèbre puisque Russell a réussi à développer une théorie qui le respecte : la théorie ramifiée des types. Chez Poincaré on ne trouve rien de comparable : il croit que ses précautions « intuitives » le mettent à l'abri des défauts de définition, mais il découvre bientôt que la question n'est pas si simple :

> « En ce qui concerne le deuxième nombre cardinal transfini aleph-un je ne suis pas tout à fait convaincu qu'il existe. On l'atteint en considérant la totalité des nombres ordinaux de puissance aleph-zéro ; il est clair que cette totalité est nécessairement d'une puissance supérieure. Mais on peut se demander si elle est close, et donc si nous pouvons parler de sa puissance sans contradiction. En tout cas il n'y a pas d'infini actuel » [38, p. 234].

Poincaré ne prend la question de la prédicativité au sérieux que lorsqu'il apprend par Zermelo que la preuve, par Cauchy, du « théorème fondamental » de l'algèbre (selon lequel, dans les nombres complexes, une équation algébrique $F = 0$ a toujours une racine) fait justement appel aux définitions non-prédicatives rejetées, donc seulement lorsque les mesures prises contre les antinomies logiques affectent les « vraies mathématiques » [37, p.199]. La discussion entre Poincaré, Russell, Peano et Zermelo sur les mesures à prendre se prolonge pendant six ans. La difficulté est de formuler un principe qui ne soit ni trop restrictif pour les résultats importants en Analyse, ni trop libéral à l'égard des formations de concept rejetées par la position philosophique de Poincaré.

Bref, selon Poincaré, les définitions non-prédicatives sont défectueuses parce que le prédicat impliqué n'obéit pas au principe de bivalence à cause d'un phénomène d'information partielle : la classification est changée par l'introduction de nouveaux éléments. Mais les restrictions « prédicatives » inventées par Poincaré sont trop « fortes » et excluent même – nous l'avons déjà anticipé au dernier paragraphe – l'arithmétique élémentaire :

« [Il faut regarder] le principe d'induction comme un jugement synthétique et non pas comme une définition, parce que cette définition serait "non-prédicative" » [32, p. 314].

En résumé, afin que la position prédicative de Poincaré soit applicable à une partie signifiante des mathématiques, il faut l'étendre d'une manière ad hoc, mi-constructive obéissant au prédicativisme, mi-classique en postulant des principes synthétiques a priori. En ce sens, Poincaré est semi-intuitionniste ou, mieux, semi-constructiviste. En effet, et contrairement à ce que croit Brouwer, pour Poincaré, l'intuition des principes en question n'est point indépendante de l'expérience et du langage.

5. La « logique » de Poincaré aujourd'hui

Avec les tentatives de Hermann Weyl [46] et de Paul Lorenzen [25], ce fut surtout Solomon Feferman [11] qui a développé des univers et des systèmes formels prédicatifs dont les idées fondamentales reposent en partie sur les idées de Poincaré. Préservent-ils l'intégralité de l'Analyse ? On peut montrer que ces univers contiennent les ensembles prédicativement définissables, sans être définis eux-mêmes d'une manière prédicative : on présuppose la totalité de la théorie des nombres naturels, l'induction complète incluse. Ces ensembles sont alors inclus dans un segment initial de la classe des prédicats du second ordre que l'on définit, afin de saisir la pensée intuitive de prédicativité, de la manière suivante.

Puisque le concept de récursivité est beaucoup trop restreint pour caractériser la prédicativité (généralement, un prédicat défini à l'aide de quantificateurs non restreints n'appartient plus à la classe des prédicats récursifs), il semble souhaitable de différencier les prédicats récursivement non décidables selon la complexité de leur non-décidabilité. Or, c'est à l'aide de la notion de l'énumérabilité que l'on forme une première classe de prédicats récursivement non-décidables [voir Shoenfield (1967), 160sqq.]. Appelons une variable x du 1^er^ ordre, si elle ne prend comme valeurs que les nombres naturels (N), et une variable X du 2^nd^ ordre, si des ensembles de nombres naturels constituent son domaine de variation. Une formule $A(X)$ est arithmétique, si elle ne contient aucune variable liée du 2^nd^ ordre. Soit P récursivement énumérable : il existe alors un prédicat récursif Q tel que

$$P(\bar{X}) \leftrightarrow \exists y Q(\bar{X}, y) \text{ pour tout } \bar{X}$$

$$[P(\bar{X}) \text{ signifie } P(X_1, ..., X_n) \text{ où } X_i \text{ est une variable du second ordre }].$$

À partir de là, on obtient la *hiérarchie arithmétique* suivante constituée par des prédicats récursivement énumérables de plus en plus complexes en comptant l'alternance des quantificateurs non restreints du 1^er^ ordre dans le préfixe des prédicats récursifs :

$\Pi^0_0 \equiv \sum^0_0$ La classe des prédicats récursif $[P/P$ est récursif $]$
$\sum^0_{n+1} \equiv [P/\text{il existe un} Q \in \Pi^0_n : (P(\bar{X} \leftrightarrow \exists y Q(\bar{X}, y))]$
$\Pi^0_{n+1} \equiv [P/\text{il existe un} Q \in \sum^0_n : (P(\bar{X} \leftrightarrow \forall y Q(\bar{X}, y))]$
$\Delta^0_n \equiv \sum^0_n \bigcap \Pi^0_n.$

On démontre que

$$\Delta^0_1 \equiv \sum\nolimits^0_1 \bigcap \Pi^0_1$$

est exactement la classe des relations récursives. En associant aux fonctions de Δ^0_ω la classe K_ω des nombres réels a qui satisfont pour une $f \in \Delta^0_\omega$ et pour chaque $n \in N$ à l'inégalité

$$||a - a[a]| - f(n)/n| < 1/n,$$

on obtient l'univers prédicatif de Weyl.

Si l'on présuppose maintenant un langage du 2^nd^ ordre permettant des quantifications sur des ensembles de nombres naturels, on est conduit à définir, par analogie à la hiérarchie arithmétique une *hiérarchie analytique*. Dans ce cas, l'alternance des quantificateurs non-restreints du 2^nd^ ordre dans le préfixe des prédicats arithmétiques sert de mesure de complexité :

$\Pi^1_0 \equiv \sum^1_0 \equiv [P/P \text{ appartient à } \Pi^0_n \text{ où à } \sum^0_n \text{ pour } n \geqslant 0]$
$\sum^1_{n+1} \equiv [P/\text{il existe un } Q \in \Pi^1_n : (P(\bar{X}) \leftrightarrow \exists y Q(\bar{X}, y))]$
$\Pi^1_{n+1} \equiv [P/\text{il existe un } Q \in \sum^1_n : (P(\bar{X}) \leftrightarrow \forall y Q(\bar{X}, y))]$
$\Delta^1_n \equiv \sum^1_n \bigcap \Pi^1_n.$

Puisque Δ_1^1 est, d'une part, une véritable extension de la classe des relations arithmétiques, et se trouve d'autre part au bas de l'échelle analytique, on appelle les ensembles qu'il contient « hyperarithmétiques ». Or, Feferman a pu montrer que les formulations intuitives de la prédicativité que donnait Poincaré conduisent au même univers Δ_1^1 qui comporte au moins tous les ensembles prédicativement définissables.

En 1998, Solomon Feferman a développé un système W dans lequel l'essentiel de l'Analyse se laisse développer [12]. C'est une extension conservative de l'arithmétique de Peano, de sorte que l'ontologie sous-jacente est celle que l'on accepte avec *l'arithmétique de Peano*.

Une autre application plus directe des idées de Poincaré fut récemment proposée par Jaakko Hintikka [22]. Il soutient que le rejet, par Poincaré, de la notation de la logique moderne l'aidait à mieux saisir la situation conceptuelle qui est responsable des paradoxes comme celui de Richard (voir §4). Dans une définition de la forme

(1) $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow D[x])$ où on substitue b pour y, de sorte que l'on obtient
(2) $\forall x (x \in b \leftrightarrow D[x])$

le *definiens* $D[x]$ doit être indépendant du *definiendum* b. À cet effet, on doit exiger qu'aucune expression pour b n'intervienne en $D[x]$. Cependant, cette indépendance notationnelle n'est pas suffisante pour garantir que le *definiens* $D[x]$ soit indépendant dans toutes les situations. Car bien que les quantificateurs dans $D[x]$ puissent être considérés comme indépendants de b dans (2), ils ne peuvent l'être en (1) du quantificateur $\exists y$ si l'on se limite à la notation de la logique de premier ordre habituel. Ainsi, Hintikka propose une nouvelle logique, appelée *indepency friendly logic* (IF-logic) dans laquelle l'indépendance est notée par une barre oblique (« / ») qui est utilisée pour extraire un quantificateur (ou une constante) de la portée d'un autre. Au lieu de la formule (2) on obtient ainsi :
(3) $\forall x/b (x \in b \equiv D[x])$
Jusqu'au remplacement, par Hintikka, de la traditionnelle logique du premier ordre de Frege-Russell (qui n'accorde pas assez attention aux relations de dépendance des quantificateurs) par la IF-Logic, les logiciens et les mathématiciens ne savaient pas comment mettre en œuvre l'aperçu bien senti de Poincaré. Cependant, puisque le principe de l'induction est exprimable dans la IF-Logic, on ne peut plus prendre avec Poincaré la créativité comme un critère pour séparer la logique des mathématiques.

Dans cette perspective, l'argument intéressant de Poincaré contre le logicisme n'est donc pas tellement la conjecture qu'il n'existe pas une traduction purement logique de chaque raisonnement mathématique mais l'affirmation que cette transposition serait dépourvue des valeurs épistémiques, nécessaires à la compréhension du raisonnement mathématique [9, p. 268] :

> « Quand le logicien aura décomposé chaque démonstration en une foule d'opérations élémentaires, toutes correctes, il ne possédera pas encore la réalité tout entière ; ce je ne sais quoi qui fait l'unité de la démonstration lui échappera complètement. [...] Or, cette vue d'ensemble, la logique pure ne peut nous la donner, c'est à l'intuition qu'il faut la demander » [34, pp. 133-134].

Selon cette image, le mathématicien lie dans une inférence la prémisse à la conclusion à l'aide d'une « architecture mathématique ». Celle-ci possède deux aspects : elle doit obéir au principe d'économie de la pensée de Mach [39, pp. 16, 23, 29] et correspondre à certaines considérations esthétiques. Ces deux exigences sont liées par le concept d'harmonie. En effet, le logicien qui cherche à combler les lacunes dans une preuve par des représentations formelles dissimule en vérité le rôle que joue la compréhension dans les démonstrations parce qu'en introduisant « des formules longues et compliquées », il obstrue une vue d'ensemble. Une preuve est plus accessible si l'on introduit d'abord quelque ordre dans le domaine des objets considérés. Introduire une relation d'ordre signifie de reconnaître des classes de combinaisons analogues entre certains éléments ce qui « nous permet alors de voir d'un seul coup d'œil chacun de ces éléments et la place qu'il occupe dans l'ensemble » [34, p. 25]. Ainsi on obtient une économie de pensée en rendant un fait complexe harmonieux par l'introduction d'une relation d'ordre. Cet argument est avancé dans le passage suivant extrait de *Science et méthode* :

> « En un mot, le sentiment de l'élégance mathématique n'est autre chose que la satisfaction due à je ne sais quelle adaptation entre la solution que l'on vient de découvrir et les besoins de notre esprit et c'est à cause de cette adaptation même que cette solution peut être pour nous un instrument. Cette satisfaction esthétique est par suite liée à l'économie de pensée » [34, p. 26].

En introduisant la sensibilité esthétique dans le contexte de la compréhension scientifique, Poincaré déplace les frontières entre science et esthétique en montrant que leur différence n'est pas conséquente à la supposée opposition entre émotif et cognitif. Comme le dira Nelson Goodman plus tard en 1969 (cf. [17]), leur différence réside plutôt dans un usage différent des symboles en question et les émotions dans l'expérience esthétique servent la cognition.

6. Conclusion

L'attitude de Poincaré vers la logique au sens strict est réservée. Pour lui, la syllogistique est sans intérêt pour le raisonnement mathématique. Quant à la logique formelle standard, même exempte d'antinomies, elle ne permet pas de comprendre les démonstrations : dans le meilleur des cas, elle n'en est qu'une transposition rigoureuse qui masque leurs contenus. Poincaré renonce ainsi à un instrument invariant de raisonnement mathématique, ce que ses successeurs ont pris pour un manque de rigueur. Mais à cette rigueur transparente de la logique, Poincaré oppose une rigueur esthétique plus opaque, qui échappe aux esprits purement analytiques : *la valeur esthétique* n'est accessible qu'au praticien. La transparence sémantique du formalisme logique et l'opacité d'un raisonnement esthétique ne sont-elles pas finalement les deux faces de la même médaille : la première étant transparente *en théorie*, la deuxième *en pratique* ?

7. Références

[1] Alexandroff, P. S. (1983), Poincaré and Topology, *in* : Browder, F. E. (éd.), *The Mathematical Heritage of Henri Poincaré*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics of the American Mathematical Society, volume 39, volume 2, 245-256.

[2] Boutroux, Pierre (1914), L'œuvre philosophique, in : *Henri Poincaré. L'Œuvre scientifique, L'Œuvre philosophique*. Paris : Alcan, 205-264.

[3] Brouwer, Luitzen Egbertus Jan (1912), Intuitionism and Formalism (Inaugural address, read 1912), in : Brouwer, *Collected Works 1*, éd. A. Heyting, (North-Holland/ Elesevier), New York/Amsterdam, 123-138.
[4] Cassinet, Jean (1983), La position d'Henri Poincaré par rapport à l'Axiome du Choix, à travers ses écrits et sa correspondance avec Zermelo (1905-1912). *History and Philosophy of Logic* **4**, 145-155.
[5] Cantor, Georg (1991), *Briefe* (éd. Meschkowski, Herbert/Nilson, Winfried). Berlin/Heidelberg/New : Springer.
[6] Couturat, Louis (1913), Logistique et intuition. *Revue de métaphysique et de morale* **21**, 260-268 ; *Revue de métaphysique et de morale* 24, 15-85.
[7] Décaillot, Anne-Marie (2008), *Cantor et la France. Correspondance du mathématicien allemand avec les Français à la fin du XIX^{e} siècle*. Paris : Kimé.
[8] Detlefsen, Michael (1992), Poincaré against the Logicicians. *Synthese* **90**, pp. 349-378.
[9] Detlefsen, Michael (1993), Logicism and the Nature of Mathematical Reasoning, in : A. Irvine/G. Wedekind (eds.), *Russell and Analytical Philosophy*. Toronto : University Press, 265-292.
[10] Dugac, Pierre (1984), Georg Cantor et Henri Poincaré, *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche* IV, fasc. 1, 65-96.
[11] Feferman, Solomon (1964), Systems of Predicative Analysis, *The Journal of Symbolic Logic* **29**, pp. 1-30.
[12] Feferman, Solomon (1998), *In the Light of Logic*, New York/Oxford : Oxford University Press.
[13] Folina, Janet (1996), Logic and Intuition in Poincaré's Philosophy of Mathematics, in : [19 pp. 417-434].
[14] Fraenkel, Abraham Adolf / Bar Hillel, Yehosua / Levy, Azriel (1984), *Foundations of Set Theory*. Amsterdam/New York/Oxford : North-Holland.
[15] Frege, Gottlob (1894), Rezension von Dr. E. G. Husserl : Philosophie der Arithmetik, *Zeitschrift für Philosophie und und philosophische Kritik*, CIII, 313-332.
[16] Goldfarb, Warren (1985), Poincaré against the Logicists, in : W. Aspray/P. Kitcher (eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*. Minneapolis : Minnesota Press, 61-81.
[17] Goodman, Nelson (1990), *Langages de l'art*, Nîmes : Chambon.
[18] Gray, Jeremy (1991), « Did Poincaré say "Set Theory is a Disease" ? », *Mathematical Intelligencer* **13** (1), pp.19-22.
[19] Greffe, Jean-Louis / Heinzmann, Gerhard / Lorenz, Kuno (1996), *Henri Poincaré. Wissenschaft und Philosophie*. Berlin/Paris : Akademie Verlag/Blanchard.
[20] Heinzmann, Gerhard (1985), *Entre intuition et analyse. Poincaré et le concept de prédicativité*. Paris : Blanchard.
[21] Heinzmann, Gerhard (1986), ed., *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano. Textes de la discussion (1906-1912) sur les fondements des mathématiques : des antinomies à la prédicativité*. Paris, Blanchard.
[22] Hintikka, Jaakko (2012), If Logic, Definitions and the Vicious Circle Principle, *Journal of Philosophical Logic* 41, 505-517.
[23] Jourdain, Philip (1912), For Logicists. *The Monist* **XXII**, 481-483.
[24] Largeault, Jean (1993), *Intuition et intuitionnisme*. Paris : Vrin.
[25] Lorenzen, Paul (1965), *Differential und Integral. Eine konstruktive Einführung in die klassische Analysis*. Frankfurt : Akademische Verlagsgesellschaft.
[26] Poincaré, Henri (1882), Sur les fonctions fuchsiennes, *Comptes rendus de l'Académie des sciences* **94** (1882), 1166-1167. Œuvres, tome II, pages 44-46.
[27] Poincaré, Henri (1899), « La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement », *L'enseignement mathématique*, 1 (1899), 157-162 ; *Œuvres*, tome XI, 129-133.
[28] Poincaré, Henri (1900), « Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques », *Compte rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens* tenu à Paris du 6 au 12 août 1900, Paris, 1900, 115-130. Publié également dans [30], chapitre I.
[29] Poincaré, Henri (1902), *La science et l'hypothèse*. Paris : Flammarion (1968).
[30] Poincaré, Henri (1905), *La valeur de la science*. Paris : Flammarion (1970).
[31] Poincaré, Henri (1905/06), Les mathématiques et la logique. *Revue de métaphysique et*

de morale **13** (1905), 815-835 et *Revue de métaphysique et de morale* **14** (1906), 17-34 ; publié également dans [34], livre II, chapitre III, avec quelques coupes ; réimpression in : [21, pp. 11-53].

[32] Poincaré, Henri (1906), Les mathématiques et la logique, *Revue de métaphysique et de morale* **14**, 294-317 ; réimpression in : [21, pp. 79-104].

[33] Poincaré, Henri (1906a), « À propos de la logistique », *Revue de métaphysique et de morale*, 14 (1906), 866-868 ; également dans [21, pp. 145-147].

[34] Poincaré, Henri (1908), *Science et méthode*. Paris : Kimé (1999).

[35] Poincaré, Henri (1908a), « L'avenir des mathématiques », chapitre « Le cantorisme », *Atti IV Congr. Internaz. Matematici*, Roma, 11 Aprile 1908, pages 167-182 ; Publié également dans [34], livre I, chapitre II.

[36] Poincaré, Henri (1909), La Logique de l'infini. *Révue de métaphysique et de morale* **17**, 461-482, réimprimé in : [34, pp. 235-256].

[37] Poincaré, Henri (1909a), Réflexions sur deux notes de M. A. S. Schœnflies et de M. E. Zermelo, *Acta mathematica*, 32, 195-200 ; œuvres, tome XI, 119-144 ; également dans [34, pp. 224-229].

[38] Poincaré, Henri (1909b), Über transfinite Zahlen, in : H. Poincaré, *Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik*, fünfter Vortrag, 27. April 1909, Leipzig/Berlin : Teubner, 1910 ; abgedruckt in Poincaré 1956, vol. 11, 120-124 et in [34, pp. 231-234].

[39] Poincaré, Henri (1912), « La logique de l'infini », *Scientia* (Rivista di Scienza), 12 (1912) ; 1-11. Publié également dans *Dernières pensées*, chapitre V (en 1912 sous le titre « Les mathématiques et la logique », plus tard sous le titre « La logique de l'infini » ; également dans [34, pp. 305-315].

[40] Poincaré, Henri (1913), *Dernières pensées*, Paris Flammarion ; pages selon la nouvelle édition de 1963.

[41] Poincaré, Henri (1956), *Œuvres*, vol. I-XI, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences. Paris : Gauthier-Villars.

[42] Poincaré, Henri (2002), Des fondements de la géométrie, in : *Poincaré, L'opportunisme scientifique*, compiled by L. Rougier, edited by L. Rollet. Basel/Boston/Berlin : Birkhäuser, 5-46.

[43] Resnik, Michael D. (1996), On Understanding Mathematical Proofs, in : [19, pp. 459-466].

[44] Rouilhan, Philippe de (1996), *Russell et le cercle des paradoxes*. Paris : PUF.

[45] Shoenfield, Joseph R. (1967), *Mathematical Logic*, New York : Addison/Wesley.

[46] Weyl, Hermann (1918), *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Leipzig ; Veit.

[47] Wittgenstein, Ludwig (1975), *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (1956). Cambridge (Mass.)/London : MIT Press.

[48] Zermelo, Ernst (1908), Über die Grundlagen der Arithmetik. *Atti del IV Congr. Int. dei Matematici*, Roma, Vol II, 8-11.

Bulletin

Dernières parutions

Tome 140 - Fascicule 2

V. Feuvrier - Remplissage de l'espace euclidien par des complexes polyédriques d'orientation imposée et de rotondité uniforme

P. Jammes - Minoration du spectre des variétés hyperboliques de dimension 3

Nguyen Dang Ho Hai - Un complexe de Koszul de modules instables et cohomotopie d'un spectre de Thom

Tome 140 - Fascicule 1

G. Henniart - Induction automorphe globale pour les corps de nombres

F. Pazuki - Theta height and Faltings height

M. Raibaut - Singularités à l'infini et intégration motivique

G. Massuyeau - Infinitesimal Morita homomorphisms and the tree-level of the LMO invariant

prix public* : 38 € - prix membre* : 27 €
frais de port non compris
Revue disponible par abonnement : Europe :145 € - hors Europe : 163 €

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F-75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

PRIX ET DISTINCTIONS

Le 6 août 2012, deux mathématiciennes françaises, Nalini Anantharaman et Sylvia Serfaty, ont reçu le prestigieux Prix Henri Poincaré (les deux autres lauréats étant F. Dyson et B. Simon) décerné par l'IAMP (International Association for Mathematical Physics).

Le lecteur de la Gazette *se souvient certainement d'un article*[1] *où Nalini Anantharaman et Stéphane Nonnenmacher décrivaient la problématique du chaos quantique. Les travaux de Sylvia Serfaty, quant à eux, n'avaient pas encore trouvé leur place dans la* Gazette. *C'est chose faite avec l'article ci-dessous de Bernard Helffer et Radu Ignat.*

Le prix Henri Poincaré pour Sylvia Serfaty

Bernard Helffer, Radu Ignat[1]

La citation du prix Henri Poincaré pour Sylvia Serfaty mentionne : « for the outstanding work in the theory of Ginzburg-Landau equation, including remarkable progress towards the rigorous proof of the onset of the Abrikosov lattice in the theory of superconductivity ». C'est pourquoi l'objet de cette note est de présenter très brièvement l'œuvre de Sylvia Serfaty en supraconductivité.

Le modèle le plus simple et accepté de tous a été proposé par Ginzburg-Landau (on ne discutera ici que le cas de la dimension 2). Il met en jeu une paire (ψ, A) définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ borné, régulier et simplement connexe où ψ est une fonction d'onde à valeurs complexes et $A = (A_1, A_2)$ est un potentiel magnétique (c'est-à-dire un champ de vecteurs sur Ω). L'énergie de cette paire est calculée grâce à une fonctionnelle qui est, après renormalisation, définie par :

$$(1) \qquad G_\varepsilon(\psi, A) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla_A \psi|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}(1-|\psi|^2)^2 + |\operatorname{Rot} A - h_{ex}|^2 \right) dx.$$

Ici h_{ex} est un champ magnétique extérieur supposé constant (en dimension 2, on identifie les champs magnétiques à des fonctions scalaires sur Ω) et le champ $\operatorname{Rot} A = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1$ est alors appelé le champ magnétique induit. On note $\nabla_A \psi = \nabla\psi - iA\psi$ le gradient magnétique de ψ. Le paramètre $\varepsilon > 0$ est un paramètre effectif qui garde la trace des propriétés du matériau (les physiciens utilisent plutôt le paramètre $\kappa = \frac{1}{\varepsilon}$).

La littérature physique fait traditionnellement la distinction entre matériaux de type I correspondant à des grands ε et matériaux de type II correspondant aux

[1] *Gazette* des Mathématiciens, n° 119, janvier 2009.

[1] Université Paris-Sud.

petits ε. C'est dans ce deuxième régime que se situent les travaux que nous allons présenter. Mathématiquement, on regarde le comportement asymptotique des minimiseurs de G_ε dans la limite $\varepsilon \to 0$. Comme Ω est borné, l'existence de minimiseurs de G_ε (i.e. vérifiant l'infimum de la fonctionnelle) dans des espaces fonctionnels convenables est standard. Ces minimiseurs doivent vérifier les équations d'Euler-Lagrange qui dans ce contexte sont appelées les équations de Ginzburg-Landau (voir [S-JST], [DG], [GL]). Ils vont décrire les propriétés du matériau quand il est soumis au champ magnétique extérieur h_{ex}. Par exemple $|\psi(x)|^2$ mesure la densité de présence des paires d'électrons supraconducteurs.

On distingue trois types de minimiseurs. On dit qu'un minimiseur (ψ, A) est supraconducteur si ψ ne s'annule jamais, qu'il est « normal » si ψ s'annule identiquement et qu'il est mixte dans les autres cas. Plus finement, on pourra aussi distinguer deux cas d'états mixtes selon que, dans la limite ε petit, $|\psi|$ est petit ou non en dehors du bord. Cela a conduit les physiciens à introduire (au moins) trois champs critiques dont on admettra (ce qui est essentiellement vrai dans ce régime) qu'ils apparaissent successivement quand on augmente h_{ex} à partir de 0. Lorsque h_{ex} est assez petit, le minimiseur est supraconducteur (pour $h_{ex} = 0$, on voit que $\psi = 1$ et $A = 0$ est solution) ; une propriété remarquable est qu'alors le champ magnétique induit est pratiquement nul dans Ω (quand $\varepsilon \to 0$) qui explique dans certaines applications spectaculaires l'effet de lévitation. Le premier champ critique noté $H_{c_1}(\varepsilon)$ correspond à la valeur de h_{ex} pour lequel il y aura une transition entre minimiseurs supraconducteurs et minimiseurs mixtes. En d'autres termes, ψ commence à avoir des zéros (appelés aussi vortex). Leur nombre croît avec h_{ex} et ils tendent à s'arranger sur un réseau triangulaire, appelé réseau d'Abrikosov. Pour h_{ex} plus grand la distribution de vortex est tellement dense qu'ils se croisent uniformément couvrant tout le domaine, i.e, $\psi = 0$ partout et l'état supraconducteur est perdu. Le minimiseur tend à devenir « normal ».

Reprenons la discussion à partir de h_{ex} extrêmement grand. On peut montrer alors que le minimiseur est normal et que le champ magnétique induit est égal à h_{ex}. Quand on décroît h_{ex}, le troisième champ critique $H_{c_3}(\varepsilon)$ est alors défini comme le premier pour lequel le minimiseur n'est plus normal. Il s'agira au départ d'une apparition timide au bord de Ω (supraconductivité de surface), jusqu'à ce que pour un champ critique $H_{c_2}(\varepsilon)$ le minimiseur devienne significativement non-nul dans un sous-ensemble de Ω (dans le régime ε petit).

Un des objectifs de l'étude sera de donner les asymptotiques de ces champs critiques prédites par les physiciens :

$$H_{c_1}(\varepsilon) \sim \lambda_\Omega |\log \varepsilon|\,,\ H_{c_2}(\varepsilon) \sim 1/\varepsilon^2\,,\ H_{c_3}(\varepsilon) \sim \beta_0/\varepsilon^2\,, \tag{2}$$

et d'interpréter λ_Ω et β_0 (qui vérifie $\beta_0 > 1$).

Plus généralement, il s'agit donc de comprendre mathématiquement tous ces phénomènes décrits par les physiciens (dont beaucoup furent nobélisés). L'étude du régime h_{ex} situé près de $H_{c_3}(\varepsilon)$ est présentée dans [FoHe]. Les travaux d'E. Sandier et S. Serfaty analysent ce qui se passe entre $H_{c_1}(\varepsilon)$ et $H_{c_2}(\varepsilon)$. La première partie de leurs travaux est décrite dans leur livre [SaS3] mais l'histoire était loin d'être terminée et beaucoup d'autres travaux ont suivi.

Mais pour revenir au début de l'histoire, au delà de la détermination de l'asymptotique du premier champ critique, il s'agissait de comprendre le mécanisme d'apparition de ces vortex et leur influence sur la valeur de l'énergie. Ensuite la question plus complexe est de déterminer leur localisation et de trouver des fonctionnelles ou des mesures qui en expliquent la répartition. Les travaux en physique sur cette question commencent dans les années 50 mais ce n'est que dans les années 90 que les chercheurs en analyse non-linéaire ont commencé à s'intéresser au problème. On peut citer en France C. Bolley, M. Schatzman et surtout tout un groupe à Jussieu autour de H. Brezis qui a commencé à développer des outils pour analyser les vortex. Le livre de Bethuel-Brezis-Hélein [BBH] rend bien compte de ces travaux. Dans le modèle étudié, il n'y avait pas de champ magnétique et la création des vortex était un effet d'une condition de Dirichlet non homogène au bord. Typiquement, si la donnée au bord a un degré topologique $d > 0$, alors un minimiseur présente d vortex de degré 1 répartis uniformément dans Ω (par exemple, si d pas très grand, ils forment des polygones réguliers concentriques). Il n'y avait rien d'évident à ce que ces travaux s'appliquent au cas avec champ magnétique dans le régime ε petit. C'est tout le mérite d'E. Sandier et S. Serfaty d'avoir pu contrôler le nombre de vortex des minimiseurs de l'énergie G_ε et montrer qu'ils étaient répartis sur un réseau triangulaire d'Abrikosov dans le régime $H_{c_1}(\varepsilon) < h_{ex} \ll H_{c_2}(\varepsilon)$ lorsque ε tend vers 0. Pour cette analyse, les méthodes topologiques de concentration asymptotique de l'énergie trouvent leur origine dans le livre pionnier de [BBH]. Elles ont été beaucoup étendues en particulier par Jerrard et Soner [Je, JS] puis par Sandier et Serfaty [Sa, SaS3]. L'outil principal est donné par la *vorticité* associé à une configuration (ψ, A) :

$$\mu(\psi, A) = \mathrm{Rot}\, j(\psi, A) + \mathrm{Rot} A\,, \quad \text{où} \quad j(\psi, A) =< i\psi, \nabla_A \psi >$$

est le courant superconducteur. Ici $< \cdot, \cdot >$ représente le produit scalaire dans $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$ et si on écrit $\psi = \rho e^{i\varphi}$, on a

$$j(\psi, A) = \rho^2(\nabla\varphi - A)$$

là où $\rho \neq 0$. En effet, $\mu(\psi, A)$ correspond à une invariance de jauge du déterminant jacobien de ψ. On entend par là que

$$\mu(e^{i\theta}\Psi, A + \nabla\theta) = \mu(\Psi, A)\,.$$

Si $A = 0$, on notera que

$$\mu(\psi, A) = \mathrm{Rot} j(\psi, A) = 2 \det \nabla\psi\,.$$

Les estimées du jacobien (voir [JS, SaS3]) montrent que la vorticité $\mu(\psi, A)$ d'un minimiseur[2] de G_ε est approchée par une mesure de la forme $2\pi \sum_j d_j \delta_{a_j}$ lorsque $\varepsilon \to 0$ (où δ_a désigne la masse de Dirac en a). Les points a_j sont appelés vortex de ψ (comme points de concentration de la vorticité) et les entiers d_j représentent le degré topologique de a_j. Plus précisément, un vortex est un objet centré en un zéro

[2] Si (ψ, A) est un minimiseur de G_ε, alors l'équation Euler-Lagrange associée à G_ε implique que le courant superconducteur j satisfait $j(\psi, A) = -\nabla^\perp \mathrm{Rot} A$, où pour une fonction b, $\nabla^\perp b = (-\partial_2 b\,, \partial_1 b)$.

isolé a_j de ψ autour duquel il y a une circulation de phase, c'est-à-dire un degré $d_j \neq 0$; quand ε est petit, on déduit par (1) que $|\psi|$ est proche de 1 en dehors d'une région de taille ε autour de a_j où l'énergie G_ε est quantifiée d'ordre au moins $\pi|d_j||\log\varepsilon|$.

Afin de déterminer la distribution des vortex, un développement asymptotique de l'énergie Ginzburg-Landau est nécessaire dans la limite $\varepsilon \to 0$. La description du champ moyen (i.e., l'analyse au premier ordre de l'énergie) montre que les vortex tendent à être répartis uniformément dans un sous-domaine de Ω, mais que le terme principal du développement de l'énergie ne dépend pas de la distribution exacte des vortex. Expliquons plus précisément ce phénomène quand les vortex commencent à nucléer, i.e. dans le régime

$$h_{ex} = \lambda|\log\varepsilon|,$$

où $\lambda \geqslant \lambda_\Omega$ et $\lambda_\Omega > \frac{1}{2}$ est le coefficient apparaissant dans (2).

Sandier et Serfaty montrent qu'il existe un ouvert $\omega_\lambda \subset \Omega$ tel que tout minimiseur $(u_\varepsilon, A_\varepsilon)$ de G_ε satisfait à

$$\frac{\mu(u_\varepsilon, A_\varepsilon)}{h_{ex}} \to \mu_\lambda \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{Rot}A_\varepsilon}{h_{ex}} \to h_\lambda \text{ quand } \varepsilon \to 0$$

où la vorticité limite μ_λ est une mesure de support ω_λ uniformément continue par rapport à la mesure de Lebesgue dx restreinte à ω_λ :

$$\mu_\lambda = (1 - \frac{1}{2\lambda})\mathbf{1}_{\omega_\lambda} dx$$

et la fonction limite h_λ est la solution minimisante d'un problème d'obstacle associé à la vorticité, i.e.,

$$-\Delta h_\lambda + h_\lambda = \mu_\lambda \quad \text{dans } \Omega, \quad h_\lambda = 1 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{3}$$

L'ouvert ω_λ est vide si $\lambda < \lambda_\Omega$ et génériquement, ω_λ est réduit à un point lorsque $\lambda = \lambda_\Omega$, puis l'aire $|\omega_\lambda|$ augmente avec λ ; dans le cas d'un disque Ω centré en origine, ω_λ est un sous-disque centré en origine. Dans ce contexte, l'énergie minimale au premier ordre s'écrit

$$G_\varepsilon(\psi_\varepsilon, A_\varepsilon) \sim \frac{1}{2} h_{ex}|\log\varepsilon'| \int_\Omega \mu_\lambda + \frac{h_{ex}^2}{2}\int_\Omega |\nabla h_\lambda|^2 + |h_\lambda - 1|^2 \tag{4}$$

modulo un reste d'ordre $o(h_{ex}|\log\varepsilon'|)$, où $\varepsilon' = \varepsilon\sqrt{h_{ex}}$ est une correction de la taille d'un vortex.

Ces résultats restent vrais dans le régime plus général $H_{c_1}(\varepsilon) < h_{ex} \ll H_{c_2}(\varepsilon)$ en considérant $\lambda = +\infty$, i.e., $\omega_\lambda = \Omega$, $\mu_\lambda = \mathbf{1}_\Omega\, dx$ et $h_\lambda = 1$.

Pour expliquer l'optimalité du réseau triangulaire d'Abrikosov, Sandier & Serfaty [SaS4] arrivent à caractériser le deuxième ordre de l'énergie G_ε qu'ils étudient par un argument d'éclatement (« blow-up ») à l'échelle de la distance entre les vortex d'ordre $1/\sqrt{h_{ex}}$. Après avoir effectué le blow-up et avoir soustrait la moyenne macroscopique de la vorticité μ_λ, l'équation (3) correspond dans la limite $\varepsilon \to 0$ à :

$$-\Delta H + (1 - \frac{1}{2\lambda}) = 2\pi \sum_{a\in\Lambda} \delta_a \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \tag{5}$$

où Λ est une configuration discrète de points du plan $\mathbb{R}^2$ et la mesure de vorticité devient localement une véritable somme de masses de Dirac (chacune de degré topologique 1).

Le terme d'ordre deux de l'énergie minimale $G_\varepsilon(\psi_\varepsilon, A_\varepsilon)$ s'écrit [3]

$$h_{ex}|\omega_\lambda|\big(W(\nabla H)+\gamma\big),$$

modulo un reste d'ordre $o(h_{ex})$, où γ est une constante universelle qui représente l'énergie du profil radial d'un vortex de degré 1.

Expliquons maintenant l'*énergie renormalisée* $W(\nabla H)$ qui gouverne la position des vortex associés à la vorticité $2\pi\sum_{a\in\Lambda}\delta_a$. Elle est plus précisément définie comme une limite :

$$W(\nabla H)=\limsup_{R\to\infty}\frac{W(\nabla H,\chi_{B_R})}{|B_R|}$$

où χ_{B_R} est une fonction de troncature (arbitraire) de support compact [4] dans la boule $B_R\subset\mathbb{R}^2$ de rayon R et

$$W(\nabla H,\chi_{B_R})=\lim_{\eta\to 0}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2\setminus\cup_{a\in\Lambda}B(a,\eta)}\chi_{B_R}|\nabla H|^2\,dx+\pi|\log\eta|\sum_{a\in\Lambda}\chi_R(a)\right).$$

Cette dernière formule est justifiée par le fait que chaque vortex $a\in\Lambda$ correspond à une singularité logarithmique de H et donc, $|\nabla H|^2$ n'est pas intégrable. Dans le cas d'un ensemble Λ périodique par rapport à un réseau $\mathbb{Z}\vec{u}+\mathbb{Z}\vec{v}$, identifié par n points $\{a_1,\dots,a_n\}$ sur le tore $\mathbb{T}_0=\mathbb{R}^2\big/(\mathbb{Z}\vec{u}+\mathbb{Z}\vec{v})$, alors l'expression de l'énergie renormalisée s'écrit :

$$W(a_1,\dots,a_n)=\frac{1}{2}\sum_{j\neq k}H_0(a_j-a_k)+nc_0$$

où H_0 est la fonction de Green sur $\mathbb{T}_0$, i.e. solution de

$$-\Delta H_0=2\pi\delta_0-1$$

dans $\mathbb{T}_0$ et c_0 est une constante (qui dépend de $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

Le premier terme de W représente les interactions coulombiennes entre les vortex. Sandier & Serfaty montrent que le réseau triangulaire est l'unique minimiseur parmi les configurations réseau, ce qui représente la première justification rigoureuse de l'apparition du réseau d'Abrikosov dans le régime $H_{c_1}(\varepsilon)<h_{ex}\ll H_{c_2}(\varepsilon)$. De façon surprenante, ce résultat repose partiellement sur la théorie des nombres, plus précisément, sur des travaux autour de la fonction d'Epstein ζ associée aux configurations réseaux Λ (voir l'article de Montgomery [Mo]).

Bien sûr les travaux de Sylvia Serfaty couvrent des domaines très variés de l'analyse et ne se limitent pas à ceux que nous avons présentés. Nous mentionnons aussi que les questions autour du réseau d'Abrikosov débouchent sur d'autres études dans lesquelles la contribution de Sylvia Serfaty est primordiale. Nous citerons par

---

[3] Par (4), on savait déjà que l'énergie minimale à l'ordre deux était un reste d'ordre $o(h_{ex}|\log\varepsilon'|)$.

[4] La fonction χ_{B_R} satisfait $\chi_{B_R}=1$ dans B_{R-1} et $|\nabla\chi_{B_R}|\leqslant C$.

exemple les études en mécanique statistique pour les gaz coulombiens $1D$ et $2D$ (avec Sandier), sur les matrices aléatoires (avec Borodin) ou sur le modèle d'Ohta-Kawasaki relatif aux copolymères à blocs (avec Goldman et Muratov). On pourra en lire plus dans son récent article [Se].

Références

[Ab] A. Abrikosov. On the magnetic properties of superconductors of the second type. Soviet Phys. JETP 5 (1957), p. 1174-1182.

[BBH] F. Bethuel, H. Brezis, et F. Hélein. *Ginzburg-Landau vortices.* Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications 13. Birkhäuser (1994)

[DG] P.G. De Gennes. Superconductivity of metal and alloys. Benjamin, New York and Amsterdam. 1966.

[FoHe] S. Fournais et B. Helffer. Spectral methods in surface superconductivity. Progress in non-linear differential Equations and their applications. Birkhäuser (2011).

[GL] V.L. Ginzburg et L.D. Landau. Collected papers of L.D. Landau. Edited by D. Ter. Haar, Pergamon press, Oxford 1965.

[Je] R.L. Jerrard, Lower bounds for generalized Ginzburg-Landau functionals, SIAM J. Math. Anal., 30, (1999) 721–746,

[JS] R.L. Jerrard et H.M. Soner. The Jacobian and the Ginzburg-Landau energy, Calc. Var. Partial Differential Equations, 14 (2002), 151–191.

[Mo] H. L. Montgomery. Minimal Theta functions, Glasgow Math J. 30 (1988), N° . 1, 75-85.

[S-JST] D. Saint-James, G. Sarma et E.J. Thomas. *Type II Superconductivity.* Pergamon, Oxford 1969.

[Sa] E. Sandier. Lower bounds for the energy of unit vector fields and applications, J. Funct. Anal., 152, (1998), 379–403.

[SaS1] E. Sandier et S. Serfaty. On the energy of type-II superconductors in the mixed phase. Rev. Math. Phys. 12 (9) (2000), p 1219-1257.

[SaS2] E. Sandier et S. Serfaty. The decrease of bulk-superconductivity close to the second critical field in the Ginzburg-Landau model. SIAM J. Math. Anal. 34 (4) (2003), p. 939-956.

[SaS3] E. Sandier et S. Serfaty. *Vortices in the magnetic Ginzburg-Landau model* Progress in non-linear differential Equations and their applications. Birkhäuser (2007).

[SaS4] E. Sandier et S. Serfaty. From the Ginzburg-Landau model to vortex lattice problems. Comm. Math. Phys. 313(3) (2012), p. 635-743.

[Se] S. Serfaty. $2D$ Coulomb gas, Abrikosov lattive and renormalized energy. IAMP News bulletin, october 2012.

HOMMAGE À PIERRE LELONG

Quelques souvenirs autour de Pierre Lelong

Jean-Pierre Ramis[1]

Introduction

Je n'ai jamais directement travaillé avec Pierre Lelong, mais durant mes débuts nos domaines de recherche étaient assez proches (tous deux relevaient de l'analyse complexe en dimension infinie)[2]. C'est sans doute durant cette période que j'ai rencontré le plus souvent Lelong (à partir de 1967), en particulier à l'occasion de son séminaire hebdomadaire. Je l'ai moins vu ensuite (avec mon séjour de deux ans à Tunis suivi de mon installation à Strasbourg), sauf à l'occasion de colloques ou d'exposés à son séminaire. Par contre dans ma seconde thématique de recherche[3] (théorèmes de dualité et application à des théorèmes d'image directe) j'ai utilisé des idées et des travaux « classiques » de Lelong (courant d'intégration sur un ensemble analytique [3], fonctions plurisousharmoniques...). Durant ma période strasbourgeoise, et malgré de nouveaux changements thématiques, j'ai été régulièrement invité à parler au Séminaire Lelong (devenu au fil du temps Lelong-Dolbeault-Skoda).

J'ai participé avec Lelong à plusieurs conférences internationales dans des endroits variés entre 1968 et 1988 ; j'en dirai quelques mots, évoquant les lieux et les rencontres. C'est durant ces rencontres que j'ai le plus parlé de mathématiques avec Lelong, il a souvent évoqué ses débuts en mathématiques et ce qui l'avait amené à ses idées essentielles (à partir de remarques simples mais profondes). J'évoquerai aussi la RCP 25 du C.N.R.S. une structure de contact entre mathématiciens et physiciens théoriciens, dont l'un des inspirateurs était Lelong, et dont j'ai été responsable de 1978 à 1985.

J'ai très peu vu Lelong entre 1985 et 2005, mes thèmes de recherche, de plus en plus « galoisiens », devenant très loin des siens. Ce n'est qu'après mon élection à l'Académie des Sciences en 2005 que je l'ai à nouveau rencontré assez régulièrement à l'occasion des réunions du mardi et de diverses cérémonies.

---

[1] Institut de France (Académie des Sciences) et Institut de Mathématiques de Toulouse, CNRS UMR 5219, Équipe Émile Picard, U.F.R. M.I.G., université Paul Sabatier (Toulouse 3).

[2] P. Mazet que j'avais entraîné sur les chemins de la dimension infinie quand nous étions tous deux assistants à la Sorbonne a fait sa thèse d'état sous la direction de P. Lelong [7], de même que J.L. Stehlé qui avait commencé ses recherches dans mon équipe à Strasbourg.

[3] Débutée en 1968.

Mes premiers pas en mathématiques et mes premières rencontres avec Pierre Lelong

À la fin de l'année 1965 j'entamais une quatrième année à l'ÉNS sans guère d'idée sur un sujet de recherche possible. L'un de mes camarades m'a entraîné dans une entrevue avec Henri Cartan, qui était responsable des mathématiques à l'École. Celui-ci nous a brossé avec un enthousiasme convaincant un large panorama de recherches possibles en holomorphie en dimension infinie et nous a proposé un « bout d'essai ». Je me suis ainsi trouvé plongé dans l'étude des anneaux locaux en dimension infinie. J'ai assez rapidement réussi à prouver la factorialité des anneaux de séries formelles et convergentes sur les espaces vectoriels normés, à partir du théorème de préparation de Weierstrass que j'avais étendu à la dimension infinie [8].

Henri Cartan aimait bien ces résultats. Pensant qu'ils devraient intéresser Lelong (qui commençait à cette époque à travailler sur les fonctions plurisousharmoniques en dimension infinie) il m'a présenté à celui-ci.

En 1966-67, H. Cartan passa l'année universitaire à Princeton. J'étais un peu « orphelin » et j'ai commencé à suivre régulièrement le séminaire Lelong à l'Institut Henri Poincaré. P. Lelong m'a invité à parler à ce séminaire [9, 10] (en mars 1967).

En 1967-68 (année passée au C.N.R.S.), j'avais enfin trouvé mon sujet avec la description locale des ensembles analytiques « de définition finie » dans les espaces de Banach et obtenu l'essentiel des résultats qui devaient constituer ma thèse. P. Lelong m'a proposé de les exposer à son séminaire [11], juste avant la « révolution » [4].

En octobre 1968 j'ai pris un poste[5] de « Maître de Conférences provisoire » [6] à la Sorbonne. J'enseignais (ou essayais d'enseigner) en première année de premier cycle et c'est dans un cadre un peu chaotique que j'ai terminé de rédiger ma thèse. Cartan avait demandé à Lelong d'en être le rapporteur. Autant que je me souvienne, Lelong ne m'a pas demandé beaucoup de modifications, par contre Cartan ne s'en était pas privé et j'avais dû taper de nombreuses versions sur ma petite machine à écrire *Japy Reporter* avec des doubles sur papier carbone[7].

Je vais finir l'évocation de ces années par une anecdote. Pendant les événements de mai 68, des étudiants avaient envahi et saccagé le bureau de Lelong et jeté par la fenêtre une partie de ses archives. Décrivant l'événement, il disait avec une pointe de malice que, juste retour des choses, parmi les dossiers passés par la fenêtre, figurait un manuscrit de thèse dont l'auteur, politiquement proche des vandales, n'avait pas de double. À vrai dire, je n'ai jamais su si ce manuscrit était *vraiment* passé par la fenêtre, mais en tout cas le thésard l'a cru...

[4] Le premier mai 1968.
[5] Cartan considérait que, ma thèse étant pratiquement terminée, je n'avais plus rien à faire au C.N.R.S. ...
[6] On dirait aujourd'hui professeur de deuxième classe.
[7] La photocopie n'existait pas.

Colloques

Oberwolfach 1968[8]

H. Cartan et P. Lelong avaient des liens de longue date avec l'école pluricomplexe allemande, en particulier avec Heinrich Behnke et ses élèves H. Grauert, R. Remmert et K. Stein. Behnke avait apprécié très tôt les premiers travaux de Lelong et l'avait invité à Munich. Lelong aimait à raconter que lors de sa première visite, il avait été accueilli très très tôt le matin sur le quai de la gare de Munich par un assistant de Behnke, qui s'était présenté (à peu près) ainsi : « Je suis le dernier assistant de M. le Professeur Behnke et M. le Professeur Behnke m'a dit que j'étais tout juste bon à porter votre valise, alors je suis venu porter votre valise... ».

Ce colloque était le premier auquel je participais. Il m'a permis de rencontrer la plupart des membres de l'école allemande d'analyse complexe dans le cadre agréable d'Oberwolfach à la fin de l'été (je logeais dans le Lorenzenhof hélas disparu depuis).

Les dîners à Oberwolfach étaient à l'époque assez frugaux et Lelong, habitué des lieux, conduisait très discrètement tous les soirs, après le dîner, la délégation française à la Gasthaus en bas de l'Institut pour un complément. Un soir où ce n'était pas possible de s'absenter après le dîner, nous sommes descendus avant, toujours discrètement, et, ouvrant la porte du restaurant, nous avons été accueillis par un grand éclat de rire : K. Stein présidait une grande tablée de collègues allemands...

La conférence de Lelong à Oberwolfach reprenait pour l'essentiel sa conférence de la même année à son séminaire [4], avec quelques compléments en relation avec les espaces de Fréchet.

Paris

En 1972 (du 14 au 20 juin) P. Lelong a organisé à Paris un colloque international du C.N.R.S. : *Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes* [5]. Une très intéressante rencontre à large spectre.

Pour le repas du colloque, Lelong avait choisi la *Rôtisserie Périgourdine*, place Saint-Michel[9].

Lexington

En 1973, T.L. Hayden et T.J. Suffridge, sur la suggestion de P. Lelong et L. Nachbin, ont organisé un colloque *International Conference on Infinite Dimensional Holomorphy* à l'université de Lexington (Kentucky) [2]. J'y avais été invité, sans doute sur le conseil de Lelong, et avait pu m'y rendre grâce à un billet d'avion fourni par les affaires étrangères. C'était mon premier voyage aux U.S.A..

J'ai un bon souvenir de ce colloque, qui m'a permis, entre autres, de rencontrer Carlos Berenstein et Milos Dostal.

---

8 `http://oda.mfo.de/view/bsz325101159.html`

9 Ce choix était en désaccord total avec le jugement du guide Gault et Millau dont la première édition parut en 1972, mais Lelong avait raison...

La Garde Freinet

L'université de Provence a organisé un *Colloque d'Analyse Harmonique et Complexe* à la Garde Freinet, dans le Var, du 20 au 25 juin 1977[10]. Outre les participants habituels des colloques pluricomplexes, comme Lelong ou Kiselman, il y avait des spécialistes d'analyse harmonique, comme Kahane, ce qui permit d'intéressantes comparaisons des approches. C'est durant ce colloque qu'a germé l'idée, fortement appuyée par Lelong, de suggérer aux mathématiciens bordelais de créer un groupe pluricomplexe. Ceci s'est concrétisé peu de temps après avec le recrutement de Roger Gay[11] comme professeur à Bordeaux.

Wimereux

En 1981[12], G. Coeuré a organisé un colloque en l'honneur de P. Lelong *Les fonctions plurisousharmoniques en dimension finie ou infinie* dans la petite station balnéaire de Wimereux sur la côte d'opale.

Je me souviens que, durant ce colloque, je partageais une chambre avec Nessim Sibony dans un petit hôtel sorti tout droit d'un film de Marcel Carné...

Pointe à Pitre

En 1988 Alex Meril (un élève de Roger Gay, professeur à Bordeaux) a organisé à Pointe à Pitre (Guadeloupe) un colloque : *Analyse complexe multivariable : récents développements*[13] en l'honneur de Pierre Lelong.

C'est la dernière conférence pluricomplexe à laquelle j'ai participé et la dernière conférence où j'ai rencontré P. Lelong. J'avais abandonné l'analyse pluricomplexe (au sens strict...) depuis quelques années, mais j'avais tenu à participer à cette manifestation, pour P. Lelong bien sûr et aussi à cause de mes liens avec l'équipe pluricomplexe bordelaise.

Lelong avait beaucoup apprécié cette fort intéressante conférence, l'atmosphère très cordiale... et la cuisine locale. La seule ombre au tableau fut les très fortes pluies (inhabituelles pour la saison). Je me souviens, durant la demi-journée de visite de l'île, du retour au bus, après une montée à la soufrière sous une pluie glacée avec Christine Laurent-Thiébaut. Nous étions trempés et transis et Lelong, qui avait eu la sagesse de rester à l'abri, nous avait accueillis avec un sourire un peu malicieux...

La RCP 25 à Strasbourg

On peut lire sur le site web de l'IRMA de Strasbourg la description suivante de la RCP 25.

La Recherche Coopérative sur Programme RCP 25 a été créée en 1965 sur l'initiative de Jean Frenkel et Georges Reeb avec l'aide de Jean Leray et de Pierre Lelong, dans le but de rassembler mathématiciens et physiciens théoriciens.

Les responsables successifs ont été :

---

[10] Au VVF des Aludes.
[11] R. Gay est un élève de V. Avanissian, lui-même élève de P. Lelong.
[12] Du 12 au 15 mai.
[13] Du 28 mars au 3 avril

François Norguet (1965-1968), Raymond Gérard (1968-1978), Jean-Pierre Ramis (1978-1985), Daniel Bennequin (1985-1993), Marc Rosso (1993-2000), Vladimir Turaev (2000-2008), A. Papadopoulos (2008-).

Selon Raymond Gérard, l'idée de la RCP 25 était aussi due à F. Norguet, qui en a été le premier responsable et qui souhaitait faire participer A. Andreotti à cette structure.

Il y avait deux réunions par an, l'une à l'automne et l'autre au printemps (à une date compatible avec la saison des asperges...). Ces réunions rassemblaient des mathématiciens et des physiciens théoriciens (à l'échelle essentiellement européenne), chaque rencontre étant centrée autour de quelques thèmes variant à chaque fois. Le public était variable avec un « noyau dur » de fidèles dont faisait partie P. Lelong, avec J. Leray, B. Malgrange, H.J. Borchers, H. Epstein, V. Glaser, J. Lascoux, A. Martin, R. Stora, ... plus des strasbourgeois, comme par exemple G. Reeb ou J. Martinet.

Quand je suis arrivé à Strasbourg, le responsable de la RCP 25 était R. Gérard et le succès était très grand. Cette structure arrivait à un moment « de croisement » où le dialogue entre les deux communautés était possible et souhaité de part et d'autre (et il s'est révélé particulièrement fécond), elle était unique en son genre et comblait un manque institutionnel[14]. L'atmosphère particulièrement amicale et les conditions matérielles assurées par R. Gérard étaient aussi pour beaucoup dans le succés de la RCP 25. Le repas de la réunion était à chaque fois mémorable : les asperges au printemps à Hoerdt ou Lampertheim et un dîner alsacien traditionnel à l'automne[15].

Quand j'ai pris la succession de Gérard j'ai essayé de maintenir les traditions. De plus à chaque réunion ma femme et moi organisions des dîners à la maison[16]. Nous avons eu ainsi le plaisir de recevoir plusieurs fois P. Lelong.

Sur le plan scientifique, de nombreux participants appartenant aux deux communautés ont largement bénéficié de ces rencontres et des dialogues qu'elles permettaient. La longévité de la structure témoigne de son efficacité[17] : cette année a eu lieu, en juin, la 90$^{\text{e}}$ réunion. Plus personnellement, la responsabilité de la RCP 25, avec la nécessité de m'immerger dans des sujets que je connaissais mal, m'a beaucoup apporté. Outre la découverte décisive de la sommation de Borel que j'ai racontée ailleurs (cf. [1], page 9), il y a eu celles de la théorie quantique des champs et des théories de jauge.

Conclusion

Dans les années 80 Lelong et moi avions été nommés au Comité National du C.N.R.S. Il avait en général des positions fort raisonnables et consensuelles. Ceci étant, il avait des idées assez élitistes sur les mathématiciens. Il aimait à dire qu'il les classait en deux catégories A et B. Je ne sais pas qui il mettait en catégorie A (parmi les mathématiciens vivants il citait J. Leray), il se mettait lui-même en catégorie B. Il ne me semble pas qu'il existait des catégories C, D... et la catégorie B ne paraissait pas si nombreuse...

---

[14] Surtout en l'absence dommageable de structure universitaire en physique théorique en France.

[15] Par exemple au *Renard Prêchant* à la Krutenau, non loin de l'IRMA.

[16] Le pouvoir d'achat d'un jeune professeur d'université, très supérieur à celui d'aujourd'hui, permettait ces « fastes ».

[17] Les autres RCP ont je crois disparu.

Lelong a été conseiller technique pour l'éducation nationale et la recherche scientifique auprès du Général de Gaulle de 1959 à 1961, puis Président de la Commission de la recherche scientifique du IV-ème plan de 1962 à 1964. Il a écrit : *« Certains qualifient le premier septennat (*1958-1965*) d'âge d'or de la recherche en France »* [6], ce qu'il expliquait entre autres par un choix fondamental de de Gaulle : *« Politiques et scientifiques ont le sens des réalités, mais ce ne sont pas les mêmes. Il en résulte et ce sera là un principe que le général de Gaulle fera sien que l'activité de recherche ne peut être évaluée, quant à sa qualité propre, que par des hommes qui la pratiquent eux-mêmes ;... »* [6].

Je crains que nous n'ayons quitté l'âge d'or pour un long hiver. L'abandon de la saine doctrine de de Gaulle y est pour beaucoup. La vérité scientifique ne s'établit ni démocratiquement par le suffrage universel ni libéralement par le fonctionnement du marché. Malheureusement politiques, décideurs et membres influents des médias, qui aujourd'hui n'ont dans leur écrasante majorité plus aucune formation ni aucune culture scientifiques, pensent souvent le contraire. Il en est peu à peu résulté une culture de la méfiance à l'égard des scientifiques et la mise en place d'un véritable cancer administratif qui étouffe mortellement la recherche[18] (et c'est encore pire au niveau de l'Europe).

Références

[1] **P. Deligne, B. Malgrange, J.P. Ramis, 2007** Singularités irrégulières : Correspondance et documents, S.M.F., Documents mathématiques, 5.

[2] **T. L. Hayden, T. J. Suffridge, eds., 1973** Proceedings on Infinite Dimensional Holomorphy *Lecture Notes in Mathematics* 364, Springer-Verlag.

[3] **P. Lelong, 1957** Intégration sur un ensemble analytique complexe, *Bull. Soc. Math. France*, 85, 239–262.

[4] **P. Lelong, 1968** Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques, *Séminaire Pierre Lelong (Analyse), Année 1967-68*, Springer Lecture Notes in Mathematics, 71.

[5] **P. Lelong ed., 1972** Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, Colloque international du C.N.R.S. n. 208, *Agora Mathematica*, Gauthier-Villars, Paris.

[6] **P. Lelong, 1999** Le général de Gaulle et la recherche en France, Dossier « Le C.N.R.S. au temps de de Gaulle 1958–1969 » *La revue pour l'histoire du C.N.R.S.*, 1, http ://histoire-cnrs.revues.org/481.

[7] **P. Mazet, 1979** Ensembles analytiques complexes dans les espaces localement convexes, *Thèse, Université Paris VI.*

[8] **J.P. Ramis, 1966** Factorialité des anneaux de séries formelles et de séries convergentes sur les espaces vectoriels normés, *C. R. Acad. Sciences, Paris*, t. 262, Série A, 904–906.

[9] **J.P. Ramis, 1967** Les théorèmes de Weierstrass pour les anneaux de séries formelles et de séries convergentes sur un espace vectoriel normé *Séminaire Lelong, Analyse,* Vol. 7, 1966-1967, exp. numéro 2, Secrétariat mathématique, 1–16.

[10] **J.P. Ramis, 1967** *Séminaire Lelong, Analyse,* Vol. 7, 1966-1967, exp. numéro 3, Secrétariat mathématique, 1–14.

[11] **J.P. Ramis, 1968** *Séminaire Lelong, Analyse, 1967-1968, Lectures Notes in Mathematics* 71, Springer-Verlag, 140–164.

[18] Et plus particulièrement la recherche universitaire.

Pierre Lelong : une œuvre fondatrice en analyse complexe et en géométrie analytique

Jean-Pierre Demailly[1]

Ma première rencontre avec Pierre Lelong remonte à 1977, année où j'ai commencé à suivre son « Séminaire d'Analyse » parisien, coorganisé avec Henri Skoda à partir de 1976. C'est aussi en 1977 que j'ai bénéficié de quelques-uns de ses cours sur la théorie des fonctions plurisousharmoniques et des courants positifs, à la suite d'un premier enseignement de DEA sur l'analyse complexe donné l'année précédente par Henri Skoda. Ces premiers contacts ont, c'est le moins qu'on puisse dire, orienté durablement toute ma carrière ultérieure. En réalité, je n'ai presque jamais quitté ces théories fondamentales initiées par Pierre Lelong au cours des années 1940 et 1950 ([Lel42], [Lel57]) : elles s'appliquent merveilleusement à de vastes domaines des mathématiques comme la théorie des nombres ou la géométrie algébrique, et même si de nombreux spécialistes mondiaux les ont explorées intensivement depuis des décennies, la plupart des experts s'accordent à dire qu'il reste encore beaucoup à faire !

Quelques années plus tard, lorsque j'ai passé ma thèse d'État en 1982, j'ai eu le privilège d'être invité au domicile privé de Pierre Lelong, et c'est là sans doute que j'ai fait plus ample connaissance avec un autre aspect important de sa carrière : la mise en place de la réforme de l'enseignement supérieur et de la recherche, en tant que conseiller scientifique auprès du Général de Gaulle (1959–1961). J'ai été très impressionné par la culture politique de Pierre Lelong – tout autant que par le nombre inhabituel d'ouvrages de sciences politiques qui figuraient dans sa bibliothèque personnelle. À l'heure où l'université connaît une période très difficile dans notre pays, je ne peux m'empêcher de penser que la France a eu beaucoup de chance au début des années 1960, dans une période certes économiquement bien plus favorable, de bénéficier des conseils éclairés de personnalités scientifiques aussi éminentes que Pierre Lelong. La France a connu alors une phase de développement scientifique et technologique prolongée, en même temps qu'une forte progression de ses universités ; on aimerait que les gouvernements européens d'aujourd'hui aient la volonté et la sagesse de redonner à la science le rôle primordial qui est de guider la société – et de s'appuyer en conséquence sur l'expertise de la communauté scientifique plutôt que sur une technocratie souvent repliée sur elle-même et chaque année plus envahissante !

Même s'il ne s'agit peut-être pas de la partie la plus centrale de son œuvre mathématique, je voudrais ici évoquer un article de Pierre Lelong qui me semble avoir eu beaucoup de retombées. Il s'agit d'un texte intitulé *Éléments extrémaux sur le cône des courants positifs fermés*, paru dans le Séminaire d'Analyse 1971/1972 [Lel71]. En voici le premier résultat principal.

Théorème 1. *Soit M un ensemble analytique de codimension complexe p, irréductible, sur une variété analytique connexe X, dénombrable à l'infini. Alors le*

[1] Université de Grenoble I, Institut Fourier et Académie des Sciences.

courant d'intégration $[M]$ *est extrémal dans le cône des courants positifs fermés de bidegré* (p, p) *sur* X.

À la suite de cet énoncé, Pierre Lelong observait que la plupart des autres exemples classiques connus de courants n'étaient pas extrémaux, notamment ceux issus des fonctions convexes ou des fonctions jauge lisses, et il concluait : « *Il est probable que le Théorème* 1 *ne donne pas tous les éléments extrémaux dans le cône des courants positifs fermés ; c'est là une question importante de géométrie complexe encore ouverte* ». Je me rappelle encore un échange intervenu à Jussieu où Pierre Lelong a évoqué oralement cette question. Stimulé par ces observations et par une conversation ultérieure avec Jean-Louis Verdier, je devais me rendre compte au début des années 1980 qu'un énoncé aussi restrictif sur les éléments extrémaux aurait entraîné une formulation « trop forte » de la conjecture de Hodge, via le théorème de représentation de Choquet ; il en résulte qu'il devait exister des éléments extrémaux autres que les courants d'intégration sur les ensembles analytiques irréductibles, et j'ai trouvé peu après un exemple explicite de tel courant de bidegré $(1, 1)$ dans le plan projectif complexe [De82]. D'autres contre-exemples apparurent ensuite dans la théorie des systèmes dynamiques holomorphes de plusieurs variables : beaucoup de courants positifs invariants produits par voie dynamique sont des courants extrémaux, et leur support est en général seulement un ensemble fractal ; c'est le cas par exemple pour le courant $\lim_{k\to+\infty} d^{-k}\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|P^k(z)|$, où P^k est l'itéré k-ième d'un endomorphisme polynomial P de degré $d > 1$ de l'espace projectif, le support d'un tel courant étant un ensemble de type Julia [Sib99]. La dynamique des endomorphismes « hyperboliques » de certaines surfaces algébriques, surfaces K3 en particulier, donne également lieu à de tels courants invariants [Ca03].

Un autre énoncé fondamental de l'article précité [Lel71] est le suivant.

Théorème 2. *Si* G *est un domaine pseudoconvexe de* $\mathbb{C}^n$*, le cône positif engendré sur les rationnels par les fonctions de la forme* $\log|f|$*, où* f *est holomorphe dans* G*, est dense dans le cône des fonctions plurisousharmoniques sur* G.

Corollaire. *Si de plus* $H^2(G, \mathbb{R}) = 0$*, le cône positif engendré sur les rationnels par les courants d'intégration* $[D]$ *sur les diviseurs irréductibles dans* G *est dense dans le cône des courants positifs fermés de type* $(1, 1)$ *sur* G.

La preuve initiale de Lelong repose sur l'usage de la théorie des fonctions holomorphes sur un ouvert de Hartogs de la forme $|w| < e^{-\varphi(z)}$. Si φ est plurisousharmonique et si z décrit un domaine pseudoconvexe, on sait que l'ouvert de Hartogs est également pseudoconvexe ; par conséquent, il existe une fonction holomorphe $F(z, w)$ dont cet ouvert est le domaine d'existence. L'approximation de la fonction φ par des logarithmes de fonctions holomorphes $f_j(z)$ s'obtient alors en appliquant la formule de Hadamard pour calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(z)w^k$ de $F(z, w)$. Le corollaire s'obtient quant à lui au moyen de l'équation fondamentale dite de « Lelong-Poincaré », qui stipule que pour toute fonction holomorphe F le courant $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|F|$ s'identifie au courant d'intégration $[Z_F]$ sur le diviseur des zéros de F.

Ces énoncés d'approximation des courants sont aujourd'hui au cœur de la géométrie analytique. En remplaçant le théorème d'existence d'une fonction définissante et la formule de Hadamard par des résultats plus puissants, à savoir le théorème de prolongement L^2 de Ohsawa-Takegoshi ([0T87]), on obtient des énoncés plus précis dans lesquels les multiplicités des diviseurs mis en jeu convergent uniformément vers les « nombres de Lelong » du courant à approcher. On dispose ainsi d'un outil très puissant qui permet de démontrer par voie analytique de nombreux résultats géométriques – par exemple, le théorème de Siu sur l'analyticité des ensembles de niveau associés aux nombres de Lelong des courants positifs fermés [Siu74]. Dans le domaine de la géométrie algébrique, une autre conséquence de ce type de techniques est l'invariance des plurigenres des variétés projectives lisses par déformation arbitraire ([Siu00], [Pa07]) ; ce dernier énoncé, s'appuie sur le théorème d'Ohsawa-Takegoshi et sur un raisonnement de compacité pour les courants positifs de type $(1, 1)$; à ce jour, il ne possède d'ailleurs pas de démonstration algébrique, bien que l'énoncé ne mette en jeu que des objets algébriques ! Enfin, parmi les applications à la théorie des nombres, on peut citer par exemple le théorème de Bombieri sur les valeurs algébriques de fonctions méromorphes de plusieurs variables satisfaisant à des équations différentielles algébriques [Bo70], [Sk76], [Lel79]. La preuve, là encore, exploite la compacité des courants de type $(1, 1)$ dans des classes de courants d'ordre fini, en conjonction avec les estimations L^2 de Hörmander pour l'opérateur $\overline{\partial}$.

En introduisant les « objets souples » [2] que sont les fonctions plurisousharmoniques et les courants positifs, Pierre Lelong a permis l'émergence de techniques fécondes qui ont abouti à des formulations effectives fortes de nombreux énoncés de géométrie analytique, algébrique ou arithmétique, là où n'existaient souvent que des énoncés qualitatifs. Pierre Lelong était parfaitement conscient de cette dimension quasi-philosophique de son œuvre, et il a posé lui-même les jalons les plus fondamentaux de ses profondes implications.

Références

[Bo70] Bombieri, *E. Algebraic values of meromorphic maps*, Invent. Math. **10** (1970) 267–287 ; Addendum, Invent. Math. **11** (1970) 163–166.

[Ca03] Cantat, S. *Dynamique des automorphismes des surfaces* K3, Acta Math. **187** (2001) 1–57.

[De82] Demailly, J.-P. *Courants positifs extrêmaux et conjecture de Hodge*, Invent. Math. **69** (1982) 347–374.

[Lel42] Lelong, P., *Définition des fonctions plurisousharmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris **215** (1942) p. 398 et p. 454.

[Lel57] Lelong, P., *Intégration sur un ensemble analytique complexe*, Bull. Soc. Math. France **85** (1957) 239–262.

[Lel68] Lelong, P., *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*, Dunod, Paris, Gordon & Breach, New York (1968).

[Lel71] Lelong, P., *Éléments extrémaux sur le cône des courants positifs fermés*, Springer Lecture Notes in Math. **332** (1973) 112–130.

[2] Cette terminologie est celle-là même employée par Pierre Lelong dans sa notice de travaux à l'Académie des Sciences [Lel73].

[Lel73] Lelong, P., *Notice sur les titres et travaux scientifiques*, site de l'Académie des Sciences, `http://www.academie-sciences.fr/academie/membre/Lelong_notice_1973.pdf`.

[Lel79] Lelong, P., *Sur les cycles holomorphes à coefficients positifs dans $\mathbb{C}^n$ et un complément au théorème de E. Bombieri*, C. R. Math. Acad. Sc. Canada, vol. 1, nº 4 (1979) 211–213.

[OT87] Ohsawa, T., Takegoshi, K., *On the extension of L^2 holomorphic functions*, Math. Zeitschrift **195** (1987) 197–204.

[Pa07] Păun, M., *Siu's invariance of plurigenera : a one-tower proof*, J. Differential Geom. **76** (2007) 485–493.

[Sib99] Sibony, N., *Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k$*, Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997), ix–x, xi–xii, 97–185, Panor. Synthèses **8**, Soc. Math. France, Paris (1999).

[Siu74] Siu, Y.T., *Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents*, Invent. Math. **27** (1974) 53–156.

[Siu00] Siu, Y.T., *Extension of twisted pluricanonical sections with plurisubharmonic weight and invariance of semipositively twisted plurigenera for manifolds not necessarily of general type*, Complex Geometry (Göttingen, 2000), Springer, Berlin (2002) 223–277.

[Sko76] Skoda, H., *Estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$ et applications arithmétiques*, Séminaire P. Lelong (Analyse), année 1975/76, Lecture Notes in Math. nº **538**, Springer-Verlag, Berlin (1977) 314–323.

Short Tribute to Professor Pierre Lelong

Seán Dineen

I first met Pierre Lelong during a conference on Several Complex Variables at the University of Maryland in the summer of 1970. The Vietnam war was in progress, there was turmoil within the Universities, unusual alliances and searching passionate philosophical and political debates between professors, among students, and in groups containing students and professors were taking place, the Gestetner was the standard copying machine, Xerox was a company and not a verb, the monthly appearance of the Mathematical Reviews were eagerly anticipated and communication took place at seminars, conferences and in longhand. I was a freshly minted Ph.D. and Pierre was, although I didn't know it at the time, close to sixty and a very important mathematician. I introduced myself, having been instructed to do so by my thesis advisor Leopoldo Nachbin, and although his English and my French were both, shall we say, laboured, he was friendly and talkative and we managed to communicate and keep communicating, without misunderstanding as far as I am aware, for over thirty years at conferences, meetings and private visits in the US, Brazil, Paris and Dublin. He visited Ireland as a tourist twice and enjoyed the music (it's different he said), the weather (it's also different), the driving (it's very different), the food (it's unusual) and the English (it's just like your's he said).

My memories may now be rose tinted but looking back I remember it as a time of great courtesy, tolerance and excitement where all were listened to, no matter what their views. The senior established mathematicians of that era will long be remembered for their mathematical creativity but it should not be forgotten that they were also unbelievably kind and encouraging to younger mathematicians. They invited them to their seminars, they set up contacts between their students, they showed them how to organise and today mathematics, even though still numerically small as a discipline, retains its strong social tradition.

Pierre Lelong and Séminaire Pierre Lelong, afterwards Séminaire Pierre Lelong-Henri Skoda, played, during the nineteen seventies, a crucial role for all who were interested in infinite dimensional complex analysis. It was there we met a generation of mathematicians who were beginning to work in this relatively new area : the students of Lelong, Hervé, and Cartan ; people like G. Coeuré, J.-F. Colombeau, Ph. Noverraz, A. Hirschowitz, J.-P Ramis, C. Houzel, P. Raboin, P. Mazet, J.-P. Vigué, and M. Schottenloher. At times we were almost overwhelmed by the calibre of the audience. Pierre had an opinion on everything but he was non-judgmental and he had great empathy and included everyone. He believed that later generations would be the real judge of current mathematics. Once when I mentioned his own interest in infinite dimensions he said :

'Back in the thirties someone complained about me saying why did I need two complex variables, why couldn't I have done with one complex variable like everyone else. It will always be that way. Listen to others but believe in yourself.'

In English we say that certain people are *larger than life* and it is a phrase that I would apply to Pierre. He had a great sense of humour. When I asked him why French mathematicians lived so long he said :

'In the hope of getting into the Academy, that's why we have to have an Academy.'

When I asked him about a conference in Luxembourg on the History of Mathematics that he attended he replied :

'It was strange, eerie really, it was history but they often mentioned people I knew and someone even mentioned me. Am I that old ?'

He was not above making fun of himself.

'People sometimes say that I sleep during my seminar. Sometimes they're right.'

I am sure that this volume will have many articles devoted to Pierre's classical research in several variables so I will confine myself to a brief mention of his contributions and influence as they relate to my own interest : infinite dimensional theory. His finite dimensional research on plurisubharmonic functions and pseudo-convex domains were initially extended to infinite dimensions by his own students and students of Michel Hervé but afterwards he himself contributed Banach-Steinhaus type theorems, results on functions of exponential growth, and theorems relating to the construction of Green functions over infinite dimensional spaces, etc.

Pierre always had an interest in *small sets* ; sets of first category, analytic sets, polar sets, negligible sets, sets of measure zero, and compact sets in infinite dimensional spaces. Motivated by discussions with Pierre, Philippe Noverraz and myself clarified the relationship between polar subsets and translation invariant Gaussian null sets in Fréchet spaces (infinite dimensional topological vector spaces do not support translation invariant Borel measures). In 1980 he published *A class of Fréchet complex spaces in which the bounded sets are* $\mathbf{C}$ *polar* and this motivated Reinhold Meise (Düsseldorf), Deitmar Vogt (Wuppertal) and myself to linearly classify the nuclear Fréchet and *DFN* spaces in which all compact sets are polar.

Pierre had fantastic energy, physical and mental. The last time I saw him was at a conference commemorating the retirement of Gerard Coeuré in Lille. Pierre was close to ninety years of age. Yet he breezed in, marched down to the podium and, without notes or a microphone, gave a passionate and articulate thirty minute oration that was clearly heard by the audience of at least two hundred.

His mental strength allowed him to delve into new research areas during his seventies and eighties and in this he is a role model for all senior mathematicians, and indeed for all senior citizens.

Hommage à Pierre Lelong

Pierre Dolbeault

J'ai rencontré Pierre Lelong, pour la première fois, probablement au printemps 1946, à la garden-party de l'ÉNS. Bien qu'il ait déjà obtenu des résultats importants sur les fonctions entières et les fonctions plurisousharmoniques et acquis une expérience de l'enseignement universitaire, il se comportait cordialement, comme un ancien, mais pas comme un maître. Cette même année, il devint professeur titulaire à l'université de Lille. Il a commencé un séminaire d'Analyse à Paris, avec G. Choquet vers cette époque. J'ai suivi le séminaire en 1950-51 et, à la séance de rentrée de 1951, j'ai proposé un titre d'exposé sur un résultat publié en juin. J'ai fait une dizaine d'exposés dans l'un ou l'autre de ces séminaires, ou bien sur commande ou bien pour des résultats personnels jusqu'en 1972.

À cette époque (1950-51), P. Lelong avait des responsabilités à la SMF et il y organisait aussi des conférences. Je me souviens, en particulier, d'un exposé de Lars Hörmander portant sur la division d'une distribution par un polynôme.

Parmi les résultats les plus marquants de Pierre Lelong, je pense d'abord à son théorème d'intégration sur un ensemble analytique puis à la notion qui lui est étroitement associée, de courant positif [Le1 57], [Le2 57].

Il convient avant tout, me semble-t-il, de replacer ici ces travaux de P. Lelong dans la mouvance des préoccupations communes à plusieurs mathématiciens des années 50.

Les points réguliers d'un ensemble analytique complexe, i.e. ceux au voisinage desquels l'ensemble analytique est une variété, constituent une partie dense. Les points singuliers, i.e. non réguliers, forment un sous-ensemble analytique de dimension inférieure.

Un ensemble analytique (réel ou complexe) est triangulable : on a cherché à démontrer cette propriété dans les années 30, mais elle n'a été établie complètement qu'en 1962, par Łojasiewicz. Par ailleurs, une étude fine de la géométrie des ensembles analytiques a été faite parallèlement par H. Whitney en 1965, à l'aide d'une stratification très élaborée.

Le problème de l'intégration sur un ensemble analytique complexe W paraissait plus abordable car il ne faisait intervenir que la théorie de la mesure et n'exigeait donc pas *a priori* un étude complète ou trop poussée des points singuliers ; il a été résolu effectivement par P. Lelong en 1957 en montrant qu'au voisinage des points singuliers, l'aire de la partie régulière *Reg* W de W est localement finie. La démonstration est maintenant très courte, compte tenu de l'inégalité de Wirtinger (1936) (qui fournit, en particulier, une propriété locale de minimalité de l'aire d'une variété analytique complexe). Alors, W définit un courant d'intégration $[W] = \int_{Reg^{\cdot}\ W}$. Le courant $[W]$ est d-fermé ; P. Lelong le démontrait directement mais maintenant cela résulte aussi facilement de la théorie géométrique de la mesure, développée ultérieurement par Federer et Fleming (voir [F 69]) en utilisant les propriétés des courants plats et, particulièrement des courants rectifiables. En outre la démonstration de P. Lelong a introduit de manière naturelle la notion très importante de courant positif.

P. Lelong m'avait donné les épreuves de son article ; j'ai passé l'été 57 à le comprendre et à le comparer aux courants résidus qui ne sont, en général, ni positifs, ni même d'ordre 0 (i.e. courants à coefficients mesures). Cela a été l'origine d'une discussion sans fin sur les intérêts respectifs de ces deux types de courants, mais qui n'a pas empêché P. Lelong d'accepter de nombreux exposés sur les résidus.

Rappelons d'abord quelques définitions sur les courants positifs.

Dans $\mathbb{C}^n$ $(z_1, \ldots, z_n)$ ou dans un voisinage de coordonnées d'une variété analytique complexe, on considère les formes différentielles

$$\pi_J = \frac{i}{2} dz_{j_1} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge . \wedge \frac{i}{2} dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{j_p}, \text{pour } J = (j_1, \ldots, j_p) \subset (1, \ldots, n), j_1 < \ldots < j_p.$$

Une (p,p)-forme différentielle α est dite *fortement positive* si, localement,

$$\alpha = \sum \lambda_J \pi_J, \text{où } \lambda_J \geqslant 0$$

Ces formes constituent un cône $S^{p,p}$ dans l'espace des formes de type (p,p).

Un courant T est dit *faiblement positif* ou simplement *positif* si, pour toute forme test φ fortement positive, $T(\varphi) \geqslant 0$.

Exemples.

(1) φ est une fonction plurisousharmonique équivaut à : le courant $T = id'd"\varphi$ est positif.

(2) Pour un ensemble analytique complexe de dimension p, le courant $[W]$ est positif.

(3) De même, pour une p-chaîne holomorphe, (i.e. un courant $T = \sum n_j[W_j]$, où W_j est un ensemble analytique complexe, irréductible, de dimension complexe p, $n_j \in \mathbb{Z}$, la somme étant localement finie), la positivité de T est vérifiée si les n_j sont $\geqslant 0$.

Les succès de la théorie des courants positifs fermés ont déjà été longuement commentés ailleurs. Je voudrais souligner ici un aspect, peut-être moins connu de l'œuvre de P. Lelong, l'importance de son théorème d'intégration pour le développement de théories voisines apparentées en particulier pour les théorèmes de structure des ensembles analytiques et des chaînes holomorphes.
Le théorème d'intégration sur un ensemble analytique complexe W de dimension p de P. Lelong montre que le courant d'intégration $[W]$ sur W est un courant localement rectifiable (i.e. un courant d'ordre nul, limite pour la masse de chaînes de classe C^1), d-fermé, de bidimension (p,p) et positif. Plus généralement, il en est de même d'une p-chaîne holomorphe $T = \sum n_j[W_j]$, $n_j \in \mathbb{Z}$, (positivité mise à part).

On désigne par $\mathcal{R}^{loc}_{(p,p)}(\Omega)$ l'espace des courants localement rectifiables de Ω, de bidimension (p, p). La réciproque du théorème de P. Lelong a été établie, en 1971 par J. King [K 71] : soit $T \in \mathcal{R}^{loc}_{(p,p)}(\Omega)$ un courant positif, avec $dT = 0$, alors T est une p-chaîne holomorphe positive. Plus généralement, R. Harvey et B. Shiffman [HS 74] ont établi : soit $T \in \mathcal{R}^{loc}_{(p,p)}(\Omega)$, avec $dT = 0$, tel que $\mathcal{H}^{2p+1}(spt\ T) = 0$, (où $\mathcal{H}^{2p+1}$ est la mesure de Haussdorff $(2p+1)$-dimensionnelle), alors T est une p-chaîne holomorphe. B. Shiffman [S 86] a pu supprimer la condition sur la mesure du support dans le cas d'une hypersurface, ce qui ramène la condition à $\mathcal{H}^{2p+3}(spt\ T) = 0$. H. Alexander a éliminé la condition sur la mesure du support, obtenant ainsi le résultat définitif :

Théorème. *Soit* $T \in \mathcal{R}^{loc}_{(p,p)}(\Omega)$*, avec* $dT = 0$*, alors* T *est une* p*-chaîne holomorphe.*

Les démonstrations de Harvey et Shiffman consistent à se ramener, par projection, au cas d'une hypersurface, puis à construire la chaîne holomorphe à l'aide d'une fonction méromorphe multiforme.

La démonstration d'Alexander porte d'abord sur le cas $p = 1$, ce qui permet de traiter *spt T* à l'aide des techniques des algèbres uniformes ([Bi 64], [Wr 76]), d'utiliser, pour $p = 1$, le théorème de structure de Federer [F 69] pour les courants entiers de dimension réelle 1, puis d'achever la démonstration par récurrence sur p, en utilisant le tranchage des courants rectifiables.

Une autre suite au théorème de Lelong a été la démonstration d'un résultat semblable pour les ensembles semi-analytiques par Miguel Herrera [H 65].

Mais P. Lelong, en plus de ses activités mathématiques, aimait tout particulièrement la « Chose Publique » et, en conséquence, assumer des responsabilités collectives.

Je citerai en premier la création de la Commission des thèses. Dans les années 50, quand une thèse d'état était déposée, l'annonce en était affichée pendant deux mois, avec la possibilité d'en consulter le texte intégral et de le critiquer éventuellement ; une thèse de troisième cycle était soutenue dès que le jury le décidait. À la suite d'une difficulté qu'il avait constatée dans une thèse non encore soutenue, Pierre Lelong a proposé la création d'une commission chargée d'examiner les textes présentés en vue du doctorat d'État avant d'autoriser la soutenance. Cette mesure est entrée en vigueur dans les universités françaises, à partir des années 80 sous la forme de *commission de formation doctorale*, en charge des thèses et des habilitations à diriger des recherches.

Puis j'évoquerai le laboratoire d'Analyse Complexe et Géométrie. P. Lelong a fait des cours d'été au CIME, à Varenna en 1963 et au Séminaire de l'université de Montréal en 1967, sur les courants positifs et ce qu'il fallait savoir sur les fonctions plurisousharmoniques, ce qui a donné lieu à plusieurs traités. Peu après, il a parlé plusieurs fois à l'université de Poitiers de ces sujets et des densités, préliminaires aux « nombres de Lelong ». Il avait, à titre personnel une secrétaire du CNRS qui préparait des textes mathématiques, en particulier, pour la publication du séminaire d'Analyse. Depuis longtemps, il souhaitait obtenir du CNRS un laboratoire associant des équipes de province. Au début des années 70, cela sembla possible, un laboratoire de Paris 7 associé au CNRS ayant été créé en 1973. Pierre Lelong, Paul Malliavin et moi avons proposé la création d'un laboratoire d'Analyse Complexe et

Géométrie pour l'Analyse en dimension infinie qui occupait beaucoup Lelong et ses élèves, la Géométrie Riemannienne qui intéressait Paul Malliavin et la Géométrie Analytique réelle ou complexe, sujets de mon groupe de recherche. Le laboratoire a été créé le 01.01.1974 ; j'en fus directeur jusqu'en 1982, avant M. Hervé, puis C. Peskine qui fédéra les formations de recherche mathématique de Paris 6 et Paris 7 associées au CNRS en ce qui devint l'Institut de Mathématiques de Jussieu actuel.

Je terminerai par le rappel de souvenirs qu'il racontait volontiers : vers la fin des années 30 probablement, il disait avoir été très malade avec processus vital engagé et avoir voulu fréquenter l'Institut des Sciences Politiques de Paris.

Bien des années après, il fut Conseiller technique (Recherche scientifique, Éducation nationale et Santé publique) au Secrétariat général de la Présidence de la République (08.01.59-08.01.61). Il avait été introduit par son camarade de l'École Normale Supérieure, Georges Pompidou. Il a alors présenté un projet de conventionnement de l'enseignement libre qui fut adopté par le général de Gaulle et qui est encore appliqué.

Il présida plusieurs Commissions nationales importantes dont la Commission de la recherche scientifique du IV^{e} Plan (1962-1963-04.04.1964) et le Comité Mathématique pour la préparation du V^{e} Plan, 1964-1966.

Dans ces fonctions, il a participé à la création de grands organismes comme l'IRIA de la plus haute importance encore aujourd'hui pour les Mathématiques Appliquées et l'Informatique.

Avec Pierre Lelong disparaît à la fois un grand mathématicien et un universitaire profondément attaché au service de l'État.

Références

[Al 97] H. Alexander, Holomorphic chains and the support hypothesis conjecture, J. of the Am. Math. Soc., **10** (1997), 123-138.

[Bi 64] E. Bishop, Conditions for the analyticity of certain sets, Mich. Math. J. **11** (1964), 289-304.

[F 69] F. Federer, Geometric measure theory, Grundlehren der Math. Wiss., **285**, Sringer Verlag,

[K 71] J. King, The currents defined by analytic varieties, Acta Math. **127** (1971), 185-220.

[HS 74] R. Harvey and B. Shiffman, A characterization of holomorphic chains, Ann. of Math. **99** (1974), 553-587.

[H 65] M. Herrera, Intégration sur un ensemble semi-analytique. (French) C. R. Acad. Sci. Paris 260 1965 763-765. (Reviewer : L. Bungart), 32.25 (32.50)

[L 57] P. Lelong, Integration of a differential form on an analytic complex subvariety, Proc. Nat. Ac. of Sciences **43**,(Fev. 1957) 246-248.

[Le 57] P. Lelong, Intégration sur un ensemble analytique complexe, Bull. S.M.F., **85**, (1957), 239-262.

[S 86] B. Shiffman, Complete characterization of holomorphic chains of codimension one, Math. Ann. **274** (1986), 233-256.

[Wr 76]) J. Wermer, Banach Algebras and several complex variables, 2nd ed., Springer Verlag, New York ; 1976.

Pierre Lelong : souvenirs

Philippe Noverraz

Dans ce qui suit j'évoquerai quelques souvenirs et quelques aspects peu connus des activités de Pierre Lelong avec qui mon premier contact personnel remonte à 1961 lorsque, à l'issue de l'oral de son cours de Diplôme, il me proposa de préparer une thèse sous sa direction.

Quand il avait défini et étudié les fonctions plurisousharmoniques, Pierre Lelong avait constaté que lorsque l'on passait de une à plusieurs variables complexes la situation changeait énormément et de nouvelles propriétés apparaissaient. Aussi était-il intéressé de savoir ce qui pouvait se passer lorsque l'on définissait les fonctions plurisousharmoniques sur un espace vectoriel de dimension infinie. En particulier il souhaitait d'une part connaître les propriétés nouvelles qui apparaissaient et d'autre part savoir s'il était possible de développer de nouveaux outils permettant, en particulier, de retrouver les résultats classiques en dimension finie. Il me conseilla donc de préciser les propriétés qui pouvaient être généralisées et de déterminer les espaces dans lesquels une généralisation était – ou non – possible.

Pendant plusieurs années, c'est-à-dire jusqu'à mon départ pour Nancy en 1968, j'ai eu l'occasion d'avoir avec lui de nombreux entretiens et j'ai encore en mémoire certains de ses avis et/ou conseils. L'un de ces conseils m'avait alors frappé : il me disait qu'il fallait aussi avoir des activités dans des domaines éloignés des mathématiques afin de pouvoir se « reposer » d'un travail mathématique par un travail dans un autre domaine.

J'ai découvert qu'il appliquait à lui-même ce principe : à son activité d'universitaire et de mathématicien, il ajoutait une activité de gestion et d'organisation en participant à la restructuration et au développement de la recherche voulue par le Général de Gaulle. En effet, après avoir été Conseiller technique auprès de la Présidence, il présidait le Conseil Consultatif de la recherche scientifique et technique et participait à l'élaboration du plan. Dans ces diverses activités ses avis furent écoutés et ses recommandations en général suivies d'effet. Ce fut le cas, par exemple, de son action en faveur de l'informatique afin que celle-ci prenne son autonomie par rapport aux mathématiques et se constitue en une discipline nouvelle. Il prôna la création de l'IRIA, organisme qui serait indépendant du CNRS et qui deviendra plus tard l'INRIA.

Après une école d'été en Californie en juillet 66 je le suivis au Mexique où il fit une série de conférences sur la planification de la recherche. C'est un domaine dans lequel il était très à l'aise et l'intérêt qu'il portait à ce domaine était évident.

Comme directeur de thèse il avait une attitude bienveillante ; peu directif, il attendait de ses élèves qu'ils fassent preuve d'initiative et, lorsqu'on le sollicitait, il donnait des avis ou des conseils judicieux. Le seul problème est qu'un certain délai était inévitable pour obtenir un rendez-vous car il était très occupé ; aussi il a pu m'arriver que, lorsque je le rencontrais, la question qui avait motivé le rendez-vous était alors résolue ou dépassée.

Après 1968, nous avons gardé un contact étroit même si, pris par mes charges administratives, les occasions de rencontres étaient plus rares, mais les colloques étaient des occasions de rencontres.

Peu après son élection à l'Académie des Sciences en 1980 il vint à Nancy pour participer à un colloque. À un journaliste qui l'interrogeait il déclara : « Quand un mathématicien disparaît, on ne pense plus exactement de la même façon ».

Cette déclaration reflète mon état d'esprit lorsque je pense à lui depuis sa récente disparition.

P. Lelong et H. Cartan
Wimereux 1981, colloque en l'honneur de P. Lelong

Pierre Lelong : un mathématicien et un homme au service de l'État

Henri Skoda

J'ai rencontré pour la première fois Pierre Lelong peu avant les événements de mai 1968 au séminaire qu'il organisait déjà à l'Institut Henri Poincaré avec Francois Norguet. Alors étudiant en 3e cycle, j'y venais sur le conseil de mon directeur de thèse, André Martineau, y voir « l'état de l'art » dans le domaine des fonctions holomorphes de plusieurs variables. À l'époque, les ordinateurs individuels et internet n'existaient pas. Les textes étaient tapés sur des machines à écrire avec un double au papier carbone. Le téléphone et la télévision étaient encore un luxe. Le rôle des séminaires pour la communication entre mathématiciens et la diffusion des résultats était donc infiniment plus important qu'il ne l'est à l'heure actuelle. Leur nombre était réduit et l'audience du Séminaire de P. Lelong et F. Norguet était impressionnante pour le tout jeune chercheur que j'étais, à la fois par la qualité et le nombre de ses participants. Henri Cartan, par exemple, y venait régulièrement. Dès octobre 1968, j'abordais pour mon travail de thèse l'étude des travaux de Pierre Lelong tout particulièrement ceux sur les zéros des fonctions entières dans $\mathbb{C}^n$. J'y découvris, d'une part, l'étude détaillée des propriétés de la famille des fonctions plurisousharmoniques ([Le 45]) (i.e. fonctions s.c.s. dont la restriction à chaque droite complexe est sousharmonique) qui englobait à la fois les fonctions convexes et les fonctions $\log|f|$ où f est une fonction holomorphe et, d'autre part, la notion de courant positif fermé ([Le 69]) (i.e toutes les mesures associées naturellement à ce courant par la structure complexe sont positives). Dès 1953, P. Lelong ([Le 57]) avait démontré qu'on pouvait intégrer une forme différentielle sur un ensemble analytique complexe comme sur une variété. Le courant d'intégration sur un ensemble analytique devenait ainsi l'exemple fondamental de courant positif fermé et justifiait l'intérêt de ce nouveau concept. Comme pour les distributions de L. Schwartz et les courants de G. de Rahm, la régularisation par convolution de ces courants positifs fermés fournissait alors des formes différentielles que l'on pouvait traiter par l'outil souple et puissant du calcul différentiel extérieur. Pour tout courant positif fermé, P. Lelong définissait la densité du courant en un point qui coïncidait avec la notion usuelle de multiplicité dans le cas d'un courant d'intégration sur un ensemble analytique. Cela permettait de traiter les ensembles analytiques de la géométrie complexe par des méthodes d'analyse totalement complémentaires des méthodes algébriques de la théorie des faisceaux et de l'algèbre locale et particulièrement bien adaptées à l'étude des propriétés métriques et quantitatives des ensembles analytiques. La plus grande partie de mes travaux de recherche est directement liée aux concepts introduits par P. Lelong. J'ai déjà longuement expliqué, dans le texte de la conférence inaugurale du Colloque Européen en l'honneur de Pierre Lelong de septembre 1997 [Sk 00], l'impact considérable de ces concepts sur les développements de l'Analyse Complexe à plusieurs variables et sur la Géométrie Algébrique sur le corps des complexes de 1940 à 1997. Je voudrais insister ici sur certains points. Les concepts de fonction plurisousharmonique et de courant positif fermé de P. Lelong ne pouvaient être pleinement efficaces que si l'on disposait de moyens performants permettant d'approcher une fonction plurisousharmonique par des fonctions holomorphes et, de même, un courant positif fermé par des ensembles analytiques. Les estimations L^2 de Lars Hörmander pour l'opérateur $\bar{\partial}$ en 1965 ([Hör 65], [Hör 66]), reposant elles-mêmes sur la notion de fonction plurisousharmonique, fournirent ce moyen en prouvant qu'on pouvait approcher de manière très précise une fonction plurisousharmonique donnée φ sur un domaine pseudoconvexe Ω par des fonctions holomorphes F telles que $\int_\Omega |F|^2 e^{-\varphi}(1+|z|^2)^{-(n+1)}d\lambda < +\infty$ et traiter la plupart des problèmes de l'Analyse Complexe à plusieurs variables par ces estimations L^2. Leur efficacité fut décuplée par une remarque fondamentale d'Enrico Bombieri ([Bom 70]) : la fonction φ était autorisée à ne plus être nécessairement de classe C^2 mais à prendre la valeur $-\infty$ et à avoir des singularités arbitraires. De ce fait, la fonction F s'annulait automatiquement en tous les points où la fonction φ était suffisamment singulière. À la fonction φ, on pouvait donc associer l'ensemble analytique défini comme l'ensemble des zéros communs aux différentes fonctions F vérifiant l'estimation L^2 de Hörmander et cet ensemble analytique était, en un certain sens, une bonne approximation du courant $\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\varphi$. On disposait désormais d'une machine extrêmement efficace : à un courant positif fermé, on pouvait associer, à l'aide d'un noyau intégral convenable, une fonction plurisousharmonique, puis un ensemble analytique. Simultanément E. Bombiéri ([Bom 70]) confirmait la profondeur et l'efficacité des idées de P. Lelong en les utilisant comme outil central pour démontrer un théorème important de théorie des nombres dans lequel on construisait l'ensemble algébrique recherché précisément comme ensemble de densité d'un courant (i.e. l'ensemble des points où la densité du courant est supérieure à une constante donnée c). Yum Tong Siu ([Siu 74]) lui aussi perçut immédiatement la portée de ces méthodes et les utilisa pour démontrer son théorème profond de structure d'un courant positif fermé : les ensembles de densité d'un tel courant sont des ensembles analytiques. Les résultats bien meilleurs obtenus ensuite grâce au théorème d'extension holomorphe d'Ohsawa-Takegoshi [Ohs 88] et à celui de cohérence de A. M. Nadel [Nad 89] ont peut-être, quelque peu, occulté le rôle décisif de ce tournant « stratégique » des années 70. Avant les résultats de L. Hörmander et d'E. Bombiéri qui court-circuitaient dans une certaine mesure le théorème de cohérence d'Oka, il paraissait impensable de résoudre par des méthodes L^2 et de fonctions plurisousharmoniques, des problèmes intimement liés au singularités locales des idéaux de fonctions analytiques.

Ces idées de P. Lelong avaient été accueillies avec un certain scepticisme dans les années 50-60 : on attendait qu'elles fassent vraiment leurs preuves par rapport aux méthodes algébriques de la théorie des faisceaux. On avait déjà demandé à Pierre Lelong (il aimait le dire) dans les années 30 : « Pourquoi considérer deux variables complexes plutôt qu'une seule comme tout le monde ? » J'ignore si quelqu'un lui a demandé dans les années 50, 60, 70 :« Pourquoi utiliser les fonctions plurisousharmoniques, les courants positifs fermés et les estimations L^2, alors que la théorie des faisceaux, l'algèbre locale et homologique, les espaces vectoriels topologiques ont déjà tant réalisé et pourront sans doute tout faire ? » P. Lelong pensait que l'avenir seul déciderait. Je mis à profit toutes ces idées. D'abord dans ma thèse en 1972 ([Sk 72]), j'étendais aux ensembles analytiques quelconques le travail de P. Lelong relatif aux hypersurfaces de $\mathbb{C}^n$. Lui-même avait construit dès 1953 ([Le 64]), l'équivalent dans $\mathbb{C}^n$ du produit canonique de Weierstrass (i.e une fonction holomorphe F à croissance minimale s'annulant sur un ensemble donné à l'avance de zéros) sous la forme d'un potentiel plurisousharmonique en résolvant dans $\mathbb{C}^n$, de manière très moderne et originale, l'équation dite désormais de Lelong-Poincaré : $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|F| = [X]$ où $[X]$ est le courant d'intégration sur l'hypersurface X. Puis en 1975, reprenant la résolution de cette même équation, je caractérisais, en même temps que Gennadi Henkin, les zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna dans les domaines strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$.

Le hasard ou le destin (sans doute aidé par Jean Louis Verdier, directeur des études et Michel Hervé, directeur adjoint de l'École Normale Supérieure) fit que l'un de mes premiers étudiants à mon premier cours de 3^{e} cycle en 1976 fut le tout jeune Jean-Pierre Demailly à qui j'enseignais, à mon tour, les méthodes de Pierre Lelong et de Lars Hörmander. Il reprit immédiatement le flambeau, en étendant et assouplissant la notion de nombre de Lelong ([Dem 87]) et en faisant le lien avec d'autres grands problèmes du moment comme la conjecture de Hodge [Dem 82] et les théorèmes d'annulation numérique. J'ai assisté depuis à l'épanouissement des idées de P. Lelong. Un nombre sans cesse croissant de mathématiciens s'intéressa à ses travaux qui eurent aussi un impact dans d'autres domaines comme la Géométrie Algébrique avec, par exemple, les résultats profonds de J.P. Demailly sur la conjecture de Fujita ([Dem 93]) et celui de Y.T. Siu ([Siu 98]) sur l'invariance des plurigenres. Citons encore l'apparition de courants positifs fermés dans la théorie des systèmes dynamiques holomorphes à plusieurs variables, à la suite des travaux de Nessim Sibony [Sib 99]. Je suis reconnaissant à Pierre Lelong d'avoir en toute simplicité posé les fondements de tous ces développements mathématiques qui, à mon avis, sont loin d'être achevés.

Je voudrais insister sur le rôle joué par son séminaire. Beaucoup de jeunes chercheurs français ou étrangers y furent invités et purent bénéficier de son audience et de la diffusion de leurs exposés publiés dans les Actes du séminaire chez Springer entre 1957 et 1986, dans la série des Lecture Notes.

J'ai partagé avec Pierre Lelong et Pierre Dolbeault la direction du séminaire d'Analyse Complexe qui, sous des formes diverses, s'est poursuivi jusqu'à nos jours. Puis Gennadi Henkin et Jean-Marie Trépreau se sont associés à la direction du séminaire. À partir d'octobre 2006, avec l'arrivée d'Olivier Bicquard et de Tien Cong Dinh, le séminaire s'est transformé en Séminaire de Géométrie et d'Analyse Complexe et s'est davantage orienté vers la Géométrie Différentielle tout en maintenant une composante importante d'Analyse Complexe.

De temps à autre, il était fréquenté par Henri Cartan et Laurent Schwartz et plus régulièrement par Paul Malliavin et Michel Hervé. L'organisation du séminaire fut l'occasion d'échanges non seulement sur les mathématiques, la Recherche, l'Université mais aussi sur le rôle de l'Administration et de l'État dans la Recherche. J'ai immédiatement reconnu dans les propos et la personnalité de Pierre Lelong l'empreinte profonde de la tradition humaniste, renforcée par des études de lettres classiques au lycée, qui donne la priorité à l'homme sur les idéologies et sur les techniques. C'est dans cet esprit que P. Lelong concevait le service de l'État. Pierre Lelong s'y était préparé de longue date en suivant, en complément de son activité de mathématicien, dans les années 30, les cours de l'Institut de Sciences Politiques de Paris.

Dans les années 60, il fut conseiller scientifique du Président de la République, le général Charles de Gaulle, et participa ainsi à l'effort de développement des universités et de planification de la Recherche. Je pense que son influence fut hautement bénéfique et que nous lui devons encore beaucoup aujourd'hui.

D'autre part, il s'appliqua aussi durant les années 80, à défendre l'Institut Henri Poincaré. En effet, un vide juridique aurait pu permettre l'élimination des mathématiciens de cet institut. Il travailla à l'établissement d'un statut clair de l'IHP préservant les intérêts de toute la communauté mathématique ainsi que ceux des physiciens théoriciens en rattachant administrativement l'IHP à l'université de Paris 6 pour assurer sa stabilité administrative, juridique et financière.

Je salue avec émotion la mémoire de Pierre Lelong. Avec lui, disparaît non seulement l'un des très grands mathématiciens du XX^{e} siècle dont l'influence se poursuivra encore longtemps mais aussi un universitaire profondément attaché à la promotion des valeurs humanistes et républicaines.

Références

[Bom 70] Bombieri, E., Algebraic values of meromorphic maps, *Invent. Math.*, **10**(1970), 267-287 and addendum, *Invent.Math.*,**11**(1970), 163-166.

[Dem 82] Demailly, J-P., Courants positifs extrêmaux et conjecture de Hodge, *Invent. Math.*, **69**(1982), 457-511.

[Dem 87] Demailly, J-P., Nombres de Lelong généralisés,théorèmes d'intégralité et d'analyticité. *Acta Math.*,**159**(1987),153-169.

[Dem 93] Demailly, J-P., A numerical criterion for very ample line bundles, *J. Differential Geom.*, **37**(1993), 323-374.

[Hör 65] Hörmander, L., L^2 Estimates and existence theorem for the $\bar{\partial}$ operator. *Acta Math.*, **113**(1965), 89-152.

[Hör 66] Hörmander,L., *An introduction to Complex Analysis in several variables*, 1966, 3nd edition, *North Holland Math.Libr.*, Vol 7, Amsterdam, London, 1990.

[Le 45] Lelong, P., Les fonctions plurisousharmoniques. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris*, **62**(1945), 301-338.

[Le 57] Lelong, P., Intégration sur un ensemble analytique complexe, *Bull. Soc. Math. France*, **85**(1957), 239-262.

[Le 64] Lelong, P., Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans $\mathbb{C}^n$, *Jour. d'Analyse (Jerusalem)*, **12**(1964), 365-406.

[Le 69] Lelong, P., *Plurisubharmonic functions and positive differential forms,* Gordon and Breach, New-York, and Dunod, Paris, 1969.

[Nad 89] Nadel, A.M., Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **86** (1989), 7299–7300 and *Annals of Math.*, **132** (1990), 549–596.
[Ohs 88] Ohsawa, T., On the extension of L^2 holomorphic functions, II, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **24** (1988), 265–275.
[Sib 99] Sibony, N., Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k$, Dynamique et Géométrie complexe (Lyon1997), ix-x, xi-xii, 97-185, *Panor. et Synthèses* **8**, Soc.Math. France, Paris (1999).
[Siu 74] Siu, Y.T., Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents, *Invent. Math.*, **27**(1974), 53-156.
[Siu 98] Siu, Y.T., Invariance of Plurigenera, *Invent. Math.*, **134** (1998), 662-673.
[Sk 72] Skoda, H., Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans $\mathbb{C}^n$, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **100**(1972), 353-408.
[Sk 00] Skoda, H., Présence de l'œuvre de P. Lelong dans les grands thèmes de recherche d'aujourd'hui, *Complex Analysis and Geometry, International Conference in Honor of Pierre Lelong, (1997)*, Progres in Mathematics, vol. 188, Basel, Boston, Berlin. Birkhäuser (2000), 1-30.

Ch. Kiselman et P. Lelong
Paris 1997, colloque en l'honneur de Pierre Lelong

INFORMATIONS

Note d'information du comité d'experts pour les PES universitaires 2012 en sections 25-26

Josselin Garnier[1]

Depuis 2009 la Prime d'Encadrement Doctoral et de Recherche (PEDR) a été remplacée par la Prime d'Excellence Scientifique (PES). L'attribution de la PES est du ressort des universités, mais à titre transitoire elles peuvent décider de faire appel à un comité national pour l'évaluation et le classement des dossiers des candidats dans chaque discipline. Les membres du comité des sections 25-26 ont souhaité informer la communauté mathématique des principes utilisés lors de cette expertise, tout en préservant comme il se doit la confidentialité des débats. Le texte qui suit vise à indiquer aux candidats les critères d'évaluation des dossiers, et à fournir aux représentants des mathématiques au sein des conseils des établissements, compétents en ce qui concerne l'attribution de la PES, des éléments utiles à la défense des dossiers dont ils seront chargés. Le comité des sections 25-26 s'est réuni les 6 et 7 septembre 2012 à l'IHP. Il était constitué de Jean-Philippe Anker, Catalin Badea, Olivier Biquard, Pierre Del Moral, Stéphane Descombes, Thierry Gallay, Josselin Garnier (président), Emmanuel Grenier, Vincent Guedj, Arnaud Guillin, François Hamel, David Harari, Hans-Werner Henn, Yanick Heurteaux, Marc Hoffmann, Stéphane Labbé, Gilbert Levitt, Lucy Moser-Jauslin, Marc Peigné, Dominique Picard, Bertrand Rémy, Luc Robbiano, Judith Rousseau, Sylvia Serfaty, Emmanuel Trélat.

Remarque : les PES pour les chercheurs des organismes de recherche (CNRS, INRIA) font l'objet de procédures distinctes dont il ne sera pas question ici. De plus certains universitaires ont droit d'office à la PES : membres de l'IUF, lauréats de certains prix nationaux ou internationaux.

La mission du comité est de répartir les dossiers en trois catégories : A, B et C. Il est du ressort des universités de décider ensuite de l'attribution ou non de la PES et de son montant. La plus grosse réserve émise par le comité dans ce système est la dissociation entre l'évaluation et la décision d'attribution, dont les modalités varient d'une université à l'autre. La lettre de cadrage du ministère précise : les enseignants-chercheurs dont les dossiers ont été classés A devraient bénéficier de la PES, ceux dont les dossiers ont été classés B pourraient en bénéficier, et ceux dont les dossiers ont été classés C ne devraient pas en bénéficier. Le ministère exige qu'au plus 20% des dossiers soient classés A, et au plus 30% soient classés B.

[1] Ndlr : Josselin Garnier s'exprime au nom des membres du Comité des Sections 25 et 26. Ce texte est aussi paru dans MATAPLI.

Comme dans les comités des autres sections, le comité en sections 25-26 remplit au maximum ses contingents en A et B.

Les dossiers ont été séparés en trois groupes suivant le grade des candidats : maîtres de conférences (MCF), professeurs de seconde classe (PR2), et professeurs de première classe (PR1) ou de classe exceptionnelle (PREX). Comme les années précédentes, le comité a choisi d'appliquer les mêmes proportions de notes A, B et C dans ces trois groupes (20% de A, 30% de B et 50% de C).

D'une part, ce choix revient à donner un avantage aux MCF par rapport aux PR2 et aux PR1-PREX. Cette décision a été discutée à nouveau cette année, et le comité a décidé de continuer cette pratique, pour plusieurs raisons, dont la principale est la nécessité de préserver une certaine attractivité des postes pour les jeunes chercheurs en mathématiques.

D'autre part, ce choix, qui est propre à la communauté mathématique, conduit à un niveau d'exigence extrêmement élevé pour les PR2 et encore plus pour les PR1-PREX. Il y a en effet dans ces deux groupes un grand nombre d'excellents dossiers, si bien que l'application des quotas a conduit à noter B des dossiers présentant des recherches de tout premier plan, et en C les dossiers de collègues qui bénéficient d'une très forte reconnaissance internationale. Il est certainement plus difficile d'être classé A ou B pour un PR1-PREX en mathématiques que dans beaucoup d'autres disciplines.

Il faut noter que le nombre total de candidats a augmenté cette année (520 en 2012, 471 en 2011), et que cette augmentation peut clairement être attribuée aux MCF, dont le nombre de candidats (290 en 2012, 251 en 2011) dépassait nettement le nombre de professeurs (115 PR2, 115 PR1-PREX). De très jeunes MCF ont cette année encore été classés A ou B, et donc ils ne doivent pas hésiter à postuler. De manière générale, il serait très souhaitable que les mathématiciens postulent largement à la PES.

La fiche d'évaluation fournie par le ministère précise quatre rubriques pour lesquelles des notes A, B ou C sont attribuées à chaque dossier (la fiche ainsi que cette note sont téléchargeables sur `http://www.proba.jussieu.fr/~garnier/PES/`). Ces quatre notes, ainsi que la note globale, sont transmises par le ministère aux universités, et aucune autre information n'est transmise. Ces rubriques sont :

- la production scientifique,
- l'encadrement doctoral et scientifique,
- le rayonnement scientifique,
- les responsabilités scientifiques.

L'évaluation est concentrée sur la période de quatre ans qui va du 1^er^ janvier 2008 au 31 décembre 2011. Le comité a considéré que ces quatre rubriques n'avaient pas le même poids pour l'obtention de la PES. La production scientifique a joué un rôle prépondérant dans l'évaluation des dossiers. La publication d'articles dans des revues mathématiques les plus sélectives joue un rôle important dans l'évaluation de la production scientifique, la qualité des revues étant plus importante que leur nombre. Néanmoins d'autres facteurs ont été pris en compte (publications des thésards, brevets, logiciels). Le rayonnement a aidé dans certains cas à identifier des dossiers dont l'activité de recherche avait une influence marquante même lorsque les publications étaient faites dans des revues moins connues. Les rubriques encadrement doctoral, rayonnement et responsabilités scientifiques ont été prises en compte, en particulier pour les PR2 et pour les PR1-PREX. Le comité a considéré que l'absence d'encadrement doctoral ou de responsabilités administratives dans le dossier d'un PR2 et surtout d'un PR1-PREX était une anomalie qui devait être compensée par une activité scientifique particulièrement brillante. Le comité a considéré qu'il n'était pas du ressort de la PES de récompenser une activité administrative particulièrement intense mais qu'il était anormal qu'un PR ne prenne pas sa part d'activités administratives. La même règle a été appliquée aux MCF « expérimentés » en activité depuis une petite dizaine d'années au moins.

Pour les MCF « jeunes » (dans les six années après le recrutement) le comité a considéré que les rubriques encadrement doctoral et responsabilités scientifiques n'avaient en général pas grand sens. En conséquence, afin de ne pas pénaliser de jeunes MCF qui présentaient une activité de recherche de très haut niveau, le comité a parfois attribué une note B dans ces rubriques même pour des dossiers qui ne contenaient que peu d'éléments dans ces domaines. Cependant, la présence d'éléments (encadrements de M2, co-encadrements de thèse, responsabilité d'un séminaire, etc.) a été appréciée positivement et a permis d'attribuer la note A dans ces rubriques pour certains jeunes MCF particulièrement actifs. De manière générale, pour les jeunes MCF, l'autonomie acquise par rapport au directeur/travaux de thèse est un élément d'appréciation important.

Comme chaque année, les membres du comité ont fait de leur mieux pour arriver au résultat le plus juste et le plus impartial possible. Néanmoins, les quotas A/B/C imposés ont obligé à des décisions difficiles. Dans ces conditions, être classé C ne doit pas être considéré comme une appréciation négative du dossier par le comité, mais simplement comme le résultat de choix difficiles et fortement contraints.

Le comité a appliqué de manière stricte les règles de déontologie de base : aucun membre ne s'est exprimé sur les dossiers des candidats dont il était personnellement proche, de ses collaborateurs ou anciens étudiants, ou sur les dossiers des collègues de son université ou de son laboratoire.

Dernières nouvelles : le ministère a décidé de prolonger le recours à une instance nationale pour l'évaluation des candidatures à la PES en 2013. Donc, sous réserve de confirmation par les circulaires, les modalités d'évaluation et d'attribution de la PES en 2013 devraient être les mêmes qu'en 2012.

Nouvelles du CNRS

V. Bonnaillie-Noël

Bilan des recrutements et promotions du mandat 2008-2012

Durant le mandat 2008-2012, la section 1 a participé au jury de recrutement pour l'INSMI de 69 chargés de recherche dont 4 CR1 (n'étant pas CR2 au CNRS) et 14 chargés de recherche de 2ᵉ classe affectés dans des laboratoires ne relevant pas de l'INSMI, ainsi que 32 directeurs de recherche dont 1 DR1 (n'étant pas DR2 au CNRS) et 4 DR2 n'étant pas en poste au CNRS.

La table 1 précise la répartition hommes/femmes de ces recrutements ainsi que la répartition des affectations au moment du recrutement.

Grade	Nombre de postes	Parité		Affectation	
		H	F	Île-de-France	Province
CR	69	57 82.61%	12 17.39%	29 42.03%	40 57.97%
DR	32	24 75%	8 25%	16 50%	16 50%

Tab. 1. Recrutements par l'INSMI entre 2008 et 2012.

Par ailleurs, les 54 chargés de recherche 2ᵉ classe de l'INSMI qui avaient été recrutés lors du mandat 2004-2008 ont été promus CR1 entre 2008 et 2012. Durant le mandat 2008-2012, ont également été promus 39 directeurs de recherche de l'INSMI dont 25 de 1ᵉ classe, 11 de classe exceptionnelle de 1ᵉʳ échelon et 3 de 2ᵉ échelon. La table 2 donne plus de détails sur ces promotions.

Grade	Nombre de promotions	Parité		Affectation	
		H	F	Île-de-France	Province
CR1	54	49 90.74%	5 9.26%	28 51.85%	26 48.15%
DR1	25	21 84%	4 16%	16 64%	9 36%
DRCE1	11	9 81.82%	2 18.18%	5 45.45%	6 54.55%
DRCE2	3	3 100%	0 0%	2 66.67%	1 33.33%

Tab. 2. Promotions par l'INSMI entre 2008 et 2012.

Nouvelle section 41

Le nouveau mandat des sections a commencé en septembre. Rappelons le changement de numérotation des sections : la section 41 (ex section 1) s'intitule désormais *Mathématiques et interactions des mathématiques*. La liste de ses membres se trouve en Table 3.
La section 41 a voté une motion sur le texte de la C3N relatif aux assises de l'enseignement supérieur et de la recherche. Les informations de la section sont disponibles à l'adresse suivante :

`http ://cn.math.cnrs.fr/`

Prénom	Nom	élu nommé	Statut	Membre du bureau
Fatiha	Alabau-Boussouira	élue	professeur des universités	
Pascal	Autissier	nommé	professeur des universités	
Franck	Barthe	nommé	professeur des universités	
Christophe	Berthon	élu	professeur des universités	
Philippe	Biane	nommé	directeur de recherche	président
Hermine	Biermé	élue	maître de conférences	
Serge	Cantat	élu	directeur de recherche	
Rémi	Carles	élu	directeur de recherche	secrétaire scient.
Xavier	Caruso	élu	chargé de recherche	
Yves	De Cornulier	élu	chargé de recherche	mb. du bureau
Antoine	Ducros	nommé	professeur des universités	mb. du bureau
Mai	Gehrke	nommée	directrice de recherche	
Michaël	Gutnic	élu	maître de conférences	
Isabelle	Lamitte	élue	ingénieur d'études	
Arnaud	Lejeune	élu	ingénieur de recherche	
Arnaud	Lieury	élu	ingénieur d'études	
Yvan	Martel	élu	professeur des universités	
Jean-Pierre	Otal	nommé	directeur de recherche	
Yannick	Privat	élu	chargé de recherche	mb. du bureau
Ellen	Saada	élue	directrice de recherche	
Michela	Varagnolo	nommée	maître de conférences	

TAB. 3. Membres de la section 41.

Bilan du congrès SMF-VMS de Hué

(20-24 août 2012)

Lionel Schwartz

Le congrès co-organisé par la SMF et la Société Mathématique Vietnamienne s'est déroulé à l'université de Hué du 20 au 24 août 2012. Ce choix de localisation est apparu particulièrement commode et pertinent à l'expérience. Que ce soit en terme de participation, de variété des thèmes abordés tant dans les conférences plénières que dans les sessions, cette rencontre a été un grand succès. Elle a attiré de l'ordre de 500 participants, parmi lesquels de nombreux doctorants venant de France ou du Vietnam. Parmi les participants « seniors » une petite centaine venait de l'extérieur du Vietnam dont 80 sont en poste en France. Le congrès s'est ouvert en présence du président de la province de Thia Thien Hué, de représentants du ministère de l'éducation (MET), et du président de l'université de Hué. Il y a eu treize exposés pléniers et un exposé d'intérêt général. Quinze sessions parallèles ont attiré plus ou moins de participants mais ont été toutes réussies. Il faut souligner la variété des sujets abordés (dans le désordre) : géométrie algébrique, probabilités, mathématiques financières, EDP, optimisation, algèbre commutative, topologie, mathématiques discrètes, mathématiques et écologie...

On peut trouver tous les détails sur le lien `http://smf.emath.fr/content/smf-vms-joint-congress`

Les soutiens tant pour l'organisation que financiers côté vietnamien ont été très importants. Le Vietnam Institute of Advanced Studies in Mathematics (VIASM) et ses directeurs Ngo Bao Chau et Le Tuan Hoa, la Vietnam Mathematical Society (VMS) et l'université de Hué ont contribué de manière cruciale. Nous les en remercions chaleureusement ici encore une fois. Nous remercions aussi les nombreux collègues en France qui nous ont aidés via des contrats ANR, ou via l'IUF par exemple. Côté français, les soutiens sont aussi venus du LIA CNRS Formath Vietnam et des universités partenaires, ainsi que du programme ARCUS (Ministère des Affaires Étrangères, régions Île-de-France et Midi-Pyrénées).

La période du congrès et les semaines qui ont suivi ont été aussi l'occasion de rediscuter de la coopération. Pour faire court voici trois points à souligner. D'abord les collègues vietnamiens souhaitent continuer la coopération au niveau des masters « internationaux » tant celui de Hanoï que celui d'Ho Chi Minh Ville. Ceci se traduit par des demandes de cours à assurer par des enseignants français, de bourses de Master 2 ou de stages à trouver pour faire venir des étudiants vietnamiens en France.

Le deuxième point à souligner est le développement de la coopération avec le VIASM. C'est une opportunité nouvelle à utiliser, la priorité devant être donnée à des actions de coopération qui aident les doctorants ou post-doctorants au Vietnam.

Enfin à l'approche de l'année croisée France-Vietnam[1] il est souhaitable que des initiatives (à bas coût !) aient lieu pour mettre en valeur la coopération dans le domaine des mathématiques entre les deux communautés.

[1] Voir `http://www.institutfrancais.com/fr/festivals-saisons-annees-culturelles`

2013, mathématiques de la planète Terre[1]

Martin Andler[2], Liliane Bel[3], Sylvie Benzoni[4],
Thierry Goudon[5], Cyril Imbert[6], Antoine Rousseau[7]

Plus de 100 sociétés savantes, universités et autres instituts de recherche à travers le monde ont décidé de rassembler leurs forces pour faire de l'année 2013 celle des « mathématiques de la planète Terre ». Fort du soutien de l'union mathématique internationale (UMI), l'événement est également parrainé par l'UNESCO. L'idée forte qui guidera celles et ceux impliqués dans la mise en œuvre de ce projet est, qu'à travers ce prisme, on peut parler de mathématiques très diverses et très pointues, anciennes ou « aux frontières » de la science actuelle, académique ou non. Ainsi les thématiques retenues sont :

– *Une planète à découvrir* : océans, météorologie, climat, système solaire, ressources naturelles, etc.

– *Une planète habitée* : écologie, biodiversité, évolution, etc.

– *Une planète organisée par les humains* : politique, économie, systèmes sociaux et financiers, transports, réseaux de communication, etc.

– *Une planète en danger* : changement climatique, développement durable, épidémie, désastres naturels, etc.[8]

Cette action d'envergure mondiale n'est pas sans rappeler l'année mondiale des mathématiques en l'an 2000 qui avait été largement investie par notre communauté. Il se fait vite jour que « 2013, mathématiques de la planète Terre » est une formidable opportunité pour nous tous de faire connaître la diversité de nos réalisations et de donner une image moderne, dynamique et ouverte sur le monde de notre activité. Nous aurons cette année une vitrine extraordinaire pour montrer le rôle des mathématiques dans la vie quotidienne, la variété des métiers qui utilisent ou ont besoin des mathématiques, la richesse des liens entre les mathématiques et les autres disciplines scientifiques.

Cet article présente quelques-unes des réalisations spécifiques qui marqueront l'année en France, notamment celles qui impliquent la communauté académique. En particulier, les instituts de recherche (Insmi-CNRS, Inria), les sociétés savantes (SMF, SMAI, SFDS), ainsi que le consortium Cap'Math se sont mobilisés pour coordonner et partager certaines de ces actions. Cet engagement des instituts et des sociétés savantes témoigne de l'importance de l'enjeu. On notera que certaines de ces actions sont clairement à destination du « grand public », d'un public scolaire, d'autres plus orientées sur nos activités de recherche. Néanmoins toutes ces activités

[1] Texte publié également par *MATAPLI* et sur le site d'*Images des mathématiques*.
[2] Université de Versailles-St Quentin.
[3] AgroParisTech, MMIP Department, Paris.
[4] Institut Camille Jordan, université de Lyon.
[5] Equipe COFFEE, Inria Sophia Antipolis Méditerranée & laboratoire J. A. Dieudonné, Nice.
[6] Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, UMR 8050, université Paris-Est, Créteil.
[7] Inria Équipe MOISE, UMR MISTEA, Montpellier.
[8] Les contours de cette année – événement sont décrits en détails sur le site `www.mpt2013.org`.

devront être appelées à se nourrir et se renforcer mutuellement, afin de faire de cette initiative un plein succès.

L'UNESCO ouvrira cette opération par une manifestation officielle le 5 mars 2013. Cette date marquera aussi le départ d'une exposition itinérante dont l'animation sera assurée par Mireille Chaleyat-Maurel de l'université Paris 5[9].

Initiatives en direction des écoliers, collégiens, lycéens, professeurs ou grand public

La semaine des mathématiques

Lancée en 2011-2012, *la semaine des mathématiques* est un événement porté par le Ministère de l'Éducation Nationale. L'objectif est de donner l'occasion aux élèves de tous les niveaux de réfléchir aux implications et au rôle des mathématiques sur un thème donné. Cette réflexion, qui peut se mener sur plusieurs semaines, donne lieu à des opérations de restitution auxquelles sont conviés parents, public, enseignants-chercheurs...

Un tel événement doit contribuer à conforter une image actuelle, vivante et attractive des mathématiques. Cette seconde édition aura lieu du 18 au 22 mars 2013, et le thème retenu s'accorde, bien sûr, avec « 2013, mathématiques de la planète Terre ». Un guide pédagogique édité par le Ministère précise les grandes lignes de ce projet. Le site EDUSCOL (`www.eduscol.education.fr`) relaie les faits les plus marquants et donne de nombreuses pistes d'activités sur une page dédiée. Les rectorats ont pour mission de mettre en place des comités de pilotage chargés à la fois d'impulser la dynamique nécessaire et d'assurer suivi et visibilité à l'opération. Un effort tout particulier doit porter sur les années de transition (CM2/6^{e} et lycée/supérieur).

Les chercheurs et enseignants-chercheurs seront sollicités ; ils peuvent aussi prendre l'initiative dans leurs propres réseaux, pour participer à cet événement majeur à destination des plus jeunes.

Salon de la culture et des jeux mathématiques

Ce salon, dont se tiendra en 2013 la 14ème édition sur le campus de l'UPMC du 30 mai au 2 juin 2013, aura lui aussi pour thème les « mathématiques de la planète Terre ». Voir `http://www.cijm.org/`

Journées nationales 2013 de l'APMEP

Les journées nationales de l'APMEP auront lieu en 2013 à Marseille ; elles seront également centrées sur le thème « mathématiques de la planète Terre ».

---

[9] Exposition autour des 12 thèmes suivants : anamorphoses de la Terre ; toutes les cartes sont fausses ! les côtes fractales ; montée des eaux et fonte des glaciers ; percolation ; dur ou mou, le cœur de la terre ? hauteur du soleil suivant les saisons ; où suis-je ? (GPS) ; stéréographie ; prévoir la météo à 15 jours ? cyclones, dans quel(s) sens tournent-ils ? Coriolis, solitons et tsunamis.

Atelier de réflexion prospective

L'Agence Nationale de la Recherche a lancé un appel à proposition pour un *atelier de réflexion prospective* (ARP) sur la thématique « Mathématiques et complexité du système Terre ». L'Insmi a demandé à Didier Bresch (CNRS Chambéry) de coordonner le dépôt d'un projet d'envergure nationale, reprenant les thèmes de l'appel à projets :

– *Terre Fluide* avec Sylvie Joussaume, directrice du GIS Climat et Marie-Hélène Tusseau-Vuillemin, directrice scientifique de l'Ifremer ;

– *Terre Vivante* avec Gilles Bœuf, directeur du museum national d'histoire naturelle et Michel Loreau, directeur du CBTM Moulis ;

– *Terre Humaine* avec Jean-Charles Hourcade, directeur du CIRED et François Houllier, directeur de l'Inra.

Ce projet, appelé *MathsInTerre* (pour Mathématiques en Interaction pour la Terre) vient d'être retenu par l'ANR et sera soutenu à hauteur de 170 000 Euros. Cet atelier va promouvoir les interactions entre mathématiciens et scientifiques d'autres disciplines et fera des propositions de pistes d'action pour la programmation de l'ANR. En particulier le projet ambitionne d'identifier les nouveaux outils mathématiques qui devront être développés pour aborder des problèmes environnementaux. L'atelier sera ponctué de séances de remue-méninges, à l'IHP et en régions, pouvant faire appel à des experts internationaux, afin de dessiner l'état de l'art et d'identifier les prospectives les plus prometteuses.

Mentionnons aussi ici la création du nouveau *groupement de recherche* (GdR) porté par Stéphane Cordier et intitulé « Écoulements Gravitaires et Risques Naturels » (EGRIN)[10]. Ce GdR vise non seulement à promouvoir les interactions avec les géosciences, mais aussi à développer la modélisation, l'analyse mathématique et des méthodes numériques innovantes pour décrire des écoulements complexes. C'est le cas notamment des écoulements liés à des rhéologies non standards, ou encore lorsque le fluide interagit avec les sols ou les structures (érosion, glissement de terrain, avalanches, etc).

Congrès et conférences

Les sociétés savantes tentent de recenser les conférences spécifiques en lien avec les thématiques de « 2013, Mathématiques de la planète Terre » [11] et les centres d'accueil de manifestations scientifiques ont orienté leur programmation vers ces sujets. Ainsi, le CIRM ouvrira l'année 2013 avec le colloque « *Chocs dispersifs : mascaret, vagues scélérates, superfluides* » organisé du 7 au 13 janvier par Pascal Noble[12] ; ou encore le CEMRACS 2013, porté par Nicolas Champagnat[13], Tony Lelièvre[14] et Anthony Nouy[15], aura pour thème « *Modéliser et simuler la complexité : approches stochastiques et déterministes* » ; enfin, à l'institut H. Poincaré

[10] voir le site `http://gdr-egrin.math.cnrs`

[11] voir par exemple `http://smai.emath.fr/spip.php?article399\&lang=fr`

[12] Université Claude Bernard Lyon 1.

[13] Inria Nancy.

[14] Université Paris-Est, École des ponts Paritech.

[15] École Centrale Nantes.

et au CIRM, Michel De Lara[16] et Luc Doyen[17] animent un semestre « *Mathematics of Bio-Economics* » [18] suivi du colloque « *Contrôle stochastique pour la gestion des énergies renouvelables* » au CIRM, organisé par Pierre Carpentier[19], Jean-Philippe Chancelier[20], et Michel De Lara.

Il y a fort à parier que ces conférences seront accompagnées d'événements grand public comme des conférences spécifiques, des demi-journées portes ouvertes, ou encore des interviews à la presse afin de diffuser au mieux les connaissances de la recherche actuelle sur ces thèmes spécifiques.

Un jour, une brève

Enfin Cap'Maths/Animath, le CNRS, Inria, la SMF, la SMAI et la SFDS unissent leurs efforts pour une opération d'envergure à destination d'un très large public et notamment des plus jeunes. L'objectif un peu fou est de publier une « brève » par jour (hors week-end) présentant une activité mathématique en lien avec la planète Terre.

Il s'agit de courts textes (moins d'une page), mais où la gageure consiste à donner une idée de l'apport des mathématiques sur ces sujets. Par exemple, une première phrase plante le décor dans un langage accessible à un collégien. Puis la difficulté scientifique est exposée, sans technique ni jargon. Enfin, la brève met en lumière l'apport spécifique des mathématiques dans la résolution du problème. Ces textes peuvent être complétés par une ou deux références, un lien Internet, un contact. Mais une brève peut être aussi un portrait, ou encore l'histoire de la résolution d'un problème scientifique comme l'explication des marées. La rédaction de ces brèves sera issue d'un processus de validation scientifique impliquant les auteurs et un comité éditorial *ad hoc*. Elle s'appuiera également sur le concours technique de la société MyScienceWork, start-up spécialisée dans la médiation scientifique, qui assurera mise en forme, publication et diffusion de ces textes. Le comité de direction de cette opération est constitué de Martin Andler (Université Versailles Saint Quentin, représentant Cap'Math), Liliane Bel (AgroParisTech, représentant la SFDS), Sylvie Benzoni (Université Lyon 1, représentant le CNRS), Thierry Goudon (Inria Sophia, représentant la SMAI), Cyril Imbert (CNRS Créteil, représentant la SMF) et Antoine Rousseau (Inria Grenoble & Montpellier, représentant Inria). Ces brèves seront publiées sur le site dédié `www.mpt2013.fr` sous la forme d'un blog permettant le dépôt de commentaires, le suivi de discussions,... et relayé sur les réseaux sociaux. Ces textes seront annoncés sur les sites des partenaires et également repris sur `mpe2013.org`.

Nous cherchons donc activement des contributeurs ! Si vous avez une idée de brève, contactez-nous dès aujourd'hui !

Bien d'autres initiatives ne manqueront pas de se concrétiser à des échelons locaux ou au niveau national. Le succès de « 2013, mathématiques de la planète Terre » et le bénéfice pour l'image des mathématiques que nous pouvons en tirer, dépendent de l'implication de tous.

[16] École des ponts Paritech.
[17] CNRS CERSP.
[18] `http ://cermics.enpc.fr/~ delara/MABIES/MABIES/`
[19] Ensta ParisTech.
[20] École des ponts Paritech.

Présentation de la revue « Statistique et Enseignement »

Les rédacteurs en chef[1]

Née d'une décision du conseil de la Société Française de Statistique (SFdS) datant de 2008, la revue *Statistique et Enseignement*[2], dont le premier volume est paru en 2010, en est à sa troisième année d'existence : ce n'est pas encore la maturité, mais l'expérience acquise lors de l'élaboration des volumes de 2010, 2011 et 2012 a permis de suffisamment préciser des orientations et des contenus pour qu'il nous ait paru désormais souhaitable d'attirer dessus l'attention des lecteurs de *La Gazette des mathématiciens*.

Nous reproduisons ici la déclaration d'intention de la SFdS lors du lancement de la revue.

Il manquait une revue spécialisée, orientée vers le public francophone, lieu naturel et exigeant pour publier des articles consacrés à l'enseignement de la statistique et pouvant tirer profit de l'expérience acquise dans d'autres langues. C'est pourquoi la SFdS a décidé de créer Statistique et Enseignement, *revue électronique en libre accès ...* Statistique et Enseignement *vise ainsi à publier des contributions relatives à l'enseignement, mais aussi à la formation extra-scolaire, voire à la popularisation « grand public » en statistique.* Statistique et Enseignement *n'est pas un centre de ressources mais une revue à comité de lecture accueillant des réflexions critiques, des analyses, des présentations d'activités accompagnées de commentaires (objectif, conditions d'expérimentation, conclusions de cette étude). Sans être un forum,* Statistique et Enseignement *comportera aussi des débats, des points de vue, ainsi que des notes de lecture et de consultation sur des ouvrages, des revues ou des sites internet touchant à l'enseignement et à la formation en statistique.*

On relèvera que le nom de la revue est à la fois naturel et modeste en apparence (quoi de plus nécessaire que d'accoler le nom d'une discipline scientifique et l'affirmation que son enseignement doit être pensé ?) mais aussi très ambitieux dans son imprécision : il ne spécifie ni niveau d'enseignement (élémentaire, secondaire, supérieur), ni cadre de celui-ci (scolaire ou « grand public ») ni surtout nature des réflexions et outils propres à l'enseignement de la statistique qui peuvent y figurer : l'éventail a priori envisageable est ici très large, depuis des relations argumentées d'expériences devant des élèves ou des étudiants jusqu'à des analyses de fond sur les problématiques propres à la transmission du savoir et du savoir-faire en statistique.

Au fil des cinq numéros déjà publiés (il en paraît deux chaque année) la quasi totalité des objectifs annoncés a déjà été satisfaite, et même affinée ; c'est ainsi que les articles ont été répartis en trois rubriques :

– recherches et perspectives (9 articles publiés),
– expériences commentées (12 articles publiés),
– outils et documents (5 articles publiés).

[1] Catherine Vermandele (depuis 2009), Jeanne Fine (depuis 2011), Jean-Pierre Raoult (de 2009 à 2011).
[2] `www.statistique-et-enseignement.fr`

On notera que l'un de ces numéros (numéro 2 du volume 2 (2011)) était un numéro « à thème », portant sur *L'usage des logiciels dans l'enseignement de la statistique* (5 articles du type « Expériences commentées » et un du type « Outils et documents »). Deux autres numéros à thème sont en préparation : l'un (2012) sur *L'enseignement de la statistique en interdisciplinarité* et l'autre (2013) sur *Le curriculum statistique dans l'enseignement préuniversitaire en France et à l'étranger*.

Par ailleurs ont été publiés des éditoriaux, précisant la politique éditoriale et situant chaque numéro dans ce cadre, ainsi que, comme annoncé à l'origine, des « libres propos » n'engageant que leurs auteurs et de nombreuses analyses d'ouvrages.

La création de cette revue s'inscrit par ailleurs dans le cadre d'un ensemble de mesures pilotées par le « groupe enseignement » de la SFdS : *Congrès Internationaux Francophones sur l'Enseignement de la Statistique* (3 éditions : Lyon (2008), Bruxelles (2010), Angers (2012)), demi-journées à l'intention des professeurs de l'enseignement secondaire ...

Nous espérons contribuer ainsi à fournir un outil de réflexion et de soutien à la mise en œuvre d'un enseignement en pleine évolution, à tous les niveaux d'études et dans de nombreux secteurs, et pour lequel nous souhaitons tout particulièrement susciter l'intérêt de la communauté mathématique.

Annexe

Numéro à thème : l'enseignement de la statistique en interdisciplinarité.

Ce numéro fait l'objet d'une publication évolutive.

Une première livraison a été mise en ligne ; elle est composée de trois textes ayant pour objectif d'introduire des débats et de susciter des contributions :

– sur la notion (très interdisciplinaire) de preuve statistique, utilisée tant dans les sciences expérimentales que dans les sciences humaines, ainsi que sur les images et le vocabulaire à employer pour l'approche de la notion de test,

– sur la statistique en tant que discipline scolaire, sur la statistique comme entrée dans des activités interdisciplinaires en milieu scolaire : qu'en pensent les professeurs ?

– sur la question : quelle(s) discipline(s) devrai(en)t être en charge de l'enseignement de la statistique dans l'enseignement secondaire ? Pour certains, cet enseignement doit être introduit en mathématiques, pour d'autres, les notions telles que intervalle de confiance et différence significative, lien statistique significatif, pourraient être introduites en physique par le biais de la mesure, en biologie par le biais de l'influence des niveaux d'un facteur, en sciences économiques et sociales avec l'étude de déterminants sociaux,...

La version finale de ce numéro à thème sera publiée au deuxième semestre 2013, enrichie des contributions que la première livraison aura suscitées.

CARNET

Friedrich Hirzebruch, acteur majeur de la communauté mathématique internationale

Jean-Pierre Bourguignon

Quelques souvenirs personnels

Sur une période de 40 ans, je dois personnellement beaucoup à Friedrich Hirzebruch pour son soutien constant et l'inspiration qu'il a suscitée en moi.

C'est en 1970 que je l'ai rencontré pour la première fois à Bonn, alors que, jeune chercheur en géométrie différentielle, je visitais Wilhelm Klingenberg. En ce temps, les mathématiques françaises étaient fortement dominées par la géométrie algébrique « *à la Grothendieck* », et à Bonn, bien que Friedrich Hirzebruch ait été aussi un géomètre algébriste, je sentais une attitude beaucoup plus ouverte envers d'autres types de mathématiques.

L'*Arbeitstagung*, un événement mathématique de première importance qu'il a organisé avec ses collègues de Bonn pendant plus de 30 ans, offrait chaque année au mois de juin une couverture large des mathématiques en train de se faire. C'était un endroit exceptionnel pour rencontrer des mathématiciens de toutes sortes, célèbres et moins célèbres, établis ou seulement débutants. Comme beaucoup de jeunes mathématiciens, j'en ai tiré beaucoup de profit, soit directement par le biais des nouvelles perspectives gagnées à l'écoute des exposés, soit indirectement, au travers d'un grand nombre de rencontres, certaines d'entre elles ayant eu un impact considérable sur ma vie professionnelle.

C'est vraiment au cours de l'année académique 1976-1977, que j'ai passée à Bonn avec ma famille comme invité de la *SonderForschungsBereich 40*, que j'ai pu mieux le connaître. À cette occasion, j'ai aussi pu rencontrer Jacques Tits, qu'il avait attiré à Bonn.

Il était toujours curieux de savoir ce qui vous intéressait en mathématiques, et portait un intérêt particulier pour les jeunes mathématiciens. Il faut aussi noter qu'il avait une attitude pro-active pour la promotion des mathématiciennes en un temps où l'égalité des genres n'avait pas la priorité qu'on lui connaît aujourd'hui. Plusieurs collègues femmes considèrent qu'elles lui doivent beaucoup pour le soutien durable qu'il leur a apporté.

Les nombreuses rencontres qui ont suivi cette année exceptionnelle à Bonn m'ont donné de multiples occasions de percevoir ses talents divers : mathématicien de premier plan bien sûr, conférencier d'une clarté remarquable, communicateur efficace et gestionnaire au savoir-faire exceptionnel. Plusieurs de ces rencontres ont plutôt été des surprises comme sa demande que je l'accompagne à une conférence de presse avec des journalistes allemands pour discuter du développement des mathématiques dans son pays. Nous avons aussi eu des discussions intenses quand, en tant que président du Comité de programme du Congrès International des Mathématiciens 1986 qui s'est tenu à Berkeley, je devais lui rendre compte des discussions de la section de géométrie, dont j'étais le coordinateur, probablement parce qu'il l'avait voulu ainsi. La mise en place du *Max-Planck-Institut für Mathematik in den Wissenschaften* à Leipzig a aussi été l'occasion d'échanges larges sur les nouveaux champs des mathématiques.

Il a été un grand soutien de la collaboration entre l'Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS) et la *Max-Planck Gesellschaft* (MPG). Il a représenté la MPG au Conseil d'administration de l'IHÉS pendant de nombreuses années. Lui, en tant que directeur du *Max-Planck-Institut für Mathematik* de Bonn, et Sir Michael Atiyah, en tant que directeur fondateur de l'*Isaac Newton Institute in the Mathematical Sciences*, ont immédiatement soutenu l'idée de créer un Institut Post-Doctoral Européen (IPDE), que j'ai proposée à l'automne de 1994, juste après ma prise de fonction comme directeur de l'IHÉS. Dès 1995, les trois institutions pouvaient joindre leurs efforts pour faciliter la mobilité des jeunes post-doctorants en Europe. À l'occasion de la cérémonie d'ouverture de l'IPDE à Bures-sur-Yvette, il a fait une intervention très éclairante sur le rôle des instituts en mathématiques.

Friedrich Hirzebruch et les relations internationales

Très tôt dans sa carrière, Friedrich Hirzebruch a donné une dimension internationale à sa vie professionnelle :

– il a rendu visite à Heinz Hopf à l'ETH à Zurich au début des années 50 et a séjourné aux États-Unis un peu plus tard dans les années 50, à l'*Institute for Advanced Study* et à l'université de Princeton. ;
– son engagement dans le projet EUROMAT dès 1956 et son rôle central dans les tentatives de faire évoluer l'*Oberwolfach Mathematisches Institut* en un *Max-Planck Institut*.

Tout au long de sa carrière, Friedrich Hirzebruch a occupé de nombreuses responsabilités au niveau international. Il a présidé de nombreux comités d'évaluation, a été éditeur de plusieurs journaux mathématiques et un membre actif de conseils scientifiques de nombreuses conférences.

Le nombre impressionnant de distinctions et d'honneurs qu'il a reçus montre le niveau exceptionnel de reconnaissance dont il jouissait dans de nombreux pays, en faisant une mention spéciale pour le Japon et Israel, où son action a été particulièrement appréciée.

Il a joué un rôle fondamental dans le choix de Berlin pour tenir le Congrès International des Mathématiciens (ICM) 1998, à l'occasion de la célébration du centième anniversaire de ce rendez-vous majeur de la communauté mathématique internationale, et 94 ans après la tenue du troisième ICM en Allemagne, à Heidelberg cette année-là. Il était dès lors tout à fait naturel qu'il soit désigné comme Président d'Honneur du comité d'organisation de l'ICM 98.

Chern Shiing-Shen, Samuel Eilenberg et Friedrich Hirzebruch au début des années 1950 aux États-Unis

La relation particulière de Friedrich Hirzebruch à Henri Cartan

Tout au long de sa carrière, Friedrich Hirzebruch a interagi à de nombreuses occasions avec Henri Cartan. La première fois ce fut en relation avec les efforts de Cartan pour rétablir les contacts entre mathématiciens allemands et français après la Seconde guerre mondiale. En effet, dès novembre 1946, Henri Cartan faisait une conférence au Lorenzenhof à Oberwolfach. La longue amitié d'Henri Cartan avec Heinrich Behnke était le cadre qui a permis à Friedrich Hirzebruch de faire sa connaissance.

C'est dans ce contexte que Friedrich Hirzebruch a écrit :

> « *The* Association Européenne des Enseignants *(European Association of Teachers) was founded in Paris in 1956. Henri Cartan was president of the French section. As such he took the initiative to invite participants from eight European countries to a meeting in Paris in October 1960. Emil Artin, Heinrich Behnke and I were the German members. The second meeting of this committee was in Düsseldorf in March 1962. As a result, the "Livret Européen de l'Étudiant" ('European Student's Record') was published and distributed by the Association. The booklet contained a description of minimal requirements for basic courses. It was supposed to increase the mobility of students from one country to another. The professor of one university would mark in the booklet the contents of courses attended by the student. The professor at the next university would then be able to advise the student in which courses to enrol. The booklet was not used very much.* »

On peut apprendre beaucoup de leur relation en lisant la lettre que Friedrich Hirzebruch a envoyée en 1994 à Henri Cartan à l'occasion de son 90$^{\text{ème}}$ anniversaire. Voici une copie de cette lettre.

PROF. DR. FRIEDRICH HIRZEBRUCH

THÜRINGER ALLEE 127
~~5205~~ ST. AUGUSTIN 2
D-53757

3. Juli 1994

Lieber Herr Cartan!

Zu Ihrem 90. Geburtstag möchten meine Frau und ich ganz herzlich gratulieren und Ihnen und Ihrer Frau Gesundheit und Wohlergehen wünschen. Hoffentlich wird Sie dieser Brief zum 8. Juli rechtzeitig erreichen. Wegen gelegentlicher Poststreiks in Deutschland ist dies nicht ganz sicher.

Ich freue mich sehr, daß Sie die Ehrenmitgliedschaft der Deutschen Mathematiker-Vereinigung angenommen haben, und danke Ihnen sehr herzlich für Ihre Grüße an mich in Ihrem Antwortschreiben an Herrn Grötschel, wo Sie auch meine Habilitation erwähnen (1955). Damals fragte ich Behnke, wie mein Vortrag sein solle. Er antwortete: „Ganz einfach. Der Dekan, ein Pharmazeut, muß es verstehen, und Cartan muß es interessant finden."

Meine Frau und ich sind Ihnen und Ihrer Frau häufig begegnet. Das war immer eine große Freude für uns. Wir denken zum Beispiel an das Zusammentreffen in Dubna und Moskau beim ICM 1966, als Sie zum Präsidenten

2

gewählt wurden und Ihre segensreiche Tätigkeit für die IMU, u.a. auch mit der Vorbereitung des ICM 1970 in Nizza, begann. Anfang August reisen meine Frau und ich zum ICM 1994 nach Zürich. Vorher ist die Versammlung der IMU in Luzern, an der ich teilnehme. Ich hoffe, daß dort die Einladung nach Berlin (1998) endgültig akzeptiert wird. Heinrich Behnke hat immer gesagt, der Kongreß müsse endlich einmal wieder in Deutschland stattfinden (zuletzt Heidelberg 1904), und war traurig, daß die Einladung nach Deutschland für 1966 nicht realisiert werden konnte, da die erste Einladung in die Sowjetunion natürlich vorging. Ähnlich war es 1990, als Ostasien vorging. Nun wird vielleicht im Jahre seines 100. Geburtstages der ICM nach Deutschland kommen.

Ich weiß nicht, ob ich Sie bei Ihrem Besuch in Münster 1947 gesehen habe. Gesprochen habe ich Sie wohl zum erstenmal, als ich 1951/52 als junger Assistent von Erlangen aus nach Oberwolfach kam. Ich gehöre zu den vielen Mathematikern in Deutschland, denen Sie nach dem Kriege Mut und Kraft geschenkt haben. Im Dezember 1953 haben Sie im Bourbaki-Seminar über meine Dissertation vorgetragen. So denke ich dankbar an vieles zurück.

5

Ihren frühen Einsatz für den Europäischen
Gedanken konnte ich bewundern, da ich bei
den Beratungen über das Europäische Studien-
buch dabei war. Für den Europäischen Kongress
in Paris 1992, und damit auch für die
European Mathematical Society, haben Sie
viel getan. Deshalb möchte ich Ihnen
heute auch im Namen der EMS herzlich
gratulieren und danken. Meine Zeit als
Präsident der EMS ist bald vorbei, am
31. 12. 94 scheide ich aus. Im Anschluß
an den Kongreß in Zürich trifft sich
der Council der EMS. Mein Nachfolger
wird dort gewählt.
Meine Frau und ich hoffen, daß wir Sie
und Ihre Frau bald einmal wiedersehen.

Nochmals ganz herzliche Glückwünsche

Ihr
F. Hirzebruch

Voici une traduction de cette lettre.

Thüringer Allee 127, D-53757 St. Augustin, le 3 juillet 1994

Cher Monsieur Cartan,

À l'occasion de votre 90e anniversaire, mon épouse et moi vous présentons nos félicitations les plus cordiales et souhaitons à vous et à votre épouse santé et bien-être. J'espère que cette lettre va vous parvenir à temps pour le 8 juillet. Je n'en suis pas sûr à cause de grèves dans les services postaux allemands.

Je me réjouis vivement que vous ayez accepté votre nomination comme membre honoraire de la Deutsche Mathematiker-Vereinigung et vous remercie très sincèrement pour les mots de remerciement à mon égard que vous avez mis dans votre lettre à Monsieur Grötschel et aussi pour avoir mentionné mon habilitation en 1955. Pour cette occasion j'avais demandé à Behnke comment je devais préparer mon exposé. Il m'avait répondu tout simplement : le doyen, qui était un pharmacien, doit le comprendre, et Cartan doit le trouver intéressant. Mon épouse et moi vous avons rencontré ainsi que votre épouse à de nombreuses reprises. Ce fut toujours une grande *joie pour nous. Nous pensons par exemple à notre rencontre à Dubna et à Moscou pour l'ICM 1966, lorsque vous avez été élu président de l'Union Mathématique Internationale et que votre action bénéfique pour l'UMI a commencé, notamment avec la préparation de l'ICM 1970 à Nice. Début août mon épouse et moi partons pour Zurich pour participer à l'ICM 1994. Juste avant se tiendra l'Assemblée générale de l'UMI à Lucerne, à laquelle je vais prendre part. J'espère que là-bas l'invitation pour que l'ICM se tienne à Berlin en 1998 sera acceptée. Heinrich Behnke a toujours dit qu'il faudra que le Congrès se tienne à nouveau en Allemagne (la dernière fois c'était à Heidelberg en 1904) et a été triste que l'invitation faite par l'Allemagne en 1966 n'ait pu se réaliser, puisque la première invitation en Union Soviétique a eu la priorité. Peut-être que maintenant, à l'occasion du 100e anniversaire de l'ICM, le tour de l'Allemagne viendra.*

Je ne sais pas si j'ai eu l'occasion de vous rencontrer lors de votre visite à Münster en 1947. Je vous ai pour sûr parlé pour la première fois lorsque, jeune assistant, j'ai fait le voyage d'Erlangen à Oberwolfach. Je fais partie du groupe nombreux de ces mathématiciens allemands à qui, après la guerre, vous avez insufflé enthousiasme et force. En décembre 1953 vous avez fait un exposé au séminaire Bourbaki sur ma thèse. J'ai donc beaucoup de pensées qui me viennent et pour lesquelles je vous suis reconnaissant.

J'ai admiré votre engagement précoce pour l'idéal européen alors que j'étais témoin des discussions sur le « Livret Européen de l'Étudiant ». Pour le Congrès Européen de Paris en 1992, et aussi pour la Société Mathématique Européenne, vous avez fait beaucoup. C'est pourquoi je voudrais aujourd'hui vous féliciter et vous remercier au nom de la SME. Mon temps comme président de la SME est bientôt terminé puisque le 31 décembre 1994 je vais quitter cette fonction. À la fin de l'ICM à Zurich se tient une réunion du Conseil de la SME. Mon successeur y sera élu.

Mon épouse et moi espérons vous rencontrer avec votre épouse dans un proche avenir.

Encore une fois nos meilleurs vœux de bonheur.

Bien à vous,

F. Hirzebruch

Les débuts de la Société Mathématique Européenne

Le Conseil Européen de Mathématiques (CEM) a ouvert la voie à la création de la Société Mathématique Européenne (SME). Le CEM s'est réuni régulièrement à Oberwolfach à l'initiative de Sir Michael Atiyah mais aucun Allemand n'était impliqué dans le fonctionnement du CEM.

La rencontre qui devait donner naissance à la SME s'est tenue en octobre 1990 à Madralin en Pologne, et ce ne fut pas une réunion facile, car il y avait parmi les délégués présents des vues divergentes sur la structure de la SME. Un des points de contentieux les plus sérieux portait sur le fait de savoir si la nouvelle société pourrait accepter des membres individuels ou être seulement une fédération de sociétés. La première journée, alors que la SME n'existait pas encore, s'est terminée dans une situation de tension dangereuse car aucun compromis ne semblait en vue. Cette soirée-là, jusque tard dans la nuit, Friedrich Hirzebruch, qui avait accepté le principe d'être le premier Président de la SME, a mené au succès la réunion de crise plutôt tendue qui s'est déroulée derrière des portes closes entre des tenants de positions contradictoires. C'est en tant que Président de la Société Mathématique de France que j'ai participé à cette réunion et ai été un des fauteurs de trouble. Le lendemain, la nouvelle société pouvait être créée avec des statuts garantissant un bon équilibre dans la gouvernance de la SME entre les membres individuels et les sociétés, un compromis qui demeure opérationnel encore aujourd'hui.

Grâce au leadership de Friedrich Hirzebruch, la SME s'est développée avec succès. Il fallait faire beaucoup de choses en peu de temps en profitant de la dynamique qui a accompagné la création de la société. Parmi les acquis remarquables de son mandat, on peut relever l'établissement du Premier Congrès Européen de

Mathématiques en 1992 et la construction des bases du *Journal of the European Mathematical Society* (JEMS), qui a finalement été créé en 1998.

À ma grande surprise, il m'a demandé de devenir son successeur comme Président de la SME en 1994. J'ai assumé cette fonction de 1995 à 1998, une autre dette que j'ai envers lui.

La longue amitié d'Hirzebruch envers Shiing Shen Chern

Friedrich Hirzebruch a partagé avec Shiing Shen Chern une longue amitié. Ils se sont rencontrés en 1953 mais ont eu ensuite de multiples occasions d'avoir des échanges substantiels.

Dans le livre qui a rassemblé des témoignages d'amitié à S.S. Chern à l'occasion de son centième anniversaire, il a écrit *« Shiing-Shen Chern, one of the greatest mathematicians of the 20th century, was for me a fatherly friend whom I owe very much. I knew him since 1953 and will always remember our meetings in Chicago, Princeton, Berkeley and Bonn. »*

Il a eu le sentiment qu'il ne pouvait prendre part aux conférences célébrant le centenaire de S.S. Chern qui se sont tenues en octobre 2011 au *Chern Institute* à l'université Nankai à Tianjin et en novembre 2011 au *Mathematical Sciences Research Institute* à Berkeley mais il a accepté immédiatement l'invitation que je lui ai fait parvenir pour participer à une célébration plus modeste qui s'est tenue à l'IHÉS le 17 novembre 2011. Il est venu avec son fils et sa belle-fille. Malheureusement sa chère épouse, Inge, que je tiens à remercier ici pour son amitié et le soutien apporté à mon épouse et à moi tout au long de ces années, n'a pu être du voyage à cause d'une blessure de dernière minute. Il a fait une conférence brillante sur les classes de Chern et a pu rencontrer à cette occasion Mae Chern, la fille de S.S. Chern. À la fin de sa conférence, il m'a dit *« I am afraid that this will be my last visit to Paris »*. Il est bien triste de constater aujourd'hui qu'il avait en effet raison.

Friedrich Hirzebruch à l'IHÉS le 17 novembre 2011

Quelques aspects de l'œuvre mathématique de F. Hirzebruch

Arnaud Beauville[1]

Hirzebruch-Riemann-Roch

En 1954, Friedrich Hirzebruch, âgé de 27 ans, annonce ce qu'on appelle maintenant le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch (HRR dans la suite). L'énoncé est le suivant : soit X une variété projective complexe (non singulière), de dimension n, et soit E un fibré vectoriel holomorphe sur X. On associe à E des invariants topologiques, les *classes de Chern* $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$, et des invariants holomorphes, les *espaces de cohomologie* $H^i(X, E)$. Le théorème HRR est l'égalité

$$\sum_i (-1)^i \dim H^i(X, E) = \int_X \operatorname{ch}(E) \operatorname{Todd}(X)$$

où $\operatorname{ch}(E)$ et $\operatorname{Todd}(X)$ sont des polynômes tout à fait explicites, à coefficients rationnels, en les classes de Chern de E et celles du fibré tangent T_X respectivement ; $\operatorname{ch}(E) \operatorname{Todd}(X)$ est donc une classe dans $H^*(X, \mathbb{Q})$, et le symbole $\int_X$ signifie simplement qu'on prend sa composante dans $H^{2n}(X, \mathbb{Q})$ et qu'on lui applique l'isomorphisme canonique $H^{2n}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$.

Dans beaucoup d'applications, des théorèmes assurent l'annulation de $H^i(X, E)$ pour $i > 0$; HRR donne alors une formule exacte pour la dimension de $H^0(X, E)$, qui est l'espace des *sections globales* (holomorphes) du fibré E, un outil essentiel de la géométrie algébrique.

Pourquoi « Riemann-Roch » ? Prenons pour X une courbe (= surface de Riemann) de genre g. Compte tenu de la dualité de Serre, HRR s'écrit dans ce cas

$$\dim H^0(X, E) - \dim H^0(X, E^* \otimes \Omega^1_X) = \deg(E) + 1 - g \ .$$

Lorsque E est un fibré de rang un, c'est le théorème classique de Riemann-Roch, l'outil fondamental de la théorie des surfaces de Riemann (si s est une section holomorphe non nulle de E et $p_1, \ldots, p_k \in X$ ses zéros, d'ordre $m_1, \ldots, m_k$, l'espace $H^0(X, E)$ s'interprète classiquement comme l'espace des fonctions méromorphes sur X ayant comme seuls pôles les p_i à l'ordre m_i au plus).

Pour $n = 2$, l'espace $H^1(X, E)$ n'a pas d'interprétation géométrique simple ; c'est pourquoi les géomètres italiens énoncent le « théorème de Riemann-Roch pour les surfaces » comme une inégalité

$$\dim H^0(X, E) + \dim H^0(X, E^* \otimes \Omega^2_X) \geqslant 1 + p_a + \frac{1}{2} \int_X \Big(c_1(E)^2 + c_1(E).c_1(X) \Big)$$

où p_a est le *genre arithmétique* de X.

Pour $n > 2$ il n'y a pas d'énoncé classique de ce type. C'est dire que HRR représente un progrès considérable – progrès qui a été rendu possible par l'introduction, toute récente à l'époque, de la cohomologie des faisceaux.

[1] Université de Nice, Laboratoire J.-A. Dieudonné, UMR 7351 du CNRS.

La démonstration de HRR est détaillée dans le beau livre [H]. Elle utilise des ingrédients très variés, et eux aussi tout nouveaux à l'époque : théorie de Hodge, théorie du cobordisme de Thom.

Extensions de HRR

Le théorème de HRR a eu un très grand retentissement. Il a connu de nombreuses généralisations, dont deux au moins ont eu une importance considérable.

• Le *théorème de Grothendieck-Riemann-Roch* [B-S] donne un énoncé analogue pour un *morphisme* $f : X \to Y$ propre de variétés non-singulières :

$$f_*(\mathrm{ch}(\mathrm{E})\mathrm{Todd}(X)) = \mathrm{ch} f_!(E)\mathrm{Todd}(Y)$$

où $f_!$ est « l'image directe en K-théorie ». Ce résultat plus général, valable sur un corps algébriquement clos quelconque, redonne HRR lorsque Y est un point. Comme souvent chez Grothendieck, l'introduction d'un formalisme adéquat simplifie la preuve, qui devient purement algébrique : on se ramène au cas où f est un plongement, puis, par éclatement, au cas où en outre X est une hypersurface dans Y. Notons que c'est à cette occasion que Grothendieck introduit la K-théorie $K(X)$ d'une variété algébrique, qui allait servir de modèle pour la K-théorie topologique d'Atiyah-Hirzebruch (voir ci-dessous).

• Le *théorème de l'indice* d'Atiyah-Singer [A-S] donne l'indice (= dimension du noyau moins celle du conoyau) d'un opérateur différentiel elliptique D entre deux fibrés vectoriels E, F sur une variété compacte M en termes d'invariants topologiques de D, E, F. Je l'énonce sans en définir les termes :

$$\mathrm{ind}(D) = \int_M \mathrm{ch}(D)\mathrm{Todd}(X) \ .$$

L'analogie avec HRR est évidente. En appliquant ce théorème à des opérateurs convenables on obtient HRR (sur une variété complexe compacte quelconque) ainsi que de nombreuses autres applications, en particulier des théorèmes de points fixes du type Lefschetz. La démonstration originale du théorème de l'indice (il y en a eu bien d'autres depuis) suivait de près celle de HRR par Hirzebruch, à base de cobordisme.

Ce n'est pas le lieu de recenser les très nombreux développements et applications du théorème de l'indice, certainement un des sommets mathématiques du 20$^{\mathrm{e}}$ siècle. En 1999 une conférence à Harvard était dédiée aux « fondateurs de la théorie de l'indice » [ABHS], que Hirzebruch appelle la « bande des quatre » : Atiyah, Bott, Hirzebruch, Singer.

La K-théorie topologique

De 1959 à 1962, Atiyah et Hirzebruch développent dans une série d'articles la K-théorie topologique $K(X)$ d'un espace topologique raisonnable X. Le théorème de périodicité de Bott, tout juste démontré, leur permet de construire une *théorie cohomologique extraordinaire* $\big(K^n(X)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$, qui vérifie tous les axiomes usuels de la cohomologie sauf celui qui décrit la cohomologie du point, et qui est de plus 2-périodique ($K^{n+2}(X) = K^n(X)$).

Les applications sont nombreuses et importantes. Citons notamment des résultats de divisibilité de certains invariants numériques : par exemple, pour une variété compacte M « spin » de dimension $8k+4$, un de ces invariants, le « $\hat{A}$-genre », est un entier pair ; pour $k=0$ cela équivaut à dire que la signature est divisible par 16, un théorème célèbre de Rohlin. Ces résultats ont des applications topologiques profondes, par exemple aux groupes d'homotopie stable des sphères.

Une autre application utilise la *suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch*, qui part de la cohomologie ordinaire et aboutit à la K-théorie. Atiyah et Hirzebruch prouvent que la classe de cohomologie d'un sous-espace analytique dans une variété complexe est annulée par les différentielles de cette suite spectrale. Ils en déduisent des exemples de classes de cohomologie de torsion, dans une variété projective, qui ne sont pas représentées par des cycles algébriques. Cela contredit la formulation originale de la conjecture de Hodge – on sait depuis lors qu'il faut formuler cette conjecture en cohomologie rationnelle et non pas en cohomologie entière.

Les surfaces modulaires de Hilbert

Dans les années 70 Hirzebruch se consacre à un sujet plus pointu, les *surfaces modulaires de Hilbert*. Les *formes modulaires de Hilbert*, étudiées par Hilbert et son élève Blumenthal, sont une généralisation naturelle des formes modulaires classiques. On fixe un entier $d > 0$ et l'on considère le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et son anneau d'entiers $\mathcal{O}_d$; on note $x \mapsto x'$ la conjugaison de $\mathcal{O}_d$. Soit $\mathbb{H}$ le demi-plan de Poincaré. Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d)$ opère sur $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ par

$$g \cdot (x,y) = \left(\frac{ax+b}{cx+d} \, , \, \frac{a'y+b'}{c'y+d'} \right) \quad \text{pour} \ \ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d) \ .$$

Une forme modulaire de Hilbert (de poids (p,q)) est une fonction holomorphe sur $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ qui vérifie

$$f(g \cdot (x,y)) = (cx+d)^p (c'y+d')^q f(x,y)$$

pour tout g dans $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d)$ (ou, plus généralement, dans un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d)$).

Comme les formes modulaires classiques, les formes de Hilbert s'interprètent comme des formes différentielles holomorphes d'un certain type sur le quotient $(\mathbb{H} \times \mathbb{H})/\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_d)$. Ce quotient est une surface algébrique, qui a deux défauts : elle est en général singulière (l'action n'est pas libre), et non compacte. En y ajoutant un certain nombre de points singuliers (« cusps ») on obtient une surface compacte X'_d. Hirzebruch construit alors une *résolution* de X'_d, c'est-à-dire une surface projective non-singulière X_d, munie d'un morphisme propre $X_d \to X'_d$ qui est un isomorphisme au-dessus de la partie non-singulière de X'_d. La construction, tout à fait explicite, fait intervenir le développement en fraction continuée de $\sqrt{d}$; elle donne des informations précieuses sur la surface X_d. Dans une série d'articles écrits seul ou avec différents collaborateurs (Van der Geer, Van de Ven, Zagier), Hirzebruch entreprend une étude très complète de la surface X_d, ses invariants numériques et sa géométrie.

Conclusion

En 1980 Hirzebruch fonde le Max-Planck-Institut für Mathematik de Bonn, qu'il va diriger pendant 15 ans. Cette activité va accaparer une grande partie de son temps ; il publiera néanmoins quelques jolis articles sur des sujets divers : construction de surfaces ayant des propriétés très particulières comme revêtement du plan projectif ramifié le long d'une réunion de droites, caractéristique d'Euler « orbifolde », genre elliptique, classes caractéristiques, application des théorèmes de l'indice à la théorie des nombres. Il écrit aussi une demi-douzaine de livres, rédactions de ses cours au MPI ou à l'université de Bonn.

Le rôle fondamental de Hirzebruch dans le développement des mathématiques allemandes et européennes sera discuté ailleurs. Mais on ne peut évoquer « Fritz » Hirzebruch sans mentionner sa courtoisie souriante, sa gentillesse et son attention aux autres – tout particulièrement aux jeunes mathématiciens. C'est une grande figure des mathématiques du 20^{e} siècle qui vient de nous quitter.

Références

[ABHS] *Papers dedicated to Atiyah, Bott, Hirzebruch and Singer*. Surveys in Differential Geometry, **7**. International Press, Somerville, MA, 2000.

[A-S] M. Atiyah, I. Singer : *The index of elliptic operators*. I, II, III : Ann. of Math. (2) **87** (1968), 484–604. IV, V : Ann. of Math. (2) **93** (1971), 119–149.

[B-S] A. Borel, J.-P. Serre : *Le théorème de Riemann-Roch*. Bull. Soc. Math. France **86** (1958), 97–136.

[H] F. Hirzebruch : *Topological methods in algebraic geometry*, 3rd edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

TRIBUNE LIBRE

Trop de contentement de soi

Yves Meyer

J'ai lu avec étonnement, dans le Monde du jeudi 25 octobre, un article de Benoît Floc'h, consacré à l'ÉNS-Cachan, à l'occasion du centenaire de cette école. Il y est écrit : *Ainsi tous les spécialistes des maths appliquées, méprisés ailleurs, sont venus ici. Et ils sont devenus des stars*. Cette phrase est attribuée à M. Pierre-Paul Zalio, directeur de l'ÉNS-Cachan. Comme je suis cité dans l'article du *Monde* peu après cette déclaration, un lecteur distrait pourrait penser que j'approuve ces remarques. Ce que semble avoir dit Pierre-Paul Zalio est tellement absurde que j'ai immédiatement écrit au journal « Le Monde » pour essayer de corriger ces bêtises. Ma lettre, en souffrance depuis trois semaines, ne sera probablement jamais publiée[1]. C'est pourquoi je veux présenter l'intégralité de cette lettre aux lecteurs de la SMF. La voici :

> Monsieur,
>
> J'ai lu avec intérêt l'article que vous avez consacré à l'ÉNS-Cachan dans *le Monde* du jeudi 25 octobre. Je voudrais vous signaler quelques inexactitudes. Tout d'abord les ÉNS de Fontenay et de Saint-Cloud y sont définies de façon incorrecte. Vous écrivez que « En créant l'école en 1912, l'État lui confie la formation des professeurs de l'enseignement technique (quand ceux du lycée dépendent d'Ulm et ceux du primaire dépendent de Fontenay et de Saint-Cloud) ». Or, en 1912, les enseignants de l'Enseignement Primaire étaient formés par les écoles normales d'instituteurs (aussi appelées écoles normales primaires). La tâche des ÉNS de Fontenay et de Saint-Cloud était, à cette époque, de former les professeurs des écoles normales d'instituteurs (et non les futurs instituteurs) et des écoles primaires supérieures, ainsi que les inspecteurs de l'enseignement primaire.
>
> Un second point gênant (mais qui apparaît dans votre article comme une citation des propos de Pierre-Paul Zalio) est la phrase : *Ainsi tous les spécialistes des maths appliquées, méprisés ailleurs, sont venus ici. Et ils sont devenus des stars*.
>
> Ce que semble dire Pierre-Paul Zalio est contestable. Il y a en France beaucoup de centres de mathématiques appliquées aussi importants que le

[1] En fait une version tronquée vient de paraître, ce 23 novembre, dans le blog du « Monde des lecteurs ».

CMLA de l'ÉNS-Cachan. L'INRIA, créé en 1980 par Jacques-Louis Lions, est le plus grand centre de recherche de mathématiques appliquées en France. Le laboratoire Jacques-Louis Lions de l'université Paris-VI est excellent. Et que dire du CEREMADE de l'université Paris-Dauphine, du centre de mathématiques appliquées de l'École polytechnique et de tant d'autres ? On ne peut donc prétendre que « tous les spécialistes des maths appliquées, méprisés ailleurs, sont venus ici. Et ils sont devenus des stars. » Dieu merci, mes collègues du CMLA ne se prennent pas pour Zinédine Zidane ! Nous ne sommes pas des stars, nous sommes de simples artisans. À la mort de son ami Jean Delsarte, André Weil [2] cita (sans les traduire) ces deux vers de Pablo Neruda[3] :

Sufro de aquel amigo que murió
y que era como yo buen carpintero.

Je pleure la mort d'un ami
qui, comme moi, était un bon menuisier.

[2] Enseignement mathématique, (Genève) **18** (1972), p.115.
[3] Estravagario (1958).

LIVRES

La Symétrie ou les maths au clair de Lune
Marcus du Sautoy, traduit de l'anglais par Raymond Clarinard
Editions Héloïse d'Ormesson, 2012, 528 p., ISBN 2350871843, 25,05€

Théorème vivant
Cédric Villani
Grasset, 2012, 288 p., ISBN 2246798825, 19€

Deux livres qui poursuivent le même but, donner à voir le travail du mathématicien, en racontant des histoires.

Marcus du Sautoy raconte une grande histoire, celle de la symétrie. Même si toutes les mathématiques ne se limitent pas à la symétrie, celle-ci en imprègne une grande part, si bien que du Sautoy parcourt un champ très vaste. En même temps, le livre parle de son histoire personnelle. Comment, écolier, il a été poussé vers les mathématiques. Comment, à vingt ans, il a frappé à la porte de l'équipe de théorie des groupes finis de Cambridge. Comment, entre août 2005 et juillet 2006, avance mois après mois son travail sur les groupes dont la suite de Jordan-Hölder ne comporte que des groupes cycliques de même ordre premier.

J'en étais au dixième chapitre (intitulé Mai : exploitation) de cet ouvrage quand le livre de Cédric Villani est sorti. Ma libraire me l'a recommandé, je me suis laissé tenter. Villani raconte l'histoire d'un théorème, de sa gestation jusqu'à sa parution et à la reconnaissance qui en résulte. Au fil des jours, l'excitation, les doutes, les rencontres déterminantes. Tout cela interfère avec le quotidien, la famille, les autres tâches professionnelles. À l'appui de ses dires, Villani fournit des pièces à conviction : messages électroniques échangés avec son co-auteur Clément Mouhot, énoncés de théorèmes. Au passage, de nombreuses notes historiques rédigées avec soin, une galerie de personnages, de lieux. J'ai lu le livre d'une traite, emporté par le suspense. Et à la fin, j'ai retrouvé la sensation du lecteur qui arrive au bout d'un bon roman qui l'a tenu en haleine : déception que ce soit déjà fini.

J'ai pu reprendre le du Sautoy là où je l'avais laissé : comment un ingénieur, Marcel Golay, découvre un procédé de codage qui fait apparaître un réseau remarquable en dimension 24. C'est à partir de là que la grande histoire de la symétrie s'accélère, que le suspense s'introduit dans l'essai de du Sautoy. C'est que l'auteur en a côtoyé des acteurs, qui constituent une galerie de portraits hauts en couleur. Elle se termine en beauté, avec la classification des groupes finis simples, et le dévoilement d'un pan du mystère du « clair de lune », qui ouvre de riches perspectives.

À vos proches qui vous posent des questions sur le métier de mathématicien, recommandez les deux livres, s'il vous plaît. Ils y trouveront des réponses, et en sus, des éléments de culture mathématique, présentés de façon claire et concise sous la plume de Villani, et, sous celle de du Sautoy avec une érudition merveilleuse. Le Villani se lit comme un roman. Le du Sautoy mérite de s'y replonger. On peut piocher quelques pages au hasard, on n'est jamais déçu. Je compte l'utiliser comme une référence et le recommander aux jeunes qui m'entourent. Il donne à penser.

Mais il y a davantage. Le travail étant inséparable du reste de l'existence, les auteurs se livrent comme dans aucun autre ouvrage sur les mathématiques. L'émotion est sincère. Annus mirabilis qui nous offre deux textes d'une telle qualité.

On trouve déjà en ligne des recensions de ces deux livres :
`http://images.math.cnrs.fr/Revue-de-presse-fevrier-2012.html`
`http://images.math.cnrs.fr/Theoreme-vivant.html`

ainsi que des éléments complémentaires
`http://findingmoonshine.blogspot.fr/`
`http://cedricvillani.org/for-mathematicians/`

Pierre Pansu
Université Paris-Sud