SOMMAIRE DU N° 140

SMF

Mot du Président ... 3

MATHÉMATIQUES

La conjecture de Goldbach ternaire, *H. A. Helfgott* ... 5
Petits écarts entre nombres premiers et polymath, *R. de la Bretèche* ... 19
La conjecture de Waldhausen est démontrée ! *N. Bergeron* ... 31
Sur le théorème de Noether, *A. Guichardet* ... 38

ENSEIGNEMENT

Une expérience de MOOC, *Une interview d'A. Bodin et F. Recher* ... 57
La Licence de Mathématiques, visions croisées en Francophonie, *J.-P. Borel* ... 60

PRIX ET DISTINCTIONS

Michèle Artigue et la médaille Felix Klein, *D. Perrin* ... 69

CARNET

Marc Yor, *J.-F. Le Gall* ... 73
Jean Jacques Moreau, *M. Valadier* ... 75

INFORMATIONS

Journée « Sciences et Médias » au CNAM, *R. Farhi, P. Pansu* ... 79
Où en est le CIMPA ?, *Une interview de C. Cibils* ... 84
La Chaire Jean-Morlet et le CIRM, *P. Foulon* ... 91
Session 2013 du CNU, section 25 ... 93
Quelques nouvelles de l'Insmi, *C. Sorger* ... 99

AUTOUR DU FILM « COMMENT J'AI DÉTESTÉ LES MATHS »

Une démonstration pointilliste, *B. Egger* ... 103
Un visiteur au pays des mathématiques, *A. Bonami* ... 105

LIVRES ... 109

Éditorial

Voici donc le numéro d'avril dont j'ai la charge avec le comité de rédaction, assurant la transition de la rédaction en chef pour deux numéros avant de passer la main à Boris Adamczewski. La SMF a souhaité réfléchir à une nouvelle formule pour la Gazette *et mis en place une commission de réflexion sous la direction de V. Berthé. Un questionnaire destiné à recueillir les avis et souhaits des lecteurs a été mis à disposition sur le site de la SMF ; les réponses apportées pourront ainsi éclairer les comités de rédaction et de réflexion sur ce que vous souhaitez. Le numéro d'avril est dans la continuité de ceux préparés par mes prédécesseurs Frédéric Patras et San Vu Ngoc à qui je rends hommage mais il a aussi beaucoup bénéficié des suggestions du comité de réflexion. Le numéro commence avec trois articles sur les mathématiques de notre temps et continue avec une présentation moderne du théorème de Noether. Comme vous le savez sans doute, de beaux résultats sont obtenus en théorie des nombres. H.A. Helfgott présente de l'intérieur ses travaux récents, R. de la Bretèche analyse la nouvelle démarche de Polymath8 initiée par T. Tao. La topologie est aussi présente avec un court article de N. Bergeron.*

Le lecteur retrouvera ensuite la plupart de ses rubriques habituelles, la rubrique enseignement avec une interview sur les MOOC (Massive Open Online Course) et un article de J.-P. Borel sur la francophonie. Dans la rubrique information, le lecteur trouvera un texte du nouveau directeur de l'INSMI C. Sorger, une interview du directeur du CIMPA C. Cibils, un texte du directeur du CIRM P. Foulon sur la chaire Morlet, un compte-rendu de la journée Sciences et Médias et un compte-rendu du CNU 25 complétant celui du CNU 26 publié dans le numéro de janvier. La rubrique « Prix et distinctions » présente la récente lauréate du prix Abel Klein Michèle Artigue. Le carnet rend hommage à deux mathématiciens récemment décédés. La communauté a été très affectée par le décès du probabiliste Marc Yor. La SMAI et la SMF ont décidé d'un numéro spécial qui lui sera dédié. Dans l'immédiat J.-F. Le Gall qui fut l'un de ses élèves lui rend un premier hommage. Le mécanicien Jean Jacques Moreau est peut-être moins connu des mathématiciens mais ce fut je cite ici Ivar Ekeland « un grand monsieur ». M. Valadier qui fut son collègue à Montpellier lui rend hommage. Enfin nous présentons plusieurs recensions de livres, et c'est une nouveauté, la « recension » du film de Olivier Peyon par Aline Bonami et Bernard Egger.

À partir du prochain numéro nous espérons mettre en route une coopération étroite avec Image des Mathématiques (IdM). Plusieurs lauréats des prix de l'académie ont accepté de se lancer dans l'expérience de rédiger simultanément deux textes, l'un pour la Gazette *et l'autre pour IdM, avec l'idée d'atteindre des publics complémentaires.*

Au moment de cette transition, je voudrais remercier tout particulièrement V. Berthé, A. Bonami et P. Pansu pour leur aide. Rappelons que c'est Claire Ropartz qui assure la composition de ce numéro et que Frédérique Petit assure avec dévouement la tâche de relectrice.

— Bernard Helffer

SMF

Mot du Président

Le 24 janvier dernier, la SMF réunissait les responsables des masters enseignement, dit MEEF, pour faire le point sur la mise en place de ces formations ainsi que leur articulation avec les ESPE[1]. La réforme en cours a déjà permis de voir les effectifs étudiants remonter de façon substantielle, c'est une très bonne nouvelle. Si les difficultés que rencontrent les collègues varient d'une université à l'autre, une attente forte a émergé clairement : la mise en place d'un mécanisme cohérent et unifié qui permette aux étudiants n'ayant pas obtenu le Capes à l'issue de la première année de master de pouvoir bénéficier d'une année supplémentaire pour s'y préparer de nouveau et de façon exclusive, même s'ils ont déjà validé le M1. Cette possibilité existe dans certaines filières, on pense notamment à la première année de médecine et aux classes préparatoires; elle a aussi montré son efficacité par le passé en offrant à de futurs enseignants une période de préparation suffisante et adaptée à leur parcours personnel. De très bonnes raisons pour militer en ce sens dans les mois à venir. La SMF a réuni aussi fin mars les directeurs de départements & UFR de mathématiques afin de faire un bilan le plus précis possible des évolutions récentes sur le terrain ; nous vous tiendrons informés rapidement des discussions et premiers enseignements à tirer de cette journée.

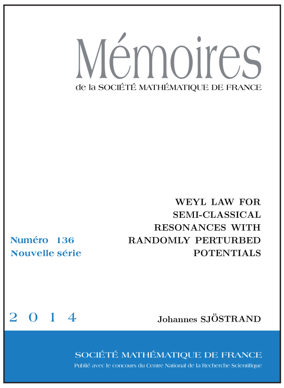
Côté publications, le premier fascicule 2014 des « Mémoires de la SMF » est paru et accessible par voie électronique. La SMF confirme ainsi sa volonté de répondre aux attentes et pratiques de ses lecteurs et aux évolutions du monde de l'édition.

En collaboration étroite avec la SMAI, la SFdS, la Société Informatique de France (SIF) et l'ONISEP, la SMF participe à la réalisation d'une brochure sur les métiers des mathématiques et de l'informatique : un outil essentiel pour attirer des jeunes vers nos filières dont les débouchés sont variés mais méconnus du public. Cette brochure remplacera le « Zoom sur les métiers des mathématiques » paru en 2007, sortie prévue début 2015 !

Pour conclure, je tiens à évoquer le Prix Audin qui vient d'être décerné à Kaoutar Ghomari et San Vũ Ngọc, rédacteur en chef de la *Gazette* jusqu'en septembre dernier. Félicitation aux deux lauréats dont la collaboration a séduit le jury !

Le 1er avril 2014
Marc Peigné

1 Écoles Supérieures du Professorat et de l'Éducation



Mémoire 136

Weyl law for semi-classical resonances with randomly perturbed potentials

J. Sjöstrand

We consider semi-classical Schrödinger operators with potentials supported in a bounded strictly convex subset O of R^n with smooth boundary. Letting h denote the semi-classical parameter, we consider classes of small random perturbations and show that with probability very close to 1, the number of resonances in rectangles [a,b]-i[0, $ch^{2/3}$[, is equal to the number of eigenvalues in [a,b] of the Dirichlet realization of the unperturbed operator in O up to a small remainder.

(Loi de Weyl pour des résonances semi-classiques associées aux potentiels)
On considère des opérateurs de Schrödinger dont les potentiels ont leur supports dans un ensemble strictement convexe à bord lisse O de R^n. *En désignant par h le paramètre semi-classique, nous considérons des classes de petites perturbations aléatoires et montrons qu'avec une probabilité très proche de 1, le nombre de résonances dans des rectangles [a,b]-i[0,* $ch^{2/3}$*[est égal (à un petit reste près) au nombre de valeurs propres dans [a,b] de la réalisation de Dirichlet de l'opérateur dans O.*

ISBN : 978-2-85629-780-3

prix public : 35 € - prix membre : 24 €
frais de port non compris

Société Mathématique de France

SMF

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F-75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

MATHÉMATIQUES

La conjecture de Goldbach ternaire

Harald Andrés Helfgott
traduit par Margaret Bilu, revu par l'auteur

1. Histoire

Léonard Euler – l'un des plus grands mathématiciens du dix-huitième siècle, et même de tous les temps – et son ami proche, l'amateur polymathe Christian Goldbach, entretenaient une correspondance régulière et abondante. Goldbach a émis une hypothèse sur les nombres premiers, et Euler l'a rapidement réduite à la conjecture suivante, que, disait-il, Goldbach lui avait déjà soumise : chaque nombre entier strictement positif peut être écrit comme la somme d'au plus trois nombres premiers.

De nos jours, nous dirions plutôt « tout nombre entier supérieur ou égal à 2 », vu que nous ne considérons plus 1 comme un nombre premier. De plus, de nos jours la conjecture a été divisée en deux :

– la conjecture de Goldbach *faible*, ou ternaire, dit que tout nombre entier impair supérieur ou égal à 7 peut s'écrire comme la somme de trois nombres premiers ;

– la conjecture de Goldbach *forte*, ou binaire, dit que chaque nombre entier pair supérieur ou égal à 4 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.

Comme leurs noms l'indiquent, la conjecture forte implique la conjecture faible (de manière immédiate : enlevez 3 à votre nombre entier impair n, et ensuite exprimez $n-3$ comme la somme de deux nombres premiers).

Je renvoie à [Dic66, Vol. 1, Ch. XVIII] pour les débuts de ce sujet. En résumé, Descartes a posé une version de ces conjectures dans un manuscrit posthume[1] ; Waring semble avoir posé lui-même les conjectures à la fin du dix-huitième siècle ; le dix-neuvième siècle a vu quelques travaux calculatoires (des vérifications de la conjecture pour de petits entiers, à la main !) mais peu de progrès réels.

La conjecture forte reste hors d'atteinte. Il n'y a pas longtemps – ma prépublication [Hela] est parue le 13 mai 2013 – j'ai prouvé la conjecture de Goldbach faible.

[1] L'assertion de Descartes est « Sed & omnis numerus par fit ex uno vel duobus vel tribus primis. ». [Dic66] donne la traduction « Tout nombre pair est la somme d'un, deux ou trois nombres premiers. » La forme de cet énoncé semble étrange, puisque l'énoncé pour les nombres pairs implique immédiatement le même énoncé pour les nombres impairs. (Merci à J. Brandes et R. Vaughan pour leurs commentaires sur la traduction, qui est apparemment correcte.) Il s'agit d'une observation faite par Descartes en passant, au milieu d'un passage sur les sommes de nombres polynomiaux.

La preuve se construit sur les avancées obtenues au début du vingtième siècle par Hardy, Littlewood et Vinogradov. En 1937, Vinogradov a montré [Vin37] que la conjecture est vraie pour tous les entiers impairs supérieurs à une certaine constante C. Hardy et Littlewood [HL16] avaient montré la même chose en supposant l'hypothèse de Riemann généralisée ; j'en reparlerai plus bas. Depuis Vinogradov, la constante C a été spécifiée et progressivement améliorée, mais la meilleure (c'est-à-dire la plus petite) valeur disponible pour C était $C = e^{3100} > 10^{1346}$ (Liu-Wang [LW02]), ce qui était bien trop grand. Puisque 10^{110} est plus grand que le nombre estimé de protons dans la Voie lactée multiplié par le nombre de picosecondes depuis le Big Bang, il n'y aurait aucun espoir de vérifier même les premiers 10^{200} cas à l'ordinateur (oui, même si on était un dictateur cosmique utilisant la galaxie comme un ordinateur hautement parallèle) !

J'ai ramené C à 10^{29} en mai 2013. D. Platt et moi avions vérifié la conjecture pour tous les nombres impairs jusqu'à $8,8 \times 10^{30}$ par ordinateur (et nous aurions pu aller plus loin), et c'est la fin de l'histoire.

(J'ai réduit C à 10^{27} en décembre 2013. La vérification de la conjecture ternaire de Goldbach pour tout $n \leqslant 10^{27}$ impair peut être refaite à la maison durant le weekend ; nous parlerons de la méthode vers la fin de l'article.)

Il est bien sûr normal que nous passions en revue quelques-unes des avancées les plus importantes entre l'époque de Vinogradov et la nôtre. En 1933, Schnirelmann a prouvé [Sch33] que tout nombre entier $n > 1$ peut être écrit comme la somme d'au plus K nombres premiers, où K était une constante non spécifiée. Il s'agit d'un des travaux précurseurs de la combinatoire additive. En 1969, Klimov a été le premier à donner une valeur à la constante ($K = 6 \cdot 10^9$) ; puis il l'a améliorée en $K = 115$ (avec G. Z. Piltay et T. A. Sheptickaja) et $K = 55$. Par la suite, il y a eu des résultats de Vaughan [Vau77a] ($K = 27$), Deshouillers [Des77] ($K = 26$) et Riesel-Vaughan [RV83] ($K = 19$).

Ramaré a demontré en 1995 que tout nombre pair $n > 1$ est la somme d'au plus 6 nombres premiers [Ram95] ; ses méthodes sont plutôt dans la tradition de Vinogradov que dans celle de Schnirelmann. En 2012, Tao a prouvé [Tao] que tout nombre impair $n > 1$ est la somme d'au plus 5 nombres premiers.

Il y a eu d'autres lignes d'attaque vers la conjecture forte. En utilisant des idées proches de celles de Vinogradov, Estermann [Est] a prouvé que presque tout nombre pair (c'est-à-dire, un sous-ensemble de densité 1 dans l'ensemble des nombres pairs) peut être écrit comme la somme de deux nombres premiers. En 1973, J.-R. Chen a montré [Che73] que tout nombre pair n plus grand qu'une certaine constante peut être écrit comme la somme d'un nombre premier et du produit d'au plus deux nombres premiers ($n = p_1 + p_2$ ou $n = p_1 + p_2 p_3$). Par ailleurs, J.-R. Chen est le même qui, avec T.-Z. Wang, est responsable des meilleures bornes sur C (pour Goldbach ternaire) avant Liu et Wang : $C = \exp(\exp(11.503)) < 4 \cdot 10^{43000}$ [CW89] et $C = \exp(\exp(9.715)) < 6 \cdot 10^{7193}$ [CW96].

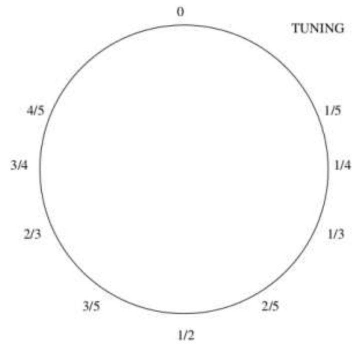
Qu'y a-t-il dans la preuve ? Faisons d'abord un pas en arrière et examinons le cadre général de la méthode du cercle, introduite par Hardy et Littlewood.

2. La méthode du cercle : analyse de Fourier sur les entiers

L'analyse de Fourier est quelque chose que nous pratiquons à chaque fois que nous essayons de capter une chaîne de radio : il y a un signal, que nous décomposons en ses contributions de diverses fréquences. En langage mathématique, on a une fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ (c'est-à-dire une fonction d'une seule variable réelle ; pour la radio, cette variable est le temps) et on définit la *transformée de Fourier* $\widehat{f} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ par $\widehat{f}(r) = \int_{\mathbf{R}} f(x)e(-xr)\mathrm{d}x$, avec la notation $e(t) = e^{2\pi i t}$. Alors, comme on l'apprend dans tout cours d'analyse de Fourier, $f(x) = \int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(r)e(xr)\mathrm{d}x$, à condition que f décroisse assez rapidement et se comporte bien par ailleurs. (C'est la « formule d'inversion de Fourier ».)

En d'autres mots, $x \mapsto f(x)$ a été décomposée en une somme de fonctions exponentielles (complexes), la fonction exponentielle (complexe) $x \mapsto e(xr)$ étant présente avec une « force » $\widehat{f}(r)$. Pour revenir à l'exemple de la radio : $\widehat{f}(r)$ est grand lorsque r est proche de la fréquence d'une chaîne de radio, et petit sinon. (Ce que reçoit votre radio, c'est une superposition f de ce que transmettent toutes les stations ; le travail de votre récepteur radio est précisément de retrouver la contribution des fréquences r autour d'un r_0 donné.)

Nous pouvons faire la même chose si f est une fonction $f : \mathbf{Z} \mapsto \mathbf{C}$. En fait, dans ce cas c'est plus simple, $\widehat{f}$ étant définie par une somme plutôt que par une intégrale : $\widehat{f}(\alpha) = \sum_n f(n)e(-\alpha n)$. La transformée $\widehat{f}$ est une fonction $\widehat{f} : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \mapsto \mathbf{C}$. (Nous sommes dans le monde dual à celui d'un cours de licence, où la fonction f est 1-périodique – c'est-à-dire que f est une fonction $f : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \mapsto \mathbf{C}$ – et sa transformée est une suite $\{a_n\}$, c'est-à-dire, une fonction $\widehat{f} : \mathbf{Z} \mapsto \mathbf{C}$.) Topologiquement, $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est un cercle ; c'est exactement la même chose que de dire que, puisque cela ne change rien d'ajouter ou de soustraire 1 à notre fréquence, nous pourrions aussi bien laisser le petit indicateur de fréquence de notre radio se promener le long d'un cercle gradué par des nombres entre 0 et 1, plutôt que sur (un segment de) la droite réelle (comme sur la vraie radio sur mon bureau). C'est de là que vient l'expression « méthode du cercle ».



La radio du théoricien des nombres

La décomposition de f ressemble maintenant à la chose suivante : $f(n) = \int_0^1 \widehat{f}(\alpha)e(\alpha n)\mathrm{d}\alpha$, à condition que f décroisse suffisamment vite.

En quoi est-ce intéressant ? La transformée de Fourier est utile de manière immédiate quand on travaille sur des problèmes additifs, comme les conjectures de Goldbach. La raison en est que la transformée du produit de convolution de

FIG. 1. Le duo Hardy-Littlewood et I. M. Vinogradov

deux fonctions est égale au produit des transformées. Rappelons que le *produit de convolution (additif)* de $f, g : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{C}$ est défini par

$$(f * g)(n) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} f(m) g(n-m).$$

Il apparaît alors directement que $(f * g)(n)$ ne peut être non-nul que si n peut être écrit sous la forme $n = m_1 + m_2$ pour m_1 et m_2 tels que $f(m_1)$ et $g(m_2)$ soient non nuls. De même, $(f * g * h)(n)$ ne peut être non-nul que si n peut être écrit sous la forme $n = m_1 + m_2 + m_3$ pour m_1, m_2, m_3 tels que $f(m_1)$, $g(m_2)$ et $h(m_3)$ soient non nuls. Ceci nous suggère, pour étudier le problème de Goldbach ternaire, de définir les fonctions f, g, h de telle sorte qu'elles prennent des valeurs non-nulles seulement aux nombres premiers.

Hardy et Littlewood avaient défini $f(n) = g(n) = h(n) = 0$ pour n non-premier (ou n nul, ou n négatif) et $f(n) = g(n) = h(n) = (\log n) e^{n/N}$ pour n premier (où N est un paramètre qui sera fixé ultérieurement). Le facteur $e^{-n/N}$ est là pour fournir une « décroissance rapide », de sorte que tout converge ; comme nous le verrons plus tard, le choix par Hardy et Littlewood de la fonction $e^{-n/N}$ (plutôt qu'une autre fonction à décroissance rapide) est en fait très intelligent, même s'il n'est pas tout-à-fait le meilleur possible. Le facteur $\log n$ est là pour des raisons techniques (schématiquement, il se trouve que cela a du sens de pondérer un nombre premier p par $\log p$ parce qu'il y a à peu près un nombre premier parmi $\log p$ entiers aléatoires de taille proche de celle de p).

On voit que $(f * g * h)(n) \neq 0$ si et seulement si n peut être écrit comme une somme de trois nombres premiers. Notre objectif est donc de montrer que $(f * g * h)(n)$ (c'est-à-dire $f * f * f$) est non-nulle pour tout n supérieur à une constante. Puisque la transformée du produit de convolution est égale au produit des transformées,

$$(f * g * h)(n) = \int_0^1 \widehat{f * g * h}(\alpha) e(\alpha n) \mathrm{d}\alpha = \int_0^1 ((\widehat{f} \cdot \widehat{g} \cdot \widehat{h})(\alpha)) e(\alpha n) \mathrm{d}\alpha.$$

Notre but est donc de montrer que l'intégrale $\int_0^1((\widehat{f}\cdot\widehat{g}\cdot\widehat{h})(\alpha))e(\alpha n)d\alpha = \int_0^1(\widehat{f}(\alpha))^3 e(\alpha n)d\alpha$ est non-nulle.

Il se trouve que $\widehat{f}(\alpha)$ est particulièrement grand quand α est proche d'un rationnel à petit dénominateur ; c'est comme s'il y avait vraiment des chaînes de radio qui transmettaient aux fréquences (à petit dénominateur) indiquées sur le dessin ci-dessus : quand l'indicateur est proche de l'une d'entre elles, il y a un $\widehat{f}(\alpha)$ clair et sonore, et quand nous sommes loin d'elles, nous ne pouvons entendre qu'un petit bourdonnement. Cela suggère la stratégie suivante : on estime $\widehat{f}(\alpha)$ pour tous les α compris dans des petits arcs de cercle autour des rationnels à petit dénominateur (les *arcs majeurs*, appelés ainsi parce que leur contribution est majeure, malgré leur petitesse) ; on borne $\widehat{f}(\alpha)$ pour α en dehors des arcs majeurs (tout ce qui est en dehors des arcs majeurs est appelé *arcs mineurs*) ; puis on montre que la contribution des arcs mineurs à l'intégrale est plus petite en valeur absolue que la contribution des arcs majeurs, forçant ainsi l'intégrale $\int_0^1(\widehat{f}(\alpha))^3 e(\alpha n)d\alpha$ à être non-nulle.

C'est cette stratégie générale que l'on appelle la *méthode du cercle*. Hardy et Littlewood l'ont introduite pour traiter une grande variété de problèmes additifs ; par exemple, cela faisait aussi partie de leur approche du problème de Waring sur les entiers qui sont sommes de puissances k-ièmes d'entiers. Cela a été repris par Vinogradov, qui a été le premier à donner de bonnes bornes inconditionnelles sur $\widehat{f}(\alpha)$ pour α appartenant aux arcs mineurs (c'était considéré comme vraiment remarquable à l'époque). La méthode du cercle est aussi ma stratégie générale : ce que j'ai fait est de donner des estimations bien meilleures sur les arcs majeurs et mineurs que celles qui étaient disponibles précédemment, pour f, g et h choisies avec grand soin.

(Tant qu'on y est, on peut essayer de traiter la conjecture de Goldbach binaire, ou forte, avec la méthode du cercle, mais on se heurte très vite à un mur : le « bruit » qui vient des arcs mineurs dépasse largement la contribution des arcs majeurs. C'est bien expliqué dans un article du blog de Terry Tao.)

3. Fonctions L de Dirichlet et leurs zéros

Avant de commencer à travailler sur les arcs majeurs, nous devons parler de fonctions L. Il y a d'abord la fonction zêta $\zeta(s)$, étudiée pour la première fois pour s complexe par Riemann, à qui elle doit son nom. Elle est donnée par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ quand la partie réelle $\Re(s)$ de s est strictement supérieure à 1. Pour $\Re(s) \leqslant 1$ la série diverge, mais la fonction peut être définie (de manière unique) sur tout le plan complexe par prolongement analytique, avec un pôle simple en $s = 1$.

De manière analogue, il y a les fonctions L de Dirichlet, définies par $L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$ pour $\Re(s) > 1$, et par prolongement analytique pour $\Re(s) \leqslant 1$. Ici χ est n'importe quel caractère de Dirichlet ; pour tout χ fixé, $L(s,\chi)$ est une fonction de s. Un caractère de Dirichlet χ (modulo q) est simplement une fonction $\chi : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{C}$ de période q (c'est-à-dire que $\chi(n) = \chi(n+q)$ pour tout n) qui de plus est multiplicative ($\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ pour tout a, b) et vérifie $\chi(n) = 0$ dès que n et q ne sont pas premiers entre eux. (Si on veut le dire de manière sophistiquée, c'est un caractère de $(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^*$ relevé à $\mathbf{Z}$.)

Un zéro d'une fonction f est simplement un $s \in \mathbf{C}$ tel que $f(s) = 0$. Un zéro non-trivial de $\zeta(s)$, ou de $L(s,\chi)$, est un zéro de $\zeta(s)$, ou de $L(s,\chi)$, tel que $0 < \Re(s) < 1$. (Les autres zéros sont dits triviaux car il est facile de dire où ils sont (à savoir, en des entiers négatifs, ou parfois en zéro).) L'hypothèse de Riemann dit que tous les zéros non-triviaux de la fonction zêta de Riemann « se trouvent sur la droite critique », ce qui veut dire qu'ils vérifient $\Re(s) = 1/2$. L'hypothèse de Riemann généralisée pour les fonctions L de Dirichlet dit que, pour tout caractère de Dirichlet χ, tout zéro non-trivial de $L(s,\chi)$ vérifie $\Re(s) = 1/2$.

Puisque l'hypothèse de Riemann (RH) et l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH) n'ont pas été prouvées, tout résultat qui est démontré en les utilisant sera *conditionnel* ; nous voulons prouver des résultats inconditionnels. Peuvent en effet être démontrés, et utilisés, des résultats partiels dans la direction de GRH. Ces résultats sont de deux types.

– Régions sans zéros. Déjà depuis la fin du dix-neuvième siècle (de la Vallée Poussin) nous savons qu'il y a des régions en forme de sablier (plus précisément, de la forme $\frac{c}{\log t} \leqslant \sigma \leqslant 1 - \frac{c}{\log t}$, où c est une constante et où on écrit $s = \sigma + it$) en dehors desquelles il ne peut pas y avoir de zéros non-triviaux.

– Vérifications finies de GRH. Il est possible de (demander à l'ordinateur de) prouver des petits morceaux finis de GRH, en vérifiant que tous les zéros non-triviaux d'une fonction L donnée de partie imaginaire inférieure à une certaine constante H se trouvent sur la droite critique $\Re(s) = 1/2$.

La plupart des travaux à ce jour suivent la première alternative. J'ai choisi la deuxième, ce qui a eu des conséquences sur la manière précise dont j'ai défini les arcs majeurs et mineurs : j'ai obtenu des résultats très précis sur les arcs majeurs, mais j'ai dû les définir pour qu'ils soient en très petit nombre et très étroits, car autrement la méthode n'aurait pas fonctionné. Cela veut dire que les méthodes pour les arcs mineurs devaient être particulièrement performantes, vu qu'il leur restait une partie du cercle particulièrement grande à traiter.

Regardons plus précisément comment nous pouvons nous occuper des arcs majeurs en utilisant des résultats partiels vers GRH, et en particulier, des vérifications finies de GRH.

4. Estimations d'arcs majeurs

Rappelons que nous voulons estimer des sommes du type $\widehat{f}(\alpha) = \sum f(n)e(-\alpha n)$, où $f(n)$ est quelque chose comme (disons) $(\log n)e^{-n/x}$ quand n est un nombre premier, et 0 sinon. Modifions cela juste un peu : nous allons en fait estimer $S_\eta(\alpha, x) = \sum \Lambda(n)e(\alpha n)\eta(n/x)$, où Λ est la *fonction de von Mangoldt* : $\Lambda(n) = \log p$ si n est une puissance p^k, $k \geqslant 1$, d'un nombre premier, et $\Lambda(n) = 0$ sinon. (L'utilisation de α plutôt que $-\alpha$ est juste une question de tradition, de même que l'utilisation de la lettre S (comme « somme ») ; cependant, l'utilisation de $\Lambda(n)$ plutôt que juste $\log p$ simplifie en fait vraiment les choses quand on a affaire à ce qu'on appelle des formules explicites, ce que nous allons voir dans un instant.) Ici $\eta(t)$ est une fonction à décroissance rapide ; cela peut être e^{-t}, comme dans les travaux de Hardy et Littlewood, ou (comme dans mon travail) quelque chose d'autre. Cela pourrait même être juste la « troncature brutale » $1_{[0,1]}(t)$, définie comme valant 1 quand $t \in [0,1]$ et 0 sinon ; cela marcherait pour les arcs mineurs, mais, comme nous allons le voir, c'est une mauvaise idée en ce qui concerne les arcs majeurs.)

Supposons que α appartient à un arc majeur, ce qui veut dire qu'on peut écrire $\alpha = a/q + \delta/x$ pour un certain a/q (où q est petit) et un certain δ (avec $|\delta|$ petit). Nous pouvons exprimer $S_\eta(\alpha, x)$ comme une combinaison linéaire de termes de la forme $S_{\eta,\chi}(\delta/x, x)$, où

$$S_{\eta,\chi}\left(\frac{\delta}{x}, x\right) = \sum \Lambda(n)\chi(n)e\left(\frac{\delta n}{x}\right)\eta\left(\frac{n}{x}\right),$$

et χ parcourt les caractères de Dirichlet modulo q.

Pourquoi ces sommes $S_{\eta,\chi}$ sont-elles mieux que les sommes plus simples S_η ? L'argument a pris la forme δ/x, alors qu'avant c'était α. Ici δ est petit, inférieur à une constante dans notre cadre. Autrement dit, $e(\delta n/x)$ va parcourir le cercle un nombre borné de fois lorsque n varie de 1 à une constante fois x (et pendant ce temps $\eta(n/x)$ sera devenu petit). Cela rend la somme plus facile à estimer.

Il est classique que l'on puisse exprimer $S_{\eta,\chi}$ par une *formule explicite*[2]

$$S_{\eta,\chi}\left(\frac{\delta}{x}, x\right) = [\widehat{\eta}(-\delta)]\, x - \sum_\rho F_\delta(\rho) + \text{petit terme d'erreur.}$$

Ici le terme entre crochets apparaît seulement pour $q = 1$. Dans la somme, ρ parcourt tous les zéros non-triviaux de $L(s, \chi)$, et F_δ est la transformée de Mellin de $e(\delta t)\eta(t)$:

$$F_\delta(s) = \int_0^\infty e(\delta t)\eta(t)t^s \frac{dt}{t}.$$

On a gagné si on arrive à montrer que la somme sur ρ est petite.

Le point important est le suivant : si nous vérifions GRH jusqu'à la partie imaginaire H, alors nous savons que tout ρ avec $|\Im(\rho)| \leqslant H$ vérifie $\Re(\rho) = 1/2$, et ainsi $|x^\rho| = \sqrt{x}$. Autrement dit, x^ρ est alors très petit (par rapport à x). Cependant, pour tout ρ de partie imaginaire supérieure à H, nous ne savons rien sur la partie réelle, à part $0 \leqslant \Re(\rho) \leqslant 1$. (D'accord, nous *pourrions* utiliser une région sans zéros, mais les régions sans zéros connues sont notoirement étroites pour $\Im(\rho)$ grand, ce qui veut dire qu'elles ne nous disent pas grand chose en pratique.) Par conséquent, notre seule chance est de nous assurer que $F_\delta(\rho)$ est petit pour $|\Im(\rho)| \geqslant H$.

Attention, cela doit être vrai aussi bien pour δ tout petit ($\delta = 0$ y compris) que pour δ un peu moins petit (δ compris entre 1 et une constante). Si on s'amuse un peu avec la méthode de la phase stationnaire, on obtient que $F_\delta(\rho)$ se comporte comme $M\eta(\rho)$ pour δ tout petit (ici $M\eta$ est la transformée de Mellin de η) et comme $\eta(t/2\pi|\delta|)$ pour δ moins petit (où $t = \Im(\rho)$). Ainsi, nous sommes face à un dilemme classique, souvent appelé le principe d'incertitude parce que c'est le fait mathématique qui est derrière le principe physique du même nom : on ne peut avoir une fonction η qui décroît extrêmement rapidement et dont la transformée de Fourier (ou, dans ce cas, la transformée de Mellin) décroit aussi extrêmement rapidement.

[2] Les formules de ce type sont *les* « formules explicites » par antonomase, au moins en théorie des nombres.

Que veut dire « extrêmement rapidement » ? Cela veut dire « plus vite que toute exponentielle e^{-Ct} ». Ainsi, le choix $\eta(t) = e^{-t}$ de Hardy et Littlewood semble essentiellement optimal.

Pas si vite ! Ce que nous *pouvons* faire, c'est de choisir η telle que $M\eta$ décroisse exponentiellement (avec une constante C un peu moins bonne qu'avant), mais telle que η décroisse plus vite qu'exponentiellement. Voilà ce qui est crucial, car c'est $t/|\delta|$ (plutôt que t) qui risque d'être assez petit.

Un η possible qui répond à cette description est la gaussienne $\eta(t) = e^{-t^2/2}$. La transformée de Mellin F_δ se trouve être une fonction cylindre parabolique, dont l'un des paramètres prend des valeurs imaginaires pures. Les fonctions cylindres paraboliques semblent être très aimées et très étudiées par les personnes qui font des mathématiques appliquées, mais plutôt pour des valeurs réelles du dit paramètre. Il y a des développements asymptotiques de F_δ dans la littérature pour des paramètres généraux (surtout par F. W. J. Olver), mais aucun qui aurait été suffisamment explicite pour mon objectif. Ainsi, je devais produire des estimations complètement explicites moi-même, en utilisant la méthode du point col. Cela m'a pris du temps, mais les résultats devraient être applicables dans un cadre général et le lissage gaussien deviendra, j'espère, un peu plus populaire dans les travaux explicites en théorie des nombres.

Et, en fait, ces estimations sur les cylindres paraboliques nous permettent de ne pas prendre seulement $\eta(t) = e^{-t^2/2}$, mais aussi, plus généralement $\eta(t) = h(t)e^{-t^2/2}$, où h est une fonction à bande limitée, ce qui veut dire, dans ce contexte, toute fonction dont la transformée de Mellin restreinte à l'axe des ordonnées est à support compact. Nous chercherons à optimiser le choix de $h(t)$: voir plus de détails plus loin.

5. Les arcs mineurs

Comment borne-t-on $|S(\alpha)|$ quand α n'est *pas* proche d'un rationnel $\frac{a}{q}$ de petit dénominateur ? Que ce soit même possible est le grand succès de Vinogradov. Le progrès a depuis été graduel. Ma propre contribution est le sujet de mon article sur les arcs mineurs [Helb]. Laissez-moi juste raconter quelques-unes des idées derrière mes améliorations.

La preuve de Vinogradov a été considérablement simplifiée dans les années 70 par Vaughan, qui a introduit l'identité qui maintenant porte son nom [Vau77b]. Essentiellement, l'identité de Vaughan est un gambit : elle donne beaucoup de flexibilité, mais cette dernière a un coût, qui ici est de deux logs, plutôt que, disons, deux pions. Le problème est que, si nous voulons atteindre notre objectif, nous ne pouvons pas nous permettre de gaspiller des logs. La seule manière de récupérer ces logs est de trouver de la compensation dans les différentes sommes qui viennent de l'identité de Vaughan. N'oubliez pas que je devais faire cela sans utiliser des fonctions L, puisque je ne pouvais plus supposer q petit.

Voilà un autre aspect de cette partie de la preuve. Chaque α a une approximation $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\delta}{x}$: le fait que α soit dans les arcs mineurs nous dit que q n'est pas petit. En fait, nous cherchons des bornes qui diminuent avec q ; la borne que j'obtiens est proportionnelle à $\frac{\log q}{\sqrt{\varphi(q)}}$. Quel est l'effet de δ ?

Je me suis vite rendu compte que, si δ n'est pas tout petit, cela peut en fait être utilisé à notre avantage. Une raison est qu'il y a des termes de la forme $\widehat{\eta}(\delta)$, et que les transformées de Fourier de fonctions lisses décroissent quand l'argument augmente.

Il y a d'autres raisons, cependant. Nous pouvons aussi utiliser ce qui suit : par des résultats de base d'approximation diophantienne, chaque α a de très bonnes approximations par des rationnels de dénominateur non énorme. Si δ n'est pas tout petit, alors l'approximation $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\delta}{x}$ est bonne, mais pas très bonne ; ainsi, il doit y avoir une autre approximation, meilleure, $a \sim \frac{a'}{q'}$ avec q' non énorme (c'est-à-dire considérablement plus petit que x). Nous pouvons utiliser alternativement l'une ou l'autre des approximations $\frac{a}{q}$ et $\frac{a'}{q'}$, choisissant celle qui est la plus utile selon le contexte. Il se trouve que c'est mieux que d'utiliser une seule approximation $\frac{a}{q}$, aussi bonne qu'elle soit.

Une autre manière d'utiliser le fait que δ est grand est la dispersion de l'échantillon qui joue le rôle de donnée principale d'un *grand crible*. Le grand crible peut être vu comme une forme approchée de l'identité de Plancherel, remaniée en inégalité : là où l'identité de Plancherel nous dit que $|\widehat{f}|_2$, la norme ℓ_2 de la transformée de Fourier $\widehat{f} : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{R}$ d'une fonction f définie sur les entiers (par exemple ; des groupes autres que les entiers fonctionnent également), est égale à $|f|_2$, la norme ℓ_2 de la fonction f elle-même, le grand crible nous dit que la somme $\sum_i |\widehat{f}(\alpha_i)|^2$ pour un échantillon de points $\alpha_i \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ bien espacé est borné par (un multiple de) $|f|_2$. Maintenant, dans notre cas, les points α_i sont des multiples de notre angle α. Si $\alpha = \frac{a}{q}$, l'espacement des points α_i est $\frac{1}{q}$, ce qui est bien ; mais nous pourrions être amenés à appliquer le crible plusieurs fois, vu que nous devons l'appliquer de nouveau pour chaque groupe de q points. Cependant, si $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\delta}{x}$ et δ n'est pas tout petit, nous pouvons parcourir le cercle plusieurs fois, et nous appuyer sur $\frac{\delta}{x}$ plutôt que sur $\frac{1}{q}$ pour nous donner l'espacement. Oui, l'espacement sera plus petit qu'avant, mais l'effet de cela est plus que compensé par le fait de devoir invoquer le grand crible un nombre de fois moindre (peut-être seulement une fois).

Qui plus est, cette distribution peut être combinée avec une forme de distribution plus traditionnelle (le lemme de Montgomery ; voir [Mon71, (3.9)], ou alors la présentation dans [IK04, §7.4]) pour profiter du fait que nous avons à faire à des sommes sur les nombres premiers.

6. Combiner le tout

Je vous ai raconté ce qu'il faut pour borner $S(\alpha)$ pour α dans les arcs mineurs, mais ce que nous voulons réellement, c'est borner l'intégrale $\int_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^3 \mathrm{d}\alpha$. Une manière rapide, et traditionnelle, de le faire serait d'utiliser simplement l'inégalité triviale

$$\int_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^3 \mathrm{d}\alpha \leqslant \max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |S(\alpha)| \int_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^2 \mathrm{d}\alpha.$$

Malheureusement, cela gaspille un facteur log.

Vu que nos bornes pour $S(\alpha)$, $\alpha \sim \frac{a}{q}$, sont données en fonction de q, cela a du sens de les combiner avec des estimations pour des intégrales du type $\int_{\mathfrak{m}_r} |S(\alpha)|^2 \mathrm{d}\alpha$, où $\mathfrak{m}_r$ est une union d'arcs autour de rationnels de dénominateur supérieur à une constante mais inférieur à r. Comment estime-t-on de telles intégrales ? Il se trouve que cette question est en rapport étroit avec une question sur le grand crible : quelles bornes peut-on obtenir pour des échantillons $\alpha_i = \frac{a}{q}$, $q \leqslant r$, où r est de taille modérée, si on suppose que $S(\alpha)$ est une somme sur les nombres premiers ?

Il y avait une réponse dans la littérature (fondée sur le lemme de Montgomery ; le lien avec la méthode du cercle avait déjà été remarqué par Heath-Brown), mais il y avait au moins un facteur e^γ (ou en fait plus) qui faisait que ce n'était pas optimal. Ceci était encore le cas dans [Tao] (§4) et dans la première version de [Helb] (§6). Il y a eu une estimation plus récente pour le grand crible due à Ramaré ([Ram09, Thm. 2.1] ; voir aussi [Ram09, Thm. 5.2]), mais elle n'avait pas encore été totalement explicitée. J'ai dû expliciter les bornes, puis j'ai adapté le nouveau résultat (en l'amenant du crible au cercle) pour estimer l'intégrale sur $\mathfrak{m}_r$ ci-dessus. Comme on pouvait s'y attendre, le faux facteur e^γ (ou en fait un peu plus) a disparu.

Reste à comparer le terme principal et le terme d'erreur. Il se trouve que nous avons une certaine liberté pour le choix du terme principal, vu qu'il dépend des lissages que l'on choisit. Le terme principal est proportionnel à

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \eta_+(t_1)\eta_+(t_2)\eta_*\left(\frac{N}{x} - (t_1 + t_2)\right) \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2,$$

où η_+ et η_* sont les deux lissages que nous choisissons, N est le nombre impair que nous voulons exprimer comme somme de trois nombres premiers, et x encore un paramètre à choisir. Pour comparer, le terme d'erreur est proportionnel à $|\eta_+|^2|\eta_*|_1$. Ainsi, nous avons un problème d'optimisation (« maximiser la taille de l'intégrale double divisée par $|\eta_+|^2|\eta_*|_1$ »). Le mieux, c'est de choisir η_+ symétrique ou presque ($\eta_+(t) \sim \eta_+(2-t)$), en s'assurant de plus que $\eta_+(t) \sim 0$ pour $t \geqslant 2$. Ce n'est pas trop difficile à accomplir en gardant η_+ de la forme $\eta(t) = h(t)e^{-t^2/2}$, où h est à bande limitée.

Qu'en est-il de η_* ? La solution au problème d'optimisation nous dit qu'elle devrait être de petit support, ou du moins concentrée près de l'origine. À part cela, il y a, pour ainsi dire, un problème politique : η_*, contrairement à η_+, est utilisée aussi bien dans les arcs majeurs que dans les arcs mineurs ; les arcs majeurs veulent vraiment qu'elle soit de la forme $e^{-t^2/2}$ ou bien $t^k e^{-t^2/2}$, alors que les arcs mineurs préféreraient que cela soit quelque chose de simple, du genre $\eta_{[0,1]}$ (fonction indicatrice) ou $\eta_2 = (2\eta_{[1/2,1]}) *_M (2\eta_{[1/2,1]})$, où $f *_M g$ est la *convolution multiplicative* (ou *convolution de Mellin*) :

$$(f *_M g)(x) = \int_0^\infty f(y) g\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dy}{y}.$$

(Ici η_2 est précisément le lissage utilisé dans l'article de Tao sur les cinq nombres premiers, ou mon propre article sur les arcs mineurs).

La solution est simple : on définit $\eta_*(t) = (f * g)(\kappa t)$, où κ est une grande constante, $f(t) = \eta_2(t)$ et $g(t) = t^2 e^{-t^2/2}$. Pour f et g à peu près arbitraires, si on sait comment calculer (ou estimer) $S_f(\alpha)$ pour un certain α, et si on sait aussi comment estimer $S_g(\alpha)$ pour les autres α, alors on sait comment estimer $S_{f*g}(\alpha)$ pour tous les α : écrivez-le et vous verrez !

(Il s'agit, en essence, d'échanger l'ordre de l'intégration et la somme. Peut-être verrez-vous aussi que cela aide si $f(t)$ et $g(t)$ sont très petits au voisinage de $t = 0$).

La morale, c'est que différents problèmes, et différentes parties d'un même problème, demandent des lissages différents. Au moins dans le contexte des sommes d'exponentielles, il y a en fait une astuce simple pour les combiner, comme nous venons de le voir.

7. Quelques remarques finales sur les calculs

Une preuve analytique donne d'habitude une preuve valide pour tous les n supérieurs à une constante C. La raison en est simple : disons que nous voulons montrer qu'une certaine quantité est positive. Typiquement, après beaucoup de travail analytique, nous aurons prouvé que la quantité en question est de la forme $1 +$ terme d'erreur, où la valeur absolue du terme d'erreur est au plus C/n (par exemple ; je simplifie bien sûr). Cela montre certainement que la quantité est positive, à condition que $n \geqslant C$. Notre mission est alors de préciser la preuve de sorte que la constante C devienne assez petite pour que les cas $n \leqslant C$ puissent être vérifiés à la main (c'est-à-dire, vraiment à la main, ou alors par ordinateur). C'est essentiellement en cela que consistait mon travail ; vérifier la conjecture jusqu'à $C = 10^{29}$ (et en fait jusqu'à $8,8 \times 10^{30}$) était plutôt un travail annexe. Comme nous allons le voir, ce n'était même pas le plus grand effort de calcul nécessaire.

Tout d'abord, laissez-moi dire encore quelques mots sur les résultats analytiques. Il y a des résultats du type « La propriété est vraie pour tout n supérieur à une constante C, mais la preuve ne vous dit rien sur C, à part son existence ». On appelle cela une estimation *non effective* ; de nombreuses preuves du résultat de Vinogradov présentes dans des livres sont de ce type. (La raison en est la possibilité d'existence de ce qu'on appelle les zéros de Siegel). Un résultat peut aussi dire « la propriété est vraie pour tout $n > C$, et on devrait pouvoir déterminer une valeur de C en utilisant des idées venant de la preuve, mais l'auteur préférerait largement aller boire un café ». Ceci est un énoncé effectif, mais non-explicite ; la version définitive de Vinogradov de sa propre démonstration était de ce type (de même que beaucoup d'autres résultats en mathématiques, dont certains de mes résultats par le passé). Si on donne même une valeur explicite de C, le résultat est dit, eh bien, *explicite*. Vient alors la quatrième étape : rendre C raisonnable, c'est-à-dire, assez basse pour que le cas $n \leqslant C$ puisse être vérifié à la main. Il était clair depuis le début que, dans le cas de la conjecture de Goldbach ternaire, « raisonnable » signifiait grosso modo $C \sim 10^{30}$, même si les vérifications décrites dans la littérature s'arrêtaient bien avant.

Plus haut, j'ai dit que D. Platt et moi avons vérifié la conjecture pour tous les nombres impairs jusqu'à $8,8 \times 10^{30}$. Voilà comment nous avons procédé. (Il s'agit de la même procédure qu'en [Sao98].) Il était déjà connu (grâce au grand effort de calcul de Oliveira e Silva, Herzog et Pardi) que la conjecture de Goldbach binaire était vraie jusqu'à 4×10^{18}, ou autrement dit que tout nombre pair jusqu'à 4×10^{18} était la somme de deux nombres premiers. Partant de là, tout ce que nous devions faire était de construire une « échelle à nombres premiers », c'est-à-dire une liste de nombres premiers entre 2 et $8,8 \times 10^{30}$ tels que la différence entre deux premiers consécutifs dans cette liste soit au plus 4×10^{18}. Ainsi, si quelqu'un vous donne un nombre impair n inférieur à $8,8 \times 10^{30}$, vous savez qu'il y a un nombre premier dans la liste tel que $n-p$ soit positif et inférieur à 4×10^{18}. Par hypothèse, nous pouvons écrire $n-p = p_1 + p_2$ pour des nombres premiers p_1 et p_2, et donc $n = p + p_1 + p_1$.

La construction d'une telle échelle ne prend pas tant de temps que cela. (En fait, la mise au point d'une échelle jusqu'à 10^{27} se fait dans un ordinateur personnel en l'espace d'un week-end, sans calculs parallèles.) C'est simplement de l'arithmétique des entiers, et on utilise un test de primalité déterministe (qui est rapide pour des nombres premiers d'une forme particulière), donc il n'y a pas lieu de s'inquiéter.

À la fin, le calcul principal consiste en la vérification du fait que, pour toute fonction L de caractère $\chi \mod q$, q inférieur à 150000 à peu près (ou deux fois ceci pour q pair), tous les zéros de cette fonction L de partie imaginaire inférieure à $10^8/q$ se trouvent sur la droite critique. C'était entièrement le travail de Platt ; ma seule contribution a été de courir demander du temps de calcul sur des ordinateurs à des endroits différents (voir les remerciements en [Hela, §1.3]). En fait, Platt est monté jusqu'au conducteur 200000 (ou deux fois ceci pour q pair) ; il avait déjà atteint 100000 dans sa thèse. La vérification a pris, au total, à peu près 400000 heures de cœur (c'est-à-dire le nombre de cœurs de processeur utilisés multiplié par le nombre d'heures où ils ont fonctionné est égal à 400000 ; de nos jours, un processeur à la pointe de la technologie – comme ceux de la machine MesoPSL, à l'Observatoire de Paris – a typiquement huit cœurs). À la fin, comme je l'ai dit, je n'ai utilisé que $q \leqslant 150000$ (ou deux fois cela pour q pair), donc le nombre d'heures nécessaire était en réalité plutôt autour de 160000. Les ordinateurs et moi creusions des deux côtés de la montagne, et nous nous sommes rencontrés au milieu. Le fait que les ordinateurs aient fonctionné plus longtemps que nécessaire n'est pas à regretter : ce calcul est d'utilité générale, et donc c'est d'autant mieux qu'il ne soit pas moulé exactement sur mes besoins ; de plus, avec des preuves d'une telle longueur, on veut « construire comme un Romain », c'est-à-dire calculer plus que strictement nécessaire, au cas où on (pas l'ordinateur !) aurait fait une petite erreur quelque part. (Pourquoi pensez-vous que leurs murs étaient si épais ?)

Vérifier par le calcul les zéros des fonctions L est quelque chose qui remonte à Riemann (qui le faisait à la main) ; c'est aussi l'une des choses qu'on a essayées sur les ordinateurs électroniques dès leurs débuts (Turing a écrit un article là-dessus). Un des problèmes principaux auxquels il faut faire attention apparaît à chaque fois qu'on manipule des nombres réels : un ordinateur ne peut pas vraiment stocker π ; de plus, même si un ordinateur peut gérer des rationnels, le plus pratique pour lui est de ne manier que des rationnels dont les dénominateurs sont des puissances de deux. Ainsi, vous ne pouvez pas vraiment dire : « ordinateur, donne-moi le sinus de ce nombre » et vous attendre à un résultat précis. Ce que vous devez dire, si vous voulez vraiment *prouver* quelque chose (comme c'est le cas ici !), c'est : « ordinateur, je te donne un intervalle $I = \left[a/2^k, b/2^k\right]$; donne-moi un intervalle $I' = \left[c/2^k, d/2^k\right]$, très petit de préférence, tel que $\sin(I) \subset I'$ ». Cela s'appelle l'arithmétique des intervalles ; c'est réellement la manière la plus simple pour faire des calculs à virgule flottante rigoureusement.

Or, les processeurs ne font pas cela naturellement, et si vous faites cela complètement à l'aide de logiciels, vous pouvez ralentir les calculs d'un facteur 100. Heureusement, il y a des manières de faire cela à moitié en dur et à moitié en logiciel. Platt avait sa propre bibliothèque, mais il y en a d'autres en ligne (par exemple *PROFIL/BIAS* [Knü99]).

(À propos, n'utilisez pas la fonction sin sur un processeur Intel si vous voulez que le résultat soit correct jusqu'au dernier bit. Le processeur fait parfois n'importe quoi. Utilisez plutôt la bibliothèque *crlibm* [DLDDD+10].)

Et pour finir, il y a quelques calculs mineurs que j'ai faits moi-même ; vous en trouverez des mentions dans mes articles. Un calcul typique consistait en une version rigoureuse d'une « preuve par graphe » (le maximum de la fonction f est clairement inférieur à 4 parce que gnuplot me l'a dit). Vous trouverez des algorithmes pour ça dans tout livre de « validated computing » – grosso modo, il suffit de combiner la méthode de dichotomie avec de l'arithmétique des intervalles.

En conclusion, laissez-moi souligner le fait qu'il y a une inégalité élémentaire dans l'article sur les arcs mineurs (à savoir, (4.24), dans la preuve du lemme 4.2) qui a été prouvée en partie par un humain (moi) et en partie par un programme d'élimination des quantificateurs. En d'autres termes, il y a de nos jours des programmes informatiques (dans ce cas, QEPCAD [HB11]) qui peuvent vraiment prouver des choses utiles ! Or, je ne doute pas que la même inégalité puisse être prouvée entièrement par des êtres humains, mais il est bon de savoir que nos amis les ordinateurs peuvent (prétendre) faire autre chose que de mâcher des nombres...

Note. Une première version de cet article est parue en anglais sur le blog [Hel13b]. Une version alternative – rédigée avec l'aide de M. A. Morales, J. Cilleruelo, et M. Helfgott – est parue en espagnol [Hel13a]. L'auteur voudrait remercier P. Pansu pour son aide.

8. Références

[Che73] J. R. Chen. On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes. *Sci. Sinica*, 16 :157–176, 1973.

[CW89] J. R. Chen et W. Tian Ze. On the Goldbach problem. *Acta Math. Sinica*, 32(5) :702–718, 1989.

[CW96] J. R. Chen et W. Tian Ze. The Goldbach problem for odd numbers. *Acta Math. Sinica (Chin. Ser.)*, 39(2) :169–174, 1996.

[Des77] J.-M. Deshouillers. Sur la constante de Šnirel'man. En *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 17e année : (1975/76), Théorie des nombres : Fac. 2, Exp. No* G*16*, page 6. Secrétariat Math., Paris, 1977.

[Dic66] L. E. Dickson. *History of the theory of numbers. Vol. I : Divisibility and primality.* Chelsea Publishing Co., New York, 1966.

[DLDDD+10] C. Daramy-Loirat, F. De Dinechin, D. Defour, M. Gallet, N. Gast, et Ch. Lauter. Crlibm, March 2010. version 1.0beta4.

[Est] T. Estermann. On Goldbach's Problem : Proof that Almost all Even Positive Integers are Sums of Two Primes. *Proc. London Math. Soc.*, S2-44(4) :307.

[HB11] H. Hong et Ch. W. Brown. QEPCAD B – Quantifier elimination by partial cylindrical algebraic decomposition, May 2011. version 1.62.

[Hela] H. A. Helfgott. Major arcs for Goldbach's problem. Prépublication. Disponible sur `http://arxiv.org/abs/1305.2897`.

[Helb] H. A. Helfgott. Minor arcs for Goldbach's problem. Prépublication. Disponible sur `http://arxiv.org/abs/1205.5252`.

[Hel13a] H. Helfgott. La conjetura débil de Goldbach. *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 16(4), 2013.

[Hel13b] H. A. Helfgott. The ternary Goldbach conjecture. `http://valuevar.wordpress.com/2013/07/02/the-ternary-goldbach-conjecture/`, 2013.

[HL16] G. H. Hardy et J. E. Littlewood. Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes. *Acta Math.*, 41(1) :119–196, 1916.

[IK04] H. Iwaniec et E. Kowalski. *Analytic number theory*, volume 53 d'*American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[Knü99] O. Knüppel. PROFIL/BIAS, février 1999. version 2.

[LW02] M.-Ch. Liu et T. Wang. On the Vinogradov bound in the three primes Goldbach conjecture. *Acta Arith.*, 105(2) :133–175, 2002.

[Mon71] H. L. Montgomery. *Topics in multiplicative number theory*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 227. Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[Ram95] O. Ramaré. On Šnirel'man's constant. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 22(4) :645–706, 1995.

[Ram09] O. Ramaré. *Arithmetical aspects of the large sieve inequality*, volume 1 of *Harish-Chandra Research Institute Lecture Notes*. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2009. With the collaboration of D. S. Ramana.

[RV83] H. Riesel et R. C. Vaughan. On sums of primes. *Ark. Mat.*, 21(1) :46–74, 1983.

[Sao98] Y. Saouter. Checking the odd Goldbach conjecture up to 10^{20}. *Math. Comp.*, 67(222) :863–866, 1998.

[Sch33] L. Schnirelmann. Über additive Eigenschaften von Zahlen. *Math. Ann.*, 107(1) :649–690, 1933.

[Tao] T. Tao. Every odd number greater than 1 is the sum of at most five primes. À paraître à *Math. Comp.* Disponible sur `arXiv :1201.6656`.

[Vau77a] R. C. Vaughan. On the estimation of Schnirelman's constant. *J. Reine Angew. Math.*, 290 :93–108, 1977.

[Vau77b] R.-C. Vaughan. Sommes trigonométriques sur les nombres premiers. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 285(16) :A981–A983, 1977.

[Vin37] I. M. Vinogradov. Représentation d'un nombre impair comme la somme de trois nombres premiers. (Russe.)*Dokl. Akad. Nauk. SSR*, 15 :291–294, 1937.

Petits écarts entre nombres premiers et polymath : une nouvelle manière de faire de la recherche en mathématiques ?

Régis de la Bretèche[1]

1. Introduction

En avril 2013, Yitang Zhang découvre une amélioration de la méthode de Goldston-Pintz-Yıldırım qui permet de montrer qu'il existe une infinité de couples $p' > p$ de nombres premiers tels que la différence $p' - p$ soit inférieure à 70 millions. Il s'ensuit une démarche exceptionnelle de recherche collaborative ouverte appelée Polymath8 à partir du blog du mathématicien Terence Tao. En cinq mois la borne est divisée par plus de dix mille. Au moment où sa valeur commence à se stabiliser, James Maynard post-doc à Montréal rend publique une nouvelle méthode beaucoup plus simple qui permet de diminuer la borne à 600. Mais Polymath8 n'a pas dit son dernier mot ...

Dans cet article, nous voudrions décrire les progrès spectaculaires obtenus sur les petits écarts entre nombres premiers à partir de la découverte de Yitang Zhang en avril 2013 et l'intense activité mathématique qui en a découlé. Il ne s'agit pas d'un survol usuel avec une bibliographie exhaustive, mais plus à partir d'un exemple d'analyser des nouvelles formes de la recherche en mathématiques liées à l'apparition des nouvelles technologies de l'internet reposant sur l'accès et le partage immédiat d'information. Le lecteur est invité à se reporter à [18] pour une bibliographie qui a permis de préparer cet article.

Il y a vingt-quatre siècles, Euclide montrait l'infinitude des nombres premiers. Avec $\pi(x) := \mathrm{card}\{p \leqslant x\}$ où la lettre p désignera dans toute la suite un nombre premier, cela se traduit par le fait que $\pi(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers l'infini. Gauss (1792), puis Legendre (1798, 1808) conjecturent l'équivalent[2]

$$\pi(x) \sim x/\log x \qquad (x \to +\infty),$$

et, en 1896, s'appuyant sur les travaux de Riemann, Hadamard et La Vallée-Poussin établissent cet équivalent de $\pi(x)$ appelé théorème des nombres premiers. En 1849, un mathématicien français, Alphonse de Polignac, pose une nouvelle question et conjecture que tout nombre pair s'écrit une infinité de fois comme la différence de deux nombres premiers et même de deux nombres premiers consécutifs. Le cas du nombre 2 correspond à la conjecture dite des nombres premiers jumeaux. La définition des nombres premiers est de type multiplicatif et ainsi comprendre les propriétés additives de l'ensemble des nombres premiers est un défi redoutable.

[1] Université Paris-Diderot, Sorbonne Paris Cité, UMR7586, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, Paris.

[2] Ici, et dans toute la suite, log désigne le logarithme népérien.

Avec $\{p_n\}_{n\geqslant 1}$ la suite croissante des nombres premiers, le théorème des nombres premiers permet uniquement d'affirmer

$$\Delta_j := \liminf_{n\to+\infty} \frac{p_{n+j}-p_n}{\log p_n} \leqslant j \quad (j \geqslant 1). \tag{1}$$

En 1904, Dickson [2] généralise la conjecture de Polignac aux cas des k-uplets de nombres premiers. On dit que $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_k\}$ est un k-uplet admissible si, pour tout nombre premier p, il existe au moins une progression arithmétique de raison p qui ne contient aucun des entiers h_j. Ainsi, par exemple, les h_j sont tous pairs ou tous impairs pour que cela soit vérifié pour $p = 2$. Dickson conjecture que, pour tout k-uplet admissible, il existe une infinité d'entiers n tels que les $n + h_j$ soient simultanément premiers.[3] Ainsi, comme $\{0, 2\}$ est un 2-uplet admissible, nous retrouvons la conjecture des nombres premiers jumeaux. Cela repose sur le fait que, lorsqu'il n'y a pas d'obstruction arithmétique évidente, il est espéré que les nombres premiers se répartissent harmonieusement dans les translatés de tout k-uplet. En 1923, Hardy et Littlewood [12] sans avoir connaissance de l'article de Dickson formulent une version quantitative de la conjecture de Dickson et montrent l'inégalité $\Delta_1 \leqslant \frac{2}{3}$ conditionnelle à l'Hypothèse de Riemann généralisée.

2. Introduction à la méthode de Goldston, Pintz & Yıldırım

Après de nombreux efforts entrepris pendant la seconde moitié du XX[e] siècle pour améliorer les majorations de Δ_1, Goldston, Pintz & Yıldırım [13] réalisent en 2005 une avancée décisive en montrant que $\Delta_1 = 0$. De plus, sous une hypothèse forte dite d'Elliott–Halberstam que nous introduirons dans la section suivante, ils établissent l'inégalité $H_1 \leqslant 16$ avec la notation

$$H_j := \liminf_{n\to+\infty} (p_{n+j} - p_n), \qquad (j \geqslant 1),$$

alors que la conjecture des nombres premiers jumeaux prévoit $H_1 = 2$. Toute amélioration des résultats d'équirépartition leur permet aussi de montrer que H_1 est fini. Leurs travaux ont eu un retentissement considérable. C'est la première fois que, sous une hypothèse à laquelle les spécialistes du domaine croient, une forme faible de la conjecture des nombres premiers jumeaux est établie. Avant de parler des avancées de 2013, nous décrivons une présentation simple de la méthode dite de GPY (Goldston, Pintz & Yıldırım).

Il s'agit de montrer que, pour tout k-uplet admissible $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_k\}$, l'ensemble de ses translatés $\{n + h_1, \ldots, n + h_k\}$ contient pour une infinité d'entiers n au moins deux nombres premiers. Ce résultat est appelé conjecture de Dickson–Hardy–Littlewood faible et notée $DHL[k, 2]$ dans [18]. Il implique

$$H_1 \leqslant \min_{\mathcal{H}} \Big(\max_{1\leqslant i<j\leqslant k} |h_i - h_j| \Big) := H(k), \tag{2}$$

où le minimun est pris sur tous les k-uplets admissibles $\mathcal{H}$.

[3] Cette conjecture est appelée dans la littérature récente la conjecture de Dickson–Hardy–Littlewood forte.

Soit ϑ la fonction définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\vartheta(n) := \begin{cases} \log p & \text{si } n \text{ est un nombre premier } p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La méthode dite de GPY pour borner la quantité H_1 repose sur la preuve du critère suivant. Il existe un poids ν de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}^+$, une fonction $B(\nu, x)$ strictement positive, des constantes C_1 et $C_2 > 0$, satisfaisant, lorsque x tend vers $+\infty$, aux deux inégalités suivantes

$$\sum_{x<n\leqslant 2x} \nu(n) \leqslant (C_1 + o(1))B(\nu, x)x(\log x),$$

$$\sum_{x<n\leqslant 2x} \nu(n)\vartheta(n+h) \geqslant (C_2 + o(1))B(\nu, x)x \qquad (\forall h \in \mathcal{H}). \tag{3}$$

Dès que $kC_2 > C_1$, $DHL[k, 2]$ est vérifiée. La démonstration est simple. Les deux inégalités fournissent

$$\sum_{x<n\leqslant 2x} \nu(n)\Big(\sum_{h\in\mathcal{H}} \vartheta(n+h) - \log 3x\Big) \geqslant (kC_2 - C_1 + o(1))B(\nu, x)x(\log x).$$

Le membre de gauche contient donc un indice n tel que $\sum_{h\in\mathcal{H}} \vartheta(n+h) - \log 3x > 0$ et donc au moins deux nombres premiers parmi les $n+h$ puisque pour tout $n \leqslant 2x$ et $h \leqslant x$ on a $\vartheta(n+h) \leqslant \log 3x$. Une telle simplicité de critère peut surprendre un mathématicien n'ayant pas l'habitude des énoncés en apparence élémentaires de la théorie analytique des nombres. Finalement, la méthode GPY ne consisterait qu'à trouver un bon candidat pour le poids ν.

On appelle fonction arithmétique une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$. On définit la convolée de deux fonctions arithmétiques f et g de la manière suivante

$$(f * g)(n) := \sum_{d|n} f(d)g(n/d).$$

Soit μ la fonction de Möbius définie par

$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^r & \text{si } n = p_1 \cdots p_r \text{ et les } p_i \text{ tous distincts,} \\ & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction, très utile dans ce contexte, peut aussi être définie par la relation valable pour tout n

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

À première vue même, le bon candidat serait évident : il s'agit d'un poids qui vaut 0 dès qu'un des nombres $n+h$ n'est pas premier. Introduisant la fonction arithmétique $\Lambda_\ell(n) := -(\mu * (\log)^\ell)(n) = -\sum_{d|n} \mu(d)(\log(n/d))^\ell$, nous avons l'implication

$$\omega(n) > \ell \Longrightarrow \Lambda_\ell(n) = 0$$

où ω désigne la fonction nombre de facteurs premiers distincts. Ainsi, un candidat naturel pour ν serait défini par

$$\nu(n) = \Lambda_k(K(n)),$$

avec

$$K(n) := \prod_{h\in\mathcal{H}} (n+h). \tag{4}$$

Malheureusement, l'estimation des sommes intervenant dans (3) pour ce poids est aussi difficile que l'estimation asymptotique de

$$\sum_{x<n\leqslant 2x} \prod_{h\in\mathcal{H}} \vartheta(n+h).$$

Le critère nous ramène à la case départ.

Utilisant une idée remontant aux travaux de Selberg, Goldston, Pintz & Yıldırım choisissent un poids de la forme

$$\nu(n) := \Big(\sum_{\substack{d|K(n)\\ d<D}} \lambda_d\Big)^2, \tag{5}$$

où D est une puissance de x choisie suffisamment petite pour montrer le critère. Il a été remarqué ensuite que les détails techniques sont beaucoup plus faciles si la somme est restreinte aux $n \equiv b (\mathrm{mod}\, W)$ avec $W := \prod_{p\leqslant w} p$ tendant vers $+\infty$ et $\mathrm{pgcd}(b+h, W) = 1$ pour tout $h \in \mathcal{H}$. Cette sorte de crible préliminaire est appelé dans la littérature anglo-saxonne W-trick. Cela assure que tous les entiers n considérés tels que $n \equiv b (\mathrm{mod}\, W)$ avec $\mathrm{pgcd}(b+h, W) = 1$ pour tout $h \in \mathcal{H}$ sont tels que le produit $\prod_{h\in\mathcal{H}}(n+h)$ n'a aucun facteur premier $\leqslant w$. Le carré qui apparaît comme crucial dans le crible de Selberg est une idée simple qui permet d'obtenir la positivité du poids $\nu(n)$ pourvu que les λ_d soient choisis réels. Dans le crible de Selberg lorsque $k = 2$,[4] il est montré que le poids optimal correspond à des λ_d de la forme

$$\lambda_d = \mu(d)\Big(\frac{\log D/d}{\log D}\Big)^2.$$

Cela s'explique par le fait que $\sum_{d|n} \lambda_d$ s'annule dès que $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de n est > 2. Avant d'expliquer comment estimer les sommes du critère, nous soulignons que le choix de GPY correspond à des λ_d de la forme proche de

$$\lambda_d = \mu(d)\Big(\frac{\log D/d}{\log D}\Big)^{k+\ell},$$

ce qui, heuristiquement, permet d'avoir en $\sum_{d|K(n)} \lambda_d$ une bonne approximation de la fonction caractéristique des entiers tels que $\omega(K(n)) \leqslant k+\ell$. Lorsque $\omega(K(n)) \leqslant k+\ell$, $\ell \leqslant k-2$ et n est pris suffisamment grand, il est facile de déduire qu'il existe au moins deux nombres $n+h$ pour $h \in \mathcal{H}$ qui soient premiers. Là encore, la simplicité apparente de la solution surprend. Les détails techniques que nous n'évoquons pas ici sont délicats à mener à bien.

[4] Ce crible permet par exemple de majorer le nombre de nombres premiers jumeaux $\leqslant x$.

3. Résultats d'équirépartition forts

Expliquons l'estimation des sommes dans le critère de GPY. La deuxième somme où ν est choisi sous la forme (5) peut être aisément approchée par $S_2(x;h)$ définie par

$$S_2(x;h) := \sum_{x<n\leqslant 2x} \nu(n)\Lambda(n+h)$$

où

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & \text{si } n \text{ est une puissance d'un nombre premier } p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une interversion de sommations fournit

$$\begin{aligned} S_2(x;h) &= \sum_{d_1,d_2<D} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \sum_{\substack{x<n\leqslant 2x \\ K(n)\equiv 0(\mathrm{mod}[d_1,d_2])}} \Lambda(n+h) \\ &= \sum_{d_1,d_2<D} \lambda_{d_1}\lambda_{d_2} \sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}/[d_1,d_2]\mathbb{Z} \\ K(a-h)\equiv 0(\mathrm{mod}[d_1,d_2])}} \big(\Psi(2x+h,a,[d_1,d_2]) - \Psi(x+h,a,[d_1,d_2])\big) \end{aligned}$$

avec $[d_1,d_2]$ désignant le ppcm de d_1 et d_2 et

$$\Psi(x,a,q) := \sum_{\substack{n\leqslant x \\ n\equiv a(\mathrm{mod} q)}} \Lambda(n).$$

Soit $\varphi(q)$ la fonction d'Euler qui désigne le nombre de classes modulo q inversibles dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Dans la suite, nous noterons $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ cet ensemble. Le théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques, sous la forme de Siegel–Walfish la plus forte connue, affirme que la somme $\Psi(x,a,q)$ est équivalente à $x/\varphi(q)$ uniformément lorsque $a\in(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ et $q\leqslant Q$ avec $Q=(\log x)^A$ pour toute constante $A>0$. L'Hypothèse de Riemann généralisée utilisée dans les travaux de Hardy-Littlewood permet de choisir $Q=\sqrt{x}/(\log x)^3$. En 1965, suite aux travaux précurseurs d'un certain nombre de mathématiciens, Bombieri et Vinogradov montrent indépendamment une telle estimation en moyenne sur q.

Lorsque f est une fonction arithmétique définie sur un intervalle de longueur finie, on définit sa discrépance sur une progression arithmétique par

$$\Delta(f;a,q) := \sum_{n\equiv a(\mathrm{mod} q)} f(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{(n,q)=1} f(n).$$

Le théorème de Bombieri-Vinogradov s'écrit

$$\sum_{q\leqslant Q} \sup_{a\in(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*} |\Delta(\Lambda\mathbf{1}_{n\leqslant x};a,q)| \ll \frac{x}{(\log x)^A} \tag{6}$$

pour tout $A>0$ fixé et $Q=x^{1/2-\varepsilon}$ et $\varepsilon>0$. La conjecture d'Elliott-Halberstam pour l'exposant $\vartheta\geqslant\frac{1}{2}$, notée $EH(\vartheta)$, correspond à la majoration (6) avec le choix $Q=x^{\vartheta}$. Ces résultats sont appelés *résultats d'équirépartition forts* où l'adjectif fort est dû au fait que le maximum est pris sur toutes les classes a modulo q possibles. La majoration triviale du membre de gauche de (6) est en $O(x(\log x)^2)$. Le gain n'est donc que d'une puissance de $\log x$, mais est suffisant pour de nombreuses applications. Friedlander, Granville, Hildebrand, Maier [10] ont montré que ce résultat était faux pour $\vartheta = 1$.

Nous soulignons la différence de nature des résultats pour $\vartheta < \frac{1}{2}$ et $\vartheta \geqslant \frac{1}{2}$. Le cas $\vartheta \geqslant \frac{1}{2}$ correspond heuristiquement à d'éventuelles informations cachées sur la répartition conjointe des zéros des fonctions $L(s, \chi)$ de Dirichlet alors que le cas $\vartheta < \frac{1}{2}$ *ne correspond qu'*à l'Hypothèse de Riemann généralisée en moyenne.

L'hypothèse d'Elliott-Halberstam $EH(\vartheta)$ permet de choisir $D = x^{\vartheta/2}$ dans le choix du poids. Le résultat de Goldston, Pintz, Yıldırım conditionnel à l'hypothèse d'Elliott–Halberstam est le suivant.

Théorème 1. (GPY [13]**)** *Soit $k \geqslant 2$, $\ell \geqslant 1$ des entiers fixés et $\frac{1}{2} < \vartheta < 1$ un réel satisfaisant*

$$2\vartheta > \Big(1 + \frac{1}{2\ell + 1}\Big)\Big(1 + \frac{2\ell + 1}{k}\Big).$$

Alors $EH(\vartheta)$ implique $DHL[k, 2]$.

On voit ici que le choix $k = 6$, $\ell = 1$, $\vartheta = 1 - \varepsilon$ échoue de justesse. Plus généralement, on peut choisir un poids ν associé à des λ_d proches de

$$\lambda_d = \mu(d) f\Big(\frac{\log d}{\log D}\Big)$$

de sorte que la condition $kC_2 > C_1$ s'écrive

$$2\vartheta > \frac{4}{k(k-1)} \frac{\int_0^1 f^{(k)}(t)^2 t^{k-1} \mathrm{d}t}{\int_0^1 f^{(k-1)}(t)^2 t^{k-2} \mathrm{d}t}.$$

Une optimisation numérique de la méthode [13] qui consiste à choisir la meilleure fonction f dans (3) permet de montrer l'assertion $DHL[6, 2]$ à partir de $EH(0,971)$. Le 6-uplet $\{0, 4, 6, 10, 12, 16\}$ est admissible et ainsi, sous $EH(0,971)$, on a l'inégalité $H_1 \leqslant 16$. Comme observé dans [18], on peut généraliser ce résultat aux ℓ non entiers. Le minimum du membre de droite est atteint pour $2\ell + 1 = \sqrt{k}$ et nous avons la conclusion pour $k \approx 1/(4\varpi^2)$ où $\varpi = \frac{1}{2}(\vartheta - \frac{1}{2})$. Un travail d'optimisation entrepris dans [13] puis dans [3] permet d'obtenir $k \approx 1/\varpi^{3/2}$. Soundararajan a montré que la méthode de GPY ne permet pas de borner H_1 avec uniquement le théorème de Bombieri–Vinogradov.

4. La percée de Yitang Zhang

Le 17 avril 2013, le journal Annals of Mathematics reçoit un article d'un quasi-inconnu Yitang Zhang âgé de 58 ans *Lecturer* (sans doute l'équivalent d'un poste de PRAG en France avec une lourde tâche d'enseignement) de l'université du New Hampshire. Il établit l'inégalité

$$H_1 \leqslant 70\,000\,000$$

inconditionnellement. Cette valeur correspond à un choix $k = 3\,500\,000$ et à la majoration $H(3\,500\,000) \leqslant 70\,000\,000$. La thèse de Zhang qui portait sur la conjecture jacobienne n'avait pas de lien avec la théorie analytique des nombres, même si en partie formé en Chine, Zhang a sans doute suivi certains cours sur ce sujet. Avant d'être Lecturer, il a été comptable pour une société dans le Kentucky qui possède plusieurs restaurants *Subway*.[5] À la suite de sa découverte, il a dit [14]

« There are a lot of chances in your career,
but the important thing is to keep thinking. »

Le journal *Annals of Mathematics* a pris au sérieux son papier qui était clairement rédigé et qui, contrairement à la majorité des papiers d'inconnus qui prétendent avoir établi une fameuse conjecture sans utiliser de résultats importants de la littérature, témoignait d'une bonne connaissance du domaine. Le travail des arbitres a été remarquablement rapide puisque le papier est accepté le 9 mai puis posté sur le site du journal le 21 mai 2013. La nouvelle se répand très rapidement grâce aux nouveaux moyens de communication.

Avant d'analyser les répercussions que cette percée a déclenchées, essayons d'expliquer la démarche de Zhang. Il a étudié pendant trois ans l'article de Goldston, Pintz, Yıldırım sans trouver d'idées nouvelles, mais a été impressionné et encouragé par l'affirmation de [13] disant qu'ils étaient à un cheveu d'obtenir le résultat inconditionnellement.[6]

En effet, il existe des résultats d'équirépartition avec des exposants de répartition $> \frac{1}{2}$. Ainsi dans [5], Fouvry et Iwaniec établissent un résultat du type

$$\sum_{\substack{q \leqslant x^{1/2+1/42} \\ (a,q)=1}} |\Delta(f \mathbf{1}_{n \leqslant x}; a, q)| \ll \frac{x}{(\log x)^A}$$

pour tout $A > 0$ et toute fonction caractéristique $f = f_z$ des entiers n'ayant que des facteurs premiers $> z$ avec $z \leqslant x^{1/883}$ et pour tout $1 \leqslant |a| \leqslant x$. La fonction f_z avec $z = x^{1/k}$ ressemble à la fonction Λ_k dans le sens où son support est inclus dans l'ensemble des entiers n tels que $\Omega(n) \leqslant k$ où Ω compte les facteurs premiers avec leur multiplicité. Si on veut montrer un tel résultat en remplaçant f par Λ, on peut modifier le résultat en enlevant les valeurs absolues et en introduisant un facteur $\lambda(q)$ dit *bien factorisable* au sens d'Iwaniec. Dans les applications, cette modification ne porte généralement pas préjudice. Ainsi, après les travaux novateurs de Fouvry [4], Fouvry et Iwaniec ont montré, pour tout a fixé, la majoration

$$\sum_{\substack{q \leqslant x^{1/2+1/34} \\ (a,q)=1}} \lambda(q) \Delta(\Lambda \mathbf{1}_{n \leqslant x}; a, q) \ll \frac{x}{(\log x)^A}$$

pour un facteur $\lambda(q)$ dit *bien factorisable* de niveau $x^{1/2+1/34}$. La notion de bien factorisable renvoie au fait que λ s'écrit comme la convolée de deux fonctions dont le support est inclus dans un intervalle de la forme $[M, 2M]$ et $[N, 2N]$ avec MN de la taille de $x^{1/2+1/34}$. Les ingrédients de la preuve sont l'identité de Vaughan qui permet d'écrire Λ comme combinaison linéaire de convolées de fonctions arithmétiques, la méthode de dispersion de Linnik et les majorations de sommes incomplètes de Kloosterman. Ils apparaîtront aussi dans la preuve de Zhang. Le fait que ce résultat ne soit pas uniforme par rapport à a est dû au fait que, dans [5]

[5] Dans certaines présentations, son histoire a semble-t-il été romancée en affirmant qu'il a vendu des sandwichs pour gagner sa vie.

[6] A hair's breadth of obtaining this result.

et [1], la théorie spectrale des formes automorphes est utilisée pour obtenir des compensations dans des moyennes de sommes de Kloosterman. Cela constitue la raison pour laquelle il ne peut être appliqué pour rendre inconditionnels les résultats de GPY car le résidu a décrit l'ensemble des solutions de $K(a-h) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, q)$ qui varient suivant q. Ce résultat peut donc être qualifié de résultat d'équirépartition faible. Mais on peut dire qu'on est à un cheveu de pouvoir l'utiliser. La valeur $\frac{1}{34}$ a ensuite été améliorée en $\frac{1}{14}$ par Bombieri, Friedlander et Iwaniec dans [1].

Ignorant l'article de Motohashi et Pintz [16] sur le sujet, Zhang a tout d'abord remarqué qu'on pouvait affaiblir l'hypothèse $EH(1/2 + 2\varpi)$ en se restreignant à des entiers x^{δ}-friables[7] q avec δ un paramètre positif suffisamment petit. Ensuite, il a montré une version faible de ce résultat en ayant une uniformité sur les résidus a dont la valeur modulo p est fixée pour $p \leqslant x^{\delta}$. Ainsi la majoration est uniforme sur les a tels que $K(a-h) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, q)$ car, grâce au lemme chinois, ces classes sont déterminées par les congruences $K(a-h) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ lorsque $p \leqslant x^{\delta}$. L'intérêt d'introduire un paramètre de friabilité est de sommer sur des modules q qui sont factorisables sous la forme $q = q_1 q_2$ avec des q_i ayant une taille contrôlée par exemple dans un intervalle de la forme$[R/y, R]$ pour toute valeur $R \in [1, q]$. Cela revient à écrire la fonction caractéristique de l'ensemble de ces q comme une convolée de deux fonctions arithmétiques et ainsi facilite la démonstration d'un résultat d'équirépartition.

Nous prolongeons cette remarque en citant le résultat de Friedlander et Iwaniec [9] qui montrent pour la fonction

$$\tau_3(n) = \mathbf{1} * \mathbf{1} * \mathbf{1}(n) = \sum_{d_1 d_2 d_3 = n} 1$$

où $\mathbf{1}$ est la fonction constante qui vaut toujours 1, la majoration

$$\Delta(\tau_3 \mathbf{1}_{n \leqslant x}; a, q) \ll \frac{x}{q} (\log x)^{-A}$$

pour $q \leqslant x^{1/2+1/230}$ et uniformément par rapport à $a (\mathrm{mod}\, q)$. Ce résultat nécessite une majoration d'une somme d'exponentielles en trois variables sur les corps finis qui est aussi utilisée par Zhang. Celle-ci a été établie dans un appendice à [9] par Birch et Bombieri en utilisant la première preuve de Deligne de l'hypothèse de Riemann sur les corps finis (les conjectures de Weil pour les variétés projectives lisses sur les corps finis).

Ainsi, l'article de Zhang s'inscrit d'une part dans la continuité des résultats de la littérature, d'autre part apporte des nouvelles idées suffisamment fondamentales pour ouvrir un nouveau champ de recherche.

5. L'effervescence après la publication du résultat de Yitang Zhang et le projet Polymath8

La publication du résultat de Yitang Zhang est une sorte de tremblement de terre qui déclenche immédiatement un grand nombre de travaux. Ainsi le 5 juin 2013, Trudgian [19] poste un article sur Arxiv pour l'améliorer montrant $H_1 \leqslant H(3\,500\,000) \leqslant 59\,874\,594$.

[7] On dit qu'un entier n est y-friable si tous ses facteurs premiers sont $\leqslant y$.

C'est dans ce contexte que Terrence Tao propose le 7 juin sur son blog de commencer un nouveau projet polymath (Polymath8) afin de mieux comprendre l'article de Zhang et de pousser sa méthode jusqu'à sa limite pour trouver une valeur stable de majorant de H_1. Ce projet est collaboratif, c'est-à-dire ouvert à tous. Pendant cinq mois de juin à octobre, la valeur de la borne diminue régulièrement jusqu'à $H(632) \leqslant 4\,680$, alors qu'une démonstration sans utiliser les résultats de Deligne concernant l'hypothèse de Riemann sur les corps finis établit que $H_1 \leqslant H(1\,783) \leqslant 14\,950$.

L'idée de projet collaboratif a été lancée par Tim Gowers en janvier 2009. Nous renvoyons le lecteur intéressé à la présentation [11] qui analyse les avantages, les inconvénients d'une telle démarche et les conditions d'un succès. Il s'agit d'une initiative publique lancée à partir d'un blog qui puisse recueillir les contributions de tout mathématicien. Les commentaires sont censés être assez courts afin que cela ne soit pas une compilation de longs articles à lire mais plutôt une discussion. Les nouvelles techniques développées pour un blog permettent de garder en mémoire toutes les contributions. Gowers souligne qu'il est préférable avant de lancer un sujet d'avoir un plan de bataille. Il est difficile d'envisager le succès d'un tel projet pour résoudre l'hypothèse de Riemann.

Dans le cas de Polymath8, le plan de travail proposé était très clair puisque se basant sur le texte de Zhang. Cette base de départ a permis à des spécialistes de différents domaines de participer. De plus, le dynamisme impressionnant de Tao dont le blog hébergeait les discussions a permis d'avoir une sorte de chef d'orchestre centralisant les idées et les mettant en forme. Sans doute, l'aspect addictif de constater tous les jours la diminution du majorant de H_1 a permis de captiver un large auditoire au-delà des experts du sujet. Le résultat est spectaculaire puisqu'en moins de huit mois il a permis de rédiger un article très clairement écrit de 163 pages rassemblant une quantité et une variété de mathématiques impressionnantes et divisant par plus de 10 000 la borne initiale de Zhang. Ce projet a été fait sous l'impulsion de 11 mathématiciens qui ont apporté une contribution significative et dont la liste peut être lue sur le blog de Michael Nielsen.[8] Cela a sans doute permis d'éviter une cascade de publications améliorant la borne de Zhang sans apporter d'idée novatrice. De plus, sans Polymath8, ce processus aurait pris de longues années.

Nous présentons maintenant différents aspects des améliorations obtenues dans [18] par Polymath8.

(1) Certains ont cherché à établir une table de valeurs pour la quantité $H(k)$ introduite en (2). Ce problème demande à la fois des méthodes de théorie analytique des nombres et d'autre part des calculs numériques qui peuvent être mutualisés. Asymptotiquement, on a $H(k) \leqslant (1+o(1))k \log k$, mais la valeur précise de $H(k)$ n'est obtenue que pour $k \leqslant 342$. Il est clair que de tels résultats n'auraient pu être obtenus aussi rapidement et aussi efficacement sans l'aspect collaboratif de polymath.

(2) Des poids optimaux ont été recherchés. À l'aide de [3], Polymath8 a cherché les meilleurs poids (5) en prenant λ_d sous la forme (3) et en choisissant f de manière optimale. Des fonctions de Bessel apparaissent dans cette optimisation.

[8] voir `http://michaelnielsen.org/polymath1/index.php?title=Polymath8_grant_acknowledgments` pour la liste précise

(3) Au lieu de sommer sur des modules q-friables, il est possible de sommer sur une famille plus grande d'entiers ayant une divisibilité y-dense c'est-à-dire tels que pour tout $1 \leqslant R \leqslant q$ il existe une factorisation $q = q_1 q_2$ avec $R/y < q_1 \leqslant R$. Les y-friables sont clairement à divisibilité y-dense. Cette propriété permet encore d'écrire la fonction caractéristique de l'ensemble des modules sur lesquels on somme comme une convolée de deux fonctions arithmétiques à support contrôlé. Cette notion est encore généralisée pour améliorer les bornes de H_1.

(4) Après avoir utilisé l'identité de Heath-Brown (qui ici remplace de manière classique l'identité de Vaughan jugée plus contraignante), on doit établir des résultats d'équirépartition pour certaines convolées. Ces progrès ont été faits juste après que Fouvry, Kowalski et Michel sortent une impressionnante série d'articles concernant l'application de la cohomologie étale pour majorer certaines sommes d'exponentielles permettant entre autres dans [7] d'améliorer l'exposant de répartition associé à la fonction τ_3 par tout $\vartheta < \frac{1}{2} + \frac{1}{34}$. L'article [8] a été rédigé grâce aux questions posées par Polymath8.

6. La nouvelle approche de Maynard

Polymath8 a repris globalement la structure de la démonstration de Zhang. Lors du colloque Analytic Number Theory à Oberwolfach à la fin du mois d'octobre 2013, James Maynard expose une nouvelle méthode qui permet d'une part de montrer que $H_1 \leqslant 600$ sans avoir recours à des résultats d'équirépartition avec des exposants $> \frac{1}{2}$, d'autre part d'établir pour la première fois la finitude des H_j pour tout $j \geqslant 2$ et cela inconditionnellement. Il n'a donc pas besoin des résutats de géométrie algébrique de Deligne. Le fait de montrer que les H_j sont tous bornés est vraiment spectaculaire puisqu'on ne savait même pas que les quantités Δ_j définies en (1) étaient nulles pour $j \geqslant 2$. Même conditionnellement à une hypothèse d'Elliott–Halberstam, ce résultat n'avait jamais pu être montré auparavant. De plus sous l'hypothèse d'Elliott–Halberstam pour tout exposant $\vartheta < 1$, il arrive à montrer que $H_1 \leqslant 12$ contrairement à Zhang qui n'avait pas amélioré la majoration conditionnelle de GPY. Notons qu'indépendamment de Maynard et, à peu près au même moment, Tao a eu la même idée concernant la forme des poids à utiliser. Il a été étonnant de constater sur le blog de Tao quelques heures après l'exposé de Maynard l'agitation provoquée par cette nouvelle. L'article de Maynard a été mis sur ArXiv en novembre 2013 [15].

Maynard est un jeune Anglais qui a soutenu une thèse sur un sujet proche dirigée par Heath-Brown et qui est en stage post-doctoral au CRM à Montréal. Son idée est très simple mais elle a surpris les spécialistes du crible : il choisit des poids ν de la forme

$$\nu(n) = \sum_{d_1 | n+h_1} \cdots \sum_{d_k | n+h_k} \lambda(d_1, \ldots, d_k)$$

où $\lambda(d_1, \ldots, d_k)$ ressemble à

$$\lambda(d_1, \ldots, d_k) \approx \mu(d_1) \cdots \mu(d_k) g\Big(\frac{\log d_1}{\log D}, \ldots, \frac{\log d_k}{\log D}\Big),$$

avec g une fonction suffisamment régulière et à support inclus dans

$$\mathcal{R}_k = \{(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}_+^k \;:\; t_1 + \cdots + t_k \leqslant 1\}.$$

Le cas $g(t_1, \dots, t_k) = f(t_1 + \cdots + t_k)$ permet de se ramener au cas de GPY. À toute fonction g, on peut associer une fonction F de la manière suivante

$$\frac{\partial^k g}{\partial_{t_1} \cdots \partial_{t_k}} = F.$$

Posant alors

$$M_k = \sup_F \frac{\sum_{j=1}^k J_{k,j}(F)}{I_k(F)}$$

où le supremum est pris sur les fonctions F suffisamment régulières ayant pour support $\mathcal{R}_k$ et

$$\begin{aligned} I_k(F) &:= \int_0^1 \cdots \int_0^1 F(t_1, \dots, t_k)^2 \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_k \\ J_{k,j}(F) &:= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Big(\int_0^1 F(t_1, \dots, t_k) \mathrm{d}t_j \Big)^2 \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_{j-1} \mathrm{d}t_{j+1} \cdots \mathrm{d}t_k. \end{aligned}$$

Maynard obtient lorsque $m + 1 \leqslant \lceil \frac{1}{2} M_k \vartheta \rceil$ sous $EH(\vartheta)$ la majoration

$$H_m \leqslant H(k).$$

Comme M_k tend vers l'infini avec k, il est possible de choisir $\vartheta < \frac{1}{2}$. Les améliorations quantitatives et qualitatives sont alors spectaculaires. Comme $M_{105} > 4$ et $M_5 > 2$, il obtient $H_1 \leqslant H(105) = 600$ et, sous $EH(\vartheta)$ pour tout $\vartheta < 1$, l'inégalité $H_1 \leqslant H(5) = 12$.

Il reste à savoir quelles sont les limites de la méthode de Maynard. Après [18] appelé aussi Polymath8a, Polymath8 est en train d'optimiser tous les paramètres de Maynard en reprenant notamment les résultats d'équirépartition obtenus lors de la première partie de Polymath8. Ainsi Polymath8b auquel participe activement Maynard obtient des résultats impressionnants. Il annonce l'inégalité $H_1 \leqslant H(3) = 6$ sous une hypothèse généralisant celle d'Elliott–Halberstam et l'inégalité $H_1 \leqslant H(54) = 270$ inconditionnellement. Sa démarche consiste notamment à élargir le plus possible le support $\mathcal{R}_k$ de F. Il est fort probable que la borne qu'il obtiendra à la fin de leur travail sera difficile à dépasser sans une nouvelle idée.

7. Conclusion

Le projet collaboratif Polymath8 est déjà un succès. Il a permis de rassembler des mathématiciens de talent pour pousser jusqu'à ses limites les méthodes de Zhang et est en train de faire de même avec celles de Maynard. L'article [18] remplace avantageusement des articles en ordre dispersés qui auraient été rédigés pour améliorer partiellement [20]. Les résultats intermédiaires obtenus seront utiles pour d'autres problèmes. Le sujet se prête particulièrement à ce type de démarche : les progrès sont simples à énoncer, les tâches à réaliser ont été faciles à partager avec des méthodes extrêmement variées : de l'optimisation numérique à l'application de la cohomologie étale en passant par des techniques sophistiquées de crible. Tao a joué un rôle majeur d'animation et de vérification des arguments de chacun des contributeurs.

La démarche de polymath pose le problème de la propriété intellectuelle et de la reconnaissance du travail de ses participants. Les contributeurs principaux de Polymath8a n'ont sans doute pas besoin d'une ligne supplémentaire dans leur CV mais l'histoire ne retiendra sans doute que les noms de Zhang, Maynard et Tao pour ces avancées spectaculaires vers la conjecture des nombres premiers jumeaux. Ce n'est pas la première fois que cela arrive puisque les mathématiciens du groupe Nicolas Bourbaki n'ont jamais signé personnellement leur ouvrage. Les mathématiciennes et mathématiciens devront s'adapter à cette nouvelle manière de travailler. Même si ce n'est malheureusement pas la tendance actuelle, rêvons même à une manière moins quantitative et plus qualitative d'évaluer la recherche mathématique.

D'autres projets polymath ont été entrepris mais la plupart ont eu moins de succès. Il ne m'appartient pas d'en analyser les raisons, mais le succès de Polymath8 s'explique peut-être tout simplement par la fascinante beauté des problèmes de la théorie des nombres.

Remerciements. Je remercie Sary Drappeau, Bernard Helffer, Mathilde Herblot, Marc Hindry, Jean-Marie de Koninck, Emmanuel Kowalski, Gérald Tenenbaum pour leur relecture attentive et leurs remarques.

8. Références

[1] E. Bombieri, J. Friedlander, H. Iwaniec, Primes in arithmetic progressions to large moduli, *Acta Math.* **156** (1986), n° 3–4, 203–251.
[2] L. E. Dickson, A new extension of Dirichlet's theorem on prime numbers, *Messenger of mathematics* **33** (1904), 155-161.
[3] B. Farkas, J. Pintz, S. Révész, On the optimal weight function in the Goldston-Pintz-Yıldırım method for finding small gaps between consecutive primes, à paraître dans Paul Turán Memorial Volume : Number Theory, Analysis and Combinatorics, de Gruyter, Berlin, 2013.
[4] É. Fouvry, Autour du théorème de Bombieri-Vinogradov, *Acta Math.* **152** (1984), n° 3-4, 219–244.
[5] É. Fouvry, H. Iwaniec, On a theorem of Bombieri-Vinogradov type, *Mathematika* **27** (1980), n° 2, 135–152 (1981).
[6] É. Fouvry, H. Iwaniec, Primes in arithmetic progressions, *Acta Arith.* **42** (1983), n° 2, 197–218.
[7] É. Fouvry, E. Kowalski, P. Michel, On the exponent of distribution of the ternary divisor function, arXiv :1304.3199, à paraître dans Mathematika (2013).
[8] É. Fouvry, E. Kowalski, P. Michel, On the conductor of cohomological transforms, preprint (2013), `http://arxiv.org/pdf/1310.3603`.
[9] J. Friedlander, H. Iwaniec, Incomplete Kloosterman sums and a divisor problem, With an appendix by Bryan J. Birch and Enrico Bombieri. *Ann. of Math.* (2) **121** (1985), n° 2, 319–350.
[10] J. Friedlander, A. Granville, A. Hildebrand, H. Maier, Oscillation theorems for primes in arithmetic progressions and for sifting functions, *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1991), n° 1, 25–86.
[11] T. Gowers, Is massively collaborative mathematics possible ?, `http://gowers.wordpress.com/2009/01/27/is-massively-collaborative-mathematics-possible/`, (2013).
[12] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Some problems of "Partitio Numerorum", III : On the expression of a number as a sum of primes, *Acta Math.* **44** (1923), 1–70.
[13] D. Goldston, J. Pintz, C. Yıldırım, Primes in tuples. I, *Ann. of Math.* **170** (2009), n° 2, 819-862.
[14] E. Klarreich, Unheralded Mathematician Bridges the Prime Gap, `https://www.simonsfoundation.org/quanta/20130519-unheralded-mathematician-bridges-the-prime-gap/`, (2013).
[15] J. Maynard, Small gaps between primes, `http://arxiv.org/abs/1311.4600`, (2013).

[16] Y. Motohashi, J. Pintz, A smoothed GPY sieve, *Bull. Lond. Math. Soc.* 40 (2008), n° 2, 298-310.
[17] A. de Polignac, Recherches nouvelles sur les nombres premiers, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **29** (1849), 397-401, Rectification : ibid. pp.738-739.
[18] D.H.J. Polymath, New equidistribution estimates of Zhang type, and bounded gaps between primes, `http://arxiv.org/abs/1402.0811`, (2014).
[19] T. S. Trudgian, A poor man's improvement on Zhang's result : there are infinitely many prime gaps less than 60 million, prépublication, voir `http://arxiv.org/abs/1305.6369`, (2013).
[20] Y. Zhang, Bounded gaps between primes, à paraître dans *Annals of Mathematics*, (2013).

La conjecture de Waldhausen est démontrée !

Nicolas Bergeron[1]

1. L'énoncé de la conjecture de Waldhausen

Pour s'attaquer à la classification des surfaces fermées (compactes, sans bord et orientables) à homéomorphisme près, une manière de procéder est de les simplifier progressivement en les découpant le long de courbes jusqu'à obtenir des polygônes comme sur la figure 1.

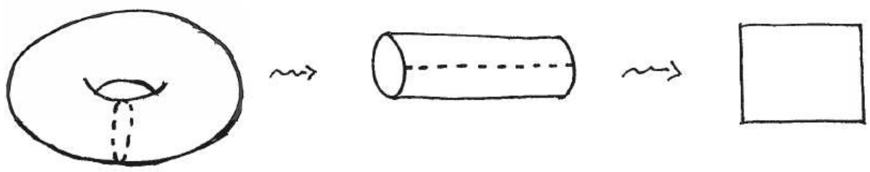


FIG. 1. Découpage du tore

La sphère est la seule surface fermée qui est simplement connexe. Sur une surface S fermée qui n'est pas homéomorphe à la sphère, on peut donc trouver une courbe *plongée* et *incompressible*, c'est-à-dire qui représente un élément non trivial du groupe fondamental de la surface. Découper S selon cette courbe lui enlève une partie intéressante de sa topologie et il est connu depuis plus de 100 ans que l'on peut itérer le processus jusqu'à obtenir une collection finie de polygones. Au final, la surface S est homéomorphe à la surface d'une bouée à g places. L'entier g caractérise complètement la surface S à homéomorphisme près ; on l'appelle le *genre* de la surface.

[1] Institut de Mathématiques de Jussieu, université Pierre et Marie Curie, Paris, France.

Distinguer les variétés de dimension 3 à homéomorphisme près est beaucoup plus compliqué : une courbe sur une surface est toujours homéomorphe à un cercle alors qu'une variété de dimension 3 peut *a priori* être découpée selon des surfaces de genres différents. On commence naturellement par découper les variétés de dimension 3 selon des sphères qui ne bordent par de boule. Si une telle sphère existe la variété se décompose en une *somme connexe*, c'est-à-dire qu'elle est obtenue en recollant selon leur bord deux variétés à bord, qui ne sont pas des boules mais ont pour bord une sphère. *A contrario* si la variété ne peut pas être décomposée en somme connexe, elle est dite *irréductible*. La classification des variétés de dimension 3 à homéomorphisme près se réduit en fait assez vite à la classification de celles d'entre elles qui sont irréductibles.

Au début des années 60 (du siècle précédent) Wofgang Haken [7] a montré que pour classifier les variétés irréductibles on peut procéder par découpage, comme dans le cas des surfaces, *à condition de pouvoir démarrer le processus*. Cela motive la définition suivante.

Définition 1.1. *Soit V une variété de dimension* 3*, lisse, compacte, connexe, orientable, sans bord et irréductible. La variété V est dite de Haken si elle contient une surface plongée Σ de genre $g \geqslant 1$ telle que l'inclusion induise une injection au niveau des groupes fondamentaux.*

Une variété de Haken peut ainsi être découpée selon la surface Σ. On obtient une variété de dimension 3 à bord mais dont la « complexité topologique » a diminué. Et comme dans le cas des surfaces, Haken montre que l'on peut itérer le processus jusqu'à obtenir une collection finie de polyèdres. On peut enfin reconstruire la variété V en recollant ce qu'on a découpé.

La morale de cette histoire est que les variétés de Haken sont des variétés que l'on comprend bien. Friedhelm Waldhausen montre d'ailleurs que deux variétés de Haken sont homéomorphes si et seulement si leur groupes fondamentaux sont isomorphes. Reste que de nombreuses variétés ne sont pas de Haken. Pour pouvoir se ramener aux variétés de Haken, Waldhausen [12] a néanmoins proposé la conjecture suivante.

Conjecture 1.2 (Conjecture de Waldhausen)**.** *Soit V une variété de dimension* 3*, lisse, compacte, connexe, orientable, sans bord et irréductible. Si le groupe fondamental de V est infini, alors V possède un revêtement fini qui est une variété de Haken.*

Un revêtement fini de V est une variété de dimension 3 compacte que l'on peut « enrouler » autour de V un nombre fini de fois sans la déchirer et sans faire de plis, comme lorsque l'on enroule un cercle plusieurs fois autour d'un autre. Une autre manière d'énoncer la conjecture consiste aussi à dire que *le groupe fondamental de V contient un sous-groupe d'indice fini qui est isomorphe au groupe fondamental d'une variété de Haken.*

Depuis l'énoncé de cette conjecture, l'étude de la topologie des variétés de dimension 3 a connu de grands bouleversements : William Thurston [11] [5] a proposé de relier topologie et géométrie à travers sa « conjecture de géométrisation ». En 2002 celle-ci est démontrée par Grigori Perelman : *une variété de dimension* 3 *compacte peut être canoniquement découpée en un nombre fini de morceaux et chacun de ces morceaux peut naturellement être munie d'une des « huit géométries* *de Thurston* ». Trois de ces géométries sont particulièrement importantes car localement homogènes et isotropes. Ce sont les géométries à courbure constante : la géométrie euclidienne (ou plate), de courbure constante égale à 0, qui nous est familière, et dont un modèle est l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$. Mais aussi la géométrie sphérique, version tri-dimensionnelle de la géométrie de notre planète, qui est de courbure constante égale à $+1$ et dont un modèle est l'hypersphère $\mathbf{S}^3$. Et enfin la géométrie hyperbolique, de courbure constante égale à -1, la plus riche, la plus belle mais aussi la plus mystérieuse, dont un modèle est l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^3$ [9]. La gravure 2 permet de se représenter son analogue bi-dimensionnel, le plan hyperbolique, tel qu'un observateur le verrait à travers une lentille qui aurait tendance à écraser de plus en plus les distances entre les objets proches du bord. Dans le plan hyperbolique lui-même les anges, et les démons, font tous la même taille.

FIG. 2. *Anges et démons* par Maurits Cornelis Escher

Une variété V de dimension 3 est dite euclidienne, sphérique ou hyperbolique, si V est localement modelée sur $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{S}^3$ ou $\mathbf{H}^3$. Autrement dit, si V est munie d'une métrique riemannienne à courbure constante égale à 0, $+1$ ou -1.

Les conséquences du théorème de Perelman sont bien sûr nombreuses, avec en premier lieu la démonstration de la conjecture de Poincaré. Pourtant la conjecture de Waldhausen restait ouverte pour les variétés hyperboliques montrant bien que la topologie de celles-ci restait très mystérieuse.

Suite aux travaux de (principalement) Jeremy Kahn, Vladimir Markovic, Dani Wise et Ian Agol, la situation a radicalement changé ces cinq dernières années, avec pour point culminant la démonstration par Agol [1] de la conjecture de Waldhausen :

Théorème 1.3 (Agol)**.** *Soit V une variété hyperbolique de dimension* 3*, compacte et sans bord. Alors V possède un revêtement fini qui est une variété de Haken.*

Un aspect surprenant de la démonstration d'Agol est qu'*elle prouve bien plus* : son théorème général répond en fait à la plupart (toutes ?) des questions que l'on se posait sur la structure des groupes fondamentaux des variétés hyperboliques de dimension 3. Dans la suite de ce texte on tâche d'expliquer le contexte des bouleversements qui ont conduit à la démonstration de ce théorème, pour plus de détails on pourra se reporter au texte [2] de mon récent séminaire Bourbaki.

2. Construire des surfaces

En 2009, le mystère autour de la conjecture de Waldhausen a commencé à s'éclaircir avec la démonstration du théorème suivant.

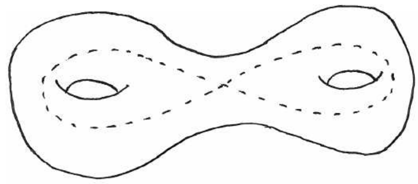


FIG. 3. Une courbe incompressible mais immergée

Théorème 2.1 (Kahn-Markovic [8]). *Soit V une variété hyperbolique de dimension* 3, *compacte et sans bord. Alors V contient une surface* immergée Σ *de genre* $g \geqslant 2$ *telle que l'inclusion induise une injection au niveau des groupes fondamentaux.*

La figure 3 illustre le théorème (avec une dimension de moins !). La différence entre l'énoncé du théorème de Kahn et Markovic et celui de la conjecture de Waldhausen semble bien minime : dans le théorème la surface est *immergée* dans la conjecture elle est *plongée*. Cette différence est pourtant cruciale. Il existe d'ailleurs beaucoup de variétés hyperboliques de dimension 3 qui ne sont pas de Haken. On peut toutefois espérer désingulariser la surface Σ en passant à un revêtement fini, comme l'illustre la figure 4.

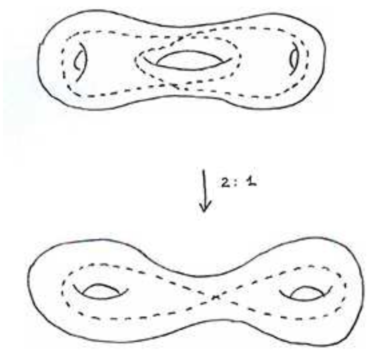


FIG. 4. Un revêtement de degré 2 de la figure 3 où les deux élévations de la courbe immergée sont plongées

Grâce aux travaux de Peter Scott, on dispose d'ailleurs d'un critère algébrique sur le groupe fondamental de V qui assure qu'une surface obtenue par le théorème de Kahn et Markovic peut être « désingularisée » dans un revêtement fini. Cette propriété porte le nom barbare de *QFERF*. En particulier, si V est une variété hyperbolique de dimension 3, compacte et sans bord dont le groupe fondamental est QFERF, la variété V vérifie la conjecture de Waldhausen.

Depuis une quinzaine d'années Dani Wise étudie systématiquement ce problème de « désingularisation » dans un revêtement fini. Il a été naturellement amené à déplacer le problème dans le contexte plus rigide des complexes cubiques.

3. Complexes cubiques

Définition 3.1. *Un complexe cubique est un complexe cellulaire obtenu en recollant des cubes* $[-1,1]^n$ *le long de leurs faces par des isométries.*

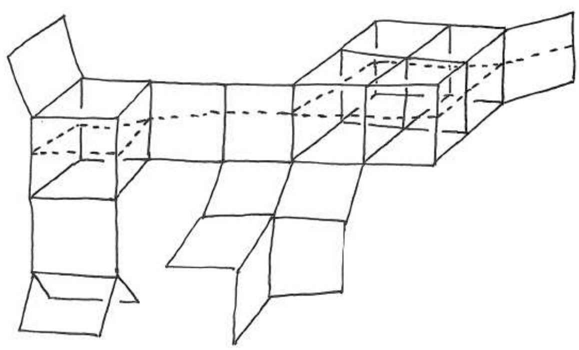


FIG. 5. Un complexe cubique CAT(0) avec un de ses hyperplans

Les complexes cubiques sont très commodes, on dispose par exemple d'une notion combinatoire de « courbure négative » : l'espace métrique obtenu en munissant chaque cube de sa distance euclidienne est dit à courbure négative ou nulle si « dès que l'on voit un coin de cube (par exemple trois carrés adjacents partageant un sommet) alors le cube tout entier est présent ». Enfin, on appelle complexe cubique CAT(0) tout revêtement universel d'un complexe cubique à courbure négative ou nulle.

Il faut penser aux complexes cubiques CAT(0) comme à des généralisations des arbres : couper une arête en son milieu sépare un arbre en deux composantes distinctes. Les complexes cubiques CAT(0) vérifient la même propriété à condition de remplacer les milieux d'arêtes par les *hyperplans*.

Définition 3.2. *Soit C un complexe cubique CAT*(0)*. On appelle hyperplan de C un sous-espace connexe de C dont l'intersection avec chaque cube de C consiste soit en un unique* cube médian*, c'est-à-dire un sous-espace de* $[-1,1]^n$ *obtenu en fixant l'une des coordonnées égale à* 0*, soit en l'ensemble vide.*

On appelle plus généralement *hyperplan* d'un complexe cubique à courbure négative ou nulle la projection d'un hyperplan de son revêtement universel.

Contrairement à ce qui se passe avec les variétés hyperboliques, dans un complexe cubique on a gratuitement des « hypersurfaces » : les *hyperplans*. On peut donc se concentrer sur la manière dont ceux-ci s'(auto-)intersectent.

Lorsque certaines pathologies d'hyperplans sont évitées Frédéric Haglund et Dani Wise [6] démontrent que l'on peut « désingulariser » tout sous-complexe localement convexe. Ils montrent en fait que le groupe fondamental G du complexe cubique a la propriété QFERF évoquée plus haut. Mieux, ils démontrent que le groupe G a une liste impressionnante d'autres propriétés. Ainsi G est linéaire sur $\mathbb{Z}$, possède un sous-groupe d'indice fini qui est ordonnable,... Par la suite Dani Wise est progressivement parvenu à réduire la liste des pathologies d'hyperplans à éviter. Lorsque le groupe fondamental du complexe cubique est supposé « hyperbolique », au sens de Gromov, ce qui est par exemple le cas des groupes fondamentaux de variétés hyperboliques compactes, Wise démontre le théorème suivant.

Théorème 3.3 (Wise [13]). *Soit X un complexe cubique compact à courbure négative ou nulle dont tous les hyperplans sont* plongés. *Supposons que le groupe fondamental G de X est un groupe hyperbolique au sens de Gromov. Alors le groupe G a la propriété QFERF, est linéaire sur $\mathbb{Z}$, possède un sous-groupe d'indice fini qui est ordonnable,...*

On peut maintenant énoncer le théorème général d'Agol.

Théorème 3.4 (Agol [1]). *Soit X un complexe cubique compact à courbure négative ou nulle. Si le groupe fondamental G de X est un groupe hyperbolique au sens de Gromov, alors X possède un revêtement fini dont tous les hyperplans sont plongés.*

Ce résultat était conjecturé par Wise. La démonstration d'Agol fait d'ailleurs un usage essentiel de résultats partiels profonds de Wise.

On notera l'analogie avec la conjecture de Waldhausen. Le cadre des complexes cubiques et des hyperplans est toutefois bien pratique. En effet, les hyperplans sont très rigides. Il n'y a par exemple qu'un moyen de continuer un hyperplan après qu'il a pénétré un cube.

4. Vers les variétés hyperboliques... et au-delà ?

Le lien entre le théorème d'Agol et la conjecture de Waldhausen est fourni par une construction générale de Michah Sageev [10]. Dans le cas qui nous occupe, cette construction nous a permis avec Wise [3], et indépendamment Guillaume Dufour [4], de déduire du théorème de Kahn et Markovic le théorème suivant.

Théorème 4.1. *Soit V une variété hyperbolique de dimension* 3*, compacte et sans bord. Alors le groupe fondamental de V est isomorphe au groupe fondamental d'un complexe cubique compact à courbure négative ou nulle.*

Il découle donc des théorèmes d'Agol et Wise que le groupe fondamental de V a la propriété QFERF (mais aussi qu'il est linéaire sur $\mathbb{Z}$, possède un sous-groupe d'indice fini qui est ordonnable,...). En particulier, la conjecture de Waldhausen est démontrée !

Pour conclure notons que de manière surprenante le théorème d'Agol a pour corollaire le théorème suivant qui répond positivement à une question de Thurston.

Théorème 4.2 (Agol). *Soit V une variété hyperbolique de dimension* 3*, compacte et sans bord. Alors V possède un revêtement fini qui fibre sur le cercle.*

Autrement dit, la variété V possède un revêtement fini qui est difféomorphe au quotient d'un produit $\Sigma \times [0,1]$, où Σ est une surface fermée de genre $g \geqslant 2$, par la relation d'équivalence

$$(x,0) \sim (f(x),1) \quad (x \in \Sigma),$$

où f est un difféomorphisme de Σ. Le théorème d'Agol réduit donc *essentiellement*[2] l'étude des variétés hyperboliques de dimension 3 à un problème de dynamique en dimension 2, à savoir l'étude des difféomorphismes de surfaces.

Pour magnifique que soit ce résultat on prendra toutefois garde au fait qu'en pratique c'est le théorème 3.4 qui a de nombreuses conséquences.[3] En dévoilant une structure interne cachée des variétés de dimension 3, le théorème 3.4 a en effet permis de résoudre toutes les questions qui restaient ouvertes dans la liste proposée par Thurston [11] et qui guide depuis plus de 30 ans les recherches des topologues en dimension 3. C'est la fin d'une ère mais aussi le début d'un nouvel axe de recherche. Il s'agit maintenant de mettre en évidence une structure cubique similaire parmi d'autres espaces et d'en récolter les fruits. Le nouveau mot d'ordre est donc :

CUBULER !

5. Références

[1] Ian Agol, *The virtual Haken conjecture*, Doc. Math. **18** (2013), 1045-1087, With an appendix by Agol, Daniel Groves, and Jason Manning. MR 3104553

[2] Nicolas Bergeron, *Toute variété de dimension* 3 *compacte et asphérique est virtuellement de Haken (d'après Ian Agol et Daniel T. Wise)*, Séminaire Bourbaki. 66ème année, 2013-2014, Exp. N° 1078.

[3] Nicolas Bergeron and Daniel T. Wise, *A boundary criterion for cubulation*, Amer. J. Math. **134** (2012), n° 3, 843-859. MR 2931226

[4] Guillaume Dufour, *Cubulations de variétés hyperboliques compactes*, (2012), Thèse de l'Université Paris Sud.

[5] Étienne Ghys « Géométriser l'espace de Gauss à Perelman », Images des maths, `http://images.math.cnrs.fr/Geometriser-l-espace-de-Gauss-a.html`

[6] Frédéric Haglund and Daniel T. Wise, *Special cube complexes*, Geom. Funct. Anal. **17** (2008), n° 5, 1551-1620. MR 2377497 (2009a :20061)

[7] Wolfgang Haken, *Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten. I*, Math. Z. **80** (1962), 89-120. MR 0160196 (28 #3410)

[8] Jeremy Kahn and Vladimir Markovic, *Immersing almost geodesic surfaces in a closed hyperbolic three manifold*, Ann. of Math. (2) **175** (2012), n° 3, 1127-1190. MR 2912704

[9] Jos Leys « Une chambre hyperbolique », Images des maths, `http://images.math.cnrs.fr/Une-chambre-hyperbolique.html`

[10] Michah Sageev, *Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes*, Proc. London Math. Soc. (3) **71** (1995), n° 3, 585-617. MR 1347406 (97a :20062)

[11] William P. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **6** (1982), n° 3, 357-381. MR 648524 (83h :57019)

[12] Friedhelm Waldhausen, *On irreducible* 3*-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 56-88. MR 0224099 (36 #7146)

[13] Daniel T. Wise, *The structure of groups with a quasiconvex hierarchy*, 1-200, Preprint 2009.

[2] Plus précisément, à un revêtement fini près.

[3] Cela n'est peut-être pas si surprenant : la dynamique en dimension 2 peut être très compliquée !

Sur le théorème de Noether

Alain Guichardet

1. Introduction

1.1. L'énoncé originel

L'exposé qui va suivre gravite autour de ce qu'on appelle maintenant le *premier théorème de Noether*, publié en 1918, dont voici l'énoncé originel (Noether, [11]).

> *Ist das Integral I invariant gegenüber einer G_ρ, so werden ρ linear-unabhängige Verbindungen der Lagrangeschen Ausdrücke zu Divergenzen – umgekehrt folgt daraus die Invarianz von I gegenüber einer G_ρ. Der Satz gilt auch noch im Grenzfall von unendlich vieler Parametern.*

Voici maintenant la traduction donnée dans Kosmann-Schwarzbach, [10].

> *« Si l'intégrale I est invariante par un groupe G_ρ, alors il y a ρ combinaisons linéairement indépendantes entre les expressions lagrangiennes qui deviennent des divergences – et réciproquement il résulte de cela l'invariance de I par un groupe G_ρ. Le théorème reste encore valable dans le cas limite d'un nombre infini de paramètres ».*

Précisons tout de suite que « l'intégrale I » désigne l'intégrale d'action que minimisent les équations de Lagrange, et que « groupe G_ρ » signifie « groupe ou algèbre de Lie de dimension ρ ».

On va s'efforcer de formuler son énoncé et sa démonstration dans le langage familier aux mathématiciens d'aujourd'hui, en commençant par un cadre très limité qu'on élargira par la suite. Pour aider le lecteur à décrypter cet énoncé un peu énigmatique, précisons tout de suite le problème considéré par Noether. Dans un premier temps, on a un système physique dont l'évolution dans le temps est régie par les équations différentielles – dites *d'Euler-Lagrange* – associées à un lagrangien, fonction de la position et de la vitesse ; on a en outre un groupe de Lie opérant par difféomorphismes dans l'espace de configuration en laissant le lagrangien invariant ; on souhaite construire à partir de ces données des *intégrales premières*, ou fonctions de la position et de la vitesse invariantes au cours du mouvement. En fait on s'aperçoit vite qu'on doit remplacer les groupes de Lie par leurs algèbres de Lie, i.e. travailler avec des champs de vecteurs. Par la suite ces objets sont généralisés dans plusieurs directions : d'une part la variable temps est remplacée par un nombre quelconque de variables, dites *indépendantes*, ce qui conduit à remplacer la notion d'intégrale première par celle de *loi de conservation*, formée de plusieurs fonctions de la position et de la vitesse ; d'autre part les lagrangiens, les lois de conservation et les coefficients des champs de vecteurs sont maintenant fonctions des variables indépendantes, des variables de position et des dérivées partielles d'ordre quelconque de ces dernières.

1.2. Quelques rappels historiques

Ils sont librement tirés du livre [10] et éclaireront utilement la situation. Noether a dit elle-même que son travail était motivé par un problème de la théorie de la Relativité Générale qu'Einstein avait créée peu auparavant ; il a été très tôt mentionné par plusieurs mathématiciens – Klein, Hilbert, Weyl,... –, puis largement oublié jusqu'aux années 1950, à partir desquelles il a été cité de plus en plus fréquemment dans des travaux de mathématiques ou de physique traitant de lois de conservation, mais, au début, uniquement dans un cadre très restreint ; c'est le cas par exemple du livre « *Foundations of Mechanics* » d'Abraham et Marsden, qui traite surtout du formalisme hamiltonien. Ce n'est qu'à partir des années 1960 que la pleine force du théorème de Noether a été reconnue et exposée en termes modernes, en utilisant des structures de plus en plus élaborées : citons entre autres Ehresmann (théorie des espaces de jets), Gelfand-Fomin et Gelfand-Dikii (création du formalisme algébrique du calcul des variations, introduction des formes différentielles à coefficients dans les espaces de jets), Vinogradov (utilisation du formalisme de l'algèbre homologique), et enfin Olver dont le livre [13] – une véritable somme ainsi qu'une mise en forme des connaissances actuelles (1993) sur la question – va puissamment étayer notre exposé.

1.3. Organisation de l'exposé

Pour simplifier l'exposé, l'espace de configuration sera toujours une partie ouverte U d'un espace vectoriel $\mathbb{R}^q$ et toutes les applications entre variétés seront supposées indéfiniment différentiables. Nous procéderons par étapes, améliorant progressivement la généralité des résultats.

1.3.1. Première étape

Les éléments de U sont notés $u = (u^\alpha)_{\alpha=1,\dots,q}$; l'espace fibré tangent $\mathsf{T}(U)$ est identifié à $U \times \mathbb{R}^q$, et ses éléments sont notés $(u, u_{(1)})$, $u_{(1)} = (u^\alpha_{(1)})_{\alpha=1,\dots,q}$; les équations d'Euler-Lagrange associées à un lagrangien L portent sur des fonctions d'une variable réelle, le *temps*, parcourant un intervalle ouvert $X \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans U ; les champs de vecteurs sont les champs de vecteurs ordinaires sur U, notés $v = \sum\limits_{\alpha=1}^{q} \mathcal{Q}^\alpha(u) \cdot \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$; un tel champ de vecteurs admet un prolongement naturel noté $\mathrm{pr}^{(1)} v$ à $\mathsf{T}(U)$. À tout v satisfaisant à la condition $\mathrm{pr}^{(1)} v(L) = 0$, on associe la fonction P_v définie par $P_v(u, u_{(1)}) = \sum\limits_{\alpha=1}^{q} \mathcal{Q}^\alpha(u) \cdot \frac{\partial L}{\partial u^\alpha_{(1)}}(u, u_{(1)})$, et on démontre que cette fonction est une intégrale première. De plus, si L vérifie une condition bien naturelle de non-dégénérescence, l'application $v \to P_v$ est injective ; en revanche, pour obtenir une application bijective, il faudra assouplir la condition $(\mathrm{pr}^{(1)} v)(L) = 0$, ce qui sera fait dans le paragraphe suivant (cf. corollaire 2 du théorème 3.4.2). Enfin les actions d'algèbres de Lie se relèvent de façon naturelle en des actions de groupes de Lie sur U conservant L ; on parle alors de *groupes de symétries*.

1.3.2. Seconde étape

Elle comporte plusieurs nouveautés. Premièrement l'espace X des temps est maintenant une partie ouverte d'un espace vectoriel $\mathbb{R}^p$; ses éléments sont appelés *variables indépendantes* et notés $x = (x^i)_{i=1,\ldots,p}$, les u sont appelés *variables dépendantes* ; les lois de conservation, qui remplacent les intégrales premières, sont des familles de fonctions $(P^i)_{i=1,\ldots,p}$. Ensuite les champs de vecteurs sont les champs de vecteurs ordinaires sur $\mathrm{T}(U)$. Enfin on introduit ici le formalisme des espaces de jets, et en particulier les opérateurs D_i et Div portant sur des fonctions définies sur ces espaces. Le résultat final du paragraphe 1.3.1 est généralisé à cette situation de la façon suivante. Le champ de vecteurs v est maintenant de la forme

$$v = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \Phi^\alpha(x,u) \cdot \frac{\partial}{\partial u^\alpha};$$

on lui associe une famille de fonctions P_v^i généralisant d'une façon naturelle les P_v du paragraphe 1.3.1 ; la condition $(\mathrm{pr}^{(1)} v)(L) = 0$ est remplacée par

$$(\mathrm{pr}^{(1)} v)(L) + L \cdot \mathrm{Div}\, \xi \in \mathrm{Im}\, \mathrm{Div}\,.$$

À un tel champ de vecteurs on associe la loi de conservation $R - P_v$ où R est tel que $(\mathrm{pr}^{(1)} v)(L) + L \cdot \mathrm{Div}\, \xi = \mathrm{Div}\, R$, loi de conservation définie, bien entendu, modulo $\mathrm{Ker}\, \mathrm{Div}$; sous une condition de non-dégénérescence généralisant celle du paragraphe 1.3.1, cette construction fournit une bijection entre deux espaces naturels.

Par ailleurs la notion de groupe de symétries est déjà moins claire que dans le cas du paragraphe 1.3.1.

1.3.3. Troisième étape

Les lagrangiens, les lois de conservation dépendent maintenant des variables indépendantes, des variables dépendantes et de leurs dérivées partielles de tous ordres ; il en est de même des coefficients des champs de vecteurs, lesquels sont alors dits *généralisés* ; le résultat du paragraphe 1.3.2 est généralisé à cette situation au prix de calculs plus laborieux et constitue le théorème de Noether dans toute sa généralité. Mais la notion de groupe de symétries est encore moins claire que dans les paragraphes précédents. Citons Olver [12], p. 115 : « There is no longer a nice interpretation of the group transformations themselves » ; rappelons aussi l'existence des « symétries cachées » du problème de Kepler.

1.4. Nos références

Nous ferons fréquemment référence au livre d'Olver [13], utilisant une terminologie et des notations aussi proches que possible des siennes, et renvoyant à lui pour certaines démonstrations, de sorte que le présent travail peut éventuellement être considéré comme une très partielle introduction au dit ouvrage ; nous en présentons quelques idées et résultats qui nous ont paru particulièrement éclairants pour un lecteur pressé souhaitant avoir un aperçu de cette vaste théorie et proposons aussi quelques énoncés plus explicites.

Bien entendu il existe beaucoup d'autres travaux consacrés au théorème de Noether, citons par exemple Y. Kosmann-Schwarzbach [8] et [9] ; il y est formulé dans un langage qui suppose de bonnes connaissances en Géométrie Différentielle : espaces fibrés, opérateurs différentiels à valeurs dans des formes différentielles, ..., langage auquel, suivant en cela P. Olver, nous avons préféré celui, plus universellement répandu dans le monde mathématicien, des fonctions de plusieurs variables et des équations aux dérivées partielles.

Remerciements. Je tiens à remercier ici P. Olver pour ses commentaires, ainsi que le *referee* pour ses très utiles suggestions.

2. Première étape

2.1. Les données

– Intervalle ouvert $X \subset \mathbb{R}$ (espace des *temps*) d'éléments notés x ; on désigne ici le temps par x comme dans Olver [13].

– Espace de configuration U, ouvert connexe d'un espace $\mathbb{R}^q$, d'éléments notés $u = (u^\alpha)_{\alpha=1,\dots,q}$.

– Fibré tangent $\mathsf{T}(U) = U \times U_{(1)} = U \times \mathbb{R}^q$, d'éléments notés $(u, u_{(1)})$ avec

$$u \in U,\ u_{(1)} \in \mathsf{T}_u(U),\ u_{(1)} = \sum_{\alpha=1}^{q} u^\alpha_{(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\,.$$

notations qui seront justifiées dans la sous-section 3.1.

– Lagrangien, fonction réelle L sur $\mathsf{T}(U)$.

– Équations d'Euler-Lagrange, portant sur une application $f : X \to U$:

$$\frac{\partial L}{\partial u}(f(x), \dot f(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial u_{(1)}}(f(x), \dot f(x)) = 0\,, \tag{2.1.1}$$

i.e. pour tout $\alpha = 1, \dots, q$

$$\frac{\partial L}{\partial u^\alpha}(f(x), \dot f(x)) - \sum_\beta \Big(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta \cdot \partial u^\alpha_{(1)}}(f(x), \dot f(x))\cdot \dot f^\beta(x) - \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha_{(1)} \cdot \partial u^\beta_{(1)}}(f(x), \dot f(x))\cdot \ddot f^\beta(x)\Big) = 0\,.$$

Les notations $\dot f$, $\ddot f$ désignent les dérivées première et seconde de f ; les équations d'Euler-Lagrange expriment des conditions nécessaires pour que les intégrales $\int_a^b L(f(x), \dot f(x))\, dx$ soient minimales à extrémités fixées.

2.2. Intégrales premières

Ce sont les fonctions réelles P sur $\mathsf{T}(U)$ telles que, pour toute solution f des équations d'Euler-Lagrange, $P(f(x), \dot f(x))$ soit indépendant de x, i.e.

$$\forall x,\quad \sum_\alpha \Big(\frac{\partial P}{\partial u^\alpha}(f(x), \dot f(x)) \cdot \dot f^\alpha(x) + \frac{\partial P}{\partial u^\alpha_{(1)}}(f(x), \dot f(x)) \cdot \ddot f^\alpha(x)\Big) = 0\,. \tag{2.2.2}$$

Les intégrales premières forment une algèbre, stable par composition à gauche avec une fonction réelle d'une variable réelle. On vérifie sans peine le résultat suivant :

Lemme 2.2.1. *La fonction énergie*

$$\mathrm{EN}(u, u_{(1)}) = \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_{(1)}^{\alpha}}(u, u_{(1)}) \cdot u_{(1)}^{\alpha} - L(u, u_{(1)})$$

est une intégrale première.

Exemple 2.2.2. *On prend $q = 1$, $L(u, u_{(1)}) = \frac{(u_{(1)})^2}{2} - V(u)$; on a*

$$\mathrm{EN}(u, u_{(1)}) = \frac{(u_{(1)})^2}{2} + V(u)\,.$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont réduites à l'équation de Newton

$$V'(f(x)) + \ddot{f}(x) = 0\,.$$

Les intégrales premières sont caractérisées par

$$\frac{\partial P}{\partial u}(f(x), \dot{f}(x))\, \dot{f}(x) - \frac{\partial P}{\partial u_{(1)}}(f(x), \dot{f}(x))\, V(f(x)) = 0\,.$$

Dans le cas où V est nul, les intégrales premières sont exactement les fonctions de la forme $P(u, u_{(1)}) = p(u_{(1)})$ où p est une fonction arbitraire d'une variable réelle. En effet les solutions des équations d'Euler-Lagrange sont de la forme $f(x) = ax + b$ et l'équation ci-dessus signifie que $\frac{\partial P}{\partial u}(u, u_{(1)}) \cdot u_{(1)} = 0$, d'où par continuité $\frac{\partial P}{\partial u} = 0$.
Dans le cas où $V(u) = \frac{u^2}{2}$ (oscillateur harmonique), les intégrales premières sont exactement les fonctions de l'énergie. En effet les solutions des équations d'Euler-Lagrange sont de la forme $f(x) = a \cdot \sin(x + b)$, et les orbites dans $\mathrm{T}(U)$ sont les ensembles définis par des conditions de la forme

$$u^2 + (u_{(1)})^2 = cste\,.$$

Exemple 2.2.3. *On suppose q quelconque et $L(u, u_{(1)}) = \frac{|u_{(1)}|^2}{2} - V(|u|)$ où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne. Sont intégrales premières les composantes du moment cinétique $u^{\alpha} \cdot u_{(1)}^{\beta} - u^{\beta} \cdot u_{(1)}^{\alpha}$; si V est nul, il y a aussi les composantes $u_{(1)}^{\alpha}$ de la vitesse.*

Dans le cas du problème de Kepler (mouvement d'une planète autour du soleil), on a $q = 3$ et

$$U = \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, \quad L(u, u_{(1)}) = \frac{|u_{(1)}|^2}{2} - \frac{\mu}{|u|}$$

où μ est une constante réelle.
On considère le vecteur excentricité (ou encore vecteur de Runge-Lenz) $u_{(1)} \wedge (u \wedge u_{(1)}) - \mu \frac{u}{|u|}$; ses composantes sont des intégrales premières ; la première est la fonction

$$P(u, u_{(1)}) = u_{(1)}^1 (u^2 u_{(1)}^2 + u^3 u_{(1)}^3) - u^1 \left((u_{(1)}^2)^2 + (u_{(1)}^3)^2 \right) + \mu \frac{u^1}{|u|}$$

(voir Olver,[13], example 5.59).

De plus les intégrales premières sont exactement les fonctions des 3 composantes du moment cinétique et de celles du vecteur excentricité. En effet les orbites dans $\mathrm{T}(U)$ *sont les ensembles obtenus en imposant des valeurs à ces 6 fonctions (une étude détaillée du problème de Kepler a été faite par A. Guichardet dans* [6] *, mais du point de vue hamiltonien ; le lien entre celui-ci et le point de vue lagrangien sera fait dans la section 5).*

2.3. Champs de vecteurs

Nous utiliserons ici des champs de vecteurs sur U, notés

$$v = \sum_{\alpha=1}^{q} \mathcal{Q}^\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

ou encore, d'une façon abrégée,

$$v = (Q|\frac{\partial}{\partial u}),$$

où les $\mathcal{Q}^\alpha$ sont des fonctions de u. On définit le *prolongement* de v à $\mathrm{T}(U)$ par

$$\mathrm{pr}^{(1)}v = v + \sum_\alpha (\sum_\beta \frac{\partial \mathcal{Q}^\alpha}{\partial u^\beta} \cdot u^\beta_{(1)}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{(1)}}.$$

définition qui sera justifiée à la sous-section 2.4.
On utilisera la condition suivante, portant sur v :

$$\text{(CV 1)} \qquad (\mathrm{pr}^{(1)}v)(L) = 0\,.$$

Théorème 2.3.1. *On suppose que v vérifie la condition* (CV 1).

(1) *La fonction* $P_v(u, u_{(1)}) = \sum_\alpha \mathcal{Q}(u) \cdot \frac{\partial L}{\partial u^\alpha_{(1)}}(u, u_{(1)})$ *est une intégrale première des équations d'Euler-Lagrange.*

(2) *Si la matrice de coefficients* $\frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha_{(1)} \cdot \partial u^\beta_{(1)}}$ *est inversible pour tout* $(u, u_{(1)})$, *l'application* $v \to P_v$ *est injective.*

Démonstration. Pour (1), c'est un calcul sans problème. Pour (2), il suffit de dériver les deux membres par rapport à $u^\beta_{(1)}$.

NB. On remarquera que l'on n'obtient pas, par ce procédé, l'intégrale première énergie.

Examinons maintenant les exemples introduits plus haut.

– Pour l'exemple 2.2.2, la condition (CV 1) s'écrit

$$\mathcal{Q}(u) \cdot V'(u) - \mathcal{Q}'(u) \cdot (u_{(1)})^2 = 0\,.$$

Elle entraîne $\mathcal{Q} \cdot V' = \mathcal{Q}' = 0$; ou bien v n'est pas constant, alors $\mathcal{Q}$ est nul et on n'obtient aucune intégrale première ; ou bien V et $\mathcal{Q}$ sont constants, et on obtient exactement les multiples de $u_{(1)}$.

– Pour l'exemple 2.2.3, on obtient la composante $u^\alpha \cdot u^\beta_{(1)} - u^\beta \cdot u^\alpha_{(1)}$ du moment cinétique en prenant pour v un multiple convenable du champ de vecteurs $u^\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial u^\beta} - u^\beta \cdot \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$; mais on n'obtient pas les composantes du vecteur excentricité. Si v est nul, on obtient une composante $u^\gamma_{(1)}$ de $u_{(1)}$ en prenant $\mathcal{Q}^\alpha(u) = \delta_{\alpha,\gamma}$.

2.4. Groupes de symétries

Soit d'abord Φ un difféomorphisme de la variété U, de composantes $\Phi(u)^\alpha = \varphi^\alpha(u)$, $\alpha = 1, \ldots, q$; on le prolonge à $\mathrm{T}(U)$ de la façon suivante :

$$(\mathrm{pr}^{(1)}\Phi)(u, u_{(1)}) = \left(\Phi(u), (\mathrm{d}\Phi)_u(u_{(1)})\right) ,$$

où $((\mathrm{d}\Phi)_u(u_{(1)}))^\alpha = \sum\limits_\beta \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta} \cdot u^\beta_{(1)}$.
On dit que le lagrangien L *est invariant par* Φ si $L \circ \mathrm{pr}^1\Phi = L$; dans ce cas, si f est une solution des équations d'Euler-Lagrange, il en est de même de $\Phi \circ f$.
Soit maintenant $t \to \Phi_t$ un groupe à un paramètre de difféomorphismes de U ; on lui associe son *générateur infinitésimal*, champ de vecteurs $v = \sum\limits_{\alpha=1}^{q} \mathcal{Q}^\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ où $\mathcal{Q}^\alpha(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}|_{t=0}\varphi^\alpha_t(u)$; cela justifie la définition de $\mathrm{pr}^1 v$ donnée dans la sous-section 2.3.

Lemme 2.4.1. *Le lagrangien L est invariant par Φ_t pour tout t si et seulement si $(pr^{(1)}v)(L) = 0$.*

Démonstration. On vérifie d'abord que $\mathrm{pr}^{(1)}\Phi_t$ est un groupe à un paramètre ; la suite est un résultat classique.

Pour l'exemple 2.2.3, l'action naturelle du groupe $SO(q)$ fournit les composantes du moment cinétique.

3. Seconde étape

3.1. Les données

(1) L'espace U est le même que précédemment, mais X est maintenant une partie ouverte d'un espace $\mathbb{R}^p$ dont les éléments (les *variables indépendantes*) sont notés $x = (x^i)_{i=1,\ldots,p}$

(2) Pour tout entier $m > 0$, $U_{(m)}$ est un espace vectoriel de dimension $q \cdot \begin{pmatrix} p+m-1 \\ m \end{pmatrix}$, d'éléments notés $u_{(m)} = (u^\alpha_{(m),J})$ où α parcourt l'ensemble $\{1, ..., q\}$ et J parcourt l'ensemble des suites d'entiers positifs ou nuls $(j_1, ..., j_p)$ de somme m ; si $m = 1$ on a les éléments $\delta_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$; on pose $U_{(0)} = U$. À toute application $f : X \to U$, à tout $x \in X$ et à tout entier $m \geqslant 0$ on associe l'élément $u_{(m)} \in U_{(m)}$ de composantes

$$u^\alpha_{(m),J} = \frac{\partial^m f^\alpha}{(\partial x^1)^{j_1} \ldots (\partial x^p)^{j_p}}(x)$$

que nous noterons pour simplifier $\frac{\mathrm{d}^m f}{\mathrm{d}x^m}(x)$. En particulier $u_{(0)} = f(x)$. La suite $(u_{(0)}, \dots, u_{(m)})$ est appelée $m - jet$ de f au point x.

(3) $A^{(m)}$ est l'espace des fonctions réelles sur $X \times U_{(0)} \times ... \times U_{(m)}$, $A^{(\infty)}$ est la réunion croissante (ou limite inductive) des $A^{(m)}$; ses éléments sont appelés *fonctions différentielles*. À toute fonction $F \in A^{(\infty)}$ est associée l'équation aux dérivées partielles portant sur une application $f : X \to U$:

$$F(x, f(x), \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, ...) = 0 \,.$$

Par exemple, pour $q = 1$, $p = 2$, et

$$F(x, u_{(0)}, u_{(1)}, u_{(2)}) = u_{(2),(2,0)} + u_{(2),(0,2)} \,,$$

on obtient l'équation de Laplace qui devient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \,,$$

si on écrit (t, x) au lieu de (x_1, x_2) .

(4) Opérateurs $\mathrm{D}_i : A^{(m)} \to A^{(m+1)}$: pour tout $F \in A^{(m)}$ et tout $i = 1, \dots, p$,

$$\mathrm{D}_i F = \frac{\partial F}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{k=0}^{m} \sum_{|J|=k} \frac{\partial F}{\partial u^{\alpha}_{(k),J}} \cdot u_{(k+1),\delta_i + J}.$$

Ce sont des dérivations de l'algèbre $A^{(\infty)}$, et ces définitions sont évidemment choisies de façon que pour toute application $f : X \to U$, on ait

$$\frac{\partial}{\partial x^i} F(x, f(x), \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \dots) = \mathrm{D}_i F(x, f(x), \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \dots) \,.$$

Si $p = 1$ on note D l'unique opérateur D_i.

(5) Opérateur Div : $(A^{(m)})^p \to A^{(m+1)}$: pour toute famille $F = (F^i)_{i=1,\dots,p}$

$$\mathrm{Div}\, F = \sum_i \mathrm{D}_i F^i.$$

(6) Opérateurs : $\mathrm{E}_\alpha : A^{(m)} \to A^{(2m)}$:

$$\mathrm{E}_\alpha F = \sum_{k=0}^{m} \sum_{|j|=k} (-1)^k \cdot \mathrm{D}_j \frac{\partial F}{\partial u^{\alpha}_{(k),j}} \,,$$

où $\mathrm{D}_j = (\mathrm{D}_1)^{j_1} ... (\mathrm{D}_p)^{j_p}$.
Ces opérateurs sont appelés *opérateurs d'Euler*.

(7) Lagrangiens. Un lagrangien est maintenant une fonction $L \in A^{(1)}$ et on lui associe le système d'équations aux dérivées partielles (*d'Euler-Lagrange*), qui généralisent celles de la sous-section 2.1 :

$$\mathrm{E}_\alpha L(x, f(x), \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}) = 0 \,, \qquad \forall \alpha = 1, \dots, q \,.$$

3.2. Intégrales premières (cas $p = 1$)

La condition 2.2.2 exprimant qu'une fonction $p \in A^{(1)}$ est une intégrale première devient $\mathrm{D}P(x, f(x), \dot{f}(x), \ddot{f}(x)) = 0$ pour toute solution f des équations d'Euler-Lagrange.

Théorème 3.2.1. *Pour tout triplet $(x, u, u_{(1)})$ on note $M(x, u, u_{(1)})$ la matrice de coefficients $M(x, u, u_{(1)})_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha_{(1)} \cdot \partial u(1)^\beta}(x, u, u_{(1)})$ et on la suppose inversible pour tout triplet $(x, u, u_{(1)})$.*

(1) *Une fonction $P \in A^{(1)}$ est une intégrale première si et seulement s'il existe des fonctions $\mathcal{Q}^\alpha \in A^{(1)}$ telles que*

$$\mathrm{D}P = \sum_\alpha \mathcal{Q}^\alpha \cdot \mathrm{E}_\alpha L \quad \text{aussi noté} \quad \mathrm{D}P = (\mathcal{Q}|\mathrm{E}L)\,. \tag{3.2.3}$$

(2) *Dans ce cas on a*

$$\mathcal{Q}(x, u, u_{(1)}) = -M^t(x, u, u_{(1)})^{-1} \cdot \frac{\partial P}{\partial u_{(1)}}(x, u, u_{(1)})\,,$$

où M^t désigne la transposée de la matrice M.

Démonstration.

a) Il est clair que la condition énoncée dans (1) est suffisante.

b) Rappelons que $\mathrm{D}P(x, u, u_{(1)}, u_{(2)})$ et $\mathrm{E}L(x, u, u_{(1)}, u_{(2)})$ sont de la forme

$$\begin{aligned} \mathrm{D}P(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}) &= A(x, u, u_{(1)}) + (\frac{\partial}{\partial u_{(1)}}|u_{(2)})\,, \\ \mathrm{E}L(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}) &= B(x, u, u_{(1)}) - M(x, u, u_{(1)}) \cdot u_{(2)}\,, \end{aligned}$$

où $A \in A^{(1)}$, $B \in (A^{(1)})^q$.

c) Supposons maintenant que P est une intégrale première ; cela signifie que l'on a

$$\mathrm{D}P(x, f(x), \dot{f}(x), \ddot{f}(x)) = 0\,,$$

pour toute solution des équations d'Euler-Lagrange.
Montrons que l'on a aussi

$$\mathrm{D}P(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}) = 0$$

dès que $\mathrm{E}L(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}) = 0$.
Supposons donc $\mathrm{E}L(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}) = 0$; il existe une solution f telle que $f(x) = u$, $\dot{f}(x) = u_{(1)}$; l'hypothèse faite sur la matrice $M(x, u, u_{(1)})$ implique que $\ddot{f}(x) = u_{(2)}$, d'où notre assertion.

d) On a donc

$$A(x, u, u_{(1)}) + (\frac{\partial P}{\partial u_{(1)}}|M(x, u, u_{(1)})^{-1} \cdot B(x, u, u_{(1)})) = 0\,,$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{D}P(x,u,u_{(1)},u_{(2)}) &= (\frac{\partial P}{\partial u_{(1)}}|M(x,u,u_{(1)})^{-1}(M(x,u,u_{(1)})\cdot u_{(2)} - B(x,u,u_{(1)}))) \\ &= (-M^t(x,u,u_{(1)})^{-1}\cdot \frac{\partial P}{\partial u_{(1)}}|\mathrm{E}L(x,u,u_{(1)},u_{(2)})) \end{aligned}$$

et cela démontre (1) et (2).

Corollaire. *Étudier les intégrales premières modulo les constantes équivaut à étudier les éléments $\mathcal{Q}$ de $(A^{(1)})^q$ vérifiant la condition*
(LC 1) $(\mathcal{Q}|\mathrm{E}L) \in \mathrm{Im\ D}$.

Exemples.

(1) Prenant pour P la fonction énergie EN, on a $\mathcal{Q}(u,u_{(1)}) = -u_{(1)}$.
(2) Dans le cas de l'exemple 2.2.2 on vérifie facilement que $\mathrm{D}P = -\frac{\partial P}{\partial u_{(1)}}\cdot \mathrm{E}L$.
(3) Dans le cas de l'exemple 2.2.3, pour

$$P(u,u_{(1)}) = u^\alpha \cdot u^\beta_{(1)} - u^\beta\cdot u^\alpha_{(1)}\,,$$

on a

$$\mathcal{Q}(u,u_{(1)}u_{(2)}) = u^\alpha\cdot u^\beta_{(2)} - u^\beta\cdot u^\alpha_{(2)}\,.$$

Dans le cas du problème de Kepler, la fonction $\mathcal{Q}$ correspondant à la première composante du vecteur excentricité est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^1(u,u_{(1)}) &= u^2\cdot u^2_{(1)} + u^3\cdot u^3_{(1)} \\ \mathcal{Q}^2(u,u_{(1)}) &= u^2\cdot u^1_{(1)} - 2\cdot u^1\cdot u^2_{(1)} \\ \mathcal{Q}^3(u,u_{(1)}) &= u^3\cdot u^1_{(1)} - 2\cdot u^1\cdot u^3_{(1)} \end{aligned}$$

(Olver, example 5.59).

3.3. Lois de conservation. (Cas $p \geqslant 1$)

Une *loi de conservation* est une famille $P = (P^i)_{i=1,\dots,p}$ d'éléments de $A^{(1)}$ telle que

$$(\mathrm{Div}P)(x,f(x),\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}) = 0$$

pour toute solution des équations d'Euler-Lagrange.
Si $p = 1$ on retrouve la notion d'intégrale première. On n'a pas l'équivalent du théorème 3.2.1 en toute généralité ; on dit qu'une loi de conservation est *triviale* si on a $\mathrm{p}^i(x,f(x),\frac{df}{dx}) = 0$ pour toute solution des équations d'Euler-Lagrange. On remarquera que, dans le cas $p = 1$, toute loi de conservation triviale est nulle.

Théorème 3.3.1. *Toute loi de conservation P est la somme d'une loi de conservation triviale et d'un élément $P' \in A^{(1)}$ tel que* $\mathrm{Div}\,P'$ *soit de la forme* $(\mathcal{Q}|\mathrm{E}L)$ *avec* $\mathcal{Q}\in (A^{(1)})^q$.

Démonstration. Olver, [13], p. 266.

On est ainsi conduit à étudier les familles $\mathcal{Q}$ vérifiant la condition suivante :
(LC1)$'$ $(\mathcal{Q}|\mathrm{E}L) \in \operatorname{Im}\operatorname{Div}$.

Il resterait ensuite le problème de déterminer les P correspondants.

3.4. Champs de vecteurs

Nous utiliserons ici des champs de vecteurs usuels sur $X \times U$, i.e. de la forme

$$v = \sum_{i=1}^{p} \xi^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \Phi^\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

où les ξ^i et les Φ^α appartiennent à $A^{(0)}$. On définit leurs *caractéristiques* $\mathcal{Q}_v$ par

$$\mathcal{Q}_v^\alpha = \Phi^\alpha - \sum_{i=1}^{p} \xi^i \cdot u^\alpha_{(1),\delta_i} \in A^{(1)}$$

et leurs prolongements par

$$\mathrm{pr}^{(1)} v = v + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} (\mathrm{D}_j \cdot \mathcal{Q}_v^\alpha + \sum_{i=1}^{p} \xi^i \cdot u^\alpha_{(2),\delta_i+\delta_j}) \cdot \frac{\partial}{\partial u_{(1),\delta_j}}.$$

On pose aussi

$$F_v = (\mathrm{pr}^{(1)} v)(L) + L \cdot \operatorname{Div} \xi, \quad P_v^i = \sum_{\alpha=1}^{q} \mathcal{Q}_v^\alpha \cdot \frac{\partial L}{\partial u^\alpha_{(1),\delta_i}} + L \cdot \xi^i.$$

Nous considérerons les conditions suivantes portant sur un champ de vecteurs v :
(CV 2) $F_v \in \operatorname{Im}\operatorname{Div}$;
(CV 3) $F_v = 0$.

Lemme 3.4.1. *On a*

$$F_v - (\mathcal{Q}_v|\mathrm{E}L) = \operatorname{Div} P_v\,,$$

où

$$P_v^i = \sum_{\alpha=1}^{q} \mathcal{Q}_v^\alpha \cdot \frac{\partial L}{\partial u^\alpha_{(1),\delta_i}} + L \cdot \xi^i\,.$$

Démonstration. C'est un calcul direct et fastidieux.

Théorème 3.4.2.

(1) *Le champ de vecteurs v vérifie* (CV 2) *si et seulement si $\mathcal{Q}_v$ vérifie* (LC 1). *Plus précisément, si F_v est de la forme* $\operatorname{Div} R$, *on a*

$$\operatorname{Div}(R - P_v) = (\mathcal{Q}_v|\mathrm{E}L)$$

et $R - P_v$ est une loi de conservation, dite associée à v, définie seulement modulo $\operatorname{Ker}\operatorname{Div}$.

(2) *Pour tout quintuplet* $(i, j, x, u, u_{(1)})$ *on note* $M_{i,j}(x, u, u_{(1)})$ *la matrice de coefficients*

$$M_{i,j}(x, u, u_{(1)})_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha_{(1),\delta_i} \cdot \partial u^\beta_{(1),\delta_j}} + \frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta_{(1),\delta_i} \cdot \partial u^\alpha_{(1),\delta_j}}$$

et on suppose qu'il existe un couple (i, j), $i \leqslant j$ *tel que* $M_{i,j}(x, u, u_{(1)})$ *soit inversible pour tout triplet* $(x, u, u_{(1)})$. *La construction de* (1) *fournit une bijection de l'ensemble des champs de vecteurs vérifiant* (CV 2) *sur celui des lois de conservation* P, *définies modulo* Ker Div, *telles que* Div P *soit de la forme* $(\mathcal{Q}|\mathrm{E}L)$ *avec* $\mathcal{Q}$ *élément de* $A^{(1)}$, *polynôme de degré* 1 *par rapport aux* $u_{(1),\delta_i}$.

Démonstration. (1) est trivial. Démontrons (2).

Injectivité.
Un calcul simple montre que $(\mathcal{Q}_v|\mathrm{E}L)$ est élément de $A^{(2)}$ et que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{Q}_v|\mathrm{E}L) \operatorname{mod} A^{(1)} &= -\sum_{\alpha,\beta} \mathcal{Q}^\alpha \cdot \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha_{(1),\delta_i} \cdot \partial u^\beta_{(1),\delta_j}} \cdot u^\beta_{(2),\delta_i+\delta_j} \\
&= -\sum_{i<j} \sum_\beta \sum_\alpha M_{i,j}(x, u, u_{(1)})_{\alpha,\beta} \cdot \mathcal{Q}^\alpha(x, u, u_{(1)}) \cdot u^\beta_{(2),\delta_i+\delta_j} \\
&= -2 \sum_i \sum_\beta \sum_\alpha M_{i,j}(x, u, u_{(1)})_{\alpha,\beta} \cdot \mathcal{Q}^\alpha(x, u, u_{(1)}) \cdot u^\beta_{(2),2\delta_i}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs les éléments $u^\beta_{(2),\delta_i+\delta_j}$, $i \leqslant j$ sont linéairement indépendants, donc si $R - P_v \in \operatorname{Ker}\operatorname{Div}$, $\mathcal{Q}_v = 0$ et cela implique $v = 0$.

Surjectivité.
Soit P une loi de conservation comme indiqué ; on peut écrire

$$\mathcal{Q}^\alpha = \Phi^\alpha - \sum_i \xi^i \cdot u^\alpha_{(1),\delta_i},$$

où Φ^α et ξ^i sont fonctions de (x, u).
Posons

$$v = \sum_{i=1}^p \xi^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \Phi^\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

Par le lemme 3.4.1, on a $F_v = \operatorname{Div}(P_v + P)$, et la loi de conservation associée à v n'est autre que P.

Corollaire 1. *Si* v *vérifie la condition* (CV 3), P_v *est une loi de conservation et on a* $\operatorname{Div} P_v = -(\mathcal{Q}_v|\mathrm{E}L)$.
(Olver, corollary 4.30 ; un tel champ de vecteurs est appelé *variational symmetry*).
Noter que ce résultat contient le théorème 2.3.1.

Corollaire 2. (Cas $p = 1$). *Si la matrice de coefficients* $\frac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha_{(1)} \cdot \partial u^\beta_{(1)}}(x, u, u_{(1)})$ *est inversible pour tout triplet* $(x, u, u_{(1)})$, *la construction de* (1) *fournit une bijection de* *l'ensemble des champs de vecteurs vérifiant la condition* $(\mathrm{pr}^{(1)} v)(L) + L \cdot \mathrm{D}\,\xi \in \mathrm{Im}\,\mathrm{D}$ *sur celui des intégrales premières définies modulo les constantes.*

Exemple. Dans le cas $p = 1$, si le lagrangien est indépendant du temps, le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x}$ vérifie la condition (CV 3) et conduit à l'intégrale première énergie.

3.5. Groupes de symétries

La notion de groupe de symétries est moins claire ici que dans le cas de la section 2 (cf. Olver, definition 2.23). Ce sont des groupes dans lesquels un voisinage de l'élément neutre opère dans la variété $X \times U$ en transformant le graphe d'une solution des équations d'Euler-Lagrange en le graphe d'une autre solution. Dans le cas d'un groupe à un paramètre de difféomorphismes, le champ de vecteurs associé est soumis à la condition
(CV 4) Pour tout $\alpha = 1, ..., q$, on a $((\mathrm{pr}^{(2)} v)(\mathrm{E}_\alpha L))(x, f(x), \dot{f}(x)\ddot{f}(x)) = 0$ pour toute solution des équations d'Euler-Lagrange. (Olver, *infinitesimal symmetry*, theorem 2.31 ; on démontre que (CV 3) implique (CV 4), Olver, theorem 4.14). Dans le cas de l'exemple 2.2.2 avec $V = 0$, le groupe des rotations

$$\Phi_t(x, u) = (x \cos t - u \sin t\,,\ x \sin t + u \cos t)$$

conduit au champ de vecteurs $v = -u \cdot \frac{\partial}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial}{\partial u}$. Il est clair que t doit être suffisamment petit pour que Φ_t transforme le graphe d'une solution en celui d'une autre.

3.6. Exemple (Équation des ondes à deux dimensions d'espace)

On a ici

$$q = 1, \quad p = 3, \quad U = \mathbb{R}, \quad X = \mathbb{R}^3$$

$$L = \frac{1}{2}((u_{(1),(100)})^2 - (u_{(1),(010)})^2 - (u_{(1),(001)})^2)$$

$$\mathrm{E}L = u_{(2),(200)} - u_{(2),(020)} - u_{(2),(002)}.$$

On va considérer des fonctions $P \in A^1$ et des champs de vecteurs

$$v = \sum_{i=1}^{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} + \Phi \cdot \frac{\partial}{\partial u}\,,$$

où Φ et les ξ^i sont fonctions de x et u.
On va décrire les espaces de champs de vecteurs vérifiant respectivement les conditions (CV 3) , (CV 2) en utilisant les exemples 2.43, 4.15 et 4.36 de Olver qui désigne par

t, x, y	ce que nous désignons par	x^1, x^2, x^3
u_t, u_x, u_y	....	$u_{(1),(100)}, u_{(1),(010)}, u_{(1),(001)}$
u_{tt}	....	$u_{(2),(200)}$

etc.

Voici d'abord une base de l'espace des champs de vecteurs vérifiant (CV 3)

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x^i},\ i = 1,2,3\,;\ v_4 = \frac{\partial}{\partial u}\,;$$

$$v_5 = -x^3 \cdot \frac{\partial}{\partial x^2} + x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x^3}\,;\ v_6 = x^1 \cdot \frac{\partial}{\partial x^2} + x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x^1}\,;$$

$$v_7 = x^1 \cdot \frac{\partial}{\partial x^3} + x^3 \cdot \frac{\partial}{\partial x^1}\,;\ v_8 = \sum_{i=1}^{3} x^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{2} u \cdot \frac{\partial}{\partial u}\,.$$

Pour obtenir les lois de conservation correspondantes, on peut utiliser le corollaire, par exemple, pour v_2 :

$$\begin{aligned} P^1 &= -u_{(1),(010)} \cdot u_{(1),(100)}\,; \\ P^2 &= L + (u_{(1),(010)})^2\,; \\ P^3 &= u_{(1),(010)} \cdot u_{(1),(001)}\,. \end{aligned}$$

Pour obtenir les solutions de (CV 2) on doit ajouter à $v_1, \ldots, v_8$ trois champs de vecteurs v_9, v_{10}, v_{11}, dits *inversions*, dont voici le premier :

$$v_9 = 2x^1x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x^1} + \big((x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2\big) \cdot \frac{\partial}{\partial x^2} + 2x^2x^3 \cdot \frac{\partial}{\partial x^3} - x^2 u \cdot \frac{\partial}{\partial u}.$$

Pour (CV 4), on a les éléments suivants :

$$v_1, \ldots, v_7, v_9, v_{10}, v_{11}\,,\ \sum_{i=1}^{3} x^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\,,\ u \cdot \frac{\partial}{\partial u}\,,\ \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial u}\,,$$

où α est une fonction de x, solution de l'équation des ondes, de sorte que cet espace est de dimension infinie.
Voici certains des groupes de symétries correspondants :

- pour $v_1, ..., v_4$: $\mathbb{R}^4$ opérant par translations sur $X \times U$
- pour v_5, v_6, v_7 : $SO_0(2,1)$ opérant naturellement sur X
- pour $\sum_{i=1}^{3} x^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}$ $(resp. u \cdot \frac{\partial}{\partial u})$: $\mathbb{R}$ opérant par dilatations sur X (resp.U)
- pour $\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial u}$: $\Phi_t(x,u) = (x, u + t \cdot \alpha(x))$.

4. Troisième étape

L'étude qui précède est généralisée de la façon suivante : les fonctions L, P^i, $\mathcal{Q}^\alpha$, ξ^i, Φ^α sont maintenant éléments de $A^{(\infty)}$ et les champs de vecteurs

$$v = \sum_{i=1}^{p} \xi^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \Phi^\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

sont dits *généralisés*.

Pour généraliser le théorème 3.4.2 nous aurons besoin des deux lemmes suivants dont les preuves sont fastidieuses mais sans difficultés majeures.

Lemme 4.1. *Soit* $J = (j_1, ...j_p) \in \mathbb{N}^p$, $|J| = j_1 + ... + j_p$, $\mathrm{D}_J = \mathrm{D}_1^{j_1}...\mathrm{D}_p^{j_p}$, H, $G \in A^{(m)}$. *On a*

$$\mathrm{D}_J H \cdot G + (-1)^{|J|-1} H \cdot \mathrm{D}_J G = \mathrm{Div}\, P$$

où

$$P^i = \sum_{r=1}^{j_i} (-1)^{j_1+\dots+j_{i-1}+r-1} \cdot \mathrm{D}_i^{j_i-r} \mathrm{D}_{i+1}^{j_{i+1}} ...\mathrm{D}_p^{j_p} H \cdot \mathrm{D}_1^{j_1} ...\mathrm{D}_{i-1}^{j_{i-1}} \mathrm{D}_i^{r-1} G \in A^{(m+|J|-1)}.$$

Notons que cette formule barbare se réduit à $\mathrm{D}(HG) = \mathrm{D}H \cdot \mathrm{D}G$ lorsque $p = 1$ et $j_1 = 1$.

Lemme 4.2. *Soit* $L \in A^{(m)}$. *On a* $\mathrm{E}_\alpha L \in A^{(2m)}$ *et*

$$\mathrm{E}_\alpha L \,\textit{modulo}\, A^{(2m-1)} = \sum_\beta \sum_{|J|=2m} \Lambda_{\alpha,\beta,J} \cdot u^\beta_{(2m),j}$$

où $\Lambda_{\alpha,\beta,J} \in A^{(m)}$ *et*

$$\Lambda_{\alpha,\beta,J}(x, u, ..., u_{(m)}) = (-1)^m \sum_{J_1 J_2} \frac{\partial^2 L}{\partial u^\beta_{(m),J_1} \cdot \partial u^\alpha_{(m),J_2}} (x, u, ..., u_{(m)})$$

avec $|J_1| = |J_2| = m$, $J_1 + J_2 = J$.

Notation. On note $M(J, x, u, u_{(1)}, ..., u_{(m)})$ la matrice de coefficients

$$M(J, x, u, u_{(1)}, ..., u_{(m)})_{\alpha,\beta} = \Lambda_{\alpha,\beta,J}(x, u, ..., u_{(m)}) \, ,$$

définition qui généralise celle de $M_{i,j}(x, u, u_{(1)})$ donnée au théorème 3.4.2.

Corollaire. *S'il existe* J *tel que* $|J| = 2m$ *et que la matrice* $M(J, x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(m)})$ *soit inversible pour tout* $(x, u, \dots, u_{(m)})$, *l'application*

$$(A^{(m)})^q \mapsto A^{(2m)}$$

$$\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}^\alpha)_{\alpha=1,\dots,q} \mapsto \sum_{\alpha=1}^{q} \mathcal{Q}^\alpha \cdot \mathrm{E}_\alpha L$$

est injective.

Champs de vecteurs généralisés.

Soit v un champ de vecteur généralisé avec $\xi^i \in A^{(m)}$, $\mathcal{Q}^\alpha \in A^{(m)}$; nous poserons

$$\mathcal{Q}^\alpha_v = \Phi^\alpha - \sum_i \xi^i \cdot u_{(1),\delta_i} \in A^{(m)} \, ,$$

cette famille $\mathcal{Q}$ est appelée encore ici *caractéristique* de v.

Les divers prolongements d'un tel champ de vecteurs sont définis par

$$\mathrm{pr}^{(m)} v = v + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{k=1}^{m} \sum_J [\mathrm{D}_J \cdot \mathcal{Q}^\alpha_v + \sum_{i=1}^{p} \xi^i \cdot u^\alpha_{(k+1),\delta_i+J}] \cdot \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{(k),J}}$$

où J parcourt l'ensemble des suites $(j_1, ..., j_p)$ de somme k et $\mathrm{D}_J = (\mathrm{D}_1)^{j_1} \ldots (\mathrm{D}_p)^{j_p}$. (Notations d'Olver, p. 109 : $J = (j_1, ..., j_k)$, $1 \leqslant j_i \leqslant p$; ce que nous notons ici j_n est donc le nombre de i tels que $j_i = n$.)

Fixons maintenant un lagrangien $L \in A^{(m)}$; nous poserons

$$\begin{aligned} F_v &= (\mathrm{pr}^{(m)} v)(L) + L \cdot \mathrm{Div}\, \xi \in A^{(2m)} , \\ P_v &= \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{k=0}^{m} \sum_{|J|=k} P_{\alpha,k,J} + L \cdot \xi \in A^{(2m-1)} , \end{aligned}$$

où $P_{\alpha,k,J}$ est donné par le lemme 4.1 avec $H = \mathcal{Q}_v^\alpha$, $G = \frac{\partial L}{\partial u^\alpha_{(k),J}}$.

Nous noterons encore (CV 2) la condition $F_v \in \mathrm{Im}\,\mathrm{Div}$. (Olver, [13] : v est une *variational symmetry*).

On a encore l'analogue du lemme 3.4.1 qui résulte de la relation suivante, facile à vérifier

$$F_v - (\mathcal{Q}_v|\mathrm{E}L) = \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{k=0}^{m} \sum_{|J|=k} (\mathrm{D}_J \mathcal{Q}^\alpha \cdot \frac{\partial L}{\partial u^\alpha_{(k),J}} + (-1)^{k-1} \mathcal{Q}^\alpha \cdot \mathrm{D}_J \frac{\partial L}{\partial u^\alpha_{(k),J}})$$

et du lemme 4.1. Cela entraîne le résultat suivant, à rapprocher du theorem 5.42 de Olver, [13].

Théorème 4.3.

(1) *Les conditions* $F_v \in \mathrm{Im}\,\mathrm{Div}$ *et* $(\mathcal{Q}_v|\mathrm{E}L) \in \mathrm{Im}\,\mathrm{Div}$ *sont équivalentes. Plus précisément, si* F_v *est de la forme* $\mathrm{Div}\, R$, $R \in A^{(2m-1)}$, *on a* $\mathrm{Div}\,(R - P_v) = (\mathcal{Q}_v|\mathrm{E}L)$ *et* $R - P_v$ *est une loi de conservation, dite associée à* v, *définie seulement modulo* $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Div}$.

(2) *Sous l'hypothèse du corollaire du lemme 4.2, la construction ci-dessus fournit une surjection de l'ensemble des champs de vecteurs vérifiant la condition* $F_v \in \mathrm{Im}\,\mathrm{Div}$ *sur celui des lois de conservation* P *telles que* $\mathrm{Div}\, P$ *soit de la forme* $(\mathcal{Q}|\mathrm{E}L)$ *avec* $\mathcal{Q}^\alpha \in A^{(m)}$. *Son noyau est l'ensemble des* v *tels que* $\mathcal{Q}_v = 0$.

Remarque. Ici la nullité de $\mathcal{Q}$ n'implique pas celle de v ; on peut obtenir une vraie bijection en ne considérant que des champs de vecteurs de la forme $v = \sum_\alpha \mathcal{Q}^\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial u_\alpha}$, où $\mathcal{Q}^\alpha \in A^{(m)}$, et en ne perdant rien en généralité. On associe à chaque champ de vecteurs généralisé son *evolutionary representative* (Olver, definition 5.4)

$$v_{\mathcal{Q}} = \sum_\alpha \mathcal{Q}_v^\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial u^\alpha} .$$

Il vérifie (CV 2) si et seulement si v le fait, car on a $F_v - F_{\mathcal{Q}} = \mathrm{Div}(L\xi)$ et les lois de conservation associées sont identiques.

Conclusion.

Ce résultat constitue le théorème de Noether dans toute sa généralité ; on peut expliquer comme suit son énoncé donné à la section 1. Tout d'abord, par *intégrale I* il faut entendre une intégrale de la forme $\int_\Omega L(x, f(x), \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x})\, \mathrm{d}x$, où Ω est un sous-ensemble de X. Ensuite l'expression *groupe* G_ρ doit être interprétée comme *algèbre de Lie de dimension* ρ ; les *expressions lagrangiennes* sont les fonctions $\mathrm{E}_\alpha L$, membres de gauche des équations d'Euler-Lagrange, et les termes *combinaison linéaire d'expressions lagrangiennes* devenant une divergence expriment exactement la relation $(\mathcal{Q}|\mathrm{E}L) \in \mathrm{Im\,Div}$. L'hypothèse mise ici pour assurer la validité de ce théorème est un peu plus précise que celle du résultat correspondant du livre Olver, [13], mais peut-être aussi un peu plus restrictive...

Exemple (problème de Kepler, voir ci-dessus exemple 2.2.3, sous-section 2.2, sous-section 2.3, et aussi Olver, exemple 5.59).

Considérons le champ de vecteurs généralisé $v_1 = \sum_{\alpha=1}^{3} \Phi^\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ où

$$\begin{aligned}
\Phi^1(u, u_{(1)}) &= u^2 \cdot u^2_{(1)} + u^3 \cdot u^3_{(1)} \\
\Phi^2(u, u_{(1)}) &= u^2 \cdot u^1_{(1)} - 2u^1 \cdot u^2_{(1)} \\
\Phi^3(u, u_{(1)}) &= u^3 \cdot u^1_{(1)} - 2u^1 \cdot u^3_{(1)}
\end{aligned}$$

Il vérifie la condition (CV 2) (avec ici D au lieu de Div puisque $p = 1$) et on a $(\mathcal{Q}_v|\mathrm{E}L) = \mathrm{D}P$ où P est la première composante du vecteur excentricité. Les champs de vecteurs v_2, v_3 obtenus à partir de v_1 par permutations circulaires conduisent aux deux autres composantes du vecteur excentricité. Notons v_4, v_5, v_6 les champs de vecteurs conduisant aux trois composantes du moment cinétique ; ces 6 champs de vecteurs engendrent linéairement une algèbre de Lie (pour le crochet de Lie) isomorphe à $so(4)$; mais le groupe $SO(4)$ – les « symétries cachées » du problème de Kepler – n'opère pas directement dans $\mathrm{T}(U)$, mais seulement dans un espace, à savoir $\mathrm{T}(S^3)$, contenant $\mathrm{T}(U)$ comme partie ouverte partout dense (voir A. Guichardet, [6] pour le point de vue hamiltonien).

Compléments

(1) Le second théorème de Noether affirme que, si l'espace des champs de vecteurs généralisés vérifiant la condition (CV 3) est de dimension infinie, le système est *sous-déterminé* en ce sens qu'il existe des relations de la forme

$$\sum_\alpha \mathrm{D}^\alpha(\mathrm{E}_\alpha L) = 0\,,$$

où les D^α sont des opérateurs différentiels.

(2) Les résultats exposés ici s'appliquent à de très nombreux problèmes : équations de Navier de l'élasticité, de Korteweg-de-Vries, de de Sitter de la relativité générale,...

(3) Ils peuvent aussi être généralisés à des systèmes différentiels ne provenant pas de problèmes lagrangiens, comme l'équation de la chaleur (voir par exemple Olver, example 2.41).

5. Point de vue hamiltonien

5.1. Exposé succinct de la théorie

(Voir par exemple Cushman-Bates,[2])

Les données consistent en une variété M munie d'une 2-forme différentielle symplectique ω et d'une fonction réelle H (le *hamiltonien*) ; en coordonnées locales canoniques, on peut écrire

$$\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i \,,$$

qui est encore noté $\omega = dp \wedge dq$.
À toute fonction réelle φ sur M, on associe le champ de vecteurs

$$X_\varphi = (\frac{\partial \varphi}{\partial q} | \frac{\partial}{\partial p}) - (\frac{\partial \varphi}{\partial p} | \frac{\partial}{\partial q}) \,.$$

Les *équations de Hamilton* pour un hamiltonien H portant sur une fonction d'une variable réelle f sont

$$\dot{f}(t) = -X_H(f(t)) \,, \text{soit encore} \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \,, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \,.$$

Une *intégrale première* est une fonction réelle φ constante sur les courbes intégrales de X_H, i.e. telle que $X_H(\varphi) = 0$. Le théorème dit *de Noether* affirme qu'un champ de vecteurs de la forme X_φ annule H si et seulement si φ est une intégrale première, et sa démonstration, immédiate, consiste à remarquer que $X_\varphi(H) = -X_H(\varphi)$.

5.2. Lien avec le point de vue lagrangien

Pour simplifier nous nous placerons dans la situation de l'exemple 2.2.3. La variété U est une partie ouverte d'un espace $\mathbb{R}^q$ et le lagrangien est de la forme

$$L(u, u_{(1)}) = \frac{|u_{(1)}|^2}{2} - V(|u|) \,.$$

L'espace fibré cotangent $\mathrm{T}^\star(U)$ est muni d'une structure de variété symplectique naturelle, et on passe de $\mathrm{T}(U)$ à $\mathrm{T}^\star(U)$ par la transformation de Legendre F qui se réduit ici à l'identité ; pour toute fonction réelle φ sur $\mathrm{T}(U)$ on notera $\hat{X}_\varphi$ le champ de vecteurs transformé de $X_{\Phi \circ F^{-1}}$ par F^{-1}, soit

$$\hat{X}_\varphi = \sum_\alpha (\frac{\partial \varphi}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial u^\alpha_{(1)}} - \frac{\partial \varphi}{\partial u^\alpha_{(1)}} \cdot \frac{\partial}{\partial u^\alpha}) \,.$$

En ce qui concerne les intégrales premières, on peut vérifier, en utilisant le théorème 3.2.1, que les deux notions, correspondant respectivement au point de vue lagrangien et au point de vue hamiltonien, se correspondent par la transformation de Legendre.

6. Références

[1] R. ABRAHAM, J.E. MARSDEN. 1978. Foundations of Mechanics. 2e édition. Benjamin.
[2] R.H. CUSHMAN, L.M. BATES. 1997. Global Aspects of Classical Integrable Systems. Birkhäuser.
[3] C. EHRESMANN. Les prolongements d'une variété différentielle. C.R.Acad.Sci., Paris, 233, (1951), 598-600, 777-779, 1081-1083 ; 234 (1952), 1028-1030, 1424-1425.
[4] I.M. GELFAND, L.A.DIKII. 1975. Asymptotic Behaviour of the Resolvent of Sturm-Liouville Equations and the Algebra of the Korteweg-de Vries Equations. Russian Math. Surveys, 30, nº 5, 77-113.
[5] I.M. GELFAND, S.V. FOMIN. 1963. Calculus of Variations. Prentice-Hall.
[6] A. GUICHARDET. 2012. Le problème de Kepler. Histoire et théorie. Éditions de l'École Polytechnique.
[7] N.H. IBRAGIMOV. 1985. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics. Reidel, Boston.
[8] Y. KOSMANN-SCHWARZBACH. 1985 . Sur les théorèmes de Noether. In Géométrie et physique, Collection Travaux en cours. Hermann, Paris.
[9] Y. KOSMANN-SCHWARZBACH. 1985. On the Momentum Mapping in Field Theory. Lecture Notes in Math., nº 1139, 1-49.
[10] Y. KOSMANN-SCHWARZBACH. 2006. Les théorèmes de Noether. Invariance et lois de conservation au XXe siècle. Éditions de l'École Polytechnique. Traduction anglaise : 2011. The Noether Theorems. Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century. Springer, New-York.
[11] E. NOETHER 1918. Invariante Variationsprobleme. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Sitzung vom 26 juli 1918) ou *Œuvres*, 248-270.
[12] P.J. OLVER. 1984. Conservation Laws in Elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal., 85, 111-160.
[13] P.J. OLVER. 1993. Applications of Lie Groups to Differential Equations, 2e édition. Graduate Texts in Math., 107, Springer-Verlag.
[14] A.M. VINOGRADOV. 1977. On the Algebro-Geometric Foundations of Lagrangian Field Theory. Soviet Math. Dokl. 18, 1977, nº 5, 1200-1204.
[15] A.M. VINOGRADOV. 1984. Local Symmetries and Conservation Laws. Acta Appl. Math., 2, 21-78.

ENSEIGNEMENT

Une expérience de MOOC

Une interview d'Arnaud Bodin et François Recher

Depuis des décennies, on trouve des vidéos de cours sur le marché, télévision puis internet. Il semble que récemment, ces produits se soient mis à attirer un public considérable (parfois des dizaines de milliers d'internautes inscrits). Il y a clairement des enjeux de notoriété. Y a-t-il un nouveau marché ? De nouvelles manières d'apprendre et d'enseigner et pourquoi pas un enjeu pour la formation permanente et pour la francophonie ? Mais aussi une menace pour les modes traditionnels d'enseignement ? Avec le chantier « France Université Numérique » FUN[1], le ministère français de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche incite les établissements français à expérimenter, en mettant à leur disposition une plateforme technique commune. Pour faire quoi ? La *Gazette* est allée interroger Arnaud Bodin et François Recher, maîtres de conférences de l'université Lille 1, au sujet de l'expérience qu'ils ont tentée à Lille.

Que signifie M.O.O.C. ?
Mooc signifie Cours Ouvert en Ligne et Massif (*Massive Open Online Course*). C'est un phénomène initié par les grandes universités américaines il y a quelques années et qui arrive en France depuis la rentrée.

De quoi s'agit-il ?

Quel est le principe d'un Mooc ?

Arnaud Bodin : Il s'agit d'utiliser tous les aspects d'internet pour enseigner. Un professeur met à disposition d'étudiants un cours en ligne. Jusque là rien d'extraordinaire !

François Recher : Ce qui est spécifique à un Mooc c'est d'abord l'aspect « Ouvert » : n'importe qui peut s'inscrire à n'importe quel cours, il n'y a pas de niveau d'entrée requis des étudiants, pas de condition d'âge, ni de diplôme, ni d'origine géographique. Cependant il faut un accès internet.

AB : La deuxième spécificité c'est le côté « Massif », un Mooc accueille de quelques centaines d'étudiants à plusieurs milliers. C'est une conséquence du côté « Ouvert ».

Comment cela fonctionne-t-il en pratique ? Doit-on s'inscrire ? Y a-t-il des contrôles ?

[1] http://www.france-universite-numerique.fr/

FR : Pour accueillir autant d'étudiants on utilise une plate-forme spéciale qui gère les inscriptions, les discussions entre étudiants et avec le professeur et aussi les notes.

AB : La plate-forme[2] gère aussi le déroulement dans le temps. Un Mooc dure en général de 4 à 10 semaines. Le cours est mis à disposition au fur et à mesure. Chaque semaine est ponctuée d'interventions vidéos et se termine souvent par un QCM ou un devoir à rendre.

FR : Effectivement une autre nouveauté est l'usage massif de la vidéo pour transmettre le cours. Souvent plusieurs séquences de cours assez courtes (disons 15 minutes) par semaine, que les étudiants peuvent regarder quand ils veulent et à leur rythme.

Est-ce qu'il y a un diplôme associé au cours ? Est-ce que tous les étudiants terminent le cours ?

AB : Dans la majorité des Mooc il n'y a pas de diplôme mais un certificat de participation qui n'a aucune valeur universitaire. Cependant quelques universités offrent la possibilité de venir passer un examen dans un centre ou proposent à leurs étudiants de faire valider un Mooc comme un module de cours.

FR : La contre-partie du côté « ouvert » c'est que beaucoup de personnes s'inscrivent mais que peu suivent jusqu'au bout. En moyenne 6 à 10% des étudiants vont au bout.

Quelle est la différence avec la formation à distance qui existe déjà depuis longtemps ?

FR : Il y a une globalisation de l'éducation : n'importe qui ayant un accès internet peut suivre un cours proposé à l'autre bout du monde. L'offre de formation est donc gigantesque et les cours sont souvent de qualité. Deux bémols : il faut disposer d'une bonne connexion internet et pour l'instant les cours sont surtout en anglais.

AB : Une autre différence, ce sont les vidéos. Les vidéos permettent d'avoir un cours à distance beaucoup plus dynamique qu'un polycopié, il est possible de faire une pause, revoir la vidéo...

Bilan de l'expérience lilloise

Quel était le contenu de votre cours ?

FR : Le cours s'intitulait « Arithmétique : en route pour la cryptographie », durait six semaines et était calibré pour des étudiants de niveau première année. La partie principale était mathématique : pgcd, théorème de Bézout, nombres premiers... L'arithmétique était immédiatement appliquée à la cryptographie avec un cheminement historique (décalage de César, chiffrement de Vigenère...), le but principal étant d'expliquer en détails le chiffrement RSA.

Quel est le bilan chiffré ?

[2] Les plates-formes les plus connues *Coursera*, *Udacity* et *EdX* sont américaines et peuvent accueillir jusqu'à 100 000 étudiants par cours, mais il existe d'autres plates-formes de Mooc comme *Canvas* pour le Mooc « Arithmétique ». La plate-forme « France Université Numérique » propose des cours depuis janvier 2014.

AB : Nous avons eu 1400 inscrits, mais seulement 300 participants ! Beaucoup d'étudiants ne se sont jamais connectés à la plate-forme, difficile de savoir pourquoi. Par contre sur les 300 participants plus de la moitié sont allés jusqu'au bout et nous avons délivré 145 certificats de réussite.

Quels étaient les profils des étudiants ?

FR : Le public n'était pas vraiment le public attendu ! La moyenne d'âge était de 30 ans et beaucoup avaient un diplôme de licence ou plus. Une motivation était bien sûr les mathématiques, mais la cryptographie a beaucoup plu par son côté appliqué et ludique. Chaque semaine était soumis un message secret à décrypter.

Quel bilan côté enseignant ?

AB : L'expérience était passionnante, les étudiants étaient ravis. Mais cela demande une quantité de travail énorme. Nous avons profité de cours et de vidéos existants du site *Exo7* mais nous avons écrit un cours de cryptographie et l'avons filmé.

FR : Effectivement les vidéos sont un peu le point clé des Mooc : les étudiants travaillent à la fois avec les vidéos et le polycopié, le contenu est pourtant le même mais les supports sont complémentaires. Le revers de la médaille, c'est le temps de préparation.

Est-ce que les Mooc vont finir par remplacer les cours traditionnels ?

AB : On en est loin ! Les Mooc constituent un outil formidable pour un sujet précis, une durée limitée, et avec des étudiants motivés.

FR : Les Mooc complètent sans les menacer les formations déjà existantes, favorisent le travail individuel et permettent d'aborder des sujets pointus, avec une approche non-habituelle. C'est un outil pédagogique de plus au service des mathématiques.

La Licence de Mathématiques, visions croisées en Francophonie

Jean-Pierre Borel[1]

Le contexte de la réflexion

Cet article présente l'état de réflexion d'un groupe de travail de mathématiciens de l'espace francophone, sur la Licence de mathématiques : est-ce un concept partagé, avec un contenu clairement identifié, y a-t-il des convergences et des différences, lesquelles et pourquoi ? Aujourd'hui, beaucoup de départements de Mathématiques accueillent en Master des étudiants francophones issus de ces licences, et il m'a paru utile de partager le travail fait, même et surtout parce qu'il n'est pas terminé.

Ce groupe a réuni une vingtaine de collègues mathématiciens de tous pays, soit Doyens de leur Faculté, soit responsables de la licence de mathématiques dans leur Faculté, que je remercie à nouveau pour leur participation : Amir Abdessamad (Mostaganem, Algérie), Joseph Alassad (USEK, Liban), Amah d'Almeida (Lomé, Togo), Abdelmoujib Benkirane (FS Fès, Maroc), Jean-Pierre Borel (Limoges, France, Doyen honoraire), Lobna Derbel (Tunis, Tunisie), Alassane Diedhou (Ziguinchor, Sénégal), Fatima Ezzaki (FST Fès, Maroc), Janin Jadotte (Port au Prince, Haïti), Rodoumta Koina (ENTP, Tchad), Ali Mneimneh (u. Libanaise, Liban, Doyen), Vincent Monsan (Abidjan, Côte d'Ivoire), Sérigné Amadou N'Diaye (Dakar, Sénégal), Gilles Raby (Poitiers, France, Doyen honoraire), Hervé Sabourin (Poitiers, France), Raafat Talhouk (u. Libanaise, Liban).

Je remercie tout particulièrement le Doyen Ali Mneimneh, qui a animé ce groupe de travail avec moi, et le Professeur Evelyne Garnier-Zarli, de l'université de Paris-Est Créteil, présidente de la CIRUISEF[2], qui a suscité cette réflexion dans tous les champs scientifiques.

Le travail rapporté ici a été mené en deux temps, et dans le cadre d'une réflexion sur les fondamentaux des Licences scientifiques impulsée par la CIRUISEF, lors d'une réflexion préliminaire conduite entre décembre 2012 et mars 2013, au travers d'échange à distance de documents et d'idées, puis lors du colloque de la CIRUISEF qui s'est tenu à Québec début avril 2013. S'y sont rajoutés de nombreux contacts formels et informels, notamment avec des collègues mathématiciens belges et québécois. Le fruit de ce travail d'ensemble a fait l'objet d'une publication récente[3].

---

[1] Vice-président de la SMF en charge des questions d'enseignement, Doyen honoraire, président honoraire de la Conférence des Doyens Sciences de France (CDUS).

[2] Conférence Internationale des Responsables des Universités et Institutions Scientifiques d'Expression Française, réseau scientifique soutenu par l'Agence Universitaire de la Francophonie (AUF).

[3] *La Licence scientifique dans l'espace francophone, essai de référentiel de connaissances et de compétences*, l'Harmattan, collection « Géopolitique mondiale », ouvrage collectif sous la direction d'Evelyne Garnier-Zarli, 2014.

La réflexion du groupe a été alimentée par de nombreux exemples de maquettes d'enseignement en provenance de divers pays (découpage en années, semestres, UE[4], volumes horaires et contenus), par une grille d'analyse construite pour ce travail (origine et devenir des étudiants, côté formation ainsi que mobilité géographique), et bien entendu par le travail qui avait été mené par la SMF, la SMAI et la SFdS sur le « socle de la licence de mathématiques » [5], document de quatre pages sur les objectifs fondamentaux et les principaux chapitres dont l'étude est incontournable pour tout licencié de mathématiques. Ce document a fait l'objet d'une présentation et d'une analyse des motivations dans la *Gazette* à l'époque[6].

Un contexte plus varié qu'il n'y paraît

La science mathématique est ancienne, il semble naturel d'en déduire que ses fondements, et la manière de les enseigner, sont maintenant totalement stabilisés. On peut également penser qu'il s'agit d'une science globale, dont les concepts ont un ordre relativement naturel d'introduction, et dont la place dans les divers niveaux d'enseignement est naturellement trouvée.

Tout cela est vrai. Les notions abordées dans les études secondaires, puis dans le premier grade universitaire – Licence dans l'espace LMD ou Baccalauréat au Québec – sont pour l'essentiel des mathématiques connues depuis le milieu du XIX^e^ siècle pour le lycée, puis la fin du XIX^e^ et le début du XX^e^ pour le début de l'université. Les statistiques, et quelques éléments d'algorithmique et d'analyse numérique plus récents, sont également présents à ces niveaux. Bien entendu, cela n'empêche en rien que la présentation de ces notions et/ou leur illustration par des exemples d'application ne repose sur des éléments bien plus actuels.

Il est important de noter que deux ensembles, ou deux « blocs », interviennent à ce niveau. Le lycée prend la suite de l'apprentissage du calcul et des premiers rudiments de mathématiques faits à l'école et au collège. La Licence précède la formation mathématique terminale des futurs mathématiciens professionnels, dans les trois grands champs de débouchés pour nos étudiants que sont les métiers de l'enseignement en collège et lycée, les métiers de l'industrie basées sur les applications des mathématiques, les métiers de la recherche : ces formations se placent maintenant à partir du niveau Master. Seul le Québec fait exception, avec l'étape transitoire très particulière qu'est le CEGEP[7] .

Dans l'apprentissage d'une science qui est par essence progressive, et dont les concepts doivent être abordés chapitre après chapitre et en plusieurs temps, voire

---

4 Unité d'enseignement, unité de compte dans les systèmes de crédits capitalisables. À noter que dans certains pays, et notamment en France, existe également un système de compensation (souvent semestrielle, voire aussi annuelle) qui permet d'obtenir une UE sans y avoir eu la moyenne, grâce à une bonne moyenne générale.

5 Pour un socle de la licence de Mathématiques, http://smf.emath.fr/files/text_like_files/projetdesocledef5.pdf.

6 Jean-Pierre Borel, *Pourquoi un socle de la Licence de Mathématiques*, Gazette des mathématiciens, Société Mathématique de France, avril 2008, n° 116, p. 65-72.

7 Collège d'enseignement général et professionnel. Il s'agit d'un bloc de deux années de formation, qui correspond – à ce que disent les collègues québecois – aux deux années terminale de lycée + première année d'université. Cette période est à la fois une occasion de changement de méthodes d'enseignement et un moment d'orientation, souvent sélective.

répétés, pour être finalement assimilés pleinement, le contenu d'une licence ne peut donc s'abstraire de deux questions :

– quelle est la (voire quelquefois les) formation reçue par les étudiants entrant en licence de mathématiques ?

– quels sont les débouchés visés par ces mêmes étudiants, et donc leur futur mathématique dans leur formation suite au L, ainsi que dans l'exercice de ces métiers ?

Il est à noter qu'ici les réponses des différents pays sont variées.

Pour ce qui est de la formation avant l'université

S'il s'agit de la formation avant l'université en France, la terminale S est maintenant très différente de la terminale C qui existait il y a plusieurs dizaines d'années. C'est particulièrement vrai dans la formation mathématique, dont le volume horaire a beaucoup baissé hélas, et donc dans les notions abordées et le degré d'approfondissement proposé aux lycéens. Si certains aspects ont été maintenus au sein de la spécialité « mathématiques » [8], peu d'étudiants de licence de mathématiques ont suivi cette spécialité, qui de plus n'est pas ouverte dans tous les lycées... Par contre, plusieurs pays francophones ont fait le choix de conserver, globalement, les contenus scientifiques classiques de la terminale C de l'époque. Aujourd'hui, le « niveau » en mathématiques à l'entrée de l'université est réellement très différent, entre des pays comme la France, le Maroc, le Québec, par exemple.

Pour ce qui est des débouchés

Toutes les formations de niveau L universitaires francophones forment une partie des futurs chercheurs et mathématiciens de l'industrie, au travers d'une poursuite d'études en M (master dans le LMD, maîtrise au Québec) où très souvent les spécialisations apparaissent, que cela soit en mathématiques fondamentales, mathématiques discrètes, mathématiques appliquées, statistique et mathématiques financières. Le L est donc vu comme le socle commun pour ces poursuites d'études, le Liban faisant exception puisqu'il y existe une licence spécifique de Statistique, à côté de celle de Mathématiques, et que du coup l'enseignement des statistiques en licence de Mathématiques est très diminué ou optionnel.

Par contre, les choix faits pour former les futurs enseignants de mathématiques sont très divers. La France a choisi de former ses futurs enseignants au travers d'une licence disciplinaire classique[9], puis d'un master spécifique appelé MEEF[10], où la place de la discipline est plus faible[11]. C'est aussi le choix de la Belgique pour ses futurs enseignants de lycée. Par contre, les futurs enseignants de collège y sont formés dans une autre voie, plus centrée sur la dimension pédagogique de la formation, et ce dès le début de l'université. Il en est de même pour le Québec, mais

[8] Rappelons qu'il existe en terminale S quatre spécialités : « Mathématiques », « Physique-Chimie », « Sciences de la Vie et de la Terre », et depuis la rentrée 2012 « Informatique et Sciences du Numérique ».

[9] Il y a une trentaine d'année existait une licence spécifique adaptée pour préparer les futurs certifiés de mathématiques (traduire en termes actuels, une troisième année de L spécifique).

[10] Master mention « Métiers de l'enseignement, de l'enseignement et de la formation », formation portée par les universités mais au sein d'écoles spécifiques, qui ont pris à la rentrée 2013 le relai des anciens IUFM.

[11] L'articulation entre cette préparation et l'acte de recrutement par l'Éducation nationale – le CAPES – reste un sujet fort d'interrogations.

cette fois pour tout l'enseignement secondaire. Au Togo, la formation via l'École normale supérieure d'Atakpamé, donc hors université, concernait auparavant les seuls enseignants de collège. Mais depuis 2010 les futurs enseignants de lycée y sont également formés. Dans d'autres pays, le recrutement des enseignants de mathématiques en collège et lycée est beaucoup plus « libre », et les diplômes et titres requis pour devenir enseignant bien moins formalisés. Par exemple, tel pays indique que *toute personne ayant la nationalité du pays et titulaire du baccalauréat peut devenir vacataire, puis que tout vacataire ayant deux années d'ancienneté peut devenir professeur contractuel.*

Il est clair que ce choix n'est pas neutre vis-à-vis des contenus du L : l'apprentissage progressif des notions est à la base de la formation du mathématicien. Or se retrouvent ensemble en L, dans beaucoup de pays, des étudiants dont certains continueront à faire des mathématiques, alors que d'autres en feront moins, ou se focaliseront plus vers les notions de base enseignées en collège et lycée. Ces derniers peuvent alors se retrouver un peu au milieu du gué, s'il s'agit en L d'introduire les premières grandes théories abstraites que sont la théorie de la mesure, le calcul différentiel ou la topologie, théories sur lesquelles ils n'auront pas l'occasion d'arriver par la suite au recul nécessaire à une bonne mise en place des concepts.

A contrario, l'introduction dès la licence de ces diverses notions sera fructueuse pour les étudiants continuant leurs études dans un master de mathématiques, en leur donnant ainsi le temps de saisir l'ampleur et la profondeur de ces théories.

Pour ce qui est de l'orientation post-bac des étudiants

Enfin, les systèmes d'enseignement supérieur sont variables dans leur organisation générale. Le Québec a une place très particulière, liée à l'existence du CEGEP, articulation en deux années entre le secondaire et le supérieur, et également moment d'orientation plus ou moins dirigée. La France et un certain nombre de pays africains francophones connaissent le découpage voie universitaire / classes préparatoires puis écoles d'ingénieur. Du coup, dans plusieurs de ces pays, les meilleurs éléments du lycée ont tendance à s'orienter vers les voies sélectives, vues à tort ou à raison comme mieux encadrées et de nature à assurer de meilleurs débouchés. La licence de mathématiques s'adresse alors à des jeunes bacheliers scientifiques, mais ayant souvent obtenu leur bac sans mention. Il s'agit d'un public très différent de celui rencontré dans les pays organisant une sélection – quelquefois sévère – en entrée de la licence.

Pour ce qui est de l'organisation pédagogique des licences

Au-delà des différences de culture entre le monde francophone et le monde anglo-saxon, qui expliquent la part relativement faible de l'enseignement « frontal » au Québec, et par contre la part importante qui y est donnée aux projets conduits seul ou en petit groupe, les mécanismes d'accès en licence et le profil des étudiants accueillis conduisent à des choix pédagogiques très différents. Il faut noter en particulier le choix fait en France d'une orientation dite « progressive » à l'entrée à l'université[12], conduisant à donner une large place à la réflexion de l'étudiant sur son projet personnel et professionnel, sur sa future discipline centrale. Cette orientation se traduit par des « portails d'entrée » en licence, troncs

[12] L'arrêté du 4 février 2014, qui fixe le « cadre national des diplômes » en France, affirme très clairement ce principe dans son article 15.

communs proposés à tous les étudiants, y compris ceux ayant déjà un projet professionnel affirmé. Sans compter que cela puisse être mal ressenti ou mal compris par les étudiants ayant ce profil, ce choix conduit à des troncs communs importants, certains très naturels avec l'informatique, ou la physique – quelquefois remplacée par l'économie comme dans la filière MASS – certains moins naturels ou efficaces. Il a pour conséquence une structure des volumes horaires qui fait peu apparaître une dominante mathématique lors des trois premiers semestres de formation. L'entrée dans une formation à forte dominante mathématique se fait donc soit dès après le lycée dans certains pays, soit au bout d'une demi-licence dans d'autres.

Où sont donc les fondamentaux ?

Le travail collectif a mis en évidence les différences et les points de convergence. Ils sont pour l'essentiel liés aux contextes rappelés ci-dessus, et ont fait l'objet de la présentation de synthèse pour les mathématiques faite à la fin du colloque CIRUISEF d'avril 2013, et qui sont détaillés ci-après.

Il reste cependant à bien convaincre chaque responsable de licence de mathématiques que ses choix de contenu doivent à la fois tenir compte des grandes tendances générales, et notamment de ce qui se fait dans son propre pays ainsi que dans les pays partenaires où ses étudiants pourront se retrouver plus tard, mais aussi d'une bonne connaissance de ses propres étudiants, de leur origine scolaire, des compétences et connaissances qu'ils ont réellement acquises dans l'enseignement secondaire[13], et de leurs projets de poursuite d'études et professionnels.

Les constats de différences sur la licence et sa place dans l'ensemble des formations

Essentiellement deux approches existent, qui correspondent autant à des visions différentes qu'à des contextes différents, même si l'existence d'autres licences voisines (exemple de la licence de Statistiques au Liban) peut modifier une partie des contenus :

– une licence dont les six semestres sont tous très centrés sur les mathématiques ;
– une licence plus équilibrée entre disciplines dans sa première partie (orientation progressive, ouverture sur d'autres sciences) ;

avec des conséquences dans plusieurs directions :

– sur le volume horaire global de la formation ;
– sur la part et l'équilibre des mathématiques tout au long des six semestres de formation ;
– sur les contenus mathématiques traités ;
– sur l'existence et l'importance des dispositifs d'orientation progressive des étudiants ;
– sur l'ouverture sur les autres sciences.

[13] Il s'agit d'un point particulièrement important en ce moment en France, avec les modifications importantes des programmes de lycée.

Pour détailler plus, ces différences ont un impact quantitatif et un impact qualitatif, détaillés ci-après pour que chacun puisse se positionner.

Quantitativement. Nous avions affirmé en 2008 le principe de la « double moitié » : *tout étudiant ayant le titre de licencié de mathématiques doit avoir obtenu au moins la moitié des crédits constitutifs de sa licence dans des UE de mathématiques, et ce pour un volume horaire au moins égal à la moitié du volume total*. Certains pensent que cette affirmation permet à tous de se retrouver et doit rester comme une condition minimale impérative. D'autres estiment au contraire que cette position est trop minimaliste : ils considèrent qu'une licence de mathématiques doit contenir entre 60 et 80% de volume en mathématiques.

Qualitativement, au travers des théories rencontrées : le temps mathématique est long, on ne peut par exemple raisonnablement pas introduire le même semestre les séries numériques et les séries de fonctions. Lorsque le volume horaire de mathématiques varie de 850 heures (50% du volume d'une licence en France) à 1 450 heures (80% du volume d'une licence au Liban), il n'est pas possible d'aborder le même ensemble de notions. On peut ainsi classer le contenu d'une licence en trois paquets :

– une partie commune de mathématiques « socle », où se retrouvent géométrie, analyse linéaire et bilinéaire, étude des fonctions d'une et plusieurs variables, suites et séries, arithmétique et structures de base, avec un peu de logique élémentaire et de langage ensembliste, et de retour sur R et C. Ce que l'on peut mettre comme éléments de programme sous ces intitulés de grands chapitres est par exemple détaillé dans le document déjà cité[14]. Cet ensemble est le vrai point commun aujourd'hui de nos licences ;

– une partie plus « moderne », mais non assurée partout ou proposée en option, avec probabilités et statistiques, analyse numérique, y compris avec l'usage d'un ou plusieurs logiciels de calcul numérique et/ou formel. Il me semble clair que cet ensemble doit rejoindre le précédent et entrer dans les incontournables d'une licence de mathématiques du XXI^e siècle. C'est encore loin d'être fait, même si un accord existe pour dire que cela est souhaitable. Mais dégager les espaces pour inclure cette partie dans nos diplômes semble quelquefois difficile...

– une partie plus « avancée », où se trouve une introduction à des théories plus élaborées, comme théorie de la mesure, calcul différentiel, topologie, etc. Cela n'est pas assuré partout, parfois pour des raisons de volume global comme dit précédemment, parfois par choix pédagogique. Il est important que là où ces notions sont introduites dès la licence, cela soit fait de manière raisonnable et avec un niveau d'exigence adapté. Une trop grande différence entre le sujet d'examen posé à la fin et le programme théorique de l'UE est un très bon indicateur d'un dérapage à corriger. Si l'introduction en fin de licence de théories plus avancées peut être souhaitable, voire obligatoire pour un étudiant souhaitant continuer ses études en master de mathématiques, il reste important que cela ne conduise pas l'étudiant à une marche forcée, lorsque le volume horaire global est modeste, et que cela soit pensé de manière particulière pour un étudiant n'ayant pas pour projet de continuer en master de mathématiques, lieu naturel où ces théories pourront être approfondies.

[14] `http://smf.emath.fr/files/text_like_files/projetdesocledef5.pdf`

Les affirmations partagées sur les grandes compétences transversales des licenciés de mathématiques

Il y a ici une large convergence : début d'autonomie dans le travail universitaire, acquisition de méthodes, capacité d'analyse et de synthèse, maîtrise de l'expression écrite et orale en français et en anglais, font partie des compétences unanimement admises, et dont le travail réalisé, notamment au travers des contrôles de connaissance, permettent d'attester de la réalité.

Au-delà de ces compétences dont on peut penser qu'elles sont présentes dans toutes les licences, le licencié de mathématiques a pu faire preuve d'un niveau d'abstraction plus important, d'une capacité à organiser ses idées et son raisonnement, mais aussi de compétences plus particulières, liées aux objets qu'il a rencontrées. Une certaine familiarité avec le concept de matrice va être d'une aide précieuse pour un usage avancé d'un logiciel comme Excel, par exemple...

Par contre, les compétences dites « pré-professionnelles » font l'objet d'une attention plus variable, que cela soit en terme de savoirs (connaissance du contexte professionnel par exemple), de savoir-être ou de savoir-faire. La situation de pénurie d'enseignants de mathématiques dans le secondaire, connue par plusieurs pays, peut par exemple conduire à considérer comme naturel qu'un étudiant de licence de mathématiques, même collé, puisse trouver un travail dans ce contexte. Le préparer deviendrait alors inutile ! Il faut donc rester sérieux et vigilants sur ces aspects, et proposer les enseignements d'ouverture et les modalités de travail, par exemple en groupe, permettant de développer ces types de compétences. Par contre, en l'état de la réflexion du groupe, il semble difficile d'en attester l'acquisition de manière directe. Cela reste une question à creuser.

Les affirmations partagées sur les grandes compétences en mathématiques des licenciés de mathématiques

Il est important que les diplômés en mathématiques de l'enseignement supérieur puissent connaître les mathématiques plus récentes, et leurs usages principaux dans la société. En particulier, tout étudiant titulaire de la licence doit, au-delà des connaissances de mathématiques classiques à ce niveau :

– avoir une formation de base en statistique ;
– avoir une formation de base en analyse numérique ;
– avoir une formation scientifique en informatique ; maîtriser au moins un logiciel de calcul formel et un logiciel de calcul numérique.

Il s'agit là d'une évolution importante par rapport à ce que nous connaissions il y a trente ou quarante ans. Cette évolution n'est pas faite partout ni dans tous les pays. Il est important de s'y atteler. Si les mathématiques peuvent s'élargir au niveau master dans plusieurs filières différentes, avec notamment tout ce qui est du champ des mathématiques appliquées ou des statistiques, la licence de mathématique doit rester un lieu de construction d'un socle commun et qui n'ignore aucun de ces champs.

La formation en licence doit permettre à l'étudiant d'améliorer sa perception de la démarche mathématique, insistant en particulier sur[15] :

[15] Cette liste, qui est issue du socle proposé par les trois sociétés savantes françaises, a fait l'objet d'un accord global au sein du groupe.

– la mise en place des « objets mathématiques », l'introduction d'une notion étant justifiée par des exemples, des motivations liées à son utilisation, etc., avant même l'énoncé de la définition et la présentation des théorèmes ;

– le rôle central de la démonstration, même si tout démontrer n'est pas un objectif en soi ; l'organisation du raisonnement, ce qui suppose une certaine familiarisation avec les outils de la logique ;

– la compréhension des structures (en particulier à l'occasion des cours d'algèbre) ; la mise en œuvre informatique des calculs formels, numériques, statistiques, quand le sujet s'y prête ;

en visant les grandes compétences mathématiques suivantes[16] :

– une bonne appropriation de R, R^2, R^3 du point de vue algébrique, analytique et géométrique ;

– la résolution d'équations (linéaires, algébriques, différentielles) ;

– la notion d'approximation (dans divers cadres) ;

– l'étude de l'aléatoire (probabilités et statistiques) et du traitement de données.

Ces considérations peuvent paraître minimalistes à certains. Il n'empêche que les mathématiques sont bâties sur le raisonnement et la rigueur, et non sur le survol rapide et une pseudo-compréhension. Que nos étudiants de licence aient vu un peu moins de notions, mais qu'ils aient compris en profondeur celles qu'ils ont rencontrées, est certainement le meilleur service à leur rendre, à la fois pour leur futur – qu'il soit ou non de mathématicien – et pour leur faire aimer les mathématiques.

Il reste cependant le fait que les contextes d'une part, les choix d'orientation et des grands métiers visés par la licence de mathématiques d'autre part, sont différents suivant les pays. La définition d'un « socle » unique devient alors chose délicate, à la fois pour ce qui est du concept lui-même – entendons-nous la même chose par ce mot « socle » ? – que du contenu à lui donner.

J'ai essayé de donner ici à la fois l'ensemble des éléments de problématique et de contexte, tels qu'ils sont apparus au groupe de travail initié par la CIRUISEF, et une première analyse des contenus sur lesquels les échanges ont porté, ce qui peut être utile pour affiner la réflexion. Beaucoup de travail reste à faire. Il est important que l'ensemble des universitaires français, notamment les responsables des licences de mathématiques, puissent prendre leur place dans une discussion qui ne fait que commencer.

[16] Idem

PRIX ET DISTINCTIONS

Michèle Artigue et la médaille Felix Klein

Daniel Perrin[1]

Michèle Artigue, professeur émérite à l'université Paris-Diderot (Paris 7), a obtenu la médaille[2] Felix Klein 2013. Rappelons que cette médaille prestigieuse est décernée tous les deux ans depuis 2003 par la CIEM[3]. Cette commission a été fondée en 1908 lors du congrès international des mathématiciens de Rome, et son premier président a été justement Felix Klein. Cette distinction récompense *des travaux et une carrière exceptionnels dans le domaine de la recherche sur l'enseignement des mathématiques*. Michèle est la deuxième[4] personnalité française à l'obtenir après Guy Brousseau en 2003.

Je ne veux pas rentrer ici dans le détail des attendus de la commission d'attribution de la médaille que l'on trouvera à l'adresse suivante :
`http://www.mathunion.org/icmi/activities/awards/the-felix-klein -medal-for-2013/`
mais donner simplement un bref aperçu de la carrière et des travaux de Michèle Artigue, en mettant notamment en avant les liens qu'elle a tissés avec les mathématiciens.

Michèle est née en 1946 dans les Pyrénées[5]. Elle entre à l'ÉNS de jeunes filles (Sèvres) en 1965, est reçue première à l'agrégation de mathématiques 1968-1969 et est recrutée comme assistante à la faculté des sciences de Paris (puis à Paris 7) en 1969. Elle y fera presque toute sa carrière, hormis un passage comme professeur

[1] Université Paris-Sud, Orsay.
[2] À ne pas confondre avec le prix Felix Klein, décerné par la société mathématique européenne, mais qui concerne plutôt les applications industrielles.
[3] Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique, souvent plus connue par son sigle anglais ICMI (International Commission on Mathematical Instruction).
[4] Signalons aussi la médaille Freudenthal (qui récompense une contribution majeure dans le domaine de la didactique) obtenue par Y. Chevallard en 2009.
[5] Qu'elle a gravies dans tous les sens, même après la perte d'un bras.

à l'IUFM de Reims entre 1991 et 1999. Ses débuts dans la recherche sont du côté de la logique mathématique, mais comme quelques autres[6] de ses contemporaines, elle vire vers la didactique à la fin des années 1970. La didactique des mathématiques est alors un domaine nouveau, créé sous l'impulsion de Guy Brousseau, Gérard Vergnaud, Régine Douady et d'autres. Il faut rappeler que la période est celle de l'introduction des « mathématiques modernes », qui a provoqué le séisme que l'on sait dans l'enseignement des mathématiques et a fait prendre conscience à beaucoup de gens que la cohérence mathématique d'une notion n'est pas une condition suffisante de sa transposition dans l'enseignement. Michèle soutient sa thèse d'état en 1984 sous la direction d'André Revuz. Cette thèse pose la question de la reproductibilité des situations élaborées dans le cadre de la recherche, notamment dans les classes « ordinaires », une question centrale en didactique pour éviter les erreurs de la réforme évoquée ci-dessus.

À l'université Michèle travaille très tôt à l'IREM[7], donc autour de la formation continue des enseignants du second degré. Elle participe aussi à la création d'une section expérimentale maths-physique en DEUG (où elle travaille notamment sur la différentielle et les équations différentielles) et à celle d'une unité de maîtrise pour les futurs professeurs alliant didactique, épistémologie et histoire des mathématiques. À l'IUFM elle est en charge de la formation des futurs professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire (CAPES, année de formation professionnelle, formation continue).

Je n'ai ni la place, ni la compétence, pour détailler ses activités de recherche en didactique, mais elles s'orientent dans plusieurs directions : l'enseignement primaire, les liens avec les autres disciplines, l'enseignement de l'analyse dans le supérieur et, peut-être le plus important, l'utilisation des nouvelles technologies. De ce côté, après avoir étudié les aspects graphiques et qualitatifs des équations différentielles (le livre qu'elle a écrit avec Véronique Gautheron est encore très utile aujourd'hui), elle travaille sur l'intégration dans l'enseignement des logiciels de géométrie, puis de ceux de calcul formel (notamment le logiciel *Derive*, plus particulièrement destiné aux étudiants et aux enseignants), dirigeant plusieurs contrats de recherche sur ce sujet.

Ses travaux de didactique relèvent de domaines variés : ingénierie didactique, relation entre didactique et épistémologie, aspects plus théoriques. Sur ce plan, l'un des apports essentiels de Michèle est *l'approche instrumentale* qui associe la théorie anthropologique de Chevallard et une approche ergonomique comme celle de Rabardel (un psychologue cogniticien). Cela s'applique notamment aux nouvelles technologies. Pour dire les choses en un mot, l'un des points essentiels est de questionner la difficulté du passage d'un artefact (autrement dit une création humaine) à un instrument (le même, mais devenu outil pour son utilisateur), cette transition n'étant pas automatique.

Elle a dirigé 19 thèses et supervisé 6 habilitations.

Le rayonnement international de Michèle est exceptionnel. Elle a participé à de nombreux colloques dans le monde entier, elle a donné des conférences sur tous les continents, elle a collaboré à maints projets internationaux dont elle a

[6] Le fait que les didacticiens français, au moins ceux de cette génération, aient une solide culture mathématique, n'est pas pour rien dans leur qualité, internationalement reconnue.

[7] Qu'elle dirigera notamment de 1999 à 2004. Elle est actuellement présidente du comité scientifique des IREM.

eu souvent la responsabilité et elle a des responsabilités éditoriales dans plusieurs revues internationales. Enfin, elle a été vice-présidente de la CIEM de 1998 à 2006, avant d'en être la première femme présidente[8] de 2007 à 2010.

Dans les rapports parfois difficiles entre didacticiens et mathématiciens, Michèle a souvent joué un rôle important, d'abord parce que sa légitimité mathématique était indiscutable, et ensuite parce qu'elle a toujours su, dans les rapports avec ses collègues mathématiciens, trouver un langage audible par ces derniers.

Pour finir, je voudrais ajouter une note personnelle. Je connais Michèle depuis près de 50 ans et nous avons noué, dès notre entrée à l'ÉNS, des liens d'amitié qui ne se sont jamais démentis depuis. J'ai eu quelquefois l'occasion de travailler avec elle, notamment dans le cadre de la commission Kahane (à la fois pour l'élaboration du rapport sur les nombres et pour celui qui concernait la formation des maîtres) ou au comité scientifique des IREM. Chaque fois j'ai été frappé par sa rapidité et sa puissance de travail, dont témoigne l'ampleur de la liste de ses publications, par son sens politique, qui la conduit à ne jamais oublier les besoins réels de l'enseignement, par la pertinence de son questionnement[9], par son ouverture, notamment aux autres disciplines, et surtout par son extraordinaire capacité de synthèse, qui se manifeste avec éclat dans le travail collectif. Personne mieux qu'elle n'est capable de tirer des conclusions simples et claires d'une réunion, même si celle-ci a été animée, voire confuse ! J'ajoute que ses qualités humaines[10], un contact facile et chaleureux, renforcé par l'accent chantant de ses montagnes, font que c'est un plaisir de travailler avec elle.

Nul doute que la médaille Klein a été bien attribuée et que cette récompense rejaillira sur toute la communauté didactique et mathématique française !

[8] Avant elle plusieurs éminents mathématiciens français avaient présidé la CIEM : J. Hadamard, A. Châtelet, A. Lichnérowicz et J.-P. Kahane.

[9] François Sauvageot dit à ce sujet : *Michèle pose toujours les bonnes questions, alliant simplicité et profondeur.* Je confirme.

[10] Je ne dirai rien ici du courage dont elle a fait preuve dans certaines circonstances difficiles.

CARNET

Marc Yor

(1949-2014)

Jean-François Le Gall

Marc Yor a été l'une des personnalités marquantes du monde des probabilités dans la dernière partie du vingtième siècle et le début du vingt-et-unième. Après des études à l'ENSET (devenue depuis l'École normale supérieure de Cachan) et une thèse sous la direction de Pierre Priouret, il devient rapidement chercheur au CNRS, puis en 1981 professeur à l'université Pierre et Marie Curie où il restera jusqu'à sa retraite au 1er janvier 2014. Il a été un chercheur extraordinairement prolifique, avec plus de 400 publications écrites avec une centaine de collaborateurs, dont beaucoup des spécialistes les plus éminents des probabilités dans le monde. À la suite de Paul-André Meyer et Jacques Neveu, Marc Yor a été l'un des acteurs principaux qui ont permis l'épanouissement de la recherche en probabilités en France. Avec Jacques Azéma, il fut pendant de nombreuses années l'éditeur du fameux Séminaire de Probabilités publié par Springer. Marc Yor a aussi été un directeur de recherche exceptionnellement actif, encadrant plus de trente thèses pendant sa carrière de professeur d'université. Dans les années 1980-1990 en particulier, il a joué un rôle irremplaçable en accueillant les meilleurs étudiants de mathématiques intéressés par les probabilités et en les formant à la recherche. Un grand nombre d'entre eux sont devenus ensuite chercheurs au CNRS ou professeurs dans des universités françaises ou étrangères.

Les travaux de recherche de Marc Yor couvrent beaucoup d'aspects de la théorie moderne des probabilités, mais il est devenu célèbre dans le monde entier pour ses applications du calcul stochastique. Né des travaux du grand mathématicien japonais Kiyoshi Itô dans les années 1940, le calcul stochastique a été développé dans les années 1960, notamment en France par Paul-André Meyer et l'école de Strasbourg, mais c'est le travail de Marc Yor qui a bien montré toute la force de cette technique mathématique. Entre ses mains, le calcul stochastique devient un outil extrêmement puissant pour calculer explicitement les lois de probabilité associées à toutes sortes de processus aléatoires. Parmi les processus aléatoires, celui que Marc Yor chérissait entre tous était le mouvement brownien, dans la suite des travaux de Paul Lévy à qui il vouait une grande admiration. Avec beaucoup de collaborateurs à travers le monde, Marc Yor a écrit nombre d'articles fameux autour du mouvement brownien, qui ont inspiré et continueront d'inspirer des générations de chercheurs. Parmi ses contributions les plus remarquables, on peut citer ses travaux sur les temps locaux des semi-martingales, sur les théorèmes de Ray-Knight et leurs généralisations, sur les processus de Bessel et sur les nombres de tours du mouvement brownien plan. Les travaux de Marc Yor lui ont valu une très grande reconnaissance aux quatre coins de la planète, et il était toujours heureux de voyager, pour des congrès ou des visites plus longues, afin de faire partager ses idées et ses découvertes mathématiques.

De tous les livres écrits par Marc Yor, son traité avec Daniel Revuz « Continuous martingales and Brownian motion » qui a été rédigé à partir des cours de DEA que donnait Marc Yor au début des années 1980, est sûrement le plus connu. Cet ouvrage très riche d'exemples d'utilisation du calcul stochastique a connu un succès phénoménal pour un livre de recherche mathématique, en partie à cause des applications potentielles aux mathématiques financières. Dans la dernière partie de sa carrière, Marc Yor s'est intéressé à ce domaine, non pas en raison d'une attirance particulière pour la finance (il s'interrogera plus tard sur la responsabilité des mathématiciens dans la crise financière) mais parce qu'il y voyait un vaste champ d'application pour les techniques qu'il maîtrisait si bien.

Les deux mots qui décrivent le mieux la personnalité scientifique de Marc Yor sont sans doute enthousiasme et générosité. Enthousiasme, parce qu'il savait si bien communiquer son goût pour la recherche et faire partager sa joie de trouver de nouveaux théorèmes ou de nouvelles formules. Générosité, parce qu'il a aidé tant de jeunes chercheurs, publiant avec eux nombre d'articles de recherche dont tout le monde savait qu'il avait écrit l'essentiel mais dont il était toujours heureux de partager le mérite.

Marc Yor avait reçu de nombreuses distinctions scientifiques. Il avait été élu correspondant de l'Académie des sciences en 1997 puis membre en 2003. Il était aussi membre senior de l'Institut universitaire de France depuis 2004. Autant que de ces distinctions, on se souviendra du rôle inestimable que Marc Yor a joué dans le développement de l'école française de probabilités : sans lui, les réussites récentes de cette école, dont la plus éclatante est la médaille Fields de Wendelin Werner en 2006, n'auraient sans doute pas existé. La disparition de Marc Yor laisse un grand vide dans la communauté mathématique de notre pays.

Un numéro spécial commun à la Gazette des mathématiciens et à Matapli sera prochainement consacré à l'œuvre scientifique de Marc Yor.

Jean Jacques Moreau

(1923-2014)

Michel Valadier

Jean Jacques Moreau, né le 31 juillet 1923, est décédé le 9 janvier 2014 dans sa quatre-vingt onzième année. C'est un très grand mécanicien et mathématicien qui disparaît.

Il a fait, après ses études à Poitiers, l'agrégation de mathématiques et une thèse soutenue à Paris en 1949 (titre : *Bilan dynamique d'un écoulement rotationnel*), carrière à Montpellier. Il aurait pu obtenir un poste dans un centre de recherche français ou étranger plus important. S'il est resté à Montpellier c'était qu'il s'y sentait bien et pour se consacrer à son travail de chercheur.

J'ai fait sa connaissance vers 1968 et suis devenu un de ses collègues à Montpellier en 1970. Ses travaux en mécanique sont pour la plus grande partie hors de mes compétences (quoique ayant beaucoup apprécié sa note [1] sur la cavitation dans une conduite ; j'en conseille la lecture). Par contre je connais assez bien ses travaux mathématiques et la période 1970–1985, et l'ai souvent vu ces dernières années. Il disait développer des mathématiques pour la mécanique. La non-interpénétrabilité des solides et la loi de Coulomb du frottement sec sont de bonnes raisons de développer l'unilatéralité (l'inégalité large $\leqslant$ plutôt que la stricte $<$, les fermés plutôt que les ouverts, etc.). Les fonctions convexes s'introduisent naturellement (cela mènera plus tard à l'Analyse non-lisse).

Avant mon arrivée à Montpellier j'avais eu un exemplaire de son texte [2] (quasi-livre : 108 pages) sur les fonctions convexes au Collège de France. Travail fondateur à la fois pour la mécanique, l'optimisation et d'une grande généralité mathématique (il n'hésitait pas à se placer en dimension infinie et à considérer un espace vectoriel topologique non localement convexe !, comme plus tard il étudiera de façon approfondie les fonctions à variation bornée). Il a abandonné le domaine de définition d'une fonction convexe en autorisant la valeur $+\infty$, manié les épigraphes et la dualité, donné dès 1963 un cas d'additivité des sous-différentiels, défini l'inf-convolution. C'est l'occasion de dire que pendant plusieurs années R.T. Rockafellar et lui ont obtenu des résultats voisins, simultanément ou l'un ayant une infime avance sur l'autre dans la date de parution, sans jamais s'en plaindre ni l'un ni l'autre. Cela illustre ce qu'il m'a dit plusieurs fois : son objectif était la connaissance, et surtout pas la compétition avec les autres. J'avais lu aussi l'article [4] qui généralise [3] lequel traite de la décomposition d'un vecteur par ses projections sur deux cônes mutuellement polaires (le cadre est un espace de Hilbert). Ces deux articles sont très souvent cités. La décomposition peut facilement être expliquée en dimension 2 par un simple dessin, mais ça se complique dès la dimension 3, et [4] est encore moins visuel.

Avant 1970 il a été à la tête d'un petit groupe qui avait produit les deux années précédentes deux volumes sous le titre *Séminaire d'Analyse Unilatérale*. À partir de 1970 le groupe augmenté de Charles Castaing, Bernard Lemaire, Lionel Thibault et moi-même (pour ne nommer que les professeurs !) a tenu un séminaire hebdomadaire, le *Séminaire d'Analyse Convexe* publié annuellement sous forme de volumes polycopiés jusqu'en 1992. Beaucoup d'exposés ont porté sur le multivoque mesurable, exposés qu'il a suivis avec intérêt. Lui-même nous y a souvent exposé de façon lumineuse (comme son enseignement d'après tous les témoignages) ses travaux en cours.

Durant un certain nombre d'années il a étudié le *problème de la rafle* qui est en quelque sorte le noyau mathématique de l'évolution à vitesse lente, quasi-statique, des milieux continus élasto-plastiques. Cette inclusion différentielle est un problème d'évolution avec un opérateur monotone dont le domaine varie avec le temps. Il a beaucoup publié sur le sujet, en particulier [5], et une bonne synthèse est le livre de Manuel Monteiro Marques [6].

À la fin des années 80 l'obligation de s'organiser en équipes et son sentiment d'être avant tout mécanicien l'ont conduit à rallier l'Équipe de mécanique qui se constituait. Il s'est alors presque complètement consacré aux granulats — par exemple le ballast de la SNCF —, pour lesquels il mettait au point des programmes de calcul, bien souvent en collaboration avec Michel Jean. Le 2 juin 2003 lors d'un colloque à la Grande-Motte je l'ai vu provoquer un frisson dans l'assistance en projetant un film d'avalanche de blocs solides : les images étant calculées par le programme qu'il avait écrit.

Il a publié en mécanique de façon continue depuis peut-être 1947. Ses travaux sont très appréciés de ses pairs : voir le colloque organisé pour ses quatre-vingts ans en novembre 2003 à Montpellier [7] auquel participaient de nombreux mécaniciens. Il est certainement rare au vingtième siècle de produire autant de percées conceptuelles en mathématiques sans s'y employer à temps plein.

En tant que collègue Jean Jacques, avec son poids scientifique, son aisance de parole, son œil d'aigle et sa vivacité, a été une grande autorité morale, intellectuelle, du département de mathématiques de Montpellier, ceci dans les années 70 et 80 (avant la création du Département de mécanique). Il n'en abusait pas, ne parlant guère plus souvent qu'à son tour dans nos diverses réunions. Il a fait sa part de travail administratif sans courir après, disant que ce travail de gestion devrait être assuré par des spécialistes payés pour ça. Le pouvoir universitaire ne l'intéressait pas. Mes souvenirs dominants sont de courtoisie et, malgré le désir évident de ne pas perdre son temps, de gentillesse. Bref un excellent collègue, un collègue normal ! Les conversations extra-professionnelles étaient un régal : son savoir dans les différents arts semblait sans limites. Il aimait la peinture, le surréalisme, parlait aussi bien de Nina Simone, que du film Port de l'angoisse, des Barricades mystérieuses (de Couperin)... Ces derniers temps encore il avait gardé le ton amusé et gourmand auquel j'étais habitué.

L'influence de Jean Jacques Moreau reste durable et nos bibliothèques institutionnelles (et même personnelles) sont riches de ses travaux.

Références

[1] Moreau, J.J., *Sur la naissance de la cavitation dans une conduite*, C. R. Acad. Sci. Paris, **259** (1964) 3948–3950.

[2] Moreau, J.J., *Fonctionnelles convexes*, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles (1966–1967) II, Collège de France, Paris (1967), 108 pages (réédité en 2003 en 950 exemplaires

par Facoltà di Ingegneria, Università di Roma "Tor Vergata"). Ce texte rare est téléchargeable, y compris une page d'errata, sur numdam.org.

[3] Moreau, J.J., *Décomposition orthogonale d'un espace hilbertien selon deux cônes mutuellement polaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, **255** (1962) 238–240 (généralisé dans [3]).

[4] Moreau, J.J., *Proximité et dualité dans un espace hilbertien*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965) 273–299.

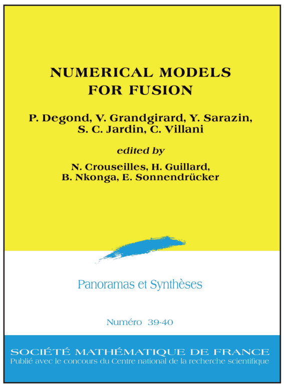
[5] Moreau, J.J., *Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space*, J. Differential Equations **26** (1977) 347–374.

[6] Monteiro Marques, M.D.P., *Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems. Shocks and dry friction*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, **9**. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

[7] Actes du colloque tenu à Montpellier du 17 au 19 novembre 2003, *Nonsmooth mechanics and analysis*, Adv. Mech. Math., **12**, Springer, New York, 2006, (éditeurs P. Alart, O. Maisonneuve, R.T. Rockafellar).

Numerical models for fusion

P. Degond, V. Grandgirard, Y. Sarazin, S. C. Jardin & C. Villani
N. Crouseilles, H. Guillard, B. Nkonga, E. Sonnendrücker, eds

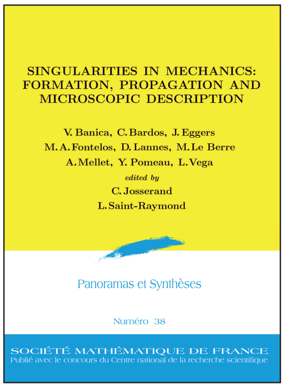


At very high temperature electrons leave the atom to which they are attached and a gas of charged particles called a plasma is obtained. Plasmas have a global and rich behaviour, much more complex than for neutral gases. This book details for topics in the mathematical and numerical study of plasmas: asymptotic preserving (AP) numerical schemes that enable to deal consistently with two space or time scales, gyrokinetic simulations of magnetic fusion plasmas, MHD simulations of magnetic fusion plasmas and the mathematical study of Landau damping.

Prix public : 90 € - Prix membre : 63 € frais de port non compris
ISBN : 978-2-85629-776-6

Singularities in Mechanics: Formation, Propagation and Microscopic Description

V. Banica, L. Vega, C. Bardos, D. Lannes, J. Eggers, M. A. Fontelos, A. Mellet,Y. Pomeau, M. Le Berre
C. Josserand, L. Saint-Raymond, eds.



This volume discusses - in a transverse way - the question of the formation, the propagation and the microscopic description of singularities. These different articles show the variety of physical problems that are concerned: wave breaking dynamics (Yves Pomeau and Martine Le Berre), evolution of vortex filaments (Valeria Banica and Luis Vega) or formation of cusps in surface flows (Jens Eggers and Marco Fontelos). Finally the mathematical grounds of such singularities are described for capillary flows (Antoine Mellet) and two dimensional surface flows (Claude Bardos and David Lannes).

Prix public : 45 € - prix membre : 32 € frais de port non compris
ISBN : 978-2-85629-769-8

Société Mathématique de France

SMF

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F-75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

INFORMATIONS

Journée « Sciences et Médias » au CNAM

Robert Farhi[1], Pierre Pansu[2]

Après la journée « Sciences et Médias, mieux travailler ensemble » organisée le 9 janvier 2012 par la Société Française de Physique (SFP)[3], en partenariat avec l'Association des Journalistes Scientifiques de la Presse d'Information (AJSPI), une seconde journée intitulée « Les enjeux du numérique » était organisée le 21 janvier 2014, à l'initiative de la SFP, conjointement avec la Société Chimique de France (SCF), la Société Mathématique de France (SMF), et la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI), avec la participation d'Inria et le soutien du CEA et du CNRS. Y étaient inscrits 99 participants. 112 se sont en outre connectés sur la page où était diffusé le direct. La proportion d'enseignants-chercheurs était de 49%, celle des communicants de 37% et celle des journalistes de 14%. Les vidéos des interventions sont disponibles à l'adresse : `http://sfp.univ-lille1.fr/sciencesetmedia/`

Après une présentation rapide de la journée par Daniel Bideau, président de la commission culture scientifique de la SFP, la parole était donnée à chacune des sociétés organisatrices. Ont été soulignés la mauvaise image de marque de la chimie (Igor Tkatchenko, secrétaire général de la SCF), le déficit d'information scientifique en France comparé aux États-Unis (Michel Lannoo), et le travail réalisé par la communauté des mathématiciens en direction de l'information et de la communication (Marc Peigné, président de la SMF). La parole a ensuite été laissée aux différents intervenants.

Olivier Lascar, rédacteur en chef des productions numériques de Sciences et Avenir, a illustré le *« Devenir des médias classiques »* , titre de son intervention, par le journal électronique et le site web de la revue. Sciences et Avenir existe depuis 1947. Sa rédaction a dû s'adapter à l'émergence des nouveaux médias. Aujourd'hui, la revue, dont la rédactrice en chef est Dominique Leglu, se décline en un mensuel et des numéros hors série papier, et le pôle digital, lui-même constitué d'un site web gratuit et d'un mensuel électronique payant, identique à la version papier, mais enrichi de documents, vidéos et diaporamas. Le site web recense un million de visiteurs uniques (VU) par mois et fournit certains sujets du mensuel. Mais son rythme ne permet ni recul ni analyse, à l'inverse des mensuels papier et numérique.

Le modèle économique des productions numériques repose sur les abonnements (journal) et la publicité (site web). Sciences et Avenir est également présent

[1] Commission culture scientifique de la SFP.
[2] Vice-président SMF, chargé des actions vers le « grand public ».
[3] Voir « Reflets de la Physique » n° 31, pp. 26-29.

sur les réseaux sociaux (Twitter ; Facebook : 200 000 fans), afin d'essayer de fédérer une communauté de lecteurs et de leur demander leurs avis. Les questions posées par ces moyens numériques sont nombreuses. Comment alimenter les sites et journaux électroniques, assurer la qualité de l'information et contrôler les sources ? Sur ce sujet, les avis des journalistes de la version papier sont souvent déterminants. Quels articles peuvent être diffusés gratuitement ? L'intervention d'Olivier Lascar s'est terminée, en réponse à une question, par quelques chiffres : la moyenne d'âge du lectorat de la version papier est de 45 ans (64% d'hommes, essentiellement issus du marketing), et de 35 ans pour celui de la version électronique.

Camille Cocaud est fondatrice et gérante de l'agence de communication scientifique Sparks & Co. Son intervention avait pour titre *« Évolution vers le numérique »*. Les usages du numérique s'articulent, selon elle, autour de 3 axes : partager la science, s'en approprier les contenus, et s'y impliquer.

Les « Hangouts », dont ceux organisés par la NASA ou le CNES sur les grands événements de la science spatiale, tels que le réveil de la sonde Rosetta, sont un exemple du premier axe. Le public se connecte pour discuter avec un expert : il s'agit donc d'une relation descendante. Par ailleurs, plusieurs chercheurs et organismes ont ouvert des comptes Twitter qui leur permettent de mieux faire connaître leur métier, passionnant aux yeux du public. Le second axe est illustré par le blogging (Hypothèses, Strip Science,...) ou les « serious games » : il s'agit de jeux vidéo mis en ligne par des CCSTI ou des institutions scientifiques, dont la trame tourne autour de la science (Forestia, Termitia, Plague Inc.).

Enfin, le public peut s'impliquer dans la recherche en finançant des projets (microryza), en donnant son avis (Forum des Fondamentales du CNRS, aujourd'hui clos), ou en participant *via* l'aide à la collecte de données (Vigie Nature, Missions Printemps, Foldit, etc.). Des appels au public ont été formulés sur plusieurs sujets (catégorisation des galaxies, conformation des protéines, nombres premiers,...) que les seuls ordinateurs ne permettent pas de faire avancer. Les aspects positifs des interactions entre le public et les chercheurs ou organismes sont nombreux, et en particulier celui de mieux faire connaître la science. Mais il convient d'éviter d'une part que chaque outil développé ne devienne une fin en soi, et d'autre part que l'opinion publique ne prenne le pas sur le politique pour la définition des priorités scientifiques.

Nicolas Revoy, fondateur du site web indépendant « Le Journal de la Science », a insisté, dans son intervention *« Les revues numériques »*, sur la difficulté de suivre et diffuser une actualité scientifique quotidienne tout en offrant un contenu original et une information triée et de qualité. La visibilité du site, notamment sur « Google actualités », est l'un des défis majeurs à relever. Aujourd'hui, la pléthore d'information, y compris dans le domaine scientifique, incite le public à consulter un nombre restreint de sites lui délivrant un contenu synthétique, plutôt qu'aller le chercher sur une multiplicité de sites.

« Le Journal de la Science » utilise pour beaucoup les brèves issues des organismes, mais délivre aussi des contenus plus longs, tels que des histoires de chercheurs, qui montrent la dimension humaine de la science et incitent le public à réfléchir.

À une question posée sur le peu de chimie et de mathématiques dans son journal, Nicolas Revoy répond que ces disciplines sont plus difficiles à vulgariser, contrairement à certains domaines de la physique, tels que l'astrophysique et l'espace.

Enfin, et contrairement à d'autres sites tels que Futura-Sciences (3 millions de VU/mois) ou Maxisciences (800 000 VU/mois), le modèle économique du « Journal de la Science » (100 000 VU/mois) repose plus sur la passion de ses acteurs et sur des contrats de prestations passés avec certains organismes ou entreprises que sur la publicité ou les abonnements.

Grégoire Allaire, président de la SMAI, introduit l'intervention de **Cédric Villani**, professeur de l'université de Lyon, directeur de l'Institut Henri Poincaré et médaillé Fields 2010, intitulée *« Splendeurs et misères du scientifique face aux médias »*. Le premier point sur lequel celui-ci insiste est d'apprendre à communiquer. Il a lui-même suivi un stage à cet effet. Il faut savoir se mettre à la place du journaliste et en faire son allié, être conscient des contraintes de temps et d'espace qui pèsent sur lui, mais aussi lui faire part de celles qui pèsent sur le chercheur. Les motivations qui peuvent inciter un chercheur à communiquer sont nombreuses : tenter de susciter des vocations, revaloriser l'image du scientifique, maintenir un lien avec la société, attirer des subventions,... Les motivations du public sont bien sûr complémentaires : intéresser ses enfants à la science, comprendre le monde dans lequel on vit, rencontrer un scientifique, ou même régler un compte avec la science ! ! Cédric Villani a fait de nombreuses interventions, dans des classes (expérience passionnante), via Internet, et par le biais de médias plus classiques, tels que les journaux, la radio, la télévision, le cinéma, l'édition littéraire. Les défis à relever sont principalement le manque de temps et d'espace, les possibilités d'instrumentalisation, de distorsion des propos. Il faut aussi prendre garde lors d'interventions qu'on serait incité à faire en dehors de son domaine scientifique. Mais une leçon à en tirer est qu'on sous-estime très souvent la réponse du public. La communication est donc payante, mais très contraignante : elle se fait en général au détriment des activités du chercheur, et de sa disponibilité mentale, d'autant plus que ce sont souvent les mêmes chercheurs qui sont sollicités. Cependant, suite à une remarque relative aux carrières des chercheurs qui vulgarisent, Cédric Villani répond qu'une étude montre qu'ils ont plutôt de meilleurs carrières que les autres. Enfin, il illustre avec bonheur la fin de son intervention par l'analyse d'un texte intitulé « De la mer violette à la mathématique bleue », qu'il a publié dans le supplément Sciences et Technologies du journal « Le Monde » du 2 février 2013 (`http://www.lemonde.fr/sciences/article/2013/01/31/de-la-mer-violette-a-la-mathematique-bleue_1825685_1650684.html`).


Suzanne de Cheveigné, autrefois physicienne des basses températures et aujourd'hui sociologue, directrice du Centre Norbert Elias, a commencé son intervention « Enjeux des relations entre scientifiques et société : la place des médias numériques » par des chiffres sur la consultation des divers médias par le public français. À la question « Où trouvez-vous des informations sur les développements en sciences et technologies ? », 63% des personnes citent la télévision, alors qu'Internet est cité à 45% (UE : 32%), et les magazines à 36% (UE : 26%). Viennent ensuite les journaux (30% : le nombre relativement important de magazines scientifiques français a été relevé), la radio (17%), les livres (13%) et les médias sociaux (6%). Mais plus important est le fait que la télévision s'avère beaucoup moins discriminante que les autres médias par rapport aux tranches d'âge ou aux classes socio-professionnelles (CSP). Internet favorise, comme on pourrait s'en douter, les CSP les plus favorisées et les tranches d'âge les plus jeunes. Les CSP les moins favorisées ont tendance à fuir le contact direct avec les scientifiques et lui préfèrent la médiation d'un journaliste. La fracture numérique dans le domaine de l'information scientifique est donc patente. Par ailleurs, les pressions exercées sur les journalistes ne font que croître : inondés d'informations qu'ils doivent trier, pris par le temps, ils ont la tentation d'utiliser des dossiers tout prêts, ce qui conduit à une perte de leur autonomie. Suite à une question, l'accent est mis sur la différence de nature et de contenu entre les informations délivrées par les organismes et celles directement délivrées par le chercheur. Il est rappelé à ce sujet que, contrairement à ce qui se passe dans d'autres pays tels que les États Unis, la loi française protège le chercheur dans la communication qu'il serait amené à faire directement.

Sophie Mahéo, de la direction de la communication à Inria, a donné quelques pistes sur *« Comment les Institutionnels peuvent utiliser les nouveaux médias »*, et peuvent en particulier animer les communautés. Inria est très présent sur les nouveaux médias. Chacun des 8 centres en région possède un fil Twitter. Les communautés qu'Inria essaie de toucher sont diverses : la sphère politique, les mondes académique et scolaire, les membres d'Inria, les anciens,... L'un des buts recherchés est d'améliorer l'attractivité de l'organisme et de mieux cerner son identité. Les chercheurs sont les premiers ambassadeurs d'Inria, et 194 personnes y travaillant s'expriment via Twitter, dont le PDG, Michel Cosnard. Il est utile de savoir ce qui se passe au sein même de l'organisme. Lors de la conférence fOSSa 2013 sur l'open source tenue à la fin novembre 2013, un marqueur #fossa2013 a permis de faire l'analyse des contenus produits par les intervenants. La conférence de début d'année du PDG a également fait l'objet d'une analyse de contenu des échanges. Ces analyses en interne permettent de mieux cerner la dimension de la communication au sein d'une communauté. La question peut se poser des conséquences et retombées négatives, en particulier de savoir si on ne trahit pas les personnels, du fait qu'ils n'ont pas toujours conscience de l'usage qui peut être fait de leurs échanges. Ces conversations sont certes des signaux faibles, mais à forte valeur pour l'organisme.

L'intervention d'**Aurélien Alvarez** avait pour titre : *« Une expérience sur internet, Image des maths »*. Il fait partie du comité de rédaction de ce journal, qui a changé de nature en passant, il y a 10 ans, du périodique papier assez confidentiel au média web, beaucoup plus ouvert. Son fonctionnement est calqué sur celui des revues scientifiques : chaque article est analysé par des relecteurs, dont le nombre total pour la revue est de 400. Une discussion s'instaure sur forum, et le processus converge au bout de quelques semaines avant publication. Les articles sont de différents niveaux : pistes verte (niveau école primaire), bleue (collège), rouge (terminale S), noire (licence), mais tous exigeants à la lecture. 60% des articles sont verts ou bleus, ouvrant ainsi la revue à un large public. Certains articles ont été regroupés sous forme d'ouvrages papier publiés aux éditions Le Pommier. Les billets, en revanche, sont des blogs ouverts aux commentaires, malheureusement assez peu nombreux. Aurélien Alvarez précise, suite à une question, que tous les auteurs sont des chercheurs ou universitaires, mais seuls 43% des lecteurs sont enseignants-chercheurs (25% d'étudiants, 13% de cadres), et 87% sont masculins, reflétant la proportion hommes/femmes de la discipline. L'ouverture à des auteurs non chercheurs et non universitaires a été discutée, mais il est à prévoir que ni le contenu ni le profil de la revue en seraient profondément modifiés.

La journée s'est terminée par l'intervention de deux étudiants, **Pierre Chirsen** et **Ornella Puschiasis**, sur le thème *« Utilisation des blogs par les scientifiques »* . Le premier blog, Indesciences (`www.indesciences.com`), présenté par Pierre Chirsen, s'est cristallisé autour de la FNEB (Fédération Nationale des étudiants en Sciences Exactes, Naturelles et Techniques), en partant du constat qu'il n'existait aucune plate-forme d'échanges d'informations scientifiques pour les étudiants. Le site est pluridisciplinaire, et s'est inspiré de blogs tels que ceux de Libération (*sciences*^{2}), du Monde (passeur de sciences), strip-science, cafe-sciences.org, etc. Bien que lus par un public plus large, les articles ne sont rédigés que par des étudiants. Ils n'y sont publiés qu'après revue. Le blog va au-delà de simples billets, puisqu'il est connecté aux réseaux sociaux, diffuse des podcasts, et couvre ou organise des évènements. Le second, res-EAU P10 (reseaup10.u-paris10.fr), a été présenté par Ornella Puschiasis, étudiante à Paris 10 Nanterre. Il tourne autour des sciences sociales et de la politique de l'eau. Il s'élargit au-delà de l'université Paris 10 et de la sociologie, en incluant par exemple le droit, l'hydrologie. Il présente les activités du réseau (séminaires, apér'eau scientifique, terrains de recherche, expo photo), et se veut simple, interactif, et accessible au grand public. Sa méthodologie repose sur des outils de recherche. Il met à contribution les réseaux sociaux (94 comptes Facebook et 251 Twitter), et fait l'objet de 2400 VU/mois. Le blog fonctionne en réseau, et non en noyau. Sa tenue (6 personnes) est très consommatrice de temps, mais des prolongements (bureau d'études, association, création de liens avec les entreprises,..) sont envisagés.

Conclusion. Les médias numériques répondent à une réelle demande du public dont les habitudes évoluent. En témoignent leurs taux de fréquentation sans cesse croissants. Mais avec leur irruption, le rythme de la communication s'est considérablement accru. Le journaliste et le chercheur sont soumis à des contraintes temporelles croissantes, avec pour risque une perte de qualité ou une imprécision de l'information, plus critiques encore dans le domaine scientifique. Le travail de journaliste scientifique en est rendu d'autant plus difficile que l'interactivité (Twitter, Facebook et autres réseaux sociaux) va de pair avec le journalisme sur la toile. Symétriquement, le chercheur qui souhaite communiquer sur ses activités le fait le plus souvent au détriment de sa recherche et de son enseignement. Ce travail nécessite, pour être gratifiant, une certaine complicité entre le journaliste et le chercheur ou l'organisme de recherche. L'interactivité représente une opportunité inédite, dont on n'a sans doute pas encore tiré tout le parti possible. Communiquer n'est plus délivrer un message, mais faire participer. De nombreux mécanismes permettent aujourd'hui d'amener le public à s'impliquer jusque dans la production scientifique. Bien que de jeunes chercheurs et étudiants se lancent dans l'aventure avec bonheur, et quelquefois au détriment de leurs travaux de thèse, le journalisme web professionnel souffre quant à lui d'un modèle économique encore incertain. Enfin, il est apparu que, pour une communication de qualité de la part des chercheurs, il deviendra très vite indispensable de prendre en compte, dans leur carrière, les activités de communication au même titre que celles d'enseignement ou de recherche.

Où en est le CIMPA ?

Une interview de Claude Cibils

Les lecteurs de la *Gazette* connaissent bien le CIMPA[1] mais ne sont peut-être pas au courant de son évolution récente tant au niveau de son financement que de ses projets. La *Gazette des mathématiciens* a cherché à faire le point avec C. Cibils, directeur du CIMPA.

C. Cibils, directeur du CIMPA

Peux-tu rappeler comment se définit la mission du CIMPA ?

Le CIMPA agit afin que la recherche en mathématiques s'installe de façon durable dans les pays en développement. Il aide à construire les réseaux scientifiques de demain. Le CIMPA encourage des initiatives sans se substituer aux mathématiciens sur place. La mission du CIMPA comporte trois grands équilibres à maintenir :

– entre les mathématiques fondamentales et appliquées, en favorisant leur articulation et leur enrichissement mutuel ;

– entre femmes et hommes, en encourageant la participation des femmes à tous les niveaux ;

– entre les régions, des plus défavorisées à celles qui émergent, en suscitant une coopération entre elles et avec les pays où le niveau de recherche en mathématiques est avancé.

[1] Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées.

Avec quels objectifs le CIMPA organise-t-il ses écoles de recherche ?

Une école de recherche est une opportunité sans pareil pour que les jeunes mathématiciens aient accès à la recherche actuelle et à ses outils. Elles se tiennent toujours dans les pays en développement, le CIMPA travaille aussi à augmenter l'institutionnalisation de la recherche en mathématiques. Finalement, l'objectif est aussi de repérer et d'encourager les bons jeunes mathématiciens.

Quelle a été l'évolution du CIMPA ces dernières années ?

L'européanisation du CIMPA est effective et pourra être continuée. La contribution de la France est d'environ 70% ; l'Espagne, la Norvège et la Suisse participent maintenant sur tous les plans au CIMPA. Le Conseil d'orientation et de pilotage (COP) a été créé, les sociétés savantes de ces pays en sont membres.

Le Conseil d'administration (CA) compte 7 membres individuels dont 3 des pays du Sud (Argentine, Philippines et Sénégal), les 4 autres membres individuels constituent le Bureau. Au CA les Ministères des États participants sont représentés, ainsi que l'INSMI, l'université Nice Sophia-Antipolis et l'UNESCO.

Le CIMPA est toujours un centre de l'UNESCO de catégorie 2. Avec l'International Centre for Theoretical Physics (centre de catégorie 1 de l'UNESCO à Trieste) nous menons un travail en collaboration fertile. En particulier nous organisons deux écoles de recherche en commun chaque année. Par ailleurs l'UNESCO traverse des difficultés majeures et sa participation au CIMPA a très nettement diminué.

Le Laboratoire d'excellence CARMIN regroupe les quatre grands instruments des mathématiques CIRM, IHÉS, IHP et CIMPA. Il a aussi contribué à augmenter notre financement qui a finalement presque doublé, il dépasse 500 K€. En conséquence nous organisons plus d'écoles de recherche qui sont bien mieux soutenues, c'est là notre activité principale et de très loin.

Nous appuyons, suscitons et encourageons des écoles organisées par les trois unions mathématiques continentales en partenariat avec le CIMPA : cela contribue efficacement à l'organisation et à la prise en charge des mathématiciens du Sud par eux-mêmes. Par ailleurs nous maintenons une opération spécifique et forte pour le Cambodge suite au génocide subi. Récemment le COP a mis en place un programme spécifique de Soutien de formation à la recherche (SFR) qui permet dans un cadre spécifié et précis déterminé avec le CIMPA de contribuer à une formation de niveau Master.

Depuis deux ans le CIMPA s'efforce d'attribuer la moitié de ses moyens financiers au continent africain. Les billets interafricains sont chers, et les jeunes africains de bon niveau sont encouragés à postuler à toute école de recherche. L'équipe Afrique du CIMPA coordonne les actions. Soulignons que souvent les initiatives ont de la difficulté à se mettre en place par manque de disponibilité des acteurs.

Mon travail est réalisé en collaboration étroite avec l'équipe de direction qui est très efficace. Les neuf « Responsables scientifiques » de cette équipe ont souvent des régions attribuées en duo la plupart du temps. Les États participant au CIMPA sont tous représentés parmi eux et je m'efforce de maintenir un équilibre entre leurs directions mathématiques ainsi qu'entre les femmes et les hommes qui la constituent.

La chargée de la communication a réalisé pendant 6 ans un excellent travail (voir par exemple les info-lettres du CIMPA et les affiches). Je remercie vraiment

Rosane Ushirobira, elle a quitté récemment cette responsabilité pour des raisons personnelles.

Le site[2] du CIMPA a été complétement renouvelé et chaque participant aura bientôt un espace personnel pour se porter candidat à une école de recherche. Les dossiers des candidats sont disponibles sans délai ainsi que les lettres de recommandation.

L'équipe administrative à Nice est toujours constituée par deux secrétaires (une à mi-temps), elles réalisent un travail formidable.

Comment les écoles de recherche sont-elles organisées ?

Chaque école de recherche de deux semaines, en anglais la plupart du temps, est préparée deux années à l'avance et compte deux coordinateurs principaux : l'un travaillant en Espagne, en France, en Norvège ou en Suisse, c'est-à-dire dans les pays qui participent au CIMPA, et l'autre là où se tiendra l'école de recherche. Moins de 30 de projets sont déposés chaque année, dont environ un tiers est suscité par le CIMPA. Les autres répondent à l'appel à projets qui est largement diffusé. L'ensemble des projets est évalué par le Conseil scientifique (CS) du CIMPA, qui est un organisme autonome. Sur cette base, le Conseil d'orientation et de pilotage (COP) décide quels projets retenir (environ 20). Cédric Villani est membre du CS, la SMF est membre du COP.

Quel est le rôle du CIMPA dans le financement des écoles de recherche ?

Au moins les 2/3 du financement du CIMPA sont réservés à des jeunes mathématiciens. Le CIMPA est mieux qu'une agence de financement : il gère directement sur place son financement (qui varie entre 10 et 15 Keuros selon les besoins et le lieu). Cela représente souvent 1/3 du financement final. Un projet approuvé par le CIMPA devient un levier important pour obtenir d'autres financements de l'Union mathématique internationale ou des Ministères, d'universités ou d'organismes de recherche des pays du Sud et du Nord.

Le CIMPA est-il présent sur place ?

La qualité de chaque école de recherche tient beaucoup au suivi et à la participation d'un responsable du CIMPA, le directeur ou un autre mathématicien qui le représente. Son rôle commence plus d'un an avant, en coopération avec les organisateurs. Sur place, son travail est scientifique, administratif, financier et politique.

Quels sont les critères de succès d'une école de recherche ?

Des cours adaptés au niveau des étudiants présents, une volonté avérée de chercheurs (parfois débutants) décidés à faire avancer un sujet dans leur pays, une salle de cours correcte, un hôtel commun à tous les participants, simple, bon marché et propre ainsi que des repas pris en commun. Les mathématiciens n'ont pas besoin d'un hébergement luxueux ni d'appareils onéreux pour être productifs au niveau scientifique. Suivre la « feuille de route » d'une école de recherche disponible sur le site du CIMPA contribue aussi à son succès.

[2] `http://www.cimpa-icpam.org/`

Quel est l'intérêt pour une université d'organiser ou de participer à une école de recherche ?

L'intérêt principal est de rencontrer des jeunes mathématiciens et d'établir des liens scientifiques avec eux. C'est le point de départ d'échanges équilibrés et féconds des deux côtés. Une école de recherche CIMPA est le terreau pour d'éventuelles coopérations importantes. Des thèses ou des post-doc sont mis en place ensuite, sans intervention directe du CIMPA.

Les écoles de recherche ne favorisent-elles pas la fuite de cerveaux du Sud au Nord ?

Il est important que les écoles de recherche aient lieu dans les pays du Sud. Nous renforçons et aidons parfois à créer les structures pour la recherche sur place. Les chercheurs qui s'installent ensuite au Nord ont très souvent à cœur de garder un lien fort avec leur pays d'origine en construisant des ponts efficaces. Bien des coopérations réussies reposent sur ce genre de situations. Plusieurs pays ont décidé d'attribuer un niveau de salaire compétitif pour leur enseignants-chercheurs, c'est aussi l'une des clés.

Comment devient-on membre du CIMPA ?

Le Conseil d'administration présente les candidats, ensuite l'Assemblée générale peut les agréer ; il faut adresser un CV et une lettre de motivation. En général un membre du CIMPA présente un candidat en rédigeant quelques lignes. La cotisation annuelle est de 30 euros. Il est possible d'en être exempté sur simple demande, ceci concerne en particulier les personnes habitant les pays en développement. Les institutions souhaitant devenir membres écrivent une lettre de motivation, la cotisation annuelle est de 200 euros.

Quels sont les facteurs-clés permettant au CIMPA d'assurer son succès à l'avenir ?

(1) Persévérer avec un CIMPA mené par des mathématiciens pour les mathématiciens, comptant avec une petite équipe administrative.

(2) Renforcer les écoles de recherche grâce à un financement assuré, stable et adapté, en les réalisant aux endroits fertiles scientifiquement suite à des appels à projets largement diffusés.

(3) Intensifier la collaboration avec les communautés mathématiques structurées des pays du Sud.

(4) Continuer à soutenir les activités où le CIMPA est un acteur scientifique ou un partenaire, en particulier avec les Sociétés mathématiques continentales ou d'un pays. Le CIMPA ne distribue pas du financement au jugé, sans contrôle de qualité ou sans participation dynamique de notre part.

Je précise nous n'attribuons pas à ce jour des bourses pour que des étudiants de pays du Sud fassent des études dans un autre pays. Un débat est en cours à ce sujet ; pour commencer une commission se concentre déjà sur la faisabilité de telles bourses par le CIMPA.

Toute décision à ce sujet doit donc passer par les instances du CIMPA, mais quel est ton point de vue personnel ?

Ces bourses sont nécessaires, mais il me semble que d'autres instances sont compétentes et financées pour cela, que le CIMPA peut encourager ou aider (par exemple l'Union mathématique internationale). Mon analyse personnelle est que la gestion d'un appel à bourses est une activité totalement différente de ce que nous réalisons aujourd'hui. De plus notre structure juridique ne correspond pas à l'attribution de bourses, à leur gestion et aux problèmes qui surviendront (quel montant de bourse, que faire en cas de maladie, d'absences, d'accident). De fait les comptables soulignent qu'une bourse longue peut être assimilée à un salaire, alors qu'il n'existe pas de travail réel fourni pour l'association. J'ajoute que je ne vois guère de chances que les quatre États qui participent au CIMPA soient d'accord de soutenir sans contrepartie et par notre intermédiaire les études d'un jeune dans un autre pays en développement, en réalité leur financement risque de se tarir si nous commencions à la faire. En outre la vérification de la qualité et de la réalité des études poursuivies seraient difficiles à réaliser auprès de structures universitaires éloignées et dont le fonctionnement est souvent méconnu, ceci représente également une difficulté majeure du point de vue comptable. En résumé je pense que le CIMPA se mettrait en péril s'il venait à développer cette activité. L'encouragement par-delà les frontières de la relève dans les mathématiques emprunte plusieurs canaux. Le CIMPA y contribue en se concentrant sur ses compétences-clés et ses atouts.

Liste des Écoles de Recherches CIMPA 2014

Afrique subsaharienne

– « Analyse et probabilités » Abidjan (Ivory Coast), 17-28 mars 2014.

– « Méthodes Algorithmiques et Applications en Géométrie Algébrique Réelle et Théorie des Nombres » AIMS M'bour (Senegal), 16-29 juin 2014.

– « Algebraic Number Theory and Applications » IMSP Dangbo (Benin), 6-19 juillet 2014.

Pourtour Méditérranéen

– « Elliptic problems and applications in geometry » Beirut (Lebanon), 24 février-6 mars 2014.

– « EDPs Non Linéaires et Applications : Étude Théorique et Numérique » Fès (Morocco), 24 mars-2 avril 2014.

– « Geometric stochastic and PDE control » Tlemcen (Algeria), 12-25 avril 2014.

– « Algebraic Geometry and Number theory » Istanbul (Turkey), 2-10 juin 2014.

– « Random Structures Analytic and Probabilistic Approaches » Nablus (Palestine), 18-28 août 2014.

– « Operator Theory and the Principles of Quantum Mechanics » Meknes (Morocco), 8-17 septembre 2014.

Asie du sud et de l'est

– « Partial Differential Equations : Analysis Numerics and Applications to Floods and Tsunamis » Manila (Philippines), 23 juin-4 juillet 2014.

– « Mathematical and Statistical Methods for Imaging » Bandung (Indonésie), 25 août-5 septembre 2014.

– « Graph labelings, graph decompositions and Hamiltonian cycles », Vientiane (Laos), 8-19 décembre, 2014.

Inde et Asie centrale et de l'ouest

– « Inverse problems : Theory and applications » Erbil (Kurdistan-Iraq), 5-14 mai 2014.

– « Mock modular forms » Kozhikode (India), 11-22 août 2014.

– « Aspects of Dynamical Systems » Kathmandu (Nepal), 3-16 novembre 2014.

– « Dynamical Systems And Applications : Geometrical Topological And Numerical Aspects » Lahore (Pakistan), 10-21 novembre 2014.

Amérique latine et caraïbe

– « Algebra Combinatorics and Physics » Valparaíso (Chile), 20-31 janvier 2014.

– « Real Algebraic Geometry » Villa de Leyva (Colombia), 13-26 juillet 2014.

– « Geometric methods in classical dynamical systems » Santiago (Chile), 25 septembre-3 octobre 2014.

– « Singularity theory in topology geometry and foliations » Cuernavaca (Mexico), 24 novembre-5 décembre 2014.

CIMPA

22 mars 2013 au CIRM :
Inauguration de la « Maison de chercheurs Jean-Morlet »
Premier rang : Guy Métivier (Directeur de l'INSMI jusqu'en 2013), Aline Bonami (Présidente de la SMF jusqu'en 2013), Yvon Berland (Président d'Aix-Marseille Université), Catherine Giner (Conseillère municipale - Ville de Marseille)
Deuxième rang : Patrick Foulon (Directeur du CIRM), Dominique Léger (Vice-président de la Fondation du Patrimoine), François Tribot Laspière (Adjoint au directeur des Affaires Publiques - Total)

La Chaire Jean-Morlet et le CIRM

Patrick Foulon

Jean Morlet (1931-2007), ancien polytechnicien, était ingénieur chez Elf Aquitaine (Total) quand il a posé puis développé avec Alex Grossmann (CPT Luminy) les bases de la théorie des ondelettes avec une première publication en 1984 (SIAM Math. Anal, 1(4), 723-736). Les deux chercheurs se sont souvent vus au CIRM pour travailler et, par la suite, le centre est devenu le théâtre de plusieurs conférences avec des contributeurs majeurs, tel Yves Meyer, qui ont fait progresser le sujet.

Certains de ses jeunes collègues, comme Marie Farge, ont souhaité pérenniser sa mémoire. Pour ce faire, il a d'abord été imaginé de rénover une bâtisse dite « Maison du Jardinier », une ruine ayant une certaine valeur historique, située dans le parc du CIRM, et de lier cette rénovation au nom de Jean Morlet. Marie Farge a, avec Pascal Chossat – précédent directeur du CIRM – conduit de nombreuses démarches qui ont permis d'obtenir un soutien partiel de la part de la Fondation Total, au travers de la Fondation du Patrimoine.

Cependant, il était essentiel pour l'ensemble des tutelles et partenaires du CIRM – SMF, CNRS, Ministère et Aix-Marseille Université (AMU) – que cette rénovation soit associée à un projet scientifique. Ce projet s'est concrétisé avec le lancement en 2012 d'une chaire : la « Chaire Jean-Morlet ».

Le projet immobilier (financements : CIRM fonds propres 360K€; Fondation du patrimoine 60K€) a ainsi pu être lancé et la Maison a été inaugurée le 22 mars 2013, pour accueillir le premier titulaire de la chaire.

La Chaire est un projet commun entre le CIRM (CNRS-SMF), AMU et la Ville de Marseille. La Chaire accueille des projets scientifiques semestriels, chaque projet étant porté par un tandem : un « Professeur Jean-Morlet », chercheur d'une institution étrangère et un « Scientifique local » d'AMU ou des laboratoires rattachés à la FRUMAM.

L'objectif est de conduire un programme d'événements scientifiques fédérateurs et novateurs pour la recherche locale et de niveau international. Chaque semestre de chaire présente des temps forts qui ont lieu au CIRM : une grande conférence, une école pour jeunes chercheurs, quelques petits groupes de travail et des recherches en binôme. C'est sans mentionner tous les autres événements - colloques, séminaires, activités culturelles – qui peuvent être menés hors les murs du CIRM. Un Programme d'Invitations se greffe naturellement à l'environnement de la Chaire.

Nicola Kistler – Université de Bonn et Véronique Gayrard – Institut de Mathématiques de Marseille (I2M) ont été les premiers porteurs. Leur programme « Probabilités – 02/2013-07/2013 » a été évalué comme s'étant « dès sa première année d'existence, (...) montré très largement à la hauteur des espérances de ses promoteurs et des soutiens institutionnels qui ont permis sa création » (Jean-Yves Chemin, Président du Conseil Scientifique (CS) du CIRM).

En ce début d'année 2014, deux programmes de chaire se déroulent en simultané : « Hyperbolicité et Systèmes Dynamiques – 11/2013-04/2014 » porté par Boris Hasselblatt – Université Tufts, Boston et Serge Troubetzkoy – I2M et Centre de Physique Théorique (CPT) et « Arithmétique – 02/2014-07/2014 » porté par

Igor Shparlinski – UNSW, Australie et David Kohel – I2M. Le second est associé en partie au mois thématique marseillais sur l'Arithmétique.

Il a fallu bien entendu une période de calage pour stabiliser le format et les processus de la Chaire. Ce projet a maintenant un écho international évident, à tel point que de nombreuses propositions très intéressantes ont été présentées au CS du CIRM. Il suffit pour s'en rendre compte de regarder la programmation des trois prochaines chaires.

Le 2e semestre 2014 verra l'arrivée de Hans-Georg Feichtinger – Université de Vienne qui, avec Bruno Torresani – I2M, proposera une série de rencontres autour de l'analyse harmonique computationnelle (08/2014-01/2015).

En 2015, le tandem Herwig Hauser – Université de Vienne et Guillaume Rond – I2M présentera un programme sur l'« Approximation d'Artin – 01/2015-06/2015 » avec un volet lié au mois thématique sur la « Théorie des Singularités ». François Lalonde – Université de Montréal et Andrei Teleman – Centre de Mathématiques et Informatique (CMI) mettront l'accent sur la « Topologie Symplectique et la Théorie de Jauge – 05/2015-10/2015 ».

Pour le Directeur que je suis, c'est un réel plaisir de voir l'effervescence scientifique intense qui règne au CIRM actuellement. Hors « Chaires Morlet », la période janvier-février 2014 a été particulièrement riche avec notamment deux larges conférences regroupant 75 jeunes chercheurs sur le sujet des « Marches Aléatoires et Géométrie Asymptotique des Groupes » et 95 chercheurs se retrouvant sur site pour la « Troisième Rencontre des Jeunes Chercheurs en Géométrie des Groupes » où Étienne Ghys a fait 7 exposés ! Sans compter en parallèle d'autres Petits groupes et Recherches en binômes.

Pour bien absorber et présenter cette activité scientifique, le CIRM essaie d'adapter au mieux ses outils de communication, de préparation des colloques, de présentation et de vulgarisation. Le nouveau site de la Chaire Jean-Morlet en sera, je l'espère, une des préfigurations (`http://www.chairejeanmorlet.com`).

De nombreux projets sont en cours, notamment celui de la SMF de créer autour des chaires à venir une nouvelle collection, la « Série Jean-Morlet ». Enfin le CIRM conduit le projet de création de documents scientifiques audiovisuels de grande qualité. L'année actuelle et celles à venir s'annoncent donc très riches pour le CIRM.

Chaire Jean-Morlet

Session 2013 du CNU, section 25

Rapport rédigé par le bureau de la section

Campagne de qualification

Qualification aux fonctions de Maître de conférences

Les résultats. Le nombre de candidats inscrits était de 336. Le nombre de dossiers parvenus aux rapporteurs est de 285 : 242 qualifiés, soit 85%, 28 considérés hors section 25, soit 10%, 10 non qualifiés, soit 3.5%, 3 déjà qualifiés, 2 irrecevables.

Les attentes de la section 25, pour qualifier un candidat, sont de plusieurs sortes :

– l'activité scientifique : l'évaluation du candidat se fait à travers l'ensemble de ses publications, lorsqu'il y en a, et du contenu de sa thèse de doctorat ;
– l'aptitude à enseigner les mathématiques.

Les critères retenus

Pour pouvoir évaluer un candidat, les membres du CNU 25 ont axé leur réflexion sur les points suivants :

– l'aptitude du candidat à enseigner des mathématiques fondamentales ; pour les candidats dont les travaux sont aux marges de la section 25, la commission s'appuie en particulier sur leur cursus ou tout autre élément confirmant de manière certaine une telle capacité ;
– un travail récent de recherche en mathématiques, contenant des résultats théoriques nouveaux et des démonstrations rigoureuses sur le plan mathématique ; son évaluation se fait à travers

  – les travaux de la thèse (les résultats important du doctorat, le sujet, les techniques mises en jeu...) ; pour les candidats titulaires d'un doctorat récent, on n'exige pas de publication : la qualification peut être accordée après étude de la thèse et des rapports de pré-soutenance ;
  – les publications récentes ; pour les candidats ayant soutenu une thèse plus de 2 ans avant la demande de qualification, on vérifie que cette thèse a donné lieu à publications ; dans le cas d'un changement de thématique, on vérifie qu'il y ait des publications récentes dans les thématiques de la section 25 ; il se peut qu'une prépublication ne suffise pas à obtenir la qualification, la section demandant alors une confirmation du travail de recherche dans les thématiques de la section 25.

– pour les candidats relevant aussi de la section 26 (mathématiques et applications) une attention particulière est portée sur les aspects théoriques du dossier et sur les contributions du candidat dans cette direction ; la seule utilisation d'outils mathématiques, classiques ou avancés, même de façon innovante et dans des domaines originaux, ne peut permettre de qualifier un candidat en section 25 ;

– pour les candidats dont le dossier contient un volet important d'informatique, l'expertise se concentre sur les champs disciplinaires à l'interface entre mathématiques et informatique, par exemple ceux de la logique, de la théorie des graphes, de la cryptographie...

– pour les candidats dont la thématique est l'histoire et l'épistémologie des mathématiques, le dossier scientifique est examiné en tant que dossier d'histoire et d'épistémologie des mathématiques. On sollicite pour cela l'avis d'experts de ce domaine faisant partie ou non du CNU. En particulier, il n'y a aucune réticence a priori vis-à-vis des travaux portant sur des périodes anciennes ou ayant une orientation davantage philosophique qu'historique.

Par ailleurs, et c'est cela qui distingue une qualification en section 25 par rapport à une qualification en section 72, on attend que le dossier du candidat mette en évidence des liens significatifs avec la communauté mathématique. Pour une qualification aux fonctions de Maître de conférences, on vérifie que le candidat est apte à enseigner les mathématiques au moins jusqu'au niveau L3. Des indicateurs pouvant être utilisés sont, par exemple, l'agrégation de mathématiques, un DEA ou un master de mathématiques, une expérience conséquente d'enseignement des mathématiques dans des filières post-bac, un contenu mathématique substantiel dans la thèse et dans les publications.

Qualification aux fonctions de Professeur

Les résultats

Le nombre de candidats inscrits était de 128. Le nombre de dossiers parvenus aux rapporteurs est de 120 : 112 qualifiés, soit 93%, 1 considéré hors section 25, 4 non qualifiés, 1 déjà qualifié, 2 irrecevables.

Les attentes de la section 25, pour qualifier un candidat, sont de plusieurs sortes :

– l'activité et le rayonnement scientifique du candidat ;

– la capacité du candidat à encadrer des doctorants (à travers son expertise en mathématiques, la variété des thèmes qu'il a abordés, sa capacité à avoir posé et résolu des questions pertinentes ...) ; des encadrements ou co-encadrements éventuels de doctorats ou post-doctorats sont un plus pour le dossier, mais il n'est pas nécessaire d'avoir encadré ou co-encadré en un doctorat pour une qualification aux fonctions de Professeur en section 25 ;

– l'aptitude à enseigner les mathématiques jusqu'à un niveau M2.

Les critères retenus

Pour pouvoir évaluer un candidat, les membres du CNU 25 ont axé leur réflexion sur les points suivants :

– l'activité de recherche, jaugée

– par la production régulière de publications de qualité, une attention particulière étant portée sur les 4 dernières années - la variété des thèmes abordés avec une ouverture thématique nécessaire par rapport aux travaux de la thèse - le rayonnement du candidat, jaugé par les conférences, les invitations dans des colloques internationaux, les séjours à l'étranger, la variété des collaborateurs,...

– pour les candidats relevant aussi de la section 26 (mathématiques et applications) une attention particulière est portée sur les aspects théoriques du dossier et sur les contributions du candidat dans cette direction ; la seule utilisation d'outils mathématiques, classiques ou avancés, même de façon innovante et dans des domaines originaux, ne peut permettre de qualifier un candidat en section 25 ;

– pour les candidats dont le dossier contient un volet important d'informatique, l'expertise se concentre sur les champs disciplinaires à l'interface entre mathématiques et informatique, par exemple ceux de la logique, de la théorie des graphes, de la cryptographie...

– pour les candidats dont la thématique est l'histoire et l'épistémologie des mathématiques, le dossier scientifique est examiné en tant que dossier d'histoire et d'épistémologie des mathématiques. On sollicite pour cela l'avis d'experts de ce domaine faisant partie ou non du CNU. En particulier, il n'y a aucune réticence a priori vis-à-vis des travaux portant sur des périodes anciennes ou ayant une orientation davantage philosophique qu'historique.

Par ailleurs, et c'est cela qui distingue une qualification en section 25 par rapport à une qualification en section 72, on attend que le dossier du candidat mette en évidence des liens significatifs avec la communauté mathématique. Pour une qualification aux fonctions de Professeur, on vérifie que le candidat est apte à enseigner les mathématiques au moins jusqu'au niveau L3. Des indicateurs pouvant être utilisés sont, par exemple, l'agrégation de mathématiques, un DEA ou un master de mathématiques, une expérience conséquente d'enseignement des mathématiques dans des filières post-bac, un contenu mathématique substantiel dans la thèse et dans les publications. On demande en plus que le candidat démontre une grande implication au sein de la communauté mathématique, ce qui peut se traduire notamment par un enseignement régulier des mathématiques à divers niveaux de l'université (du L1 au M2), des responsabilités au sein du département de mathématiques de son établissement, des projets menés en commun avec des mathématiciens, des publications dans des revues destinées aux mathématiciens (à titre indicatif, il est arrivé par le passé qu'une thèse de mathématiques soit exigée, mais le CNU 25 actuel a une position plus souple).

Renouvellement de qualification

Les dossiers des candidats à un renouvellement de qualification font l'objet d'une attention particulière. Les périodes vides en productions scientifiques sont analysées, et sont presque systématiquement rédhibitoires si elles concernent les 4 dernières années. A contrario, une reprise d'activité récente, concrétisée par des publications ou des travaux soumis est lue favorablement par les membres du CNU ; cependant, si cette reprise se traduit essentiellement par des travaux soumis ou en cours, le CNU peut reporter sa décision de qualification à une campagne ultérieure, subordonnant sa décision à la publication de ces travaux. Il est important de souligner qu'une non-qualification est une décision dont la pertinence n'est valable que pour l'année en cours, et qu'elle peut être révisée l'année suivante. Le CNU veille à ce que le dossier d'un candidat refusé ne soit pas examiné deux années de suite par les mêmes rapporteurs.

Motions

Lors de la session de qualification 2013, le CNU 25 a voté les deux motions suivantes.

(1) La section 25 du CNU rappelle son attachement à la procédure de qualification garante d'un cadre national des campagnes de recrutement des enseignants-chercheurs.

36 pour, 1 contre, 4 abstentions

(2) Le CNU 25 rappelle son opposition à la mise en place de l'évaluation récurrente des enseignants-chercheurs.

31 pour, 8 contre, 2 abstentions

Campagne de promotions

Les dossiers des candidats à une promotion doivent contenir un descriptif de l'ensemble de la carrière, et non des seules 3 dernières années comme l'administration l'indique. Outre le CV et la liste complète des travaux, classés selon le type des travaux (par exemple, articles dans des revues à comité de lecture, actes de colloque, livres, articles de vulgarisation ....), le dossier doit contenir des informations précises sur les activités pédagogiques, administratives ainsi que sur les services rendus à la communauté universitaire.

Chaque dossier est examiné par deux rapporteurs, désignés par les membres du bureau.

Pour l'examen des diverses promotions, le CNU prend en compte les éléments suivants dans chaque dossier de candidature :

– l'activité scientifique : le nombre et surtout la qualité des publications, distinctions scientifiques,...
– la visibilité nationale et internationale, mesurée en particulier par les participations à des conférences et/ou des séminaires ;
– les responsabilités diverses : membre d'un conseil d'université (CA, CS, CEVU), direction d'UFR, de département, de laboratoire, d'équipe, de projet..., responsabilité pédagogique, activités éditoriales, appartenance et responsabilités dans diverses commissions ;
– l'activité d'encadrement doctoral : thèses soutenues ou en cours, devenir des doctorants ;
– le domaine scientifique, le lieu d'exercice, l'âge et l'ancienneté du candidat.

Les candidats sont donc invités à mettre ces éléments en avant dans leur dossier ; il est vivement conseillé aussi de faire une description des travaux scientifiques qui met en avant les résultats marquants, en plus d'une simple liste de publications.

Le CNU veille aussi au respect de certains équilibres dans ses choix en tenant compte notamment

– de l'âge des candidats, afin d'éviter de concentrer les promotions sur les seuls dossiers jeunes et brillants ;
– d'une répartition géographique raisonnable, en particulier entre les établissements parisiens et ceux de province ;
– des thématiques des candidats, avec un examen tout particulier des dossiers transversaux ou en marge de section ;

– de divers éléments factuels qui peuvent expliquer quelques retards de carrières,...

Promotion à la hors-classe des MCF

Nombre de promotions offertes : 19

Nombre de collègues promouvables : 191 dont 30 femmes

Nombre de candidats : 48 dont 4 femmes

Liste des promus 18 hommes et 1 femme

Abakoumov Evgueni (Marne la Vallée), Barre Sylvain (Bretagne-Sud), Borrelli Vincent (Lyon 1), Briend Jean-Yves (Aix-Marseille), Cerri Jean-Paul (Bordeaux 1), Compoint Elie (Lille 1), Fauvet Frédéric (Strasbourg), Hallouin Emmanuel (Toulouse 2), Han Frédéric (Paris 7), Jecko Thierry (Cergy-Pontoise), Morame Abderemane (Nantes), Parmentier Serge (Lyon 1), Parreau Anne (Grenoble 1), Rittaud Benoit (Paris 13), Roblot Xavier (Lyon 1), Saux-Picart Philippe (Brest), Sester Olivier (Marne la Vallée), Vernicos Constantin (Montpellier 2), Vinatier Stéphane (Limoges).

Un des objectifs de ces promotions est de revaloriser la fin de carrière de collègues méritants ; les âges des promus s'étendent de 39 à 63 ans.

À noter une auto-censure importante de la part de nos collègues puisque il n'y a que 39% des promouvables à déposer un dossier.

Pour les promotions à la hors-classe des maîtres de conférences, le CNU examine l'ensemble de la carrière des candidats. Le travail de recherche et l'activité d'enseignement sont examinés en premier lieu, cependant un investissement important dans le travail pédagogique ou au service de la communauté scientifique est particulièrement apprécié.

Promotion à la première classe des PR

Nombre de promotions offertes : 15

Nombre de collègues promouvables : 202 dont 16 femmes

Nombre de candidats : 80 dont 4 femmes

Liste des promus 14 hommes et 1 femme

Barbot Thierry (Avignon), Bayart Frédéric (Clermont-Ferrand 2), Caro Daniel (Caen), Cordero-Erausquin Dario (Paris 6), Elbaz-Vincent Philippe (Grenoble 1), Fresse Benoît (Lille 1), Klingler Bruno (Paris 7), Miermont Gregory (ENS Lyon), Paoluzzi Luisa (Dijon), Paradan Paul-Émile (Montpellier 2), Pellarin Federico (Saint-Étienne), Pevzner Michael (Reims), De Souza Rebelo (Toulouse 3), Reider Igor (Angers), Soukhouv (Aix-Marseille). Les âges des promus s'étendent de 34 à 49 ans.

À souligner le trop faible nombre de promotions offertes par rapport à celui des candidats, et à la valeur des dossiers examinés ; il serait fortement souhaitable que dans les années à venir le nombre de promotions offertes soit revu à la hausse de façon substantielle.

Promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle des PR

Nombre de promotions offertes : 10
Nombre de collègues promouvables : 138 dont 10 femmes
Nombre de candidats : 46 dont 3 femmes

Liste des promus 9 hommes et 1 femme

Arnaud Marie-Claude (Avignon), Cossart Vincent (Versailles/Saint-Quentin), Nogueira Arnaldo (Aix-Marseille), Duval Julien (Paris 11), Enriquez Benjamin (Paris 6), Markouchevitch Dimitri (Lille 1), Ouhabaz El maati (Marne la Vallée), Peigné Marc (Tours), Planchon Fabrice (Nice), Semenov-Tian-Chanski Mikhail (Dijon).

Les âges des promus s'étendent de 43 à 63 ans.

Le CNU attend des candidats à une promotion au premier échelon à la classe exceptionnelle des professeurs, qu'ils aient fait preuve dans leur carrière de compétences exceptionnelles dans les différentes missions d'un professeur, que ce soit dans leurs travaux de recherche ou au sein de la communauté scientifique en y jouant un rôle majeur dans l'encadrement de doctorants, la diffusion ou la structuration de la recherche, la prise de responsabilités pédagogiques et administratives.

Promotion au second échelon de la classe exceptionnelle des PR

Nombre de promotions offertes : 5
Nombre de collègues promouvables : 49 dont 0 femme
Nombre de candidats : 24 dont 0 femme

Liste des promus 5 hommes

Arnoux Pierre (Aix-Marseille), Erez Boas (Bordeaux 1), Kurdyka Krzysztof (Chambéry), Mauduit Christian (Aix-Marseille), Torasso Pierre (Poitiers)

Les âges des promus s'étendent de 51 à 61 ans.

Parmi les candidats dont le dossier témoigne d'une activité scientifique soutenue dans les missions dévolues aux professeurs des universités, le CNU examine l'activité récente du candidat et tient compte de façon importante de son ancienneté dans le premier échelon.

Congés pour recherche ou conversion thématique

Le CNU 25 avait 8 semestres de CRCT à attribuer, un nombre ridiculement bas par rapport aux 120 semestres demandés par nos collègues et à la qualité des projets scientifiques présentés.

Le CNU a décidé d'attribuer 4 CRCT à des Maîtres de conférences :

Brumley Farrell, Mayer Volker, Quatrini Myriam, Zelikson Shmuel et 4 à des Professeurs.

Bruguière Alain, Henn Hans-Werner, Peigné Marc, Vuillon Laurent.

Liste complémentaire (dans l'ordre) : Keller Julien (MCF), Movahhedi Chazad (PR), Traizet Martin (MCF), Emsalem Michel (PR).

Quelques nouvelles de l'Insmi

Christoph Sorger

Après six mois à la direction de l'Insmi, le moment est venu de faire un premier rapport d'étape. Tout d'abord et avant tout, je voudrais rendre hommage au travail de mes prédécesseurs et en particulier à Guy Métivier pour son investissement à la direction de l'Insmi pendant les quatre dernières années. Non seulement il a su mettre en place l'Institut proprement dit, mais au moment de prendre le relais, j'ai trouvé un Institut en pleine maturité, bien intégré au milieu des autres instituts, ayant pris son rôle de coordination nationale dans le réseau de mathématiques dont l'unité est la force.

À mon arrivée, Françoise Balestié, directrice adjointe administrative, venait de prendre sa retraite, après 41 années au CNRS dont les huit dernières au service de notre communauté, et durant lesquelles elle a su gérer avec efficacité la partie administrative de notre Institut. C'est Zoubeir Zadvat qui l'a remplacée, prenant ses fonctions le même jour que moi-même. Sinnou David a accepté de continuer en qualité de directeur adjoint scientifique en charge des relations internationales ; Clotilde Fermanian-Kammerer, en qualité de directrice adjointe scientifique en charge du suivi des Laboratoires, a succédé à Patrick Dehornoy, que je voudrais remercier chaleureusement ici pour l'important travail de fond accompli, notamment la mise en place d'outils structurés et très efficaces pour le suivi du budget, des chercheurs, des ingénieurs techniciens et des unités.

L'Insmi abrite aujourd'hui 115 structures dont 43 Unités Mixtes de Recherche, 16 Fédérations de Recherche, 26 Groupements de Recherche au niveau national ; 9 Unités Mixtes Internationales, 7 Laboratoires Internationaux Associés, 7 GDRI au niveau international. S'ajoutent 5 Unités Mixtes de Service (Amies, Bibliothèque Hadamard, Cirm, IHP, Mathdoc) et 2 Groupements de Service (Mathrice, RNBM), instruments essentiels au service de la communauté toute entière. L'ensemble de ces structures, auquel s'ajoutent d'autres structures en interactions fortes avec l'Insmi comme les sociétés savantes, constitue une communauté vivante et variée qu'il s'agit d'animer dans un contexte qui n'est peut-être pas actuellement des plus faciles.

La représentativité de l'école française au Congrès International des Mathématiciens à Séoul en août prochain est exceptionnelle. Près d'un conférencier sur cinq en est issu et le spectre entier de la recherche mathématique est couvert : d'une part la résolution de conjectures anciennes, l'étude de concepts fondamentaux ou encore la construction d'exemples, d'autre part les modélisations de phénomènes complexes, le développement d'outils associés à la révolution du numérique, sans oublier la maîtrise de l'aléatoire. Cette diversité des points de vue et des enjeux est illustrée par les mathématiques françaises d'aujourd'hui, qui se trouvent au premier plan international. L'Insmi se doit, au-delà de considérations plus techniques et en y consacrant l'essentiel de ses moyens, de les maintenir à ce niveau, de travailler sur l'avancée des connaissances, le renouvellement des idées et des thématiques, le développement du champ d'application des mathématiques, en favorisant l'excellence des recherches dans toutes les branches des mathématiques, allant de la recherche fondamentale aux applications et interactions.

L'existence d'un institut national a par ailleurs donné naissance au Conseil Scientifique de l'Institut. Ce Conseil finalise actuellement une réflexion de prospective scientifique qui se concrétisera par un document à paraître à l'automne 2014, terme de son mandat. Les élections pour le renouvellement des représentants du personnel dans cette instance ainsi qu'au Conseil Scientifique du CNRS se dérouleront en juin 2014. Notons qu'une représentativité des mathématiciens dans ce dernier est importante, ne serait-ce que pour bien expliquer le fonctionnement de notre communauté lors de certaines décisions impliquant nos chercheurs.

Dans ce premier rapport d'étape, et en attendant ce rapport de prospective scientifique, je voudrais me restreindre à un certain nombre de points, sans vouloir être exhaustif ni trop détaillé. De toute façon, il faudra élargir et réajuster de manière dynamique en fonction des besoins et des opportunités qui se présenteront.

Une des priorités actuelles du CNRS est le développement de la politique internationale et l'accompagnement des sites dans la réalisation de celle-ci. La communauté des mathématiciens a toujours été un moteur dans cette direction, tout simplement parce que notre recherche est résolument tournée vers l'International depuis de longues années. Elle s'est concrétisée, outre les très nombreuses collaborations à l'International que nous avons, par la création des premières Unités Mixtes Internationales du CNRS et de nombreux LIA et GDRI. L'ensemble de ces structures est à soutenir et à amplifier. À l'inverse, il est primordial de maintenir une grande attractivité de nos laboratoires en termes de formation et de recherche pour les mathématiciens étrangers. Cela peut se faire par exemple par la création des UMI « miroirs » sur certains sites. Par ailleurs, les grands instruments nationaux de notre communauté que sont le Cirm, l'IHÉS, l'IHP et le Cimpa, réunis dans le Labex « Carmin », tout comme nos autres Labex sont résolument tournés vers l'international, avec des actions d'ouverture et d'accueil significatives.

Recruter des mathématiciens étrangers, jeunes ou confirmés, est une richesse pour les mathématiques françaises de demain et l'histoire récente nous fournit des exemples de rencontres extrêmement fécondes entre mathématiciens d'origines variées poursuivant leurs recherches en France. Il faudra veiller à ce que cette politique ne soit pas fragilisée par une mise en place, sans concertation avec la communauté scientifique, de zones à régime restrictif dans le cadre de la protection du patrimoine scientifique. L'interview donnée par notre ministre Geneviève Fioraso à l'occasion de l'ouverture de la Fédération de Recherche Rhône-Alpes-Auvergne donne quelques informations à ce sujet[1] .

Récemment, les relations des mathématiques avec l'industrie ont vu arriver une initiative importante et ambitieuse, à savoir la création de « l'Agence pour les Mathématiques en Interaction avec l'Entreprise et la Société » (Amies), sous forme d'une UMS adossée à un contrat Labex et en relation étroite avec les sociétés savantes et Inria. Ciblant à la fois la formation et la recherche en mathématiques, elle permet la mise en valeur des relations entre Laboratoires et entreprises et, surtout, la concrétisation d'opportunités à l'interface math-entreprise. Fluidifier les transferts d'expertise mathématique vers les entreprises et la société est en soi un

[1] `http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr/cid77458/inauguration-de-la-federation-de-recherche-en-mathematiques-rhones-alpes-auvergne.html`

enjeu stratégique dans le contexte actuel : le développement des actions de cette UMS est une priorité.

D'une façon cruciale, l'Insmi a besoin de relations étroites entre son équipe de direction et les mathématiciens. C'est dans un dialogue constant avec les directeurs d'unité et le Comité National que nous pourrons arbitrer les choix essentiels et faire face collectivement aux éventuelles difficultés à venir. C'est aussi dans cet esprit de proximité que nous entendons nos relations avec les chercheurs. À cet effet, nous voulons mettre en place une pratique d'entretiens systématiques aux moments clés de leur carrière. Nous projetons en particulier une journée d'accueil des admis aux concours de recrutement afin de notamment bien discuter des questions d'affectation. Celles-ci sont intrinsèquement difficiles, puisqu'il s'agit de concilier équilibre national et mise en adéquation des projets des chercheurs et de leur laboratoire d'accueil. Nous instaurerons également une journée de suivi à trois ans, afin de faire le point sur l'intégration du chercheur dans son laboratoire et sur ses projets ultérieurs. Enfin, nous inviterons systématiquement au siège tout chercheur demandant une mobilité géographique.

Un des outils importants de politique scientifique est l'attribution de délégations qui doivent être comprises comme des projets communs université/CNRS et pour lesquelles nous nous appuyons comme d'habitude sur la section pour l'évaluation scientifique des demandes. Notons que les délégations sont attribuées par site depuis l'année dernière : nous nous prononçons donc sur les dossiers transmis par les Universités via les sites et accordons ces délégations en fonction de contingents attribués par le CNRS à chaque site. L'Insmi est un des plus grands consommateurs de délégations avec environ une délégation sur cinq sur l'ensemble du CNRS.

Dans son rôle de coordination nationale, l'Insmi suit naturellement plusieurs projets pour la communauté mathématique dont celui du « portail math » qui a pour objectif d'offrir un accès simplifié et unifié à la documentation scientifique, aux services facilitant le travail nomade et collaboratif et aux informations institutionnelles et professionnelles. Ce travail se fait en associant tous les acteurs concernés et en particulier l'UMS Mathdoc et les GDS RNBM et Mathrice ainsi que les sociétés savantes. Une partie importante en a été récemment finalisée. Elle concerne la description des ressources documentaires et de certains services informatiques ou sites utiles. Des progrès importants ont été également réalisés sur la « plm » version 2.0, contenant de nouveaux services comme par exemple la « plmbox » (un équivalent de « dropbox »), une nouvelle version de l'annuaire, une plateforme coopérative de calendriers de séminaires et conférences, une authentification partagée avec les services documentaires. Une présentation de ces nouveaux services est prévue pour l'été. Par ailleurs, notre avenir étant intimement lié au flux d'étudiants, nous voulons aussi soutenir les initiatives permettant le bon fonctionnement de la filière master-doctorat. Ainsi, nous nous sommes associés à l'élaboration d'une nouvelle « carte des masters », qui sera aussi un point d'entrée aisé pour les étudiants étrangers qui cherchent à effectuer leur master en France.

Au-delà de ces réalisations, le défi majeur touchant notre communauté concerne l'édition scientifique[2]. L'évolution de la documentation est un enjeu à court terme

[2] Voir aussi les textes récents de Claude Sabbah « le Journal de l'École polytechnique – une renaissance » SMF – *Gazette* – 138 (2013) 90-94 et de Djalil Chafaï « le coût des publications : propositions concrètes », SMF – *Gazette* – 139 (2014) 82-86.

pour l'Insmi, tout comme pour le CNRS globalement et les communautés scientifiques. Pour l'Insmi, il s'agit d'une part de soutenir le paysage et l'originalité des journaux « français » existants, d'autre part de faciliter la création de nouveaux journaux à la fois de type classique mais aussi sous de nouveaux formats pouvant contenir des données, des codes, des images ou des films. Ce chantier doit se développer dans une grande concertation avec tous les acteurs de notre communauté mathématique et en même temps à un niveau plus large, tant avec nos partenaires français comme Inria qu'à l'international. Nous proposons en premier lieu l'accompagnement de l'édition académique actuelle, notamment à travers la mise en place de plateformes de gestion éditoriale, de publication en ligne et d'archivage. Nous travaillons dans le même temps sur une plateforme plus large avec la direction de l'IST du CNRS, qui a commencé à la rentrée un travail en profondeur pour « mieux partager les connaissances » en faisant d'abord un état des lieux de l'IST dans les Instituts[3] , puis en proposant des plans d'actions[4]. L'Insmi porte le plan clé « Publier » qui, au niveau de la construction de plateformes, fait notamment intervenir Christine Berthaud (CCSD, Epi-journaux), Thierry Bouche (Mathdoc) et Marin Dacos (revues.org). Notons au passage que toute réflexion dans ce domaine doit se faire en prenant en compte les trois acteurs du paysage que sont l'auteur, le « publisher » et le bibliothécaire, tout en évitant de confondre les rôles des deux derniers dans une compréhension trop hâtive de l'accès libre.

Un autre défi est le maintien du financement de nos recherches dans les années à venir, imposant un suivi continu des appels d'offres et une adaptation aux changements récents à l'ANR. Une marge de progression potentielle se situe du côté de l'Europe. Ainsi, dans le but d'augmenter le nombre de projets ERC français dans son périmètre scientifique, l'Insmi a mis en place une procédure de soutien à tous les chercheurs et enseignants-chercheurs de ses unités sous forme de relecture et d'analyse des dossiers par un petit groupe d'experts, dont des lauréats et des ex-membres de jury ERC.

Enfin, le plus grand défi de l'Insmi dans les prochaines années se trouvera au niveau du recrutement des chercheurs. Les difficultés actuelles induites tant par les restrictions sur le volant des équivalents temps plein travaillés des Instituts, le gel des recrutements opéré par nombre d'universités et une pyramide d'âge défavorable, mettent en cause l'avenir des jeunes de notre communauté, et donc à terme, des mathématiques en France. Dans une telle situation, il nous faudra le concours de tous afin de trouver des solutions permettant de maintenir les équipes administratives nécessaires aux laboratoires tout en gardant de la marge pour l'ouverture de postes au concours chercheur. La cohésion de notre communauté et son soutien seront nécessaires pour relever les défis qui sont les nôtres.

[3] Notre responsable Stratégie IST est Frédéric Hélein.

[4] Un premier document de stratégie IST est disponible depuis peu à l'adresse `http://www.cnrs.fr/dist`

AUTOUR DU FILM « COMMENT J'AI DÉTESTÉ LES MATHS »

Si dans les dernières années plusieurs collègues se sont lancés avec brio dans la production de films sur les mathématiques (citons ceux d'A. Alvarez, E. Ghys et J. Leys ou de J.P. Bourguignon), c'est sans doute la première fois en France qu'un cinéaste non-mathématicien se lance dans un long métrage sur ce thème avec le but qu'il soit diffusé dans des salles de cinéma à grande audience.

Olivier Peyon est un réalisateur et scénariste français de 45 ans qui a fait ses études à Nantes. De sa rencontre avec les mathématiciens, il dit dans une interview : « Pendant les quatre années de tournage, j'ai rencontré des êtres de chair, de passion et de sang en phase avec le monde ». Depuis sa sortie en novembre 2013 ce film a reçu un grand écho et il est donc naturel que la Gazette des mathématiciens *participe à sa manière à sa recension. Les deux textes écrits par A. Bonami et B. Egger sont des nouvelles versions de textes déjà mis « à chaud » sur le site de la SMF. Nous renvoyons aussi au billet d'Étienne Ghys paru sur Image des Maths (8 janvier 2014) ou à celui de Cédric Villani sur son blog. Des interviews d'O. Peyon dans de nombreux journaux ont amplifié l'impact du film. Notons aussi que ce film a eu l'heureux effet de motiver les collègues pour organiser de multiples débats.*

Une démonstration pointilliste

Bernard Egger[1]

Commençons par des chiffres : un film de une heure quarante, qui a nécessité quatre ans de tournage et un an de montage, plus de dix heures et demie d'enregistrement (On en verra une partie dans les bonus des futurs DVD). Rien dans ce film ne tient du hasard.

L'impression première est celle de la juxtaposition d'éléments plus ou moins disparates : des élèves qui crient leur désamour, leur haine des maths. Puis la présentation d'un prof hors du commun : créateur de vêtements à ses moments perdus, homme de théâtre dans son cours,... Presque sans transition, on est en Inde pour la remise de la médaille Fields à Cédric Villani. Retour en France avec une psychopédagogue qui nous parle de l'échec en maths d'élèves intelligents. On traverse l'océan à la rencontre de jeunes enfants pour partager leur plaisir évident à faire des activités mathématiques où le jeu devient raisonnement. Et sans trop s'y attendre, nous voilà plongés dans le tumulte de la réforme des maths modernes. Quel contraste avec le fond blanc de la Forêt Noire ! On partage maintenant avec

[1] Président de l'APMEP.

des chercheurs des moments privilégiés, faits de murmures, d'échanges feutrés. Ici les mathématiques se font art... Mais le réel s'impose à nouveau avec la crise des *subprimes* et quand les maths se font financières, elles risquent bien de redonner vie au vieux cliché d'inhumanité, de monstre froid.

Au premier coup d'œil, c'est une mosaïque, c'est un tableau fait de grandes taches de couleur. On s'approche un peu plus et l'on s'aperçoit que les parties ne sont pas aussi clairement délimitées. On découvre de nouveaux points colorés essaimés un peu partout. Il s'agit de petites phrases mises dans la bouche d'un mathématicien hindou ou de Jean Dhombres qui tissent un lien entre mathématiques et nature (au sens d'une nature de l'homme se distinguant de la culture). Mais n'est-ce pas aussi ce dont nous avait parlé la psychopédagogue Anne Siety, en décrivant l'empreinte corporelle du point d'inflexion quand on fait du toboggan. Plus loin, il s'agit d'une spécialiste des sciences de l'éducation qui nous rappelle que les mathématiques enseignées, celles qui conduisent à la réussite aux examens, n'ont pas grand-chose à voir avec les Mathématiques. Alors, on a envie de retourner voir les chercheurs et l'on s'aperçoit que leurs mathématiques, les Mathématiques, demandent du temps, du calme. Et Cédric Villani confie qu'un chemin tortueux est souvent bien plus porteur de sens qu'une voie rapide. Quelque part ailleurs, une enseignante américaine félicite de jeunes enfants parce qu'ils ont bien verbalisé leur démarche. En écho, ailleurs dans le film, François Sauvageot parlant de la beauté en maths croit la trouver dans le moment où l'on est capable de transmettre simplement sa pensée. Mais aussi, pour nous ramener au quotidien de nos classes, cette élève qui dit : en fait, on a compris, mais les mots mathématiques sont tellement compliqués ! Oui, tellement compliqués que l'on en oublie parfois que pour apprendre des maths, il faut en faire, comme nous le rappelle cet enseignant américain qui fait une comparaison savoureuse avec l'apprentissage du football.

Je pourrais multiplier les exemples. Car dans ce film, tout est fait de renvois, de phrases, de situations, qui un peu comme dans ce jeu où il s'agit de relier des points pour faire apparaître un personnage, nous conduisent petit à petit vers ce que veut nous dire Olivier Peyon. Non pas un message unique, comme peut l'être trop souvent la pensée des mathématiques enseignées, mais des images, des impressions qui tiennent plus de la démonstration pointilliste, faite d'incessants retours (ce qui fera plaisir à tous ceux qui comme moi aime bien la notion de pédagogie spiralaire). Lors d'une conférence à Marseille, Olivier Peyon nous disait qu'une phrase en particulier avait motivé son désir de faire ce film. C'est celle de l'un de ses amis : « Si on enseignait l'esprit de liberté des maths, tous les élèves deviendraient des rebelles ».

Son film traduit sa volonté de comprendre comment on a pu tant s'éloigner de cet esprit de liberté, comment on en est arrivé à ce rejet, et parfois cette détestation. L'analyse est complexe, polymorphe. Notre enseignement n'est pas épargné. Mais des pistes sont proposées pour retrouver une dynamique différente. « Comment j'ai détesté les maths » engage au débat et à la réflexion. La phrase qui termine le film est également celle que l'on trouve au dos de la plaquette. Elle est à elle seule tout le programme que nous propose Olivier Peyon dans ce voyage à travers les mathématiques enseignées ou savantes : « Ne croyez aucune autorité, vérifiez par vous-même, réfléchissez, pensez, développez vos propres idées. N'arrêtez jamais » (Gert-Martin Grauel, mathématicien). Quand le cours de mathématiques s'apparente trop souvent à la visite de monuments qu'il ne s'agit pas de ne toucher que du bout des yeux, Olivier Peyon nous invite à bousculer nos façons de faire, à enseigner l'irrespect, à retrouver avec nos élèves le chemin de cette jubilation créatrice dont font preuve tous ces jeunes enfants dont j'ai parlé plus haut.

Un visiteur au pays des mathématiques

Aline Bonami[1]

Curieux titre, qui est comme un premier obstacle rencontré, avant même de le voir ! « Why do some people hate maths ? », c'est une question posée sur internet, qui fait partie d'une série de questions du même genre : pourquoi déteste-t-on les animaux, les chats noirs, le rap..., et à laquelle répond Edward Frenkel dans une vidéo. Or ce « comment » plutôt que « pourquoi », suivi de cette première personne du singulier, nous fait prendre une autre direction, celle de la fable ou du roman picaresque. Et c'est à une sorte de voyage initiatique au pays des mathématiques (ou des mathématiciens) que nous convie le cinéaste dès qu'on a passé les premières images dans lesquelles des adolescents américains pleins de vie, filles et garçons, hurlent leur haine des maths en faisant les pitres. Interrogé sur le sujet, le cinéaste se défend de se reconnaître en eux. Mais l'émotion devant les maths, qu'elle soit négative ou positive, est omniprésente.

Les images – magnifiques – sautent d'un continent à l'autre. On se retrouve tout de suite à Paris, puis en Inde, sous la mousson, en marge du dernier congrès international. Puis à nouveau aux États-Unis, dans un immense hall d'université, où un étudiant explique que « c'est une fatalité d'être nul en maths ». S'ensuit une longue séquence avec Jean Dhombres, qui parle de la façon dont sont ressenties les maths par rapport au réel... Nous n'en sommes qu'à quelques minutes de film. Autant dire qu'il faut se laisser emporter sans essayer de démêler les fils. Les thèmes s'entrecroisent : enseignement, avec une très belle séquence avec la psychopédagogue Anne Siéty qui s'occupe de ceux auxquels « les maths demandent une énergie folle » parce qu'elles suscitent trop d'émotions, beauté des mathématiques, rôle des maths dans le monde actuel...

Mais ce voyage au pays des mathématiques, c'est d'abord l'occasion de rencontrer des personnages fascinants, qui remplissent magnifiquement leur rôle de mathématiciens. En premier lieu Cédric Villani autour duquel le film est en grande partie bâti, mais aussi François Sauvageot, qui apparaît comme une sorte de magicien transformant tout en mathématiques. On le découvre cousant à la machine à coudre, manière de faire des maths puisque tout est maths. On le voit avec ses élèves, faisant jaillir des maths, tel un prestidigitateur, des objets les plus divers ; on les suit sur une plage bretonne, ce qui donne lieu à de magnifiques images de chars à voiles dans la brume.

Le rythme endiablé du film semble être à l'image de l'emploi du temps de Cédric Villani. On va et vient entre les continents, revenant périodiquement en

[1] Université d'Orléans.

Inde, où l'on assiste à la remise de la médaille Fields, et aussi à Oberwolfach où l'on arpente la montagne, où l'on vit la vie des mathématiciens qui s'y trouvent, partant pour New-York, Berkeley... Ces changements rapides de décor alternent avec des moments de ralenti où les mathématiciens « personnages » prennent le temps des explications. Cédric Villani explique, justement, la lenteur du travail : « tant que le chapitre il est pas bien comme il faut... ». La caméra s'attarde sur tel ou tel détail.

Car le discours est accompagné d'images, comme pour répondre à tous les mathématiciens interrogés qui disent qu'il faut trouver les images qui permettent de comprendre ou faire comprendre. Ce sont des entrelacements d'autoroute et des foules de manifestants qui illustrent les mathématiques modernes et les années 60. Ce sont des salles de marché vociférantes qui accompagnent l'arrivée des mathématiques dans le monde de la finance. Cette arrivée, on la vit aussi au travers d'une lente descente en avion sur Manhattan. On peut imaginer « la mathématique » dire : « À nous deux maintenant », comme Rastignac voyant Paris à ses pieds.

Le film, dont le foisonnement se veut probablement à l'image du fait que les mathématiques sont partout, s'organise toutefois petit à petit autour d'un problème qui nous touche tous, mathématiciens ou non : la crise financière. Il s'interroge sur le rôle que les mathématiques y ont joué. On sort du monde féerique pour se plonger peu à peu dans la réalité. Et l'émotion, la vraie, celle qui touche tout un chacun devant les malheurs de ses proches et non celle qu'éprouve le mathématicien à voyager dans des mondes imaginaires, est brusquement présente, furtivement. Le mot de la fin du film est confié à un mathématicien indien, après un dernier retour à Hyderabad. Il paraît imprégné de sagesse asiatique : « Do not believe any authority. Use your own brain ».

Ce serait bien dommage de bouder son plaisir ! Les prises de vue sont magnifiques et c'est une sorte de divine surprise que de voir un film sur les mathématiques de cette qualité, qui est encore à l'affiche à Paris après trois mois, a été vu par des dizaines de milliers de spectateurs et fait l'objet de nombreuses critiques. Je n'ai que très partiellement pu rendre compte de sa richesse, il y a bien d'autres intervenants, bien d'autres thèmes abordés, que ceux que j'ai mentionnés. Il faut aller voir ce film, qu'on soit mathématicien ou non. Il faut en parler. Il faut en profiter pour s'interroger plus avant.

Car la menace, pour les mathématiciens, ce serait d'être si contents qu'on parle d'eux qu'ils en perdraient tout sens critique. Or les questions ne manquent pas, dont la première, qui est en toile de fond dans le film sans être traitée frontalement, est la désaffection des étudiants pour les mathématiques. Elle est reprise par les médias. Ce n'est évidemment pas au film d'y répondre. Bien au contraire, on ne peut que remercier le cinéaste de lancer la discussion.

Il faut aussi s'interroger sur l'image des mathématiques, et des mathématiciens, qui est donnée dans ce film. Est-ce bien celle qu'on souhaite ? N'y a-t-il pas un risque que la recherche en mathématiques apparaisse comme faite pour un petit nombre d'individus, même si Jean-Pierre Bourguignon y parle de la croissance exponentielle du nombre de mathématiciens dans le monde ? N'est-ce pas en contradiction avec l'accélération de la recherche et le fait que celle-ci est de plus en plus collaborative ? Cette image de « happy few » que donne le film vient peut-être du fait qu'on y voit plus le mathématicien comme un personnage habité par la beauté des mathématiques, avec cette petite lumière dans les yeux qui a séduit Olivier Peyon, que les mathématiques elles-mêmes. Ceci à une exception près, la vidéo que montre Eitan Grispun[2], qui convainc probablement plus rapidement que de longs discours qu'on a besoin de mathématiques et de mathématiciens.

Ma dernière interrogation[3] est relative au fait que les mathématiciennes sont pratiquement absentes du film. Le pays fantasmatique des mathématiques apparaît comme un pays d'hommes, où seules quelques pédagogues ont droit de cité. Une image qu'il faudrait dépasser dans les commentaires et débats, sans parler du fait qu'elle n'est ni conforme à la réalité ni vraiment agréable pour les mathématiciennes professionnelles. Faute de quoi c'est un message bien négatif qu'on envoie à la moitié de la population, qui risque de faire en partie boule de neige dans l'autre moitié, et ceci justement au moment où on essaie d'attirer les jeunes.

[2] Si l'on veut aller plus loin, on peut voir sa vidéo « Computing Spaghetti » `http://www.youtube.com/watch?v=cgRq78jrfqU`

[3] Ce texte reprend, en l'approfondissant beaucoup, un premier texte publié sur le site de *Femmes et Maths*. Dans un second texte, écrit en commun avec Valérie Berthé et intitulé « Femmes en mathématiques – Comment en parler ? », nous donnons quelques éléments de réponse ou de discussion (`http://www.femmes-et-maths.fr/?p=1638`).

LIVRES

Analyse mathématique : grands théorèmes du vingtième siècle
Denis Choimet et Hervé Queffélec
Calvage & Mounet, Collection Tableau Noir, Paris, 2009 415 p., ISBN 978-2916352107, 34,68€

Complex Proofs of Real Theorems
Peter Lax and Lawrence Zalcman
University Lecture Series Vol 58, American mathematical Society, Providence 2012. 90 pp. ISBN 978-0-8218-7559-9, $23.20

Voici deux livres, l'un français, l'autre américain, qui ont bien des points communs. Tous deux s'adressent, comme l'écrivent Lax et Zalcman, à ceux qui aiment l'analyse et éprouvent du plaisir à lire de jolies démonstrations. De fait on peut s'y régaler, comme le promet Gilles Godefroy dans sa préface au livre de Choimet et Queffélec. Cet « amateur » auquel ils s'adressent, ils l'imaginent jeune, non encore spécialisé, tout en ambitionnant d'intéresser aussi les enseignants. De fait on peut les lire à partir du niveau master. Aucun des deux n'emprunte les chemins usuels, chacun entraîne le lecteur de théorèmes en théorèmes au hasard de son choix du moment. Chacun se permet des appréciations ou des commentaires habituellement absents des ouvrages de mathématiques. Parlant d'un terme gênant dans une démonstration, Choimet et Queffélec invoquent Racine :

> « Britannicus le gêne, Albine, et chaque jour
> Je sens que je deviens importune à mon tour. »

On devine que derrière les auteurs se cachent d'excellents enseignants, habitués à capter l'attention de leurs auditeurs et prêts à partager avec eux le plaisir que leur procurent les mathématiques en n'hésitant pas à le pigmenter à l'occasion. Ce sont à l'évidence deux livres qu'on peut lire de bout en bout avec bonheur, ce qui n'est pas si fréquent.

Les deux livres diffèrent par leur taille. Si le premier fait plus de 400 pages, le second est un texte court au rythme soutenu, aux démonstrations rapides et élégantes, deux qualités qui guident le choix des auteurs. Ceux-ci sont des habitués de l'American Mathematical Monthly. Leur fil conducteur est l'utilisation de la théorie des fonctions analytiques dans d'autres domaines de l'analyse (théorie des opérateurs, analyse de Fourier, théorie de l'approximation, etc.). Leur livre se fait ainsi l'écho de Paul Painlevé affirmant que : « Entre deux vérités du domaine réel, le chemin le plus facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe ». Leur titre est un clin d'œil à un article de Zalcman datant de 1974, intitulé « Real Proofs of Complex Theorems (and vice versa) ». J'ai été étonnée d'y découvrir deux démonstrations, l'une du théorème fondamental de l'algèbre, l'autre de l'unicité de Fourier, qui sont encore plus simples que les démonstrations simples que je connaissais.

Le livre de Choimet et Queffélec se veut beaucoup plus dense, avec douze chapitres qui correspondent à douze thèmes. Le fil conducteur est cette fois historique. Les auteurs commencent avec les débuts de la collaboration entre Hardy et Littlewood autour des théorèmes Tauberiens, passent par le lemme de Wiener, qui affirme qu'une fonction périodique ne s'annulant pas et son inverse ont simultanément des séries de Fourier absolument convergentes, puis par le théorème des nombres premiers, parlent de propriétés génériques et de méthodes probabilistes, de non dérivabilité de la fonction de Riemann, traitent des paradoxes de Hausdorff-Banach-Tarski, donnent une démonstration de la conjecture de Littlewood sur les normes L^1 des polynômes trigonométriques à coefficients 0 ou 1, reviennent au lemme de Wiener une fois connue la théorie de Gelfand, puis se lancent dans la démonstration du théorème de la couronne, ce qui nécessite l'introduction d'un grand nombre d'outils. Ils concluent, dans un dernier morceau de bravoure, avec la structure des espaces de Banach. Chaque chapitre est suivi d'exercices. On l'aura compris, sous couvert d'une promenade en partie historique au travers de l'analyse (fonctionnelle, harmonique, complexe...) au vingtième siècle, c'est finalement un savoir encyclopédique qui nous est délivré.

Il n'est pas étonnant que nos quatre auteurs se soient croisés en route. Ils l'ont fait autour de la démonstration du théorème des nombres premiers, présentée à juste titre par Lax et Zalcman comme l'archétype de la « preuve complexe d'un théorème réel ». Les auteurs des deux livres ont choisi la même approche, celle qui utilise le théorème Tauberien de Newman. Il est amusant de voir que pour démontrer ce dernier leurs choix ont été en quelque sorte opposés : Lax et Zalcman donnent directement l'expression de la fonction auxiliaire utilisée, ce qui permet très vite d'avoir une vue d'ensemble sur la démonstration. Choimet et Queffélec prennent leur temps et montrent comment chaque terme s'introduit naturellement, faisant appel à Racine pour détendre le lecteur au milieu de leur argument. Je me garderai bien d'arbitrer entre les deux méthodes, dont nous usons tous à tour de rôle.

Ce sont en tout cas deux livres qui donnent envie de lire et de s'instruire. Comme le dit la quatrième de couverture de l'un d'entre eux, les amateurs de l'analyse et des belles démonstrations les liront et reliront avec plaisir et avec profit.

Aline Bonami
Université d'Orléans

Introduction à la philosophie des mathématiques
Marco Panza et Andrea Sereni
Champs essais, Flammarion, 2013. 496 pp. ISBN 978-2-0812-7083-1, 14,25€

La démarche suivie dans cet excellent livre est originale.

Il s'agit de faire une présentation très documentée de l'histoire et des problèmes de la philosophie des mathématiques en prenant comme fil conducteur UNE philosophie des mathématiques, dont on décrit au passage l'histoire, les avatars, les discussions qu'elle a et continue de susciter, à savoir le platonisme ou réalisme mathématique. Rappelons que c'est en gros l'idée qu'il existe un univers d'objets mathématiques comparable à celui des objets physiques, les mathématiciens

« découvrant » alors leurs propriétés... On pourrait qualifier le platonisme de « philosophie spontanée » des mathématiciens, mais comme le rappelle Jacques Bouveresse (en expliquant le point de vue de Wittgenstein) dans [3] Chapitre VII :

> ...ce que les mathématiciens sont enclins à dire spontanément sur ce genre de chose n'est pas une philosophie des mathématiques, mais du matériau brut pour le traitement philosophique. La question qui se pose est finalement celle-ci : faut-il considérer le platonisme simplement comme une image très naturelle et pratiquement imposée qui accompagne la pratique mathématique ? Dans ce cas, il n'y a rigoureusement rien à lui objecter. Wittgenstein est le dernier philosophe à s'en prendre à une image à ce point fondamentale, à ce point inhérente à une pratique. Mais l'image doit-elle être considérée comme une explication et même comme *l'*explication philosophique ? Comme toujours, c'est la tendance à prendre une image pour une explication et même pour une théorie explicative qui engendre la mythologie.

Une des difficultés soulevées par le platonisme est que, citant toujours [3] « si les mathématiques décrivent une réalité spécifique, une réalité purement mathématique, comment expliquer qu'elles puissent en outre s'appliquer à la réalité empirique ? » Des réponses possibles à cette question seront examinées dans le livre de Panza et Sereni.

Le livre est organisé en sept sections suivant une Introduction dans laquelle est présenté notamment ce que les auteurs appellent *le problème de Platon* : en admettant que les assertions mathématiques parlent de quelque chose, de quoi parlent-elles ? Et dans le cas contraire, si elles ne parlent de rien, à quoi doivent-elles leur intelligibilité ? Le « platonisme » (dont les auteurs soulignent les difficultés relatives à sa formulation) est une solution à ce problème. À l'opposé le « nominalisme » nie l'existence d'objets abstraits.

Comme le rappellent les auteurs, la philosophie des mathématiques est très homogène jusqu'au XIX^{e} siècle, et pensée dans les termes de Platon. La première section en décrit des épisodes saillants de Platon à Kant, en passant par Proclus et Aristote.

La section suivante traite du « platonisme logique » de Frege. Elle souligne l'apport fondamental de la philosophie de Frege, qui intègre en particulier les progrès des mathématiques de son temps. On y trouve aussi une exposition limpide du système formel de Frege et de sa contradiction, découverte par Bertrand Russell. On peut regretter l'absence dans cette section d'une analyse de l'œuvre de Bolzano, fondateur de la théorie sémantique poursuivie par Frege, Russell, Wittgenstein et Tarski (on pourra lire à ce propos le livre de J. Sebestik [7]).

Une section est consacrée à la période « post-frégéenne » du premier tiers du vingtième siècle, de Russell à Gödel, en passant par Cantor, Carnap, Hilbert et Brouwer. C'est une présentation vraiment très claire des débats de l'époque, en particulier de l'intuitionisme de Brouwer et du platonisme radical de Gödel.

Les sections suivantes sont consacrées à des développements plus contemporains, à partir de deux articles de Benacerraf (1965 et 1973) qui ont relancé le débat contemporain sur le problème de Platon, en particulier, les auteurs examinent les réponses au « dilemme de Benacerraf » qu'on peut résumer comme suit : « En mathématiques, une bonne sémantique semble impliquer une mauvaise épistémologie et inversement, une bonne épistémologie impliquerait une mauvaise sémantique ».

Les réponses à ce dilemme sont classées en deux catégories. Les réponses « conservatives » et les « réponses non conservatives ».

Comme l'indiquent les auteurs,

> Les premières sont celles qui « prennent le dilemme de front » en admettant que *i*) les assertions mathématiques doivent être prises *at face value*, c'est-à-dire qu'elles doivent être entendues en accord avec leur structure grammaticale apparente ; *ii*) les mathématiques pures, conçues en accord avec la condition *i*) représentent, du moins en grande partie, un corpus de connaissances *a priori*. Au moins une de ces conditions est rejetée par les réponses dites non conservatives.

Les deux sections dédiées à ces réponses constituent une excellente revue (avec une technicité minimale) de recherches actuelles.

L'ouvrage s'achève par une présentation et une discussion des différentes versions de « l'argument d'indispensabilité », attribué à Quine et Putman (certains en reconnaissant des formulations antérieures chez Frege, von Neumann, Carnap et Gödel). Selon la formulation de Putman,

> [...] la quantification sur des entités mathématiques est indispensable à la fois aux sciences formelles et aux sciences physiques ; donc, nous devrions accepter une telle quantification ; mais alors, cela nous contraindrait à accepter l'existence des entités mathématiques en question.

On a donc là un nouvel argument en faveur du platonisme qui (avec ses variantes) a donné lieu à de nombreux débats analysés dans cette section.

On pourra prolonger la lecture du livre par des expositions plus traditionnelles de la philosophie des mathématiques (par exemple [2, 8]), par [4] qui analyse « l'anti-platonisme radical » de Wittgenstein qui n'est pas abordé dans le livre de Panza et Sereni, par [5] qui analyse les réponses fournies par l'empirisme logique (Carnap, Hahn, Schlick, Reichenbach,...) à la question des relations entre mathématiques et expérience, et par les excellents recueils de textes [1, 6]. Le livre [6] contient en particulier la traduction française de certains textes évoqués par Panza et Serini ainsi que des commentaires passionnants. La lecture de ce dernier ouvrage est donc une continuation naturelle à celle du livre de Panza et Sereni.

En conclusion, je ne peux que recommander la lecture de ce livre passionnant, superbement écrit, sans équivalent en langue française, à tous ceux qu'intéresse, de près ou de loin (on pourra alors sauter quelques passages techniques !) la philosophie des mathématiques, ou tout simplement aux mathématiciens qui s'interrogent sur la nature de leur science. Pour celles/ceux qui voudraient aller plus loin, la riche bibliographie (complétée par certains des ouvrages mentionnés plus haut et par celle de [6]) fournira de quoi satisfaire les plus gros appétits.

Références

1. P. Benacerraf, H. Putman, *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, 2e édition, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
2. D. Bostock, *Philosophy of Mathematics. An Introduction*, Oxford University Press, Oxford-New York, 2009.
3. J. Bouveresse, *Le philosophe et le réel*, Pluriel, Paris 1998.
4. J. Bouveresse, *Le pays des possibles. Wittgenstein, les mathématiques et le monde réel*, Editions de Minuit, Paris, 1988.
5. J. Bouveresse et P. Wagner, Eds, *Mathématiques et expérience. L'empirisme logique à l'épreuve (1918-1940)*, Collège de France, Odile Jacob, Paris 2008.
6. S. Gandon, I. Smadja, Eds, *Philosophie des mathématiques. Ontologie, vérité et fondements*, Vrin, Paris, 2013.
7. J. Sebestik, *Logique et mathématique chez Bolzano*, Vrin, Paris, 1992.
8. S. Shapiro, *Thinking about Mathematics : The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford-New York, 2000.

Jean-Claude Saut,
Université Paris-Sud

La déesse des petites victoires
Yannick Grannec
Roman, prix des libraires 2013, Editions Anne Carrière, 2012. 468 pp. ISBN 978-2843376665, 22€

Il est rare qu'un roman destiné à un vaste public soit construit autour de la vie d'un logicien, fut-il illustre. Certes, il y a bien des livres sur Kurt Gödel, mais ce sont le plus souvent des réflexions sur sa personnalité plutôt étrange et surtout des interprétations de son fameux théorème d'incomplétude qui vont de l'exégèse aride aux extrapolations fumeuses – on leur préférera la postface de Jean-Yves Girard qui remet les pendules à l'heure dans l'ouvrage *Le théorème de Gödel* [11]

Dans le livre de Yannick Grannec, premier roman d'une historienne des sciences, il n'est pas question de gloser sur le théorème d'incomplétude. Il s'agit d'un véritable récit romanesque, qui se lit avec plaisir même sans intérêt particulier pour les mathématiques ou la logique : à la rigueur un goût pour le roman historique et l'histoire des sciences peut être un plus, mais ce sont les drames humains vécus par les savants de l'époque et leurs compagnons, ainsi que les particularités de leurs psychologies qui ont passionné l'auteur. Il est assez peu question des résultats mathématiques de Gödel, mais plutôt de sa vie et de la vie scientifique à Vienne et plus encore à Princeton.

Le roman alterne deux types de chapitres. Les uns racontent la vie de Gödel dont les premières années constituent un riche scénario sur fond de montée du nazisme, et dont les suivantes sont une descente dans une forme de paranoïa – Gödel craignait qu'on ne l'empoisonnât et pesait une trentaine de kilos lorsqu'il mourut. Les autres chapitres sont le dialogue entre la veuve de Gödel, Adèle, et une documentaliste, Anna, dont la mission est d'obtenir de la veuve récalcitrante de Gödel ses manuscrits. Le portrait d'Adèle s'appuie sur des documents et témoignages, même s'ils sont sans doute étoffés pour lui donner vie et envergure. Le personnage de la documentaliste, totalement fictif, sert à tisser la trame du roman et devient à la fois complice d'Adèle, témoin privilégié de cette période trouble, et acteur secondaire du récit. Le lecteur de la *Gazette* appréciera (ou non) la description du mathématicien français qui séduit la documentaliste. La courte apparition de ce personnage non historique peine par ailleurs quelque peu à s'intégrer harmonieusement avec le reste du récit ; comme si l'auteur s'en était voulue de véhiculer un archétype de mathématicien socialement en marge, et aurait souhaité créer son antithèse parfaite, charmeur, fin et distingué, et même porte-parole de mathématiques « utilitaires », expliquant à Anna et au lecteur le mécanisme du système RSA.

Cependant l'atmosphère de l'époque, sociétale ou scientifique, est particulièrement bien rendue. Vienne pendant la montée du nazisme, puis après un voyage épique via la Russie et la côte Ouest des États-Unis, la vie des Gödel à Princeton au milieu d'une petite communauté qui parle allemand, ce qui, durant la seconde guerre mondiale, aux États-Unis, est plutôt mal perçu. L'auteur prend manifestement plaisir à donner vie aux figures majeures de l'Institute for Advance Studies à cette époque : Albert Einstein, John von Neumann, Oskar Morgenstern,... et le lecteur a l'impression de faire secrètement partie des convives de leurs dîners animés. La personnalité tourmentée de Gödel est par ailleurs habilement présentée en partie à travers la souffrance et la rancune de sa femme, et il en ressort une description très réussie sur le plan humain qui préserve son intégrité historique. L'auteur a d'ailleurs su rester fidèle aux faits en s'appuyant sur de nombreux documents et témoignages comme expliqués à la fin de l'ouvrage.

Qu'en est-il du contenu mathématique de ce livre ? Il est bien mince, et les rédacteurs de cette note de lecture ont un avis différent sur ce point. L'un de nous pense qu'il était impossible d'intégrer des éléments de logique mathématique sans nuire à la spontanéité du récit. Mais l'autre, davantage féru de logique, croit qu'il eut été possible d'en dire un peu plus sur les contributions fondamentales que Gödel a apportées à la logique mathématique alors toute nouvelle. Même dans les notes à la fin du roman, il est difficile de se faire une idée, tandis qu'il est peut-être possible d'expliquer en peu de mots au lecteur non mathématicien mais raisonnablement cultivé les résultats de Gödel – la première note sur le résultat de complétude de la thèse de Gödel [4, 5] aurait mérité d'être plus longue et plus claire. En revanche nous sommes d'accord pour saluer une heureuse conséquence de l'absence de tentative d'explication des résultats de Gödel : cela laisse le temps au roman d'évoquer l'ambiance scientifique de l'époque et surtout, ce livre ne contient aucune des erreurs ou extrapolations fantaisistes des ouvrages de vulgarisation consacrés au théorème d'incomplétude.

L'auteur apporte tout de même un éclairage mathématique sur deux points :

– l'hypothèse du continu ;
– le chiffrement RSA. Certes le théorème d'incomplétude de Gödel utilise une notion de codage mais elle n'a rien à voir avec le chiffrement RSA utilisé en cryptographie, cette digression s'explique difficilement.

La raison de ce silence logique pourrait être assez simple : les notions de logique mathématique, formule, preuve formelle, modèle, sont peu enseignées dans notre pays. Même si la logique mathématique est par nature assez abstraite, elle n'est sans doute pas plus difficile à expliquer que d'autres domaines des mathématiques plus répandus. Saisissons l'occasion de rappeler en quelques lignes les principaux résultats de Gödel :

– *Théorème de complétude (1929)* [4, 5]. Une formule du premier ordre est vraie dans tout modèle si et seulement si elle est formellement démontrable. Prenons un exemple : la théorie des groupes est une théorie du premier ordre, qui s'écrit avec la composition et l'égalité, et dont les axiomes sont l'associativité, l'existence d'un élément neutre et l'existence d'un inverse. Le théorème de complétude affirme qu'une propriété écrite avec ce langage et vraie dans tous les groupes sera démontrable à partir des axiomes de la théorie des groupes. Plutôt que la preuve de Gödel qui procède par réduction du problème à des formules particulières, on enseigne de nos jours plutôt la démonstration de Leon Henkin de 1949. [9]

– *Théorème(s) d'incomplétude (1930)* [6]. On peut s'étonner que Gödel ait démontré un théorème de *complétude* puis un théorème d'*incomplétude*, mais que le lecteur soit rassuré il ne s'agit ni de la même notion de *complétude* ni de la même théorie. Dans une théorie contenant l'arithmétique (les entiers et le principe de récurrence) il y des énoncés qui ne sont pas démontrables et dont la négation n'est pas non plus démontrable. Un exemple de tel énoncé est la cohérence de la théorie en question. La cohérence de la théorie peut se formuler comme le fait qu'*il n'existe pas de preuve du faux (par exemple de* $0 = 1$*) à partir des axiomes de l'arithmétique*. Formules et preuves pouvant être codées par des entiers, il s'agit bien d'énoncés de l'arithmétique.

– *Cohérence de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu (1938-1940)* [7]. Ce résultat établit la cohérence de ces deux axiomes avec les autres axiomes de la théorie des ensembles comme ceux de Zermelo-Fraenkel (ZF). Gödel a montré comment construire à l'intérieur d'un modèle de ZF un autre modèle de ZF où n'existent que les ensembles dont l'existence est requise pour que les axiomes soient vrais (où n'existent que ceux qui sont définissables par des formules logiques). Dans ce modèle interne l'hypothèse du continu (et même l'hypothèse du continu généralisée) et l'axiome du choix sont vrais, ce qui montre que si ZF a un modèle, ZF enrichie de ces deux principes aussi. Gödel s'est évertué a trouver un modèle de la théorie des ensembles où l'hypothèse du continu est fausse, mais c'est Paul J. Cohen qui en a construit un avec la méthode dite du *forcing* [1] liée à la notion de *topos* comme expliqué dans [10].

– *Métrique de Gödel (1949-1951)*. Cette solution non standard aux équations de la relativité générale d'Einstein (univers « tournant ») a de curieuses propriétés : équivalence de tous les points, existence de courbes temporelles fermées (autorisant des voyages dans le temps). Gödel a offert ce travail à celui qui était pour ainsi dire son seul ami, Einstein, pour les 70 ans de ce dernier. [8]

Pour résumer nous recommandons vivement la lecture de *La déesse des petites victoires* de Yannick Grannec, parce qu'elle rend fidèlement compte de l'atmosphère et des personnalités scientifiques de l'époque, en particulier à Princeton entre 1940 et 1970. C'est de surcroît un très bon roman en soi. En revanche, pour mieux comprendre les travaux de Gödel le lecteur de la *Gazette* devrait plutôt se tourner vers un cours de logique de Master, et il en existe même un très bon en français. [2, 3]

Références

[1] Paul J. Cohen. *Set theory and the continuum hypothesis*. Mathematics lecture note series. W. A. Benjamin, 1966.
[2] René Cori and Daniel Lascar. *Logique Mathématique – Tome 1 : calcul propositionnel ; algèbre de Boole ; calcul des prédicats*. Dunod, 2003.
[3] René Cori and Daniel Lascar. *Logique Mathématique – Tome 2 : fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles*. Dunod, 2003.
[4] Kurt Gödel. *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls*. PhD thesis, Universität Wien, 1929.
[5] Kurt Gödel. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37 :349–360, 1930.
[6] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38 :173–198, 1931.
[7] Kurt Gödel. *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, volume 3 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, 1940.
[8] Kurt Gödel. An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation. *Reviews of Modern Physics*, 21 :447–450, July 1949.
[9] Leon Henkin. The completeness of the first-order functional calculus. *Journal of Symbolic Logic*, 14 :159–166, 1949.
[10] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic : a first introduction to topos theory.* Universitext. New York etc. : Springer-Verlag. xii, 627 p. , 1992.
[11] Ernest Nagel, James P. Newman, Kurt Gödel, and Jean-Yves Girard. *Le théorème de Gödel*. Seuil, 1989.

Christian Retoré, Gilles Zémor
Université de Bordeaux