Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

NOUVELLE PREUVE D'UN THÉORÈME DE YUAN ET HUNT

Thierry Bousch

Tome 136
Fascicule 2

2008

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 227-242

Bull. Soc. math. France
136 (2), 2008, p. 227–242

NOUVELLE PREUVE D'UN THÉORÈME DE YUAN ET HUNT

PAR THIERRY BOUSCH

RÉSUMÉ. — Un théorème de Guo-Cheng Yuan & Brian R. Hunt affirme que, pour μ mesure de probabilité invariante d'un système dynamique hyperbolique $T : X \to X$, les fonctions lipschitziennes $X \to \mathbb{R}$ pour lesquelles μ est minimisante ont un intérieur non vide (en topologie de Lipschitz) si et seulement si μ est une orbite périodique de T. Je donnerai une nouvelle preuve de ce théorème, ou plutôt d'un énoncé essentiellement équivalent. Je discuterai aussi de la stabilité des orbites périodiques minimisantes de grande période.

ABSTRACT (*A new proof of a theorem by Yuan and Hunt*). — A theorem of Guo-Cheng Yuan & Brian R. Hunt states that, for μ an invariant probability measure of some hyperbolic dynamical system $T : X \to X$, the Lipschitz continuous functions $X \to \mathbb{R}$ for which μ is minimizing have non-empty interior (for the Lipschitz topology) if and only if μ is a periodic orbit of T. I will give a new proof of this theorem, or rather of an essentially equivalent statement. I will also discuss the stability of minimizing periodic orbits with a large period.

Texte reçu le 11 décembre 2006, révisé le 18 octobre 2007, accepté le 11 janvier 2008

THIERRY BOUSCH, Laboratoire de Mathématique (UMR 8628 du CNRS), bât. 425/430, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* `Thierry.Bousch@math.u-psud.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 37J50.

Mots clefs. — Mesures minimisantes, cobords lipschitziens.

1. Introduction

Mesures invariantes et orbites périodiques. — Considérons un système dynamique de la forme $T : X \to X$, où X est un espace métrique compact non vide et T une fonction continue. Notons $\mathcal{M}_T$ l'ensemble (compact non vide) des mesures de probabilité boréliennes sur X invariantes par T. Parmi ces probabilités T-invariantes, certaines sont d'une importance particulière : si

$$x_0 \overset{T}{\longmapsto} x_1 \overset{T}{\longmapsto} x_2 \overset{T}{\longmapsto} \cdots \overset{T}{\longmapsto} x_n = x_0$$

est une orbite périodique de T, alors

$$\frac{1}{n}\Big[\delta_{x_0} + \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_{n-1}}\Big]$$

est une probabilité T-invariante, la seule portée par l'ensemble des x_i, aussi est-il naturel d'identifier cette mesure avec son support, et de dire que la mesure ci-dessus « est » une orbite périodique. Une probabilité invariante est une orbite périodique si et seulement si elle est ergodique et de support fini.

Inversement, on peut voir les mesures invariantes comme une généralisation des orbites périodiques. Les problèmes variationnels se posent (et se résolvent) plus naturellement dans ce cadre, grâce à la compacité de $\mathcal{M}_T$ en topologie faible ; voir par exemple [4].

Mesures minimisantes. — On a en particulier le problème suivant : étant donné une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$, trouver la ou les mesures $\mu \in \mathcal{M}_T$ qui minimisent $\langle f, \mu\rangle = \int f\mu$; ce sont les « mesures minimisantes » (pour f). L'existence des mesures minimisantes est garantie par la compacité de $\mathcal{M}_T$, mais leur détermination explicite est un problème difficile, même pour les fonctions f et les systèmes dynamiques $T : X \to X$ les plus simples [2]. Ces exemples particuliers, ainsi que les expériences numériques, suggèrent ce qui doit se passer dans le cas général où T est un système dynamique hyperbolique donné, mais quelconque, tandis que f décrit un « gros » espace fonctionnel.

Un phénomène particulièrement visible se manifeste, qui n'est pas totalement nouveau pour les dynamiciens, puisqu'il s'agit du « verrouillage sur les orbites périodiques ». Ici, cela signifie (i) que les mesures minimisantes sont « souvent » des orbites périodiques, de courte période, et (ii) qu'elles ne bougent pas si on modifie légèrement la fonction f (dans une topologie convenable). Par exemple, dans [2] on a une famille à un paramètre $\theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de fonctions f_θ, admettant pour chaque θ une unique mesure minimisante μ_θ. Il existe dans $\mathbb{T}$ un sous-ensemble de Cantor K, de mesure nulle et de dimension de Hausdorff nulle, tel que pour tout $\theta \notin K$, μ_θ est une orbite périodique ; en outre, la fonction $\theta \mapsto \mu_\theta$ est constante sur chacune des composantes connexes de $\mathbb{T} - K$ (c'est un escalier du diable).

L'énoncé (ii), qui exprime qu'une orbite périodique donnée μ est minimisante pour un ouvert non vide de fonctions, est le plus simple à comprendre et à justifier. On en trouvera deux explications — assez différentes ! — dans [12] et [3].

L'énoncé (i), affirmant la densité des fonctions admettant une orbite périodique minimisante, est plus problématique. On n'a actuellement là-dessus que des résultats partiels, dans certains espaces fonctionnels agréables : les petits espaces de Hölder [5] et l'espace de Walters [3]. Dans l'espace des fonctions lipschitziennes, ainsi que dans les grands espaces de Hölder, cette question est toujours ouverte. Yuan & Hunt obtiennent cependant le résultat partiel suivant, déjà non trivial : pour toute mesure invariante μ qui n'est pas une orbite périodique, les fonctions lipschitziennes pour lesquelles μ est minimisante sont d'intérieur vide (en topologie de Lipschitz). En d'autres termes, le verrouillage de la mesure minimisante se produit uniquement sur les orbites périodiques.

Le but du présent article est de donner une nouvelle démonstration de ce théorème. Nous obtiendrons en prime un résultat complémentaire : si une fonction lipschitzienne f admet une orbite périodique minimisante μ de (grande) période N, alors il existe des perturbations de f de taille $1/N$ en norme de Lipschitz, pour lesquelles μ cesse d'être minimisante.

Afin d'unifier certains énoncés, le théorème de Yuan et Hunt sera démontré dans le cadre des « systèmes amphidynamiques », une généralisation naturelle des systèmes dynamiques, dont la définition précise sera donnée au chapitre 5.

Distance de Wasserstein. — Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur X. La distance de Wasserstein entre deux éléments $\mu, \nu \in \mathcal{M}$, est définie par

$$d_{\mathrm{w}}(\mu,\nu) \;=\; \sup_{f:\,\mathrm{lip}(f)\leqslant 1} \big|\langle f,\mu\rangle - \langle f,\nu\rangle\big|$$

la borne supérieure étant prise sur toutes les fonctions lipschitziennes $f : X \to \mathbb{R}$ de constante au plus un. Cette distance métrise la topologie faible de $\mathcal{M}$. Les segments de $\mathcal{M}$ sont géodésiques : pour tous $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{M}$, et $\mu_s = (1-s)\mu_0 + s\mu_1$ avec $0 \leqslant s \leqslant 1$, on a

$$d_{\mathrm{w}}(\mu_0,\mu_s) = s\, d_{\mathrm{w}}(\mu_0,\mu_1), \quad d_{\mathrm{w}}(\mu_s,\mu_1) = (1-s)\, d_{\mathrm{w}}(\mu_0,\mu_1). \tag{1.1}$$

On pourra consulter [10] ou l'appendice A.1 de [1] pour une présentation rapide de la distance de Wasserstein, ou encore le livre [9] pour un exposé beaucoup plus détaillé et une bibliographie exhaustive.

2. Un résultat de finitude

PROPOSITION 2.1. — *Soit X un espace métrique compact, et μ une mesure de probabilité sur X. On suppose qu'il existe une suite $x_0, x_1, x_2 \dots$ de points de X et un entier $n_0 \geqslant 1$ tels que*

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \qquad d_{\mathrm{w}}\left[\frac{\delta_{x_i} + \cdots + \delta_{x_{i+n-1}}}{n}, \mu\right] \leqslant \frac{1}{24}\, d(x_i, x_{i+n})\,. \tag{2.1}$$

Alors on peut écrire

$$\mu = \frac{\delta_{y_0} + \cdots + \delta_{y_{N-1}}}{N}$$

avec $1 \leqslant N < 24n_0$, et $y_0, \dots, y_{N-1}$ des points distincts de X.

Démonstration. — Soit $S \subseteq X^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les suites $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions (2.1). C'est évidemment un sous-ensemble fermé de $X^{\mathbb{N}}$, stable par l'application de décalage, et il est non vide par hypothèse. Posons

$$r_n = \operatorname*{Inf}_{\mathbf{x}\in S} d(\pi_0\mathbf{x}, \pi_n\mathbf{x})$$

où les $\pi_n : X^{\mathbb{N}} \to X$ sont les projections canoniques (ces bornes sont atteintes, puisque S est compact). Observons, en premier lieu, que

$$\forall \mathbf{x} \in S \quad \forall i, n \in \mathbb{N} \qquad d(x_i, x_{i+n}) \geqslant r_n$$

puisque S est stable par décalage. Comme X est compact, la suite (x_i) admet des valeurs d'adhérence (pour un quelconque $\mathbf{x} \in S$), et par conséquent

$$\liminf_{n\to\infty} r_n = 0. \tag{2.2}$$

Définissons maintenant

$$\mathcal{C} = \big\{n \geqslant n_0 : \forall k \in [n_0, n[\ \ r_k > r_n\big\}$$

l'ensemble des « temps de plus proche retour » à partir de n_0. Cet ensemble est non vide, puisqu'il contient n_0. J'affirme qu'il ne contient aucun entier $\geqslant 24n_0$.

Raisonnons par l'absurde, en supposant que $\mathcal{C}$ contient un entier $n \geqslant 24n_0$. On peut trouver $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots) \in S$ tel que $d(x_0, x_n) = r_n$. Posons alors

$$\alpha \;=\; \operatorname*{Inf}_{\substack{0\leqslant s<t<n\\ n_0\leqslant t-s\leqslant 3n/4}} d(x_s, x_t)$$

si bien que $\alpha > r_n \geqslant 0$. Soient s, t tels que $0 \leqslant s < t < n$, $n_0 \leqslant t - s \leqslant 3n/4$ et $d(x_s, x_t) = \alpha$, et posons $m = t - s$. Définissons maintenant les mesures

$$\mu_C = \frac{1}{m}\Big[\delta_{x_s} + \cdots + \delta_{x_{t-1}}\Big]$$

$$\mu_B = \frac{1}{n-m}\Big[\delta_{x_0} + \cdots + \delta_{x_{s-1}} + \delta_{x_t} + \cdots + \delta_{x_{n-1}}\Big]$$

$$\mu_A = \frac{1}{n}\Big[\delta_{x_0} + \cdots + \delta_{x_{n-1}}\Big]$$

qui sont liées par la relation

$$\mu_A = \frac{n-m}{n}\mu_B + \frac{m}{n}\mu_C\,.$$

Les conditions (2.1) nous donnent

$$d_{\mathrm{w}}(\mu_C, \mu) \leqslant \frac{1}{24}d(x_s, x_t) = \frac{\alpha}{24}\,, \quad d_{\mathrm{w}}(\mu_A, \mu) \leqslant \frac{1}{24}d(x_0, x_n) = \frac{r_n}{24}\,,$$

dont on déduit

$$d_{\mathrm{w}}(\mu_C, \mu_A) \leqslant d_{\mathrm{w}}(\mu_C, \mu) + d_{\mathrm{w}}(\mu_A, \mu) \leqslant \frac{\alpha + r_n}{24} < \frac{\alpha}{12}\,.$$

D'autre part, d'après (1.1) on a

$$d_{\mathrm{w}}(\mu_C, \mu_A) = \frac{n-m}{n}d_{\mathrm{w}}(\mu_C, \mu_B) \geqslant \frac{1}{4}d_{\mathrm{w}}(\mu_C, \mu_B)$$

puisque $m \leqslant 3n/4$, et par conséquent

$$d_{\mathrm{w}}(\mu_C, \mu_B) < \frac{\alpha}{3}\,. \tag{2.3}$$

Cherchons maintenant une minoration de la distance de Wasserstein $d_{\mathrm{w}}(\mu_C, \mu_B)$. Par définition, elle vérifie

$$d_{\mathrm{w}}(\mu_C, \mu_B) \geqslant \big|\langle f, \mu_C\rangle - \langle f, \mu_B\rangle\big|$$

pour toute fonction 1-lipschitzienne $f : X \to \mathbb{R}$. Distinguons deux cas, selon que $m \geqslant n/2$ ou non.

Premier cas :

$m \geqslant n/2$. On prend ici $f(x) = d(x, \operatorname{supp}\mu_B)$, si bien que $\langle f, \mu_B\rangle = 0$ et

$$\langle f, \mu_C\rangle = \frac{1}{m}\sum_{i\in[s,t[} d(x_i, \operatorname{supp}\mu_B).$$

Parmi les indices $i \in [s, t[$, il en existe au plus $n/4$ pour lesquels

$$\exists j \in [0, s[\cup [t, n[\qquad |j - i| > \frac{3n}{4}$$

et il en existe au plus $2n_0$ pour lesquels

$$\exists j \in [0, s[\cup [t, n[\qquad |j - i| < n_0$$

Tous les autres i vérifient $d(x_i, \operatorname{supp}\mu_B) \geqslant \alpha$, et donc

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{w}}(\mu_C, \mu_B) \geqslant \langle f, \mu_C\rangle &= \frac{1}{m} \sum_{i\in[s,t[} d(x_i, \operatorname{supp}\mu_B) \\ &\geqslant \frac{1}{m}\Big(m - \frac{n}{4} - 2n_0\Big)\alpha \\ &\geqslant \Big(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\Big)\alpha = \frac{\alpha}{3} \end{aligned}$$

ce qui contredit (2.3).

Second cas :

$m < n/2$. On prend ici $f(x) = d(x, \operatorname{supp}\mu_C)$, si bien que $\langle f, \mu_C\rangle = 0$ et

$$\langle f, \mu_B\rangle = \frac{1}{n-m} \sum_{i\in[0,s[\cup[t,n[} d(x_i, \operatorname{supp}\mu_C)$$

Parmi les indices $i \in [0, s[\cup [t, n[$, il en existe au plus $n/4$ pour lesquels

$$\exists j \in [s, t[\qquad |j - i| > \frac{3n}{4}$$

et il en existe au plus $2n_0$ pour lesquels

$$\exists j \in [s, t[\qquad |j - i| < n_0$$

Tous les autres i vérifient $d(x_i, \operatorname{supp}\mu_C) \geqslant \alpha$, et donc

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{w}}(\mu_C, \mu_B) \geqslant \langle f, \mu_B\rangle &= \frac{1}{n-m} \sum_{i\in[0,s[\cup[t,n[} d(x_i, \operatorname{supp}\mu_C) \\ &\geqslant \frac{1}{n-m}\Big((n-m) - \frac{n}{4} - 2n_0\Big)\alpha \\ &\geqslant \Big(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\Big)\alpha = \frac{\alpha}{3} \end{aligned}$$

ce qui contredit, ici encore, l'inégalité (2.3).

Nous avons ainsi montré que l'ensemble $\mathcal{C}$ est fini, et que son plus grand élément C est $< 24n_0$. D'après (2.2), cela entraîne $r_C = 0$; il existe donc $\mathbf{x} \in S$ tel que $x_0 = x_C$, et

$$\mu = \frac{1}{C}\Big[\delta_{x_0} + \cdots + \delta_{x_{C-1}}\Big]$$

ce qui montre que μ est de support fini, de cardinal $< 24n_0$. Nous ne savons pas, toutefois, si les points $x_0, \ldots, x_{C-1}$ sont distincts (ou, ce qui revient au même, si tous les atomes de μ ont la même masse).

Pour résoudre ce dernier problème, considérons une mesure de probabilité θ sur S, invariante par décalage et ergodique. J'affirme que $\pi_0\theta = \mu$. En effet, pour θ-presque tout $\mathbf{x} \in S$, les mesures empiriques $n^{-1}\big[\delta_{x_0} + \cdots + \delta_{x_{n-1}}\big]$ convergent vers la loi marginale $\pi_0\theta$; d'autre part, d'après (2.1) on a

$$d_{\mathrm{w}}\left[\frac{\delta_{x_0} + \cdots + \delta_{x_{n-1}}}{n}, \mu\right] \leqslant \frac{1}{24}\, d(x_0, x_n)$$

pour tout n assez grand, et par conséquent $d_{\mathrm{w}}(\pi_0\theta, \mu) \leqslant \frac{1}{24} \liminf_n d(x_0, x_n)$; mais

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_0, x_n) = 0 \tag{2.4}$$

presque sûrement en $\mathbf{x}$, par le théorème de récurrence de Poincaré. On a donc bien $\pi_0\theta = \mu$, et comme cette mesure est de support fini, la formule (2.4) revient à dire que, pour θ-presque tout $\mathbf{x} \in S$, il existe une infinité d'indices n tels que $x_n = x_0$.

Notons N le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que l'événement $\{\mathbf{x} \in S : x_0 = x_N\}$ soit de probabilité non nulle (pour θ). Il existe un point $\mathbf{y} \in S$ — en fait, un ensemble de mesure non nulle de tels points — tel que $y_0, \ldots, y_{N-1}$ soient distincts, et $y_0 = y_N = y_P$ pour au moins un entier $P \geqslant N + n_0$. Alors, d'après (2.1), on a simultanément

$$\mu = \frac{1}{P}\Big[\delta_{y_0} + \cdots + \delta_{y_{P-1}}\Big] = \frac{1}{P-N}\Big[\delta_{y_N} + \cdots + \delta_{y_{P-1}}\Big]$$

et par conséquent

$$\mu = \frac{1}{N}\Big[\delta_{y_0} + \cdots + \delta_{y_{N-1}}\Big]$$

avec $y_0, \ldots, y_{N-1}$ distincts, ce qu'il fallait démontrer. □

3. L'équation cohomologique sur une orbite périodique

La proposition suivante n'est pas absolument nécessaire pour obtenir les principaux résultats de cet article (théorème 4.1 et proposition 5.2). Elle est néanmoins intéressante en elle-même, et permet d'obtenir la majoration (5.1) avec une constante bien meilleure que ce que donnerait la proposition 2.1 seule.

PROPOSITION 3.1. — *Soit X un espace métrique de cardinal fini $N \geqslant 2$, et $T : X \to X$ une bijection. Il existe une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ telle que* $\mathrm{lip}(f) > N/6$, *tandis que* $\mathrm{lip}(fT^{n+1} - fT^n) \leqslant 1$ *pour tout entier n.*

Démonstration. — La dynamique de T sur X est constituée d'un certain nombre d'orbites périodiques. S'il y en a plusieurs, le problème est trivial ; en effet, il existe alors des fonctions f non constantes telles que $fT = f$, et ces fonctions répondent au problème posé (à un facteur près). Nous supposerons donc que T agit transitivement sur X. Moyennant le choix d'un point origine dans X, on peut alors identifier X à l'ensemble $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ muni de l'endofonction $T : x \mapsto x+1$.

Parmi toutes les distances existant sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, il en est une qui joue un rôle particulier pour le problème considéré ; elle est définie par

$$d_0(x, x+k) \ = \ k(N-k) \qquad (x \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z},\ 0 \leqslant k \leqslant N)$$

Le lecteur vérifiera que d_0 est effectivement une distance ; elle est évidemment invariante par la transformation T.

Soit d la distance originale sur $X \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Quitte à multiplier d par un facteur convenable, on peut supposer que $d \geqslant d_0$, avec égalité pour au moins une paire de points, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in X$ et $n \in \,]0, N[$ tels que $d(x_0, x_0+n) = d_0(x_0, x_0+n)$. Quitte à changer le point origine de X, nous pouvons également supposer $x_0 = 0$. On aura donc $d(0,n) = d_0(0,n)$ et $d(x,y) \geqslant d_0(x,y)$ partout ailleurs.

Considérons maintenant la fonction $g : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \alpha + \frac{N}{n}\big(x+\frac12\big)\big(n-\frac12-x\big) & \text{si } 0 \leqslant x < n, \\ \alpha - \frac{N}{N-n}\big(x-n+\frac12\big)\big(N-\frac12-x\big) & \text{si } n \leqslant x < N. \end{cases}$$

où α est une constante qui sera fixée plus tard. J'affirme que la fonction g est 1-lipschitzienne relativement à la distance d_0, c'est-à-dire qu'on a $|g(y)-g(x)| \leqslant d_0(x,y)$ pour tous x, y. Nous distinguerons trois cas.

Premier cas :

$0 \leqslant x, y < n$. On écrit

$$\big(x+\tfrac12\big)\big(n-\tfrac12-x\big) = \Big(\frac{n}{2}+\overline{x}\Big)\Big(\frac{n}{2}-\overline{x}\Big) = \frac{n^2}{4} - \overline{x}^2$$

où $\overline{x} = x-(n-1)/2$, donc

$$g(x) = \big(\alpha + \tfrac14 Nn\big) - \tfrac{N}{n}\overline{x}^2$$

et de même pour $g(y)$, si bien que

$$|g(y)-g(x)| = \tfrac{N}{n}\left|\overline{y}^2 - \overline{x}^2\right| = \tfrac{N}{n}\left|\overline{y}-\overline{x}\right| \cdot \left|\overline{y}+\overline{x}\right|.$$

Mais d'autre part

$$\left|\overline{y}-\overline{x}\right| + \left|\overline{y}+\overline{x}\right| = 2\max\big(\left|\overline{x}\right|, \left|\overline{y}\right|\big) \leqslant n,$$

et donc

$$\begin{aligned} |g(y)-g(x)| &\leqslant \tfrac{N}{n}\left|\overline{y}-\overline{x}\right| \big(n - \left|\overline{y}-\overline{x}\right|\big) \\ &= \tfrac{N}{n}|y-x|\big(n-|y-x|\big) = |y-x|\big(N - \tfrac{N}{n}|y-x|\big) \\ &\leqslant |y-x|\big(N-|y-x|\big) = d_0(x,y). \end{aligned}$$

Second cas :

$n \leqslant x, y < N$. Se traite comme précédemment.

Troisième cas :

$0 \leqslant x < n \leqslant y < N$. On pose ici $u = n - \frac{1}{2} - x$ et $v = y - n + \frac{1}{2}$, si bien que $u + v = y - x$, et

$$g(x) = \alpha + \tfrac{N}{n} u(n-u), \quad g(y) = \alpha - \tfrac{N}{N-n} v(N-n-v),$$

et donc

$$\begin{aligned} |g(y) - g(x)| &= \tfrac{N}{n} u(n-u) + \tfrac{N}{N-n} v(N-n-v) \\ &= N(u+v) - \big(\tfrac{N}{n} u^2 + \tfrac{N}{N-n} v^2\big) \\ &= N(u+v) - (u+v)^2 - n(N-n)\big(\tfrac{u}{n} - \tfrac{v}{N-n}\big)^2 \\ &\leqslant N(u+v) - (u+v)^2 = N(y-x) - (y-x)^2 = d_0(x,y), \end{aligned}$$

ce qui achève de démontrer que g est 1-lipschitzienne pour la distance d_0.

Calculons maintenant les sommes $g(0) + \cdots + g(n-1)$ et $g(n) + \cdots + g(N-1)$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \big(i + \tfrac{1}{2}\big)\big(n - \tfrac{1}{2} - i\big) &= -\sum_{i=0}^{n-1} i^2 + (n-1) \sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{1}{2}\big(n - \tfrac{1}{2}\big) \sum_{i=0}^{n-1} 1 \\ &= -\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + (n-1)\frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{2}\big(n - \tfrac{1}{2}\big)n \\ &= \tfrac{n}{6}\big(-(n-1)(2n-1) + 3(n-1)^2 + 3(n - \tfrac{1}{2})\big) \\ &= \tfrac{n}{6}\big(n^2 + \tfrac{1}{2}\big) \end{aligned}$$

et de même,

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^{N-1} \big(i - n + \tfrac{1}{2}\big)\big(N - \tfrac{1}{2} - i\big) &= \sum_{i=0}^{(N-n)-1} \big(i + \tfrac{1}{2}\big)\big((N-n) - \tfrac{1}{2} - i\big) \\ &= \tfrac{N-n}{6}\big((N-n)^2 + \tfrac{1}{2}\big). \end{aligned}$$

Cela nous donne

$$\begin{aligned} g(0) + \cdots + g(n-1) &= n\alpha + \tfrac{N}{6}\big(n^2 + \tfrac{1}{2}\big) \\ g(n) + \cdots + g(N-1) &= (N-n)\alpha - \tfrac{N}{6}\big((N-n)^2 + \tfrac{1}{2}\big) \end{aligned}$$

et en particulier

$$g(0) + \cdots + g(N-1) = N\alpha + \tfrac{N}{6}\big(n^2 - (N-n)^2\big)$$

c'est-à-dire que g est de moyenne nulle si et seulement si

$$\alpha = \tfrac{1}{6}\big((N-n)^2 - n^2\big) = \tfrac{N}{6}(N - 2n).$$

Dans ce cas, il existe une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, unique à une constante additive près, telle que $g = fT - f$. Comme on l'a vu plus haut, par rapport à d_0 la fonction $fT - f$ est 1-lipschitzienne, et il en est de même pour toutes les fonctions $fT^{n+1} - fT^n$, car T est une isométrie pour cette distance. A fortiori, les fonctions $fT^{n+1} - fT^n$ sont 1-lipschitziennes pour la distance d.

Enfin, estimons la constante de Lipschitz de f. On a

$$\begin{aligned} f(n) - f(0) &= g(0) + \cdots + g(n-1) = n\alpha + \tfrac{N}{6}\big(n^2 + \tfrac{1}{2}\big) \\ &= \tfrac{N}{6}(N-2n)n + \tfrac{N}{6}\big(n^2 + \tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{N}{6}\big((N-n)n + \tfrac{1}{2}\big) \\ &= \tfrac{N}{6}\big(d_0(0,n) + \tfrac{1}{2}\big) \\ &> \tfrac{N}{6} d_0(0,n) = \tfrac{N}{6} d(0,n) \end{aligned}$$

et donc $\operatorname{lip}(f) > N/6$, ce qui termine la preuve. □

4. Le théorème de Yuan et Hunt

THÉORÈME 4.1. — *Soient X_0, X_1 deux espaces métriques compacts, $\partial_0, \partial_1 : X_1 \to X_0$ deux fonctions lipschitziennes, et μ_0, μ_1 deux mesures de probabilité, portées par X_0, X_1 respectivement et telles que $\partial_0\mu_1 = \partial_1\mu_1 = \mu_0$.*

On suppose que pour toute fonction lipschitzienne $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ telle que $\langle f_1, \mu_1\rangle = 0$, il existe une fonction lipschitzienne $f_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ telle que $f_1 = f_0\partial_1 - f_0\partial_0$ μ_1-presque partout. Alors, pour un certain entier $N \geqslant 1$, il existe N points distincts $x_0, \ldots, x_{N-1}$ dans X_1, et N points distincts $y_0, \ldots, y_{N-1}$ dans X_0, vérifiant $\partial_1 x_{i-1} = y_i = \partial_0 x_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, et

$$\mu_1 = \frac{1}{N}\Big[\delta_{x_0} + \cdots + \delta_{x_{N-1}}\Big], \quad \mu_0 = \frac{1}{N}\Big[\delta_{y_0} + \cdots + \delta_{y_{N-1}}\Big].$$

Démonstration. — Observons en premier lieu que

$$\partial_0(\operatorname{supp}\mu_1) = \partial_1(\operatorname{supp}\mu_1) = \operatorname{supp}\mu_0\,. \tag{4.1}$$

Soit $\mathcal{E}_0$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes $\operatorname{supp}\mu_0 \to \mathbb{R}$ modulo les fonctions constantes, et $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes $\operatorname{supp}\mu_1 \to \mathbb{R}$ de moyenne nulle pour μ_1. Sur ces deux espaces, la fonctionnelle $f \mapsto \operatorname{lip}(f)$ est une norme, qui en fait des espaces de Banach. Entre ces deux espaces, l'opérateur de cobord

$$\begin{aligned} d : \mathcal{E}_0 &\longrightarrow \quad \mathcal{E}_1 \\ f &\longmapsto f\partial_1 - f\partial_0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

est bien défini, linéaire, et continu (car ∂_0, ∂_1 sont lipschitziennes). Par hypothèse, il est surjectif, et donc ouvert, d'après un théorème classique d'analyse fonctionnelle. Autrement dit, il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que pour tout $f_1 \in \mathcal{E}_1$, il existe $f_0 \in \mathcal{E}_0$ tel que $d(f_0) = f_1$ et $\operatorname{lip}(f_0) \leqslant C \operatorname{lip}(f_1)$.

Remarquons maintenant qu'on peut trouver une suite $u_0, u_1, u_2 \ldots$ de points de $\operatorname{supp} \mu_0$, et une suite $v_0, v_1, v_2 \ldots$ de points de $\operatorname{supp} \mu_1$, vérifiant $\partial_0 v_i = u_i$ et $\partial_1 v_i = u_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. De telles suites se construisent facilement par récurrence, grâce à la propriété (4.1), à partir d'un point quelconque $u_0 \in \operatorname{supp} \mu_0$.

Soit $f_1 : \operatorname{supp} \mu_1 \to \mathbb{R}$ une quelconque fonction lipschitzienne de moyenne nulle pour μ_1. Comme on a vu plus haut, il existe $f_0 : \operatorname{supp} \mu_0 \to \mathbb{R}$ telle que $\operatorname{lip}(f_0) \leqslant C \operatorname{lip}(f_1)$, et $f_1 = f_0 \partial_1 - f_0 \partial_0$. On a en particulier $f_1(v_i) = f_0(u_{i+1}) - f_0(u_i)$ pour tout i, et

$$\begin{aligned} f_1(v_i) + \cdots + f_1(v_{i+n-1}) = f_0(u_{i+n}) - f_0(u_i) &\leqslant \operatorname{lip}(f_0) \cdot d(u_i, u_{i+n}) \\ &\leqslant C \operatorname{lip}(f_1) \cdot d(\partial_0 v_i, \partial_0 v_{i+n}) \\ &\leqslant C \operatorname{lip}(f_1) \operatorname{lip}(\partial_0) \cdot d(v_i, v_{i+n}) \end{aligned}$$

pour tous $i \geqslant 0, n > 0$.

Si f_1 n'est plus supposée de moyenne nulle, l'inégalité précédente s'applique à $f_1 - \langle f_1, \mu_1 \rangle$ au lieu de f_1, et on obtient l'inégalité

$$f_1(v_i) + \cdots + f_1(v_{i+n-1}) - n\langle f_1, \mu_1 \rangle \leqslant C' \operatorname{lip}(f_1) \cdot d(v_i, v_{i+n})$$

où on a posé $C' = C \operatorname{lip}(\partial_0)$. Autrement dit,

$$\left\langle f_1, \frac{\delta_{v_i} + \cdots + \delta_{v_{i+n-1}}}{n} \right\rangle - \langle f_1, \mu_1 \rangle \leqslant \frac{C'}{n} \operatorname{lip}(f_1) \cdot d(v_i, v_{i+n}).$$

En prenant le supremum sur toutes les fonctions 1-lipschitziennes, il vient

$$d_{\mathrm{w}} \left[\frac{\delta_{v_i} + \cdots + \delta_{v_{i+n-1}}}{n}, \mu_1 \right] \leqslant \frac{C'}{n} d(v_i, v_{i+n})$$

pour tous $i \geqslant 0, n > 0$. En particulier, pour $n > 24C'$,

$$d_{\mathrm{w}} \left[\frac{\delta_{v_i} + \cdots + \delta_{v_{i+n-1}}}{n}, \mu_1 \right] \leqslant \frac{1}{24} d(v_i, v_{i+n}).$$

On peut alors appliquer la proposition 2.1, qui affirme l'existence d'un entier $N \geqslant 1$ et de N points distincts $x_0, \ldots, x_{N-1}$ dans $\operatorname{supp} \mu_1$, tels que

$$\mu_1 = \frac{1}{N} \Big[\delta_{x_0} + \cdots + \delta_{x_{N-1}} \Big].$$

Il reste à vérifier que les fonctions $\partial_0, \partial_1 : \operatorname{supp} \mu_1 \to \operatorname{supp} \mu_0$ sont bijectives, et que $\partial_1 \partial_0^{-1}$ est une permutation circulaire de $\operatorname{supp} \mu_0$.

On sait déjà que $\operatorname{card}(\operatorname{supp} \mu_0) \leqslant \operatorname{card}(\operatorname{supp} \mu_1) < \infty$. Comme $\dim \mathcal{E}_0 = \operatorname{card}(\operatorname{supp} \mu_0) - 1$ et $\dim \mathcal{E}_1 = \operatorname{card}(\operatorname{supp} \mu_1) - 1$, cela entraîne $\dim \mathcal{E}_0 \leqslant \dim \mathcal{E}_1 < \infty$. Mais d'autre part $d : \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_1$ est surjectif, d'où $\dim \mathcal{E}_0 \geqslant \dim \mathcal{E}_1$. Il en résulte que $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_1$ ont même dimension — ce qui revient à dire que $\operatorname{supp} \mu_0$

et $\operatorname{supp}\mu_1$ ont même cardinal, ou que les fonctions $\partial_0, \partial_1 : \operatorname{supp}\mu_1 \to \operatorname{supp}\mu_0$ sont bijectives — et que $d : \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_1$ est un isomorphisme.

En particulier, il est injectif, c'est-à-dire que les seules fonctions f : $\operatorname{supp}\mu_0 \to \mathbb{R}$ de cobord nul (sur $\operatorname{supp}\mu_1$) sont les constantes. Mais

$$df = 0 \iff f\partial_1 = f\partial_0 \iff f \circ \partial_1\partial_0^{-1} = f$$

c'est-à-dire qu'une fonction est de cobord nul si et seulement si elle est constante sur chaque orbite de $\partial_1\partial_0^{-1}$ (sur $\operatorname{supp}\mu_0$). Il en résulte que $\partial_1\partial_0^{-1}$, comme permutation de $\operatorname{supp}\mu_0$, n'a qu'une seule orbite. □

5. Verrouillage des mesures minimisantes

Il reste maintenant à expliquer pourquoi le théorème 4.1 entraîne que les orbites périodiques sont les seules mesures invariantes à pouvoir être minimisantes pour un ouvert non vide de fonctions.

Comme dans les énoncés précédents, je me placerai dans la situation d'un système « amphidynamique », c.à.d. deux espaces métriques compacts X_0, X_1 et deux fonctions continues (lipschitziennes) $\partial_0, \partial_1 : X_1 \to X_0$. Ceci inclut en particulier les systèmes dynamiques topologiques, en prenant $X_0 = X_1$ et $\partial_0 = \mathrm{Id}$. Un autre cas particulier intéressant est celui où $X_1 = X_0^2$ et $\partial_0, \partial_1 : X_0^2 \to X_0$ sont les projections canoniques [7].

Dans un système amphidynamique, le rôle des mesures invariantes est joué par les mesures « équiprojectives », c.à.d. les mesures de probabilité μ_1 sur X_1 telles que $\partial_0\mu_1 = \partial_1\mu_1$. Il peut n'en exister aucune, même si X_1 est non vide.

Pour toute fonction continue $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$, définissons $\inf\operatorname{erg} f_1$ comme la borne inférieure des $\langle f_1, \mu_1\rangle$ quand μ_1 décrit l'ensemble des mesures de probabilité équiprojectives sur X_1. Cette expression peut valoir $+\infty$, s'il n'existe aucune probabilité équiprojective ; sinon, la borne inférieure est atteinte, et $\inf\operatorname{erg} f_1$ est un nombre réel. On appellera *minimisantes* les mesures μ_1 qui réalisent le minimum de $\langle f_1, \mu_1\rangle$. Notons qu'on a toujours $\inf\operatorname{erg} f_1 \geqslant \inf f_1$ et $\inf\operatorname{erg} f_1 = \inf\operatorname{erg}(f_1 + df_0)$, pour toute fonction continue $f_0 : X_0 \to \mathbb{R}$, où comme précédemment $d : C(X_0) \to C(X_1)$ est l'opérateur de cobord, défini par $d(f_0) = f_0\partial_1 - f_0\partial_0$.

Etant donné une mesure de probabilité équiprojective μ_1 sur X_1, on aimerait savoir si

$$\bigl\{f_1 \in \operatorname{Lip}(X_1) : \mu_1 \text{ est } f_1\text{-minimisante}\bigr\},$$

qui est un cône convexe fermé dans $\operatorname{Lip}(X_1)$, est d'intérieur non vide en topologie de Lipschitz (ou, ce qui revient au même, est l'adhérence de son intérieur).

De façon générale, on a le résultat suivant.

Proposition 5.1. — *Soient X_0, X_1 deux espaces métriques compacts et $\partial_0, \partial_1 : X_1 \to X_0$ deux fonctions lipschitziennes. Soit $N \geqslant 1$ un entier, $x_0, \dots, x_{N-1}$ des points distincts de X_1 et $y_0, \dots, y_{N-1}$ des points distincts de X_0, vérifiant $\partial_1 x_{i-1} = y_i = \partial_0 x_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, et posons*

$$\mu_1 = \frac{1}{N}\Big[\delta_{x_0} + \cdots + \delta_{x_{N-1}}\Big], \quad \mu_0 = \frac{1}{N}\Big[\delta_{y_0} + \cdots + \delta_{y_{N-1}}\Big],$$

si bien que $\partial_0\mu_1 = \partial_1\mu_1 = \mu_0$. Soit $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ la fonction 1-lipschitzienne définie par

$$f_1(x) = d(x, \operatorname{supp}\mu_1) = \operatorname*{Inf}_{i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} d(x, x_i).$$

Il existe alors un réel $\eta > 0$ tel que μ_1 soit minimisante pour toute fonction $g_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ vérifiant $\operatorname{lip}(g_1 - f_1) \leqslant \eta$.

Démonstration. — L'opérateur de cobord restreint (4.2) est, dans la situation présente, un isomorphisme d'espaces de Banach. En particulier, son inverse est borné, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\alpha \geqslant 0$ telle que, pour toute fonction $h_1 : \operatorname{supp}\mu_1 \to \mathbb{R}$ de μ_1-moyenne nulle, il existe $h_0 : \operatorname{supp}\mu_0 \to \mathbb{R}$ telle que $dh_0 = h_1$ et $\operatorname{lip}(h_0) \leqslant \alpha \operatorname{lip}(h_1)$.

On a évidemment $\inf \operatorname{erg} f_1 = \langle f_1, \mu_1\rangle = 0$, et on peut supposer $\langle g_1, \mu_1\rangle = 0$ sans perte de généralité. La fonction $h_1 = g_1 - f_1$ est de μ_1-moyenne nulle, et d'après ce qui vient d'être dit, on peut trouver une fonction $h_0 : \operatorname{supp}\mu_0 \to \mathbb{R}$ vérifiant $\operatorname{lip}(h_0) \leqslant \alpha \operatorname{lip}(h_1)$ et $h_0\partial_1 - h_0\partial_0 = h_1$ sur $\operatorname{supp}\mu_1$. Comme il est bien connu, on peut étendre h_0 en une fonction sur X_0 sans augmenter sa constante de Lipschitz. Pour un tel prolongement, dh_0 est partout définie sur X_1, et coïncide avec h_1 sur $\operatorname{supp}\mu_1$. En outre,

$$\begin{aligned}\operatorname{lip}(dh_0 - h_1) &\leqslant \operatorname{lip}(h_1) + \operatorname{lip}(h_0\partial_1) + \operatorname{lip}(h_0\partial_0)\\ &\leqslant \operatorname{lip}(h_1) + (\operatorname{lip}\partial_0 + \operatorname{lip}\partial_1)\operatorname{lip}(h_0)\\ &\leqslant \big(1 + \alpha(\operatorname{lip}\partial_0 + \operatorname{lip}\partial_1)\big)\operatorname{lip}(h_1)\end{aligned}$$

et par conséquent, pour tout $x \in X_1$,

$$\begin{aligned}(dh_0 - h_1)(x) &\leqslant \operatorname{lip}(dh_0 - h_1)\, d(x, \operatorname{supp}\mu_1)\\ &\leqslant \operatorname{lip}(h_1)/\eta \cdot f_1(x)\end{aligned}$$

où on a posé $\eta = \big(1 + \alpha(\operatorname{lip}\partial_0 + \operatorname{lip}\partial_1)\big)^{-1}$; et donc

$$\begin{aligned}g_1 - dh_0 &= f_1 - (dh_0 - h_1)\\ &\geqslant \big(1 - \operatorname{lip}(h_1)/\eta\big) \cdot f_1(x)\\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

pourvu que $\operatorname{lip}(h_1) \leqslant \eta$. Dans ce cas, on a

$$\inf \operatorname{erg} g_1 = \inf \operatorname{erg}(g_1 - dh_0) \geqslant \inf(g_1 - dh_0) \geqslant 0 = \langle g_1, \mu_1\rangle$$

ce qui montre que μ_1 est minimisante pour g_1, et ceci est valable pour toute fonction $g_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{lip}(g_1 - f_1) \leqslant \eta$. $\square$

Le précédent résultat admet une réciproque (partielle).

PROPOSITION 5.2. — *Soient X_0, X_1 deux espaces métriques compacts et $\partial_0, \partial_1 : X_1 \to X_0$ deux fonctions lipschitziennes. On suppose qu'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que, pour toute fonction lipschitzienne $h_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ vérifiant $\inf \mathrm{erg}\, h_1 \geqslant 0$, il existe $h_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ telle que $h_1 \geqslant dh_0$ et $\mathrm{lip}(h_0) \leqslant C \,\mathrm{lip}(h_1)$.*

On suppose également qu'il existe μ_0, μ_1 mesures de probabilité sur X_0, X_1 respectivement, telles que $\partial_0\mu_1 = \partial_1\mu_1 = \mu_0$, une fonction 1-lipschitzienne $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ et un réel $\eta > 0$, tels que μ_1 soit minimisante pour toute fonction $g_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ vérifiant $\mathrm{lip}(g_1 - f_1) \leqslant \eta$.

Il existe alors $N \geqslant 1$ entier, $x_0, \dots, x_{N-1}$ points distincts de X_1 et $y_0, \dots, y_{N-1}$ points distincts de X_0, vérifiant $\partial_1 x_{i-1} = y_i = \partial_0 x_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ et

$$\mu_1 = \frac{1}{N}\Big[\delta_{x_0} + \cdots + \delta_{x_{N-1}}\Big], \quad \mu_0 = \frac{1}{N}\Big[\delta_{y_0} + \cdots + \delta_{y_{N-1}}\Big].$$

De surcroît, on a l'inégalité

$$N < 6CL\,(1 + \eta^{-1}) \tag{5.1}$$

où $L = \min(\mathrm{lip}\,\partial_0, \mathrm{lip}\,\partial_1)$, sauf peut-être si $N = 1$.

Démonstration. — On peut supposer $\inf \mathrm{erg}\, f_1 = \langle f_1, \mu_1 \rangle = 0$.

Soit $h_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ une fonction η-lipschitzienne, de moyenne nulle pour μ_1. Par hypothèse, μ_1 est minimisante pour $f_1 + h_1$, i.e.

$$\inf \mathrm{erg}(f_1 + h_1) = \langle f_1 + h_1, \mu_1 \rangle = 0,$$

et il existe donc, d'après l'autre hypothèse, une fonction $h_0^+ : X_0 \to \mathbb{R}$ telle que $dh_0^+ \leqslant f_1 + h_1$ et $\mathrm{lip}(h_0^+) \leqslant C \,\mathrm{lip}(f_1 + h_1) \leqslant C(1 + \eta)$. Comme dh_0^+ et $f_1 + h_1$ ont même moyenne par μ_1 (à savoir zéro), cela entraîne $dh_0^+ = f_1 + h_1$ sur $\mathrm{supp}\,\mu_1$.

Le même argument appliqué à la fonction $f_1 - h_1$ montre qu'il existe une fonction $h_0^- : X_0 \to \mathbb{R}$ vérifiant $\mathrm{lip}(h_0^-) \leqslant C(1 + \eta)$ et $dh_0^- = f_1 - h_1$ sur $\mathrm{supp}\,\mu_1$. Il en résulte que

$$dh_0 = h_1 \text{ sur } \mathrm{supp}\,\mu_1, \tag{5.2}$$

où on a posé $h_0 = (h_0^+ - h_0^-)/2$. Notons que $\mathrm{lip}(h_0) \leqslant C(1 + \eta)$.

Ainsi, toute fonction lipschitzienne h_1 de μ_1-moyenne nulle coïncide sur $\mathrm{supp}\,\mu_1$ avec un cobord de fonction lipschitzienne, à condition que $\mathrm{lip}(h_1)$ soit suffisamment petit ; mais cette condition est évidemment inessentielle, vu le caractère linéaire de l'équation cohomologique.

L'hypothèse du théorème 4.1 est donc satisfaite (à savoir, la surjectivité de l'opérateur (4.2)) et, en vertu de ce théorème, les mesures μ_0, μ_1 ont bien la forme annoncée.

Il reste à démontrer l'inégalité (5.1), quand $N \geqslant 2$. Notons en premier lieu que, sous cette hypothèse, les fonctions ∂_0, ∂_1 sont non constantes, même restreintes à $\operatorname{supp} \mu_1$, et donc $L > 0$.

Nous appliquerons la proposition 3.1 avec $X = \operatorname{supp} \mu_0 = \{y_i : i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\}$, muni de la permutation T définie par $T : y_i \mapsto y_{i+1}$. Elle affirme l'existence d'une fonction $p_0 : \operatorname{supp} \mu_0 \to \mathbb{R}$, avec $\operatorname{lip}(p_0) > N/6$ et $\operatorname{lip}(p_0 T - p_0) \leqslant 1$, $\operatorname{lip}(p_0 - p_0 T^{-1}) \leqslant 1$. Soit $p_1 : \operatorname{supp} \mu_1 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $p_1 = dp_0 = p_0\partial_1 - p_0\partial_0$. Des égalités $p_1 = (p_0 T - p_0)\partial_0 = (p_0 - p_0 T^{-1})\partial_1$ il résulte que $\operatorname{lip}(p_1)$ est borné à la fois par $\operatorname{lip}(\partial_0)$ et $\operatorname{lip}(\partial_1)$, c'est-à-dire que p_1 est L-lipschitzienne.

Prenons maintenant pour $h_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ une fonction η-lipschitzienne qui coïncide avec $\eta L^{-1} p_1$ sur $\operatorname{supp} \mu_1$. La fonction h_0, qui satisfait (5.2), doit coïncider avec $\eta L^{-1} p_0$ sur $\operatorname{supp} \mu_0$, à une constante additive près. Et donc

$$C(1+\eta) \geqslant \operatorname{lip}(h_0) \geqslant \frac{\eta}{L} \operatorname{lip}(p_0) > \frac{\eta}{L} \cdot \frac{N}{6}$$

ce qui donne bien (5.1). □

L'hypothèse importante, dans la proposition ci-dessus, est l'hypothèse de Mañé-Conze-Guivarc'h : il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que, pour toute fonction lipschitzienne h_1 vérifiant $\inf \operatorname{erg} h_1 \geqslant 0$, il existe h_0 telle que $h_1 \geqslant dh_0$ et $\operatorname{lip}(h_0) \leqslant C \operatorname{lip}(h_1)$. Pour les systèmes dynamiques dilatants, ainsi que pour les systèmes amphidynamiques de la forme $\pi_0, \pi_1 : X_0^2 \to X_0$, c'est un fait bien connu [7, 6, 11, 2, 3, 5]. Pour les systèmes dynamiques hyperboliques, cette propriété est également satisfaite, et j'en donnerai une preuve dans un article à venir. Pour l'heure, l'article [8] donne un résultat plus faible, malheureusement trop faible pour s'appliquer au problème de Yuan & Hunt.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. D. Barbour, L. Holst & S. Janson – *Poisson approximation*, Oxford Studies in Probability, vol. 2, The Clarendon Press Oxford University Press, 1992, Oxford Science Publications.

[2] T. Bousch – « Le poisson n'a pas d'arêtes », *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **36** (2000), p. 489–508.

[3] ———, « La condition de Walters », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **34** (2001), p. 287–311.

[4] T. Bousch & J. Mairesse – « Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture », *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), p. 77–111.

[5] G. Contreras, A. O. Lopes & P. Thieullen – « Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **21** (2001), p. 1379–1409.

[6] J.-P. Conze & Y. Guivarc'h – « Croissance des sommes ergodiques et principe variationnel », manuscrit, 1993.

[7] A. Leizarowitz – « Infinite horizon autonomous systems with unbounded cost », *Appl. Math. Optim.* **13** (1985), p. 19–43.

[8] A. O. Lopes & P. Thieullen – « Sub-actions for Anosov diffeomorphisms », *Astérisque* **287** (2003), p. 135–146, Geometric methods in dynamics. II.

[9] S. T. Rachev – *Probability metrics and the stability of stochastic models*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Applied Probability and Statistics, John Wiley & Sons Ltd., 1991.

[10] L. Rüschendorf – *Wasserstein-metric*, Encyclopaedia of Mathematics, Supplement I, II, III, Kluwer Academic Publishers, 1998, http://www.stochastik.uni-freiburg.de/~rueschendorf/papers/wasserstein.pdf.

[11] S. V. Savchenko – « Homological inequalities for finite topological Markov chains », *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **33** (1999), p. 91–93.

[12] G. Yuan & B. R. Hunt – « Optimal orbits of hyperbolic systems », *Nonlinearity* **12** (1999), p. 1207–1224.