SOMMAIRE DU N^{o} 119

Éditorial

Chers lecteurs,

Tout d'abord nous vous souhaitons à tous, au nom de l'ensemble du comité de rédaction de la Gazette *(qui accueille un nouveau rédacteur, Fabrice Planchon), une excellente année 2009.*

Cette année qui s'ouvre va être pour beaucoup d'entre nous une année de grand changement dans notre activité de chercheur ou d'enseignant. La « mastérisation » de la formation des futurs enseignants occupe déjà tous les esprits, et les propositions de réforme des lycées vont avoir des conséquences non négligeables sur nos filières et nos futurs étudiants.

Il nous a paru nécessaire d'aborder ces sujets dans ce numéro de la Gazette, *sujets qui font l'objet de vifs débats et de protestations que la SMF relaie régulièrement. Nous ouvrons nos colonnes à ces débats, et continuerons à le faire dans l'avenir, tant les questions abordées dans les trois contributions sur l'enseignement contenues dans ce numéro sont fondamentales.*

À l'aube de tant de bouleversements, il nous a semblé important de rendre hommage aux lauréats des prix remis par l'EMS (hommage qui se poursuivra dans le prochain numéro). Nos collègues récompensés montrent à quel point notre discipline est reconnue et féconde. Nos gouvernants ne doivent pas l'oublier, surtout lorsque les contraintes budgétaires semblent commander l'action.

Bonne lecture à tous.

— Zindine Djadli, Frédéric Patras

SMF

Mot du Président

Chers amis, chères amies,

Les semaines à venir vont voir l'aboutissement de réformes qui auront de profondes répercussions pour nous : celle des lycées, de la mastérisation des concours d'enseignants, du CNRS et du statut des enseignants-chercheurs. La SMF s'est mobilisée sur ces dossiers :

Les sociétés de Mathématiques ont rencontré en octobre J.-P. de Gaudemar, qui est en charge de la réforme du Lycée ; nous lui avons fait part de nos inquiétudes. Celles-ci ne sont pas complètement levées même si le report de cette réforme est un signal encourageant ; nous craignons notamment beaucoup le principe du tronc commun qui conduirait à enseigner le même programme à tous.

La SMF a été à l'origine d'une pétition demandant un moratoire sur la mastérisation des concours d'enseignants. À l'heure ou j'écris ces lignes, elle a obtenu près de 2400 signataires. Je vous remercie d'avoir été si nombreux à répondre à notre appel ! Elle va être envoyée aux deux ministères (recherche et enseignement) ainsi qu'à la CPU. Nous demandons des rendez-vous pour pouvoir transmettre une liste de questions de fond que pose cette réforme ; cette liste a été mise au point par notre commission enseignement et vous la trouverez sur notre site. Il est important d'en prendre connaissance, notamment avant toute discussion au sein de vos établissements concernant la mise au point d'éventuels programmes de master enseignement.

Les sociétés savantes de Mathématiques ont placé sur le site web du CNRS une lettre esquissant un projet pour le nouvel institut de mathématiques du CNRS, et le rôle qu'il devrait jouer. Il est fondamental pour nous que la recherche mathématique puisse s'appuyer simultanément et pleinement sur les établissements et le CNRS, et que l'engagement de celui-ci, notamment en mathématiques, s'accroisse. En particulier, nous sommes très inquiets de l'avenir des ingénieurs de recherche et du personnel administratif dépendant du CNRS. Les mathématiques ont un fonctionnement atypique au sein du CNRS, mais le succès de notre domaine montre que ce fonctionnement ne doit pas être « normalisé » mais plutôt encouragé et pris en exemple. D'autres signes sont inquiétants : réduction du nombre de CR du CNRS au profit de chaires fléchées sur certains établissements et, en ce qui concerne le projet de statut des enseignants-chercheurs, les questions liées à l'évaluation individuelle des chercheurs (indispensable pour le système des primes et décharges censé être mis en place par les universités), et au rôle futur du CNU dans ce contexte, l'absence de garde-fou pour empêcher une dérive du nombre d'heures d'enseignement moyen dans chaque établissement, etc. Enfin, les actions au service de la communauté doivent être prises en compte dans les services.

Sur tous ces dossiers, nous continuerons à agir en concertation pour défendre au mieux les mathématiciens, et la place de notre discipline.

Lors de mon dernier mot du président, je vous avais parlé de notre nouvelle initiative concernant les conférences tournées vers les élèves de classes préparatoires et de L. La première, brillamment inaugurée par Wendelin Werner, a été un tel succès que les deux amphis de l'IHP ont été nécessaires ! Nous poursuivons bien sûr cette initiative, avec Alain Aspect comme prochain conférencier.

Je vous souhaite une très bonne année !

Le 1er janvier 2009
Stéphane Jaffard

MATHÉMATIQUES

Quelques aspects combinatoires de la renormalisation

Dominique Manchon[1]

J'ai le plaisir de remercier ici Kurusch Ebrahimi-Fard, Li Guo, Frédéric Patras et Sylvie Paycha pour de fructueuses collaborations sur le thème de la renormalisation. Merci à Frédéric également pour sa relecture attentive du texte.

1. La renormalisation

Dans un système physique en interaction, il est crucial de distinguer entre les paramètres effectivement mesurés et les paramètres *nus*, c'est-à-dire la valeur que ceux-ci prendraient en l'absence de toute interaction avec l'environnement. Le terme de renormalisation désigne tout procédé qui permet de passer des paramètres nus aux paramètres effectivement observés, qui sont alors dits *renormalisés*. L'exemple d'un ballon sphérique en mouvement dans un fluide (par exemple l'air), donné par G. Green dès 1836, permet d'en donner une idée ([23], voir aussi [8] et [10]) : à vitesse proche de zéro (ce qui permet de négliger les forces de frottement), tout se passe comme si la masse m_0 du ballon était augmentée de $\frac{M}{2}$, où M est la masse du volume de fluide occupé par celui-ci. La force totale $F = mg$ agissant sur le ballon (avec $m = m_0 + \frac{M}{2}$) se répartit entre la force de gravité $F_0 = m_0 g_0$ et la poussée d'Archimède $-Mg_0$, où $g_0 \simeq 9,81\ m.s^{-2}$ est l'intensité de la gravitation à la surface de la Terre. Les paramètres nus sont donc la masse m_0, la force de gravité F_0 et l'accélération g_0, alors que les paramètres renormalisés sont :

$$m = m_0 + \frac{M}{2}, \qquad F = (1 - \frac{M}{m_0})F_0, \qquad g = \frac{m_0 - M}{m_0 + \frac{M}{2}} g_0. \tag{1}$$

On remarque donc que l'accélération initiale g décroît de g_0 à $-2g_0$ lorsque l'interaction, représentée par la masse de fluide M, croît de 0 à $+\infty$. En théorie quantique des champs, même dans son approche perturbative, une difficulté supplémentaire

[1] Université Blaise Pascal, C.N.R.S.-UMR 6620, 63177 Aubière, France.

apparaît : les paramètres nus sont en général infinis ! Ils sont typiquement donnés par des intégrales divergentes[2] comme par exemple :

$$\int_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{1+\|p\|^2}\,dp. \tag{2}$$

L'apparition de ces quantités infinies manifeste l'impossibilité d'annuler les interactions autrement que par la pensée en théorie quantique des champs[3]. On doit donc soustraire une autre quantité infinie au paramètre nu pour retrouver le paramètre renormalisé qui est une quantité finie, puisqu'il peut être observé. Dans bon nombre de cas ce procédé se décompose en deux étapes :

(1) la *régularisation*, qui remplace le paramètre nu infini par une fonction d'une variable auxiliaire z qui tend vers l'infini lorsque z tend vers un certain z_0 ;

(2) la renormalisation elle-même, de nature purement combinatoire, qui, pour les théories *renormalisables*, permet d'extraire de la fonction ci-dessus une certaine partie finie lorsque z tend vers z_0.

Parmi les nombreuses possibilités de régularisation, citons la régularisation par troncature, qui revient à considérer des intégrales comme (2) sur une boule de rayon z (avec $z_0 = +\infty$), et la régularisation dimensionnelle ([27], [6]), qui revient à « intégrer sur un espace de dimension complexe z », où z_0 est la dimension spatiale d (par exemple $d = 4$ pour l'espace-temps de Minkowski)[4]. Dans ce cas la fonction qui apparaît est méromorphe en z avec un pôle en z_0.

La renormalisation est donnée par l'algorithme combinatoire dit BPHZ (d'après N. Bogoliubov, O. Parasiuk, K. Hepp et W. Zimmermann, [4], [25], [38]). Les objets combinatoires qui interviennent ici sont les *graphes de Feynman*, classés suivant leur nombre de boucles L. Les *règles de Feynman* associent à chaque graphe[5] une quantité à régulariser et renormaliser. Il faut commencer par choisir un *schéma de renormalisation*, qui consiste à choisir la partie finie pour les quantités « les plus simples », qui correspondent aux graphes à une seule boucle ($L = 1$). La renormalisation des autres quantités va alors s'effectuer par récurrence sur L. Lorsque les règles de Feynman régularisées fournissent des fonctions méromorphes d'une variable (ce qui est le cas pour la régularisation dimensionnelle, par exemple), on peut citer parmi les schémas de renormalisation le *schéma minimal*, qui consiste à prendre la valeur en z_0 de la fonction amputée de sa partie polaire.

---

[2] Plus précisément, les paramètres physiques sont donnés par une *série* en les constantes de couplage (qui représentent l'interaction), dont chaque terme est une intégrale divergente. Nous nous intéressons ici à la renormalisation de chacun de ces termes, sans aborder la question de la renormalisation de la série dans son ensemble.

[3] Contrairement au ballon ci-dessus, pour lequel on peut faire tendre l'interaction vers zéro en le faisant évoluer dans un vide quasi-parfait.

[4] Cet « espace de dimension z » a été récemment défini de manière rigoureuse à l'aide de triples spectraux et de facteurs de type II ([10] § 19.2).

[5] Avec une donnée supplémentaire : ses *moments extérieurs*.

2. Renormalisation et algèbres de Hopf graduées connexes

Soit k un corps de caractéristique zéro. Une *algèbre de Hopf graduée* sur k est un k-espace vectoriel gradué :

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{H}_n$$

muni d'un produit $m : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, un coproduit $\Delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, une unité $u : k \to \mathcal{H}$, une co-unité $\varepsilon : \mathcal{H} \to k$ et un antipode $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, le tout vérifiant les axiomes d'une algèbre de Hopf [35], et tel que :

$$\begin{aligned} m(\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_q) &\subset \mathcal{H}_{p+q}, \\ \Delta(\mathcal{H}_n) &\subset \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_q, \\ S(\mathcal{H}_n) &\subset \mathcal{H}_n. \end{aligned}$$

Une algèbre de Hopf graduée $\mathcal{H}$ sur k est dite *connexe* si sa partie homogène de degré zéro est de dimension un, c'est-à-dire réduite à $k.\mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ désigne l'unité. La donnée d'une telle algèbre de Hopf $\mathcal{H}$, lorsqu'elle est de plus *commutative*, équivaut à la donnée du schéma en groupes pro-nilpotents qui à toute algèbre commutative unitaire $\mathcal{A}$ associe le groupe $G_{\mathcal{A}}$ des caractères de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$. Le théorème de Cartier-Milnor-Moore permet de récupérer l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ comme le dual gradué de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_k)$ où $\mathfrak{g}_k$ est l'algèbre de Lie du groupe G_k, qui peut se voir comme l'ensemble des *caractères infinitésimaux* de $\mathcal{H}$ à valeurs dans k.

Les algèbres de Hopf graduées connexes (commutatives ou non) sont particulièrement bien adaptées aux raisonnements par récurrence sur le degré. Cela vient du fait que pour tout élément x homogène de degré n dans $\mathcal{H}$ on peut écrire en utilisant la notation de Sweedler :

$$\Delta x = x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x + \sum_{(x)} x' \otimes x'', \tag{3}$$

où les x' et x'' sont homogènes de degré compris entre 1 et $n-1$. En particulier l'antipode est « donné gratuitement » par l'une des deux formules de récurrence ci-dessous :

$$S(x) = -x - \sum_{(x)} S(x')x'', \tag{4}$$

$$S(x) = -x - \sum_{(x)} x'S(x''). \tag{5}$$

D. Kreimer a le premier observé que les graphes de Feynman d'une théorie quantique des champs donnée s'organisent en une algèbre de Hopf commutative graduée connexe [28]. Les règles de Feynman régularisées fournissent un caractère de cette algèbre de Hopf à valeurs dans une algèbre de fonctions, par exemple l'algèbre des fonctions méromorphes d'une variable complexe dans le cas de la régularisation dimensionnelle.

Nous pouvons maintenant expliquer comment renormaliser un caractère φ d'une algèbre de Hopf graduée connexe : il faut pour cela que φ soit à valeurs dans une algèbre commutative unitaire $\mathcal{A}$ munie d'un *schéma de renormalisation*, c'est-à-dire d'une décomposition :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_+ \tag{6}$$

où $\mathcal{A}_-$ et $\mathcal{A}_+$ sont deux sous-algèbres de $\mathcal{A}$, avec $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_+$. Le schéma minimal évoqué plus haut correspond au cas où $\mathcal{A}$ est l'algèbre (sur $k = \mathbb{C}$) des fonctions méromorphes d'une variable, $\mathcal{A}_+$ est la sous-algèbre des fonctions qui sont holomorphes en un z_0 fixé, et $\mathcal{A}_-$ est la sous-algèbre des polynômes en $(z - z_0)^{-1}$ sans terme constant. L'espace des applications linéaires de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{A}$ est muni du produit de convolution, donné par :

$$\varphi * \psi = m_{\mathcal{A}} \circ (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta. \tag{7}$$

Il est facile de vérifier que l'espace des caractères de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ est un groupe pour le produit de convolution[6]. L'élément neutre e est donné par $e(\mathbf{1}) = \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ et $e(x) = 0$ si x est homogène de degré ≥ 1. L'inverse est donné par la composition à droite avec l'antipode :

$$\varphi^{*-1} = \varphi \circ S. \tag{8}$$

Chaque caractère φ admet une unique *décomposition de Birkhoff* :

$$\varphi = \varphi_-^{*-1} * \varphi_+ \tag{9}$$

compatible avec le schéma de renormalisation choisi, c'est-à-dire telle que φ_+ prenne ses valeurs dans $\mathcal{A}_+$ et telle que $\varphi_-(x) \in \mathcal{A}_-$ pour tout x homogène de degré ≥ 1. Les composantes $\varphi_\pm$ sont données par des formules récursives assez simples : si on note π la projection sur $\mathcal{A}_-$ parallèlement à $\mathcal{A}_+$, et si on suppose que $\varphi_-(x)$ et $\varphi_+(x)$ sont connus pour x de degré $k \leq n-1$, on a alors pour tout $x \in \mathcal{H}_n$:

$$\varphi_-(x) = -\pi\left(\varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x)'\varphi(x'')\right), \tag{10}$$

$$\varphi_+(x) = (I - \pi)\left(\varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x)'\varphi(x'')\right). \tag{11}$$

On appelle φ_+ le caractère renormalisé et φ_- le caractère des contretermes. Le fait remarquable que les deux composantes φ_- et φ_+ soient encore des caractères de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ provient de la *propriété de Rota-Baxter* vérifiée par la projection π :

$$\pi(a)\pi(b) = \pi\big(\pi(a)b + a\pi(b) - ab\big). \tag{12}$$

---

[6] La commutativité de l'algèbre-cible $\mathcal{A}$ est ici nécessaire.

Définition 1. *Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf graduée connexe sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes, et soit φ un caractère de $\mathcal{H}$ à valeurs dans l'algèbre $\mathcal{A}$ des fonctions méromorphes, munie du schéma de renormalisation minimal en z_0. Alors le caractère à valeurs scalaires donné par $x \mapsto \varphi_+(x)(z_0)$ définit la* valeur renormalisée *du caractère φ en z_0.*

L'application linéaire $B(\varphi) : \mathcal{H} \to \mathcal{A}$ donnée par $B(\varphi)(\mathbf{1}) = 0$ et $B(\varphi)(x) = \varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'')$ est nommée *préparation de Bogoliubov* et s'écrit $B(\varphi) = \varphi_- * (\varphi - e)$. Les formules de récurrence (10) et (11) s'écrivent de manière plus compacte :

$$\begin{aligned} (13)\quad \varphi_- &= e + P(\varphi_- * \alpha) \\ &= e + P(\alpha) + P\big(P(\alpha) * \alpha\big) + \ldots + \underbrace{P\Big(P\big(\ldots P(}_{n \text{ fois}}\alpha) * \alpha\big) \ldots * \alpha\Big) + \ldots \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} (14)\quad \varphi_+ &= e + \tilde{P}(\varphi_+ * \beta) \\ &= e + \tilde{P}(\beta) + \tilde{P}\big(\tilde{P}(\beta) * \beta\big) + \ldots + \underbrace{\tilde{P}\Big(\tilde{P}\big(\ldots \tilde{P}(}_{n \text{ fois}}\beta) * \beta\big) \ldots * \beta\Big) + \ldots \end{aligned}$$

avec $\alpha := e - \varphi$, $\beta := e - \varphi^{-1}$, et où $\tilde{P}$ et P sont les projections sur $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ définies par $\tilde{P}(\alpha) = (I - \pi) \circ \alpha$ et $P(\alpha) = \pi \circ \alpha$, respectivement. A. Connes et D. Kreimer ont montré dans [8] que lorsque $\mathcal{H}$ est l'algèbre de Hopf des graphes de Feynman associés à une théorie des champs renormalisable, cette définition de la renormalisation coïncide avec l'algorithme BPHZ des physiciens (tel qu'il est exposé par exemple dans [6]).

3. Une application en théorie des nombres

Les fonctions zêta multiples :

$$\zeta(s_1, \ldots, s_k) := \sum_{0 < n_k < \cdots < n_1} \frac{1}{n_1^{s_1}} \cdots \frac{1}{n_k^{s_k}} \tag{15}$$

convergent si $\sum_{j=1}^{m} \operatorname{Re} s_j > m$ pour tout $m \in \{1, \ldots, k\}$ et admettent un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}^k$ en entier, avec des singularités en ([2]) :

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, \\ s_1 + s_2 &= 2, 1, 0, -2, -4, -6, \ldots, \\ s_1 + \cdots + s_j &\in \mathbb{Z} \cap]-\infty, j],\ j = 3, 4, \ldots, k. \end{aligned}$$

Les valeurs aux entiers strictement positifs (avec $s_1 \geq 2$) vérifient des relations algébriques, parmi lesquelles les relations de quasi-battage, dont la plus simple s'écrit :

$$\zeta(s_1)\,\zeta(s_2) = \zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_2, s_1) + \zeta(s_1 + s_2). \tag{16}$$

On peut régulariser les valeurs zêta multiples en tous les points $(s_1, \ldots, s_k)$ en en faisant un caractère d'une certaine *algèbre de Hopf de quasi-battages* [26] à valeurs dans les fonctions méromorphes d'une variable. La renormalisation de ce caractère permet alors de définir des valeurs zêta multiples renormalisées en tout $(s_1,\ldots,s_k)\in\mathbb{Z}^k$ qui vérifient encore les relations de quasi-battage. Ces valeurs ont de plus la propriété remarquable d'être rationnelles aux entiers négatifs ([32], voir aussi [24]).

4. Représentation matricielle

Soit J un co-idéal à gauche de l'algèbre de Hopf graduée connexe $\mathcal{H}$, c'est-à-dire un sous-espace de $\mathcal{H}$ tel que $\Delta(J)\subset\mathcal{H}\otimes J$. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une base de J on peut l'ordonner de manière à ce que la matrice M du coproduit (carrée de taille $|I|\times|I|$ à coefficients dans $\mathcal{H}$), définie par :

$$\Delta(x_i)=\sum_{j\in I}M_{ij}\otimes x_j \tag{17}$$

soit triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. Pour toute algèbre unitaire commutative $\mathcal{A}$ on définit alors $\Psi_J:\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{A})\to\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}\otimes J)$ par :

$$\Psi_J[f](x_j)=\sum_i f(M_{ij})\otimes x_i. \tag{18}$$

Cette application est un morphisme d'algèbres pour le produit de convolution sur $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{A})$ et le produit matriciel ([13]). Dans le cas où $\mathcal{A}$ est munie d'un schéma de renormalisation, la décomposition de Birkhoff d'un caractère φ à valeurs dans $\mathcal{A}$ fournit donc pour tout co-idéal à gauche J la décomposition de Birkhoff de l'endomorphisme $\widehat{\varphi}:=\Psi_J[\varphi]$, à savoir :

$$\widehat{\varphi}=\widehat{\varphi_-}^{-1}\widehat{\varphi_+}. \tag{19}$$

Il est particulièrement intéressant dans la pratique de prendre un co-idéal à gauche J de dimension finie, par exemple l'espace $J=\mathcal{H}^{(n)}$ engendré par les éléments homogènes de degré $\leq n$, ou encore le plus petit co-idéal à gauche contenant un élément donné.

5. L'opérateur de Dynkin

Une algèbre de Hopf graduée $\mathcal{H}$ admet une bidérivation naturelle Y définie par $Y(x)=nx$ pour $x\in\mathcal{H}_n$. L'application $\varphi\mapsto\varphi\circ Y$ est une dérivation de $\big(\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{A}),*\big)$. Lorsque le corps de base est $k=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ la bidérivation Y donne naissance au sous-groupe à un paramètre d'automorphismes de $\mathcal{H}$ donné par $\theta_t(x)=e^{nt}x$ pour $x\in\mathcal{H}_n$, et $\varphi\mapsto\varphi\circ\theta_t$ est un automorphisme de $\big(\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{A}),*\big)$ pour tout $t\in k$.

On appelle *opérateur de Dynkin* l'endomorphisme $D=S*Y$ de $\mathcal{H}$ (où S est l'antipode). On peut montrer que pour toute algèbre commutative unitaire $\mathcal{A}$ la correspondance $\varphi\mapsto\varphi\circ D$ induit une bijection Ξ du groupe des caractères $G_{\mathcal{A}}$ sur l'algèbre de Lie des caractères infinitésimaux $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}}$. Lorsque $k=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ l'inverse $\Xi^{-1}=\Gamma:\mathfrak{g}_{\mathcal{A}}\to G_{\mathcal{A}}$ est donné par la formule suivante ([12] § 8.2) :

$$\Gamma(\alpha)=e+\sum_{n\geq 1}\int_{0\leq v_n\leq\cdots\leq v_1\leq+\infty}(\alpha\circ\theta_{-v_1})*\cdots*(\alpha\circ\theta_{-v_n})\,dv_1\cdots dv_n. \tag{20}$$

En appliquant ceci à un élément x de $\mathcal{H}$ que l'on décompose suivant ses composantes homogènes x_k (on peut supposer $x_0 = 0$), et en utilisant l'égalité :

$$(21) \qquad \int_{0 \le v_l \le \ldots \le v_1 \le +\infty} e^{-k_1 v_1} \ldots e^{-k_l v_l}\, dv_1 \ldots dv_l = \frac{1}{k_1(k_1+k_2)\ldots(k_1+\ldots+k_l)},$$

on en déduit la formule explicite [12] :

$$(22) \qquad \Gamma(\alpha) = e + \sum_{n \ge 1} \sum_{k_1,\ldots,k_l \in \mathbb{N}^*,\ k_1+\cdots+k_l = n} \frac{\alpha_{k_1} * \cdots * \alpha_{k_l}}{k_1(k_1+k_2)\cdots(k_1+\cdots+k_l)},$$

avec $\alpha_k = \alpha \circ \pi_k$, où pour tout $k \ge 0$ on désigne par π_k la projection de $\mathcal{H}$ sur la composante $\mathcal{H}_k$ de degré k. Il est ensuite facile de voir que la même formule a lieu sur le corps des rationnels, puis sur tout corps k de caractéristique zéro. L'opérateur de Dynkin a été introduit et étudié dans le cadre général des algèbres de Hopf commutatives ou cocommutatives par F. Patras et Chr. Reutenauer ([33], voir aussi [12]). Bon nombre de ses propriétés, et notamment la formule explicite (22) ci-dessus, restent valables pour une algèbre de Hopf graduée connexe quelconque.

6. Le groupe de renormalisation et la fonction Bêta

On suppose ici que le corps de base est $k = \mathbb{C}$ et que l'algèbre $\mathcal{A}$ est l'algèbre des fonctions méromorphes à une variable, munie du schéma minimal. Nous allons, en utilisant la variable complexe z, considérer le sous-groupe à un paramètre d'automorphismes de l'algèbre $\big(\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{A}), *\big)$ donné par :

$$(23) \qquad \varphi^t(x)(z) := e^{tzn}\varphi(x)(z)$$

pour $x \in \mathcal{H}_n$. On note $G_{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}$ l'ensemble des caractères *locaux* de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments φ de $G_{\mathcal{A}}$ qui vérifient :

$$(24) \qquad \frac{d}{dt}(\varphi^t)_- = 0.$$

Les règles de Feynman régularisées dimensionnellement vérifient cette propriété : cela vient du fait que les contretermes ne dépendent pas du choix de la masse arbitraire μ que l'on doit introduire (la *masse de 'tHooft*) pour manipuler des quantités sans dimension ([9]). On note $G_{\mathcal{A}-}^{\mathrm{loc}}$ les éléments φ de $G_{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}$ tels que $\varphi_- = \varphi$. Pour tout $\varphi \in G_{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}$ on peut alors écrire $\varphi^t = \varphi * h_t$, où la famille (h_t) est telle que son terme constant $F_t : x \mapsto \lim_{z \to 0} h_t(x)(z)$ définit un sous-groupe à un paramètre de caractères scalaires de $\mathcal{H}$, le *groupe de renormalisation* du caractère local φ. On pose alors :

$$(25) \qquad \beta(\varphi)(x) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F_t(x).$$

La correspondance $z\Xi$ réalise une bijection de $G_{\mathcal{A}}^{\mathrm{loc}}$ sur $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}_+}$, ainsi que de $G_{\mathcal{A}-}^{\mathrm{loc}}$ sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ([9], [12]). Pour tout $\varphi \in G_{\mathcal{A}-}^{\mathrm{loc}}$, on a en fait :

$$(26) \qquad \beta(\varphi) = z\Xi(\varphi),$$

ce qui s'écrit aussi $\varphi = \Gamma\big(\frac{1}{z}\beta(\varphi)\big)$. En d'autres termes on peut retrouver explicitement, en utilisant l'inverse de la composition par l'opérateur de Dynkin, les contretermes d'un caractère local à partir de sa fonction β. La fonction β et le groupe de renormalisation peuvent aussi s'étudier dans la représentation matricielle définie plus haut ([15]).

7. Algèbres de Rota-Baxter et algèbres dendriformes

On s'intéresse aux équations (13) et (14) vérifiées respectivement par φ_- et φ_+, dans un cadre plus général. Une *algèbre de Rota-Baxter de poids* θ sur un corps k (avec $\theta \in k$) est une k-algèbre associative munie d'une application linéaire $R : A \to A$ vérifiant la relation de Rota-Baxter :

$$R(x)R(y) = R\big(R(x)y + xR(y) + \theta xy\big). \tag{27}$$

On introduit souvent l'opérateur $\tilde{R} := -\theta\,\mathrm{Id} - R$, qui est aussi un opérateur de Rota-Baxter de même poids. Les opérateurs P et $\tilde{P}$ du paragraphe précédent sont des opérateurs de Rota-Baxter de poids -1, qui ont de plus la particularité d'être idempotents. Un exemple d'algèbre de Rota-Baxter de poids $\theta = 0$ est donné par l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ muni de l'opérateur I donné par :

$$I(f)(t) := \int_0^t f(u)\,du. \tag{28}$$

La relation de Rota-Baxter (27) vérifiée par I (avec $\theta = 0$) est un avatar de l'intégration par parties. Les algèbres de Rota-Baxter rentrent dans le cadre plus général des *algèbres dendriformes* [29], qui sont les k-espaces vectoriels A munis de deux applications bilinéaires $\prec, \succ : A \times A \to A$ vérifiant les trois axiomes :

$$(a \prec b) \prec c = a \prec (b * c), \tag{29}$$
$$(a \succ b) \prec c = a \succ (b \prec c), \tag{30}$$
$$a \succ (b \succ c) = (a * b) \succ c, \tag{31}$$

avec $a * b := a \prec b + a \succ b$. On déduit facilement de ces axiomes l'associativité de la loi $*$. Les applications bilinéaires $\rhd$ et $\lhd$ définies par :

$$a \rhd b := a \succ b - b \prec a, \qquad a \lhd b := a \prec b - b \succ a \tag{32}$$

sont pré-Lie à gauche et pré-Lie à droite respectivement (voir [1] et [5]), c'est-à-dire que l'on a :

$$(a \rhd b) \rhd c - a \rhd (b \rhd c) = (b \rhd a) \rhd c - b \rhd (a \rhd c), \tag{33}$$
$$(a \lhd b) \lhd c - a \lhd (b \lhd c) = (a \lhd c) \lhd b - a \lhd (c \lhd b). \tag{34}$$

Le produit associatif $*$ et les produits pré-Lie $\rhd$, $\lhd$ définissent tous le même crochet de Lie :

$$[a, b] := a * b - b * a = a \rhd b - b \rhd a = a \lhd b - b \lhd a. \tag{35}$$

Toute algèbre de Rota-Baxter de poids θ est munie de deux structures d'algèbre dendriforme, données par :

$$a \prec b := aR(b) + \theta ab = -a\tilde{R}(b), \qquad a \succ b := R(a)b, \tag{36}$$
$$a \prec' b := aR(b), \qquad a \succ' b := R(a)b + \theta ab = -\tilde{R}(a)b. \tag{37}$$

Le produit associatif $*$ correspondant est donné par $a*b = aR(b)+R(a)b+\theta ab$ pour les deux structures[7]. Revenant à l'équation (13) que nous cherchons à généraliser, on cherche donc dans $A[[t]]$, où A est une algèbre de Rota-Baxter avec unité, les solutions des deux équations :

$$x = 1 + tR(ax), \qquad y = 1 - tR(ya). \tag{38}$$

Il est commode de rajouter une unité fictive $\mathbf{1}$ à l'algèbre dendriforme A, telle que $\mathbf{1} \succ a = a \prec \mathbf{1} = a$ pour tout $a \in A$ et $\mathbf{1} * \mathbf{1} = \mathbf{1}$. Les expressions $\mathbf{1} \prec \mathbf{1}$ et $\mathbf{1} \succ \mathbf{1}$ ne sont toutefois pas définies. On note $\overline{A} = A \oplus k\mathbf{1}$, et on prolonge l'opérateur R à $\overline{A}$ en posant $R(\mathbf{1}) = 1$. Si maintenant X et Y sont les solutions respectives dans $\overline{A}[[t]]$ des équations :

$$X = \mathbf{1} + ta \prec X, \qquad Y = \mathbf{1} - tY \succ a, \tag{39}$$

alors $x := R(X)$ et $y := R(Y)$ sont les solutions respectives dans $A[[t]]$ des deux équations (38). Les éléments X et Y ainsi définis ont des propriétés combinatoires très riches, parmi lesquelles j'en citerai deux :

(1) Pour tout $a \in A$ posons $\ell^{(1)}(a) = r^{(1)}(a) = a$, puis récursivement $\ell^{(n+1)}(a) = \big(\ell^{(n)}(a)\big) \rhd a$ et $r^{(n+1)}(a) = a \lhd \big(r^{(n)}(a)\big)$. On a alors ([16]) :

$$X = \mathbf{1} + \sum_{n\geq 1} t^n \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n \\ i_1,\ldots,i_k>0}} \frac{r^{(i_k)}(a) * \cdots * r^{(i_1)}(a)}{i_1(i_1+i_2)\cdots(i_1+\cdots+i_k)}, \tag{40}$$

$$Y = \mathbf{1} + \sum_{n\geq 1} (-1)^n t^n \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_k=n \\ i_1,\ldots,i_k>0}} \frac{\ell^{(i_1)}(a) * \cdots * \ell^{(i_k)}(a)}{i_1(i_1+i_2)\cdots(i_1+\cdots+i_k)}. \tag{41}$$

(2) (Développement de Magnus version pré-Lie, [18]) On a $X = \exp^*(\Omega')$ et $Y = \exp^*(-\Omega')$, où Ω' vérifie l'équation récursive :

$$\Omega' = \frac{L_\rhd[\Omega']}{\exp(L_\rhd[\Omega']) - 1}(ta) = \sum_{m\geq 0} \frac{B_m}{m!} L_\rhd[\Omega']^m(ta), \tag{42}$$

avec $L_\rhd[\Omega'] := \Omega' \rhd -$. Les B_m sont les nombres de Bernoulli. Les premiers termes du développement (42) s'écrivent :

$$\Omega' = ta - \frac{t^2}{2} a \rhd a + t^3 \left(\frac{1}{4}(a \rhd a) \rhd a + \frac{1}{12} a \rhd (a \rhd a) \right) + O(t^4). \tag{43}$$

Les solutions des équations (39) permettent à leur tour de résoudre des équations dendriformes d'ordre supérieur, comme par exemple ([17]) :

$$X = a + t(X \succ b + c \prec X), \tag{44}$$

[7] Une algèbre de Rota-Baxter de poids θ est en fait une algèbre *tri-dendriforme*, pour laquelle on dispose de trois applications bilinéaires $<, \diamond, >$ vérifiant sept axiomes. Les deux structures dendriformes sont obtenues via $\prec = < + \diamond$ et $\succ = >$ (resp. $\prec' = <$ et $\succ' = \diamond + \succ$) ([11]).

ou encore :

$$X = a_{00} + \sum_{q=1}^{m} t^q \big(...(X \succ a_{q1}) \succ a_{q2} \cdots \big) \succ a_{qq}. \tag{45}$$

Ce n'est pas un hasard si les formules (40) et (41) ont une forte ressemblance avec la formule (22) : cela vient du fait que l'algèbre dendriforme libre à un générateur a avec unité $\mathbf{1}$ est munie d'une structure naturelle d'algèbre de Hopf cocommutative graduée connexe, dans laquelle l'opérateur de Dynkin transforme $\big(...(a \succ a) \succ \ ... \big) \succ a$ (n termes) en $\ell^{(n)}(a)$ et $a \prec \big(a \prec \cdots (a \prec a)...\big)$ (n termes) en $r^{(n)}(a)$ ([19], [20]).

8. Conclusion

Les techniques de renormalisation en théorie des champs ont prouvé leur efficacité depuis plus d'un demi-siècle. Elles ont donné lieu à une formulation mathématique qui en retour s'applique à d'autres domaines comme la théorie des nombres. Les développements combinatoires que nous avons rapidement passés en revue concernent n'importe quel caractère de n'importe quelle algèbre de Hopf graduée connexe. De plus, hormis l'opérateur de Dynkin et le groupe de renormalisation, on peut généraliser ceci sans effort au cadre des algèbres de Hopf filtrées connexes. Il faut toutefois souligner que les règles de Feynman en théorie des champs ne constituent pas un caractère quelconque de l'algèbre de Hopf sous-jacente : d'autres propriétés, de nature géométrique et *motivique*, entrent en jeu (voir [10], [3]).

9. Références

[1] A.A. Agrachev and R.V. Gamkrelidze, *Chronological algebras and nonstationary vector fields*, J. Sov. Math 17 n° 1, 1650-1675 (1981).

[2] S. Akiyama, S. Egami, Y. Tanigawa, *Analytic continuation of multiple zeta functions and their values at non-positive integers*, Acta Arith. **98**, 107-116 (2001).

[3] P. Aluffi, M. Marcolli, *Algebro-geometric Feynman rules*, arxiv :0811.2514.

[4] N. N. Bogoliubov, O. S. Parasiuk, *On the multiplication of causal functions in the quantum theory of fields*, Acta Math. **97**, 227-266 (1957).

[5] F. Chapoton, M. Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, Int. Math. Res. Not. 2001, 395-408 (2001).

[6] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge monographs in math. physics, Cambridge (1984).

[7] A. Connes, D. Kreimer, *Hopf algebras, Renormalization and Noncommutative Geometry*, Comm. in Math. Phys. **199**, 20-242 (1998).

[8] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. I. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem*, Comm. Math. Phys. 210, n° 1, 249-273 (2000).

[9] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. II. The β-function, diffeomorphisms and the renormalization group*, Comm. Math. Phys. 216 , n° 1, 215-241 (2001).

[10] A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives*, Colloquium Publications, Amer. Math. Soc. (2007).

[11] K. Ebrahimi-Fard, *Loday-type algebras and the Rota-Baxter relation*, Lett. Math. phys. 61, 139-147 (2002).

[12] K. Ebrahimi-Fard, J. Gracia-Bondia, F. Patras, *A Lie theorietic approach to renormalization*, Comm. Math. Phys. Vol. 276 n° 2, 519-549 (2007).

[13] K. Ebrahimi-Fard, L. Guo, *Matrix representation of renormalization in perturbative quantum field theory*, arXiv :hep-th/0508155 (2005).
[14] K. Ebrahimi-Fard, L. Guo, D. Manchon, *Birkhoff type decompositions and the Baker-Campbell-Hausdorff recursion*, Comm. Math. Phys. **267**, 821-845 (2006).
[15] K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, *On matrix differential equations in the Hopf algebra of renormalization*, Adv. Theor. Math. Phys. vol. 10 No 6, 879-913 (2006).
[16] K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, *The combinatorics of Bogoliubov's recursion in renormalization*, CIRM 2006 workshop "Renormalization and Galois Theory", Org. F. Fauvet, J.-P. Ramis. arxiv :0710.3675.
[17] K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, *Dendriform equations*, prépublication arxiv :0805.0762.
[18] K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, *A Magnus- and Fer- type formula in dendriform algebras*, Found. Comput. Math. (paru en ligne, 2008).
[19] K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, F. Patras, *A noncommutative Bohnenblust-Spitzer identity for Rota-Baxter algebras solves Bogoliubov's recursion*, J. Noncomm. Geom. (à paraître). arXiv.0705.1265.
[20] K. Ebrahimi-Fard, D. Manchon, F. Patras, *New identities in dendriform algebras*, J. of Algebra 320, 708-727 (2008). arXiv :0705.2636 [math.CO].
[21] H. Figueroa, J.M. Gracia-Bondía, *Combinatorial Hopf algebras in Quantum Field Theory I*, Reviews of Mathematical Physics **17**, 881-976 (2005).
[22] L. Foissy, *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés I + II*, thèse, Univ. de Reims (2002), et Bull. Sci. Math. **126**, n° 3, 193–239 et n° 4, 24–288 (2002).
[23] G. Green, *Researches on the Vibrations of Pendulums in Fluid Media*, Royal Society of Edinburgh Transactions, 315-324 (1836).
[24] L. Guo and B. Zhang, *Renormalization of multiple zeta values*, arxiv :math.NT/0606076 (2006).
[25] K. Hepp, *Proof of the Bogoliubov-Parasiuk theorem on renormalization*, Comm. Math. Phys. **2**, 301-326 (1966).
[26] M. Hoffman, *Quasi-shuffle products*, J. Algebraic Combin. **11**, 49-68 (2000).
[27] G. 'tHooft, M. Veltman, *Regularization and renormalization of gauge fields*, Nucl. Phys. **B44** 189-213 (1972).
[28] D. Kreimer, *On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998).
[29] J-L. Loday, *Dialgebras*, Lect. Notes Math. 1763, Springer (Berlin), 7-66 (2001).
[30] D. Manchon, *Hopf algebras and renormalisation*, Handbook of algebra, Vol. 5 (M. Hazewinkel ed.), 365-427 (2008).
[31] D. Manchon, *Hopf algebras in renormalisation*, Encyclopædia of Mathematics (Ã paraître).
[32] D. Manchon, S. Paycha, *Nested sums of symbols and renormalised multiple zeta values*, article soumis.
[33] F. Patras, Chr. Reutenauer, *On Dynkin and Klyachko idempotents in graded bialgebras*, Adv. Appl. Math. **28**, 560-579 (2002).
[34] M. Sakakibara, *On the Differential equations of the characters for the Renormalization group*, Mod.Phys.Lett. A19, 1453-1456 (2004).
[35] M. E. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, New-York (1969).
[36] W. Van Suijlekom, *The Hopf algebra of Feynman graphs in quantum electrodynamics*, Lett. Math. Phys. **77**, 265-281 (2006).
[37] W. Van Suijlekom, *Renormalization of gauge fields : a Hopf algebra approach*, arXiv :hep-th/0610137 (2006).
[38] W. Zimmermann, *Convergence of Bogoliubov's method of renormalization in momentum space*, Comm. Math. Phys. **15**, 208-234 (1969).

Vibrations chaotiques et grosses balafres

Nalini Anantharaman, Stéphane Nonnenmacher[1]

1. Introduction

Quel lien existe-t-il entre un tremblement de terre, un tambour, une cavité mésoscopique bidimensionnelle, un four à micro-ondes, une fibre optique ? Les équations régissant la propagation des ondes (sismiques, acoustiques, électroniques, micro-ondes et optiques) sont linéaires ; les solutions de ces équations peuvent donc se décomposer comme sommes de modes propres de vibration (ou modes stationnaires). Le caractère discret, ou « quantique », de cette décomposition en modes propres est dû à la géométrie compacte des cavités. Mathématiquement, celles-ci sont modélisées par des variétés riemanniennes (X, g) compactes de dimension d, avec ou sans bord. Pour simplifier, on se restreindra à des ondes scalaires, décrites par une fonction réelle $\psi(x, t)$. Les modes propres $(\psi_n(x))_{n\geqslant 0}$ satisfont alors à l'équation de Helmholtz

$$\Delta\psi_n + k_n^2\,\psi_n = 0\,, \tag{1.1}$$

où $\Delta : H^2 \to L^2$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur X, et $k_n \geqslant 0$ est la fréquence de vibration du mode ψ_n. En présence d'un bord, comme pour le tambour ou les cavités électromagnétiques, un choix de conditions au bord est nécessaire : typiquement, des conditions de Dirichlet $\psi_{|\partial X} = 0$, ou de Neumann $\partial_\nu\psi_{|\partial X} = 0$, ∂_ν étant la dérivée normale au bord.

La question qui nous préoccupe est la *description* des modes propres, et en particulier les modes de haute fréquence $k_n \gg 1$. On voudrait prédire les propriétés de localisation des modes ψ_n, à partir de notre connaissance de la variété (X, g).

Prenons le cas d'un domaine du plan euclidien, qu'on appellera un *billard*. Pour certains billards de forme très spécifique (par ex. un rectangle, un disque, une ellipse), une séparation de variables permet de ramener l'équation de Helmholtz à un problème aux valeurs propres à une dimension (problème de Sturm-Liouville). Dans la limite de haute fréquence, on sait résoudre ce dernier avec une précision arbitraire (par des méthodes WKB[2]), ou parfois même exactement (v. fig.1.1). On a donc une compréhension (presque) totale des modes propres. Cette séparation de variables peut s'interpréter comme une symétrie de la *dynamique classique* dans ce billard, autrement dit la dynamique d'une boule (ponctuelle) roulant sans frottement et rebondissant sur les bords. Dans le cas plus général d'une variété riemannienne, la dynamique que l'on regarde (en dehors des rebonds sur le bord) est le flot

[1] CMLS, École Polytechnique, 91128 Palaiseau, France ; Institut de Physique Théorique, CEA/DSM/IPhT, Unité de recherche associée au CNRS, CEA/Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France.

[2] Pour Wentzel, Kramers, Brillouin.

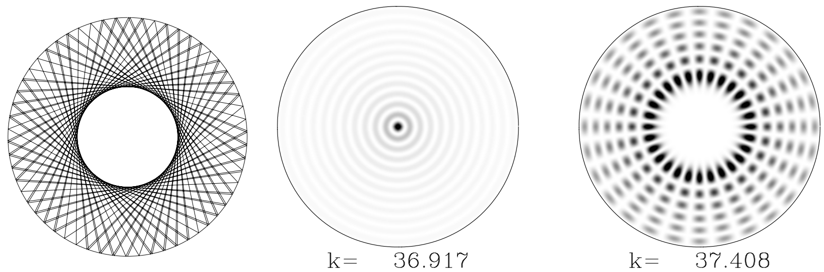


FIG. 1.1. À gauche, une orbite du billard circulaire. Au centre et à droite : deux modes propres du disque, avec leurs fréquences respectives.

hamiltonien g^t sur le fibré cotangent[3] T^*X, engendré par le hamiltonien d'une particule libre

$$H(x,\xi) = \frac{|\xi|^2}{2}, \quad (x,\xi) \in T^*X. \tag{1.2}$$

Si on se restreint à la couche d'énergie $S^*X = \{(x,\xi) : |\xi| = 1\}$, g^t est aussi le *flot géodésique*. Pour les billards rectangulaires, circulaires ou ellipsoïdaux, il existe une quantité $S(x,\xi)$ indépendante de H et constante le long des trajectoires du flot, qui rend cette dynamique *intégrable* au sens de Liouville. Par exemple, pour le disque il y a conservation du moment angulaire. Les trajectoires classiques sont alors très « régulières » (v. fig.1.1). Au niveau quantique, cette symétrie prend la forme d'un opérateur différentiel auto-adjoint $\mathrm{Op}(S)$ qui commute avec le laplacien. La restriction de (1.1) à chaque espace propre de S fournit le problème de Sturm-Liouville mentionné plus haut.

Dès qu'on modifie un peu la forme d'un tel billard, on brise la symétrie, et il devient impossible de ramener (1.1) à un problème unidimensionel. Le flot géodésique n'est plus intégrable, il devient chaotique dans certaines zones de l'espace des phases. On ne dispose plus de formule approchée pour décrire les modes propres ψ_n. Le cas extrême consiste en des billards *totalement chaotiques*, comme le « stade » de Bunimovich (v. fig.1.2). Dans la suite on s'intéressera exclusivement à ces flots totalement chaotiques. Nous imposerons des conditions mathématiques suffisamment fortes pour que cette notion de « chaos » soit exploitable afin de déduire certaines propriétés des modes propres.

Signalons que les méthodes numériques les plus récentes (opérateur de bord, méthode de « scaling ») ne permettent de calculer que quelques dizaines de milliers de modes de billards bidimensionnels, au plus quelques milliers pour les billards tridimensionnels, et moins encore en cas de métrique non-euclidienne. La difficulté vient du fait que les modes de fréquence $k_n \gg 1$ oscillent (dans l'espace) sur une échelle $\sim 1/k_n$: on a donc besoin d'un maillage de plus en plus fin à mesure

[3] Souvent appelé « espace des phases » en physique, il s'agit de l'ensemble des couples (x,ξ) où $x \in X$ et ξ est un (co)vecteur basé en x, représentant l'impulsion.

qu'on augmente la fréquence[4]. Heureusement, on dispose d'outils analytiques pour étudier les modes très élevés.

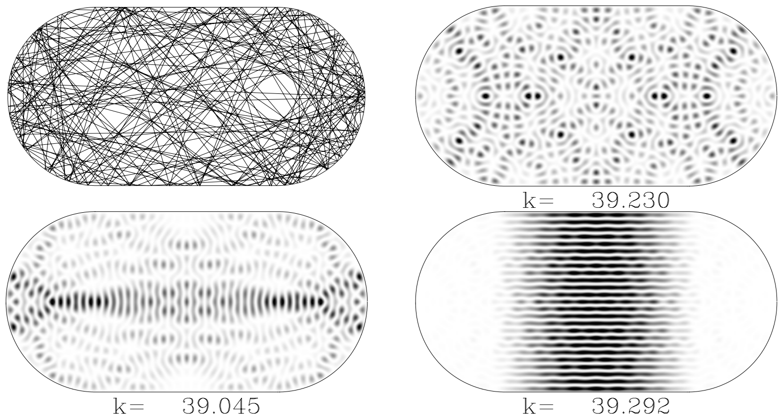


FIG. 1.2. En haut à gauche, une orbite typique du « stade », équidistribuée dans toute la cavité. Les trois autres figures représentent des modes propres de fréquences $k_n \approx 39$. En bas à gauche, une « balafre » sur l'orbite horizontale (instable). À droite, un mode « bouncing ball ».

1.1. Régime et méthodes semiclassiques

Le régime des hautes fréquences nous permet d'utiliser des méthodes d'analyse semiclassique. En effet, l'équation de Helmholtz peut s'interpréter comme une équation de Schrödinger indépendante du temps : en prenant comme constante de Planck effective $\hbar_n = k_n^{-1}$, le mode propre ψ_n satisfait à :

$$-\frac{\hbar_n^2 \Delta}{2}\,\psi_n = \frac{1}{2}\,\psi_n. \tag{1.3}$$

Le membre de gauche est le hamiltonien quantique décrivant la dynamique d'une particule libre à l'intérieur de la cavité ; il quantifie le hamiltonien classique (1.2). L'équation ci-dessus décrit donc une particule quantique dans un état stationnaire d'énergie $E = 1/2$. La limite de haute fréquence $k_n \to \infty$ correspond exactement au régime semiclassique $\hbar = \hbar_n \to 0$. Dans la suite, on notera indifféremment ψ_n ou $\psi_\hbar$ le mode propre ci-dessus.

Le *principe de correspondance* exprime le fait que, dans la limite semiclassique, le *flot de Schrödinger* donné par le propagateur $U^t = e^{it\hbar\frac{\Delta}{2}}$ agissant sur $L^2(X)$, « converge » vers le flot g^t agissant sur T^*X. Plus bas nous explicitons le sens à donner à cette convergence. L'analyse semiclassique a pour objectif de se servir de notre connaissance du flot classique, pour déduire des propriétés du flot de Schrödinger, et en particulier de ses modes stationnaires.

[4] Le code permettant de calculer les modes propres du stade nous a été gracieusement fourni par Eduardo Vergini [21].

Une première façon de formaliser cette correspondance (pour $X = \mathbb{R}^d$) est de considérer un « paquet d'onde gaussien » localisé à la fois en position (près de x_0) et en impulsion (près de ξ_0, *à l'échelle* $\hbar^{-1}$) :

$$\psi_0(x) = \psi_{x_0,\xi_0}(x) = (\pi\hbar)^{-d/4}\, e^{-\frac{|x-x_0|^2}{2\hbar}}\, e^{i\xi_0\cdot x/\hbar}\,. \tag{1.4}$$

Cet état est la meilleure approximation qu'on ait d'une « particule ponctuelle » au point $(x_0,\xi_0) \in T^*X$. Alors, son image par le flot de Schrödinger au temps t, c'est-à-dire $\psi_t = e^{it\hbar\frac{\Delta}{2}}\,\psi_0$, est localisée dans l'espace des phases autour du point $g^t(x_0,\xi_0)$. On verra plus loin que cette correspondance n'est valide que pour des temps $|t| < C\log\hbar^{-1}$.

1.2. Observables

La correspondance peut aussi s'exprimer en terme d'*observables*. Pour nous une observable est une fonction réelle $A \in C^\infty(T^*X)$ (indépendante de $\hbar$), dont on se sert pour mesurer la localisation d'une fonction d'onde dans l'espace des phases. On peut lui associer une « observable quantique » $\mathrm{Op}_\hbar(A)$, qui est un opérateur auto-adjoint sur $L^2(X)$, construit en appliquant à A une procédure de quantification « à l'échelle $\hbar$ ».

Par exemple, sur $X = \mathbb{R}^d$ on peut utiliser la quantification de Weyl

$$\mathrm{Op}_\hbar^W(A)f(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d}\int A\left(\frac{x+y}{2},\xi\right) e^{\frac{i}{\hbar}\xi.(x-y)} f(y)dy\,d\xi. \tag{1.5}$$

Le cas le plus simple consiste à prendre $A(x,\xi) = A(x)$ indépendante de l'impulsion : $\mathrm{Op}_\hbar^W(A)$ est simplement l'opérateur de multiplication par $A(x)$. Au contraire, si $A(x,\xi) = P(\xi)$ avec $P(\bullet)$ un polynôme, alors $\mathrm{Op}_\hbar^W(A)$ est l'opérateur différentiel $P\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$. On incorpore le paramètre $\hbar$ à la définition de $\mathrm{Op}_\hbar^W(A)$ afin que cet opérateur soit naturellement adapté à l'étude des fonctions dont la fréquence d'oscillation est d'ordre $\hbar^{-1}$. Sur une variété X, on peut définir $\mathrm{Op}_\hbar(A)$ en utilisant (1.5) dans des cartes, et en les recollant grâce à une partition de l'unité. La procédure n'est pas « canonique » : sur $\mathbb{R}^d$, il existe d'autres quantifications que celle de Weyl, et sur une variété notre définition dépend en plus du choix des cartes. Mais deux quantifications distinctes auront les mêmes propriétés semiclassiques.

Le principe de correspondance implique que la quantification commute presque avec l'évolution d'une observable. Cette propriété est formalisée par le théorème d'Egorov :

$$\|e^{-it\hbar\frac{\Delta}{2}}\,\mathrm{Op}_\hbar(A)e^{it\hbar\frac{\Delta}{2}} - \mathrm{Op}_\hbar(A\circ g^t)\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \mathcal{O}_t(\hbar) \qquad \textbf{(Egorov)} \tag{1.6}$$

Là encore, cette correspondance semiclassique n'est valable que pour des temps $|t| < c\log\hbar^{-1}$, pour un c pas trop grand. En effet, pour des temps $|t| > C\log\hbar^{-1}$, l'observable $A\circ g^t$ oscille sur des échelles $\ll \hbar$: il ne s'agit alors plus du tout d'une « observable classique ». Plus loin on définira précisément un **temps d'Ehrenfest** marquant la rupture de la correspondance, et qui sera au cœur de nos résultats.

1.3. Mesures semiclassiques

En mécanique quantique, la fonction $|\psi(x)|^2$ décrit la probabilité de trouver la particule à la position $x \in X$. Un appareil de mesure ne pourra tester que la probabilité intégrée sur une petite région (un « pixel ») $\int_B |\psi(x)|^2\, dx$, qu'on peut aussi écrire comme un élément de matrice diagonal $\langle \psi, \mathbb{1}_B \psi \rangle$, où $\mathbb{1}_B$ est l'opérateur de multiplication par la fonction caractéristique sur B.

De même, pour une observable $A(x, \xi)$ à support dans une petite région de l'espace des phases, l'élément de matrice $\langle \psi, \mathrm{Op}_\hbar(A)\psi \rangle$ nous renseigne sur la probabilité que la particule se trouve dans cette région. Du fait de la linéarité de la quantification $A \mapsto \mathrm{Op}_\hbar(A)$, cet élément de matrice peut être représenté par le biais d'une distribution μ_ψ sur T^*X, définie par

$$\mu_\psi(A) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \psi, \mathrm{Op}_\hbar(A)\psi \rangle$$

pour $A \in C_0^\infty(T^*X)$. Cette distribution (qui dépend de ψ mais aussi de l'échelle $\hbar$) est appelée « mesure de Wigner de l'état ψ », bien qu'elle ne soit généralement pas positive. Sa projection sur X est donnée par la mesure de probabilité $|\psi(x)|^2\, dx$, mais μ_ψ contient plus d'information : comme elle tient compte de la *phase* de la fonction $\psi(x)$, elle décrit également la direction locale de propagation de la particule, autrement dit son impulsion[5]. On appelle aussi μ_ψ un *relevé microlocal* de la mesure de probabilité $|\psi(x)|^2\, dx$. Comme le flot g^t agit sur T^*X, la mesure de Wigner est un outil adéquat pour faire le lien entre flot classique et flot de Schrödinger.

Pour cerner les propriétés de localisation des modes propres ψ_n, nous allons donc considérer leurs mesures de Wigner $\mu_{\psi_n} = \mu_n$ (dans les échelles $\hbar_n$). Il est difficile de décrire ces distributions individuellement, par contre nous chercherons à comprendre les *valeurs d'adhérence* de la suite $(\mu_n)_{n \geqslant 0}$, au sens de la topologie faible. Une telle valeur d'adhérence μ est appelée une **mesure semiclassique** du flot géodésique, ou de la variété X. Les propriétés de base de la quantification impliquent que toute mesure semiclassique μ est

- une mesure de probabilité sur la couche d'énergie $S^*X = \{(x, \xi) : |\xi| = 1\}$
- indépendante du choix précis de quantification $A \to \mathrm{Op}_\hbar(A)$
- *invariante* par le flot géodésique : $\mu = (g^t)_*(\mu)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

La dernière propriété découle directement du théorème d'Egorov (1.6). Ainsi, à partir des modes quantiques stationnaires $(\psi_n)_n$, on a fabriqué une mesure de probabilité μ sur S^*X, classiquement invariante, qui décrit les propriétés asymptotiques de localisation des états d'une sous-suite $(\psi_{n_j})_{j \geqslant 1}$.

1.4. Toute mesure invariante est-elle une mesure semiclassique ?

En général, le flot géodésique sur S^*X possède de nombreuses mesures de probabilité invariantes. La mesure de Liouville, définie comme la désintégration sur S^*X du volume symplectique $dx\, d\xi$, est en quelque sorte la « mesure invariante naturelle » sur S^*X. Par la suite nous la noterons L.

[5] On peut montrer que toute l'information sur l'état ψ (excepté une phase globale) est contenue dans la distribution μ_ψ.

De plus, chaque géodésique périodique supporte une unique mesure de probabilité invariante. Les flots chaotiques que nous considérons possèdent un ensemble dénombrable de telles géodésiques, qui remplit S^*X de façon dense.

Pour une variété donnée, on est donc conduit à la question suivante :

> Parmi toutes les mesures g^t-invariantes sur S^*X, quelles sont celles qui apparaissent comme mesures semiclassiques ? Autrement dit, à quelles mesures invariantes peuvent ressembler les mesures de Wigner (μ_n) dans la limite de haute fréquence ?

On ne dispose pas d'une réponse d'ensemble à cette question, valable pour tous les flots géodésiques. On se restreint alors à des flots hamiltoniens ayant des propriétés dynamiques « bien comprises » : systèmes complètement intégrables d'une part (une bonne introduction est la thèse d'habilitation de S.Vũ Ngọc [19]), ou au contraire systèmes « fortement chaotiques ».

2. Flots géodésiques chaotiques

Nous nous intéresserons dans la suite à des flots géodésiques chaotiques. Le terme « chaotique » est assez vague, nous donnerons des hypothèses dynamiques plus précises. Les simulations numériques sont généralement plus faciles à faire pour des billards euclidiens, par contre l'analyse semiclassique est plus efficace dans le cas de variétés compactes sans bord. C'est pourquoi le modèle de base sera celui des variétés compactes de courbure strictement négative, dont les propriétés chaotiques ont été comprises depuis longtemps [3]. Le flot géodésique sur ces variétés est uniformément hyperbolique, autrement dit il a la propriété d'Anosov : en tout point $\rho \in S^*X$, l'espace tangent $T_\rho(S^*X)$ se décompose en

$$T_\rho(S^*X) = E^+(\rho) \oplus E^-(\rho) \oplus \mathbb{R}\, X_H(\rho)$$

où le champ de vecteur X_H engendre le flot géodésique, et $E^\mp$ est l'espace stable (resp. instable), tel que pour tout $v \in E^\mp(\rho)$, et pour tout $t \geqslant 0$, $\|dg^{\pm t}(\rho).v\| \leqslant Ce^{-\lambda t}\|v\|$ avec des constantes $C > 0$ et $\lambda > 0$ uniformes. Ces propriétés traduisent une très forte instabilité par rapport à une variation des conditions initiales. Mais cette instabilité s'exprime en termes mathématiques si forts, que ces flots sont en réalité bien compris : en particulier, un tel flot est *ergodique* pour la mesure de Liouville L, et *rapidement mélangeant*.

2.1. Ergodicité quantique

La propriété chaotique « par défaut » est l'**ergodicité** du flot sur la couche d'énergie S^*X, par rapport à la mesure de Liouville. Elle exprime le fait que S^*X ne peut pas être divisée en deux sous-ensembles invariants ayant tous deux une mesure strictement positive. Une définition plus « dynamique » est la suivante : la trajectoire d'un point $\rho \in S^*X$ *typique* pour la mesure de Liouville va recouvrir S^*X de façon uniforme aux temps longs (v. fig. 1.2). Cette propriété est vérifiée pour les variétés hyperboliques que nous étudions plus bas. Elle l'est également pour certains flots moins chaotiques, par exemple certains billards euclidiens polygonaux.

La seule hypothèse d'ergodicité implique déjà une forte contrainte sur la localisation des modes propres de haute fréquence : ceux-ci sont *presque tous* équidistribués sur la couche d'énergie S^*X.

Théorème 2.1 (Ergodicité quantique). [20, 22, 7] *Supposons que le flot géodésique est ergodique pour la mesure de Liouville sur S^*X. Alors, il existe une sous-suite $(n_j) \subset \mathbb{N}$ de densité 1, telle que les mesures de Wigner des modes propres associés vérifient*

$$\mu_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} \text{Liouville.}$$

Le terme « densité 1 » signifie que la fraction de modes propres concernée tend asymptotiquement vers un. Par conséquent, s'il existe une sous-suite convergeant vers une mesure semiclassique différente de Liouville, elle sera faite de **modes exceptionnels**. L'ergodicité quantique est une conséquence de l'ergodicité classique, mais la réciproque est fausse : des billards « quantiquement ergodiques » mais possédant deux sous-ensembles invariants de mesures positives ont été exhibés par B. Gutkin [10].

L'article initial de Shnirelman [20] décrit les grandes lignes de la preuve, sans donner de détails techniques, en particulier, sans définir de quantification positive. Zelditch [22] a donné une preuve complète pour une surface compacte de courbure constante -1, puis Colin de Verdière [7] a écrit la preuve sur une variété riemannienne compacte, sous la seule hypothèse d'ergodicité.

Donnons les grandes lignes de l'argument [23]. On remarque d'abord que les distributions de Wigner μ_n sont « proches » de mesures de probabilité : il existe une suite de mesures de probabilité $\tilde{\mu}_n$ telles que, pour toute observable $A(x,\xi)$, on ait $\mu_n(A) = \tilde{\mu}_n(A) + \mathcal{O}(\hbar_n)$. Ces mesures positives sont construites à l'aide d'une quantification positive, c'est-à-dire que $\mathrm{Op}_\hbar(A)$ est un opérateur positif si A est une fonction positive. Par exemple la quantification « anti-Wick » sur $\mathbb{R}^d$ fournit les *mesures de Husimi* $\tilde{\mu}_n$. Par un *calcul de trace*, on montre, pour toute observable $A \in C_0^\infty(T^*X)$, la loi de Weyl généralisée :

$$\sum_{n|k_n\leqslant K} \int_{T^*X} A\, d\tilde{\mu}_n \sim C_X\, K^d \int_{S^*X} A\, dL\,, \qquad K \longrightarrow +\infty\,. \tag{2.1}$$

On en déduit la loi de Weyl usuelle : soit $\mathcal{N}(K) \stackrel{\text{def}}{=} \sharp\{n, k_n \leqslant K\}$ le nombre de modes propres de fréquence $k_n \leqslant K$, alors

$$\mathcal{N}(K) \sim C_X\, K^d\,,$$

ainsi que la convergence *en moyenne* des mesures $\tilde{\mu}_n$ vers la mesure de Liouville sur S^*X :

$$\frac{1}{\mathcal{N}(K)} \sum_{k_n\leqslant K} \big(\tilde{\mu}_n(A) - L(A)\big) \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0\,.$$

L'étape suivante dans la description statistique des $(\tilde{\mu}_n(A))$ consiste à estimer leur variance, souvent appelée la *variance quantique* :

$$\mathrm{Var}_K(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mathcal{N}(K)} \sum_{k_n\leqslant K} \big|\tilde{\mu}_n(A) - L(A)\big|^2.$$

En utilisant le théorème d'Egorov et l'ergodicité classique, on va montrer que cette variance tend aussi vers zéro dans la limite de haute fréquence (le théorème d'ergodicité quantique en découlera de manière directe).

Le théorème d'Egorov implique que les mesures $\tilde{\mu}_n$ sont presque invariantes : pour un temps $T > 0$ fixé, on a

$$\tilde{\mu}_n(A) = \tilde{\mu}_n(A_T) + o_{n\to\infty}(1), \qquad \text{où} \quad A_T = T^{-1}\int_0^T A \circ g^t \, dt\,.$$

Comme les $\tilde{\mu}_n$ sont des mesures de probabilité, l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit la borne supérieure

$$\mathrm{Var}_K(A) \leqslant \frac{1}{\mathcal{N}(K)} \sum_{k_n \leqslant K} \tilde{\mu}_n\big((A_T - L(A))^2\big) + o_{K\to\infty}(1).$$

La convergence en moyenne montre que le membre de droite tend vers $L\big((A_T - L(A))^2\big)$. Enfin, l'ergodicité du flot implique que cette quantité devient petite lorsque T est grand. On a ainsi prouvé que la variance quantique $\mathrm{Var}_K(A)$ tend vers 0 dans la limite de haute fréquence $K \to +\infty$. Pour en déduire la convergence de $\tilde{\mu}_n(A)$ vers $L(A)$ pour une sous-suite de densité 1, on invoque un argument standard dû à Tchebychev.

L'ergodicité quantique a donc été montrée en utilisant des outils semiclassiques assez standard, essentiellement la loi de Weyl généralisée (qui provient d'une formule des trace) et la positivité asymptotique des distributions de Wigner.

2.2. « Balafres » et mesures semiclassiques exceptionnelles ?

Les calculs numériques de modes propres de certains billards chaotiques ont révélé des structures suprenantes : en 1984, Heller observe que certains modes propres du « stade » (dont l'ergodicité a été montrée par Bunimovich) se concentrent le long de géodésiques instables ; il baptise ce phénomène « cicatrice », ou « balafre » laissée par l'orbite périodique sur le mode stationnaire (v. fig. 1.2). Alors qu'on comprend bien comment un mode propre (ou au moins un *quasimode*[6]) peut se concentrer le long d'une orbite *stable*, une localisation le long d'une orbite *instable* est beaucoup plus difficile à justifier (un contre-argument est présenté dans la section suivante). La concentration observée par Heller est avant tout visuelle ; les études plus quantitatives qui ont suivi (v. par ex. [5]) tendent à exclure la possibilité d'un poids de probabilité positif près de l'orbite périodique, qui aurait indiqué l'existence d'une mesure semiclassique chargeant l'orbite (ou « grosse balafre »[7]). Des études numériques ont également été réalisées sur certaines surfaces compactes de courbure négative constante ; elles n'ont pas montré la présence de balafres [4].

Au niveau théorique, les résultats les plus précis concernant la localisation de modes propres concernent des variétés hyperboliques (de courbure -1) dites « arithmétiques » : ces surfaces sont obtenues en quotientant l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^2$ par un groupe discret co-compact issu d'une algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$. Il existe alors une algèbre commutative d'opérateurs autoadjoints (opérateurs de

[6] Un quasimode de précision ε est une solution de $\|(-\hbar^2\triangle - I)\psi\| \leqslant \varepsilon\|\psi\|$. L'existence d'un tel quasimode implique l'existence d'une valeur propre de $-\hbar^2\triangle$ dans $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ — mais ψ n'a aucune raison d'être proche d'une fonction propre. Dans la limite $\hbar \longrightarrow 0$ cette notion n'a d'intérêt que si $\varepsilon = \varepsilon(\hbar)$ tend vers 0 assez vite. On parle de quasimode, sans donner la précision, quand $\varepsilon = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$.

[7] Nous proposons cette traduction pour le terme « strong scar » utilisé en anglais.

Hecke) qui commutent avec le laplacien : en ce sens, le système a une famille dénombrable de « symétries ». Il est naturel de s'intéresser aux bases orthonormées formées de modes propres simultanés de cette algèbre et du laplacien, appelés modes de Hecke. Rudnick et Sarnak ont montré [18] que les mesures semiclassiques associées à ces modes propres ne peuvent pas charger une géodésique périodique (pas de « grosse balafre »). Ce résultat, ainsi que les études numériques mentionnées plus haut, leur ont suggéré la conjecture suivante :

Conjecture 2.2 (Unique ergodicité quantique). *Soit X une variété compacte de courbure strictement négative. Pour toute base propre orthonormée, la suite de mesures de Wigner $(\mu_k)_{k\geqslant 0}$ admet une unique valeur d'adhérence, qui est la mesure de Liouville.*

Cette conjecture va plus loin que l'absence de « grosse balafre » : elle exclut également toutes les mesures invariantes « fractales ». La conjecture a été prouvée par Lindenstrauss dans le cas des modes propres de Hecke des surfaces arithmétiques [15]. Une première étape [6], utilisant fortement les symétries arithmétiques de la variété, a consisté à montrer que les composantes ergodiques d'une mesure semiclassique ont toutes une *entropie* strictement positive (ce qui exclut déjà les grosses balafres). L'utilisation de l'entropie comme indicateur de localisation est aussi au cœur de nos travaux.

Remarque 2.3. Le billard « stade » possède une famille d'orbites stables, qui sont les orbites verticales reliant les deux côtés horizontaux. Heller a aussi mis en évidence un autre type de modes propres du stade, appelés les modes « bouncing ball », qui sont localisés sur cette famille d'orbites verticales (v. fig. 1.2). Contrairement aux « balafres » décrites ci-dessus, on pense que les mesures semiclassiques associées à ces modes sont effectivement supportées par ces orbites verticales. Hassell a récemment montré que, pour un « stade » générique, il existe effectivement des mesures semiclassiques différentes de Liouville [12].

2.3. Localisation-délocalisation sur une orbite instable

Essayons, par un argument naïf, de contruire un quasimode localisé sur une orbite périodique instable contenant un point (x_0, ξ_0). Nous verrons tout de suite apparaître la difficulté principale : le comportement du propagateur de Schrödinger au temps d'Ehrenfest.

Pour construire un tel quasimode, on part d'un paquet d'onde gaussien du type (1.4) localisé dans un $\sqrt{\hbar}$-voisinage de (x_0, ξ_0), et on le fait évoluer par le flot de Schrödinger. En moyennant sur un intervalle de temps $[-T/2, T/2]$, on obtient un quasimode

$$\Psi_T = \int_{-T/2}^{T/2} U^t\, \psi_0\, dt, \quad U^t \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\frac{t}{2\hbar}(\hbar^2\Delta+1)}. \tag{2.2}$$

Une intégration par parties montre que l'erreur

$$\mathcal{E}(\Psi_T) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\frac{-\hbar^2\Delta-1}{2}\Psi_T\|}{\|\Psi_T\|} \quad \text{est égale à} \qquad \frac{\|U^{T/2}\psi_0 - U^{-T/2}\psi_0\|}{\|\Psi_T\|}\,.$$

Pour minimiser cette erreur on voudrait que les états $U^{T/2}\psi_0$ et $U^{-T/2}\psi_0$ soient proches ; comme $U^t\psi_0$ se propage le long de l'orbite, il est naturel de prendre pour T la période T_0 de l'orbite. Malheureusement, l'hyperbolicité de la dynamique transverse à l'orbite « allonge » l'état gaussien $U^{T_0/2}\psi_0$ le long de la direction instable sur une longueur $\sqrt{\hbar}\, e^{\lambda T_0/2}$, où λ est l'exposant de Liapounov maximal de l'orbite. Inversement, l'état $U^{-T_0/2}\psi_0$ est allongé le long de la direction stable, de sorte que $U^{T_0/2}\psi_0$ et $U^{-T_0/2}\psi_0$ sont loin d'être colinéaires. On obtient alors un quasimode de précision $\mathcal{E}(\Psi_{T_0}) \sim \hbar$, ce qui n'est pas très bon. Pour diminuer l'erreur, on essaie alors d'intégrer sur des intervalles plus longs, en prenant T dépendant de $\hbar$ et tendant vers l'infini. Cependant, lorsque T devient plus grand que le *temps d'Ehrenfest*

$$T_E = \frac{\log \hbar^{-1}}{\lambda}, \tag{2.3}$$

l'état $U^T\psi_0$ se *délocalise* le long de la direction instable sur une longueur $\gg 1$, et remplit peu à peu tout S^*X. Le quasimode Ψ_T n'est donc plus totalement localisé autour de l'orbite. Cette analyse sommaire montre qu'on ne peut espérer faire mieux que de construire des quasimodes localisés d'erreur $C\hbar/|\log \hbar|$.

2.4. Un modèle jouet ayant des « grosses balafres »

Parallèlement à l'étude des flots géodésiques chaotiques, on a construit des modèles de transformations symplectiques (à temps discret) sur des espaces des phases compacts, qui ont des propriétés chaotiques. L'exemple le plus connu est la transformation du « chat d'Arnold » sur le tore bidimensionnel, qui correspond à une transformation linéaire $(x, \xi) \to M(x, \xi)$, où $M \in SL(2, \mathbb{Z})$ vérifie $|\mathrm{tr} M| > 2$ (v. fig. 2.1). Cette transformation peut être quantifiée en une famille de propagateurs unitaires dépendant d'un paramètre $\hbar$ [13]. De tels propagateurs, appelés « applications quantiques », ont servi de laboratoire en chaos quantique, sur les plans numérique et analytique.

Concernant la classification des mesures semiclassiques, le modèle du « chat d'Arnold quantique » a fourni des résultats remarquables [8]. En effet, pour certaines valeurs (très particulières) de $\hbar$, le propagateur quantique est périodique, de période $T_\hbar \approx 2T_E$, où T_E est le temps d'Ehrenfest (2.3). Grâce à cette périodicité, le quasimode (2.2) pour $T = T_\hbar$ est un *vrai mode propre*. En prenant un état ψ_0 localisé sur un point périodique (x_0, ξ_0), on montre [8] que $\Psi_{T_\hbar}$ est à moitié localisé sur l'orbite périodique, et à moitié équidistribué (la mesure de Husimi de $\Psi_{T_\hbar}$ est représentée sur la fig. 2.1). Autrement dit, ces modes propres convergent vers la mesure semiclassique

$$\mu = \frac{1}{2}(\delta_O + L) \tag{2.4}$$

où L est la mesure symplectique $dx\, d\xi$ et δ_O est une mesure singulière (ici, une combinaison de masses de Dirac) portée par la trajectoire de (x_0, ξ_0).

Ces résultats montrent que la conjecture d'unique ergodicité quantique est *fausse* lorsqu'on la transfère à des systèmes chaotiques plus généraux que les flots géodésiques. Toutefois, on montre que le « chat d'Arnold quantique » n'admet pas de mesure semiclassique purement supportée par une orbite périodique (une

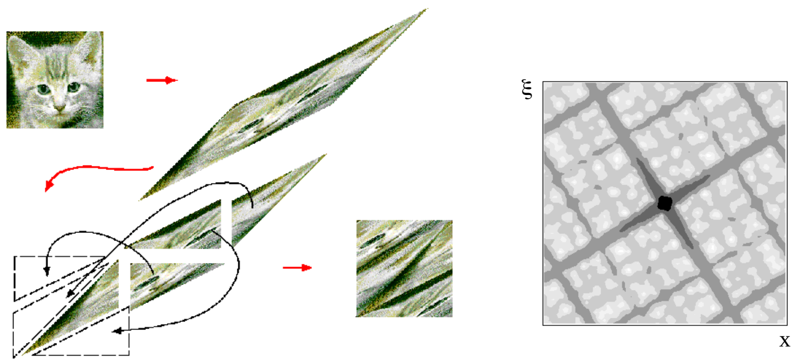


FIG. 2.1. À gauche, la transformation du « chat d'Arnold » sur le tore (©Leon Poon). À droite, mesure de Husimi d'un mode propre $\Psi_{T_\hbar}$ à moitié localisé sur un point fixe ($\hbar^{-1} \approx 3000$).

« balafre totale »), car le poids $1/2$ porté par la balafre dans la mesure (2.4) est maximal [9].

Dans la section suivante, qui porte sur nos résultats récents, on verra réapparaître ce facteur $1/2$, cette fois-ci dans le cas des flots géodésiques.

3. Bornes entropiques sur les mesures semiclassiques

Dans cette section on se place dans le cas d'une variété compacte (sans bord) de courbure strictement négative. Comme on l'a dit plus haut, un tel flot possède de nombreuses mesures invariantes. Une façon de caractériser la « complexité » d'une mesure invariante est de lui associer son **entropie de Kolmogorov–Sinai** : il s'agit d'un réel $h_{KS}(\mu) \geqslant 0$, que nous définirons précisément plus tard. Contentons-nous pour le moment d'en donner quelques propriétés :

– une mesure singulière portée par une trajectoire périodique est d'entropie nulle ;

– l'entropie atteint son maximum $h_{\max}$ pour une unique mesure invariante, appelée mesure de Bowen-Margulis, de support S^*X ;

– l'inégalité de Ruelle-Pesin affirme que

$$h_{KS}(\mu) \leqslant \int \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k^+ \, d\mu, \tag{3.1}$$

où les fonctions $\lambda_1^+(\rho) \geqslant \lambda_2^+(\rho) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{d-1}(\rho) > 0$, définies μ-presque partout, sont les exposants de Liapounov positifs du flot. En courbure strictement négative, on a égalité si et seulement si μ est la mesure de Liouville [14] ;

– en courbure -1, cette inégalité se lit simplement $h_{KS}(\mu) \leqslant d-1$, et dans ce cas la mesure de Bowen-Margulis coïncide avec la mesure de Liouville ;

– h_{KS} est affine (cela ne se verra pas dans la définition !).

Ces propriétés montrent que l'entropie permet de comprendre la *localisation* d'une mesure invariante. Une borne inférieure positive sur l'entropie d'une mesure invariante signifie que celle-ci est au moins *partiellement délocalisée*, c'est-à-dire qu'elle n'est pas une simple combinaison convexe de mesures portées par des trajectoires périodiques.

Le premier résultat concernant l'entropie des mesures semiclassiques sur les variétés de courbure strictement négative va exactement en ce sens.

Théorème 3.1. [1] *Soit X une variété riemannienne compacte, telle que le flot géodésique ait la propriété d'Anosov. Alors toute mesure semiclassique μ sur S^*X vérifie*

$$h_{KS}(\mu) > 0.$$

Une version plus quantitative du théorème permet de contrôler le *support* des mesures semiclassiques. Énonçons-le pour le cas de courbure constante :

Théorème 3.2. [1] *Soit X une variété compacte de dimension d et de courbure -1. Alors, pour toute mesure semiclassique μ, le support de μ a une dimension de Hausdorff au moins égale à d.*

Remarquons que la dimension de S^*X est $2d-1$. Ce résultat exclut également les mesures invariantes ayant un support trop fin. Nous avons ensuite précisé ces résultats, au moins dans les cas où la courbure ne varie pas trop :

Théorème 3.3. [2] *Soit X une variété de dimension d, ayant un flot géodésique Anosov, et μ une mesure semiclassique. Soient $\lambda_j^+(\rho)$ les exposants de Liapounov positifs, et $\lambda_{\max} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log \sup_{\rho\in S^*X} ||dg^t_\rho||$ le taux d'expansion maximal du flot. Alors l'entropie de μ satisfait à l'inégalité suivante :*

$$h_{KS}(\mu) \geqslant \int \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k^+ \, d\mu - \frac{d-1}{2}\lambda_{\max}\,. \tag{3.2}$$

En courbure constante -1, cette borne s'écrit $h_{KS}(\mu) \geqslant \frac{d-1}{2}$.

On peut facilement adapter l'inégalité au modèle des applications quantiques sur le tore. Dans le cas du « chat d'Arnold », la borne inférieure s'écrit $h_{KS}(\mu) \geqslant \frac{\lambda}{2}$, où λ est l'exposant de Liapounov uniforme. Cette borne inférieure est atteinte par la mesure semiclassique (2.4) ayant une « demi-balafre ».

Le membre de droite de (3.2) peut être négatif, ce qui rend l'inégalité triviale, si la courbure sectionnelle varie suffisamment sur X. Une borne inférieure plus naturelle serait la suivante :

$$h_{KS}(\mu) \geqslant \frac{1}{2} \int \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k^+ \, d\mu. \tag{3.3}$$

Cette borne a été prouvée récemment par G. Rivière dans le cas de surfaces ($d=2$) de courbure **négative ou nulle** [17]. B. Gutkin a montré une borne analogue dans le cas de certaines applications quantiques ayant un exposant de Liapounov variable [11] ; il a également exhibé des modes propres pour lesquels l'égalité est réalisée.

Compte tenu de l'inégalité de Ruelle-Pesin (3.1), pour prouver l'ergodicité quantique unique dans le cas des flots géodésiques Anosov, il faudrait se débarrasser du facteur $\frac{1}{2}$ dans (3.3).

4. Éléments de preuve du Théorème 3.3

4.1. Entropie d'une mesure invariante

Pour définir l'entropie d'une mesure μ sur S^*X invariante par le flot géodésique, on partitionne S^*X en un nombre fini de sous-ensembles mesurables (qu'on suppose de diamètres « petits ») :

$$S^*X = \sqcup_{k=1}^{K} P_k.$$

L'entropie de la mesure μ vis-à-vis de cette partition,

$$h_1(\mu, P) = -\sum_{k=1}^{K} \mu(P_k) \log \mu(P_k)\,,$$

nous renseigne sur la manière avec laquelle la mesure μ est distribuée entre les P_k.

On considère ensuite des raffinements de la partition P obtenus en itérant le flot. Pour un temps entier $n > 0$ et une suite $\alpha_0 \cdots \alpha_{n-1}$ (avec $\alpha_i \in \{1, \ldots, K\}$), on considère l'ensemble

$$P_{\alpha_0 \cdots \alpha_{n-1}} \stackrel{\text{def}}{=} P_{\alpha_0} \cap g^{-1} P_{\alpha_1} \cap \ldots \cap g^{-(n-1)} P_{\alpha_{n-1}}\,,$$

formé des points contenus dans P_{α_0}, dont la trajectoire au temps 1 est dans P_{α_1}, au temps 2 dans P_{α_2}, ... et en $P_{\alpha_{n-1}}$ au temps $n-1$. Pour chaque $n > 0$, les ensembles $(P_{\alpha_0 \cdots \alpha_{n-1}})$ forment également une partition de S^*X : c'est le « raffinement au temps n » de la partition P. Du fait de l'hyperbolicité de la dynamique, ces ensembles sont très contractés dans la direction instable lorsque n est grand. L'entropie au temps n est l'entropie relative à cette partition raffinée :

$$h_n(\mu, P) = -\sum_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}} \mu(P_{\alpha_0 \cdots \alpha_{n-1}}) \log \mu(P_{\alpha_0 \cdots \alpha_{n-1}})\,.$$

Grâce à la propriété de sous-additivité $h_{n+m}(\mu, P) \leqslant h_n(\mu, P) + h_m(\mu, P)$, la limite

$$h_{KS}(\mu, P) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{h_n(\mu, P)}{n} = \inf_n \frac{h_n(\mu, P)}{n}$$

est bien définie, elle représente le **taux moyen de décroissance exponentielle** des probabilités $\mu(P_{\alpha_0 \cdots \alpha_{n-1}})$. Pour un flot Anosov, cette limite est indépendante de la partition P dès que celle-ci a un diamètre suffisamment petit, et elle définit $h_{KS}(\mu)$, l'entropie de la mesure μ.

Le fait que $h_{KS}(\mu, P)$ soit définie par un inf se traduit par la propriété de semicontinuité supérieure suivante : si μ_k est une suite de mesures de probabilités (g^t)-invariantes qui converge faiblement vers μ, alors

$$\limsup_{k \to \infty} h_{KS}(\mu_k, P) \leqslant h_{KS}(\mu, P).$$

Autrement dit, les bornes inférieures sur $h_{KS}(\mu_k, P)$ passent à la limite.

Une idée très naïve est donc d'essayer de minorer l'entropie de nos distributions de Wigner μ_n, et de passer à la limite $n \longrightarrow +\infty$. Évidemment, cela ne peut pas fonctionner, car les μ_n sont des *distributions*, et ne sont *pas (g^t)-invariantes*. En fait, la situation est la suivante : nous avons une suite de systèmes dynamiques non-commutatifs (le flot de Schrödinger U^t agissant sur $L^2(X)$, avec un état invariant $\psi_\hbar$), convergeant quand $\hbar \to 0$ vers un système commutatif ((g^t) agissant sur T^*X, avec la mesure invariante μ).

D'où l'idée d'essayer de travailler avec une « entropie quantique ».

4.2. Une entropie quantique

Qu'est-ce qu'une partition quantique de T^*X ? Dans notre cas, il s'agira d'une famille d'opérateurs $\hat{P} = (\hat{P}_k)_{k=1,\ldots,K}$ bornés sur $L^2(X)$, satisfaisant l'identité

$$\sum_{k=1}^{K} \hat{P}_k^* \hat{P}_k = Id_{L^2}.$$

Par exemple, on peut partir d'une partition de la variété $X = \sqcup_{k=1}^K P_k$ (qu'on peut relever en une partition de S^*X ou de T^*X), et considérer les opérateurs $\hat{P}_k$ de multiplication par la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{P_k}$[8].

On considère une sous-suite de modes propres $(\psi_\hbar)_{\hbar\to 0}$ convergeant vers une mesure semiclassique μ. La partition quantique est utilisée pour découper $\psi_\hbar$ en K composantes $\hat{P}_k\psi_\hbar$. À chacune on associe un poids de probabilité $\|\hat{P}_k\psi_\hbar\|^2$. Par le choix des opérateurs $\hat{P}_k$, chaque composante représente effectivement la partie de $\psi_\hbar$ localisée dans l'élément $P_k \subset X$. À partir de ces « probabilités quantiques », on peut considérer l'**entropie quantique**

$$h(\psi_\hbar, \hat{P}) = -\sum_k \|\hat{P}_k\psi_\hbar\|^2 \log \|\hat{P}_k\psi_\hbar\|^2 .$$

Comme dans la section précédente, on va raffiner cette partition, mais cette fois en utilisant le flot de Schrödinger. On note $\hat{P}_k(t) = U^{-t}\hat{P}_k U^t$, et pour tout temps $n > 0$ on découpe $\psi_\hbar$ en composantes $\hat{P}_{\alpha_0\cdots\alpha_{n-1}}\psi_\hbar$, où

(4.1)
$$\hat{P}_{\alpha_0\cdots\alpha_{n-1}} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{P}_{\alpha_{n-1}}(n-1)\ldots\hat{P}_{\alpha_1}(1)\hat{P}_{\alpha_0} = U^{-n+1}\hat{P}_{\alpha_{n-1}}U^1\ldots U^1\hat{P}_{\alpha_1}U^1\hat{P}_{\alpha_0} .$$

La forme de droite montre que chaque opérateur correspond à une succession d'évolutions (par U^1) et de « projections » sur P_{α_i}. On a donc envie d'interpréter chaque poids $\|\hat{P}_{\alpha_0\cdots\alpha_{n-1}}\psi_\hbar\|^2$ comme la probabilité, pour une particule dans l'état $\psi_\hbar$, de visiter successivement P_{α_0}, puis P_{α_1} au temps 1... et enfin en $P_{\alpha_{n-1}}$ au temps $n-1$. Il faut néanmoins manier avec précaution cette interprétation probabiliste, car les opérateurs $\hat{P}_{\alpha_k}(k)$ ne commutent pas entre eux.

Malgré tout, le théorème d'Egorov implique que chaque composante représente la partie de $\psi_\hbar$ localisée dans le sous-ensemble $P_{\alpha_0\cdots\alpha_{n-1}}$ de T^*X. Par conséquent, l'hypothèse de convergence des distributions de Wigner $\mu_\hbar \to \mu$ implique que pour chaque suite $\alpha_0\cdots\alpha_{n-1}$,

$$\|\hat{P}_{\alpha_0\cdots\alpha_{n-1}}\psi_\hbar\|^2 \xrightarrow[\hbar\to 0]{} \mu(P_{\alpha_0\cdots\alpha_{n-1}}) .$$

8 En pratique, on remplace ces dernières par des fonctions lisses $\mathbb{1}_{P_k}^{reg}$ satisfaisant à l'égalité $\sum_{k=1}^K |\mathbb{1}_{P_k}^{reg}(x)|^2 = 1$, afin que le calcul pseudo-différentiel s'applique aux opérateurs $\hat{P}_k$.

On construit alors l'entropie quantique raffinée au temps n,

$$h_n^+(\psi_\hbar, \hat{P}) \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}} \|\hat{P}_{\alpha_0\cdots\alpha_{n-1}}\psi_\hbar\|^2 \log \|\hat{P}_{\alpha_0\cdots\alpha_{n-1}}\psi_\hbar\|^2. \tag{4.2}$$

Pour n fixé, celle-ci converge vers $h_n(\mu, P)$ dans la limite semiclassique. Malheureusement, au niveau quantique on n'a pas la sous-additivité $h_{n+m} \leqslant h_n + h_m$ (la preuve de cette inégalité échoue à cause du fait que les opérateurs ne commutent pas). Nous ne considérerons donc jamais la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{h_n^+(\psi_\hbar,\hat{P})}{n}$, qui serait l'analogue quantique de l'entropie de Kolmogorov-Sinai. Il nous faudra prendre *simultanément* les limites $n \to \infty$ et $\hbar \to 0$.

En poussant le théorème d'Egorov dans ses retranchements, on montre qu'on a une *sous-additivité approchée*

$$h_{n+m}^+(\psi_\hbar, \hat{P}) \leqslant h_n^+(\psi_\hbar, \hat{P}) + h_m^+(\psi_\hbar, \hat{P}) + o(1)$$

quand $\hbar \to 0$ et pour $n + m$ inférieur au temps d'Ehrenfest $T_E = \frac{\log \hbar^{-1}}{\lambda_{\max}}$. Cela implique

$$\frac{1}{n} h_n^+(\psi_\hbar, \hat{P}) \leqslant \frac{1}{n_o} h_{n_o}(\mu, P) + o_{\hbar\to 0}(1)\,, \tag{4.3}$$

si n_o est fixé et $n > n_o$ est inférieur au temps d'Ehrenfest.

4.3. Borne inférieure sur l'entropie quantique

Le cœur de la preuve consiste à obtenir une borne inférieure sur l'entropie quantique (4.2). Pour simplifier, supposons dorénavant que X est à courbure constante -1. Une première étape consiste à étudier les opérateurs (4.1) pour des « temps logarithmiques ». On montre l'*estimée dispersive hyperbolique* suivante :

Proposition 4.1. *Fixons $\delta > 0$ (petit), $\mathcal{K}$ (grand). Pour tout $\hbar < \hbar_{\mathcal{K}}$, on considère une fonction de troncature $\chi_\hbar \in C_c^\infty(T^*X)$ à support dans un voisinage de taille $\hbar^{1-\delta}$ de S^*X. Alors, pour toute suite $\alpha_0 \cdots \alpha_{n-1}$ de longueur $n \leqslant \mathcal{K}|\log \hbar|$, on a*

$$\|\hat{P}_{\alpha_0\cdots\alpha_{n-1}} \operatorname{Op}_\hbar(\chi_\hbar)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leqslant \min\left(1, \hbar^{-\frac{d-1+\delta}{2}} e^{-\left(\frac{d-1}{2}\right)n}\right). \tag{4.4}$$

En particulier, la même borne supérieure s'applique à $\|\hat{P}_{\alpha_0\cdots\alpha_{n-1}}\psi_\hbar\|$.

Il faut comprendre l'opérateur $\operatorname{Op}_\hbar(\chi_\hbar)$ comme une projection spectrale sur la fenêtre $[1-\hbar^{1-\delta}, 1+\hbar^{1-\delta}]$ du spectre de $-\hbar^2\Delta$. L'estimée (4.4) indique que, pour un état ψ localisé en énergie, la succession de « projections » $\hat{P}_{\alpha_i}$ et d'itérations par le flot unitaire U^1 ne peut préserver indéfiniment la norme de ψ, mais contracte forcément celle-ci *à partir du temps d'Ehrenfest* $T_E = |\log \hbar|$.

La borne (4.4) est obtenue par un développement WKB du noyau de l'opérateur $\hat{P}_{\alpha_{n-1}} U^1 \dots U^1 \hat{P}_{\alpha_1} U^1 \hat{P}_{\alpha_0} \operatorname{Op}_\hbar(\chi_\hbar)$ intervenant dans l'écriture (4.1) : son noyau $K_\hbar(x, y)$ est C^∞, et admet un développement limité complètement explicite en puissances de $\hbar$, s'exprimant comme une somme, portant sur les géodésiques de longueur $\approx n$ allant de x à y, de certaines quantités classiques.

La nouveauté est que nos développements sont uniformes pour les temps $n \leqslant \mathcal{K}|\log \hbar|$. Grâce aux projections $\hat{P}_{\alpha_j}$ à chaque pas de temps, on ne rencontre pas une des difficultés usuelles de ces développements asymptotiques aux temps longs : la croissance exponentielle du nombre de géodésiques. Bien que le nombre total de géodésiques allant de $x \in P_{\alpha_0}$ à $y \in P_{\alpha_{n-1}}$ en un temps $\approx n$ croisse exponentiellement avec n, en imposant les contraintes $g^j(\rho) \in P_{\alpha_j}$ pour tout $j = 0, \dots, n-1$ on se retrouve avec au plus une seule géodésique. Le facteur $e^{-(\frac{d-1}{2})n}$, qui est le terme dominant du développement WKB, provient de la croissance exponentielle (sous le flot) du volume des variétés instables : le jacobien $\det(dg^n_{|E^+})$ croît comme $e^{(d-1)n}$, d'où la qualification d'estimée dispersive hyperbolique.

Comme le lien (4.3) entre entropie quantique et classique n'est valable que pour des temps $n \leqslant T_E$, la borne (4.4) (non-triviale pour $n > T_E$) ne peut être utilisée directement pour estimer $h^+_n(\psi_\hbar, \hat{P})$. Pour contourner le problème, on a recours à une sorte de *deus ex machina*, le **principe d'incertitude entropique** :

Théorème 4.2. [16] *Soient* $(\hat{\pi}_k)_{k=1}^M$ *et* $(\hat{\tau}_j)_{j=1}^M$ *deux partitions quantiques de l'unité sur un espace de Hilbert* $\mathcal{H}$*. Pour tout état* $\psi \in \mathcal{H}$ *normalisé on définit les entropies quantiques* $h(\psi, \hat{\pi})$ *et* $h(\psi, \hat{\tau})$*. Alors, ces deux entropies satisfont à l'inégalité*

$$h(\psi, \hat{\tau}) + h(\psi, \hat{\pi}) \geqslant -2 \log \Big(\sup_{j,k} \|\hat{\tau}_j\, \hat{\pi}_k^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \Big) .$$

Ce « principe », introduit par les spécialistes des fondements de la mécanique quantique, est un avatar du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin. Pour l'appliquer à notre problème, on introduit une entropie quantique « duale »

$$h^-_n(\psi_\hbar, \hat{P}) \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}} \|\hat{P}^*_{\alpha_0\cdots\alpha_{n-1}}\psi_\hbar\|^2 \log \|\hat{P}^*_{\alpha_0\cdots\alpha_{n-1}}\psi_\hbar\|^2 .$$

On prend les partitions quantiques $(\hat{\pi}_k) = (\hat{P}^*_{\alpha_0\cdots\alpha_{n-1}})$ et $(\hat{\tau}_j) = (\hat{P}_{\alpha_0\cdots\alpha_{n-1}}(n))$ pour $n = T_E$. En combinant le « principe d'incertitude » avec la borne (4.4), écrite sous la forme $\|\hat{\tau}_j\, \hat{\pi}_k^*\, \mathrm{Op}_\hbar(\chi_\hbar)\| \leqslant \hbar^{\frac{d-1-\delta}{2}}$, on obtient l'inégalité

$$\frac{1}{2T_E}[h^+_{T_E}(\psi_\hbar, \hat{P}) + h^-_{T_E}(\psi_\hbar, \hat{P})] \geqslant \frac{(d-1-\delta)}{2} ,$$

qui peut être rapatriée sur $\frac{1}{n_o} h_{n_o}(\mu, P)$ grâce à (4.3), puis sur $h_{KS}(\mu)$. □

5. Références

[1] N. Anantharaman, *Entropy and the localization of eigenfunctions*, Ann. of Math. **168** 435–475 (2008)

[2] N. Anantharaman, S. Nonnenmacher, *Half–delocalization of eigenfunctions of the laplacian on an Anosov manifold*, Ann. Inst. Fourier **57**, 2465–2523 (2007) ; N. Anantharaman, H. Koch et S. Nonnenmacher, *Entropy of eigenfunctions*, communication à l'International Congress of Mathematical Physics, Rio de Janeiro, 2006 ; arXiv :0704.1564

[3] D. V. Anosov, *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **90**, (1967)

[4] R. Aurich et F. Steiner, *Statistical properties of highly excited quantum eigenstates of a strongly chaotic system*, Physica **D 64**, 185–214 (1993)

[5] A.H. Barnett, *Asymptotic rate of quantum ergodicity in chaotic Euclidean billiards*, Comm. Pure Appl. Math. **59**, 1457–1488 (2006)

[6] J. Bourgain, E. Lindenstrauss, *Entropy of quantum limits,* Comm. Math. Phys. **233**, 153–171 (2003).

[7] Y. Colin de Verdière, *Ergodicité et fonctions propres du laplacien*, Commun. Math. Phys. **102**, 497–502 (1985)
[8] F. Faure, S. Nonnenmacher and S. De Bièvre, *Scarred eigenstates for quantum cat maps of minimal periods*, Commun. Math. Phys. **239**, 449–492 (2003).
[9] F. Faure and S. Nonnenmacher, *On the maximal scarring for quantum cat map eigenstates*, Commun. Math. Phys. **245**, 201–214 (2004)
[10] B.Gutkin, *Dynamical "breaking" of time reversal symmetry and converse quantum ergodicity*, arXiv :0704.3289
[11] B.Gutkin, *Entropic bounds on semiclassical measures for quantized one-dimensional maps*, arXiv :0802.3400
[12] A. Hassell, *Stadium domains that are not QUE*, arXiv :0807.0666
[13] J.H. Hannay and M.V. Berry, *Quantisation of linear maps on the torus—Fresnel diffraction by a periodic grating*, Physica **D 1**, 267–290 (1980)
[14] F. Ledrappier, L.-S. Young, *The metric entropy of diffeomorphisms. I. Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula*, Ann. of Math. **122**, 509–539 (1985)
[15] E. Lindenstrauss, *Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity*, Ann. of Math. **163**, 165-219 (2006)
[16] H. Maassen and J.B.M. Uffink, *Generalized entropic uncertainty relations*, Phys. Rev. Lett. **60**, 1103–1106 (1988)
[17] G. Rivière, *Entropy of semiclassical measures in dimension 2*, arXiv :0809.0230
[18] Z. Rudnick and P. Sarnak, *The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds*, Commun. Math. Phys. **161**, 195–213 (1994)
[19] S. Vũ Ngọc, *Systèmes intégrables semi-classiques : du local au global*, thèse d'habilitation à diriger des recherches, Université Joseph Fourier, 2003 (`http ://perso.univ-rennes1.fr/san.vu-ngoc/documents/publis.html`)
[20] A. Shnirelman, *Ergodic properties of eigenfunctions*, Usp. Math. Nauk. **29**, 181–182 (1974)
[21] E. Vergini and M. Saraceno, *Calculation by scaling of highly excited states of billiards*, Phys. Rev. E **52**, 2204 (1995)
[22] S. Zelditch, *Uniform distribution of the eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces*, Duke Math. J. **55**, 919–941 (1987)
[23] S. Zelditch, *Quantum ergodicity of C^* dynamical systems*, Commun. Math. Phys **177**, 507–528 (1996)

Addendum à l'article « Histoire d'un vecteur tricentenaire »

Alain Guichardet

Je tiens à signaler qu'Alain Albouy travaille actuellement sur la question. Par ailleurs, il a relevé quelques inexactitudes dans mon article.

Au n° 4.1 : il est inexact que Laplace soit l'inventeur de « la méthode exposée au 2 », Lagrange l'avait fait 20 ans plus tôt (voir le tome 5 de ses œuvres complètes).

Au n° 6.4.2 : c'est en réalité le groupe SO(4) qui agit dans l'espace des phases, action décrite explicitement par G.Gyorgi dans son article *Kepler's equation, Fock variables, Bacry's generators and Dirac brackets* (Nuovo Cimento,53A, 1948, p. 717-736) – ce qui ne signifie pas que ladite action soit simple à décrire !

MATHÉMATIQUES ET MUSIQUE

Théoriser aujourd'hui la musique à la lumière des mathématiques : un point de vue musicien

François Nicolas[1]

« Nonobstant toute l'expérience que je pouvais m'être acquise dans la Musique, pour l'avoir pratiquée pendant une assez longue suite de temps, ce n'est cependant que par le secours des Mathématiques que mes idées se sont débrouillées, et que la lumière y a succédé à une certaine obscurité, dont je ne m'apercevais pas auparavant. »

Rameau (1722)

Si les rapports mathématiques-musique ne sauraient se limiter à leur dimension théorique – j'ai eu l'occasion, lors de la dernière journée annuelle de la SMF « mathématique et musique » (21 juin 2008)[2], de suggérer que musique et mathématique auraient tout à gagner de se rapporter également par les faire (faire de la musique à partir de la mathématique / faire de la mathématique à partir de la musique...) –, il est cependant manifeste, depuis la rencontre Euler-Rameau de 1752[3], que théoriser la musique à la lumière des mathématiques constitue, pour ces rapports, l'orientation prépondérante.

Il va de soi que deux cent cinquante ans après cette rencontre, les manières de mettre en œuvre un tel type de théorisation ont sensiblement changé. On voudrait éclairer la nouvelle configuration théorique atteinte en ce début de XXI^e siècle par l'expérience, accumulée depuis dix ans[4], de ce qui se déploie sous le nom propre *mamuphi* (pour *mathématiques-musique-philosophie*) et qui désigne l'ensemble d'un séminaire (ÉNS-IRCAM-CNRS) et d'une école (de mathématiques pour musiciens)[5], de rencontres et de publications diverses[6]. La nébuleuse *mamuphi* permet

1 Compositeur, École Normale Supérieure/IRCAM, `http://www.entretemps.asso.fr/Nicolas`

2 Cf. *« Pour des rapports d'un type nouveau entre mathématiques et musique, en germe dans l'échange Euler/Rameau de 1752 »* (Journée annuelle « Mathématique et musique », SMF, 2008).

3 Voir ma précédente chronique « Mathématiques et musique » : *« Sur la formalisation par Euler du plaisir musical »* (*Gazette*, juillet 2008, n° 117).

4 L'occasion du lancement de *mamuphi* a été fournie par une initiative (fin 1999) de la SME, qui, dans le cadre de son forum Diderot, avait retenu « la logique » pour thème de rencontres auxquelles elle avait convié l'IRCAM.

5 Voir `http://www.entretemps.asso.fr/maths`

6 On renverra aux deux ouvrages inaugurateurs de *mamuphi* : *« Mathematics and Music (A Diderot Mathematical Forum) »* ; ed. G. Assayag, H.G. Feichtinger, J.F. Rodrigues ; Springer-Verlag, 2002 et *« Penser la musique avec les mathématiques ? »* ; éd. G. Assayag, G. Mazzola, F. Nicolas ; Delatour, 2006.

d'autant mieux d'analyser les différentes manières contemporaines de théoriser la musique à la lumière des mathématiques qu'une assez large convergence s'y réalise dans le choix des outils mathématiques convoqués à cette fin : essentiellement ceux de la géométrie algébrique telle que redessinée par Grothendieck, et plus spécifiquement ceux de sa théorie des topos[7]. Ainsi mathématiciens, musicologues et musiciens se rejoignent dans *mamuphi* pour privilégier cette approche toposique[8] mais, comme on va le voir, ce n'est que pour mieux se partager sur les manières de la mettre en œuvre.

Précisions

– Théoriser la musique peut se faire de bien des manières : il y a des théorisations acoustiques, psychologiques, économiques, sociologiques, ethnologiques, psychanalytiques, mais également philosophiques, épistémologiques, cognitivistes, etc. de la musique comme il y en a des théorisations mathématiques, musicologiques et musiciennes. Seules ces trois dernières modalités sont à l'œuvre dans *mamuphi*.

– Si *mamuphi* inscrit la philosophie à son fronton, ce n'est pas essentiellement au titre d'éventuelles théorisations philosophiques de la musique – telle celle, par exemple, qu'Adorno a pu engager –; il y s'agit plutôt de la conviction suivante : théoriser la musique à la lumière de la mathématique se déploie nécessairement, peu ou prou, à l'ombre de la philosophie (plus précisément : à l'ombre d'une philosophie donnée, propre à l'orientation retenue). Cette ombre de la philosophie s'attache au fait que ce que *théoriser* veut dire ne va nullement de soi : *théoriser* n'a pas de sens univoque mais dépend non seulement de ce qu'il s'agit de théoriser, mais tout autant de qui théorise (disons : de son « sujet » tout autant que de son « objet »). C'est au point précis où il convient d'articuler ces différentes conceptions du théorique – ces « théoricités » – qu'interviendra la philosophie. On laissera ici de côté ce volet proprement philosophique du travail *mamuphi*.

Dans *mamuphi*, trois manières sensiblement différentes de théoriser la musique à la lumière des mathématiques et à l'ombre de la philosophie se confrontent : une manière *mathématicienne*, une manière *musicologique* et une manière *musicienne*.

Manière mathématicienne de théoriser la musique

Cette première manière reprend, dans les conditions mathématiques d'aujourd'hui, le flambeau du grand Euler. Le travail de Guerino Mazzola[9] emblématise aujourd'hui cette tradition mathématique. Le musicien va tout naturellement y retrouver des caractéristiques déjà à l'œuvre dans la théorie eulérienne de la musique[10].

[7] Soit la cinquième des douze « grandes idées » qu'il dégage dans *Récoltes et Semailles* (2.8).

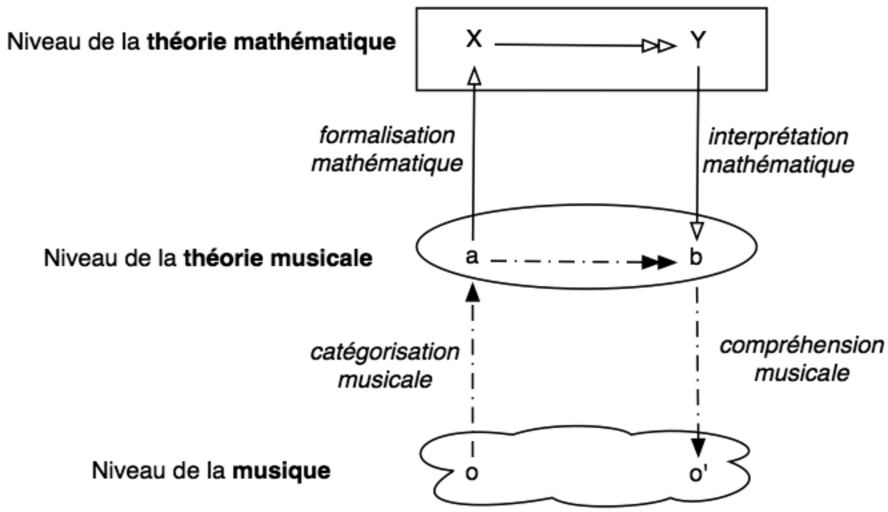
[8] Mes propres ouvrages de référence en la matière sont *Topoi. The Categorial Analysis of Logic* de R. Goldblatt (North-Holland, 1984) et *Sheaves in Geometry and Logic. A First Introduction to Topos Theory* de Saunders Mac Lane & Ieke Moerdijk (Springer-Verlag, 1992).

[9] Voir ses deux ouvrages de référence : *« The Topos of Music »*, Birkhaüser, Basel, 2002 et *« La vérité du beau dans la musique »*, Delatour, Paris, 2007.

[10] Ce qui va être dit de cette vaste théorie mathématique ne saurait tenir lieu de présentation. Au demeurant il s'agit ici d'une lecture musicienne, autant dire d'une lecture plus attachée à délimiter le propos et distinguer sa subjectivité mathématicienne qu'à en explorer la profondeur proprement mathématique.

Théorie d'une théorie

Une théorie mathématique de la musique part toujours d'une théorie préexistante de la musique, que cette théorie – servant au mathématicien de préalable – soit d'ordre musicien (comme à l'époque d'Euler) ou plutôt d'ordre musicologique (comme aujourd'hui[11] pour Mazzola). En effet un mathématicien ne saurait bâtir sa théorie directement à partir de partitions musicales – même s'il sait très bien les lire, le mathématicien ne songera guère à en proposer une nouvelle idée – mais à partir d'analyses préexistantes de ces partitions, à partir donc de théories musicales préformées qui vont lui servir de socle. On peut imager ainsi son échafaudage[12] :



Par exemple, la théorie de Mazzola, en cours de son vaste projet, entreprendra de formaliser :

– la théorie du contrepoint par Johann Joseph Fux (XVIII^e siècle),
– la théorie de l'harmonie tonale par Hugo Riemann (XIX^e siècle),
– l'analyse de la sonate *Hammerklavier* (Beethoven) par deux musicologues Ratz & Uhde (XX^e siècle),
– l'analyse de *Structures I.a* (Boulez) par Giorgi Ligeti.

Théoriser mathématiquement, c'est formaliser, et par là déformer

Théoriser mathématiquement une théorie musicale existante, c'est la formaliser selon des impératifs mathématiques propres. Cette formalisation, n'étant ni une traduction ni une simple transposition[13], implique une déformation, un remaniement de la théorie originale si bien que les catégories communes aux deux versants

[11] La musicologie n'a été inventée qu'au cours du XIX^e siècle, sous la double influence de l'historicisme allemand et du positivisme français...

[12] Précisons que ce « diagramme » comme ceux qui vont suivre ne fait que figurer spatialement une idée directrice. Il n'a donc de valeur qu'illustrative : les points et flèches qui y figurent n'entretiennent de rapports que métaphoriques avec les objets, morphismes et foncteurs de la théorie des catégories.

[13] Le philosophe Charles Alunni, coorganisateur du séminaire *mamuphi*, propose de la considérer comme une *tra(ns)duction*.

théoriques s'avéreront porteuses de sens sensiblement décalés. On l'a vu dans la conception eulérienne du rapport consonance/dissonance[14]. On le retrouve chez Mazzola, par exemple dans sa formalisation des « cadences » et « modulations » : entre ses concepts mathématiques de *cadence* et de *modulation* et les notions musicales homonymes, les rapports seront d'intersection plutôt que de recouvrement. Expliquons. Pour les besoins légitimes de sa cause, Mazzola ne retient de la modulation musicale que deux propriétés :

– l'existence d'enchaînements harmoniques propres à affirmer une tonalité particulière (ceux qui vont articuler une cadence tonale : par exemple II-V-I) ;

– l'existence d'enchaînements harmoniques en partage entre deux tonalités proches (par mobilisation d'accords intermédiaires pouvant donner lieu à pivotement tonal selon une ambiguïté enharmonique : par exemple II-I-IV en Do majeur pourra être réinterprété comme VI-V-I en Fa majeur).

Mais ce faisant,

– la formalisation mathématique retenue reste indifférente à l'ordre des enchaînements harmoniques : elle considérera, par exemple, que l'enchaînement $VI \to II \to V \to I$ (cadence *parfaite*) et l'enchaînement $I \to II \to V \to VI$ (cadence *rompue*) équivalent mathématiquement en un même ensemble non ordonné $\{I, II, V, VI\}$, ce qui ne sera pas sans étonner le musicien...

– De même, la formalisation mathématique considérera que sa « cadence » $\{II - V\}$ équivaut à sa « cadence » $\{VII\}$ puisque ce dernier accord (*si-ré-fa* en Do majeur), ne pouvant apparaître que dans cette tonalité, suffit, à lui seul, à affirmer Do majeur. Là encore, le musicien aura du mal à reconnaître sa musique, ses cadences et ses modulations : si pour lui l'enchaînement $II \to V$ est bien le geste d'une cadence musicale, le simple énoncé de VII ne saurait par contre en tenir lieu, cet accord constituant tout au contraire le prototype de l'accord-pivot polymorphe[15], commun à de nombreuses tonalités.

Bref, le musicien ne reconnaît pas exactement ses cadences et ses modulations dans les concepts homonymes de Mazzola, pas plus qu'il ne pouvait reconnaître ses propres fonctions harmoniques dans la formalisation eulérienne du plaisir musical. Cette torsion relève d'un effet de structure, nullement d'une paresse ou d'une incompétence mathématiciennes : cohésion de l'expérience musicienne et cohérence de la formalisation mathématique, logique musicale et logique mathématique font intrinsèquement deux. Elles peuvent s'approcher, entrer en *rai*sonance, mais elles ne sauraient fusionner ni même se recouvrir[16].

[14] Cf. *Gazette*, juillet 2008 (op. cit.).

[15] Techniquement, cet accord VII relève d'une septième diminuée, laquelle servit à matérialiser l'incertitude tonale en évitant précisément toute logique cadentielle. Ainsi l'accord musicalement le moins « cadentiel » correspond, dans la formalisation mathématique, à l'accord le plus « cadentiel »...

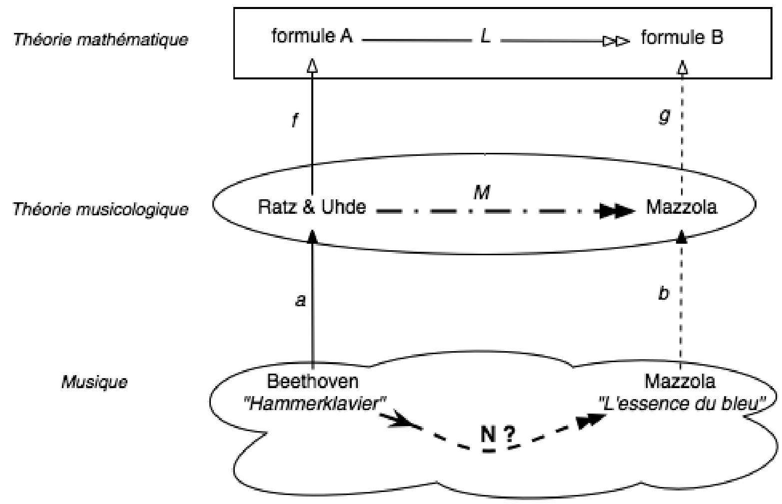
[16] Comme on l'a indiqué, c'est en ce type de point que l'ombre de la philosophie est requise. En deux mots, musique et mathématiques font radicalement deux, sans possibilité – autre que (néo)positiviste ou scientiste – de les conjoindre, et ce en raison de la singularité irréductible de l'œuvre d'art musical. Comme toujours, il en ira, en ce point, de partage entre axiomatiques :

– soit l'on soutient qu'« il y a des œuvres d'art » (Hegel), lesquelles sont en art les véritables sujets, et dans ce cas la mathématique ne pourra qu'ignorer cette spécificité pour ne capter des œuvres-sujets que leur dimension *ontique* (celle de simples « morceaux de musique ») ;

– soit l'on soutient qu'il n'y a pas lieu de distinguer entre pièces de musique et œuvres musicales, qu'il n'y a donc pas lieu de singulariser en musique une figure de sujet, et dans ce cas la

Illustrons d'un autre exemple de quelle manière la théorisation mathématique tend à déformer les voisinages propres au champ musical qu'elle entreprend de formaliser.

Pour mettre à l'épreuve sa formalisation mathématique d'une théorie musicologique (par Ratz & Uhde) de la sonate *Hammerklavier* (Beethoven), G. Mazzola se demande s'il est possible de trouver un équivalent musical à une formule mathématique telle que B, déductible (dans le cadre de sa théorie mathématique) de la formule A (qui formalise la sonate telle que théorisée par les musicologues).



Pour ce faire, Mazzola entreprend de composer un pièce pour piano *L'essence du bleu* dont l'analyse musicale (flèche b), menée selon les mêmes principes musicologiques que pour la sonate de Beethoven (flèche a), puis mathématiquement formalisée (flèche g) selon la même logique que celle ayant servi pour l'analyse de la sonate de Beethoven (flèche f), conduise bien à une formalisation B apparentée (flèche L) à la formalisation A de départ.

On comprend que ce dispositif puisse assurer qu'il existe, dans la théorie de Ratz & Uhde, une flèche M telle que le rectangle du haut commute (c'est-à-dire telle que $g^\circ M = L^\circ f$) puisque la nouvelle pièce de musique (*L'essence du bleu*) a précisément été composée sous la contrainte que son analyse soit bien apparentée (par M) à l'analyse (par Ratz & Uhde) de la sonate de Beethoven.

Mais le musicien adressera ici au mathématicien une question supplémentaire : existe-t-il également une sorte de flèche N – une flèche qui soit cette fois spécifiquement musicale (et non plus musicologique ou mathématique) – telle

mathématique pourra « ambitionner » de formaliser la musique de part en part comme elle peut légitimement ambitionner de le faire pour le mouvement des planètes, la reproduction des fourmis ou les préférences alimentaires des animaux humains. Mais un tel projet – réinstaller la musique sous tutelle de la mathématique – constitue-t-il pour *la mathématique* une réelle *ambition* ? Sans même se prononcer sur la question des œuvres, Euler a su, en tous les cas, se déprendre d'une telle convoitise et respecter l'autonomie du monde de la musique, au demeurant sans rien y perdre – tout au contraire – de la puissance de pensée propre aux mathématiques.

que le rectangle du bas (et donc aussi le rectangle complet) commute c'est-à-dire telle que $b^\circ N = M^\circ a$ (*et* $g^\circ b^\circ N = L^\circ f^\circ a$) ? Autrement dit, cette construction théorique induirait-elle un rapprochement de nature cette fois spécifiquement musicale entre *Hammerklavier* et *L'essence du bleu* ?

Pour le musicien – qui au demeurant est le seul à pouvoir se prononcer sur l'existence proprement musicale d'un tel rapport[17] –, dans ce cas précis, une telle « flèche » N n'existe pas : à examiner les deux partitions – ce n'est pas le lieu ici de se livrer à une telle activité... –, il s'avère en effet qu'il n'y a guère de rapport *musical* entre la sonate de Beethoven et la pièce ainsi générée ad hoc par Mazzola, ce qui n'est pas pour nous surprendre : ce n'est pas parce qu'un certain type d'analyse musicologique peut rapprocher (flèche M) les structures analytiques de deux pièces que ceci suffit à apparenter *musicalement* ces deux pièces (de même que deux bâtiments ne sauraient être architecturalement apparentés comme espaces sensibles du seul fait que leurs plans enchaîneraient la même enfilade de pièces ou qu'on pourrait décompter le même nombre de colonnes sur leurs façades...).

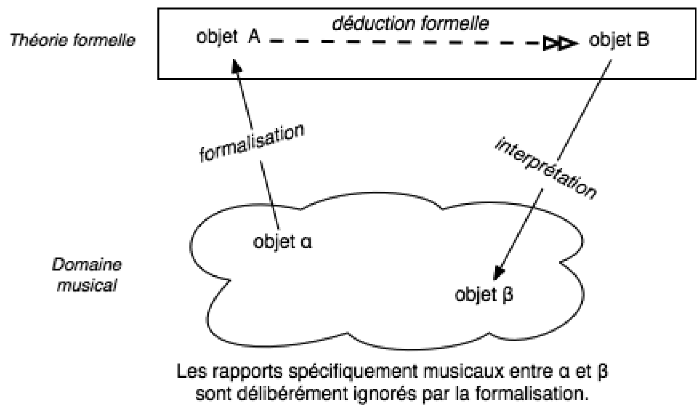
Ceci pointe donc la déformation du monde musical qu'opère nécessairement une telle théorisation mathématique : en instaurant des voisinages formels qui n'ont pas de contrepartie musicale, elle tend à rapprocher des objets musicaux restant pour le musicien fort éloignés, de même qu'à l'inverse, elle pourra éloigner et séparer ce qui pour le musicien constitue un voisinage connexe (voir les familles d'harmonies construites par Euler sur la base de son échelle des suavités : elles séparent des harmonies musicalement proches et rapprochent des harmonies musicalement lointaines).

Précisons à nouveau. Cette déformation de la topologie musicale de départ par l'opération mathématique de formalisation ne tient pas à un négligé du mathématicien. Il s'agit là proprement d'un effet de structure, relatif au point précis qui légitime l'édification logico-mathématique d'une « théorie des modèles » : la mathématique saisit le domaine (qu'elle va entreprendre de formaliser) comme espace *discret* d'objets (il est à lui-même son propre voisinage). La formalisation mathématique sera donc formalisation des objets (ici musicaux) mais nullement de rapports *proprement musicaux* entre ces objets, rapports qu'elle ignore *délibérément*[18]. L'enjeu propre de cette formalisation sera précisément de construire un nouveau type d'espace (théorique) où cette fois les nouveaux objets (mathématiques) seront explicitement reliés par des rapports formels de nature déductive, le va-et-vient entre domaine musical et théorie mathématique

[17] Rappelons-nous Euler : *« En musique, comme dans tous les beaux-arts en général, il faut se régler d'après l'opinion de ceux qui possèdent à la fois un excellent goût et beaucoup de jugement, et conséquemment ne tenir compte que de l'avis des personnes qui, ayant reçu de la nature une oreille délicate, perçoivent de plus avec justesse tout ce que cet organe leur transmet, et sont capables d'en juger sainement. »* Il s'agit donc de *« consulter les métaphysiciens* [= ici les musiciens] *que cette recherche concerne plus particulièrement » Tentamen...* (chap. II).

[18] Sur ce plan, le cas particulier où la mathématique formalise une théorie « empirique » préexistante (ici musicologique) – donc un domaine cette fois non « discret » puisque doté de relations internes (de proximité, d'éloignement, d'enchaînement, etc.) et donc de voisinages non réduits à un seul point – ne constitue qu'une variante puisque *formalisation* et *interprétation* continueront de n'y porter que sur les objets, et nullement sur les morphismes respectifs. La théorisation ainsi conçue ne produira donc pas davantage de *foncteur* entre théorie musicologique et théorie mathématique, ne serait-ce d'ailleurs que parce que la théorie musicologique servant de domaine de départ reste trop empirique pour être véritablement formalisable en catégorie mathématique.

se faisant alors par formalisation et interprétation des seuls objets (musicaux et mathématiques) mais nullement de leurs rapports respectifs.



Techniquement dit, la théorisation en question ne sera donc pas *fonctorielle : formalisation et interprétation* ne seront pas des « foncteurs » entre deux catégories[19].

Ainsi, si l'intérêt spécifique de toute formalisation tient précisément aux rapports contrastés entre un domaine de départ formellement saisi comme *discret* (sans rapports immanents) et un domaine théorique où les objets seront reliés par des déductions formelles, il va de soi que les rapports musicaux (que le musicien connaît bien mais que la théorie ignore) apparaîtront à ce musicien comme déformés et non reflétés par la construction théorique en question. Autant dire que les réserves musiciennes face à une telle théorisation mathématique seront inévitables.

Une théorie coordonnant une gerbe de formalisations

Théoriser mathématiquement la musique engage une large diversité de formalisations que le mathématicien devra coordonner s'il veut bâtir *une* théorie de la musique et non pas accumuler un fatras d'opérations locales.

Mazzola procède à cette coordination dans le cadre qui lui est offert par la théorie grothendieckienne des topos[20]. Euler, bien sûr, ne disposait pas d'un tel cadre préexistant, et sa théorisation de la musique lui servait précisément – entre autres... – à mettre à l'épreuve d'un même objet (la musique) l'unité des mathématiques de son temps, alors prises dans un vaste mouvement de diversification... Dans les deux cas, une théorie mathématique de la musique se caractérise cependant de ne pas se contenter de collectionner des *formalisations* disparates pour prendre en charge leur unification mathématique. On comprend qu'une telle exigence relève d'un ordre spécifiquement mathématique, et aucunement musical. D'où le point suivant.

[19] A fortiori, il ne saurait y avoir d'*adjonction* entre domaine musical et théorie mathématique. Un aspect important des débats internes à *mamuphi* porte sur ce point précis...

[20] Notons sa réinterprétation systématique des *morphismes* catégoriels comme *adresses* (familières à l'informatique théorique), $x \to y$ se trouvant réinscrit $x@y$...

Une théorie servant la mathématique plutôt que la musique

De telles théories mathématiques, qui ultimement visent la mathématique bien plus que la musique et qui sont l'affaire subjective de mathématiciens – le musicien ne se soucie pas plus de la question de l'unité des mathématiques que le mathématicien ne se soucie d'apporter une nouvelle lecture de telle ou telle œuvre musicale – ne sauraient être d'usage réel pour le *working musician*. Le musicien, artisan de son art, ne s'intéressera donc guère à ces théories mathématiques, et tout simplement ne les lira pas : ce n'est pas seulement qu'il pourra être rebuté par tel ou tel détail technique ; c'est plus essentiellement qu'il n'a guère besoin d'un tel type de théorie, que ce soit évidemment dans sa pratique mais également dans son éventuel souci de théoriser, pour son propre compte, la musique (on examinera plus loin la manière spécifique dont le musicien, cette fois pensif, pourra s'emparer des mathématiques pour théoriser la musique).

Une théorie productrice de nouveaux savoirs sur la musique

Ceci n'implique nullement qu'une telle théorie mathématique de la musique reste entièrement vaine pour le musicien, du moins pour le musicien pensif[21]. Par exemple la formalisation mazzolienne aboutit à ce résultat remarquable : la théorie du contrepoint par Fux et la théorie de l'harmonie par Riemann s'avèrent dans la théorie mazzolienne étroitement apparentées par la géométrie d'intervalles qui les ossature, lors même que les deux théories de Fux et de Riemann restent séparées par la chronologie (respectivement XVIIIe et XIXe siècles) et par la pratique des musiciens (en musique, contrepoint et harmonie donnent lieu à des enseignements disjoints, sans unification théorique[22]).

Ainsi cette théorie mathématique révèle des propriétés structurales, jusque-là inaperçues du musicien et du musicologue. C'est dire qu'elle favorise une extension des savoirs sur la musique à défaut de favoriser une invention dans les pratiques musiciennes.

C'est à ce titre que ce type mathématique de théorie tendra à intéresser les musicologues de préférence aux musiciens s'il est vrai que les uns et les autres se distinguent en ceci : les musicologues se constituent autour de savoirs en extériorité sur une musique conçue comme objet déjà là, quand les musiciens procèdent de connaissances en intériorité d'une musique qu'ils font.

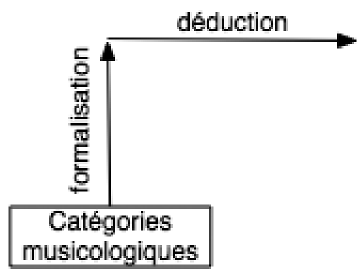
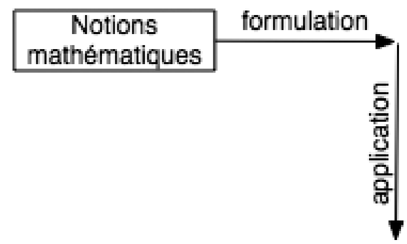
Manière musicologique de théoriser la musique

La manière proprement musicologique de théoriser la musique avec les mathématiques va opérer à l'inverse de la manière mathématicienne : elle partira cette fois d'une théorie mathématique préexistante pour entreprendre de l'appliquer à telle ou telle question musicologique. On peut contraster ces deux dynamiques de la façon suivante :

---

[21] Le musicien tend à devenir pensif « lorsque la musique s'arrête » (Th. Reik), le musicien se retrouvant alors provisoirement vacant, délaissé hors du monde musical. C'est le moment où il est naturellement conduit à réfléchir sur ce qui lui est arrivé, à verbaliser son expérience musicale pour s'encourager à continuer son va-et-vient (*in/out* le monde-*Musique*).

[22] L'unification ne se réalise que pratiquement, par exemple par l'exercice scolaire du choral et de la fugue...

<table>
<tr><td>Manière mathématicienne :</td><td>Manière musicologique :</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Elle formalise mathématiquement des catégories musicologiques (qu'elle prélève dans le corpus musicologique constitué) pour opérer des déductions dans l'espace proprement mathématique de ses objets.</td><td>Elle élabore, à partir de notions mathématiques (qu'elle prélève dans le corpus mathématique constitué), une formulation originale susceptible d'être appliquée dans l'espace proprement musicologique de ses catégories.</td></tr>
</table>

Somme toute, la manière musicologique de théoriser la musique avec les mathématiques consiste à bâtir un « modèle mathématique » pour un problème musicologiquement donné : si la formalisation mathématicienne peut être conçue comme une « mathématisation » de la musique, la manière musicologique consistera plutôt en une « modélisation » mathématique de la musicologie[23]. D'où que cette dernière manière privilégie, dans la mathématique, son pouvoir calculatoire bien plus que sa puissance conceptuelle. Ceci engage ce type de théorie musicologique sur la voie de ce qu'on appelle « une musicologie computationnelle ». Dans *mamuphi*, le porteur le plus éminent de cette orientation est Moreno Andreatta[24].

Ses travaux procèdent surtout de l'algèbre pure (essentiellement la théorie des groupes) mais une partie significative s'appuie désormais sur une modélisation en terme de topos. Ceci concerne par exemple ce que la *music theory*, depuis David Lewin, appelle l'approche « transformationnelle » des réseaux de hauteurs. De quoi s'agit-il ?

Il s'agit d'abord de segmenter une partition de musique en groupes de hauteurs – mettons en « accords »... – reliés entre eux (*réseau transformationnel*) par des opérations musicales de *transposition* et *d'inversion* en sorte de produire un recouvrement global de la partition concernée. D'où la constitution d'un espace abstrait :

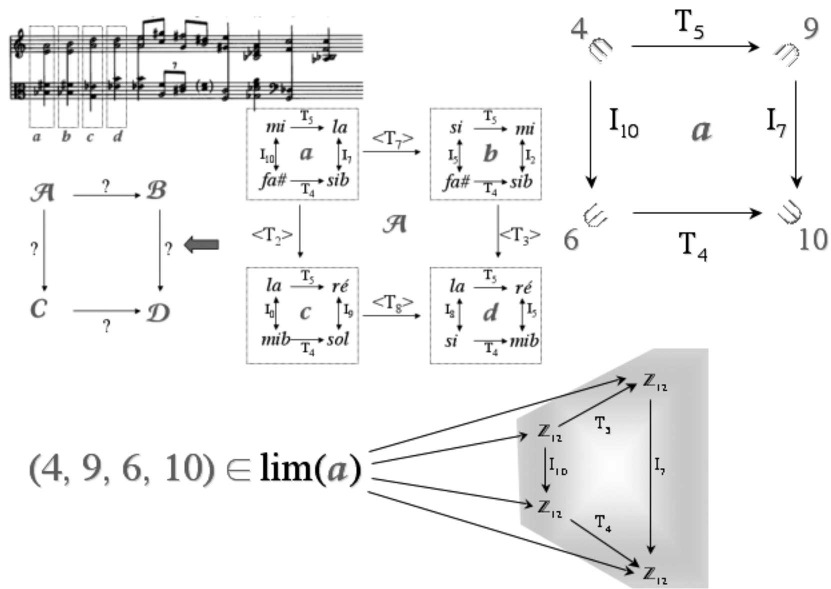
---

[23] Rappelons que « modèle » s'emploie ici à rebours du sens qu'à ce mot dans « la théorie des modèles » (logico-mathématique). Dans cette dernière, *modèle* désigne l'original à copier/formaliser ; dans la « modélisation mathématique », *modèle* désigne le modèle réduit, la maquette à interpréter. Pour une discussion du sens philosophique (néo-positiviste) de ce retournement, on renverra à *Le concept de modèle*, A. Badiou, Maspéro 1969 - rééd. Fayard 2007.

[24] Indiquons que cette musicologie computationnelle trouve un prolongement naturel dans un séminaire spécifique, apparenté à *mamuphi*, qui se tient à l'Ircam sous le nom MaMuX : `http://www.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/` On trouvera dans le *Journal of Mathematics and Music* de nombreuses contributions à ce nouveau type de musicologie
`http://www.tandf.co.uk/journals/titles/17459737.asp`

celui des transformations au cours du temps (*progression transformationnelle*) des groupes constitutifs de ce réseau.

Cette insistance moins sur la nature particulière des hauteurs regroupées que sur la structure des transformations auxquelles ces groupes donnent lieu, préfigure une matière musicologique qui se prête alors tout naturellement à une modélisation de type catégorielle privilégiant de même les relations sur les objets.



Modélisation d'une analyse musicologique
par D. Lewin de Schoenberg : op. 11 nº 2

Plus précisément, le musicologue, soucieux d'énumérer et classifier ces structures musicales (« réseaux de Klumpenhouwer »), recourra à une modélisation de nature toposique – voir la *limite* pour le dernier diagramme – qui, une fois informatiquement implémentée[25], pourra dégager les bonnes stratégies d'analyse sur les réseaux à l'œuvre dans telle partition. Ainsi la modélisation musicologique par les topos débouchera-t-elle directement sur une analyse musicologique assistée par ordinateur.

Mentionnons également un effet en retour sur la mathématique de cette musicologie puisque certaines questions que cette formalisation adresse à la mathématique pourront susciter chez cette dernière de nouveaux problèmes. C'est là ce que Moreno Andreatta aime à appeler un problème « *mathémusical* » : un problème musicologique adressé aux mathématiques tel que sa formalisation suscite de nouveaux théorèmes ouvrant à de nouvelles applications musicologiques[26].

[25] Voir *From a Categorical Point of View : K-nets as Limit Denotators* (G. Mazzola et M. Andreatta, *Perspectives of New Music*, 44-2, 2006) et, plus généralement, les travaux de l'équipe *Représentations musicales* de l'IRCAM : `http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/`

[26] Il devrait donc, à mon sens, s'agir plutôt d'un problème « mathémusicologique »...

Manière musicienne de théoriser la musique

Reste une troisième manière, fort différente, de théoriser la musique à la lumière des mathématiques : celle du musicien – s'entend bien sûr le *working* musicien (il n'y en a guère d'autre !) –.

Le musicien se distingue globalement des deux orientations précédentes en ce que sa théorisation ne visera guère à produire une « théorie » comme telle : sa théorisation relèvera plutôt de ce que Louis Althusser avait appelé une « pratique théorique », soit une intervention dont l'enjeu n'est plus la constitution d'un système théorique, stable et transmissible (« une théorie »), mais le dégagement d'une idée musicienne de la musique[27]. À ce titre, on pourra dire que la théorisation proprement musicienne est une *idéation*[28].

Méthodologiquement, le recours aux mathématiques pour théoriser ainsi la musique se déploiera sous le signe de ce qu'on appellera, à la suite de Gaston Bachelard, une *expérimentation* de la pensée : il s'agira pour le musicien de mettre en jeu un double rapport de formalisation et d'interprétation (entre catégories musicales et concepts mathématiques) en sorte de mettre sa pensée discursive à l'épreuve de la cohérence mathématique. Donnons pour cela un exemple, que j'emprunterai cette fois à mon propre travail.

Théoriser un monde-Musique comme topos...

Admettons qu'un musicien pensif d'aujourd'hui éprouve le besoin de théoriser en quel sens la musique peut former un monde propre ; les bonnes raisons n'y manquent pas, à commencer par son désir de contrer cette nouvelle habitude, pour lui détestable, de substituer l'expression « les musiques » à l'ancestrale expression des musiciens : « la musique » [29].

Ce musicien voudrait donc soutenir en pensée qu'il existe bien un monde de la musique (et pas seulement une région approximativement délimitable dans un univers général) et un seul, et que ce monde, quoique intérieurement diversifié (comme tout monde !), reste connexe (tout ce qui s'y passe en quelque endroit que ce soit concerne en droit tout autre endroit). Bref, le musicien voudrait pouvoir dire de la musique ce qu'Alain Connes dit de la mathématique : *« il n'y a qu'un monde mathématique »* [30] et *« ce monde mathématique est connexe »* [31].

Mais pour cela, comment procéder ? Comment asseoir en pensée une telle idée musicienne d'*un* monde musical ?

---

[27] Cette idée musicienne sur la musique se distingue, bien sûr, de l'idée *musicale* : celle qui, en cours d'œuvre, prend la forme d'un objet musical, par exemple d'un thème.

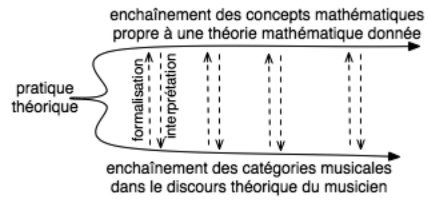
[28] J'appelle « intellectualité musicale » cette idéation musicienne. Ne nous trompons donc pas sur la théorisation à l'œuvre chez Rameau, ce pionnier de l'intellectualité musicale : son évolution à partir de 1750 souligne qu'il s'agissait pour lui dès le départ d'intervenir théoriquement en faveur d'une certaine idée (harmonique...) de la musique, mal établie dans son temps ; sa « théorie » s'avère ainsi avoir été une manière (théorique) de plaider sa cause de musicien « harmonique » plutôt que mélodique : en la dotant de fortes bases enracinées dans la rationalité (en particulier cartésienne) de son époque

[29] Disons qu'il en va ici d'un souci proprement musicien pour l'unité de la musique, qui s'avère en tout point équivalent au souci eulérien de maintenir l'unité de la mathématique par-delà la diversité bienfaisante de ses pratiques.

[30] *A View of Mathematics* : `http://www.alainconnes.org/docs/maths.ps`

[31] *Les déchiffreurs*, p. 14, Belin, 2008.

Le musicien pourra alors se tourner vers la mathématique en se disant[32] : « le concept grothendieckien de *topos* fournit une forte idée mathématique contemporaine de ce qu'est un monde ; mettons donc notre idée musicienne d'un *monde* musical à l'épreuve de cette idée mathématique de *topos*. » D'où l'ouverture d'une pratique théorique consistant à explorer de concert le double enchaînement des concepts mathématiques et des catégories musicales selon le mouvement suivant :



Dans notre exemple – comment théoriser, à la lumière de la mathématique grothendieckienne des topos, la musique comme monde ? –, cette expérimentation[33] conduira le musicien à :

(1) formaliser un morceau de musique comme *faisceau* des exécutions-interprétations de sa partition ;

(2) formaliser la bibliothèque des partitions de musique comme *site* de ses quodlibets (ou pots pourris) ;

(3) formaliser le monde de la musique comme *catégorie* des morceaux extraits de cette bibliothèque ;

(4) formaliser le monde de la musique comme *topos* de tous ces morceaux-faisceaux ;

(5) tirer, en cours de route, toutes conséquences adéquates en matière d'objets et relations en musique.

On pressent que cette expérimentation musicienne des concepts mathématiques n'intéressera guère les mathématiciens, les effets attendus d'une telle théorisation restant intrinsèquement musicaux. Elle n'intéressera guère plus les musicologues qui n'y reconnaîtront guère les procédures réglant leur production « objective » de savoirs[34].

Où l'on touche du doigt une difficulté singulière des confrontations au principe des rencontres *mamuphi* : il ne va guère de soi que les théorisations mathématiciennes, musicologiques et musiciennes puissent s'intéresser réciproquement. D'où que le défi spécifique du projet *mamuphi* soit précisément de faire entrer en *rai*sonance des théoricités aussi distinctes, tant objectivement que subjectivement – on l'a relevé : c'est en ce point exact que l'ombre de la philosophie devient requise –.

---

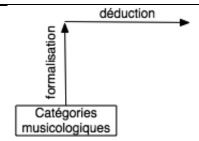
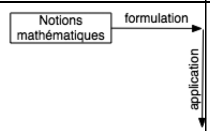
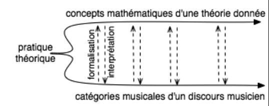
[32] Il y sera incité par le livre *Logiques des mondes* d'Alain Badiou (Seuil, 2006) qui soutient que le concept philosophique de *monde* doit aujourd'hui se déployer sous condition de la catégorie mathématique de *topos*.

[33] Pour plus de détails, on pourra se reporter à une première présentation de ce *work in progress* : `http://www.entretemps.asso.fr/Nicolas/2008/Faisceaux.htm`

[34] Pour qu'un musicologue puisse s'intéresser à une « idée musicienne », il lui faut d'abord la vitrifier en « objet » musicologique.

Au total...

Résumons nos trois grandes orientations.

	Mathématisation ou *formalisation* mathématicienne	Modélisation ou *application* musicologique	Expérimentation ou *pratique théorique* musicienne
			
Enjeux de cette théorisation :	faire de la mathématique tout en élargissant la puissance des mathématiques et consolidant leur unité	produire, en extériorité objectivante, de nouveaux *savoirs* sur la musique	Approfondir, en intériorité subjectivante, la *connaissance* musicale
Résultat de cette théorisation :	une théorie (mathématique)	une théorie (musicologique)	une idée musicienne de la musique
La musique est :	une origine indirecte (médiée par la musicologie)	une cible indirecte (médiée par la musicologie)	un espace de pensée sensible
La mathématique est :	une cible	une origine	un espace de pensée ontologique
Les mathématiques concernées prennent la forme de :	*théories*	*formules & équations*	concepts
Les rapports musique-mathématiques privilégient :	les formalisations	les interprétations	les *rai*sonances, donc les mathèmes

Des rapports entre ces trois théorisations

Même si chacun aura compris où vont les préférences personnelles de l'auteur (musicien) de cet article, il est clair cependant que chaque orientation ici distinguée dispose de sa propre cohérence et qu'il n'existe pas de position en surplomb[35] qui autoriserait de hiérarchiser nos trois théorisations. Le tableau précédent indique cependant que le 3 de nos orientations peut se décompter, de trois manières, en $2+1$.

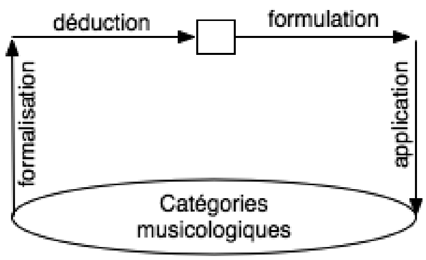
Complémentarités mathématiciens/musicologues

D'abord positions mathématicienne et musicologique s'y présentent comme duales et/ou complémentaires. C'est bien ce qui autorise une nouvelle manière, cette fois *mixte*, de théoriser la musique avec les mathématiques, manière qui enchaîne *mathématisation* puis *application*[36] :

---

[35] La philosophie ne relève pas davantage d'un point de vue de Sirius...

[36] Cette manière est très immédiatement à l'œuvre dans *mamuphi* s'il est vrai, d'un côté que les ouvrages de Mazzola, se souciant d'implémenter informatiquement sa théorie, mettent l'accent



Connivences mathématiciens/musiciens

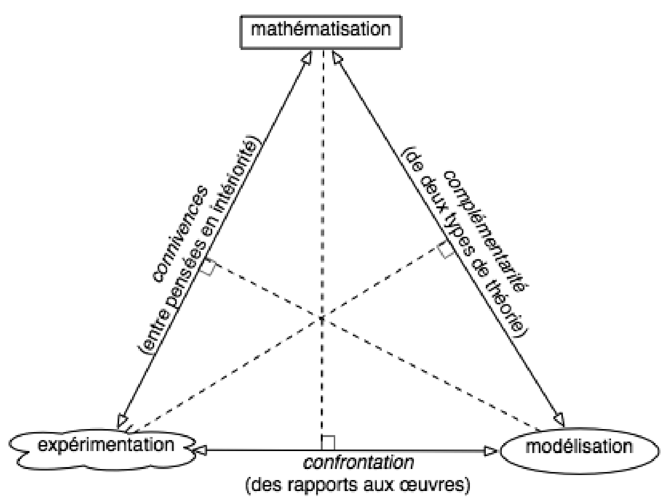
On peut ensuite relever qu'orientations mathématicienne et musicienne suscitent de plus étroites connivences entre pensées en intériorité que n'en provoque une pratique musicologique de la modélisation fortement technicisée, privilégiant la puissance de calcul des mathématiques et extériorisant la dimension « objective » de la musique.

Confrontations musiciens/musicologues

Enfin, théoricités musicologiques et musiciennes se rencontrent autour des partitions musicales puisqu'elles y accordent la même attention directe. Ceci entretiendra entre elles ce qu'on appellera ici, d'un doux euphémisme, une saine émulation...

Géométrie générale

L'expérimentation musicienne étant « orthogonale » à la complémentarité des théories mathématique et musicologique tout autant que la modélisation musicologique l'est aux connivences entre pensées en intériorité (mathématicienne et musicienne) et que la mathématisation l'est aux confrontations musiciens/musicologues en matière de partitions, la géométrie *mamuphi* qui procède de ces rapports pourra être ainsi figurée :



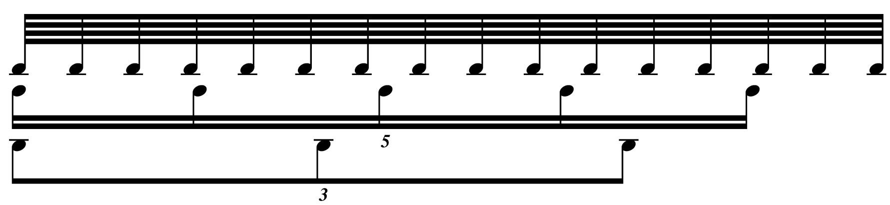
sur les retombées computationnelles de sa théorie mathématique et, d'un autre côté, que les travaux musicologiques d'Andreatta s'enracinent étroitement dans la théorie mazzolienne de la musique.

Un contrepoint...

Au total, et selon une métaphore cette fois musicale, les rapports de nos trois théoricités donnent forme de contrepoint au cours polyphonique de *mamuphi*. Comme les musiciens le savent bien, ce sont les dissonances – non les consonances – qui font la musique, et ces dissonances, au moins depuis Schoenberg, n'ont plus besoin d'être résolues pour rester musicales. Le musicien sera donc en droit d'attendre le meilleur de ces dissonances/orthogonalités *mamuphi* qu'il lui a fallu, pour bien ici les faire entendre, restituer *mezzo-forte (mf)* plutôt que *pianissimo (pp)*...

Erratum de l'article : « Sur la formalisation par Euler du plaisir musical[37] »

p. 40 – le second exemple musical comporte 16 quadruples croches et non pas 8 triples croches :



[37] *Gazette* n° 117 de juillet 2008.

ENSEIGNEMENT

De la maternelle à l'université, les projets de réforme fusent en ce moment en matière d'enseignement et de recherche. Nous présentons ici trois textes traitant de ces sujets d'actualité.

Où va la réforme des lycées ?

Daniel Duverney[1]

Le but de cet article, rédigé au mois de novembre 2008 pour une publication dans la *Gazette des mathématiciens* du mois de janvier 2009, est de proposer une réflexion sur la réforme des lycées en préparation, fondée sur une synthèse des informations disponibles et une analyse des effets des réformes précédentes. Cette nouvelle réforme, menée à un rythme très rapide, doit entrer en vigueur à la rentrée 2009 en seconde. Le cycle terminal (première et terminale) suivra dès septembre 2010. Compte tenu de l'évolution rapide de l'actualité, il se peut que certaines informations contenues dans cet article soient obsolètes lors de sa parution. Nos lecteurs et lectrices voudront bien nous en excuser et se reporter dans ce cas au site Internet de la SMF[2], qui assure des mises à jours régulières de ces informations.

Deux objectifs majeurs

Le projet actuel de réforme des lycées poursuit deux objectifs majeurs :

Il s'agit d'abord de réduire le coût du lycée français

Selon le Ministre Xavier Darcos[3], le lycée français coûte 22% de plus que le lycée des pays de taille comparable. L'inflation des coûts du lycée français depuis 1990, due en partie aux précédentes réformes, est connue depuis déjà un certain temps. Elle est notamment chiffrée dans un rapport conjoint de l'Inspection Générale de l'Éducation Nationale et de l'Inspection Générale des Finances daté de 2005. Ce rapport propose d'ailleurs des mesures permettant des économies, tout en conservant la structure actuelle à trois voies du lycée d'enseignement général : économique, littéraire et scientifique[4].

[1] Lycée Baggio, Lille.
[2] `http://smf.emath.fr/Enseignement/ReformeLycee2009/`
[3] Voir le rapport d'étape du ministre du 21 octobre 2008 : `http://www.education.gouv.fr/cid22768/reforme-du-lycee-point-d-etape.html`
[4] Rapport sur la grille horaire des enseignements au lycée général et technologique, Rapport conjoint IGEN-IGAENR-IGF, 2006 : `http://www.education.gouv.fr/cid5424/rapport-sur-la-grille-horaire-des-enseignements-au-lycee-general-et-technologique.html`

Cependant, l'élection de M. Sarkozy à la présidence de la République au mois de mai 2007 conduit visiblement, pour respecter l'engagement de ne pas remplacer un fonctionnaire sur deux partant à la retraite, à des suppressions massives de postes dans l'Éducation Nationale. Il est relativement clair que ceci ne peut conduire qu'à une diminution de l'horaire-élève au lycée, qui plaide en partie pour une modification de la structure même des enseignements au lycée ; mais cela n'implique pas forcément un bouleversement radical.

L'argument de réduction des coûts n'est pas, en soi, inadmissible ; le problème est bien évidemment de savoir jusqu'où cette diminution doit aller, et à quel prix, notamment en termes de niveau de formation et de qualification.

Il s'agit aussi de réaliser un tronc commun jusqu'au baccalauréat

Cet objectif majeur se trouve, depuis le début du lancement officiel de la réforme des lycées par M. Sarkozy[5], enrobé dans un discours « moderniste » : un système modulaire serait mieux adapté aux désirs d'autonomie des lycées et des jeunes, aux objectifs européens, et à la préparation à l'enseignement supérieur universitaire (LMD). Pourtant, le projet de lycée préparé par le cabinet du ministre Xavier Darcos et par la commission *Lycée* dirigée par le recteur Jean-Paul de Gaudemar n'est en rien un projet de lycée modulaire. Il s'agit d'un projet de tronc commun avec options, explicitement assumé d'ailleurs par M. Darcos dans un entretien au *Monde* le 8 novembre 2008[6].

Les grandes lignes du projet ministériel

L'organisation proposée pour le lycée, décrite dans le « point de situation » du 17 juillet 2008[7], reprend presque mot pour mot les préconisations du rapport[8] de l'IGEN sur la voie scientifique de novembre 2007 ; ce rapport n'utilisait pas le mot « module », mais proposait de structurer les enseignements au lycée selon trois grands groupes :

[5] Voir l'article *« Nicolas Sarkozy veut créer un lycée à la carte »* , publié dans *Le Figaro* du 2 juin 2008.

[6] Dans cet article, Luc Cédelle pose la question suivante : *« Le lycée "modulaire" que vous annoncez se réduit à deux modules de trois heures en classe de seconde à partir de 2009. Pourquoi ce choix si "raisonnable", selon vos propres termes ? »* Le ministre Xavier Darcos répond : *« Nous n'avons pour l'instant abordé que la classe de seconde. Les discussions n'ont pas encore commencé sur la première et la terminale. Et tout en sauvegardant un tronc commun de 21 heures, nous apportons déjà des changements majeurs. L'organisation en deux semestres, séparés par une semaine de bilan ; les modules et la possibilité d'en changer, sans conséquence sur la future orientation ; les trois heures hebdomadaires de soutien personnalisé... Tout cela fait bien plus qu'une réformette. Notre démarche est cohérente. Nous voulons consolider partout les bases d'un savoir partagé : les fondamentaux au primaire, le socle commun au collège, le tronc commun au lycée. Et, à côté, ce que font tous les pays modernes : offrir de nouveaux services aux élèves et aux familles. »*

[7] `http://www.education.gouv.fr/cid21733/point-de-situation-sur-la-reforme-du-lycee.html`

[8] *La série scientifique au cycle terminal du lycée : articulation avec le cycle de détermination et orientation vers les études supérieures*, rapport conjoint IGEN-IGAENR, Novembre 2007 : `http://www.education.gouv.fr/cid20702/la-serie-scientifique-au-cycle-terminal-du-lycee-articulation-avec-le-cycle-de-determination-et-orientation-vers-les-etudes-superieures.html`

(1) Des enseignements fondamentaux destinés à prolonger et approfondir les connaissances de base du collège. Ils permettraient l'acquisition des connaissances et compétences indispensables à la poursuite d'études supérieures.

(2) Des enseignements complémentaires visant :

– en seconde, à un approfondissement et/ou une meilleure maîtrise des fondamentaux ;

– en cycle terminal, à la spécialisation dans un domaine particulier.

(3) Des activités d'accompagnement autorisant une plus grande individualisation des parcours :

– En seconde, elles doivent permettre à l'élève de mieux réfléchir à ses choix d'orientation (modules d'exploration ou d'approfondissement, travaux interdisciplinaires, ateliers de pratiques scientifiques ou artistiques), mais aussi de mieux se préparer à la suite de son parcours par des aides au travail personnel et des remises à niveau, des activités de découverte des métiers, etc.

– En cycle terminal, elles doivent se centrer sur le choix de parcours effectué, la préparation à l'examen et l'anticipation des études supérieures.

L'équilibre de ces trois blocs devrait être le suivant (en % du temps-élève) :

	Enseignements fondamentaux	Enseignements complémentaires	Activités d'accompagnement
Seconde	60%	25%	15%
Cycle terminal	45%	45%	10%

Le tronc commun, présenté sous le terme « enseignements fondamentaux » serait constitué de modules semestriels obligatoires, essentiellement dans le domaine des humanités : français, philosophie (en terminale), histoire et géographie, deux langues vivantes obligatoires ; s'y ajouteraient les mathématiques et l'éducation physique et sportive. Les sciences expérimentales (physique, chimie, biologie et géologie, en un seul bloc), exclues du projet initial, ont été rajoutées en classe de seconde à la suite des protestations[9] des milieux scientifiques, notamment de l'Académie des Sciences, de l'UdPPC et de l'Union des Professeurs de Spéciales.

Une description plus précise de la future organisation de la classe de seconde a été donnée par le ministre lors de son « rapport d'étape » du 21 octobre 2008[10].

Il est clair que l'existence de modules obligatoires, qu'ils soient semestriels ou non, complétés par des modules complémentaires au choix, fait de l'organisation proposée un système de tronc commun avec options. Ce n'est en rien un système modulaire. Un tel système, s'il est admissible pour la seconde, qui doit rester une classe de détermination dans le projet actuel du ministre, devient tout à fait problématique pour le cycle terminal, comme nous le montrerons plus loin.

---

[9] Voir l'avis de l'Académie des Sciences du 30 septembre 2008 : `http://www.academie-sciences.fr/actualites/textes/sciences_lycee_03_10_08_avis.pdf`. Voir également la pétition lancée par l'Union des Professeurs de Physique-Chimie (UdPPC) à la fin septembre 2008 : `http://www.udppc.asso.fr`

[10] Voir note 1.

Comment organiser les études au lycée ?

En plus du système actuel des filières, décrié de manière parfois excessive, et du système du tronc commun avec options, actuellement préconisé par le ministère, il existe *a priori* deux autres organisations possibles du lycée, toutes deux fondées sur un enseignement réellement modulaire :

(1) Un choix d'enseignements par unités de valeur formant des briques juxtaposées de savoir. Par exemple, pour les mathématiques en première et en terminale, un module d'analyse, un de géométrie, un de calcul des probabilités et statistiques, etc., éventuellement assurés par des professeurs différents pour chacun des modules. C'est le modèle finlandais, et c'est aussi celui qu'on retrouve à l'université.

(2) Un choix d'enseignements par niveau d'approfondissement. Pour les mathématiques à nouveau, par exemple, un niveau « élémentaire », un niveau « normal », un niveau « supérieur » dans chacune des classes de première et de terminale. Un module de niveau donné est assuré par un seul professeur. Les modules d'une même discipline se distinguent par leurs horaires, nettement différenciés, et par leurs contenus, adaptés aux objectifs, aux projets et à la motivation des élèves qui les choisissent. Un tel système modulaire existe par exemple en Irlande.

La SMF, la SMAI, la SfdS et F&M ont d'ailleurs insisté sur les différences entre les quatre organisations possibles du lycée et fait part de leur réflexions dans une lettre[11] transmise le 15 juillet 2008 aux cabinets des ministres Xavier Darcos, Valérie Pécresse, François Fillon, ainsi qu'à celui du Président de la République.

Cette lettre était accompagnée d'une annexe[12] : celle-ci donnait notamment un exemple d'organisation modulaire par niveau d'approfondissement permettant de conserver la cohérence verticale des enseignements scientifiques, notamment en mathématiques, actuellement permise par l'existence de la série scientifique.

Cette nécessaire cohérence verticale des enseignements scientifiques, également soulignée dans un avis récent de l'Académie des Sciences[13], serait mise à mal dans un système modulaire par juxtaposition, ainsi que dans un tronc commun avec options jusqu'au baccalauréat, tel que celui qui est en préparation.

Une délégation de nos quatre sociétés a été reçue par le chef de la mission *Lycée*, Jean-Paul de Gaudemar, le 24 septembre 2008. Cette audition ne semble pas avoir fait dévier d'un iota l'orientation générale de la réforme.

Le problème des études littéraires au lycée

Le problème de la « hiérarchisation des séries » semble être la motivation principale de la proposition d'organisation en tronc commun jusqu'au baccalauréat[14].

À ce sujet, rappelons que les causes de la hiérarchisation des séries du lycée actuel et les effets des réformes de 1993 et 2001 ont été analysées lors du colloque *Quel*

[11] `http://smf.emath.fr/VieSociete/PositionsSMF/LettreLycGaudemar.pdf`

[12] `http://smf.emath.fr/VieSociete/PositionsSMF/Annexes2Def.pdf`

[13] Comité sur l'enseignement des sciences de l'Académie des Sciences, Réflexions sur l'enseignement des sciences au lycée, 15 juillet 2008 : `http://www.academie-sciences.fr/enseignement/enseign_lycee_07_08.pdf`

[14] Voir par exemple le rapport conjoint de l'IGEN et l'IGAENR sur la voie scientifique (note 6), le point de situation du ministre du 17 juillet 2008 (note 5) ainsi que le dossier *« Sauver les lettres »* publié dans le *Monde de l'Éducation* du mois d'octobre 2008.

avenir pour les Études Scientifiques au lycée et dans l'Enseignement Supérieur[15] organisé par le collectif *Action Sciences* à l'École Normale Supérieure le 5 avril 2008.

Il semblerait en fait que ce projet de tronc commun résulte d'une volonté de recentrer l'enseignement au lycée sur les humanités, comme le montre l'équilibre des différentes disciplines dans les « enseignements fondamentaux ». Ceci n'est pas sans rappeler la réforme de l'égalité scientifique du ministère Bérard (1923), qui avait conduit à une baisse notable du niveau de l'enseignement mathématique et scientifique au lycée ; les poursuites d'études supérieures dans le domaine des sciences et technologies en avaient été profondément affectées[16].

Créer un tronc commun dans le cycle terminal, aligné sur le tronc commun de seconde comme dans le projet actuel, ne réglera probablement pas le problème des études littéraires au lycée, pour lequel du reste d'autres propositions ont été formulées, notamment par l'IGEN[17]. Par contre, imposer aux futurs scientifiques un cursus par juxtaposition de modules (ou options), dans le cadre d'un tronc commun, détruirait en grande partie notre enseignement scientifique et technologique, secondaire et supérieur.

En effet, un enseignement de tronc commun dans le domaine scientifique devra, par la force des choses, limiter ses ambitions dans le domaine des techniques scientifiques (calculs effectifs, expériences de laboratoire, développement de théories mathématisées, batteries d'exercices d'entraînement, etc.), pour insister sur l'aspect culturel de la science, par exemple dans ses rapports avec la philosophie, l'histoire, la société[18].

Il ne s'agit pas de nier ici que ces aspects soient importants ; certains sont d'ailleurs déjà abordés dans le cadre actuel. Cependant, dans l'hypothèse très vraisemblable d'un horaire réduit pour cause d'économies, ceci reviendra à remplacer une partie conséquente de l'enseignement de pratiques mathématiques et scientifiques (assuré essentiellement dans les modules optionnels) par un discours sur les mathématiques et les sciences (dominant dans le tronc commun).

---

[15] Actes du colloque (30 MO) : `http://vslovacekchauveau.free.fr/MetiersMaths/actes9sept.pdf`

[16] Nicole Hulin, *« Les méfaits de l'égalité scientifique »* , *Bulletin de l'Union des Professeurs de Spéciales*, n° 205, janvier 2004, pp. 10-17. Voir aussi Éric Barbazo : *« L'APMEP et l'égalité scientifique dans les programmes de 1925 »* : `http://www.apmep.asso.fr/spip.php?article1985`

[17] *Évaluation des mesures prises pour revaloriser la série littéraire au lycée*, rapport conjoint IGEN-IGAENR, juillet 2006, `http://www.education.gouv.fr/cid4230/evaluation-des-mesures-prises-pour-revaloriser-la-serie-litteraire-au-lycee.html`

[18] Cette conception de l'enseignement des sciences ne manque pas d'arguments, d'ailleurs tout à fait recevables. C'est ainsi que Xavier Darcos écrivait il y a quelques années : *« Les "humanités" ne suffisent pas (...). L'étude des sciences doit corroborer celle de l'histoire ou de la philosophie (...). Il faudrait imaginer un enseignement conjoint de l'histoire des sciences et des idées, où les collégiens et lycéens découvriraient les grandes étapes de l'évolution des pensées et des croyances, au fur et à mesure des découvertes scientifiques. Comment comprendre, par exemple, le XVI^e siècle européen sans la physique (la fin de l'héliocentrisme), la géographie (le Nouveau Monde), l'histoire (la chute de Constantinople, les guerres d'Italie), les techniques (l'imprimerie, le contact avec la Bible), etc. Une conception close et sectorisée de l'enseignement scientifique a moins de sens aujourd'hui que jamais. Tout comme nous récusions une étude mécaniste du langage, nous aspirons à une pédagogie des sciences qui ne soit pas seulement descriptive, mais qui interroge le progrès et ses effets. »* Extrait de *L'art d'apprendre à Ignorer*, Tribune Libre, Plon, 2000, pages 136-137.

On pourrait penser que, finalement, l'entraînement systématique à la technique scientifique peut être avantageusement repoussé après le baccalauréat. Il n'en est rien. Le projet ministériel actuel, s'il est mis en application, provoquera sans l'ombre d'un doute une chute durable de l'orientation scientifique et technologique, comme l'a fait en son temps la réforme de l'égalité scientifique, et pour les mêmes raisons.

Un train peut en cacher un autre[1]

Pierre Arnoux

Le gouvernement a annoncé qu'il va cesser de remplacer un enseignant-chercheur sur six lors des départs en retraite, c'est-à-dire qu'il va supprimer l'an prochain 900 postes en université, récupérant ainsi les 1000 postes qu'il s'était vu contraint de créer l'année précédente. Les universitaires protestent, s'indignent et rappellent les engagements du gouvernement, et le fameux programme de Lisbonne.

Cette suppression de postes était pourtant prévisible et logique ; pendant que les chercheurs s'attaquent à un détail du tableau, pas forcément le plus important, le gouvernement mène une politique d'ensemble, avec des objectifs bien définis, même s'ils sont rarement publics ; et sur bien des points, il ne fait que prendre la suite d'autres gouvernements depuis 12 ans.

Les effectifs étudiants

Les effectifs étudiants, après avoir fortement augmenté pendant 10 ans, ne cessent de décroître depuis 1995 ; en 12 ans, ils ont baissé de moitié, et rien ne laisse penser que cette chute doive s'arrêter prochainement. On est actuellement revenu aux chiffres de 1983.

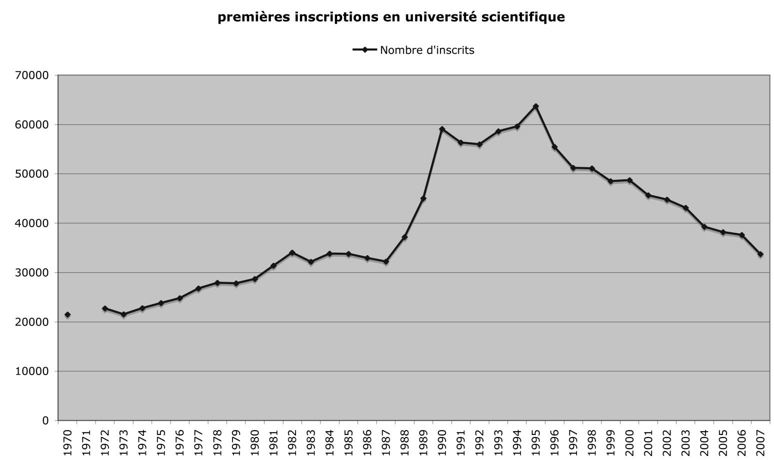
Le premier graphique ci-dessous montre le chiffre absolu de premières inscriptions en université scientifique ; on peut voir la forte montée de la fin des années 1980, et la chute régulière à partir de 1995. Comme on m'a souvent expliqué que cette chute avait des causes démographiques, le second graphique montre le même chiffre en pourcentage de la classe d'âge. Le graphique est clair : ce qui est démographique, c'est le tassement des années 1990-1995, qui recouvre une montée du taux d'inscriptions en université ; la chute qui suit 1995 est encore plus nette en pourcentage.

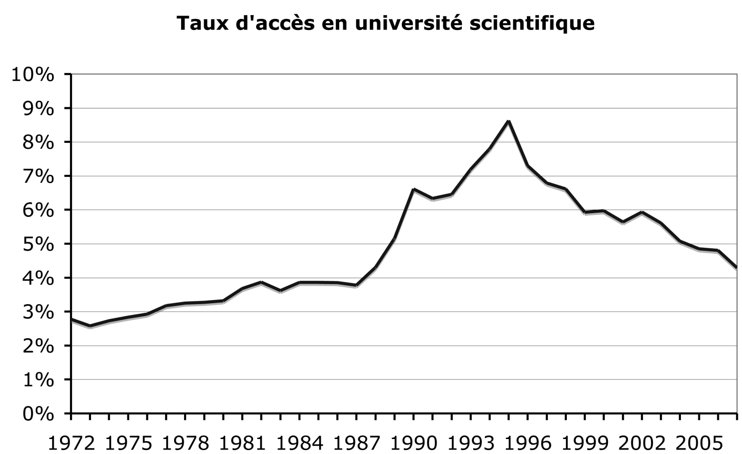
On a expliqué ailleurs les raisons probables de cette chute des effectifs (voir en particulier Convert, Les impasses de la démocratisation scolaire, et les actes du colloque sur l'enseignement scientifique tenu le 5 avril dernier, `http://www.sfc.fr/ActionSciences/AcSc_Colloque.html#Programme`). On a laissé cette chute se poursuivre sans intervenir pendant 10 ans, elle ne pouvait rester sans conséquence : c'est ce que l'on commence à voir.

Il faut faire remarquer que dans ce graphique, le mot important n'est pas « scientifique » mais « université » : il n'y a pas de chute en classe préparatoire, mais il y

[1] Nous remercions l'APMEP qui a mis ce texte en ligne et nous a autorisé à le reproduire ici. `http://www.apmep.asso.fr/spip.php?article2481&var_mode=calcul`

en a une dans les autres filières fondamentales de l'université (pas dans les filières professionnalisées).





La formation des maîtres et la mastérisation

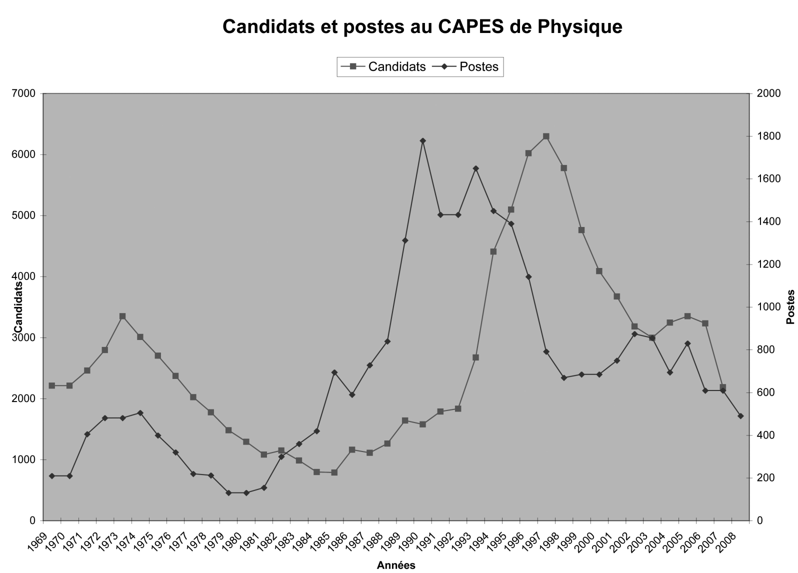
Depuis 10 ans, un déluge d'insanités nous explique régulièrement que, si les étudiants ne font pas de sciences, c'est à cause de Tchernobyl, de la vache folle, et parce que les profs sont trop ennuyeux. C'est ce qu'on appelle la « désaffection pour les sciences ». La réalité est bien sûr très différente. Le graphique ci-dessous montre que les étudiants se présentent au CAPES en fonction du nombre de postes offerts ; simplement, comme il n'y a aucune prévision, que les postes sont annoncés au dernier moment, et qu'il faut 4 ans pour préparer le CAPES à l'université, les deux courbes ont un décalage de 4 ans. On peut remarquer que la courbe des postes s'effondre à partir de 1994 ; est-ce vraiment un hasard si l'année d'après, les entrées à l'université baissent ? Ce n'est évidemment pas la seule cause : c'est aussi à partir de 1995 qu'arrivent au bac les résultats d'une réforme ratée de l'enseignement scientifique au lycée.

Cette courbe (et bien d'autres : la même figure apparaît dans toutes les matières et tous les concours de recrutement) montre que les étudiants sont des êtres rationnels, qui répondent aux incitations économiques et aux stimulants matériels, ce qui est plutôt rassurant sur l'état des étudiants.

C'est moins rassurant sur ce qui va arriver à l'université. On sait que les flux d'entrée vont mécaniquement baisser d'environ 10% dans les prochaines années, à cause d'une chute équivalente de la classe d'âge. Mais les réformes actuelles, qui n'exigent plus une licence, mais une deuxième année de master pour tous les concours de recrutement (y compris pour le primaire) et la chute probable du nombre de postes à ces concours devraient encore décourager de nombreux candidats, en particulier ceux d'origine populaire.

On pourra alors relire avec profit le rapport Pochard sur les enseignants : *« Un écart croissant des origines sociales des enseignants avec la structure de la société : L'origine sociale des enseignants a beaucoup évolué : l'image de l'Instituteur issu du monde rural et y retournant, après un passage à l'école normale, pour y enseigner durant toute une carrière, proche de ses élèves et de leurs parents, est révolue. Les enseignants, et particulièrement les femmes, sont aujourd'hui issus de milieux plus favorisés. »* Voir pour plus de détails les pages 26 et suivantes du rapport Pochard, disponible sur `http://www.education.gouv.fr/pid495/commission-sur-l-evolution-du-metier-d-enseignant.html`

Croit-on qu'une augmentation de deux ans (un seul en réalité, mais il n'est pas sûr que les élèves les plus éloignés de l'université comprennent pourquoi) de la durée des études soit de nature à faire revenir les étudiants ? Il est d'ailleurs probable qu'à terme, ce sont les concours eux-mêmes qui disparaîtront.



Un programme de gouvernement cohérent

Vu du gouvernement, il y a une remarquable cohérence dans les objectifs. On a commencé par supprimer des postes (plus de 10.000 par an) dans le primaire et le secondaire ; ces suppressions se sont bien entendu traduites par autant de postes en moins aux concours, et vont se poursuivre. Maintenant, on constate la baisse des effectifs, entamée depuis 12 ans, et on en prend enfin acte, en supprimant 900 postes en université. Mais c'est de la petite bière comparé à ce qui se joue en même temps : la suppression de 25.000 postes, les « PLC2 », c'est-à-dire les stagiaires en année de formation, à bac+5, après avoir réussi le CAPES ; maintenant, ces mêmes stagiaires paieront leur stage de leur poche, au lieu d'être rémunéré : chaque futur prof fait cadeau de 20.000 euros (son salaire de l'année) à l'état...

Il n'y a eu presque aucune protestation, on s'est borné à déplorer la disparition des IUFM. Il est vrai que le problème ne date pas d'aujourd'hui : en à peine plus de 20 ans, les instituteurs, renommés professeurs des écoles, auront vu leur entrée dans le métier retardée de 5 ans, sans aucune contrepartie (j'exagère : voir l'étude de Gary-bobo qui montre qu'en 20 ans, les salaires des professeurs du secondaire ont baissé de 20%, ceux des professeurs du primaire sont restés stables : c'est ce que l'on appelle la « revalorisation », voir `http://team.univ-paris1.fr/teamperso/rgbobo/fonctionnaires06e.pdf`). Les concepteurs des IUFM auront joué un rôle majeur dans le processus que déplore la commission Pochard ; normal qu'ils se préoccupent plus de ce qui arrive aux IUFM que de ce qui arrive aux étudiants.

La boucle est bouclée : ces réformes, non seulement diminuent le coût de la formation des enseignants, mais en réduisent l'attrait, et vont donc encore faire baisser les effectifs, permettant ainsi de supprimer des postes à l'université. On aura donc aussi moins besoin de docteurs : c'est un cercle vertueux d'économie qui s'engendre de lui-même, jusqu'à la disparition probable, à moyen terme, des petites universités (je vous rassure : il est probable que les masters de mathématiques financières survivront, d'autant qu'en majorité ils sont alimentés par des écoles, et non par l'université).

À ceux qui me diront, comme toujours, que « l'université n'a pas pour seul but de former des enseignants », je répondrai que c'est vrai : contrairement aux facs de médecine, qui ont pour seul but de former des médecins (il y en a 200 000), et aux écoles d'ingénieur, qui ont pour seul but de former des ingénieurs (il y en a 800 000), et qui en sont fières, les université n'ont pas pour seul but de former des enseignants (il y en a 950.000), et elles ont un peu honte de devoir les former. Il n'en reste pas moins que c'est un de leurs principaux débouchés (environ 30%), et le mieux payé et le plus prestigieux : voir le rapport sur les filières scientifiques et l'emploi, disponible sur `http://www.education.gouv.fr/cid3991/les-filieres-scientifiques-et-l-emploi.html` ; sa décadence accélérée ne saurait rester sans conséquences...

À moyen terme

Si la démographie de la classe d'âge du bac baisse les prochaines années, il n'en est pas de même du primaire : la démographie française, exceptionnelle en Europe, s'est fortement redressée depuis 2000, et une petite vague démographique va parcourir le système scolaire. Darcos a raison : dans les deux prochaines années, le lycée va perdre des dizaines de milliers d'élèves. Mais ce qu'il ne dit pas, c'est que dès l'année prochaine, le effectifs de sixième augmentent, et qu'à partir de 2011, le lycée va regagner tout ce qu'il a perdu.

À ce moment, les effectifs enseignants atteindront un minimum incompatible avec un service normal. Mais il est probable que les effectifs en université seront alors tombés très bas, et qu'il n'y aura plus autant de candidats que de postes. La solution simple sera de supprimer les concours, et de faire un recrutement local, décentralisé, dans chaque lycée. Ca marche très bien en Angleterre, le système s'auto-régule, et on trouve des profs, même si plus de la moitié des enseignants de maths n'ont pas de diplôme de mathématiques (et 25% n'ont aucun diplôme), voir `http://news.bbc.co.uk/1/hi/education/7433339.stm`.

Les gens importants trouveront bien des écoles privées pour leurs enfants...

Que faire ?

Tant que l'on continuera à jouer de façon purement tactique, en protestant localement contre des changements qui n'affectent à chaque fois qu'une petite minorité de personnes, on obtiendra des reculs locaux jusqu'au moment où la situation sera favorable pour nous écraser, et où les gens en auront marre de lutter ; c'est ce que l'on commence à voir dans les réunions qui abordent le sujet.

Il faudrait des gens qui puissent penser de façon stratégique, relier ensemble ces diverses attaques, et bien d'autres encore ; en bref, il faudrait des gens qui fassent de la politique, et qui y travaillent à plein temps...

⋆ ⋆ ⋆

Pour en savoir plus sur la réforme des concours de recrutement des enseignants, voir : http://smf.emath.fr/Enseignement/Masterisation

Point de vue sur les réformes en cours dans le système éducatif

Jean-Pierre Demailly[1]

Ayant eu l'occasion à diverses reprises d'être confronté à la réflexion sur les réformes, que ce soit à l'Académie des Sciences, à l'Université ou (très brièvement) lors de contacts directs avec le Cabinet du Ministre de l'Éducation Nationale, je voudrais ici livrer à l'intention des lecteurs de la *Gazette* quelques impressions qui se sont dégagées au cours de l'année écoulée – ce point de vue n'engage évidemment que moi.

C'est peu de dire que le système éducatif de notre pays connaît une grave crise. À l'université, à la chute des effectifs dans les filières scientifiques s'ajoute un problème majeur de qualité de l'enseignement : les contenus de programmes reculent de réforme en réforme ; jamais me semble-t-il les collègues ne s'étaient autant inquiétés de l'hétérogénéïté et de la faiblesse générale du niveau des élèves et des étudiants.

Comme les difficultés affectent en réalité tous les niveaux depuis l'école primaire, des réformes de fond étaient certainement nécessaires. Ceci explique que le Ministère ait cru bon d'engager des initiatives tous azimuts : réforme des programmes de l'école primaire début 2008, réforme des IUFM et du lycée aujourd'hui, réforme probable du collège à venir dans quelques mois.

Le problème principal est que le gouvernement, tout en cherchant à donner l'impression de jouer la concertation et de solliciter l'avis du terrain et des experts, n'a en réalité jamais cessé de poursuivre un agenda fondé avant tout sur la recherche d'économies budgétaires. Malgré le discours, ses sources principales d'inspiration restent fondées sur des idéologies dominantes – souvent néfastes – véhiculées par quelques organisations partisanes et par la technostructure française ou européenne, plutôt que sur une volonté de rétablir un système éducatif sain et fonctionnel à partir d'une réflexion organisée sur les contenus et centrée sur les véritables problèmes.

Réforme de l'école primaire

Bien qu'assez prudent dans ses conclusions, l'avis de l'Académie des Sciences sur la place du calcul[2] à l'École primaire rendu en janvier 2007 recommandait une substantielle revalorisation de l'enseignement du calcul, en liaison avec la géométrie et les autres sciences. Or, tout en prétendant remettre l'accent sur les fondamentaux, ce qui a peut-être été (un peu) le cas pour l'apprentissage du Français, les nouveaux programmes (BO n° 3 du 19 juin 2008[3]) continuent à accorder une place limitée aux sciences et insuffisante à l'enseignement du calcul et de la géométrie ; ainsi seules

[1] Université Grenoble I, Institut Fourier.
[2] `http://www.academie-sciences.fr/actualites/textes/calcul_23_01_07.pdf`
[3] `http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/default.htm`

les fractions décimales ou « très simples » figurent au programme de CM2, l'algorithme général de la division des décimaux n'est pas exigible, seul le pavé donne lieu au calcul du volume. Que peut valoir une connaissance qui n'a droit qu'à une seule instance d'application possible ? Ce type de lacune, qui n'est qu'un exemple parmi d'autres, est la conséquence inévitable d'une réforme conduite au terme d'une réflexion insuffisante. Plus sérieusement, même si certains choix témoignent d'une volonté de réintroduire des contenus que les réformes antérieures avaient indûment supprimés, on peut douter que les objectifs affichés par les programmes puissent être atteints, dans un contexte de réduction globale de 2 ou 3 heures de l'horaire hebdomadaire. Ceci d'autant plus que les exigences générales restent souvent très floues et que sont introduits de nouveaux enseignements qui ne s'imposaient pas à ce niveau, en tout cas pas de manière obligatoire ou pas sous cette forme (histoire des Arts, horaire élevé pour l'EPS, « culture numérique » – « brevet » multimedia et internet...).

Réforme du lycée

C'est à mon sens la réforme engagée actuellement au lycée qui présente aujourd'hui les risques les plus graves. En effet, si le collège permettait encore d'asseoir solidement les connaissances de base dans les matières fondamentales – ce qui n'est hélas plus le cas depuis le collège unique et la réforme Haby de 1975 – le Lycée pourrait (et devrait) être le lieu où les disciplines commencent à être enseignées de manière plus approfondie avec leurs spécificités propres. Or, précisément, les nécessités de l'enseignement peuvent être assez différentes d'une discipline à l'autre. Même dans le cadre d'une matière donnée comme les mathématiques, l'état d'esprit de l'enseignement peut varier du tout au tout suivant l'intérêt et l'objectif des élèves : la demande des élèves se destinant à une carrière scientifique est clairement différente de celle des élèves qui ont été échaudés et conçoivent au mieux les mathématiques comme un objet de culture générale. Vouloir faire cohabiter ces différents publics dans un tronc commun relève de la gageure, voire de l'impossibilité fonctionnelle.

Il faudrait tenir compte en outre de la plus ou moins grande « verticalité » des matières : les connaissances mathématiques se construisent les unes à partir des autres de manière pyramidale, et, par exemple on ne peut pas dissocier l'enseignement de l'algèbre de celui de la géométrie, comme on peut (éventuellement) introduire une coupure entre géographie humaine et géographie physique. Enfin, il y a un besoin fort de coordination interdisciplinaire, en particulier entre les mathématiques et les sciences physiques. Pour toutes ces raisons impérieuses, le Comité sur l'Enseignement des Sciences de l'Académie des Sciences avait cru bon de recommander, dans son rapport d'étape remis au Ministre le 15 juillet 2008[4], le maintien du principe de la différenciation des séries du lycée général. Le texte allait même plus loin en recommandant la réintroduction d'une différenciation lettres-sciences dès l'entrée en seconde (et en appelant de ses vœux une réhabilitation du collège permettant aux élèves de faire un choix raisonné à l'issue de celui-ci) ; quoi qu'il en soit, la logique qui a conduit à proposer la réforme du collège après celle du

[4] http://www.academie-sciences.fr/enseignement/enseign_lycee_07_08.pdf

lycée échappe... Au cours de l'été 2008, le recteur Jean-Paul de Gaudemar a été chargé par le Ministre d'élaborer une plate-forme pour la réforme du lycée[5]. Malgré les remerciements sans doute un peu formels adressés au Comité de l'Académie, les conclusions de cette plate-forme ont confirmé des rumeurs qui circulaient déjà depuis de nombreux mois (et témoignent en réalité de décisions déjà prises en coulisse sans concertation) : les séries du lycée sont appelées à disparaître, remplacées par une organisation modulaire inspirée du fonctionnement du LMD à l'université. Sans doute les grandes difficultés de mise en place du LMD et ses résultats très peu convaincants ont-ils convaincu les autorités qu'il fallait étendre le système dès le début du lycée – suivant le principe général que lorsqu'une mesure ne donne pas les résultats escomptés, c'est qu'on n'est pas allé assez loin. Mais est-il même encore envisageable aujourd'hui que l'on puisse évaluer et modifier en conséquence une politique décidée au plus haut niveau en France ou par la technocratie européenne ? Lors de la conférence organisée par l'inspection générale de mathématiques en novembre 2008, Carl Winslow, professeur à l'université de Copenhague, a eu l'occasion de présenter la réforme intervenue en 2005 au Danemark, qui a mis un place un système d'enseignement modulaire au lycée. Voici sa conclusion sur les effets de la réforme : « chaos immédiat », suivi d'inévitables corrections de la réforme – je vous laisse imaginer les remous dans le grand amphithéâtre de la Sorbonne, même si Carl Winslow a conclu avec humour que du chaos pouvait à terme renaître l'ordre...

Réforme de la formation des enseignants

Les conditions nécessaires pour que la formation des enseignants puisse de nouveau fonctionner de manière efficace sont multiples :

– il faut en premier lieu que l'université soit en mesure d'assurer des enseignements de qualité, ce qui suppose que les élèves et étudiants soient sérieusement évalués et orientés à tous les niveaux. C'est devenu impossible, en dehors de quelques centres privilégiés, compte tenu du nivellement par le bas des diplômes, lui-même imposé par une politique gestionnaire de régulation des flux. Une mise en place souple et généralisée – sur simple constat de leur nécessité par les équipes enseignantes – de classes de niveau ajusté (niveau avancé/remise à niveau/...), avec des mécanismes d'orientation rigoureux, serait sans doute bien plus efficace qu'un saupoudrage inefficace d'heures de soutien et de mesures palliatives visant à renforcer par exemple la « culture générale », euphémisme désignant une entité mal définie que les étudiants semblent posséder toujours en quantité trop limitée et dont les « pédagogues » modernes se repaissent. Cette mesure pourrait permettre aussi de créer de l'émulation et d'attirer de bons élèves. Évidemment, le parchemin final se devrait de mentionner avec quelque précision le contenu réel du cursus suivi par l'étudiant, plutôt que le seul décompte formel d'ECTS dans un menu standardisé à la McDonald's. Et les redoublements pourraient redevenir parfois souhaitables et utiles, si le système voulait bien enseigner des connaissances denses, consistantes et structurées, plutôt que se contenter d'exiger la seule conformité mimétique des élèves – auquel cas une décision de redoublement est souvent

[5] http://smf.emath.fr/Enseignement/ContributionsSMF/EntretienJPdeGaudemarV4.pdf

perçue comme une forme de rejet social.

– assurer un recrutement suffisant en faisant en sorte que les métiers de l'enseignement et de la recherche soient valorisés (plutôt qu'implicitement dénigrés par l'anti-intellectualisme ambiant et le mépris de la recherche fondamentale). Des bourses de pré-recrutement de type IPES ont été suggérées à plusieurs reprises, en particulier dans les recommandations de l'Académie des Sciences sur la formation des enseignants en date du 13/11/2007[6]. Figurait également dans ce rapport un appel fort à la mise en place de moyens substantiels pour la formation continue des enseignants. On n'a hélas encore rien vu venir de solide de ce côté, ni en termes de missions pour les universités, ni en termes des décharges qui seraient nécessaires pour les collègues du secondaire. Les IREM, qui ont pourtant joué un rôle pionnier dans ce domaine, bénéficient souvent de moyens insuffisants, quand ils ne sont pas simplement ignorés ou oubliés par la hiérarchie.

– réformer les IUFM pour les intégrer dans les universités, et mieux organiser la formation initiale des enseignants. L'intégration des IUFM est en cours, mais il est à craindre que les départements scientifiques aient un regard insuffisant sur la formation des professeurs, si la structure administrative des IUFM est seulement mise sous la tutelle formelle des universités, comme cela semble être le cas en de nombreux endroits. En dépit d'une unification des statuts visant à répondre aux seuls intérêts catégoriels, la formation des professeurs de lycées et collèges a des nécessités très différentes de celle des professeurs d'écoles, et ces formations devraient donc être clairement différenciées assez tôt, idéalement déjà au niveau de la licence par la mise en place de licences pluridisciplinaires comme voie privilégiée d'accès pour les professeurs d'école.

On ne peut que s'inquiéter de la précipitation déraisonnable avec laquelle l'administration entend mettre en place les nouveaux masters voués à la formation des maîtres[7]. La SMF a donc eu bien raison de demander un report d'une année – espérons qu'elle sera entendue. Compte tenu des difficultés actuelles du système éducatif, le processus de mastérisation était certes une chance pour la formation des professeurs de lycées et collèges, mais ceci vaut uniquement si le temps de formation gagné est réellement utilisé pour mieux asseoir les connaissances disciplinaires. De plus, les futurs enseignants auraient besoin d'une période de stage en classe *après le concours* pour découvrir le métier auprès de collègues chevronnés. Cette période essentielle, actuellement d'un an, ne doit pas être raccourcie ni remplacée par des enseignements abstraits de sciences de l'éducation intégrés aux masters. Les modifications du concours de l'agrégation (infléchissement d'une des épreuves orales par un « exercice pédagogique », adjonction d'une « épreuve d'entretien avec le jury ») ne semblent pas aller dans le sens d'un renforcement de la formation.

Quant aux professeurs d'école, la mastérisation ne sera probablement qu'une mesure coûteuse de plus – la seule motivation réelle en est l'unification des statuts qui conduit sur un plan gestionnaire à équilibrer les durées de formation. L'un

[6] `http://www.academie-sciences.fr/actualites/textes/formation_13_11_07.pdf`
[7] `http://www.lille.iufm.fr/IMG/pdf/circulaire_Masters_Education_171008.pdf`

des points les plus préoccupants reste le très faible niveau de connaissances en sciences de la grande majorité des candidats issus des filières littéraires ou sportives, de même probablement, que l'insuffisance des connaissances littéraires et grammaticales de la minorité de candidats provenant des filières scientifiques. Là encore, on peut craindre que la modularisation du lycée conduise à la multiplication de candidats aux profils par trop lacunaires. Seule une formation pluridisciplinaire exigeante et rigoureuse à l'université serait à même de corriger ces insuffisances (bien qu'une solution encore plus en amont puisse être en théorie préférable : ainsi le baccalauréat scientifique des années 1920-1970 procurait-il sans aucun doute des connaissances disciplinaires suffisantes aux professeurs d'école, mais on est aujourd'hui extrêmement loin du niveau de qualité de l'enseignement dispensé à l'époque...).

© Josselin Garnier

Josselin Garnier

PRIX ET DISTINCTIONS

Josselin Garnier reçoit le prix Felix Klein

Jean-Pierre Fouque[1]

Josselin Garnier vient de recevoir le prix Felix Klein 2008. Ce prix est décerné tous les quatre ans à un jeune chercheur de moins de 38 ans « pour des travaux utilisant des méthodes sophistiquées pour résoudre des problèmes industriels concrets et difficiles ».

Ce prix est fait pour Josselin, ou Josselin est fait pour ce prix !

J'ai eu le plaisir de diriger la thèse de Josselin à l'École Polytechnique (1994-96) et par la suite d'avoir collaboré avec lui dans une série de travaux sur les ondes en milieux aléatoires et sur le retournement temporel d'ondes acoustiques. C'est un plaisir de présenter ses travaux dans ces quelques lignes. Josselin a plus de cent publications sur plusieurs sujets au carrefour de l'analyse stochastique et de la modélisation de phénomènes physiques par des équations aux dérivées partielles. C'est bien sûr difficile d'être exhaustif et d'aller dans les détails ici mais quelques exemples montreront bien l'importance des travaux de Josselin. Une liste complète de ses publications avec résumés se trouve sur sa page web à :
`http://www.proba.jussieu.fr/~garnier/`

Josselin est devenu un des rares experts mondiaux dans l'art de modéliser des phénomènes physiques en présence d'aléatoire (par des EDP à coefficients aléatoires par exemple), de décrire précisément les échelles présentes (temps, espace, ...), et d'utiliser des résultats limites dans des régimes de séparation de ces échelles pour approcher les quantités intéressantes par des solutions d'équations stochastiques. C'est une longue phrase qui décrit bien la stratégie introduite par George Papanicolaou, notamment dans l'étude de la propagation des ondes en milieux aléatoires.

Dans un de ses travaux de thèse, Josselin étudie la transmission de solitons dans des milieux non linéaires et aléatoires (équations de Schrödinger non linéaires avec potentiel aléatoire par exemple). C'est un très joli travail reposant sur une étude asymptotique de la transformée de scattering, qui permet de prédire l'effet des inhomogénéités du milieu sur la propagation du soliton, sa masse et sa vitesse. L'application au problème de la communication par des fibres optiques a fait le sujet d'une collaboration industrielle avec Alcatel. Josselin est l'auteur de nombreux articles sur les solitons en milieux aléatoires, en particulier en collaboration avec F. Abdullaev à Tashkent.

Le GDR POAN du CNRS (1994-97) a été la source de multiples collaborations impliquant la Propagation d'Ondes en milieux Aléatoires et/ou Non linéaires. Josselin est devenu très rapidement un des principaux chercheurs dans ce groupe

[1] University of California Santa Barbara, USA.

et plus tard a pris des responsabilités importantes dans les GDR qui ont suivi (PRIMA et IMCODE), orientés vers les applications à l'imagerie et à la communication. Par exemple, un des premiers travaux avec le CEA en 1995 a concerné le problème de la saturation dans l'amplification d'impulsions incohérentes dans des milieux non linéaires de type Kerr. Ces travaux ont été très importants pour le développement du Laser Mégajoule dans le programme de recherche sur la fusion. En tant que conseiller scientifique, Josselin a développé un important axe de recherche au CEA (Direction des Applications Militaires) sur ces problèmes mais aussi sur des problèmes de physique des plasmas.

Josselin a été très actif dans les récents efforts de recherche sur l'étude mathématique du retournement temporel mis en évidence dans les années 90 par Matthias Fink et son équipe à l'ESPCI de Paris, en particulier dans le domaine de l'acoustique. Ces expériences ont montré des propriétés surprenantes de refocalisation d'une impulsion après des interactions multiples avec un milieu désordonné. Très succinctement, une impulsion acoustique est envoyée dans un milieu inhomogène (désordonné), l'onde subit des diffractions multiples par ce milieu. Les ondes ainsi transmises sont enregistrées par des « miroirs à retournement temporel », c'est-à-dire transformées en signal digital, mémorisé, et réémis dans le même milieu dans le sens inverse du temps. Du point de vue mathématique le phénomène est maintenant bien compris dans des régimes de séparation d'échelles pour des milieux stratifiés ou dans le régime de l'approximation parabolique. Ces résultats ont un potentiel énorme d'applications en imagerie (acoustique ou satellite), détection, ou communication. Josselin a contribué à un étonnant nombre d'articles sur ce sujet, allant des milieux non linéaires aux guides d'ondes. Très récemment ses travaux sur la « cross-correlation » ont confirmé la possibilité d'imagerie passive par interférométrie cohérente.

Cette courte présentation des travaux de Josselin ne serait pas complète si l'aspect numérique de sa recherche n'était pas mentionné. Josselin est non seulement un expert dans les méthodes numériques utilisées dans sa recherche et les sujets mentionnés plus haut, mais il a aussi contribué à d'importants résultats sur l'utilisation de techniques de particules en interaction dans des méthodes de Monte Carlo. Ces résultats et leur efficacité numérique sont très surprenants. Ils ont été appliqués à l'estimation de probabilités d'événements rares, dans la propagation à travers des fibres optiques, ou à des problèmes de sécurité dans les réacteurs nucléaires par exemple.

Finalement je voudrais noter les nombreuses collaborations que Josselin a su développer au cours de ces dernières années. Du côté industriel, avec le CEA, EDF ou EADS, et du côté universitaire avec des chercheurs de renommée internationale tels que George Papanicolaou et Knut Sølna aux États-Unis, André Nachbin au Brésil, Fatkhulla Abdullaev en Uzbekistan, et Arnold Migus, Pierre-Arnaud Raviart, Claude Bardos et Pierre Del Moral en France.

Josselin Garnier a sans aucun doute un brillant avenir en mathématiques appliquées.

Artur Avila reçoit le prix de la Société Européenne de Mathématiques pour ses travaux en Systèmes dynamiques

Raphaël Krikorian[1]

De nationalité brésilienne, Artur Avila est né en 1979 à Rio de Janeiro. Il est à Paris depuis 2001 (Collège de France, 2001-03), au Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires (LPMA) de l'université Pierre et Marie Curie depuis 2003, d'abord comme Chargé de Recherche au CNRS, et depuis 2008 comme Directeur de Recherche. Il est depuis 2006 Research Fellow of the Clay Mathematics Institute, attaché à l'Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) à Rio de Janeiro.

Artur Avila a déjà reçu à 29 ans de nombreux prix et distinctions : Cours Pécot en 2005, la médaille de Bronze du CNRS en 2006, le prix Salem en 2006, le *Wolf Memorial Lectures at Caltech* en 2008 et la même année il reçoit le prix de la Société Européenne de Mathématiques (il était également conférencier invité au congrès de la SME 2008).

Les travaux d'Artur Avila portent sur la théorie des systèmes dynamiques, domaine dans lequel il a obtenu de nombreux résultats importants.

Le prix que vient de lui décerner la SME cette année récompense ses remarquables contributions à la dynamique uni-dimensionnelle et holomorphe, à la théorie des opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques en dimension 1 et à la théorie ergodique des échanges d'intervalles et du flot de Teichmüller. Comme on le voit, le spectre de compétence d'Artur Avila est vaste.

Ensembles de Julia infiniment renormalisables (*cf.* [4])

L'ensemble de Julia d'une application quadratique (ou plus généralement d'une application rationnelle du plan complexe) est l'endroit de l'espace des phases (le plan complexe) où l'on trouve les comportements chaotiques de cette dynamique. Les ensembles de Julia sont donc des objets importants car c'est finalement autour d'eux que s'organise la dynamique et il est naturel de chercher à calculer la dimension de Hausdorff de ces ensembles qui sont souvent fractals. L'étude des applications de type quadratique (réelles ou complexes) repose pour une grande part sur la notion de renormalisation : une application quadratique est renormalisable si on peut définir son application de retour dans une zone bien choisie de l'espace des phases contenant le point critique et si cette application de retour est de type quadratique et admet un ensemble de Julia connexe. D'après un théorème de Douady et Hubbard on peut la conjuguer quasi-conformément à une application quadratique qui peut à son tour être renormalisée ou pas. Si ce procédé peut être itéré une infinité de fois on dit que la dynamique initiale est infiniment renormalisable. Artur Avila et Mikhail Lyubich démontrent dans [4] que la famille quadratique réelle contient des paramètres pour lesquels la dynamique correspondante est infiniment

[1] Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires.

renormalisable et possède un ensemble de Julia de dimension de Hausdorff strictement plus petite que 2. Ce résultat est étonnant car il va à l'encontre de l'intuition que les spécialistes du domaine s'étaient forgés. En effet, on sait depuis Sullivan et Thurston que de nombreux objets ou phénomènes en dynamique holomorphe ont des analogues dans la théorie des groupes kleinien ; ainsi, les ensembles de Julia correspondent aux ensembles limites des groupes kleiniens. Or, le résultat d'Avila et Lyubich est un exemple où cette correspondance est prise en défaut puisque l'ensemble limite d'un groupe kleinien est de dimension de Hausdorff strictement plus petite que 2 si et seulement si le groupe est géométriquement fini[2] (Bishop et Jones [7]).

Échanges d'intervalles et Flot de Teichmüller (*cf.* [1], [5], [2])

Les échanges d'intervalles sont une généralisation naturelle des translations sur le cercle : prenons l'intervalle $[0,1]$, découpons-le en d intervalles $I_1,\dots,I_d$ de longueurs pas nécessairement égales et permutons-les (par translations) suivant une permutation fixée $\sigma:\{1,\dots,d\}\to\{1,\dots,d\}$. L'application que l'on obtient est un échange d'intervalles. Une rotation sur un cercle est un échange d'intervalles particulier sur deux intervalles. Un échange d'intervalles est donc déterminé par le nombre d'intervalles, leurs longueurs et la permutation σ. C'est une transformation qui préserve la mesure de Lebesgue et dont on peut étudier les propriétés ergodiques. Katok a ainsi démontré ([10]) qu'un échange d'intervalles n'est jamais mélangeant et Masur ([12]) et Veech ([15]) ont démontré que presque tout échange d'intervalles est uniquement ergodique (la seule mesure de probabilité invariante est la mesure de Lebesgue). Ce que démontrent Avila et Forni dans [1] c'est que presque tout échange d'intervalles (on exclut les rotations) est faiblement mélangeant[3] fournissant ainsi une réponse positive à une question ancienne.

Les échanges d'intervalles apparaissent naturellement quand on considère des flots de translation sur des surfaces de translation[4] : si on regarde l'application de premier retour du flot (disons) vertical sur un segment fixé bien choisi on obtient un échange d'intervalles ; cette construction peut être inversée. Il est donc important de comprendre les flots de translation sur les surfaces de translation. Une autre motivation est que les billards dans des polygones rationnels du plan font naturellement apparaître des surfaces de translation (qui sont d'un type particulier). Si on note $\mathcal{M}_\kappa$ l'espace des modules des différentielles abéliennes sur la surface M dont les singularités sont de type κ donné (les ordres des zéros de la différentielle abélienne) – on parle alors d'une strate de l'espace des modules de

[2] Un groupe kleinien est géométriquement fini si, vu comme groupe de transformations conformes de $\mathbb{B}^3$, il admet un domaine fondamental qui est un polyèdre avec un nombre fini de faces.

[3] Une transformation T sur l'espace mesuré (X,m) est faiblement mélangeante si pour tous ensembles mesurables A,B, il existe un ensemble d'entiers N de densité positive pour lequel $\lim_{n\to\infty, n\in N} m(T^{-n}A\cap B)=m(A)m(B)$; de façon équivalente la transformation $\varphi\mapsto\varphi\circ T$ est un opérateur unitaire sur $L^2(X,m)$ dont la seule valeur propre est 1 et sans fonctions propres en dehors des constantes.

[4] Une surface de translation est une variété compacte M de dimension 2 avec un ensemble fini de singularités coniques et munie d'un atlas dont les changements de cartes sont des translations de $\mathbb{R}^2$; de façon équivalente c'est une surface de Riemann compacte sur laquelle on a choisi une 1-forme holomorphe non-nulle (une différentielle abélienne).

l'ensemble des différentielles abéliennes (ou de l'ensemble des surfaces de translations) – on sait depuis Masur ([12]) et Veech ([16]) qu'il existe une mesure μ_κ finie, absolument continue, sur chaque composante connexe du sous-ensemble $\mathcal{M}_\kappa^{(1)}$ de $\mathcal{M}_\kappa$ constitué des différentielles abéliennes d'aire normalisée, qui est invariante, ergodique et non-uniformément hyperbolique pour le flot de Teichmüller[5]. Avila et Forni démontrent alors que pour μ_κ-presque toute surface de translation et presque tout angle θ le flot de translation dans la direction de θ est faiblement mélangeant. La preuve de ce résultat et celle du théorème mentionné plus haut sur les échanges d'intervalles mêlent de façon subtile des idées venant de la renormalisation (algorithme de Rauzy, flot de Teichmüller) et de la théorie des systèmes dynamiques non-uniformément hyperboliques : en particulier, elles utilisent de façon non-triviale la non-uniforme hyperbolicité du cocycle de Kontsevich-Zorich ([11]) au-dessus du flot de Teichmüller démontrée par Forni ([9]).

Avila et Viana démontrent en fait beaucoup plus ([5]) : les exposants de Lyapunov du cocycle de Kontsevich-Zorich sont simples et par conséquent les exposants de Lyapunov (non triviaux) du flot de Teichmüller le sont également. Les auteurs ramènent la preuve de ces résultats à des théorèmes (nouveaux) sur les exposants de Lyapunov de cocycles au-dessus de dynamiques qui ont une certaine hyperbolicité.

Enfin, Avila, Gouezel et Yoccoz démontrent dans [2] que le flot de Teichmüller est en fait exponentiellement mélangeant pour des observables Hölder. Une conséquence de ce résultat est l'existence d'un trou spectral pour l'action de $SL(2,\mathbb{R})$ sur l'espace des modules.

Le problème des dix Martinis (*cf.* [3])

Artur Avila et Svetlana Jitomirskaya donnent une solution complète au problème popularisé par Barry Simon (après une offre de Mark Katz en 1981) sous le nom de « The ten Martini Problem » : *Prouver que le spectre de l'opérateur presque Mathieu*[6] *est un ensemble de Cantor pour toute fréquence irrationnelle et toute constante de couplage non nulle.* Ce problème qui est resté ouvert longtemps (c'est le problème n°4 de la liste de Simon [8]) a été conjecturé il y a une quarantaine d'année par Azbel ([6]) et a attiré l'attention de nombreux mathématiciens de la théorie spectrale et des systèmes dynamiques ces vingt-cinq dernières années. C'est un véritable défi car pour le résoudre il faut être capable de surmonter trois difficultés que l'on rencontre souvent quand on étudie des problèmes de petits diviseurs : c'est un problème non perturbatif, il n'y a pas d'hypothèses arithmétiques sur la fréquence et enfin il n'y a pas d'exclusion de paramètres possible. La preuve qu'A. Avila et S. Jitomirskaya donnent de ce remarquable résultat est magnifique. Elle utilise tout le savoir accumulé ces trois dernières décennies sur les opérateurs de Mathieu quasi-périodiques (en particulier la dualité d'Aubry) mais également de nouveaux arguments. Un des points de départ de

---

[5] Si on visualise une différentielle abélienne comme la donnée de deux feuilletages transverses (vertical et horizontal), le flot de Teichmüller écrase par un facteur e^{-t} le feuilletage vertical et dilate par un facteur e^t le feuilletage horizontal.

[6] C'est l'opérateur défini sur $l^2(\mathbb{Z})$

$$(H_{\lambda,\alpha,\theta}u)_n = u_{n+1} + u_{n-1} + 2\lambda\cos(2\pi(\theta + n\alpha))u_n;$$

λ est la constante de couplage, α la fréquence et θ la phase.

la preuve est un résultat de Bourgain et Jitomirskaya ([8]) sur la continuité des exposant de Lyapunov, qui permet à A. Avila et S. Jitomirskaya de mettre en œuvre deux techniques éprouvées pour attaquer le problème : d'une part celle de la réductibilité des cocycles quasi-périodiques, d'autre part par celle de la localisation d'Anderson (le lien entre les deux étant la dualité d'Aubry)[7] . Disons que le point de vue de la réductibilité des cocycles permet de traiter le cas où la fréquence est plutôt de type Liouville, tandis que le point de vue de la localisation d'Anderson s'applique au cas où la fréquence est diophantienne (ces conditions dépendent de la constante de couplage). Heureusement, ces deux régimes se recouvrent, ce qui permet de démontrer le théorème à l'issue d'une longue preuve par l'absurde.

Les trois thèmes que j'ai développés dans le texte, qui constituent une partie seulement des travaux d'Artur Avila, illustrent clairement, je l'espère, la virtuosité et la profondeur de ce mathématicien de talent.

Références

[1] A. Avila, G. Forni – « Weak mixing for interval exchange transformations and translation flows », *Annals of Mathematics* (2) **165** (2007), nº 2, p. 637–664.
[2] A. Avila, S. Gouëzel, J.-C. Yoccoz – « Exponential mixing for the Teichmüller flow », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2) **104** (2006), nº 2, p. 143–211.
[3] A. Avila, S. Jitomirskaya – « The ten Martini problem », À paraître dans *Annals of Mathematics*.
[4] A. Avila, M. Lyubich – « Hausdorff dimension and conformal measures of Feigenbaum Julia sets », *J. Amer. Math. Soc.* **21** (2008), nº 2, p. 305–363.
[5] A. Avila, M. Viana – « Simplicity of Lyapunov spectra : proof of the Zorich-Kontsevich conjecture », *Acta Math.* (2) **198** (2007), nº 1, p. 1–56.
[6] M. Ya. Azbel – « Energy spectrum of a conduction electron in a magnetic field »*Sov. Phys. JETP* **19** (1964), p. 634–645.
[7] C. J. Bishop, P. W. Jones – « Hausdorff dimension and Kleinian groups », *Acta Math.* **179** (1997) nº 1, p. 1–39
[8] J. Bourgain, S. Jitomirskaya – « Continuity of the Lyapunov exponent for quasiperiodic operators with analytic potential » (Dedicated to David Ruelle and Yasha Sinai in the occasion of their 65th birthdays) *J. Statist. Phys.* **108** (2002), nº 5–6, p. 1203–1218.
[9] G. Forni – « Deviation of ergodic averages for area-preseerving flows on surfaces of higher genus », *Annals of Mathematics* (2) **155** (2002), nº 1, p. 1–103.
[10] A. Katok – « Interval exchange transformations and some special flows are not mixing », *Israel J. Math* **35** (1980), nº 4, p. 301–310.
[11] M. Kontsevich, A. Zorich – « Lyapunov exponents and Hodge Theory »*arXiv :hep-th/9701164v1* 28 jan. 1997
[12] H. Masur – « Interval exchange transformations and measured foliations »*Annals of Mathematics* (2) **115** (1982), nº 1, p. 169–200.
[13] J. Puig – « Cantor spectrum for the almost Mathieu operator », *Comm. Math. Phys.* **244** (2004), nº 2, p. 297–309.
[14] B. Simon – « Schrödinger operators in the twenty-first century », *Mathematical Physics 2000*, p. 283–288, Imp. Coll. Press. London, (2000).
[15] W. Veech – « Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps », *Annals of Mathematics* (2) **115** (1982), nº 1, p. 201–242.
[16] W. Veech – « The Teichmüller geodesic flow », *Annals of Mathematics* (2) **124** (1986), nº 3, p. 441–530.

[7] Voir aussi le travail antérieur de J. Puig [13] dans des cas particuliers.

ACTUALITÉ

La finance française ne doit pas laisser passer les chances que la crise comporte pour notre pays[1]

Interview avec Antoine Paille[2], propos recueillis par Yves Miserey

Que pensez-vous de l'investissement des mathématiques dans la finance ? Comment l'interprétez-vous ?

La finance a connu une révolution conceptuelle dans les années 70 avec la prise en compte de l'aléa et sa formalisation, les modèles de portefeuilles optimaux et l'évaluation des options. La modélisation mathématique est entrée au cœur de toutes les salles de marché ouvrant la voie aux « quants » (quantitative people), personnes à forte culture mathématique. Si l'on définit la finance comme l'art de rapprocher l'épargne et l'investissement, cette évolution a permis la gestion du risque et le calcul des rendements attachés aux différents profils de risque. La France a bien réussi cette évolution, créant une école de mathématiques financières brillante qui a trouvé sa place dans les process de gestion du risque et d'élaboration des produits financiers. On a assisté parallèlement depuis les années 90 à un mouvement de mondialisation accéléré des différents segments de la finance et à la compétition entre différents standards. La France a imposé son standard sur les dérivés actions et même s'il n'est pas parfait, ce standard résiste bien dans le choc actuel. En revanche, sur le marché du crédit, la construction a été totalement américaine, et les européens, dont les français, se sont contentés de la copier. C'est cette construction qui s'est effondrée, provoquant la crise financière que l'on connaît. Parmi les défauts du modèle américain, on peut citer la marginalisation des marchés organisés, la non-indépendance des agences de rating, le tout « otc[3] » qui fragmente à l'excès les émissions, crée un « sur mesure » généralisé, gonfle les bilans, multiplie les risques interbancaires et génère de l'opacité. Avec la concentration des acteurs américains, tout marché secondaire devient impossible en cas de retournement de marché. On avait déjà rencontré le même problème dans les années 80 avec l'émergence du marché des junk bonds, la concentration de l'origination entre très peu de mains ayant interdit toute liquidité en cas de frayeur des investisseurs.

Pire, le modèle américain étant opaque, il est devenu manipulable. Des biais majeurs se sont introduits et les conditions réelles de fonctionnement du marché se

[1] Nous remercions le *Figaro* qui nous a autorisés à reproduire cet entretien du 31 octobre 2008.
[2] Antoine Paille est fondateur de la division option de la Société générale, fondateur de Commerz Financial Products et PDG de Pattern Recognition Global Trading.
[3] « over the counter » (négocié de gré à gré).

sont radicalement écartées des hypothèses des modèles mathématiques. La mondialisation du marché du crédit s'est en réalité concentrée sur la question du financement de l'accès au logement des ménages américains, drainant une épargne considérable du reste du monde vers l'Amérique.

Il est très probable que, devant cet afflux de liquidité, les règles de prudence dans l'attribution de crédits aux ménages américains ont sauté les unes après les autres et que les profils de risque des prêts ont augmenté. Or, c'est la base statistique des taux de défaut constatés lors de la crise de 1991 qui a été retenue par les agences de rating pour évaluer les risques, alors que cette base ne correspondait plus aux risques réels sur les crédits au logement consentis aux américains ces dernières années.

Estimez-vous que les mathématiciens impliqués dans ces montages ont une responsabilité dans la crise financière et qu'ils auraient dû alerter l'opinion ?

Ce qu'on demande aux « quants » dans une salle de marché, c'est de tirer des conclusions justes à hypothèse donnée. Un modèle sera ainsi faux s'il est incohérent avec ses hypothèses. La question de déterminer si les hypothèses sont justes ne relève pas de leur responsabilité, mais de celle des financiers ou économistes. On retrouve la même dualité entre les physiciens qui visent à décrire la réalité par des hypothèses, et les mathématiciens qui établissent les modèles à partir de ces hypothèses. Les mathématiciens auront un comportement douteux uniquement s'ils confondent la question de la justesse du raisonnement (tirer les bonnes conclusions des hypothèses) avec celle de la capacité des hypothèses à bien décrire le réel. Ce n'est pas le cas de l'école française de mathématiques financières.

La question véritable que soulève cette grave crise est celle de la détermination des banques françaises à reconstruire un concept solide, intègre et transparent, sur le champ de ruines laissé par l'effondrement du standard américain du marché du crédit. Les marchés organisés auront un rôle essentiel à y jouer et la création d'un solide système d'information mondiale sera déterminante.

Si la finance française, qui en a les moyens et les compétences, ne trouve pas la confiance en elle-même nécessaire pour le faire, nous nous retrouverons à nouveau embarqués dans une mondialisation dont nous subirons les aléas et que nous ne maîtriserons pas en laissant passer les chances qu'elle comporte pour notre pays.

Ébauche de réponse à M. Michel Rocard

Marc Yor[1]

Les propos de M. Rocard dans *Le Monde* (2-3 novembre) concernant les mathématiciens coupables de crime contre l'humanité (sans le savoir) car ils forment leurs étudiants aux « coups boursiers » appellent une réponse (un peu plus nuancée !) de la part de ces mathématiciens. Tout d'abord, rappelons que les essais de compréhension des cours financiers à l'aide de modèles mathématiques remontent (au moins) à la thèse de Louis Bachelier (1900) qui prend pour modèle le mouvement brownien, 5 années avant les travaux d'Einstein sur ce même mouvement... L'étude des propriétés du mouvement brownien et de mouvements aléatoires qui lui sont proches a occupé un grand nombre de mathématiciens pendant le 20e siècle, et aujourd'hui encore, les travaux sur ce (grand) sujet sont extrêmement importants. En revanche, – c'est mon opinion personnelle –, les progrès de compréhension des marchés financiers ont été bien plus modestes sur le fond.

P. Samuelson « corrige » Bachelier en 1965 en prenant l'exponentielle du mouvement brownien comme modèle standard, et la formule de Black-Scholes en 1973 révolutionne le domaine. Peu à peu, c'est toute la panoplie des processus stochastiques qui est utilisée, dans un effort incessant de mieux comprendre tel ou tel aspect de l'évolution très erratique des cours... S'efforcer de comprendre de tels phénomènes aléatoires, qui ont une relation certaine avec l'économie mondiale ne relève peut-être pas vraiment de crime contre l'humanité ! Bien au contraire, essayer de comprendre comment intervient « le hasard » dans ces évolutions boursières (ou autres) témoigne certainement d'un réel progrès des connaissances humaines, la théorie des probabilités étant encore bien jeune parmi les différentes branches des mathématiques. Non, Monsieur Rocard, nous n'apprenons pas à nos étudiants à faire des « coups boursiers », mais plutôt que si l'on modifie de façon honnête (c'est-à-dire, avec la seule information du passé) une martingale (c'est-à-dire : un jeu équitable), alors, elle reste une martingale, et l'espérance de ce jeu au cours du temps reste constante.

Avançons encore un peu dans l'histoire récente : en 1987, le krach boursier amène toutes les grandes banques à s'intéresser (enfin !) aux aspects aléatoires des différentes activités bancaires... et à demander à la communauté probabiliste des cours intensifs. Le premier moment d'étonnement passé, celle-ci répond assez souvent de façon positive... Peu à peu, se mettent en place des produits financiers de plus en plus sophistiqués, dans l'élaboration desquels ces mêmes probabilistes ont effectivement une certaine responsabilité. Puis, c'est l'aspect numérique qui est mis à contribution... Enfin, au cours des années 2000, la dérive bancaire s'accentue, avec les fonds de pension incontrôlés, et le marché de l'immobilier de plus en plus chapeauté par le système bancaire. Il est clair que les mathématiciens ont mis le doigt dans un engrenage assez infernal, mais leur faire porter le chapeau est tout de même un comble : les décisions politiques de se lancer dans les *subprimes*, ou les endettements à 70 ans (marché espagnol) ne sont pas vraiment le fait des

[1] Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, Université Paris VI.

mathématiciens ! Pour ma part, je reste très ferme sur ma position de principe, exposée dans mon article de la *Gazette* d'octobre 2008 : les probabilistes doivent « rester à leur place », c'est-à-dire essayer de comprendre (et faire comprendre) les phénomènes aléatoires mis en œuvre dans ce domaine, et dans beaucoup d'autres, et ne pas « coller » au business bancaire, mais bien au contraire, jouer un rôle de sentinelle en affirmant haut et fort que tel ou tel produit financier est déraisonnable (sont visés ici les CDO et CDO 2). Cette profonde crise pourra peut-être permettre d'élaborer quelques principes de bonne conduite des uns et des autres, et aussi de montrer qu'une fois de plus, chercher à faire progresser la connaissance dans des domaines complexes (ici, le Hasard) peut amener assez rapidement à la chasse aux sorcières...

N.B. : Parmi les suggestions que je faisais en avril-mai 2008, il y avait l'idée d'un numerus clausus pour les apprentis « quants ». On m'a alors expliqué que c'était une mauvaise idée ! Je pense le contraire, et que la France a besoin de spécialistes de l'aléatoire qui soient opérationnels dans bien d'autres branches appliquées.

Un article moins technique, destiné au journal *Le Monde*, ayant pour coauteurs J.-P. Kahane, D. Talay et moi-même est actuellement en préparation à ce jour (21 novembre 2008). Il traitera de façon plus générale des relations entre mathématiques et applications au monde réel.

The Financial Meltdown[1]

Philip Protter[2]

How did we get in this mess?

To begin we go back to the great depression of the 1930s. Banks had undergone massive bank failures, leading to mistrust of the entire banking system, a crisis in liquidity. The government of FDR helped to solve this problem, and a key component of the solution was the Glass-Steagall act of 1933. Glass-Steagall created the FDIC which insured small depositors in the banking system through a Federal guarantee, and regulated intereste rates banks could offer to depositors; it also prohibited a bank holding company from owning other financial companies.

Regulations are typically created when a problem affecting industry or society cannot be solved by the normal functioning of laissez-faire capitalism. An example is pollution: a company that chooses to behave well and incur the extra cost of not polluting the air and water is at a competitive disadvantage to a company that does pollute. Hence in a highly competitive sector, all similar companies are forced to pollute to remain competitive; if the government steps in and stops all of them from polluting by legal action with appropriate penalties, then none of them gain an edge by polluting, and everyone is better off. In banking the role of controlling pollution,

[1] Texte publié dans le numéro 87 de *MATAPLI*, le bulletin de liaison de la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles.

[2] Cornell University, État-Unis.

by analogy, is that of controlling capital reserves. It is costly for banks to maintain capital reserves, but the government (and the international banking system with headquarters in Basel, Switzerland) require banks to maintain capital reserves, and the reserve requirements are roughly proportional to the amount of capital the banks have at risk. Without this requirement, the banks could make more money, but they would also be more likely to fail, and there would be less confidence in the banking system, increasing the likelihood of runs on banks. Competition would force many of them to behave this way, so the role of government regulation is essential for the long term health of banks and the banking system.

The repeal of the Glass-Steagall act came in two steps. In the 1970s it became stylish in the United States to favor de-regulation. Many people remember the deregulation of the airline industry in 1978, via the United States Airline Deregulation Act of 1978, under President Carter. The next big step was for the Savings and Loan industry, with the Depository Institutions Deregulation and Monetary Control Act of 1980, under President Reagan. The S&Ls went from being tightly regulated with insured deposits (up to $100,000 per account), to deregulated with insured deposits. Two things happened:

(1) the directors of S&Ls began to behave in a high risk manner in the search for higher profits, and

(2) unethical people began in effect to steal from the bank[3], through many different means; an example was to give loans to people who would put up insufficient or dubious collateral, perhaps in exchange for a kickback.

A highly liquid atmosphere of "easy money" fueled the fire. This eventually led to massive S&L failures, and the necessity of the government (with the FDIC being committed by law) to bail out the depositors, at the expense of the taxpayers. One result was a large shift of wealth from the Midwest and northeastern U.S., to the southwest, where most of the problem S&Ls were located.

One aspect of the deregulation merits special mention. Under strict regulation S&Ls retained mortgage loans they initiated. The profits to the banks came from the difference in interest paid to the depositors and the rates charged to the people with mortgages. After deregulation a new business model emerged: the S&Ls and banks could originate mortgages and then sell them on the open market. The S&Ls would retain the servicing part of the mortgage, and earn through fees: by servicing the mortgages and by origination fees. Others would earn money through the spread in interest rates. This allowed mortgages to be bundled into Asset Backed Securities (hereafter ABS), which provided geographic diversity of a given pool, and therefore less risk due to fluctuations in the local economy. It also provided some insulation from the risk of "mortgage prepayment", which would effectively end a lucrative arrangement prematurely; the threat of prepayment had made mortgages difficult to market, and the development of ABS securities diluted this risk among the "tranches." Salomon Brothers became famous for making a market in ABS in the 1980s. What they did was to slice up a mortgage pool of from 4000 to 7000 mortgages, and then to issue bonds based on the slices, which are called "tranches," the French word for slice. The tranches have a "waterfall,"

[3] It is notable perhaps that two public figures who were implicated in the ensuing S&L scandal were Senator John McCain and the son of the then sitting president (and brother of George W.), Neil Bush.

which determines the order in which defaults and prepayments of mortgages are handled. When there is a shortfall of mortgage payments coming in, the equity holders are hit first, then the lowest tranche, and on up to the highest tranche, often called the senior tranche, or "super-senior" tranche. This meant that, in theory, the investors in the super senior tranche would almost never get hit, and such a tranche was a very safe investment; hence the rate of interest the creator of these bonds would have to offer for the super-seniors was small, whereas the rates of interest one had to offer for more risky bonds naturally increased with the perceived risk involved. But in any event, the ABS securities of the 1980s were backed by traditional mortgages, and therefore relatively safe investments for all concerned. The senior tranches were also safe from the threat of prepayment. These ABS securities became very popular, and since Salomon had a monopoly on the market at the beginning, Salomon Brothers prospered mightily.

The second step in the repeal of the Glass-Steagall act came with the Gramm-Leach-Bliley act of 1999[4], signed by President Clinton, which ended the legal prohibition of bank holding companies from owning other financial companies. In a sense this was a bill that merely caught up with reality, as the walls were already breaking down and the regulators were doing little or nothing to stop it from happening. However a different ideological climate might have put a brake on the process, rather than legitimize it and give a green light for more merging of the roles of the financial industry.

At this point it is important to bring in the issue of incentive conflict. The most dramatic example of abuse has occurred with executive pay, or executive compensation as it is more properly known. While this is only a small part of the incentive conflict picture, it helped to set the tone for a basic degradation of ethical behavior. We will not give a history of executive compensation here, but instead point out that a major change began in the early 1970s, in response to the feeling that managers of large companies had lost sight of the interests of shareholders who are, after all, the owners of the firm. In an effort to align their incentives with those of the shareholder, executive compensation was altered to include stock options for executives which were in the money (i.e., actually worth something) only if stock prices rose in the short term. This led to a huge increase in executive pay: for example in 1970 average executive pay was 40 times more than average worker pay, while by 1979, the top 25 CEOs were making over $1 million a year; by 2000 average top CEO compensation was 1000 times average worker pay, and by 2006 the top 25 CEOs ranged in compensation from $42 million to $636 million for one year[5]. Of course, it was not just the CEOs who benefited from high compensation: the wealth was spread throughout management and even to some privileged workers, especially so in the financial industry. The system of bonuses was largely responsible for this; they supplemented the base salary, and in most cases far outstripped the base salary, becoming the primary means of compensation. The system of bonuses focused the workforce of companies on short term performance and short term returns; very few people, if any, were looking at the long term health of a company, but rather looking at how to maximize the profits they could make for the company (and therefore their bonuses) in the short

[4] Senator Gramm is a key economic advisor to Senator McCain.
[5] Richard Fuld Jr. of the now bankrupt Lehman Brothers "earned" $54 million in 2006

term (with short term meaning at most a year, usually less). How could companies afford huge executive compensation levels and bonuses throughout much of the higher echelons of a firm, even when in some cases the firm was losing money? The answer is by watering down the stock through the issuance of options, and therefore reducing the value of shareholders, these excessive returns were made possible. Since many shareholders were institutional investors representing pension and retirement funds, the possible outcry over such a transfer of wealth was muted by the dilution of ownership, enabling the greed of management of the 1990s and the current decade. However this led to a moral hazard: in principle (although this too was abused), excessive compensation was tied to how much a stock's price rose in the short term. This created an incentive to manipulate the information given to stock analysts and auditors who certified as true such information. This dispersal of information, the main control over nefarious behavior, was not regulated; instead the market regulated itself through the system of audits, done by private, for-profit companies, such as Arthur Andersen. An incentive conflict arose, since companies would hire auditors as consultants, and often a person's consultant income would be more important than his income as an employee of a large audit firm. It was this conflation of a desire to keep a firm's stock price rising, plus the incentive problems of auditors, together with the laissez faire attitude of the government, which led to the Enron debacle, and others like it (Worldcom, Global Crossing, Adelphia, Tyco, etc.)

After the Gramm-Leach-Bliley act the current decade of the year 2000 became wild. Just as the five large audit firms supervise the integrity of financial reports of companies and are not regulated by the government, so too the three large ratings agencies (Moody's, Standard and Poor, and Fitch) are unregulated, and they supervise the integrity of bonds, including those coming from ABS, CDOs, and the like. And just as the audit firms had conflicts of interest by also consulting for the firms they audited, so too did the ratings agencies. It was very important for the senior tranche of an ABS to be rated AAA. There are two reasons for this: the first is that some institutional investors have a large portion of their investments restricted to investment grade rated objects, and AAA rated investments are even better than investment grade: they are supposed to be as safe as investing in treasury bills; these include insurance companies, banks, pension funds, retirement funds, and university endowments. The second reason is that when a bank makes a risky investment, it needs to set aside a capital reserve equal to a percentage of the money at risk; the more the risk, the more is set aside. This is costly to banks, and therefore banks want always to minimize the capital reserves to that required by regulation. (This is what overnight loans to banks are: if a bank has excess capital reserves one day, it can lend it overnight [for a fee] to a bank which has too little, so that both banks are in compliance.) A huge loophole in this regulation is that no capital needs to be set aside if the investment is AAA, since it is then essentially totally safe. The downside is that returns are typically very low with AAA investments, since the risk taken is so low.

When the standards for obtaining a mortgage began to degrade, people realized that the typical risk of holding mortgage backed securities had increased, and so the investors who organized ABS securities had to offer higher interest rates to attract takers. The degradation took place when deregulation allowed practically anyone (in addition to the usual sources such as banks and savings and loans) to write mortgages and then sell them to the secondary markets to form ABS securities. Large fees for the sellers of mortgages encouraged the practice. Corruption and incompetence became common: for example, at some times mortgagees did not have to document claimed income levels, nor other outstanding debts (such as credit card loans, auto loans, gambling debts, etc.), and/or appraisals of homes were lax as well. This led to an easy route to fraud: person A buys an $80,000 home and then sells it to an accomplice person B for $300,000. The second buyer of the home, via his mortgage, soon defaults, leaving the underwriters (now diffused through ABS securities) to sell a $300,000 home worth only $80,000. Moreover person B might not have even needed to make a down payment, having obtained a "piggy back loan" for the missing 10% or 20% customary down payment, leaving him with no equity at risk in the deal. He then splits the profits with his accomplice, person A. This tactic, practiced in quantity, can lead to large losses. And this is only one concrete example of what was going on. These tactics were available due to the acceptability of "subprime" mortgages. Subprime mortgages became a way to continue the life of the housing bubble. Indeed, some see the subprime mortgage phenomenon as even creating the housing bubble, or at a minimum causing its acceleration. As demand began to falter for the ever more expensive real estate market, even with low interest rates and high liquidity bankrolled by a (very) relaxed federal reserve, customers who could no longer afford housing were enabled by unrealistically low "teaser rates" for adjustable rate mortgages which would "re-set" in two or three years to create prohibitively large payment requirements. People were willing to take such deals for three reasons: living in a house became as affordable in some cases as renting an apartment, via the teaser rates and no down payment requirements; second, since the price of houses continued to rise, when the mortgage eventually reset at a high level, one could simply prepay, along with the penalty for prepayment (if any), by obtaining new financing and a new teaser rate, and increasing the mortgage size (since the home was now worth more), which could even include the penalty for prepayment as well as some spending money; third, people could buy second homes, or speculative properties, or simply try to arbitrage the banks by buying properties at low teaser rates and selling them for a tidy profit when the rates reset, because the housing prices rose.

The end of the bubble ruined the party.

What led to the degradation of the mortgage selling standards was a relaxation of regulations, the necessity of such to continue the housing bubble, and especially a large and incessant demand for the senior tranches of ABS securities, once they began to pay significantly higher rates than treasury bills would pay. Due to the lack of capital reserves loophole, these became a source of large profits to banks, investment houses, and others. Soon the demand could not keep up with supply: there was simply too much demand for the quantity of new mortgages being written. This led to the creation of CDOs, the acronym for collaterized debt obligations. The problem was that while the senior tranches were easily saleable, the other tranches were much more risky, with the equity tranche (usually kept by the creator of the ABS) being the riskiest. The CDOs repackaged the bonds from the lower tranches of the ABS; so that the bonds from an ABS were the collateral behind the CDOs. What happened was that a clever capitalist would repackage these lower grade bonds into a new set of tranches, which had its own "senior tranche." The ratings agencies were using historical standards to rate the CDOs; but the huge increase in subprime mortgages was unprecendented, so in effect the ratings agencies were complacently using an out of date model to rate new, much more risky products. Due to their high risk, the senior tranches of the CDOs commanded a higher interest rate, but due to the incentive conflicts of the ratings agencies, coupled with their outmoded methodology, they were "able" to give them the highest rating of AAA, which we remind the reader meant they were essentially as safe as treasury bills. Everyone knew (or should have known) that these bonds were not comparable to treasuries, but having the AAA rating meant the banks and investment houses could get a high rate of return and still have no capital reserve requirements, leading to enormous profits.

It gets worse: demand for these highly profitable CDO securities led some capitalists to repackage the lower tranche bonds (not the senior tranches which were easy to sell) into CDOs backed by CDOs. These were known as "CDO squared," denoted CDO^2. These were even more dubious, backed by the lower grade bonds of a CDO, which were of less quality even than the lower grade bonds of ABS. Sometimes even the equity tranches of ABS were placed into CDOs and CDO^2s. Yet the creators of CDO^2s were nevertheless able to get the ratings agencies to rate the senior tranches of these dubious derivative securities of derivative securities, as AAA. A key element in getting these coveted ratings was the role of monoline insurance companies[6]. These insurance companies were only too happy to provide insurance for AAA securities: it was seen as a perfect business model, where they were paid recurring fees for providing the insurance, with so little risk that there was no need to hedge effectively against the possibility of default. The AAA ratings of these quite high risk products were provided by the incentive conflicted ratings companies, with the rationalization that they were insured by these monoline insurance companies. The CDOs were snapped up by eager banks and investment houses, not just in the US but also in Europe and Japan.

At this point one may well ask: Didn't the bankers know better? Their mothers' dictum that "if it is too good to be true, it must not be true" should have applied. Why they persisted to buy these until the bitter end can be explained by the incentive system of the banks: the remuneration of the traders and others were based on a bonus system, creating incentive for short term gains no matter the risk to the company. And traders and the banks themselves were profiting mightily from these products for over 2 years until the fall. Not only did senior partners of the banks and firms make tens of millions of dollars annually, but the wealth was spread around, so that many ordinary employees could earn a million dollars or more a year with these trades. The basis for performance was three month periods: if nothing happened within 3 months, it was someone else's problem. With everyone thinking this way, it is inevitable that someone will be holding the "hot potato" at the end. As it turned out, everyone had more than enough potatoes to go around. And if a responsible trader refused to participate, he or she would be ostracized

[6] Conventional insurance companies are prohibited from insuring financial products such as CDOs, by regulation. A monoline insurance company exists expressly to provide such insurance: examples are the now failed ACA and a subsidiary of the insurance giant AIG.

by his co-workers for not making enough money for the group, and possibly not participate fully in the enormous bonuses being handed out. How long can one person resist within that sort of crucible environment? There are stories of the people who created the CDOs sleeping in the building, and living on take out pizza, so that more and more money could be made as they continued to create CDOs around the clock to fulfill demand.

Thus we see that the combination of a relaxed regulatory environment (thanks to congress and the administration's "business friendly" attitude, especially reflected by the SEC and the Federal Reserve), a degradation of mortgage selling standards in a non regulated environment, the presence of a housing bubble and the large increase of subprime mortgages, a dubious incentive structure within the banks, and an outmoded methodology coupled with a dubious incentive structure for the ratings agencies, all placed into a climate of excessive greed magnified by extremely high executive compensation levels, combined to lead to the current banking and credit crisis. Once these factors are all understood, a recipe for correction seems fairly clear. Whether or not it will be heeded remains to be seen.

INFORMATIONS

Section 01 du Comité national de la recherche scientifique : bilan du fonctionnement de la mandature 2004-2008

Fabrice Planchon[1]

Dans le cadre de son mandat, la section a élaboré en 2006 un document de conjoncture, disponible sur le site du CNRS[2], qui présente un panorama des développements mathématiques récents et illustre la qualité des mathématiques françaises, d'un point de vue scientifique.

Le présent texte (qui ne prétend pas être exhaustif !) a un objectif différent : présenter les modalités de l'activité de la section 01, « mathématiques et interactions des mathématiques » sur la durée du mandat qui s'est achevé en septembre 2008. Il passe en revue la plupart des missions confiées à la section, ainsi que le contexte (politique et scientifique) dans lequel elles ont été menées. Son caractère souvent technique, l'accent parfois mis sur les dysfonctionnements, doit plus à l'usure du mandat et de son rédacteur qu'à la réalité quotidienne de l'activité de la section : les mathématiques y occupent une place prépondérante, lors des évaluations bien sûr et en particulier pendant le concours, où la qualité des candidats a produit des discussions passionnantes dans une excellente atmosphère. Une analyse des aspects scientifiques du concours, sur la durée du mandat 2004-2008 voire au-delà, sera faite ultérieurement, dans un document différent.

Au cours de ces quatre années, la section a été au contact de l'ensemble de la recherche mathématique et de ses acteurs en France. Elle a pu constater la richesse de cette activité, dans tous les domaines, du plus fondamental au plus appliqué, aussi bien au niveau individuel qu'au niveau des laboratoires ou des groupements de recherche. Lors de ses délibérations et de ses choix, elle a été attentive aux équilibres thématiques et a porté une attention particulière aux domaines appliqués, tout en regrettant de n'avoir pu traiter de manière satisfaisante certains domaines qui entrent dans ses attributions, tel celui de l'histoire des mathématiques.

Un bref rappel des activités

Schématiquement, les activités de la section se subdivisent en trois grandes catégories :

[1] Président de la section, 2004-2008.
[2] `http://www.cnrs.fr/comitenational/doc/rapport/2006/01.pdf`

– Évaluation récurrente, de personnels ou de structure ; on peut classer ici les promotions chercheurs ; l'évaluation des chercheurs et des unités se fait chaque printemps, l'ensemble des unités étant classé par vagues (A/B/C/D), chaque chercheur étant évalué tous les deux ans et chaque unité tous les quatre ans (lors de la reconduction du contrat quadriennal). Cette évaluation représente plus de 700 dossiers sur quatre ans. Les promotions, qui sont traitées à l'automne, représentent quant à elles plus de 200 dossiers (en comptant chaque candidature séparément). L'évaluation des GDRs (groupements de recherche) se fait également à l'automne (40 dossiers sur trois ans). Toujours à l'automne, sont traitées les demandes de subventions de colloques et les subventions aux revues.

– Demandes particulières ; entrent dans cette catégorie les demandes hors calendrier récurrent (changement d'affectation, détachement, changement de directeur...) et également le suivi des cas particuliers de chercheurs (une centaine de dossiers sur trois ans).

– Concours de recrutement chercheurs : à chaque printemps, la section se constitue également en jury d'admissibilité (seuls les personnels de rang A et les Bs ayant un rang leur permettant de concourir participent à un concours donné : il y a généralement au moins trois concours (CR2/CR1/DR2) auxquels viennent s'ajouter les concours fléchés). Les concours des années 2005 à 2008 ont vu passer plus de 300 candidats par an, dont plus de 200 sur les concours CR. À noter également que lors des sessions d'automne, la section (dans son ensemble) émet un avis sur les affectations des « nouveaux » entrants (CR et DR). Elle donne également un avis un an plus tard sur leur titularisation (pour les seuls entrants CR).

En dehors du concours qui a ses règles propres, chaque dossier donne lieu à un rapport, communiqué à l'administration et à l'évalué (personne ou structure), rédigé par la section qui désigne généralement un ou plusieurs rapporteurs.

Enfin, les demandes de délégation au CNRS des enseignants-chercheurs sont traitées hors sessions ordinaires, pour des raisons de calendrier. La section délègue donc plusieurs de ses membres pour examiner les dossiers au département scientifique. La même procédure est utilisée pour les demandes de post-doctorants CNRS, et également pour toute demande urgente hors-session.

Un bilan du mandat

Bien qu'aucun texte interne au CNRS n'ait été modifié en ce qui concerne le Comité national, force est de constater que l'érosion continue de ses attributions et prérogatives s'est poursuivie pendant ce mandat, et ceci indépendamment des directions changeantes, des réformes entamées/inachevées/finies et de la bonne volonté générale du secrétariat général du Comité national (SGCN) comme du département scientifique (DS). Le contexte politique très mouvant ne saurait être invoqué comme la seule raison : pour une part, la réforme mise en œuvre à compter de fin 2004, sous couvert de rationalisation, a privé le Comité national de prérogatives importantes (au mépris des textes), comme l'examen des délégations (poursuivi avec l'accord du département scientifique et dans des conditions dégradées, voir la discussion ultérieure sur le sujet. La direction générale actuelle, malgré des déclarations lénifiantes répétées, n'a pas l'air de comprendre qu'il s'agit d'une activité qui ne peut être menée par le seul directeur scientifique adjoint). D'autre part, l'examen de nombreuses demandes se fait a posteriori et les rend donc plus formelles qu'autre chose. Cela est également vrai de nombreux projets qu'il est demandé d'approuver à leur stade final, sans concertation préalable et, donc, par la force des choses, sans modification possible. Le cloisonnement à l'intérieur du CNRS (direction des relations internationales, direction des partenariats, départements scientifiques...) est partiellement responsable de cet état d'urgence permanent où le Comité national semble représenter un empêcheur de tourner en rond qu'il convient de garder à distance. La très mauvaise information dont disposent souvent les chercheurs et unités sur les moyens et demandes qu'ils peuvent effectuer est également à blâmer (quoique les responsabilités soient à partager également entre direction(s) et unités/personnels sur ce point, l'information existant bien souvent lorsqu'on se donne la peine de la chercher). Malgré ce constat qui peut paraître alarmiste, la section s'est efforcée de rendre ses avis dans les meilleurs conditions, dans le souci de l'intérêt des chercheurs et de l'organisme. Les échanges avec le département scientifique ont été nombreux et constructifs, dans un esprit de coopération que l'on ne peut que souhaiter voir se poursuivre. Dans ce cadre, il est important de rappeler au département scientifique, autant que nécessaire, qu'il est dans son intérêt de consulter la section en préalable plutôt qu'a posteriori, et qu'en matière d'évaluation ou d'avis d'ordre scientifique (qu'il porte sur des personnes ou sur des structures), son avis peut être précieux (et donc que s'en priver revient à se priver d'un avis, certes souvent indicatif, mais collégial et, on l'espère, représentatif de la communauté).

Un tour d'horizon rapide de quelques points importants

Le concours

Le concours : certainement la tâche la plus difficile qui incombe à la section, de par ses implications à long terme.

Le nombre de postes ouverts a été raisonnable (en comparaison avec les mandatures précédentes et en regard des autres sections), même si les équilibres entre postes CR/DR ne sont pas toujours ce que la section (et le département scientifique !) souhaiterait. À noter que ce nombre, parfois jugé élevé par d'autres sections, était, pour les postes CR, directement corrélé au nombre de départs vers l'enseignement supérieur, bien plus important en section 01 qu'ailleurs (on a compté plus de 30 départs sur les quatre ans de mandature). La très faible proportion de postes CR1 était voulue par la section (suivant les précédentes) ; nouveauté peut-être par rapport aux mandatures précédentes, la section en a fait usage pour recruter d'excellents maîtres de conférence (entraînant un effet clair sur le nombre de MdCs candidats). Outre que cela donne une forme de « deuxième chance » à des candidats malheureux à un concours CR2 passé (dont le niveau est et reste très élevé), une explication possible est à rechercher dans le faible nombre de candidats venant de « l'extérieur du système » (étranger notamment). Le nombre, plus élevé que pour les sections précédentes, de postes ouverts aux concours DR2 a permis de travailler dans de meilleures conditions : il faut cependant souligner l'absurdité d'un système où le CNRS affiche qu'il « recrutera » plus de 100 directeurs de recherche une année donnée, alors qu'il recrutera effectivement moins de 20 nouveaux chercheurs au niveau DR, les autres provenant du corps des CRs et ne correspondant donc qu'à ce que Bercy appelle un « chapeau » budgétaire (un tel « chapeau » de DR2 représente moins d'un tiers d'un poste « frais » au concours CR2...) ; une séparation claire entre concours interne et externe permettrait un affichage public plus sain, et éviterait certains désastreux malentendus sur la nature « externe » ou interne de tel ou tel poste fléché (les malentendus peuvent aller jusqu'au déclassement en jury d'admission, comme la section l'a appris à ses dépens la première année : désagréable pour le jury d'admissibilité mais encore plus pour le candidat malheureux dont le dossier n'était absolument pas en cause...). D'ailleurs, à tous les niveaux de concours, le nombre de candidats en provenance de l'étranger reste faible : il y a là un travail à faire de la part des laboratoires pour solliciter des candidatures au niveau des concours ouverts, sachant que la direction générale souhaite poursuivre un effort de recrutement « extérieur » qui la conduit à ouvrir des postes fléchés (notamment au niveau DR1, mais pas seulement) sans nécessairement faire un réel travail de préparation (ou, ce qui semble de beaucoup raisonnable, le faire faire par de possibles laboratoire d'accueil). Par ailleurs, et c'est dommage, le nombre de postes disponibles en détachement, qui semblaient les plus appropriés pour accueillir des enseignants-chercheurs en poste en France, notamment pour des opérations de politique scientifique, s'est réduit à zéro : alors même qu'il est désormais possible d'ouvrir des possibilités de détachement sur des postes contractuels, ce qui élimine de facto les nombreuses incompréhensions passées exacerbées lors d'éventuelles intégrations de personnel détaché.

Sur les quatre concours 2005/2008, on remarque, entre autres chiffres intéressants pour les recrutés CRs, une grande diversité de provenance (plus de 20 laboratoires différents) comme d'affectations (plus de 20 destinations également, avec un bon équilibre naturel Paris-Province). L'équilibre thématique est également globalement respecté, et la section, en refusant tout fléchage thématique ou géographique, a assumé comme sa charge naturelle le respect de grands équilibres, et fait valoir ses arguments aux jurys d'admission. À cet égard, la répartition suivant les sections CNU (25/26) ou (et ce n'est pas la même chose) entre mathématiques fondamentales et appliquées apparaît meilleure que par le passé. À noter que, chaque année, il y aura eu un poste CR2 dit d'« échange » avec la section 07, c'est-à-dire un poste ouvert en 01 mais avec une affectation ultérieure par le département ST2I dans un laboratoire de 07, et un poste ouvert en 07 avec affectation ultérieure par MPPU dans un laboratoire de 01. Les sections ont échangé des experts pour ces concours particuliers qui semblent avoir fonctionné de manière tout à fait satisfaisante. Ce genre de croisement peut être fait avec d'autres sections (cela a été le cas avec la section 10 en 2005, sans échange d'expert cependant) et c'est d'ailleurs le cas au concours 2009. En ce qui concerne les recrutements directeurs de recherche, ils sont dans leur quasi-totalité effectués parmi les chargés de recherche, à un niveau (d'âge et d'expérience) généralement supérieur à celui du passage dans le corps des professeurs d'université (on peut relier ce point aux départs vers l'enseignement supérieur mentionnés plus haut, mais cela mériterait une étude séparée). La mobilité (au moment du passage DR ou avant) a été un facteur important (et mentionné comme tel dans les critères d'appréciation de la section) et elle est en nette hausse (là encore, le plus grand nombre de centres attractifs, notamment en province, n'y est pas étranger).

La marge de manœuvre dont la section bénéficiait avec l'augmentation du nombre de postes a permis de travailler en modulant l'ensemble de ses critères en fonction du vivier des candidats, où des profils d'âge et d'expérience très différents coexistent. Les vœux d'affectation, à quelque niveau que ce soit, n'ont pas joué un rôle déterminant dans les classements (même si la cohérence d'un projet est un élément d'appréciation à prendre en compte !) ; la majorité de ces vœux a d'ailleurs reçu satisfaction de la part de la direction, et, lorsqu'il y avait des difficultés, la section s'est efforcée de veiller à ce que, lorsque le premier vœu n'était pas satisfait, une alternative satisfaisante pour le nouveau recruté se fasse jour. Il importe d'ailleurs dans ce cadre que futurs recrutés comme futurs laboratoires d'accueil se rendent compte que les choix se préparent en amont, et que les impératifs du CNRS le conduisent parfois à faire des choix difficiles. Autrement dit, l'arrivée d'un nouveau CR dans un laboratoire se prépare au mieux en s'assurant que d'excellents candidats souhaitent y venir, plutôt qu'en harcelant section et département scientifique une fois la liste connue. Terminons par deux bémols : outre l'absence de recrutement dans le domaine de l'histoire des mathématiques, la faible proportion de femmes dans les recrutements ; celle-ci reflète malheureusement les effectifs en amont, dans les classes préparatoires et les filières scientifiques de mathématiques. Force est de constater que la section sur ce point n'est pas allée au-delà du constat, avec 6 recrutements sur 62 postes CRs ouverts sur 3 ans. Enfin, difficile de clore ce bref panorama du concours sans évoquer les changements en cours, qui ont déjà eu un effet direct sur la campagne de recrutement 2009 : l'apparition des « chaires » conjointes CNRS-Universités conduit directement à la disparition d'environ 5 postes de CR2 au concours général, sans contrepartie réelle en terme d'emploi statutaire. Au-delà, leur modalité de mise en place (et plus particulièrement de recrutement) ne semble pas de nature à favoriser le niveau d'excellence qui est celui du concours national ; le double fléchage géographique et thématique, pratiqué dans l'urgence, est à l'antithèse de la pratique menée par la section 01, et il est frappant de constater qu'il disparaît un nombre de postes équivalent à celui qui était donné justement au titre de ce flux vers l'enseignement supérieur que l'on voudrait favoriser partout ailleurs...

L'évaluation

L'évaluation des chercheurs et des unités occupe une bonne part de l'activité des deux sessions, automne et printemps. À l'automne se déroulent les promotions de grade : les promotions CR2$\mapsto$CR1 n'ont posé aucun problème particulier, puisque le CNRS disposait du nombre de postes suffisants (et que les CR2 candidats montraient d'excellents dossiers !) chaque année. On note toutefois que les disparités grandissantes au recrutement (en terme d'âge et de développement scientifique) justifieraient très certainement une disparition de la barrière des quatre ans, ou une fusion pure et simple des classes comme celle réalisée dans le corps des MdCs (le reclassement au recrutement prenant, lui, en compte les disparités lors de la reconstitution de carrière). Les promotions de classe au niveau DR (vers DR1 puis DRCE) constituent l'un des principaux points noirs de l'activité : le nombre ridiculement bas de promotions disponibles (particulièrement criant pour le passage DRCE où les courbes d'âge moyen, pour le CNRS dans sa totalité, de promotion DR1$\mapsto$DRCE1 et DRCE1$\mapsto$DRCE2 sont allées jusqu'à presque s'inverser il y a quelques années). Cela conduit à un travail de « gestion » d'une (trop) longue file d'attente sur quatre ans, à peine remise en cause par l'apparition éventuelle de nouveaux candidats. La lisibilité extérieure des classements faits n'est pas non plus la meilleure, la liste des candidats n'étant connue que de la seule section (qui ne peut classer un candidat n'ayant pas fait acte de candidature). Sur quatre ans, la section aura vu la promotion de 13 DR2s vers DR1s, 2 DR1 vers DRCE, et 1 DRCE1 vers DRCE2. La direction générale du CNRS avait annoncé à l'automne 2007 un effort de rééquilibrage dans les différentes classes (la limite statutaire du pourcentage de DRCE, fixée à 10%, étant très loin d'être atteinte, contrairement au corps des professeurs d'université où la situation est « meilleure »). On ne peut que souhaiter que cela se traduise par une (timide) amélioration de la situation sur la mandature qui vient de débuter.

L'évaluation des unités est actuellement en pleine restructuration, suite à la mise en place de l'AERES. Cependant, la direction actuelle du CNRS souhaite que les sections continuent d'examiner les unités, et les textes prévoient de toute façon un avis des sections sur les créations et renouvellement des unités, ce qui ne peut se faire sans évaluation sérieuse. Il est encore trop tôt pour tirer un bilan du nouveau système, après une campagne d'évaluations (et les visites afférentes), mais il conviendra de rester vigilant au rôle du Comité national dans ce domaine, le lien entre évaluation des structures et évaluation des personnes ne devant pas être remis en cause. Le principe des comités de visite mis en place par l'AERES n'est pas fondamentalement différent de celui utilisé auparavant par le département scientifique, et la section a travaillé, comme auparavant, sur la base des rapports et des éléments fournis par son représentant dans le comité de visite. Cependant, une évolution mal venue dans le nouveau système est l'absence de représentant ITA, sauf proportion élevée d'agents dans la structure évaluée : lors des deux années d'évaluation mandatées par le CNRS, la section envoyait systématiquement (à la demande du département scientifique et en ignorant la règle interne du CNRS, assez proche de la règle actuelle de l'AERES, soit dit en passant) l'un de ses 3 membres ITA dans les comités de visite nommés par le CNRS, en sus de son ou de ses représentants (enseignants-)chercheurs. Ils jouaient un rôle extrêmement précieux pour le comité de visite, puis pour la section dans son appréciation du bon fonctionnement quotidien des unités ; l'examen de ce quotidien est nécessaire à une bonne évaluation d'une unité, pour les implications qu'il a sur l'environnement qu'elle fournit et qui est un facteur de qualité scientifique. Le département scientifique devra veiller à assurer la présence d'un ITA lors des visites, si l'AERES ne peut/veut prendre cette représentation à sa charge. Par ailleurs, la section a toujours désigné ses représentants en bonne entente avec le département scientifique, espérons que cela se poursuive avec l'AERES, et que l'Agence réalise que la présence d'un représentant par section concernée est nécessaire lorsque les unités ont des personnels relevant du champ de compétence de sections différentes (là encore, ça n'est pas nouveau, et certains département scientifiques du CNRS « oubliaient » de prévenir la section 01 de l'évaluation d'un laboratoire dont elle était section secondaire...) ou qu'une méga-évaluation avec des sessions parallèles, si elle ne fait pas appel à plusieurs membres de la section, revient de facto à demander le don d'ubiquité...

Enfin, il faut souhaiter que non seulement le CNRS (plus précisément sa direction) continue de confier un rôle d'évaluation aux sections, mais également qu'il comprenne que laisser sa direction des partenariats (DPA) mener une évaluation parallèle, uniquement sur des indicateurs bibliométriques parfois collectés par elle seule selon des méthodes qui laissent perplexe, n'est pas de nature à améliorer les relations de l'organisme avec les universités. Que l'avis de la DPA puisse l'emporter sur une succession d'avis favorables de la section (s'appuyant sur un rapport de visite), du conseil scientifique de département, du conseil scientifique du CNRS pour aboutir à une mise en FRE (formation de recherche en évolution, l'appréciation de la dénomination est laissée au lecteur...) n'augure pas bien du futur des « petites » unités. Dans ce cadre, la direction générale actuelle semble malheureusement suivre les traces de sa devancière, plus occupée à sauver ce qu'elle croit être le cœur du CNRS qu'à préserver ce qui a été construit, en collaboration avec les établissements partenaires, par les directeurs adjoints pour les mathématiques, avec l'appui de leurs directeurs scientifiques (SPM puis MPPU), mais le plus souvent dans l'indifférence voire l'incompréhension des directions fonctionnelles à commencer par la première d'entre elles.

Les demandes particulières

Les demandes particulières, de type détachement d'un chercheur, renouvellement de détachement, mise à disposition, congé, mais aussi changement d'affectation sont traitées comme elles arrivent, malheureusement le plus souvent pour effet rétroactif, ce qui réduit d'autant la marge de manœuvre. Le département scientifique et la section ne font sans doute pas assez d'effort pour expliquer les démarches nécessaires et les calendriers à respecter. Cependant la section s'est efforcée de traiter ces demandes au mieux en émettant des avis réfléchis et dictés par la nécessité d'avoir des règles claires (notamment concernant les détachements et leur prolongement éventuel au-delà d'une certaine durée, pour les postes permanents à l'étranger). À l'heure où la direction des ressources humaines du CNRS parle de ne plus présenter ces demandes aux sections du Comité national, il convient de rappeler que toute décision ayant une implication directe d'ordre scientifique sur la carrière d'un chercheur doit être soumise à l'appréciation de la section ; tout autre mode de fonctionnement tomberait dans l'arbitraire et le manque de transparence, et le système actuel peut d'ailleurs déjà donner cette impression... Rappelons que le détachement (et encore plus son renouvellement !) est soumis à l'avis de l'organisme employeur, et qu'un poste statutaire dont le titulaire est en détachement ne revient que sous la forme des postes invités (« postes rouges »). Il convient donc, en regard du nombre de postes ouverts au concours, de peser soigneusement les décisions, puisqu'immobiliser un poste n'est pas sans conséquence. Plus encore, les mises à disposition[3], notamment d'organismes étrangers, sont sujettes à caution, surtout lorsqu'elles sont immédiatement suivies de demandes de détachement[4] ; la facilité de voyager des chercheurs CNRS est unanimement louée, facilitant contacts scientifiques, en France comme à l'étranger, et il ne s'agit pas de la restreindre, mais de mesurer l'intérêt de l'organisme dans ces opérations.

Dans un registre plus désagréable, la section a voté plusieurs avis d'insuffisance professionnelle durant les quatre ans écoulés. Il convient pour éviter d'en arriver là que le suivi normal d'évaluation détecte le plus tôt possible les problèmes potentiels de tous ordres, et qu'une forme d'action (directe auprès du chercheur, à travers le rapport ou un contact, ou indirecte via la DRH) soit entreprise, en association

[3] Un chercheur mis à disposition reçoit son salaire du CNRS.

[4] Un chercheur détaché auprès d'un organisme conserve son poste au CNRS, mais reçoit son salaire de l'organisme.

particulièrement avec son unité. Il est dommage de constater d'ailleurs que certains directeurs d'unité ne s'investissent pas plus dans le suivi de leurs chercheurs, lorsque des problèmes se font jour bien sûr, mais même avant ! Malheureusement, la section n'évalue chaque chercheur que deux fois durant ses quatre ans de mandat, ce qui est peu pour assurer un bon suivi, mais rend d'autant plus important, d'une part qu'il lui soit transmis des rapports d'activité complets, et d'autre part qu'elle produise des rapports qui seront utiles au département scientifique comme à la section suivante.

La question des délégations

Comme indiqué précédemment, la question des délégations aura été un point très négatif de la mandature. D'abord annoncées comme disparaissant du champ de compétence du Comité national, elles sont néanmoins réapparues (grâce essentiellement au désir du département scientifique de s'appuyer sur l'expertise de la section), mais sous une forme dégradée qui ne prête pas à une véritable évaluation sérieuse : le département scientifique signale (et la responsabilité en incombe surtout à la direction des ressources humaines...), avec un délai de réaction très (voire trop !) court l'arrivée des dossiers (qui ne restent au département scientifique qu'une quinzaine de jours), et ces dossiers sont ensuite examinés, sur une journée, par un (petit) groupe de membres de la section. Le nombre conséquent de délégations disponibles rend le travail de choix moins difficile, mais il est à craindre que toute modification de cet équilibre ne rende la situation explosive. L'attitude parfois ambivalente du département scientifique, désireux certes d'avoir l'avis de la section mais également d'exercer ses (nouvelles) prérogatives dans ce domaine a pu parfois laisser perplexe. Or il convient de rappeler qu'effectuer un tri parmi plus de 180 demandes par an nécessite l'expertise de la section dans son ensemble. La section a essayé d'afficher au mieux ses priorités, en concertation avec le département scientifique : ont été ainsi privilégiés les « jeunes » (recrutés, c'est-à-dire souvent les MdCs mais aussi des professeurs), les dossiers présentant un projet de mobilité (surtout géographique mais aussi thématique), ceux qui mentionnaient la préparation d'une HDR (un bémol cependant : une évaluation a posteriori de cette politique affichée depuis des lustres serait bienvenue), les organisateurs de manifestations scientifiques (type semestre IHP), et au titre du département scientifique, des responsables comme les directeurs de laboratoire ; ces axes ont été privilégiés sans concession pour la qualité scientifique des demandes, et la conjonction du nombre d'années calendaires accordées par le CNRS et d'une politique de non-renouvellement et de fractionnement sur semestre a permis de travailler sans dysfonctionnement majeur. Il est à craindre qu'une réduction (qui s'annonce !) drastique, voire une disparition pure et simple à l'échelle de quelques années, de la dotation en délégations ne conduise à un crise sérieuse. Le même constat, sur une plus petite échelle, s'applique également aux postes « rouges », c'est-à-dire les postes d'invitation, pour lesquels la section n'est plus officiellement consultée sans qu'on comprenne bien pourquoi une telle consultation (justifiée puisque concernant des dossiers scientifiques de potentiels invités) empêcherait la direction scientifique d'afficher ses priorités ou ses orientations. Les attributions de post-doctorats, en collaboration avec la CPU, ont mieux fonctionné même s'il reste des points à améliorer, notamment en terme d'évaluation a posteriori des moyens attribués.

Les demandes de subvention de colloques

Les demandes de subvention de colloques, qui sont une autre activité relevant traditionnellement de la section et très observée dans la communauté, ont été de mal en pis d'année en année, à tel point qu'on peut considérer qu'elles ne relèvent plus de l'activité normale de la section. Celle-ci s'était pourtant efforcée de mettre en place dès l'automne 2004 une grille publique d'évaluation des demandes destinée à améliorer la qualité des dossiers présentés, dont la très grande disparité rend la comparaison aléatoire. Les changements de système et la disparition de l'appel d'offre colloques lancé par le département scientifique, remplacé par une case dans les demandes de moyens globaux des laboratoires ont rendu le système totalement opaque et illisible. La faiblesse ridicule des lignes budgétaires associées rendait de toute façon toute forme de travail sur le sujet pratiquement inutile au regard du retour sur investissement. Il y a là une réflexion à avoir. Par contraste, le succès des écoles thématiques (beaucoup plus formatées et relevant de la formation permanente du CNRS) ne se dément pas et le nombre d'excellents projets augmente, ce qui semble inquiéter le département scientifique, à tort à notre avis.

Conclusion

La section a également un rôle de prospective, et dans ce cadre a écrit un rapport de prospective ainsi qu'un rapport de conjoncture déjà mentionné. Ce dernier a été publié, le premier aura servi à l'élaboration du document de prospective du CNRS. S'il est bien difficile de prédire ce que seront les mathématiques de demain (et pas si facile de raconter celles d'aujourd'hui !), le document de prospective aura surtout permis de rappeler les grands principes qui fondent l'activité du CNRS en mathématiques, principes auxquels la section a adhéré pendant sa mandature et qu'elle a partagés avec le département scientifique, tout en gardant son indépendance d'esprit. C'est également cette politique que la section a défendue, en interne d'abord, et à l'extérieur, comme un modèle de développement où le partenariat CNRS-Universités est vécu comme un moyen de structuration d'une communauté majoritairement universitaire, et où les actions du CNRS sont au service de cette communauté dans son ensemble. Dans ce cadre et dans un contexte difficile, la section a travaillé en bonne entente non seulement avec le département scientifique, mais également avec les responsables des mathématiques où qu'ils se trouvent (ministère, AERES, ANR...) comme avec les sociétés savantes (SMF/SMAI/SFDS) pour promouvoir le modèle des mathématiques françaises, dont la qualité nous est apparue se trouver au plus haut niveau mondial, au vu de nos activités d'évaluation et de recrutement.

À l'heure où la création des instituts, avec un institut des sciences mathématiques et de leurs interactions, fait craindre le pire pour la survie du CNRS, il convient de s'interroger sur le sens de la politique menée par le CNRS en mathématiques, parfois « à l'insu de son plein gré » : si, comme l'auteur de ces lignes, on souscrit à une action de coordination et de développement des moyens au service d'objectifs scientifiques que la communauté détermine par elle-même (avec un certain succès !) plutôt qu'à une action de pilotage scientifique direct qui n'a que peu de sens en mathématiques (contrairement à d'autres secteurs où il convient de fixer une ligne d'horizon), alors la création d'un institut peut être l'occasion de rendre pérenne, claire, et affichée, une telle politique. Encore faudrait-il que la direction du CNRS se l'approprie plutôt que de s'évertuer à l'ignorer, et que le ministère (qui a voulu cette création bien plus que la communauté elle-même, peu au fait des batailles de couloir, au CNRS comme ailleurs), lui donne les moyens d'exister et d'assumer pleinement son rôle. Ou il est à craindre qu'une politique jusqu'alors menée tranquillement à l'ombre du CNRS, avec des moyens certes trop limités mais au moins adéquats (notamment humains, chercheurs ET personnels ITAs, mais aussi CIRM/CIMPA/IHP/IHÉS, délégations, programmes de coopération...), se voie asphyxiée par la double action d'une direction du CNRS occupée à recentrer ses moyens sur les mythiques laboratoires « stratégiques » (ou serait-ce propres ?), alors que sa richesse est au moins autant, sinon plus, dans son tissu d'unités mixtes, et ce bien au-delà des mathématiques, et d'un ministère, toujours prompt à souligner la qualité des mathématiques, mais surtout occupé à tenir une implacable logique budgétaire (où toutes les fonctions sont monotones décroissantes).

Une nouvelle étape dans la coopération franco-roumaine en Mathématiques

Bernard Helffer[1], Radu Purice[2]

La création du LEA

Le 17 mars dernier, l'Académie des Sciences de Roumanie, le CNRS et l'université Paris-Sud ont signé le texte portant création d'un Laboratoire Européen Associé franco-roumain en Mathématiques portant le nom de MATHMODE.

Cette nouvelle structure de Laboratoire sans murs créée par le CNRS est ainsi expérimentée pour la première fois dans le domaine des mathématiques et c'est aussi la première fois qu'elle réunit un laboratoire français et un laboratoire roumain.

La création d'un tel laboratoire ne doit pas surprendre. L'activité de recherche franco-roumaine en mathématiques a en effet une longue tradition. Il s'est ainsi créé entre les communautés mathématiques des deux pays des relations profondes, comme l'attestent par exemple le grand nombre de thésards roumains et de mathématiciens d'origine roumaine travaillant dans les laboratoires de recherche en France et l'organisation commune depuis bientôt vingt ans d'un colloque biennal franco-roumain en Mathématiques Appliquées qui s'est déroulé cette année à Braşov et qui sera organisé dans deux ans à Poitiers.

La concrétisation relativement rapide de ce projet ne doit pas nous faire oublier qu'il n'aurait sans doute pas vu le jour sans les efforts inlassables de collègues depuis de nombreuses années et tout particulièrement parmi eux D. Cioranescu, Y. Maday et M. Iosifescu de l'Académie roumaine. Les directeurs scientifiques successifs pour les mathématiques au CNRS Christian Peskine puis Jean-Marc Gambaudo et les attachés scientifiques en poste à l'ambassade ont aussi joué un rôle important.

---

[1] Université Paris-Sud et codirecteur du LEA Math-Mode.

[2] IMAR Bucarest et Codirecteur du LEA Math-Mode.

Le PICS franco-roumain, qui a montré la voie, se termine malheureusement cette année. Il nous semble que cela donne de facto de nouvelles missions au LEA, sous réserve que ses moyens, provenant pour l'instant principalement de l'académie roumaine et du CNRS, soient accrus. Nous comptons aussi poursuivre ou développer les contacts avec des partenaires industriels. L'expérience menée avec la société de logiciels roumaine SoftWin et qui a impliqué des chercheurs de Bucarest et de Toulouse est à cet égard très positive.

Depuis 1990, un nombre important de jeunes roumains ont complété leur formation à l'École Normale Supérieure de Paris et sont maintenant chercheurs dans des centres français ou roumains. En 2001 une École Normale Supérieure a été créée à Bucarest, avec le soutien de l'École Normale Supérieure de Paris et des mathématiciens français. Le colloque de Brașov nous a confirmé qu'un grand nombre de jeunes mathématiciens et mathématiciennes pouvait s'impliquer dans la coopération franco-roumaine. Beaucoup des jeunes roumains présents avaient d'ailleurs bénéficié du Programme Tempus qu'avait monté D. Cioranescu il y a déjà plusieurs années.

Ce LEA s'appuie sur deux laboratoires : l'Institut de Mathématiques de l'Académie Roumaine (IMAR) (intitulé (Inst. « Simion Stoilow ») à Bucarest et le Laboratoire de Mathématiques d'Orsay.

Ces deux laboratoires seront donc bien sûr fortement impliqués mais il est important de dire que ce LEA a reçu la mission plus large de favoriser sans exclusive l'éclosion de projets franco-roumains par de petites équipes mixtes créées au sein des laboratoires, instituts ou universités des deux pays et ceci dans tous les domaines des mathématiques. Il doit donc encourager la diversité tant scientifique que géographique des projets sans se recroqueviller sur ses têtes de pont.

Au delà des recherches menées, ce LEA se donne comme objectif de devenir un point d'attache institutionnel, de niveau européen, susceptible d'attirer en Roumanie un plus grand nombre de jeunes chercheurs de haut niveau et de jouer un rôle pilote au sud-est de l'Union Européenne.
Compte-tenu du déséquilibre actuel au niveau du budget recherche de l'Union Européenne entre la contribution de la Roumanie et ce qu'elle reçoit de l'Europe, il y a sûrement des possibilités, par exemple dans l'organisation d'écoles d'été.

Quelques informations et comment participer

Plus concrètement, voici quelques informations sur notre activité et sur les possibilités offertes pour y participer. Notre adresse web, qui est régulièrement mise à jour et contient plus d'information sur les statuts et les activités du LEA, est : `http://www.imar.ro/math-mode`

Organisation

Le laboratoire est dirigé par deux codirecteurs Bernard Helffer et Radu Purice qui organisent l'activité scientifique du LEA en s'appuyant sur un Comité d'Experts (D. Bakry, F. Bethuel, L. Beznea, V. Brinzanescu, I. Ionescu, V. Radulescu, C. Voisin).

Le comité directeur se prononce chaque année sur le programme scientifique et l'allocation des ressources.

Les priorités thématiques choisies pour les années 2008-2009 sont la géométrie, les équations aux dérivées partielles et la modélisation, l'analyse stochastique. Elles seront reconsidérées et annoncées chaque année.

Activités de l'année 2008.

Les crédits débloqués pour l'année 2008 ont par exemple permis d'organiser une série d'exposés sur le thème *« Applications du calcul stochastique à la finance »* , un atelier de travail sur le thème *« Analyse stochastique et potentiel »* et de participer au 9e Colloque franco-roumain de Mathématiques Appliquées à Brașov (28 août - 2 septembre 2008) en finançant des bourses de jeunes chercheurs et en organisant dans son cadre une demi-journée de présentation avec l'aide de l'ambassade de France.

Mais l'objectif principal est de soutenir des projets de recherche. Une dizaine sera financée par le LEA en 2008 sur des thèmes variés incluant la cohomologie de Koszul, les équations aux dérivées partielles stochastiques sans viscosité, le comportement en hystérésis des matériaux ferroélectriques, les méthodes variationnelles en micromagnétisme, le filtrage multiniveaux, la géométrie spinorielle et les méthodes de décomposition de domaine.

Appel à projets de recherche pour l'année 2009

Les chercheurs ou enseignants-chercheurs travaillant en France et en Roumanie, souhaitant soumettre des projets de recherche communs entrant dans le cadre des trois thèmes scientifiques annoncés, sont invités à les transmettre auprès d'un des deux responsables scientifiques du LEA Math-Mode.

Le projet, qui doit impliquer au moins un chercheur d'un laboratoire de recherche roumain et un chercheur d'un laboratoire de recherche français reconnu par le CNRS, doit comprendre :

(1) la présentation du projet scientifique ;
(2) un bref CV de chaque participant ;
(3) le détail des activités envisagées sur l'année (ou sur deux ans) ;
(4) la part de financement demandée au LEA.

Les projets doivent être envoyés par courier électronique (fichier pdf) aux deux co-directeurs Bernard.Helffer@math.u-psud.fr et Radu.Purice@imar.ro.

Mathématiques et grand public 2008

Gérard Tronel[1]

Voilà les mathématiciens mis une fois de plus au ban de la société car ils seraient responsables des catastrophes financières qui menacent de ruiner la planète en commençant par les petits épargnants : les mathématiciens n'auraient pas vu venir la crise car ils n'auraient pas su évaluer les risques ou pire, avec les modèles conçus par eux, ils auraient participé à la fête en empochant de gros dividendes. Nicole El Karoui que l'on voit beaucoup dans la presse, – un journal la gratifie du titre de *« papesse des mathématiques financières »* – a beau expliquer que pas plus que vous et moi les mathématiciens ne sont responsables des catastrophes actuelles dans l'univers clos de la finance, ce sont des financiers, rarement mathématiciens, qui ont pris des risques, proposés des modèles sophistiqués et non évalués, manipulés les actionnaires. Cette introduction pessimiste pour souligner que ces jours-ci il ne fait pas bon dire que l'on est mathématicien, une atmosphère d'hallali qui renvoie au code justinien classant les mathématiciens parmi les parias de la société romaine dans la même catégorie que les voleurs car ils étaient soupçonnés de complicité avec les commerçants véreux !

Cependant tout n'est pas complètement noir puisque des réactions récentes montrent que le grand public reste curieux sur tout ce qui touche aux mathématiques. Un collègue américain a réalisé un film sur la bande de Moëbius et pour le tester l'a mis sur *Youtube* ; à sa grande surprise le nombre de consultations dépasse très largement les sujets d'autres rubriques, même les rubriques qui sur internet font les délices des internautes comme les articles sur la vie des grands de ce monde. De même le film réalisé par Étienne Ghys recueille aussi sur internet, beaucoup plus qu'un succès d'estime. Enfin une responsable de la BnF soulignait récemment que, parmi les manifestations culturelles organisées par BnF les conférences « Un texte, un mathématicien » rassemblaient le plus grand nombre d'auditeurs et ceux-ci leur attribuaient un fort indice de satisfaction. Pour être plus concret je vais essayer de prendre des exemples de manifestations auxquelles j'ai participé soit du côté de la représentation des mathématiques soit du côté du public, soit encore des deux côtés. Je me limiterai à trois manifestations :

- le Salon des jeux et de la culture mathématique ;
- le Salon européen de la recherche et de l'innovation ;
- le Congrès européen des mathématiques.

Je commence par le Salon des jeux et de la culture mathématique qui se déroule toutes les années au printemps – en 2008, il a eu lieu du jeudi 29 mai au dimanche 1er juin – sur la place Saint-Sulpice à Paris. Il célébrait son onzième anniversaire et à l'invitation des organisateurs, les sociétés mathématiques qui y participent depuis l'année 2000 (Année Mondiale des Mathématiques) tenaient un stand sur lequel étaient représentées la SMF, la SMAI, la SfdS et « femmes et mathématiques ». Plusieurs collègues ont assuré des permanences au cours desquelles ils ont distribué des brochures, ils ont répondu aux questions du public et essayé de faire un peu d'animation en accueillant des collègues invités à faire des exposés ou à présenter

[1] Université Paris VI.

du matériel « ludo-éducatif ». À ce propos, le collègue qui construit des polyèdres géants avec des baguettes en bois a eu beaucoup de succès. Pour ce qui nous concerne, si l'on veut attirer les jeunes visiteurs, il faudrait réfléchir à développer cet aspect de notre présence ; de nombreux jeunes nous ont demandé ce que nous proposions comme jeux. Hélas nous n'avions pas beaucoup de matériel de manipulation, les brochures et les fiches ne sont pas suffisantes car elles sont trop statiques : c'est dans ce type de manifestations que l'on se rend compte que la feuille de papier et le crayon ou le tableau et la craie ne sont pas suffisants pour attirer le public. Autres remarques que j'ai déjà faites et qu'il faut rappeler sans cesse : d'une part un stand, même richement achalandé avec de la documentation de qualité mais sans présence physique, ne sert pas à grand-chose, d'autre part il faut que de jeunes collègues participent aux animations par une présence physique, j'insiste ; il n'est plus possible de laisser l'impression que les mathématiques sont vieillottes parce qu'elles sont représentées par des mathématiciens d'âge plus que canonique. Un après-midi, sur le stand, nous étions trois dont le plus jeune avait soixante-quatorze ans ! Il est absolument indispensable de changer cette image qui risque d'aller à l'encontre des objectifs que l'on souhaite atteindre : attirer des jeunes filles et des jeunes gens vers les filières scientifiques en particulier celles qui sont à dominantes mathématiques. De plus comme les jours scolaires ouvrables sont réservés aux élèves de l'école primaire, du collège et du lycée, il serait bon que de jeunes collègues soient présents pour donner une image jeune et dynamique de notre discipline : les mathématiques de l'avenir ne sont pas préparées majoritairement par des retraités !

Je ne voudrais pas terminer cette première partie par une conclusion trop noire : nous avons rencontré un public varié, curieux, attentif aux réponses que l'on pouvait apporter à leurs questions sur des thèmes particuliers – Galois, Perelman, les médaillés Fields et la place des mathématiques françaises dans le monde, les grandes conjectures, les relations entre mathématiques et informatique, etc. Nous n'avons eu que très peu de réactions négatives si on compare au nombre de réactions hostiles formulées par certains visiteurs lors de nos premières participations. De jeunes visiteurs demandent des informations sur les métiers qui s'ouvrent devant des demandeurs d'emploi ayant une bonne formation initiale en mathématiques, – la brochure « Les métiers des mathématiques » a toujours du succès, mais elle devrait être réactualisée –, des parents interrogent sur les choix entre grandes écoles et universités, sur les classements des établissements universitaires. J'ai eu personnellement à répondre à des questions sur les mauvais rangs donnés dans le classement établi par l'université de Shanghai.

Le bilan final milite en faveur d'une présence accrue et rajeunie de la communauté mathématique dans ce type de manifestions comme ce salon. Le village des sciences pendant la semaine de la Fête de la Science est aussi un bon cadre pour un contact avec tous les publics.

La seconde manifestation est le Salon Européen de la Recherche et de l'Innovation du 5 au 7 juin 2008 au Palais des Congrès, Porte de Versailles à Paris. Il s'agissait de ma seconde participation et je regrette de ne pas avoir été bien soutenu par les collègues : trois seulement sont venus me relayer pendant quelques heures. J'ai eu l'impression de n'être pas à ma place, car à la différence du salon des jeux et de la culture mathématique, les visiteurs de ce salon appartiennent bien souvent à la classe d'âge pratiquement absente dans le précédent, à savoir les élèves des classes préparatoires, les étudiants des grandes écoles, les étudiants des universités. Ces visiteurs s'intéressent à des questions portant sur les possibilités d'embauche des mathématiciens ou sur des sujets plus techniques : la cryptographie, l'utilisation de méthodes numériques dans la résolution des grands systèmes, la modélisation mathématique, les grandes conjectures et l'état de l'art dans les mathématiques contemporaines. Sur tous ces sujets, la présence de jeunes collègues aurait été nécessaire. Ceci pose le problème de la participation de la SMF à ce type de salon qui fait étalage d'un luxe aussi bien par la qualité des exposants que par celle des matériels exposés, luxe que nous ne pouvons pas nous permettre d'autant plus que la participation n'est pas gratuite.

Nous partagions le stand avec les collègues de la SFP, de la SFC, et avec les représentants de la revue « Électronique et Électrotechnique ». La collègue chimiste a eu beaucoup de succès car elle proposait aux visiteurs en quête d'emploi une « relecture de CV ». Les collègues physiciens ont assuré des conférences, ils ont profité de l'occasion pour remettre des prix à de jeunes chercheurs ; ils sont plus visibles que nous car ils sont organisés en sous-groupes en interaction forte avec la recherche appliquée et industrielle. Si nous voulons continuer à participer à ce salon, il faudrait réfléchir à un investissement plus important en participants et en matériel pris au sens large.

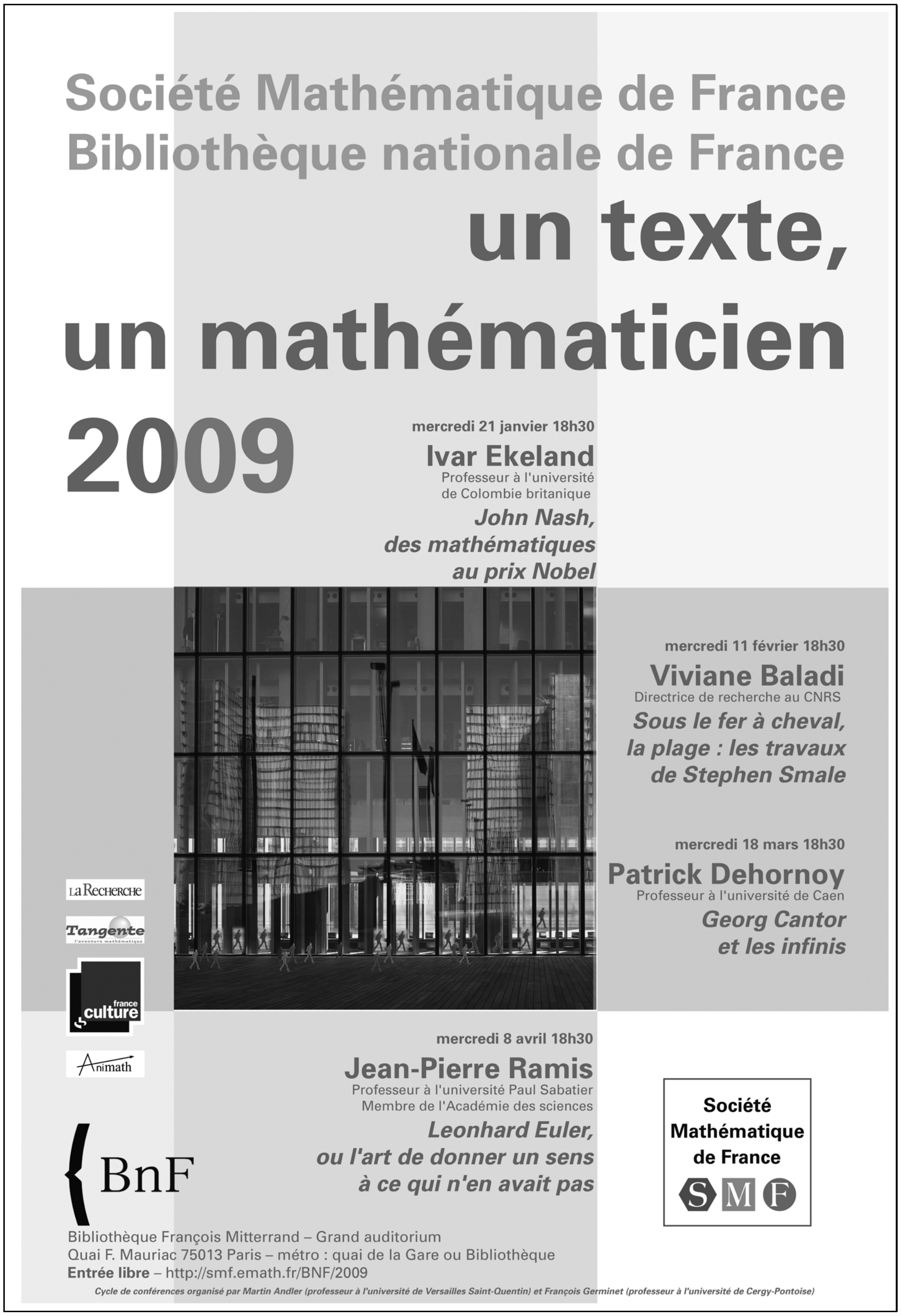
Par ailleurs, pendant les temps morts, j'ai visité d'autres stands représentant des entreprises, des fondations, des universités, et je me suis rendu compte que toutes avaient préparé de longue date ce salon et avaient beaucoup investi pour présenter une image dynamique de la recherche de pointe. Notre stand était bien placé, proche de l'entrée principale et au voisinage d'un stand consacré à la robotique qui présentait des séances d'animation au cours desquelles les concepteurs d'un robot domestique, montraient les possibilités de ce robot en soulignant à plusieurs reprises dans sa conception le rôle fondamental des mathématiques couplées à l'informatique.

Bilan de l'opération : si l'on souhaite continuer à assurer une participation à ce salon, il faut repenser entièrement notre organisation, mais il semble que notre présence permettrait de toucher un public plus ouvert aux préoccupations de notre communauté.

La troisième manifestation est le cinquième congrès européen de mathématiques du 13 au 18 juillet à Amsterdam. Bien entendu il ne s'agit pas là d'un congrès ouvert au grand public, mais il est regrettable que, sur la durée d'une semaine, il ne soit pas possible de trouver une matinée, voire une soirée ouverte au grand public. Dans d'autres disciplines, notamment en médecine, la tendance est d'accueillir le public qui peut ainsi rencontrer des chercheurs, des praticiens à la pointe de la recherche et de la technique ; pour la spécialité, cette vitrine ouverte directement vers le public, est un moyen de communication à fort impact social en terme d'image. D'ailleurs ceci n'est pas aussi nouveau qu'on pourrait le croire : tous les visiteurs du Palais de la Découverte se souviennent encore des présentations nombreuses et variées par de jeunes mathématiciens en stage ou en poste au Palais, présentations au cours desquelles un public curieux, souvent jeune, pouvait poser toutes les questions. J'ai plusieurs fois attiré l'attention sur la nécessité de ne plus rester entre nous mais d'ouvrir largement nos fenêtres sur nos activités, sur les questions que nous nous posons, sur le rôle social de notre discipline, sur la nécessité de continuer à faire de la recherche fondamentale.

Par exemple à Amsterdam, j'ai assisté à des sessions sur « Mathématiques et Industrie », où la plupart des problèmes exposés et leur présentation étaient largement accessibles au public, les conférenciers insistaient fortement sur les interactions fortes entre recherche fondamentale et recherche appliquée, sur la nécessité d'une bonne formation mathématique de base. De même certaines conférences plénières étaient compréhensibles par des non-spécialistes, il suffisait de connaître un minimum de vocabulaire pour avoir accès à la compréhension des problèmes que les spécialistes cherchaient à résoudre. Il faut rappeler qu'il existe des conjectures simples à énoncer mais difficiles à démontrer, par exemple la conjecture de Goldbach peut être comprise par quiconque à un niveau mathématique de collège et pourtant elle résiste toujours à la sagacité des mathématiciens les plus performants et les plus avancés. À Amsterdam, pendant les temps morts, il était possible d'aller voir deux films, à faible contenu mathématique mais à dominantes humaines et psychologiques, l'un sur Doeblin, l'autre sur Gödel, je n'ai pas vu le premier qui était paraît-il très bien, quant au second j'en ai conservé le souvenir d'une profonde déception et d'une infinie tristesse, car il était focalisé sur la dernière partie de la vie de Gödel, rien n'épargnait le spectateur de ses souffrances, des échecs de sa vie, si bien que la conclusion que l'on pouvait en tirer à la sortie de la projection pourrait être : *« Ne faites pas de mathématiques cela rend fou »*, mais précisément on ne voyait pas ce que les mathématiques avaient apporté dans la vie de Gödel. Comment attirer des jeunes avec ce type de film ? Je pense aussi au film et au livre sur la vie de Nash ;*« A beautiful man »*. Désespérant !

Pour conclure sur ce panorama limité mais suffisamment ouvert à une discussion, je répéterai une fois de plus les mêmes choses. Nous devons être présents dans toutes les manifestations ouvertes au grand public et nous devons ouvrir à un public plus large les colloques, les congrès, les expositions impliquant notre spécificité. Cela suppose un changement d'attitude tant au niveau individuel que collectif : il ne s'agit pas de nous transformer tous en bateleurs et de sacrifier à un quelconque vedettariat, mais de présenter et de représenter la communauté mathématique dans ce qu'elle a de dynamique et de novateur, de montrer les possibilités qu'elle offre de faire éclore des talents nouveaux ; notre avenir est aussi à ce prix et c'est un des rôles de la SMF de lancer des initiatives pour améliorer l'image des mathématiques dans le grand public, mais également au sein de la grande famille scientifique étendue à toutes les disciplines.


Société Mathématique de France
Bibliothèque nationale de France
un texte,
un mathématicien
2009
mercredi 21 janvier 18h30
Ivar Ekeland
Professeur à l'université de Colombie britanique
John Nash, des mathématiques au prix Nobel
mercredi 11 février 18h30
Viviane Baladi
Directrice de recherche au CNRS
Sous le fer à cheval, la plage : les travaux de Stephen Smale
mercredi 18 mars 18h30
Patrick Dehornoy
Professeur à l'université de Caen
Georg Cantor et les infinis
mercredi 8 avril 18h30
Jean-Pierre Ramis
Professeur à l'université Paul Sabatier
Membre de l'Académie des sciences
Leonhard Euler, ou l'art de donner un sens à ce qui n'en avait pas
La Recherche
Tangente
france culture
Animath
BnF
Société Mathématique de France
SMF
Bibliothèque François Mitterrand – Grand auditorium
Quai F. Mauriac 75013 Paris – métro : quai de la Gare ou Bibliothèque
Entrée libre – http://smf.emath.fr/BNF/2009
Cycle de conférences organisé par Martin Andler (professeur à l'université de Versailles Saint-Quentin) et François Germinet (professeur à l'université de Cergy-Pontoise)

Soutien aux mathématiques dans les pays en voie de développement

Traduit par Mireille Martin-Deschamps

Un projet du « Comité pour les Pays en Développement » de la Société Mathématique Européenne (EMS-CDC)

Promouvoir les mathématiques dans les Pays en Développement est un défi. Pour le relever, plusieurs initiatives ont récemment été lancées. Notre comité EMS-CDC a été particulièrement intéressé par une action du Programme International pour la Science (ISP) de l'université d'Uppsala en Suède (`http://www.isp.uu.se/`), initiée par un de nos membres Anders Wandahl : un département du monde développé est jumelé avec un département du monde en voie de développement pour l'aider de diverses manières, notamment par le paiement de son abonnement aux bases de données mathématiques. On peut trouver sur le site « *e-Math for Africa* » (`http://math.golonka.se/`) une description de l'action de nos collègues suédois.

Un autre effort pour aider les pays en voie de développement à accéder à la documentation et pour améliorer leurs liens avec des collègues d'institutions des pays développés a été réalisé par la SMF à travers son programme de parrainage `http://smf.emath.fr/en/Adhesions/ParrainagePED/`. Dans ce programme, les laboratoires ou instituts suffisamment dotés soutiennent des centres mathématiques moins bien dotés financièrement en leur offrant une adhésion à la SMF comme membre institutionnel, tandis que la SMF de son côté offre un abonnement à un de ses journaux. L'idée est qu'un tel procédé contribue à une coopération entre les deux institutions et qu'en fin de compte, après quelques années, l'institution du Sud soit capable d'adhérer à la SMF.

Ces actions de l'université d'Uppsala et de la SMF, que nous appellerons « jumelage », sont un exemple que nous souhaitons développer, car elles impliquent personnellement les mathématiciens sur la base de relations réciproques. Nous pensons aussi qu'une fois les liens forgés, avec un coût initial modéré, ils seront faciles à entretenir sur le long terme.

Bien que le CDC ait des moyens financiers limités, nous avons décidé de nous associer à ces initiatives et de les compléter en offrant, pendant une période initiale, une sorte de financement incitatif (*seed grant*), d'un montant pouvant aller jusqu'à 500 euros, à tout département ou institution dans le monde développé qui souhaite participer à un tel schéma de jumelage et est prêt à offrir un soutien d'un montant au moins égal. Nous espérons qu'un tel financement initial encouragera les mathématiciens à s'engager dans une voie qui vaudra la peine ensuite d'être poursuivie. Les départements ou les personnes intéressés dans le monde développé peuvent contacter l'un d'entre nous (voir ci-dessous). À ce jour, de tels schémas de jumelage ont déjà été établis entre les institutions suivantes :
Université d'Alger, Algérie, et université de Grenoble, France.
Université de Bangui, République Centrafricaine, et université d'Uppsala, Suède.

Université du Burundi, Burundi, et université Linkoping, Suède.

Université de Changsha, Chine, et LMAM, université de Vannes, France.

Université de Cocody, Côte d'Ivoire, et université de Stockholm, Suède.

Université de La Havane, Cuba et université Humboldt, Berlin, Allemagne.

Université de Dakar, Sénégal, et université de Strasbourg, France.

Université de Hanoi, Vietnam, et université de Toulouse, France.

Université de Hanoi, Vietnam, et université Paris XIII, France.

Université des Sciences Naturelles Ho Chi Minh, Vietnam et Institut de Mathématiques de Jussieu (IMJ), Paris, France.

Université de Kenitra, Maroc, et université de Nancy, France.

Université Jomo Kenyatta d'Agriculture et Technologie, Kenya et Delta College, USA.

Université de Kerouan, Tunisie, et université de Cergy-Pontoise, France.

Université de Khartoum, Soudan, et université Umea, Suède.

Université de Kinshasa, DR Congo et université Lund, Suède.

Université Kwame Nkrumah de Science et Technologie, Ghana et université de Leicester, UK.

Université du Malawi, Malawi, et the Royal Institute of Technology, Suède.

Université Polytechnique du Malawi, Malawi, et the Royal Institute of Technology, Suède.

Université des Sciences et Techniques de Masuku, Gabon, et université de Stockholm, Suède.

Université Marien Ngouabi, République du Congo, et université Lund, Suède.

Université Moi, Kenya et Delta College, USA.

Université de Monastir, Tunisie, et université de Marne la Vallée, France.

Université Abdou Moumouni de Niamey, Niger, et université Chalmers, Göteborg, Suède.

La liste n'est pas très longue, mais c'est un début ! Et nous espérons que des collègues d'autres pays européens se joindront à ce projet. Pour la suite, nous aimerions élargir ce schéma, au niveau à la fois de son activité et des zones géographiques concernées. Le partage d'activités auquel nous pensons pour le jumelage pourrait inclure :

– de l'aide pour des abonnements à des revues ou des bases de données, comme détaillé ci-dessus ;

– des dons de livres, revues et équipements ;

– l'identification de conférenciers invités et le soutien des visiteurs venant des départements moins développés ;

– du tutorat (voir aussi le schéma de la London Mathematical Society `http://www.lms/ac.uk/grants/nuffield_scheme.html`) ;

– de l'aide pour assister à des conférences internationales : ceci est spécialement important pour la carrière des mathématiciens dans le monde en voie de développement.

Sans aucun doute lorsque le schéma va mûrir, d'autres activités se révéleront appropriées. L'idée est que le partenaire plus « âgé » se soucie du partenaire plus « jeune », c'est-à-dire qu'il ait à cœur son bien-être mathématique et qu'il vienne à son aide dès que cela est utile. Ainsi le partenaire plus jeune aura quelqu'un vers qui se tourner en cas de nécessité,... idéalement jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de telle nécessité, le but ultime étant que les deux partenaires deviennent comme des jumeaux !

Sont particulièrement concernés par ce projet dans le « Committee for Developing Countries » de la Société Mathématique Européenne : Leif Abrahamsson – Vice-chair – (leifab@math.uu.se), Lars Andersen (lda@math.aau.dk), Tsou Sheung Tsun – Chair – (tsou@maths.ox.ac.uk), Michel Waldschmidt (miw@math.jussieu.fr), Anders Wandahl (anders@golonka.se).

CARNET

Oded Schramm

(1961 – 2008)

Wendelin Werner

Oded Schramm

Oded Schramm, l'un des probabilistes les plus importants de notre temps, est décédé accidentellement à 46 ans le 1er septembre dernier en montagne, près de Seattle. Il était si vivant et actif qu'il paraît aujourd'hui encore impossible de ne pas revoir son sourire, de ne plus lire ses mails ou de ne plus entendre ses explications mathématiques si claires. Il est irréel d'écrire ainsi un texte sur lui, et d'accepter en l'actant ainsi, son passage de la vie à l'histoire.

La *Gazette* de la SMF n'est sans doute pas l'endroit le plus approprié pour exprimer des choses trop personnelles. Mais avant de parler de ses mathématiques, je souhaiterais dire quelques mots du caractère d'Oded. Toutes les personnes qui l'ont rencontré ont pu mesurer qu'il s'agissait de quelqu'un de particulièrement gentil, ouvert, calme, qui portait un regard lucide et clair sur le monde, et dont on sentait aussi instantanément la bonté. Ses amis ont créé un site web[1] sur lequel il est possible de lire de nombreux témoignages. Oded était véritablement une personne tout à fait hors du commun.

Nous autres mathématiciens avons le privilège de pouvoir continuer à le côtoyer par l'intermédiaire de ses travaux scientifiques. Particulièrement créatif, il était capable de construire à partir de choses élémentaires une voie d'attaque à la fois originale et harmonieuse aux questions les plus difficiles. Celle-ci pouvait de prime abord paraître surprenante au « spécialiste », mais elle s'avérait souvent être la bonne. Il savait, en mathématiques comme dans la vie, choisir simplement les options justes, en faisant abstraction de la mode ambiante, et il lui était ensuite facile de convaincre sans effort les autres du bien-fondé de ses idées, puisqu'elles étaient exactes.

Oded Schramm avait reçu de nombreux prix pour ses travaux, parmi lesquels le prix Erdös, le prix Salem, le prix Henri Poincaré, le Clay research award, le prix

[1] Oded Schramm memorial blog : http://odedschramm.wordpress.com/

Loève, le prix Polyà et le prix Ostrowski. Il a été conférencier plénier au dernier congrès international des mathématiciens à Madrid (et il est d'ailleurs possible de revoir son exposé sur le site de l'ICM). Mais Oded attachait plus d'importance au contenu scientifique des travaux qu'aux honneurs, et une manière appropriée de lui rendre hommage ici me semble être de parler de ses contributions mathématiques. Ceci est très agréable, car même si les résultats démontrés par Oded sont difficiles, leurs énoncés restent souvent simples et élégants, et ne requièrent pas de longs préliminaires.

Premiers travaux

Après des études à l'université de Jérusalem, où il a effectué un mémoire sous la direction de Gil Kalai qui a d'ailleurs donné lieu à deux publications, Oded Schramm a fait sa thèse [1] de Doctorat à Princeton sous la direction de William Thurston. Le titre de celle-ci, soutenue en 1990 et que l'on peut trouver aujourd'hui sur le site `http://arxiv.org` (comme la plupart des articles d'Oded), est « *Packing two dimensional bodies with prescribed combinatorics and applications to the construction of conformal and quasiconformal mappings* ». Il s'agit donc d'approche combinatoire de l'analyse complexe et non de théorie des probabilités. Il y généralise via une preuve différente le « théorème d'empilement de cercles » de Koebe-Andreev-Thurston au cas où les cercles sont remplacés par d'autres formes convexes. Rappelons que ce théorème montre qu'il est possible d'interpréter tout graphe plan en terme d'empilement de cercles (les sites du graphes sont alors les centres des cercles, et les arêtes relient deux sites lorsque les cercles correspondants sont adjacents). Il utilise ensuite ce résultat, et le lien entre les empilements de cercles et les transformations conformes initié par Thurston et élaboré par Rodin et Sullivan pour établir la généralisation suivante du théorème d'uniformisation de Koebe :

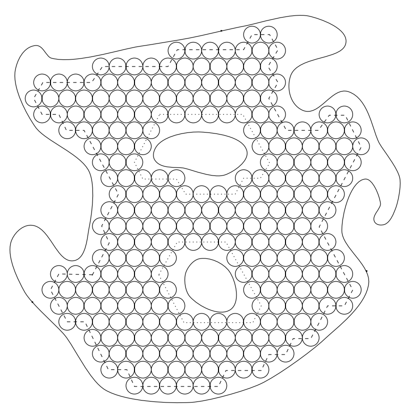


FIG. 1. Image issue de la thèse d'Oded Schramm

Théorème (thèse de doctorat [1]). *Soit G un domaine plan de la forme $G = H \setminus \cup_{j=1}^{n} F_j$, où H est un domaine simplement connexe et $F_1, \dots, F_n$ sont*

n sous-ensembles compacts simplement connexes de H non-réduits à un point. Alors, pour tout domaine simplement connexe H' et tout choix de n compacts convexes non-réduits à un point $P_1, \ldots, P_n$, il est possible de trouver une application conforme qui envoie G sur un domaine G' obtenu en ôtant (exactement) de H' des compacts $P'_1, \ldots, P'_n$ homothétiques à $P_1, \ldots, P_n$ de sorte que les bords correspondant à $F_1, \ldots, F_n$ correspondent respectivement aux bords de $P'_1, \ldots, P'_n$.

Cette thèse porte déjà la marque de cette exposition claire, directe et concise, caractéristique de ses articles et de ses exposés. Oded Schramm a ensuite effectué un post-doctorat à San Diego, où il a continué à travailler sur cette thématique de recherche en collaboration avec Zheng-Xu He. Ils ont cosigné 8 articles marquants, qui contiennent de nombreux résultats frappants et faciles à énoncer concernant l'existence de certaines transformations conformes ou quasi-conformes, et les propriétés des approximations discrètes de celles-ci. Mentionnons par exemple la résolution plus que partielle d'une question que Koebe avait posée en 1908 (le « *Kreisnormierungsproblem* ») concernant les généralisations à un ensemble infini de trous de son théorème d'uniformisation. Rappelons que l'on dit qu'un sous-ensemble ouvert connexe de la sphère de Riemann est un domaine circulaire si chaque composante connexe de son bord est un cercle ou un point.

Théorème [2]**.** *Tout domaine plan connexe dont le bord possède au plus un ensemble dénombrable de composantes connexes est conformément équivalent à un domaine circulaire.*

Ils ont par ailleurs étendu ce résultat à certains cas où le bord admet un ensemble non-dénombrable de composantes connexes, et Schramm a aussi donné une très élégante preuve alternative de ce résultat quelques années plus tard.

Pour montrer qu'Oded Schramm s'intéresse aussi à des questions tri-dimensionnelles, voici un résultat issu de son article « *How to cage an egg ?* » :

Théorème [3]**.** *Soit P un polytope convexe P et soit C un domaine strictement convexe dans $\mathbb{R}^3$. Alors il existe un polytope P' combinatoirement équivalent à P tel que chaque arête de P touche C. De plus, sous certaines conditions supplémentaires, l'espace de tels polytopes C forme une variété de dimension 6.*

Premiers travaux probabilistes

En 1992, Oded Schramm rentre en Israël, où il travaille à l'institut Weizmann, non loin de Tel Aviv. Tout en continuant à réfléchir à des problèmes liés à l'analyse complexe, il commence à aborder des questions de nature probabiliste. C'est là qu'il commence à collaborer avec Itai Benjamini, avec lequel il écrira plus de vingt articles explorant (notamment) de nombreuses questions reliant les propriétés géométriques d'un graphe avec celles d'objets probabilistes construits sur celui-ci (marches aléatoires, arbres couvrants/forêts couvrantes, percolation). Il a également beaucoup travaillé avec Yuval Peres et Russ Lyons sur ces thématiques. Voici quelques résultats pour illustrer cet axe de recherche.

Rappelons que la constante de Cheeger $h(G)$ d'un graphe connexe infini G est l'infimum pris sur tous les sous-ensembles finis K de G, du rapport entre le nombre de points situés à distance exactement 1 de K et le nombre de points de K (en résumé, $h(G) = \inf_K(\#\partial K/\#K)$). L'énoncé du résultat suivant de Benjamini et Schramm n'est pas probabiliste, mais sa preuve l'est :

Théorème [4]. *Si la constante de Cheeger d'un graphe infini connexe G est strictement positive, alors il existe un sous-graphe T de G qui est un arbre tel que $h(T) > 0$.*

Dans une série de travaux qui l'ont amené à collaborer avec Itai Benjamini, Russ Lyons, Yuval Peres ou Harry Kesten, il a exploré de nombreuses propriétés des mesures « uniformes » sur les arbres ou les forêts couvrantes sur des graphes. Ces mesures peuvent être définies par passage à la limite à partir de graphes finis G_n convergeant vers G, de la mesure uniforme sur l'ensemble des sous-graphes de G_n ne possédant aucun cycle mais une seule composante connexe (i.e. des arbres « couvrant » le graphe). Les années 90 ont vu une floraison de résultats sur ce modèle (on peut citer les noms de Pemantle, Wilson et Kenyon), dont la combinatoire est très riche et qui est étroitement lié aux marches aléatoires et aux réseaux électriques. Un exemple d'application de ces résultats est contenu dans le papier important de Benjamini, Lyons, Peres et Schramm « Uniform spanning forests » :

Théorème [5]. *Pour tout graphe plan récurrent de codegré fini, il est possible de définir de manière univoque « la mesure harmonique vue de l'infini ».*

Cet article d'Oded, tout comme de nombreux (on peut par exemple citer l'article *Percolation beyond $\mathbb{Z}^d$, many questions and a few answers*, avec Itai Benjamini [6], ou sa contribution [7] au volume du dernier congrès mondial) contient une section stimulante mentionnant de nombreuses conjectures et questions ouvertes.

Les processus SLE

C'est donc tout naturellement qu'Oded Schramm a commencé à réfléchir au problème de l'invariance conforme asymptotique (et alors conjecturée) des modèles de la physique statistique sur des réseaux plans, comme le modèle d'Ising ou la percolation pris à leur température critique. En effet, cette question semble combiner des probabilités avec des approximations discrètes d'applications conformes. C'est en 1998-1999, peu de temps avant de repartir aux États-Unis pour travailler au centre de recherche théorique de Microsoft près de Seattle qu'Oded Schramm découvrira les processus SLE (Schramm-Loewner Evolutions ou Stochastic-Loewner Evolutions) qui révolutionneront la manière dont mathématiciens et physiciens comprennent les phénomènes de transition de phase en dimension deux. L'idée de base (présentée en détail dans son article [8] « *Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees* » paru en 2000) est particulièrement simple et élégante. Elle relie les probabilités et l'analyse complexe à leurs racines respectives, et fait apparaître une classe unidimensionnelle naturelle de processus stochastiques continus obtenus comme itérations (infiniment divisibles) de transformations conformes aléatoires indépendantes.

Décrivons ces processus de manière intuitive et non formelle. Tout d'abord rappelons que le théorème de Riemann permet, pour tout domaine simplement connexe

Ω dans le disque unité U de trouver une transformation conforme (une bijection qui préserve les angles) Φ de Ω dans U. Si $O \in \Omega$, on peut aussi spécifier que $\Phi(0) = 0$ et que l'image d'un point donné du bord de Ω est 1 ; l'application conforme Φ est alors unique.

Prenons une image culinaire, et commençons avec une pâte brisée de forme circulaire. On prend des ciseaux et on commence par couper une petite entaille aléatoire $\gamma_1[0, t]$ en démarrant au point 1. On a donc maintenant un nouveau domaine simplement connexe $\Omega_1 = U \setminus \gamma_1[0, t]$ et le point $\gamma_1(t)$ est un point du bord de ce domaine. On tord ensuite la pâte de manière conforme, de sorte qu'elle reprenne sa forme circulaire d'origine, que l'origine reste en place et que l'image de $\gamma_1(t)$ soit le point 1. On note Φ_1 la transformation conforme correspondante qui existe et est unique d'après le théorème de Riemann.

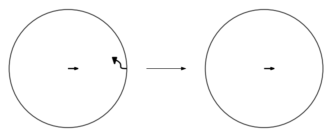


FIG. 2. La transformation Φ_1

Ensuite, on itère cette opération une seconde fois en choisissant de la même façon (c'est-à-dire en suivant la même loi) une nouvelle entaille aléatoire en partant de 1 et en uniformisant le domaine Ω_2 obtenu. On note Φ_2 la transformation conforme correspondante. Ainsi, Φ_2 et Φ_1 sont indépendantes et de même loi, et $\Phi_2 \circ \Phi_1$ correspond à l'uniformisation du domaine $\Phi_1^{-1}(\Omega_2)$. C'est en fait un disque dont on a enlevé une courbe plus longue que $\gamma_1[0, t]$ (on a coupé en plus $\Phi_1^{-1}(\gamma_2[0, t])$).

De cette manière, on définit de manière itérative une suite de transformations conformes indépendantes. La transformation $\Psi = \Phi_n \circ \ldots \circ \Phi_1$ définit implicitement une courbe $\Gamma = U \setminus \Psi^{-1}(U)$.

On cherche maintenant à construire une version continue de cette itération discrète, pour modéliser l'idée que l'on coupe de manière progressive, aléatoire et continue. On souhaite définir une famille $(\psi_t, t \geq 0)$, de sorte que pour chaque $t > 0$ et chaque $n \geq 1$, la transformation conforme ψ_t soit obtenue comme une itération de n copies indépendantes de $\psi_{t/n}$. L'application ψ_t correspondrait alors à la transformation conforme de $\Omega_t = U \setminus \gamma[0, t]$ dans U.

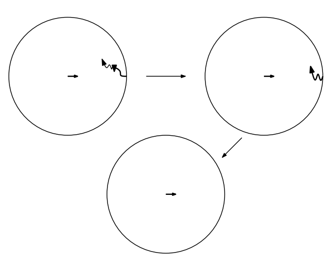


FIG. 3. La transformation $\Phi_2 \circ \Phi_1$

Notons qu'en fait, $a_t = |\psi_t'(0)|$ est alors une fonction croissante de t qui vérifie $a(t+s) = a(t)a(s)$ (en composant des applications conformes, les dérivées se multiplient). Quitte à effectuer un changement linéaire de paramétrisation de notre processus, on peut donc choisir $a(t) = e^t$. Si on définit maintenant $(\theta_t, t \geq 0)$ de manière continue de sorte que $\theta_0 = 0$ et

$$\psi_t'(0) = e^t \times \exp(i\theta_t),$$

on voit que le processus θ est forcément à accroissements indépendants. On en déduit que le choix naturel et quasiment imposé est de prendre

$$\theta_t = \beta(\kappa t)$$

où κ est un réel positif fixé, et β un mouvement brownien uni-dimensionnel standard. On arrive par conséquent à la conclusion suivante :

Observation clé [8]**.** *Supposons qu'une courbe γ continue et sans point double dans le disque unité, issue de $\gamma_0 = 1$, vérifie les propriétés suivantes :*

– La courbe est paramétrée de sorte que pour tout t, l'application conforme ψ_t de $U \setminus \gamma[0,t]$ dans U définie comme précédemment (c'est-à-dire par le fait que $\psi_t(0) = 0$ et $\psi_t(\gamma_t) = 1$) vérifie $|\psi_t'(0)| = e^t$ (ceci revient juste à choisir une paramétrisation particulière de γ).

– Pour tout $t \geq 0$ donné, la loi conditionnelle du processus $(\psi_t(\gamma_{t+s}), s \geq 0)$ sachant $\gamma[0,t]$ est identique à la loi de la courbe γ elle-même (c'est l'idée de l'itération des coups de ciseaux après uniformisation).

– La loi de γ est symétrique par rapport à l'axe réel.

Alors, forcément, l'argument $(\theta_t, t \geq 0)$ du processus $\psi_t'(0)$ est un mouvement brownien unidimensionnel ayant pour « vitesse » un nombre $\kappa \geq 0$.

Ce qui rend cette observation si utile est que l'on sait depuis Loewner (c'est l'idée de « l'équation de Loewner » classiquement employée en analyse complexe, en particulier pour étudier des questions liées à la conjecture de Bieberbach – l'équation de Loewner est en fait un outil fondamental dans la preuve de cette conjecture par de Branges) que la donnée de la fonction $t \mapsto \theta_t$ caractérise entièrement la courbe γ. Ainsi, on peut renverser complètement les choses : on commence par définir $\theta_t = \beta(\kappa t)$ à partir d'un mouvement brownien standard β. On regarde ensuite s'il existe une courbe γ comme ci-dessus de sorte que pour tout t, θ_t soit l'argument de $\psi_t'(0)$. Notons que l'analyse effectuée ci-dessus montre que si une telle courbe existe alors elle est unique, mais elle ne garantit pas son existence.

En fait, la donnée d'une fonction θ définit toujours ce que l'on appelle une chaîne de Loewner, c'est-à-dire un certain type de famille décroissante d'ouverts $(\Omega_t, t \geqslant 0)$. Du travail technique est nécessaire pour montrer que dans le cas où θ est un mouvement brownien, cette procédure définit effectivement une courbe aléatoire. En fait, Rohde et Schramm montrent que :

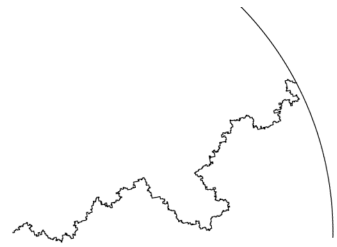


FIG. 4. Une image d'un SLE pour $\kappa = 2$

Théorème [9]. *Lorsque $\kappa \leq 4$, cette procédure définit effectivement (avec probabilité 1) une courbe continue γ sans point double. Lorsque $\kappa > 4$, cette procédure définit encore une courbe continue γ, mais qui admet des points doubles. Il faut alors modifier la définition précédente : Ω_t est maintenant la composante connexe contenant l'origine du complémentaire de $\gamma[0, t]$ dans le disque unité.*

Ainsi, cette construction définit bien une famille (indicée par $\kappa > 0$) de courbes aléatoires. Ce sont les courbes SLE.

Dans de nombreux modèles issus de la physique statistique, définis sur un graphe fini, on définit un chemin aléatoire sur ce graphe, que l'on peut souvent interpréter comme une interface. C'est par exemple le cas du modèle de la percolation sur les faces d'un réseau en nid d'abeille, où l'on colorie aléatoirement et indépendamment en choisissant en tirant à pile ou face la couleur de chaque face (il y a le choix entre blanc et noir). Il apparaît alors de grands amas de cellules noires et grands amas de cellules blanches. Les bords extérieurs d'amas noirs sont alors les bords intérieurs d'amas blancs et vice-versa.

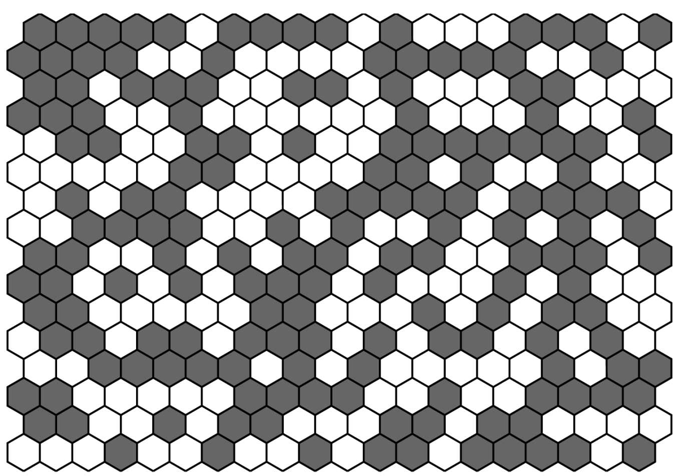


FIG. 5. Percolation dans un rectangle

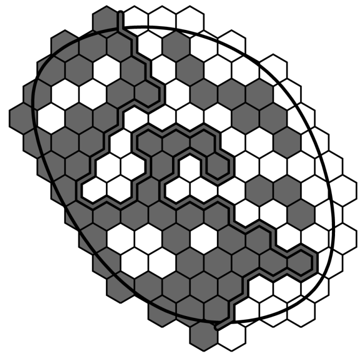


FIG. 6. Une interface dans un petit domaine

Il est conjecturé (et il est maintenant prouvé dans pas mal de cas classiques) qu'à grande échelle, ces interfaces sont invariantes conformes en loi, en un sens que nous ne détaillerons pas ici. En combinant ceci avec la définition des SLE précédemment décrite, Oded Schramm en déduit alors que :

Conclusion clé [8]. *Pour une large classe de modèles issus de la physique statistique, s'ils sont asymptotiquement invariants conformes à grande échelle, alors la loi des interfaces converge (dans la limite où la maille du réseau tend vers* 0*) vers celle d'un SLE. La valeur κ correspondante peut dépendre du modèle considéré.*

Étude des processus SLE et conséquences

La définition des processus SLE permet en fait de calculer explicitement et facilement des probabilités d'événements. Par exemple (cet exemple est traité dans l'article d'Oded « A percolation formula » [10]), la probabilité pour qu'un processus SLE de $A \in \partial D$ vers $B \in \partial D$ dans un domaine D passe à gauche d'un point $Z \in D$ s'exprime simplement via une simple équation différentielle. On peut d'abord se ramener au cas où le domaine D est le demi-plan supérieur et où $A = 0$, $B = \infty$ et $\Im(Z) = 1$ en appliquant une transformation conforme bien choisie. La probabilité ne dépend alors plus que de $x = \Re(Z)$. Ensuite, en étudiant comment cette probabilité évolue lorsque le SLE commence à croître, on en déduit que $\kappa h''(x) + 8x/(1 + x^2)h'(x) = 0$, ce qui permet de voir (avec les conditions au bord $h(-\infty) = 0$ et $h(+\infty) = 1$) que la fonction h est une certaine fonction hypergéométrique.

Plus généralement, parfois avec des difficultés techniques à surmonter, il est possible d'évaluer le comportement asymptotique de certains événements exceptionnels. Rohde et Schramm [9] ont par exemple montré que (lorsque $\kappa \leq 8$), la probabilité pour qu'un SLE de paramètre κ passe par un disque de rayon ε autour d'un point donné $x \in D$ décroît comme $\varepsilon^{1-\kappa/8}$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Ceci implique en particulier que la dimension fractale $d(\kappa)$ de la courbe vérifie $d \leq 1 + \kappa/8$ (l'égalité a été plus tard prouvée par Vincent Beffara). De telles dimensions fractales sont étroitement liées aux exposants critiques donnés par la théorie conforme des champs que nos amis physiciens avaient développée pour étudier ces questions.

L'étude des processus SLE a donc permis de démontrer des résultats pour tous les modèles pour lesquels l'invariance conforme a été établie. Ceci inclut le mouvement brownien plan et les marches aléatoires, les marches aléatoires à boucles effacées, la percolation critique précédemment décrite, le modèle d'Ising sur le réseau carré (l'invariance conforme asymptotique de ces deux modèles étant due à Stas Smirnov). En voici quelques exemples issus d'articles de Schramm avec Greg Lawler et moi-même :

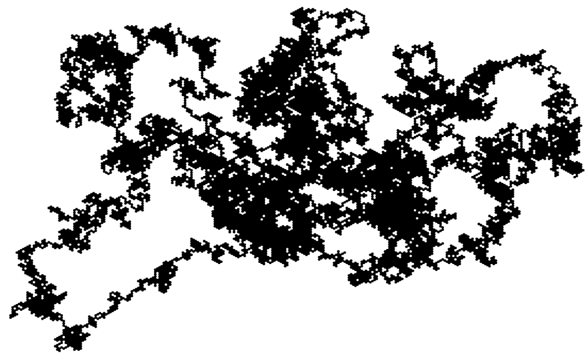


FIG. 7. Une courbe brownienne plane

Théorème (Conjecture de Mandelbrot) [11]. *Considérons un mouvement brownien plan* $(B_t, t \in [0,1])$ *et définissons* F *le bord extérieur de* $B[0,1]$ *(c'est-à-dire le bord de la composante connexe non-bornée du complémentaire de* $B[0,1]$*). La dimension de Hausdorff de* F *est presque sûrement égale à* $4/3$*.*

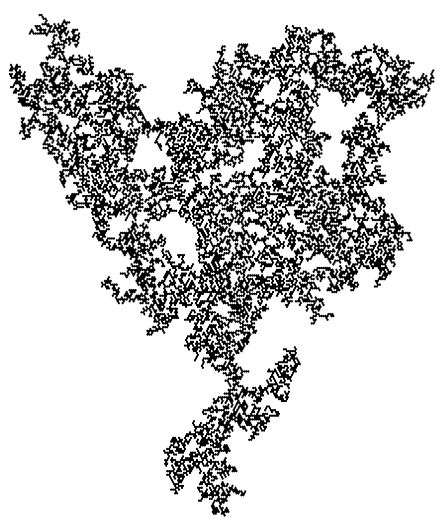


FIG. 8. Un amas de percolation

Théorème [12]. *Considérons la percolation obtenue en coloriant indépendamment en noir ou en blanc chaque cellule du réseau hexagonal. L'ordre de grandeur du nombre de cellules contenues dans un amas de percolation de diamètre R est de l'ordre de $R^{91/48}$ lorsque $R \to \infty$. La probabilité pour qu'il existe un chemin blanc de diamètre au moins égal à R issu de l'origine décroît comme $R^{-5/48+o(1)}$ lorsque $R \to \infty$.*

Une autre application plus directe de l'étude des processus SLE est le résultat suivant, qui indique que le SLE de paramètre 8/3 joue un rôle tout à fait particulier. Il s'agit ici des résultats du type « restriction conforme » :

Théorème [13]. *Il existe une unique courbe aléatoire continue sans point double reliant -1 à 1 dans le disque unité U, telle que pour tout domaine simplement connexe $O \subset U$ (tel que la distance de $U \setminus O$ à 1 et -1 est strictement positive), si l'on note Φ une application conforme de U sur O préservant les points 1 et -1, alors la loi de $\Phi(\gamma)$ et la loi de γ conditionnée par $\gamma \subset O$ coïncident. Il s'agit du SLE de paramètre $8/3$ reliant 1 à -1 dans U, qui est une courbe aléatoire de dimension de Hausdorff $4/3$.*

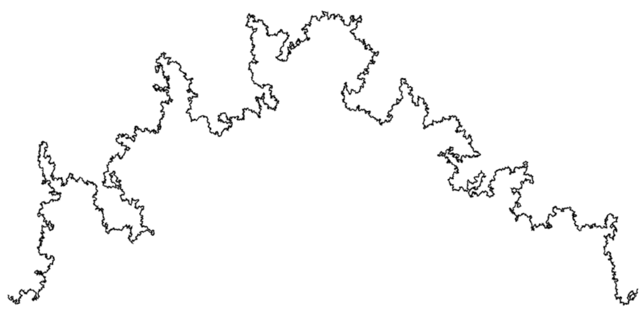


FIG. 9. Un SLE de paramètre 8/3.

Les processus SLE sont devenus aujourd'hui un thème de recherche à part entière. Les résultats importants récents (et à venir) suivants d'Oded Schramm sur le sujet sont moins faciles à énoncer sans grande préparation, et nous ne les énonçons par conséquent pas en détail :

– En prolongement de ses travaux antérieurs avec Gil Kalai et Itai Benjamini [16] d'une part, et avec Jeff Steif [17] d'autre part, Oded Schramm apporte [18] avec Christophe Garban et Gábor Pete des réponses précises et détaillées sur le problème de la « sensibilité aux perturbations aléatoires » de la percolation critique à grande échelle. Ils donnent par ailleurs [19] une description complète du comportement de la percolation près du point critique et ce dernier travail est en cours de rédaction.

– Dans un travail [14, 15] en collaboration avec Scott Sheffield (dont une partie est en cours de rédaction), un lien direct est établi entre certaines courbes SLE, et le champ libre gaussien. Les courbes SLE apparaîssent ainsi comme des sortes de courbes de niveau d'une surface aléatoire (généralisée, c'est en fait une distribution).

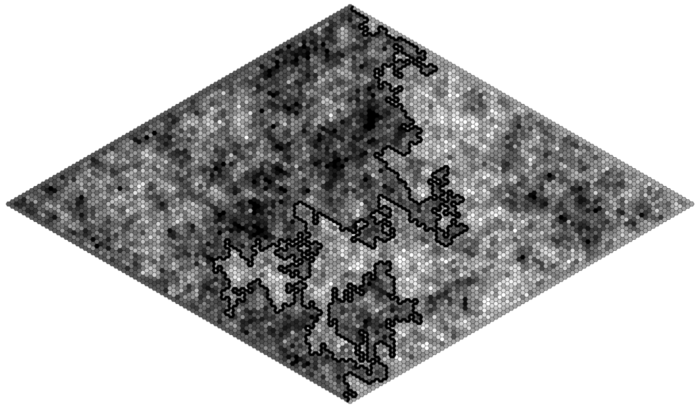


FIG. 10. Image issue d'un article d'Oded Schramm et Scott Sheffield

Comme on peut le voir, Oded Schramm est quelqu'un qui a beaucoup travaillé avec d'autres mathématiciens. Tous ses collaborateurs ont fait la même expérience : générosité, inventivité, puissance technique aussi. Avoir eu le privilège d'interagir avec lui aura certainement changé notre vie de mathématicien. Oded avait en fait de nombreux projets en cours de finalisation, de sorte que nous allons encore avoir le plaisir de voir paraître de nombreux nouveaux articles cosignés par Oded dans les années qui viennent. Plus généralement, ses belles idées mathématiques vont dorénavant nourrir les travaux de nombreux probabilistes et vivre à travers eux.

Références

[1] Oded Schramm, Packing two dimensional bodies with prescribed combinatorics and applications to the construction of conformal and quasiconformal mappings, *Ph. D. thesis*. Princeton University (1990).

[2] Zheng-Xu He et Oded Schramm, Fixed points, Koebe uniformization and circle packings, *Ann. of Math.* (2) Vol. 137 N° 2, 369–406 (1993).

[3] Oded Schramm, How to cage an egg, *Invent. Math.* Vol. 107 N° 3, 543–560 (1992).

[4] Itai Benjamini et Oded Schramm, Every graph with a positive Cheeger constant contains a tree with a positive Cheeger constant, *Geom. Funct. Anal.* Vol. 7 N° 3, 403–419 (1997).

[5] Itai Benjamini, Russell Lyons, Yuval Peres et Oded Schramm, Uniform spanning forests, *Ann. Probab.* Vol. 29 N° 1, 1–65 (2001).

[6] Itai Benjamini et Oded Schramm, Percolation beyond $\mathbb{Z}^d$, many questions and a few answers, *Electron. Comm. Probab.* Vol. 1, N° 8, 71–82 (1996).

[7] Oded Schramm, Conformally invariant scaling limits : an overview and a collection of problems, *In International Congress of Mathematicians*, Vol. I, 513–543, Eur. Math. Soc. (2007).

[8] Oded Schramm, Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math.* Vol. 118, 221–288 (2000).

[9] Steffen Rohde et Oded Schramm, Basic properties of SLE, *Ann. of Math.* (2) Vol. 161 N° 2, 883–924 (2005).

[10] Oded Schramm, A percolation formula, *Electron. Comm. Probab.* Vol. 6, 115–120 (électronique) (2001).

[11] Greg Lawler, Oded Schramm et Wendelin Werner, Values of Brownian intersection exponents II : Plane exponents, *Acta Math.* Vol. 187 N° 2, 275–308 (2001). 8, 221–288 (2000).

[12] Greg Lawler, Oded Schramm et Wendelin Werner, One-arm exponent for critical 2D percolation *Electron. J. Probab.* Vol. 7, N° 2, 13 (2002).

[13] Greg Lawler, Oded Schramm et Wendelin Werner, Conformal restriction : the chordal case, *J. Amer. Math. Soc.* Vol. 16 N° 4, 917–955 (2003).
[14] Oded Schramm et Scott Sheffield, Contour lines of the two-dimensional discrete Gaussian free field, prépublication (2006).
[15] Oded Schramm et Scott Sheffield, en préparation.
[16] Itai Benjamini, Gil Kalai et Oded Schramm, Noise sensitivity of boolean functions and applications to percolation, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* N° 90, 5–43 (1999).
[17] Oded Schramm et Jeffrey E. Steif, Quantitative noise sensitivity and exceptional times for percolation, *Ann. of Math.*, à paraître.
[18] Christophe Garban, Gábor Pete et Oded Schramm, The Fourier Spectrum of Critical Percolation, prépublication (2008).
[19] Christophe Garban, Gábor Pete et Oded Schramm, en préparation.

Les références ci-dessus sont celles qui sont directement citées dans ce texte. La bibliographie complète d'Oded Schramm (environ 80 articles) peut se trouver via internet à l'addresse : `http ://research.microsoft.com/~schramm/`

Kiyosi Itô

(1915 – 2008)

Marc Yor

K. Itô est décédé le 10 novembre 2008 à Kyoto, à la suite de complications respiratoires. Il venait, quelques jours auparavant, le 6 novembre 2008, de recevoir « l'Ordre de la Culture », distinction ultime décernée par l'Empereur du Japon. Une cérémonie très formelle a eu lieu à cette occasion, au Research Institute of Mathematical Sciences de Kyoto.

Photo Académie des sciences-Institut de France

K. Itô est né en 1915, dans la préfecture de Mie. Ses travaux sur le calcul stochastique constituent maintenant un pilier central du calcul des probabilités. Élaborés entre 1942 et 1950, ils ont mis environ vingt cinq ans avant d'être réellement intégrés dans tous les cursus d'études approfondies en probabilités.

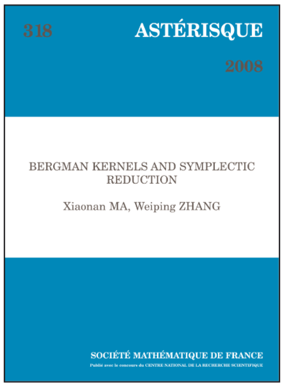
En 1970, K. Itô a publié un second travail révolutionnaire où il développait la théorie des excursions d'un processus de Markov. Ce travail a immédiatement suscité beaucoup de nouvelles études sur les excursions browniennes en particulier, permettant de reprendre et compléter les travaux pionniers de Paul Lévy sur le sujet.

K. Itô est coauteur, avec H.P. Mc Kean, du livre *« Diffusion Processes and their Sample Paths »* (1965) qui a marqué toute une époque, disons 1965-1980, des études de diffusions.

Citons encore un volume sur les processus de Markov infini-dimensionnels, sujet qu'Itô affectionnait particulièrement, lui qui écrivait, dans la préface de ses *Selected Papers* (1987) : « *À partir d'un certain moment, je me suis mis à considérer systématiquement un point de vue infini-dimensionnel, même pour des études probabilistes qui ne mettent en jeu que des processus fini-dimensionnels* ». Ce point de vue est extrêmement fructueux, comme la théorie des excursions d'Itô l'illustre parfaitement. Je considère que le calcul de Malliavin relève du même principe général (il n'est pas très original d'écrire cela !).

K. Itô a formé au Japon une école de probabilités extrêmement riche et féconde, citons, parmi ses élèves : N. Ikeda, H. Kunita, M. Fukushima, S. Watanabe, qui eux-mêmes ont eu beaucoup d'élèves, travaillant dans les traces de leur maître.

En résumé, K. Itô est l'un des très grands probabilistes du 20^{e} siècle, dans la lignée de P. Lévy, A. Kolmogorov, J. Doob, P.A. Meyer.



Astérisque 318

Bergman Kernels and Symplectic Reduction

X. Ma, W. Zhang

Nous généralisons des résultats récents sur le développement asymptotique du noyau de Bergman au cadre de quantification géométrique, et établissons une propriété d'identification asymptotique symplectique. Plus précisément, nous étudions le développement asymptotique du noyau de Bergman G-invariant de l'opérateur de Dirac spin^c associé à une puissance tendant vers l'infini d'un fibré en droites positif sur une variété symplectique compacte munie d'une action hamiltonienne d'un groupe de Lie compact connexe. Nous développons aussi une méthode pour calculer les coefficients du développement, et nous calculons les premiers termes, en particulier, nous obtenons la courbure scalaire de la réduction symplectique à partir du noyau de Bergman G-invariant sur l'espace total. Nous établissons aussi des propriétés de type de l'opérateur de Toeplitz en limite semi-classique dans le cadre de la quantification géométrique.

We generalize several recent results concerning the asymptotic expansions of Bergman kernels to the framework of geometric quantization and establish an asymptotic symplectic identification property. More precisely, we study the asymptotic expansion of the G-invariant Bergman kernel of the spin Dirac operator associated with high tensor powers of a positive line bundle on a symplectic manifold admitting a Hamiltonian action of a compact connected Lie group G. We also develop a way to compute the coefficients of the expansion, and compute the first few of them, especially, we obtain the scalar curvature of the reduction space from the G-invariant Bergman kernel on the total space. We also establish some Toeplitz operator type properties in semi-classical analysis in the framework of geometric quantization.

Prix public* : 37 € - prix membre* : 26 €
* frais de port non compris

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

LIVRES

Euler through time : a new look at old themes
V.S. Varadarajan
AMS, 2006. 302 p. ISBN : 978-0-8218-3580-7. $59

Cet ouvrage trouve son origine dans un cours d'histoire des mathématiques donné par l'auteur à l'université de Californie à Los Angeles au début de la décennie 2000. Contrairement aux usages académiques, Varadarajan avait opté pour une construction de son cours autour d'une unique grande figure historique, son choix se portant alors naturellement sur Euler en raison de son universalité, guidé par le chapitre qu'André Weil lui consacre dans son très beau livre *Number Theory : an approach through history from Hammurapi to Legendre*.

Varadarajan considère en effet qu'écrire historiquement sur les mathématiques ne saurait se limiter à traiter de questions (aussi légitimes soient-elles) telles que : qui a fait quoi et quand, mais qu'une très grande attention doit être portée à l'évolution des idées et à la manière dont elles se rattachent à des problématiques actuelles. Pour parodier une formule célèbre de Clémenceau, l'histoire des mathématiques est, aux yeux de Varadarajan, une chose trop sérieuse pour être entièrement laissée aux historiens. Dans cette perspective, les écrits historiques d'André Weil qui parsèment ses *Œuvres Scientifiques* constituent pour l'auteur une inestimable source d'inspiration.

Très riche de contenu, le livre de Varadarajan s'ouvre sur une présentation générale des travaux du plus grand mathématicien du 18^{e} siècle (et le plus prolifique de tous les temps) suivie par un exposé très clair et assez détaillé des quatre grandes périodes qui ont marqué sa vie scientifique, depuis ses années de formation à Bâle supervisées par Johann Bernoulli, jusqu'à son ultime séjour à Saint Petersbourg où sa prodigieuse mémoire lui permet de compenser le handicap de la cécité. La personnalité d'Euler est également évoquée dans un paragraphe où se dégage l'image d'un génie aux goûts simples - voire conventionnels - mais à l'esprit particulièrement ouvert, attentif et bienveillant aux découvertes des autres, toujours soucieux de clarté, et ne cherchant jamais à dissimuler les difficultés rencontrées (à la différence d'un Newton). Après cette agréable entrée en matière s'enchaînent cinq chapitres, chacun pouvant être considéré comme une variation sur un thème d'Euler de difficulté croissante, depuis les intégrales elliptiques jusqu'au programme de Langlands, en passant par les valeurs des fonctions zeta et multizeta. La structure de l'ensemble fait un peu penser à la manière dont Bach a construit ses *Variations Goldberg* : Varadarajan y déploie de bout en bout une impressionnante érudition et la cohérence intellectuelle de son projet apparaît avec force.

L'ouvrage a été conçu et organisé de telle sorte qu'il permette une lecture à plusieurs niveaux : qu'il soit un étudiant avancé à l'esprit curieux ou bien un mathématicien enthousiaste n'ayant pas une connaissance spécialisée des sujets traités, le lecteur retiendra de chaque chapitre au moins une idée profonde et compréhensible, ce qui lui procurera un plaisir certain. Toutes ces qualités font d'*Euler Through Time* une incontestable réussite et une référence particulièrement recommandable.

Marc Antoine Coppo,
Université de Nice

Souvenirs sur Sofia Kovalevskaya
M. Audin
Calvage et Mounet, 2008. 286 p. ISBN : 978-2-916352-05-3. 42 €

Sofia

C'est l'héroïne de l'histoire, mathématicienne, écrivain, femme engagée, libre, en un mot : vivante. Commençons par la toupie, jeu d'enfant bien (?) connu mais également objet qui fascine depuis longtemps les mathématiciens. Une toupie un peu idéalisée, bien entendu, dont les évolutions prennent le nom de « mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe ». En général très compliqués, les mouvements de cette toupie ne peuvent être complètement décrits par des formules (intégrés dit-on) que dans trois cas particuliers, celui d'Euler, celui de Lagrange et... celui de Kovalevskaya. Ce seul travail justifierait déjà la célébrité de son auteure (bon, d'accord Michèle, je le mets ce « e ») et il lui a valu le prix Bordin de l'Académie des sciences de Paris en 1888. La méthode qui lui a permis de découvrir ce cas est nouvelle (considérer les cas où toutes les solutions sont méromorphes) et malgré les nombreux travaux suscités par cette découverte, il reste encore une part de mystère. L'étude des « systèmes hamiltoniens » qui, tels la toupie de Kovalevskaya, sont « complètement intégrables » est aujourd'hui une discipline à part entière, qui participe à la fois de l'analyse, de la géométrie algébrique, de la théorie des groupes et de la topologie ; c'était un beau défi, en grande partie tenu, que d'en rendre certaines idées importantes compréhensibles, au moins à ceux des lecteurs(trices) que la vue d'équations n'effraie pas irrémédiablement. Les autres devront se contenter de rêver sur les figures et se délecter de la description du milieu intellectuel de l'époque. Et tout d'abord de deux personnages remarquables, Karl Weierstrass, qui dirige la thèse soutenue par Sofia en 1874 et reste jusqu'au bout un ami fidèle et admiratif, et Gösta Mittag-Leffler qui la fait nommer Privatdozent à Stockholm en 1883, ce qui lui donnait en particulier le droit... de pénétrer dans l'Université, ce qu'elle n'avait pas pu faire à Berlin pour assister aux cours de Weierstrass (elle sera ensuite nommée « Professeur extraordinaire » – en gros « assistante » – puis, après qu'elle a reçu le prix Bordin en 1889, « Professeur à vie »). Leur correspondance avec Sofia, qui concerne aussi bien la vie que les mathématiques, est passionnante. Quant aux autres, mathématicien(ne)s, astronomes, écrivain(e)s, socialistes, nihilistes, qui apparaissent à l'occasion d'un épisode de la vie de Sofia, ils (elles) font l'objet soit d'une note soit d'un paragraphe, dont la précision n'exclut jamais l'humour. Un autre travail célèbre de Sofia forme le mémoire principal de sa thèse. Complétant et généralisant un théorème de Cauchy, elle y donne la condition sous laquelle le « problème de Cauchy » pour une équation aux dérivées partielles analytique admet une solution analytique locale unique et, par un contre-exemple explicite qui surprend Weierstrass, montre l'optimalité de ces conditions. Le « Théorème de Cauchy-Kovalevskaya » fait aujourd'hui partie de la boîte à outils de base du mathématicien. Il faudrait parler aussi de ses autres travaux, celui sur les anneaux de Saturne en particulier, mais je renvoie les lecteurs(trices) à la savoureuse (c'est le mot) description à la manière d'Italo Calvino qui en est donnée à la fin du chapitre 4.

Michèle

C'est l'auteure, la mathématicienne, l'amoureuse de littérature, la femme en empathie avec son modèle. Dénonçant avec une implacable précision historique les machistes, trop nombreux dans cette histoire, mais n'éludant pas l'épisode du mémoire erroné, plaidant éloquemment pour que l'œuvre de Sofia soit reconnue à sa juste valeur, elle est partout dans le livre, aussi bien dans les copieuses notes marginales que dans le dernier chapitre où, après une savoureuse compilation de « Je me souviens » à la Perec, elle décrit sa relation avec Sofia, d'abord purement mathématique dans ses travaux sur la géométrie symplectique et les systèmes intégrables, puis beaucoup plus personnelle à partir de son implication dans la pièce de Jean-François Peyret *Le cas de Sophie K*. Elle a créé un superbe objet-livre comme ceux dont elle confesse qu'elle les aime tant, de quoi faire rêver, comme Sofia a pu rêver devant le papier couvert de formules mathématiques qui tapissait les murs de sa chambre d'enfant.

Lui

Le livre, donc. Mais *keksedonksa* aurait demandé Zazie ? D'abord, il est beau bien qu'un peu lourd, papier glacé oblige, avec de larges marges remplies de notes comme au bon temps de Bayle mais aussi de photos, de figures, de diagrammes. Et puis ce titre, qui n'est pas anodin, « souvenirs » et indique l'intimité qui s'est établie entre l'auteure et son sujet. Livre d'histoires, certes, qui forment chacune l'un des courts chapitres, mais aussi d'Histoire, et fort savant, revenant aux sources, corrigeant la vulgate si souvent et insidieusement fautive, et dont l'ensemble forme une belle description d'une femme hors du commun et du milieu intellectuel dans lequel s'est déroulée sa courte vie. Livre de mathématique également, qui ose les équations et les concepts et essaye de faire apparaître l'originalité et l'actualité des mathématiques de Sofia Kovalevskaya. Livre de combat enfin, défendant pied à pied la mathématicienne Sofia contre les présentations réductrices (Lars Garding), malveillantes (Paul Julius Möbius) ou, pire, protectrices (Felix Klein), d'un milieu masculin d'une misogynie difficile (?) à imaginer aujourd'hui.

En bref, un magnifique hommage, écrit à la première personne, à cette belle personne qu'est Sofia, non seulement grande scientifique mais aussi être humain chaleureux, complexe, engagé et finalement emblématique et dont l'auteure s'est sentie très proche. D'ailleurs, quel(le) lecteur(trice) mathématicien(ne) ne s'identifierait pas à Sofia quand, dans une lettre de la fin décembre 1884, elle confie à Mittag-Leffler : *« Je ne suis pas encore parvenue à me forcer de m'occuper d'une* *manière un peu sérieuse de mon cours pour le semestre prochain. Mais j'ai beaucoup rêvassé au problème suivant : prenons le système d'équations différentielles...* » Au fond, que ce soit une pièce de théâtre qui ait donné l'impulsion initiale est peut-être la meilleure façon de situer ce livre, dont les notes marginales apparaîtraient alors comme des didascalies.

Alain Chenciner,
Université Paris VII
et Institut de mécanique céleste
(Observatoire de Paris)

Ce texte a été écrit à la demande de la Revue de mathématiques spéciales *et est paru, dans le numéro 119-2, année 2008-2009. L'auteur et la SMF remercient la* Rms *pour son autorisation de reproduire ce compte-rendu.*