SOMMAIRE DU N^{o} 117

Éditorial

Le paysage de la recherche et de l'enseignement mathématique français bruit de projets de remaniements, refontes et restructurations, et ce à tous les niveaux de l'activité mathématique, de l'école élémentaire jusqu'à l'université et au CNRS. La Gazette *entend rendre compte des débats et des enjeux des réformes au cours des mois à venir.*

Pour l'heure, ce numéro accueille d'abord, comme de coutume en juillet, le rapport annuel de la Société. Après un article d'A. Guichardet sur le « vecteur de Lenz » et de F. Nicolas sur la théorie eulérienne de la musique, la Gazette *a voulu se faire l'écho de la Fête de la Science. Au-delà de l'exemple présenté, qui est celui de Chevaleret, rappelons que la manifestation est l'une de celles, peu nombreuses, qui permettent de populariser et clarifier l'image des mathématiques. Au titre de l'enseignement, nous publions ensuite un article de M. Artigue sur la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique, et, dans le courrier des lecteurs, deux réactions au dossier du dernier numéro sur le socle de la Licence.*

La France et le Canada mathématiques ont des liens forts, comme l'a montré le second Congrès Canada-France, qui s'est tenu à Montréal en Juin dernier. Pierre Leroux, décédé subitement en mars 2008, a été l'un des artisans de cette fraternité scientifique, encore renforcée, au Québec, par les liens de la francophonie. La Gazette *lui rend hommage, sous la plume de G. Labelle et X. Viennot.*

Signalons, en conclusion, que le Comité de Rédaction accueille deux nouveaux membres : Ch. Retoré et N. Tosel, qui seront chargés plus particulièrement, et respectivement, des rapports entre Mathématiques, Logique et Informatique, et des Classes Préparatoires.

— Zindine Djadli, Frédéric Patras

SMF

Rapport moral

Introduction

Le rapport moral fait le bilan de l'ensemble des activités menées au sein de la SMF depuis un an. Il est le reflet du travail effectué par de très nombreux bénévoles, que nous remercions. Citons en particulier les membres du Bureau et du Conseil de la SMF, les directeurs et les membres de nos comités de rédaction, et tous ceux que nous sollicitons, ponctuellement ou régulièrement, et qui offrent leur temps et leurs compétences avec une très grande générosité.

Ce rapport a été rédigé par Jean-Marie Barbaroux, Pascal Chossat, Patrick Dehornoy, Zindine Djadli, François Germinet, Michel Granger, Stéphane Jaffard, Frédéric Patras, Benoît Rittaud, Lionel Schwartz, Lucia Di Vizio, avec l'aide de Claire Ropartz.

Le personnel parisien de la SMF a changé durant cette année : nous avons accueilli à l'automne notre nouvelle comptable, Sabine Albin ; Florent Arnaud, qui participait à la composition des revues, est parti. Le secteur publication est en cours de restructuration pour faire face à l'augmentation de son activité (cf. la partie sur les publications).

Affaires générales

Adhérents

Le nombre de nos adhérents a de nouveau augmenté en 2008, et nous avons dépassé le cap symbolique des 2000 membres. Nous devons poursuivre nos efforts pour recruter de nouveaux adhérents, afin que nous soyons aussi représentatifs que possible de l'ensemble de la communauté mathématique. Cela est particulièrement important aujourd'hui où la SMF joue un rôle de porte-parole de notre communauté vis-à-vis des autorités politiques. À titre de comparaison, on notera que le fait que l'ensemble de la communauté mathématique américaine adhère à l'AMS[1] permet à celle-ci d'être un partenaire incontournable lors des grandes négociations scientifiques qui ont lieu aux États-Unis.

Nous venons d'engager une campagne de publicité pour l'adhésion à la SMF auprès des mathématiciens de France, par l'intermédiaire du courrier électronique.

La SMF continue cette année d'offrir une adhésion aux docteurs en mathématiques ayant soutenu leur thèse en 2007, afin de leur faire découvrir notre société.

[1] American Mathematical Society

Simultanément, nous débutons un renouvellement progressif de nos correspondants SMF et leur nombre va être accru pour couvrir une plus grande quantité de sites.

Coopération avec les sociétés savantes

Beaucoup de nos activités se font en coopération avec d'autres sociétés savantes, et divers organismes. Les coopérations se font suivant différentes configurations, qui dépendent du type d'activité concernée. Ainsi, la plupart de nos actions de vulgarisation sont réalisées en commun avec *Animaths* ou le *CIJM*[2] ; celles qui concernent l'enseignement en Lycée et le début de l'enseignement supérieur sont coordonnées au sein *d'ActionSciences*, collectif dans lequel sont représentées les sociétés savantes de sciences fondamentales, et les associations d'enseignants en lycée. Nos activités concernant spécifiquement les mathématiques dans l'enseignement supérieur et la recherche sont coordonnées avec la SFdS[3], la SMAI[4] et souvent *Femmes et Maths* ; enfin, nos prises de position et nos démarches concernant globalement l'évolution de l'enseignement supérieur et de la recherche se font avec la SFP[5] et la SFC[6]. Il peut nous arriver aussi, ponctuellement, de réagir seuls : lorsque le Ministre B. Hortefeux a déclaré, le lundi 8 octobre sur France Inter, durant l'émission « *le Franc parler* » : « il n'y a plus de mathématiciens dans notre pays » le Président de la SMF lui a écrit, ainsi qu'à V. Pécresse pour leur faire part de l'émotion de nombreux mathématiciens et leur rappeler que, quel que soit le critère retenu, les mathématiques françaises arrivent aujourd'hui en deuxième position derrière les États-Unis, et en première position, si on tient compte de la différence de taille entre les pays (quelques jours plus tard, V. Pécresse rappelait ces faits dans un discours officiel en Inde).

Coopération avec la SFP et la SFC : les réformes de l'enseignement supérieur et la recherche

Depuis un an, de nombreuses réformes ont été réalisées, engagées ou annoncées. Elles touchent tous les niveaux, depuis l'école primaire, jusqu'à l'enseignement supérieur et la recherche. Sans revenir sur les prises de position que nous avons adoptées et que vous trouverez sur notre site web, nous allons préciser de quelle manière et dans quel but nous avons agi. Dès l'annonce de la future loi LRU[7] sur l'université, nous nous sommes concertés avec la SFP et la SFC pour former un groupe de réflexion qui pourrait mettre en garde, critiquer, réagir en face des propositions et décisions gouvernementales. Le choix du périmètre de nos trois sociétés savantes a été dicté par un difficile compromis entre représentativité et efficacité : à elles trois, elles sont représentatives de l'ensemble de la communauté en sciences fondamentales ; et, par ailleurs, un collectif de l'ensemble des sociétés de ce domaine (au moins une douzaine) aurait été un dispositif trop lourd, et aurait mis trop de temps à élaborer et adopter des positions consensuelles.

Nous nous sommes adressés une première fois à la ministre dès juin 2007, suite au projet de loi, puis en octobre en réaction au texte définitif. Notre but n'était pas

[2] Comité International des Jeux Mathématiques
[3] Société Française de Statistiques
[4] Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles
[5] Société Française de Physique
[6] Société Française de Chimie
[7] Loi relative aux libertés et responsabilités des universités

un rejet en bloc (nous étions conscients que certaines réformes étaient devenues nécessaires), mais plutôt de faire une critique constructive de plusieurs dispositions de la loi, en signalant les dangers potentiels, et des erreurs de rédaction manifestes, dues sans doute à son adoption hâtive, sans concertation avec les instances représentatives des enseignants et des chercheurs (en particulier de nos sociétés savantes). Nous avons depuis rencontré les conseillers du Président de la République, de la Ministre de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, ainsi que la Présidente du CNRS. Nos discussions avec eux ont été menées dans le même esprit : leur faire connaître les inquiétudes de nos membres, et plus généralement de l'ensemble des enseignants et des chercheurs de nos disciplines, et pointer du doigt ce qui, dans l'ensemble des réformes proposées, serait de nature à risquer de mettre en danger la qualité de la recherche et de l'enseignement dans nos disciplines. Nous avons insisté en particulier sur le très important rôle structurant que le CNRS a joué dans nos laboratoires, et sur le fait que toute réforme dont l'effet prévisible serait d'amenuiser ou d'annuler ce rôle, serait à prohiber.

Nous nous sommes également adressés aux différentes commissions qui ont été mises en place (Commission d'Aubert sur le partenariat entre universités, organismes de recherche et grandes écoles, Commission Schwartz sur les carrières, commission Hoffmann sur la valorisation des carrières de recherche). Elles nous ont auditionné et nous leurs avons envoyé les textes mis au point par nos Conseils d'administration ou nos Bureaux.

Il est difficile d'estimer notre audience, et l'effet des actions que nous menons. On peut cependant les mesurer partiellement au fait que les conclusions de ces commissions, ainsi que les déclarations de certains hauts responsables reprennent, parfois mot pour mot, certaines de nos analyses. Il est important de continuer cette activité pour influer sur les décisions qui vont être prises dans le futur proche, défendre les valeurs de notre communauté et la place des sciences fondamentales en France, et afin que nos sociétés retrouvent leur place naturelle d'interlocutrices des autorités politiques.

Enfin, la SMF, la SFP et la SFC ont apporté leur soutien au directeur du Palais de la Découverte face aux risques que pourrait représenter pour l'avenir du Palais une simple fusion avec la Cité des Sciences et de l'Industrie. Nous avons réaffirmé notre volonté de poursuivre nos actions communes avec le Palais de la Découverte en association avec les autres sociétés savantes, en particulier européennes.

Action au sein de l'EMS[8]

Les présidents des sociétés savantes européennes de mathématiques se sont réunis en avril 2008 pour un week-end au CIRM[9], à l'invitation du CIRM et de la SMF. Cette réunion était la première de ce type. Elle a permis aux présidents actuels de faire connaissance, de confronter les expériences et les problèmes de chaque société, et d'élaborer des actions communes. En particulier, cette réunion a permis de réfléchir aux actions de lobbying les plus efficaces au niveau européen, qui seront menées par l'EMS auprès des instances de Bruxelles. Cette action devient absolument nécessaire en raison de l'augmentation de la part des crédits européens dans le financement de la recherche. Il est également envisagé d'organiser un grand congrès européen en mathématiques en 2009, de taille beaucoup plus importante

[8] Société Mathématique Européenne
[9] Centre International de Rencontres Mathématiques

que le congrès européen qui se tient tous les quatre ans, et qui s'inspirerait des congrès annuels de l'AMS. Le Concile de l'EMS qui en est l'organe décisionnel, se réunit tous les deux ans. Sa prochaine réunion aura lieu à Utrecht, les 12 et 13 juillet. Il décidera en particulier du lieu où se tiendra le colloque européen dans quatre ans. Les difficultés de Zentralblatt ont aussi été abordées. Il est envisagé de le rendre à accès gratuit. Il a été décidé de renouveler ces week-ends chaque année.

Coopération avec les sociétés savantes françaises de mathématiques

– Le texte sur le Socle L, élaboré principalement par notre commission enseignement, a été adopté par les Conseils d'administration de la SMF, de la SMAI et de la SFdS. Nous renvoyons à la partie enseignement pour ce point.

– La SMF souhaite continuer à développer ses activités concernant la coopération internationale. Ainsi, le parrainage de départements de mathématiques de pays en voie de développement par leurs homologues français leur permet de recevoir gratuitement la *Gazette* et une revue de la SMF de leur choix. Il est important que le plus grand nombre possible de laboratoires ou de départements français participent à cette opération. De même, nous souhaitons coopérer de façon toujours plus étroite avec le CIMPA[10] et avec SARIMA[11], et tout particulièrement avec leurs nouveaux directeurs, respectivement Claude Cibils et Étienne Pardoux, auxquels la SMF souhaite le plus grand succès. Nous les assurons de notre fidèle soutient pour leurs actions futures.

– Les sociétés savantes de mathématiques avaient joué un rôle moteur dans l'organisation du colloque « *Convergences Mathématiques Franco-Maghrébines* » en janvier 2007. Elles continueront à être impliquées dans les suites de ce congrès et coordineront, avec leurs homologues maghrébines, les activités qui y seront développées. En particulier, elles animeront avec le CIMPA un site web dédié aux activités de CMFM[12].

– À l'initiative de Marc Yor et Jean-Pierre Kahane, une table ronde sur les mathématiques financières et l'industrie bancaire a été organisée par l'Académie des Sciences, la SMF et la SMAI. Elle a eu lieu, le 1er avril 2008 ; l'objectif principal était de faire un état des lieux, concernant le flux des étudiants en mathématiques financières, au niveau Mastère 2, lesquels deviennent analystes financiers dans une banque à l'issue de leur formation, et les déséquilibres que cela peut générer. Plus généralement, il s'agissait de décrire les interactions entre équipes de recherche en probabilités-statistiques d'une part, et les banques d'autre part ; les problèmes déontologiques propres à cette discipline ont aussi été abordés. Il a été envisagé de fonder un observatoire des applications des mathématiques. Cette table ronde devrait être suivie par un dossier sur les mathématiques financières dans la *Gazette*.

– La brochure « Zoom sur les métiers des mathématiques », qui a eu un très grand succès, vient d'être rééditée par la SMF, la SMAI, la SFdS et Femmes et Maths.

– La SMF a fait traduire en anglais la brochure « L'explosion des Mathématiques », et cette traduction est disponible sur notre site Web.

– Une pétition de la communauté mathématique internationale à l'initiative de la SMF, de la SMAI et de la SFdS a été envoyée aux Présidents de la République

[10] Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées
[11] Soutien aux Activités de Recherche Informatique et Mathématique en Afrique
[12] Convergences Mathématiques Franco-Maghrébines

du Tchad, et de la République Française, Elle a pour but de demander la vérité concernant le sort de Ibni Oumar Mahamet Saleh, mathématicien, ancien ministre, et homme politique tchadien enlevé à son domicile le 3 février 2008 et dont on est toujours sans nouvelles. Au jour où nous écrivons ces lignes, cette pétition a reçu plus de 2500 signatures. Elle est maintenant relayée par de nombreuses sociétés de mathématiques dans le monde.

– La SMF, la SMAI et la SFdS ont eu un bureau commun le 11 janvier dernier. Étaient aussi présents Franck Pacard pour le MESR[13] et Pascal Auscher pour l'AERES[14]. Ces derniers ont présenté leurs missions et leurs actions. Puis les trois sociétés ont échangé leurs points de vue sur leur mode de coopération au sein d'ActionSciences. Enfin, le processus de préparation du nouveau congrès « Mathématiques à venir » a été mis au point. En mars, une réunion spécifique sur ce sujet a rassemblé des représentants de la SMF, de la SMAI et de la SFdS. Il a été décidé que ce congrès aura lieu à l'automne 2009 et durera deux jours. Il visera les décideurs du monde économique, politique et industriel, responsables locaux ou nationaux de l'enseignement supérieur et la recherche (sans oublier les classes préparatoires et écoles d'ingénieur), ainsi que les journalistes. Le projet est piloté par une équipe de trois personnes : Yvon Maday, Jean-Michel Poggi et Marie-Françoise Roy. Les messages principaux que nous souhaitons faire passer sont les suivants :

- la France est un pays d'excellence en mathématiques ;
- les mathématiques sont une discipline vivante et utile à la société ;
- les métiers des mathématiques sont nombreux et diversifiés ;
- le développement des compétences mathématiques est un enjeu stratégique pour la science, la technologie et l'économie.

Un groupe de travail sur la démographie des enseignants-chercheurs dans notre domaine a été mis en place au MESR. Il élabore les scénarios possibles suivant la façon dont pourraient être remplacés les départs à la retraite, qui vont être particulièrement nombreux dans les années qui viennent. Il réfléchit sur les conséquences pour notre discipline. Ses conclusions seront très importantes pour l'élaboration des documents préparatoires au congrès « Mathématiques à venir ».

Participation au CNFM

Le Comité National Français de Mathématiciens est une association régie par la loi de 1901. Actuellement, les membres sont désignés par l'Académie des Sciences, la Section 01 du CNRS, la Société Mathématique de France et la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles.

En tant que comité national de l'UMI[15], le CNFM a entre autres les tâches statutaires suivantes :

– réunir des fonds pour couvrir les frais des conférenciers invités à l'ICM ;

– former (et soutenir financièrement) une délégation à l'assemblée générale de l'UMI qui a lieu tous les 4 ans ;

– proposer des candidats pour les trois comités de l'UMI : Comité Exécutif, Commission pour le Développement et les Echanges, Commission Internationale

[13] Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
[14] Agence d'Evaluation de la Recherche et de l'Enseignement Supérieur
[15] Union Mathématique internationale

pour l'Enseignement des Mathématiques (notons que la France joue traditionnellement un rôle important dans les instances des organisations internationales en mathématiques, bien plus que dans les autres sciences ; le CNFM est toujours à la recherche de volontaires pour ces fonctions).

De plus, le CNFM rend des services réguliers à la communauté mathématique française :

– collaboration à l'édition de textes mathématiques en langue française (parmi les exemples récents, le CNFM a participé financièrement à l'édition des œuvres complètes de Leray et à la brochure SMF/SMAI « L'Explosion des Mathématiques ») ;

– obtention et répartition de subventions du Ministère des Affaires étrangères et du Ministère de la Recherche pour la participation de mathématiciens français à des colloques à l'étranger, en particulier à l'ICM et aux deux autres grands congrès quadriennaux, le CME et l'ICIAM.

Cette année la SMF a renouvelé ses quatre représentants qui seront : Stéphan De Bièvre (Université Lille I), Stéphane Jaffard (Université Paris XII), François Loeser (ENS Paris), Marie-Françoise Roy (Rennes I).

Activités grand public

Participation à des salons

La SMF partage un stand de sociétés savantes lors de plusieurs salons durant l'année. Il s'agit de salons s'adressant aux étudiants, ou bien concernant la vulgarisation des sciences. Ainsi, la SMF a participé avec la SFP et la SFC au Salon de l'Orientation de l'ONISEP, du 22 au 25 novembre, et au SERI[16], qui s'est tenu cette année du 5 au 7 juin. La SMF a partagé un stand avec les sociétés de mathématiques lors des 20 ans de la revue *Tangente*, en octobre 2007. Elle a été aussi présente au salon du CIJM qui s'est tenu à Paris, Place Saint-Sulpice, du 29 mai au 1er Juin. À cette occasion, nous sommes partenaires du CIJM pour une exposition de posters, qui sera cette année sur le thème « Nature et Mathématiques » qui sera ensuite disponible pour être exposée à d'autres manifestations, sur demande au CIJM ou à la SMF. La présence de la SMF à ces salons lui permet de se faire connaître des étudiants et du grand public. Elle lui permet aussi d'apprécier la vision que des personnes extérieures à la communauté mathématique ont de notre discipline.

Conférences BnF[17]

Pour la quatrième année consécutive, la SMF organise avec *Animath* et la *BnF* un cycle de quatre conférences annuelles intitulé « Un texte, un mathématicien » qui se déroule dans le grand auditorium de la Bibliothèque nationale de France. De grands mathématiciens d'aujourd'hui viennent évoquer pendant une heure et demi un texte, une lettre, un article d'un mathématicien célèbre, qui les aura marqués, voire qui aura joué un rôle important dans leur carrière de chercheur. Martin Andler est le pilote de l'opération qui s'appuie également sur deux partenaires de presse : France Culture où le conférencier enregistre une émission et Tangente où une version écrite et grand public de la conférence est publiée.

[16] Salon Européen de la Recherche et de l'Innovation
[17] Bibliothèque nationale de France / SMF

Cette année, Marc Yor a parlé de l'extraordinaire aventure du fameux pli cacheté de Doeblin, envoyé à l'académie des sciences pendant la seconde guerre mondiale, conservé là pendant 50 ans, et ouvert très récemment ; ce pli témoigne de l'exceptionnelle fécondité de ce chercheur visionnaire mort prématurément ; Christophe Soulé est remonté loin dans le temps pour retrouver les origines du triangle de Pascal et présenter ses propriétés, des plus connues jusqu'à certaines découvertes plus récemment ; Dominique Picard a présenté l'un des pères des statistiques modernes, Lucien Le Cam, inventeur de plusieurs concepts fondamentaux ; enfin Henri Berestycki nous a fait découvrir une facette moins connue d'Alain Turing, l'un des pères de l'informatique, qui s'est intéressé à décrire une morphogenèse des plantes reposant sur les équations de diffusion-réaction.

Le succès était à nouveau au rendez-vous, avec un minimum d'environ 250 personnes et un pic de fréquentation pour le triangle de Pascal : la salle était pleine et des téléviseurs ont dû être installés à l'extérieur ! À chaque fois étaient présents entre 70 et 150 lycéens issus des trois académies de la région parisienne, pour lesquels un accompagnement spécial de notre part était proposé. En effet, les lycées qui participent à l'opération accueillent un pré-conférencier, qui prépare les élèves au sujet en question. Ces élèves ont également la possibilité d'effectuer juste avant la conférence une visite du site de la BnF ou bien de l'exposition temporaire en cours.

Notons que ces conférences « Un texte, un mathématicien » se sont également exportées en province, puisqu'à l'université d'Artois, Daniel Li en a organisé deux en 2008, faisant revivre pour les élèves et étudiants de la région les conférences de Jean-Christophe Yoccoz et de Xavier Viennot.

Coopération avec Animath

La SMF s'est engagée aux côtés de l'association *Animath* sur plusieurs actions. Elle soutient politiquement et financièrement les promenades mathématiques dont le catalogue apparaît sur le site de la SMF. Elle participe à la semaine des jeux mathématiques qui se déroule chaque année, à l'approche des beaux jours, place Saint-Sulpice (Paris 6^{e}). Elle a signé deux nouvelles conventions de partenariats avec *Animath* et d'une part l'académie de Versailles et d'autre part l'INRIA[18] ; ces deux conventions ont pour objet d'accroître la diffusion et le rayonnement des mathématiques auprès du jeune public. Enfin la SMF et *Animath* organisent ensemble le cycle de conférences « Un texte, un mathématicien » à la BnF.

Promenades mathématiques

Les Promenades mathématiques sont une initiative conjointe de la SMF et de l'association *Animath*. Elles consistent en un catalogue de conférences proposées par des chercheurs et des enseignants, qui ont vocation à être présentées au grand public partout où la culture mathématique peut se diffuser (établissements scolaires, médiathèques, entreprises...). Le catalogue actuel regroupe 91 conférences, impliquant une quarantaine de personnes d'une trentaine d'établissements différents. Depuis leur lancement en 2005, les Promenades mathématiques connaissent une croissance régulière, malgré une absence presque totale de communication institutionnelle. Sur la période juin 2007-mai 2008, ce sont 14 Promenades mathématiques

[18] Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

qui se sont déroulées (hors exposés préparatoires aux conférences BnF), à comparer aux 9 de la période juin 2006-mai 2007 et aux 4 de la période juin 2005-mai 2006. Ces quatorze Promenades mathématiques ont impliqué sept conférenciers différents. Si la plupart des interventions se sont déroulées dans un cadre scolaire (11 sur les 14), trois d'entre elles ont eu lieu dans d'autres contextes (association d'anciens élèves des Arts et Métiers, MJC, manifestation de l'association *Ludimath*). Par ailleurs, la moitié de ces Promenades ont eu lieu hors d'Île-de-France, ce qui fait écho à la volonté affichée de faire des Promenades une initiative d'envergure nationale. Le partenariat avec le CNRS est à présent en place ; il doit, via le dispositif « Passion recherche », permettre aux Promenades mathématiques d'assurer de façon pérenne son équilibre financier. Pour l'année à venir est prévu un partenariat avec le magazine La Recherche, dans le but de diversifier encore le catalogue et d'accroître la visibilité des Promenades mathématiques. Toutefois, les efforts de développement à mener concernent moins l'offre, déjà conséquente, que la demande, qui reste encore modeste.

Conférences de l'IMP

La SMF envisage d'organiser, avec la SFP et l'IHP des conférences de mathématiques et de physique, en direction des élèves de classes préparatoires et de licence. Il s'agirait de quatre conférences par an (deux de mathématiques et deux de physique). L'idée est de faire parler des mathématiciens et des physiciens qui puissent faire « rêver » les jeunes sur les grandes questions de la recherche.

Publications

État des publications

La situation des publications est assez bonne. Les comités éditoriaux, le secrétariat des publications et le directeur des publications veillent à la qualité et au flux des articles ou ouvrages soumis, aux rapports avec les auteurs et les arbitres, aux subventions et aux ventes (par abonnement ou au numéro). Les paragraphes suivants donnent quelques précisions sur l'année 2007 et le début de l'année 2008.

Faits à signaler pour 2007–2008

– L'année 2007 a été marquée par quelques problèmes qui ont entraîné le départ de Florent Arnaud. Ceci, ajouté à l'accident dont a été victime Nathalie Christiaën cet été, a causé un retard dans la sortie de certaines publications : il est quasiment résorbé, et les volumes de l'année 2008 sont déjà en cours de réalisation.

La réorganisation qui a suivi le départ de F. Arnaud nous a conduits à recourir à plusieurs prestataires extérieurs pour la composition, pour un coût global inférieur au salaire de celui-ci. Il n'est pas encore tout à fait évident mais il est fort plausible que la meilleure solution à moyen terme soit un compromis entre une production totalement « externalisée » et une production entièrement « maison », avec le recrutement d'un salarié qui y consacrerait une partie de son temps. Les raisons qui avaient présidé au recrutement d'un salarié (F. Arnaud) sont toujours présentes (aide à la composition, compétences fines en édition électronique, veille technologique, rapidité d'adaptation aux mutations dans l'édition).

– Les articles en version électronique sont maintenant munis de liens internes qui pointent aussi bien sur le texte lui-même que sur les bases de données que sont Mathematical Reviews (Mathscinet) et Zentralblatt pour la bibliographie.

– Un événement important de l'année 2008 est la production des volumes des Annales scientifiques de l'école normale supérieure. Le premier volume 2008 est déjà en ligne, voir

`http ://smf.emath.fr/Publications/AnnalesENS/4_41/html/`

(il est intéressant de noter que le premier volume 2007 avait été mis en ligne par Elsevier en juin 2007).

La Gazette des mathématiciens

Depuis juin 2007 la *Gazette* a inauguré un nouveau mode de fonctionnement (qui a correspondu à la fin du mandat de Colette Anné comme Rédactrice en Chef). Après une période transitoire de quelques mois au cours de laquelle le nouveau Rédacteur en Chef a été Zindine Djadli, il a été mis en place un mode de direction bicéphale. Le nouveau Rédacteur en Chef est Frédéric Patras, et Zindine Djadli est devenu Rédacteur en Chef adjoint.

Les raisons qui ont présidé ce choix sont liées à la volonté d'une transformation de la *Gazette* et en cela plusieurs chantiers ont été lancés par le Comité de Rédaction, en lien direct avec Stéphane Jaffard :

– ouverture du Comité de Rédaction, et par suite de la *Gazette*, aux enseignants de classes préparatoires aux grandes écoles,

– redéfinition des contenus de la *Gazette*, en particulier en terme d'accessibilité des articles et de longueur de ceux-ci,

– volonté plus nette de « suivre » les grands débats nationaux ou internationaux qui concernent les mathématiques ou, plus largement, les problèmes liés à l'éducation ou à la recherche.

Perspectives

– Nous sommes en discussion avec la Société Française de Statistiques pour la publication de sa revue.

– Nous réfléchissons à la création d'une nouvelle revue, francophone, un peu dans la lignée d'*American Mathematical Monthly* et à celle d'une nouvelle collection, au lectorat potentiel un peu plus étendu que nos collections actuelles.

– La mise en place du micro-paiement (*pay per view*) reste un objectif même si notre « culture d'entreprise » semble réticente à cette option.

– Un autre objectif, qui a déjà été évoqué à plusieurs reprises est une autonomie du secteur des publications au sein de la SMF. Elle permettrait une meilleure utilisation des compétences, une meilleure réactivité ; elle pourrait aussi permettre une « vérité des coûts et des recettes ». Il serait bon que cette autonomie soit réalisée assez rapidement.

Le pôle de Luminy

Bilan du CIRM en 2007

Le CIRM, établissement de la SMF, devenu une unité mixte de service entre la SMF et le CNRS en 2000, est soutenu financièrement de manière très importante par le ministère. Une convention le lie par ailleurs à l'université de la Méditerranée. Le but principal du CIRM est d'organiser et de gérer des rencontres internationales mathématiques de haut niveau et d'accueillir des petits groupes de chercheurs pour des séjours, ce qu'il fait avec un succès croissant. En 2007, le nombre de rencontres organisées au CIRM s'est accru, franchissant de manière apparemment durable la barre des 50 semaines par an (petits groupes de travail non inclus), et le taux de fréquentation de ses colloques a augmenté jusqu'à dépasser 3000 participants en 2007 (contre moins de 2000 jusqu'en 2003). Pour les années à venir nous prévoyons que le nombre de participants oscillera autour de 2800.

L'origine géographique des participants, quant à elle, change peu. Il faut toutefois noter un accroissement tendanciel non négligeable du taux de participants étrangers. L'accroissement du taux de participants de l'union européenne (environ 25% contre 20% avant 2004) peut être attribué à l'arrivée de nouveaux états membres, mais le nombre de participant hors union européenne augmente aussi (environ 16-17% contre moins de 15% jusqu'en 2002).

Ces évolutions, qui ne sont pas sans conséquence sur le fonctionnement du CIRM, doivent être attribuées à deux facteurs : d'une part l'accroissement de la renommée internationale du centre, phénomène naturel compte-tenu de la constance de sa qualité d'accueil et de l'excellence des mathématiques françaises dans le monde ; d'autre part l'accroissement des capacités d'accueil du centre, conséquence directe de l'opération « CIRM 2000+x » qui s'est achevée « formellement » en juin 2006 avec la mise en service du nouvel auditorium.

Cette évolution positive entraîne cependant un accroissement des coûts de fonctionnement et d'entretien qui n'est pas entièrement compensée par l'accroissement des recettes des rencontres.

Un accroissement du budget de fonctionnement du centre ainsi qu'une politique de recrutement de personnel paraissent inévitables à court terme.

Enfin, la mise en service de l'auditorium a permis de mettre en œuvre un réaménagement du bâtiment bibliothèque en libérant l'ancienne salle de conférences (surface 100 m^2). Ce projet, en cours de réalisation grâce notamment à une subvention du Ministère de la Recherche et à un prêt de la SMF, permettra de disposer en juin 2008 d'une extension importante (et attendue) des rayonnages et aussi de mettre la bibliothèque aux normes dans divers domaines : construction d'un ascenseur pour PMR[19], réseau électrique et informatique, isolation thermique. De nouveaux espaces seront aménagés pour la consultation des ouvrages par les visiteurs.

Le CIRM connaît depuis plusieurs années une diversification de ses thématiques et de ses activités et notamment dans le sens d'une ouverture accrue aux applications des mathématiques. Plusieurs nouveaux projets sont à l'étude pour faciliter cette ouverture : organisation de sessions thématiques combinant des ateliers et des cours sur un thème donné en collaboration avec la FRUMAM (Fédération de

[19] Personne à mobilité réduite

recherche mathématique de Marseille), renforcement des liens internationaux, particulièrement avec le CIMPA et avec les grands pays émergents, organisation de sessions de cours doctoraux d'envergure nationale (et au-delà).

Ces orientations sont conformes aux recommandations du Comité d'Évaluation du CIRM qui s'est tenu le 21 avril 2008. Il a reconnu le rôle très important qu'il tient pour le rayonnement de l'école mathématique française. Il a souligné le sous-dimensionnement de son service informatique, ainsi que la nécessité de mettre en place un secrétaire général, chargé spécifiquement de la gestion du centre. Il préconise une politique de communication extérieure pour améliorer la fréquentation étrangère et pour renforcer son image dans la communauté scientifique.

La politique de subvention des rencontres s'est poursuivie avec quelques aménagements récents destinés à mieux maîtriser ce financement : depuis 2007 l'enveloppe budgétaire allouée aux rencontres est incorporée dans le budget prévisionnel de l'année. D'autre part les tarifs des services (chambres, restaurant) ont été simplifiés et ajustés pour tenir compte de l'inflation.

La maison de la SMF

La cellule de diffusion continue d'assurer ses missions fondamentales de diffusion des ouvrages publiés par la SMF, et d'information et publicité auprès des congressistes du CIRM. L'accroissement notable des tâches à effectuer a été entièrement absorbé par l'arrivée du technicien de diffusion à la maison de la SMF, depuis un peu plus d'un an déjà.

Fonctionnement

Afin d'assurer ses missions, un renouvellement du parc informatique a été nécessaire. Un réseau local pour le traitement simultané de la gestion par les deux membres du personnel est en cours d'installation.

Malgré l'accroissement constant du nombre d'ouvrages diffusés par la SMF, l'espace reste suffisant pour une bonne organisation locale des stocks.

Diffusion

La gestion systématique et ininterrompue des éventuelles réclamations par les abonnés a été facilitée par la mise en place d'une adresse électronique spécifique.

La diffusion des « Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure » est désormais assurée par la maison de la SMF. Le passage de relais avec l'ancien diffuseur s'est bien déroulé, et la continuité dans le traitement des abonnements a été assurée sans problème.

Services auprès des congressistes du CIRM

Les informations disponibles au CIRM concernant les publications de la SMF semblent désormais suffisantes : lettre d'information et catalogue distribués aux congressistes, vitrines contenant les récentes publications de la SMF, régulièrement mises à jour, et stand d'exposition le mercredi matin.

Le service d'information et de ventes aux participants aux colloques est désormais assuré pour tous les colloques du CIRM sans exception, toute la semaine, de 14h00 à 15h30. Cette année encore, nous observons une progression des ventes au numéro, due en particulier à une meilleure visibilité de la cellule de diffusion.

Le stand d'exposition hebdomadaire dans le hall du nouvel auditorium du CIRM fonctionne depuis un an. Nous y présentons une sélection d'ouvrages adaptée aux thèmes des colloques. Ce stand permet une nouvelle mise en valeur, plus conviviale, des publications de la SMF. Les organisateurs de conférences sont encouragés à participer au choix des ouvrages à sélectionner.

Rencontres et colloques

Rencontres scientifiques récurrentes de la SMF

La SMF a deux manifestations scientifiques récurrentes :

La Journée scientifique annuelle.

La Journée scientifique annuelle 2008 intitulée « Mathématique et Musique » a eu lieu le 21 juin 2008, jour de de la fête de la musique. Elle a été organisée par Yves André. Le programme a été le suivant : Thomas Noll « Sturmian sequences and morphisms : a music-theoretic application », François Nicolas « Une réponse musicienne à Euler (pour relever la surdité théorique de Rameau) », Franck Jedrzejewski « Structures algébriques et topologiques de l'objet musical ». Cette journée s'est achevée avec la remise des Prix d'Alembert et Anatole Decerf, qui visent à encourager la diffusion de la connaissance des mathématiques vers un large public.

Les sessions « États de la recherche ».

Les sessions « États de la recherche », ont un comité scientifique actuellement composé de Albert Cohen, Nathanaël Enriquez, David Harari, Christoph Sorger, Patrice Le Calvez (secrétaire) et Cédric Villani. Pour les années à venir nous allons donner la possibilité aux organisateurs qui le souhaitent d'organiser leur session au CIRM : grâce aux accords avec le DSA[20] du CNRS, ceci sera possible sans perdre les subventions dont nous bénéficions actuellement.

Deux sessions ont eu lieu en 2007 :

– « Modèles mathématiques et méthodes numériques pour le transfert radiatif », organisée par Thierry Goudon, à l'université de Nice, du 30 juillet au 3 août 2007 ;
– « Géométrie non commutative » organisée par Moulay-Tahar Benameur, Nicolas Louvet et Jean-Louis Tu, à l'université de Metz, du 6 au 9 novembre 2007 ;

et deux sessions ont eu lieu en 2008 :

– « Variétés rationnellement connexes : aspects géométriques et arithmétiques », organisée par Olivier Debarre et Andreas Höring à l'université de Strasbourg, du 28 au 31 mai 2008 ;
– « Géométrie et probabilités en interaction », organisée par Franck Barthe, Michel Ledoux, à l'Institut de Mathématiques de Toulouse, du 20 au 23 mai 2008.

La SMF soutient aussi sans les organiser des manifestations scientifiques diverses ; elles sont détaillées dans le paragraphe du rapport consacré au Conseil Scientifique.

[20] Directeur Scientifique Adjoint

Colloques du CIRM

La plus grande partie de l'activité de la SMF en matière de colloques a lieu à travers le CIRM (*cf.* le paragraphe du rapport consacré au CIRM).

Colloques internationaux

Nous avons programmé un deuxième Colloque franco-canadien (juin 2008, Canada), un colloque franco-indien (décembre 2008, Inde) et un colloque franco-maghrébin (mars 2009, Tunisie).

Divers

La SMF a participé à l'organisation de plusieurs autres manifestations. Citons :

– « Autour des lauréats des prix de mathématiques de l'Académie des sciences » (30 novembre, Paris) ; demi-journée organisée avec l'Académie et l'IHP[21], au cours de laquelle nous avons pu assister aux exposés de Johannes Sjöstrand, François Loeser, Cédric Villani, Alice Guionnet, Stanislaw Szarek, Nicolas Burq et Louis Boutet de Monvel. Nous envisageons de fusionner cette demi-journée avec celle organisée par la SMAI et l'INRIA autour des prix de mathématiques appliquées et d'informatique pour constituer une journée commune.

– « Wendelin Werner et ses mathématiques » (29 juin 2007, Mairie de Paris).

La SMF a soutenu :

– « Le premier colloque franco-maghrébin de Calcul Formel » (23-26 mai 2008, Sfax, Tunisie) ;

– La rencontre « Transports terrestres : simulations et maquettage numérique (9e rencontre Math-Industrie) » (13 mars 2008, École Centrale de Lyon) ;

– Le colloque « L'héritage scientifique de Jacques Herbrand » (15 février 2008, ÉNS[22], Paris) ;

– La manifestation « Autour de la sortie du volume I/4a des Œuvres complètes de D'Alembert » (21 janvier 2008, IHP, Paris).

Le Conseil Scientifique de la SMF

Le conseil est composé de Yann Brenier (Nice), Patrick Dehornoy - secrétaire (Caen), Alice Guionnet (Lyon), Philippe Michel (Montpellier), Claire Voisin (Paris), Jean-Christophe Yoccoz (Orsay), plus, ès qualité, Marie-Françoise Roy, présidente de la SMF, remplacée par Stéphane Jaffard, président à compter de juillet 2007. Claire Voisin a démissionné en février 2008.

Le conseil a travaillé exclusivement par courrier électronique, sans réunion physique de ses membres.

Chronologie des décisions :

– juin 2007 :

   – avis favorable au remplacement de François Loeser par Jean-Philippe Rolin comme directeur de la collection *Cours spécialisés* ;

– octobre 2007 :

[21] Institut Henri Poincaré

[22] École Normale Supérieure

– avis favorable au soutien de la SMF au colloque organisé en décembre 2007 à Chennai (Inde) par Michel Waldschmidt et Aline Bonami ;

– avis favorable au remplacement de Michel Brion, Daniel Bertrand et Gilles Lebeau par Bruno Kahn, Jean-Marc Couveignes, et Nicolas Lerner dans le comité de rédaction de la revue *Séminaires et Congrès* ;

– novembre 2007 :

– avis favorable au soutien de la SMF au colloque organisé à la mémoire d'Adrien Douady ;

– janvier 2008 :

– avis favorable au soutien de la SMF au colloque d'analyse harmonique d'Orsay ;

– avis favorable au soutien de la SMF au colloque Herbrand à l'ÉNS Paris ;

– avis favorable au soutien de la SMF au colloque IWAP de Compiègne ;

– mars 2008 :

– avis favorable au soutien de la SMF au colloque de calcul formel de Sfax (Tunisie) ;

– avis favorable au remplacement de Claude Viterbo par Gilles Courtois dans le comité de rédaction de la revue *Séminaires et Congrès*.

Le conseil scientifique de la SMF est sollicité pour fournir des nominations à différents prix internationaux. Il a ainsi proposé des noms pour les prix Wolf et Abel, ainsi que pour ceux qui seront attribués par l'EMS lors du congrès de cet été.

Par ailleurs, une réflexion a été entreprise sur la formulation des conditions requises pour qu'un colloque puisse obtenir le soutien de la SMF, ainsi que sur la procédure de choix des candidatures pour les prix et congrès et le rôle de la SMF en ce cas. Le Conseil scientifique doit-il se contenter de transmettre des propositions émanant de la communauté scientifique, ou doit-il effectuer un choix pour celle-ci ?

Enseignement

La Société Mathématique de France consacre une énergie importante à la réflexion sur l'enseignement de notre discipline. Une partie de nos activités sur la question passe par la commission enseignement regroupant outre son responsable Michel Granger : Pierre Arnoux, Jean-Pierre Borel, Guy Chassé, Michel Delord, Daniel Duverney, Edwige Godlewski (SMAI), Pierre Loidreau, Marie-Jeanne Perrin-Glorian (Association de Recherche sur la Didactique des Mathématiques), Frédérique Petit, Nicolas Tosel (UPS), et Jacques Wolfmann. Nos interventions sur l'enseignement sont souvent réalisées en collaboration avec la SMAI. Pour essayer de mieux répondre aux multiples sollicitations sur les questions d'enseignement, le Conseil d'administration de juin 2007 a décidé de réorganiser la commission enseignement, avec une commission relativement réduite et un vice président membre du bureau et différents groupes de travail où le plus souvent des représentants de la SMF travaillent en collaboration avec d'autres sociétés et organisations. Sur les différents sujets que nous allons évoquer, nous souhaitons avoir l'appui de la collectivité mathématique, et nos diverses initiatives n'auront de l'écho que si elle bénéficient de ce soutien.

Le niveau L

Une enquête sur le niveau L en mathématiques a eu lieu à partir du premier semestre de l'année civile 2006 et a permis à la commission enseignement d'organiser le samedi 13 janvier 2007 à l'IHP, avec la SMAI, une réunion sur le thème « La licence de mathématiques existe-t-elle encore ? » Cette réunion a débouché sur l'organisation d'un groupe de travail, animé par Jean-Pierre Borel et chargé de définir un contenu central commun à toutes les licences de mathématiques appelé « socle commun sur la licence ». Ces événements ont été rapportés dans les deux rapports moraux précédents.

Le travail du groupe s'est étendu de janvier à octobre 2007, donnant lieu à de nombreuses réunions et à des débats souvent passionnés, et a abouti fin octobre à la mise au point d'un texte qui a encore fait l'objet d'une dernière réunion de mise au point des responsables des commissions enseignement des trois sociétés SMF, SMAI et SFdS, et a été adopté par les Conseils d'administration des trois sociétés sous le titre « pour un socle de la licence de mathématiques ». Ce document sur le socle a été diffusé aux adhérents des trois sociétés et fait l'objet d'une publication dans la *Gazette* d'avril 2008 avec un texte introductif de Jean-Pierre Borel. Il a fait aussi l'objet d'une présentation dans divers colloques internationaux (CIRUISEF Sciences et Francophonie, Colloque Colloque « Tuning en France »). Le texte sur le socle a donné lieu à des réactions contrastées, dont l'écho se retrouvera dans ce numéro de la *Gazette*, et sur le Forum de la SMF. Il n'est pas possible d'entrer ici dans les détails de ce débat, mais on peut dire que ce texte répond à un vrai besoin d'unité de la communauté mathématique.

Ce texte est une contribution à la solution de problèmes que l'enquête de 2006 a mis sur le devant de la scène. Ces problèmes demeurent et devront faire l'objet de toute l'attention de la commission enseignement de la SMF. Nous citerons en particulier les fortes disparités dans les horaires et les contenus, un éclatement en de multiples modules, l'intervention d'un trop grand nombre d'enseignants de mathématiques devant chaque étudiant, et aussi le constat partagé par l'unanimité des présents à la réunion de 2007 que les objectifs affichés par les programmes ne rendent pas compte du niveau réel atteint par la majorité des étudiants en fin de L3.

Il faut aussi rappeler la chute continue des effectifs, le handicap que constitue pour les licences universitaires la concurrence des autres voies scientifiques à BAC+2 (CPGE[23] et IUT[24]). On doit se souvenir aussi que nos licences seront évaluées sur leur aptitude à prendre en charge la totalité de leur public, ce qui nous pose un véritable défi en termes de débouchés et de perpectives à offrir, de vraie réussite des étudiants par le biais d'un usage pertinent des « plans licence », et de gestion de publics de niveaux et objectifs très divers.

[23] Classe Préparatoire aux Grandes Écoles
[24] Institut Universitaire de Technologie

Le niveau M

La SMF et la SMAI avaient convié les responsables de masters à une réunion « Visibilité et attractivité des masters de mathématiques » le 23 mars 2007, animée par Marie-Françoise Roy. L'un des objectifs de cette réunion était de présenter le site *Edumath* qui visait à faire connaître les masters de mathématiques aux étudiants étrangers désireux de se rendre en France et à gérer leur recrutement. Ce projet est remis en cause par la volonté du ministère de supprimer les sites de ce type et de les absorber dans une procédure globale pour tous les niveaux post bac.

Les responsables de Campus Maths qui souhaitent poursuivre l'action pour faire connaître les Masters de mathématiques à l'étranger et en améliorer la visibilité en France sont très demandeurs d'un travail de recensement qui porterait sur les effectifs, les dénominations, classées par très grands domaines et au-delà par le lancement d'un site qui fournirait de nos masters une présentation aussi unifiée que possible.

Les problèmes des masters détectés lors de la réunion de mars 2007 demeurent voire se sont amplifiés. Les résultats du recensement qui y ont été présentés sont incomplets et mériteraient d'être mis à jour annuellement et d'être étendus au niveau M1 ce qui n'était pas le cas. Beaucoup de Masters ont des difficultés à atteindre une taille critique, et des regroupements sont probables voire souhaitables et à encourager ici ou là sous forme de cohabilitations. Le nombre d'intitulés de diplômes est très élevé et souvent trop divers pour des formations de même type, ce qui nuit à la lisibilité des filières. Enfin il faudrait porter une attention accrue sur la questions des débouchés des Masters pour laquelle nous n'avons pas vraiment une vue d'ensemble, sur des sujets comme les débouchés en thèse et les autres débouchés, le lien entre la recherche et le monde professionnel, la possibilité d'une formation en alternance, etc.

La concertation des responsables de Master doit donc se développer. Le groupe de travail qui s'est constitué en 2007 n'a pas assez fonctionné, et seulement par email, et ces premiers efforts doivent être fédérés pour aboutir.

La formation mathématique des ingénieurs

L'enseignement de notre discipline dans les écoles d'ingénieurs est devenu plus difficile en raison d'une moindre maîtrise des concepts de base par beaucoup d'élèves issus des classes préparatoires par suite de l'évolution des mathématiques au lycée. Les réductions d'horaires ont affecté aussi dans les années récentes l'enseignement des mathématiques mais aussi de la physique dans les écoles elles-mêmes. Nos contacts avec la CTI[25] qui remontent à plusieurs années ont abouti à la création d'un groupe de travail commun CTI-sociétés savantes de mathématiques (SMF SMAI et SFdS) dont les travaux répondent pour partie à nos préoccupations. Ce groupe de travail est animé par Guy Chassé et les représentants de la SMF y sont Guy Chassé, Laurent Decreusefond et Pierre Loidreau. Cette année le groupe de travail s'est penché en priorité sur les problèmes posés en mathématiques par la notion d'approche compétences et par la question de la qualité de la formation des ingénieurs. Un document de travail général a été diffusé, qui pose le problème de la place des mathématiques dans le document de référence de la CTI, et recommande d'y rendre plus explicite la nécessité d'une formation fondamentale. Il contient une

[25] Commission des Titres d'Ingénieurs

réflexion sur l'outil que constitue le guide d'autoévaluation. En particulier la proposition est faite d'y insérer une section sur les mathématiques. Par ailleurs la commission souhaite définir un bagage commun minimal en mathématiques (un « socle ») qui pourra être assorti de compléments spécifiques selon les différents types d'écoles concernées.

La compétence en Probabilités a été l'objet d'une attention particulière. Un document vient d'être finalisé et détaille précisément ces « compétences minimales en probabilités », envisagées selon trois niveaux de savoir (Initiation, Savoir-Faire, Maîtrise).

Parmi les chantiers à venir de ce groupe de travail on peut citer : l'extension du document sur les probabilités à d'autre sujets, un état des lieux de l'enseignement des mathématiques dans diverses (toutes les ?) écoles d'ingénieurs, et enfin une réflexion sur le contenu, pour ce qui concerne la formation en mathématiques, des enquêtes de satisfaction auprès des industriels et anciens élèves.

ActionSciences

Le collectif *ActionSciences* dont la création remonte à juin 2002 regroupe actuellement 14 sociétés savantes et associations de professeurs dans tous les domaines des sciences et se fixe pour objectif de travailler sur l'enseignement secondaire en sciences au niveau du lycée et sur l'articulation lycée-niveau BAC $+1$ à $+3$: évolution du baccalauréat, rapport sur la « désaffection » pour les études scientifiques, recrutement et formation des enseignants. Les deux représentants SMF (Pierre Arnoux et Daniel Duverney) y jouent un rôle très actif. Le collectif s'est mis d'accord en 2007 sur deux documents. Le premier intitulé « Pour une professionnalisation de la formation des enseignants » contient des demandes précises notamment sur un prérecrutement à BAC $+1$. Sur le second « Propositions pour un renouveau de la voie générale scientifique au lycée » le consensus a été plus délicat mais nous avons pu obtenir une entente avec les physiciens, qui sont d'accord avec nous sur le manque de formation mathématique des lycéens et en constatent les conséquences à tous les niveaux. Après une période de forte tension, les biologistes ont admis une partie de nos arguments. Une délégation du collectif a rencontré les représentants de l'inspection générale. L'Inspection générale vient de rédiger un rapport sur la terminale S qui est paru en janvier dernier. Des courriers ont par ailleurs été envoyés aux décideurs politiques, mais les projets souvent annoncés et attendus de réformes concernant la formation des enseignants et d'autre part la terminale des lycées n'ont pas pour l'instant vu le jour.

En continuité avec son action antérieure le collectif *ActionSciences* a organisé le 5 avril dernier un colloque intitulé « Quel avenir pour l'enseignement scientifique au lycée et dans l'enseignement supérieur » qui a rassemblé 200 personnes à Paris. Les thèmes suivants y ont été débattus sous forme d'exposés souvent très précis et factuels et d'une table ronde animée par Marie-Françoise Roy : « Quel est le besoin réel de scientifiques en France ? Pourquoi y a-t-il une baisse de l'orientation vers les filières scientifiques universitaires ? Quelle formation doit être dispensée au lycée pour permettre une orientation efficace ? »

On peut penser que cette rencontre aura eu un impact important qui reste à analyser et une influence sur l'avenir et il est important que la SMF continue son action dans ce collectif.

Formation des enseignants et concours de recrutement

On a enregistré cette année une baisse importante du nombre de postes mis au concours. Au CAPES on passe de 952 à 806 et à l'agrégation de 290 à 250. Cette baisse après un palier en 2007 fait suite à une autre baisse en 2006 ; elle est inquiétante dans la mesure où cela risque d'induire une chute des effectifs d'étudiants s'engageant dans cette voie alors même que les besoins de recrutements risquent de croître à nouveau dans les années à venir. Sur les concours de recrutements et ce qu'on appelle leur « mastérisation » différents textes ont circulé (CPU, directeurs d'IUFM) et des propos venant du ministère ont été rapportés. La commission enseignement a débattu des différents scénarios possibles : recrutement en cours de master, ou après le master, masters généraux ou masters d'enseignement, formation professionnelle, prise en compte de l'agrégation dans les masters, (qui est l'objet d'une certaine cacophonie), etc. Mais à ce jour aucun texte officiel ne permet d'ancrer la réflexion sur des certitudes.

CFEM[26] et CIEM[27]

Les représentants de la SMF au bureau de la CFEM sont Jacques Wolfmann, Johann Yebou et Alain Yger (Vice-Président). La participation de la SMF et de la SMAI à la CFEM s'avère très importante. Cette participation peut et doit se concrétiser au travers des divers chantiers qu'elle coordonne, en particulier la préparation du congrès CIEM qui a lieu au Mexique en juillet 2008.

Certains thèmes ou groupes de discussion qui ont été retenus en appellent évidemment autant à la communauté mathématique (sensibilisée aux questions touchant à l'éducation) qu'à la communauté didactique. Le souhait du bureau de la CFEM va dans le sens d'une plus grande implication de la SMF (suggestion de participants aux thèmes ou groupes de discussion du congrès, de conférenciers).

Rapport financier

Le résultat de l'année 2007 (hors CIRM) est déficitaire pour un montant de 56 kE (celui de l'année précédente était de 14 kE). Ceci s'explique en partie par la prise en compte (comptable) des retards éditoriaux.

Grandes masses de l'exécution du budget

Le volume des recettes est de 590 kE en 2007 hors recettes internes avec le CIRM (pour 637 kE en 2006). Le volume des dépenses, est de 647 kE en 2007 (pour 650 kE en 2006).

Produits d'exploitation

Les recettes représentent en 2007 environ 590 kE (637 kE en 2006).

(1) Recettes dues aux revues : 347 kE (contre 383 kE en 2006).

(2) Cotisations, abonnements à la *Gazette* : 109 kE (110 kE en 2006).

(3) Produits financiers : en hausse avec 28 kE en 2007, à comparer aux 22 kE en 2006 et aux 17 kE en 2005.

[26] Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques

[27] Conférence Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques

Charges d'exploitation

(1) Masse salariale

La masse salariale globale hors charges de la SMF est de 325 kE dont 126 kE de salaires plus charges correspondant aux salaires du CIRM qui, par ailleurs, nous sont remboursés.

La masse salariale des années précédentes est :

– en 2006 315 kE SMF et 112 kE CIRM,
– en 2005 316 kE SMF et 82 kE CIRM,
– en 2004 274 kE et 91 kE.

L'augmentation est largement due aux soldes de tout compte de Catherine Branger et Florent Arnaud que ne compense que partiellement le temps partiel de 3/5 de notre nouvelle comptable Sabine Albin. À noter cependant la baisse des provisions pour congés payés et RTT.

Il convient de continuer à anticiper pour 2008 ou ultérieurement une augmentation due aux réorganisations en cours et aux évolutions des carrières, même si le remplacement (par sous traitance) de Florent Arnaud peut entraîner des économies.

(2) Frais de fabrication

Les frais de fabrication (hors composition) s'élèvent à 66 kE (72 kE en 2006, 82 kE en 2005, 77 kE en 2004). Ceci est conséquence d'une part d'un changement de méthode comptable, mais aussi de la maîtrise des coûts de production par Nathalie Christiaën.

(3) Honoraires et assurances

Les honoraires (11 kE pour le commissaire aux comptes) et assurances (2 kE) sont stables. À noter 8 kE d'honoraires divers.

(4) Frais de maintenance informatique

Enfin les frais de maintenance restent faibles 6 kE (3,5 kE en 2006 pour 8 kE en 2005).

Les revues de la SMF

Concernant les revues on constate une quasi stabilité du nombre d'abonnements avec des nuances suivant les revues.

– *Astérisque, Bulletins et Mémoires* :

On constate des déficits analogues à ceux des années précédentes de l'ordre de 81 kE pour *Astérisque* et de 14 kE pour *Bulletins et Mémoire* (pour mémoire 27 kE et 11 kE).

– Autres publications

Concernant les autres publications on notera la progression de la *RHM*[28] et le repli de *Panoramas et Synthèses*.

(1) *Panoramas et Synthèses* affiche un bénéfice de 8 kE en 2007 (3,5 kE en 2006, 7 kE en 2005).

(2) Le déficit de la *Revue d'histoire des mathématiques* qui était de 12 kE en 2005 et de 7 kE en 2006 est de 9 kE en 2007.

(3) Les chiffres des autres revues sont trop variables d'une année sur l'autre pour être significatifs. *Séminaire et congrès* est en déficit de 12 kE, cours spécialisés de 2 kE.

[28] Revue d'Histoire des Mathématiques

Budget du CIRM

Le CIRM est en excédent pour 21 kE. Ceci fait donc apparaître que l'ensemble SMF/CIRM est légèrement déficitaire cette année. Le centre a connu en 2007 un taux de remplissage exceptionnel (à la limite de la capacité). Cela s'est traduit par une forte augmentation des recettes venant des rencontres (passant de 774 kE à 900 kE) mais en même temps la redevance à Eurest (société chargée de la restauration et de l'entretien) est passée de 667 kE à 795 kE. Le budget de soutien aux rencontres a augmenté de 40 kE. On notera aussi une sensible augmentation des travaux de maintenance. En dehors de cela, il n'y a pas d'évolution notable sur les postes courants. L'accroissement de l'activité entraîne une montée des coûts de fonctionnement et d'entretien, et nécessitera à court ou moyen terme des recrutements de personnel. À ce titre les subventions sont vitales pour la vie du CIRM.

On notera enfin le réaménagement du bâtiment bibliothèque (en cours) qui sera financé par une subvention du ministère et par une avance de la SMF (remboursable sur 7 ans) pour un montant d'au plus 200 kE.

Conclusion sur la situation financière

Il y a, comme l'an dernier, une bonne maîtrise des dépenses de fonctionnement (charges d'exploitation hors masse salariale), les salaires sont en augmentation régulière, pour les raisons évoquées plus haut ainsi que celles indiquées dans le précédent rapport. Ainsi qu'il a été dit plus haut, les problèmes de personnel rencontrés cette année dans le secteur des publications engendrent un déficit, qui conjugué à une légère perte structurelle se monte à 56 kE. Dans les années futures, il conviendra d'être attentif.

Les rentrées des placements sont en augmentation. Les placements n'ont pas souffert de la crise financière actuelle.

MATHÉMATIQUES

Histoire d'un vecteur tricentenaire

Alain Guichardet

1. Présentation

Il est né vers 1710, sans être alors baptisé[1] ; nous l'appellerons *vecteur de Lenz* pour faire bref, mais on le rencontre dans la littérature sous divers noms : Runge-Lenz, Lenz-Pauli, Laplace-Runge-Lenz..., pour des raisons que nous tenterons d'expliquer. Il se situe dans le *problème de Kepler*, ou étude du mouvement d'un point mobile dans $\mathbb{R}^3$ (une planète) autour d'un point fixe (le soleil).

Il est intimement lié à la recherche des relations existant entre les lois de Kepler et celles de Newton ; nous noterons r le point mobile dans $\mathbb{R}^3$, m, sa masse, et nous mettrons le point fixe à l'origine o. Kepler avait établi vers 1620, d'une façon purement expérimentale, les trois lois qui portent son nom :

– 1^re^ loi : l'orbite décrite par la planète est plane et elliptique,

– 2^e^ loi (*loi des aires*) : l'aire balayée par le vecteur or pendant un laps de temps t est proportionnelle à t,

– 3^e^ loi : si T et a désignent respectivement la période du mouvement et la longueur du demi grand axe de l'ellipse, $\frac{T^2}{a^3}$ est le même pour toutes les planètes.

Par ailleurs, Newton avait proposé (dans ses *Principia*, 1687) deux lois universelles ; la première est la loi fondamentale de la mécanique newtonienne, que nous écrivons maintenant $f = m\gamma$; la seconde est celle de l'attraction universelle : $f = -mg\frac{r}{|r|^3}$ où g est une constante indépendante de la planète.

On va voir ci-dessous que de nombreux auteurs se sont attachés à résoudre les deux problèmes suivants : le problème dit « direct » : démontrer la seconde loi de Newton à partir des lois de Kepler, et le problème dit « inverse » : démontrer les lois de Kepler à partir des deux lois de Newton. Après avoir, au 2, exposé un des traitements modernes de ces deux problèmes, inverse puis direct, nous montrerons en 3 comment cela se faisait dans les années 1680-1710, notre « vecteur de Lenz » n'apparaissant en fait qu'en 1710 : puis en 4 comment Laplace invente une des méthodes utilisées de nos jours, et comment Runge introduit dans la question la notion de « vecteur » ; les analogues quantiques du vecteur de Lenz à diverses époques (1924-1966) sont exposés aux 5 et 6 après un bref rappel des principes fondamentaux de la mécanique quantique ; enfin au 6, on montre comment l'existence du vecteur de Lenz permet de construire un groupe de symétries du système

[1] D'ailleurs la notion même de vecteur ne devait apparaître que près de deux siècles plus tard avec Gibbs, Heaviside, Maxwell,...

étudié, plus grand que le groupe – évident – des rotations dans $\mathbb{R}^3$, et ce sera l'occasion de rappeler les bases du formalisme hamiltonien de la mécanique classique, formalisme qui s'inscrit au mieux dans les énoncés mathématiques modernes.

Je tiens à remercier ici tous les collègues qui m'ont aidé pendant la préparation de ce travail, et tout particulièrement Yvette Kosmann-Schwarzbach, André Rougé, Bernard Cagnac.

2. Traitement moderne de ces problèmes[2]

Voici comment on peut résoudre le problème inverse, en remplaçant dans la première loi l'expression « est elliptique » par « est une conique ».

Lorsque l'on a choisi un mouvement $t \mapsto r(t)$ du point mobile, on désigne par $\dot{\varphi}$ la dérivée par rapport à t d'une fonction quelconque φ de r ; on dit que φ est une *constante du mouvement* si $\dot{\varphi}$ est nulle pour tout mouvement satisfaisant à $f = m\gamma$ où $\gamma = \dot{v}$ et $v = \dot{r}$.

On introduit 7 fonctions :

– l'énergie $H = \frac{1}{2}m|v|^2 - \frac{mg}{|r|}$;

– les 3 composantes du *moment cinétique* $L = mr \times v$ où $\times$ désigne le produit vectoriel $L_1 = m(r_2v_3 - r_3v_2)$ et permutations circulaires ;

– les 3 composantes du *vecteur de Lenz*

$$A = mv \times L - m^2 g \frac{r}{|r|} \ .$$

Notons tout de suite les relations

$$|A|^2 = 2mH|L|^2 + m^4g^2 \quad \text{et} \quad L.A = 0$$

où le point désigne le produit scalaire.

On démontre que ces 7 fonctions sont des constantes du mouvement ; pour l'énergie et le moment cinétique, le calcul est immédiat ; pour le vecteur de Lenz, on vérifie d'abord, en utilisant des coordonnées, que, pour tout mouvement, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{r}{|r|}\right) = \frac{1}{m} L \times \frac{r}{|r|^3} \ ,$$

et ensuite que, si $f = m\gamma$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv \times L) = -mL \times \gamma \ .$$

On déduit facilement de tout cela les lois de Kepler à partir de celles de Newton. La constance du moment cinétique montre d'abord que l'orbite est située dans le plan (le plan orthogonal à L) ; on prend ensuite des coordonnées $r = (r_1, r_2)$ dans ce plan et on pose

$$l = m(r_1v_2 - r_2v_1) \ ;$$

on se convainc facilement que, si s est l'aire balayée par le vecteur *or* pendant un laps de temps t, on a

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{2m} \qquad (\textit{loi des aires}).$$

[2] Voir par exemple Goldstein-Poole-Safko, 2002.

Par ailleurs, de la constance du vecteur de Lenz, on déduit la forme de l'orbite et la troisième loi de Kepler : on écrit le produit scalaire $r.A$ de deux façons différentes :

$$r.A = r.(mv \times L) - r.(m^2 g \frac{r}{|r|}) = l^2 - m^2 g|r|$$

$$r.A = |r| \quad |A| \cos\theta$$

d'où résulte l'équation

$$|r| = \frac{l^2}{m^2 g + |A| \cos\theta} \ ,$$

ce qui est l'équation d'une conique en coordonnées polaires, l'origine 0 étant un foyer de la conique, laquelle conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que $\frac{m^2 g}{|A|}$ est > 1, < 1 ou égal à 1, c'est -à-dire encore suivant que l'énergie est négative, positive, ou nulle.

Démontrons enfin la troisième loi de Kepler. On suppose bien entendu que l'orbite est une ellipse ; les demi axes de l'ellipse ont pour longueur

$$a = \frac{gm^2 l^2}{m^4 g^2 - |A|^2} \ , \quad b = \frac{l^2}{(m^4 g^2 - |A|^2)^{1/2}} \ ;$$

la surface totale de l'ellipse est

$$S = \pi ab = \pi \frac{l}{m} \frac{a^{3/2}}{g^{1/2}} \ ;$$

enfin intégrant la relation $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{2m}$ de $t = 0$ à $t = T$, on obtient

$$S = \frac{lT}{2m} \ , \quad T = 2\pi g^{-1/2} a^{3/2} \ .$$

Quand au problème « direct », sa solution est facile : on écrit l'équation de l'ellipse sous la forme $\rho = \frac{\alpha}{\beta + \cos\theta}$, la loi des aires sous la forme $\dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{\rho^2}$, on pose $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ et on se propose de démontrer que $\ddot{r}$ est de la forme $\frac{kr}{\rho^3}$; on trouve que $k = -\frac{\beta\varepsilon^2}{\alpha}$.

3. Les origines

3.1. Travaux de Newton[3]

Newton résout les problèmes direct et inverse ; en réalité on n'y trouve pas trace des 2 « formules de Newton » qui ne seront dégagées que plus tard ; la notion d'accélération n'y figure pas non plus ; quant à la force (ou « pesanteur »), c'est, en gros, ce qui empêche le corps mobile de prendre la tangente. Par ailleurs les méthodes de Newton sont purement géométriques, sans utilisation de la technique des coordonnées cartésiennes, ni de celle du calcul infinitésimal inventé peu auparavant, sous des formes différentes, par Newton lui-même et par Leibniz. On y raisonne sur des figures formées de lignes droites ou courbes, et de triangles.

[3] *Principia*, 1687 ; voir aussi les pages 33 à 37 des commentaires ajoutés par Clairaut à la traduction française de Mme du Châtelet, 1756.

3.2. Travaux de Varignon

Varignon publie en 1700 trois mémoires à l'Académie Royale des Sciences où il s'attaque au problème suivant, proche du « problème direct » : étant donné une courbe plane et un corps parcourant cette courbe de façon que la force passe toujours par un point fixe, trouver ladite force. Varignon commence par dessiner les mêmes figures que Newton, mais il en déduit une formule générale qui fait partie du calcul infinitésimal de Leibniz :

$$y = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{dd}s}{\mathrm{d}t^2} .$$

On peut l'interpréter en termes modernes de la façon suivante : s est la longueur de l'arc de courbe parcouru par le corps, $x = -|r|$, $y = |\gamma|$, $\mathrm{dd}s = \mathrm{d}^2 s$; sous cette forme, cette formule est facile à vérifier en passant aux coordonnées polaires. Varignon applique ensuite sa formule à diverses courbes, dont les coniques, ce qui lui permet de retrouver certains résultats de « l'excellent ouvrage de M. Newton ».

Dans tout ce qui précède, on ne voit toujours pas trace du vecteur de Lenz, mais il va bientôt apparaître.

3.3. Travaux de Herman et Bernoulli

Les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences publient en 1710 une lettre de Jakob Herman à Johann Bernoulli, dans laquelle l'auteur s'attaque au « problème inverse » ; il considère l'expression suivante :

$$a\mathrm{d}x + \frac{xy\mathrm{d}y - yy\mathrm{d}x}{\sqrt{xx+yy}} , \tag{1}$$

que nous noterons $\mathcal{E}$ et qu'on peut interpréter comme suit. On admet que l'orbite de la planète est plane et on veut prouver qu'elle est conique ; on prend des coordonnées x et y dans le plan de l'orbite ; on admet aussi que $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$ (notre « moment cinétique ») est constant ; $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ (calcul infinitésimal leibnizien !) signifient $\dot{x}$ et $\dot{y}$; enfin a est une constante ; il est clair que $\mathcal{E}$ n'est autre, à quelques constantes près, que la composante de notre vecteur de Lenz sur l'axe des y.

Comment s'introduit cette expression $\mathcal{E}$? On part de l'équation « différentio-différentielle »

$$-a\mathrm{dd}x = \frac{x \times (y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)^2}{(xx+yy)\times\sqrt{xx+yy}} ; \tag{2}$$

en termes modernes, ce n'est autre (toujours à des constantes près) que la composante de $f = m\gamma$ sur l'axe des x. On passe de (2) à (1) par une simple intégration (c'est à peu près le calcul esquissé en 2). Ensuite Herman souhaite prouver que l'orbite est une conique ; malheureusement il écrit $\mathcal{E} = 0$, oubliant la constante d'intégration, erreur que Bernoulli lui signale dans sa réponse (1710) ; enfin à l'aide d'une nouvelle intégration, Bernoulli parvient à l'équation

$$ab \pm hy \pm cx = b\sqrt{xx+yy} \tag{3}$$

« laquelle équation [...] est [...] aux trois sections coniques » (en coordonnées cartésiennes). On peut expliquer l'équation (3) de la façon suivante. Notons w la constante $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$; écrivons $\mathcal{E} = \text{cte } u$ sous la forme équivalente suivante :

$$a\frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \frac{y}{x^2}\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{u}{w}\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2} = 0 \;;$$

intégrant terme à terme il vient

$$-\frac{a}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{x^2+y^2} - \frac{u}{w}\frac{y}{x} = \text{cte } k \;,$$

équation qu'on multiplie enfin par x.

En conclusion, le vecteur de Lenz apparaît ici comme un intermédiaire, non nommé, dans le passage des lois de Newton à la première loi de Kepler.

4. Avatars divers

4.1. Travaux de Laplace

Laplace introduit, page 181 de l'ouvrage cité dans la bibliographie, 7 fonctions qui sont des constantes du mouvement :

$$e = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, e', e'' \quad \text{analogues par permutations circulaires}$$

$$f = -x\left(\frac{\mu}{r} - \frac{\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}t^2}\right) - \frac{y\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t^2} - \frac{z\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t^2}, f', f'' \quad \text{analogues}$$

$$\frac{\mu}{a} = \frac{2\mu}{r} + \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}t^2} \;.$$

Ce sont respectivement, à des facteurs constants près, les 3 composantes du moment cinétique, celles du vecteur de Lenz, et enfin l'énergie ; le fait que ce soient des constantes du mouvement découle directement des équations du mouvement

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mu x}{r^2} \;, \quad \text{etc} \qquad \text{(page175)}.$$

Laplace démontre les deux relations suivantes (déjà rencontrées au 2)

$$fe + f'e' + f''e'' = 0$$

$$\frac{\mu}{a} = \frac{\mu^2 - f^2 - f'^2 - f''^2}{e^2 + e'^2 + e''^2} \;.$$

Il en déduit que les 7 fonctions ci-dessus « n'équivalent qu'à cinq intégrales distinctes » [4], et il ajoute que, « puisque l'élément seul du temps entre dans ces intégrales, elles ne peuvent pas donner les variables x, y, z en fonction du temps »

Laplace déduit de ce qui précède les 3 lois de Kepler par la méthode exposée au 2, dont il est apparemment l'inventeur.

[4] Voir ci-dessous 6

4.2. Travaux de Runge

Runge publie en 1926 un livre consacré aux bases du calcul et de l'analyse vectoriels (on voit enfin apparaître la notion de vecteur !) ; il les applique au problème de Kepler : page 70 il note $\mathcal{A}$ notre vecteur $\frac{1}{m^2 g}A$, puis reprend la méthode de Laplace pour démontrer les lois de Kepler.

5. Vecteur de Lenz et Mécanique Quantique

Le système physique que l'on va considérer ici est l'*atome d'hydrogène* : un point mobile dans $\mathbb{R}^3$ (un électron), autour d'un point fixe (le noyau) et attiré par lui par une force proportionnelle à $\frac{1}{|r|^2}$; ce système est donc identique à celui du problème de Kepler, mais on se propose de le traiter en termes quantiques.

5.1. Un peu de Mécanique Quantique[5]

Depuis les travaux de von Neumann, la mécanique quantique moderne représente les observables d'un système physique par des opérateurs autoadjoints, généralement non bornés, dans un espace hilbertien ; l'un de ces opérateurs est l'*hamiltonien* H qui représente l'énergie et permet de décrire l'évolution dans le temps d'une observable quelconque Φ grâce à la formule[6]

$$\dot{\Phi} = [H, \Phi]$$

Les valeurs propres de H à un facteur près, sont les niveaux d'énergie du système ; l'équation aux valeurs propres $H\psi = \lambda\psi$ est dite *équation de Schrödinger*. Dans le cas de l'atome d'hydrogène, l'espace hilbertien est $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)$ et l'hamiltonien est l'opérateur défini (formellement !) par

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{|r|}$$

où e est la charge électrique du noyau. On démontre, à l'aide de diverses fonctions spéciales, que les valeurs propres de H sont les nombres

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}, \ n = 1, 2, \ldots,$$

et que la multiplicité de cette valeur propre est égale à n^2 ; cette multiplicité – on dit *dégénérescence* – a longtemps intrigué les physiciens, et nous verrons plus loin comment on peut l'expliquer.

5 Voir par exemple le traité de Prugovecki, 1971.

6 Ici et par la suite, on écrira les formules sans se préoccuper de rigueur !

5.2. Travaux de Pauli (1926)

On savait par l'expérience que les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont de la forme $E_n = -\frac{cte}{n^2}$ avec la multiplicité n^2 ; en fait on disait « poids » (« Gewicht ») au lieu de multiplicité, et ce qu'on avait mesuré était, non pas les E_n eux-mêmes, mais les raies de Balmer $\nu_{n,p} = \frac{1}{h}(E_n - E_p)$ observées en spectroscopie ; quant aux multiplicités, on les avait mesurées en obligeant chaque raie à se scinder en plusieurs sous l'effet d'un champ extérieur, électrique ou magnétique.

Pauli cherchait à démontrer que les niveaux d'énergie sont de la forme $-\frac{cte}{n^2}$ avec la multiplicité indiquée ci-dessus ; mais, à cette époque, ce qu'il appelait « nouvelle mécanique quantique » n'était pas celle exposée au début du paragraphe, car il n'utilisait pas l'équation de Schrödinger, publiée la même année 1926 ; sa « nouvelle mécanique quantique » était celle, due pour l'essentiel à Heisenberg, qui représentait les observables par des matrices hermitiennes infinies que l'on manipulait sans trop de précautions, et dont, bien entendu, la propriété essentielle était la non-commutativité du produit. Les niveaux d'énergie sont alors les coefficients d'une matrice hermitienne diagonale H, l'hamiltonien, qui, ici aussi, permet de décrire l' évolution des autres observables dans le temps.

Revenons à l'atome d'hydrogène. Pauli considère 3 matrices représentant les 3 coordonnées de notre vecteur r ainsi que 3 autres représentant, à un facteur près, les 3 coordonnées de notre vecteur v ; ces 6 matrices ne sont pas précisées, on sait seulement qu'elles satisfont les fameuses relations de commutation de Heisenberg ; à partir de là, il construit, à l'aide de règles propres à la mécanique quantique, un hamiltonien noté H, et 2 ensembles de 3 matrices , notés respectivement $\mathcal{P}$ et $\mathcal{A}$, représentant respectivement nos vecteurs L et A. Pauli écrit (page 352) qu'à partir des relations satisfaites par E, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{A}$, « il devrait en principe être possible » de résoudre le problème posé, mais que « malheureusement cela lui fut impossible » ; pour y parvenir, il a dû faire intervenir d'autres phénomènes physiques : action d'un champ électrique ou magnétique.

5.3. Travaux de Lenz (1924)

Sous le nom de « mouvement de Kepler », Lenz traite en fait de l'atome d'hydrogène ; il introduit le vecteur qui porte ici son nom sous la forme

$$A = \frac{1}{Ze^2 m}[lg] + r_0,$$

où [ ] désigne le produit vectoriel, r le rayon vecteur, r_0 le vecteur unité, $g = mv$ et $l = [rg]$. Il l'utilise pour étudier les perturbations des énergies des états quantiques (« Quantenzustände ») sous l'effet d'un champ extérieur, électrique ou magnétique. A cette époque, la notion d'« état quantique » est définie dans le cadre de la « vieille théorie des quanta » qui avait précédé les matrices de Heisenberg et l'équation de Schrödinger ; le modèle de l'atome d'hydrogène est dit « atome de Bohr » et les états quantiques sont certaines trajectoires classiques du problème de Kepler caractérisées par une condition de type discret.

6. Vecteur de Lenz et groupes de symétries

Pour exposer les groupes de symétries de systèmes physiques, il est bon d'utiliser le

6.1. Formalisme hamiltonien[7]

L'*espace de configuration* d'un système physique est une variété différentielle R ; on introduit l'*espace des phases* $\Omega = \mathrm{T}{*}R$ où $\mathrm{T}{*}R$ est le fibré cotangent à R ; un élément de Ω sera noté (r, p)[8] où $r \in R$ et où p est une forme linéaire sur l'espace vectoriel tangent à R au point r. Une *observable* est une fonction différentiable sur Ω ; pour deux telles fonctions φ et ψ, on définit leur *crochet de Poisson* $\{\varphi, \psi\}$ qui, dans certains systèmes de coordonnées (r_i, p_i) dits *canoniques*, peut s'écrire

$$\{\varphi, \psi\} = \sum_i (\frac{\partial \varphi}{\partial r_i}\frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial \psi}{\partial r_i} \ .$$

À chaque fonction φ on associe le champ de vecteurs X_φ défini par $X_\varphi.\psi = \{\psi, \varphi\}$ pour toute fonction ψ et on a

$$X_{\{\varphi,\psi\}} = X_\varphi.X_\psi - X_\psi.X_\varphi \ .$$

Une observable joue un rôle particulier : l'énergie H qui permet de décrire l'évolution dans le temps du système physique de la façon suivante ; un mouvement $t \mapsto (r(t), p(t))$ est physiquement possible si et seulement si

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} \ ;$$

ces équations, dites *de Hamilton*, forment un système différentiel du premier ordre, ses solutions forment un espace vectoriel de dimension $2d$ si d est la dimension de R ; on déduit de là l'évolution d'une observable φ :

$$\dot{\varphi} = \{H, \varphi\} \ ;$$

en particulier φ est une *constante du mouvement* si $\{H, \varphi\} = 0$.

Soit maintenant G un groupe de Lie ; une *action* de G sur Ω est un morphisme de G dans le groupe des difféomorphismes de Ω ; on en déduit une action de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G : pour tout $\xi \in \mathcal{G}$, ξ_Ω est le champ de vecteurs défini par

$$\xi_\Omega(\varphi)(x) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})_{t=0} \varphi(\exp t\xi.x).$$

[7] Voir par exemple Goldstein-Poole-Safko.
[8] La notation usuelle est (q, p) mais on a voulu rester fidèle aux notations utilisées plus haut.

6.2. Cas du problème de Kepler

On a ici $R = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^3$; on a, avec les notations du 1

$$H = \frac{|p|^2}{2m} - \frac{mg}{|r|} \ , \quad L = r \times p \ , \quad A = p \times L - m^2 g \frac{r}{|r|} \ .$$

Faisons tout de suite une remarque rassurante : la première équation de Hamilton dit que p n'est autre que la « quantité de mouvement » mv, et la seconde équivaut à l'équation fondamentale $f = m\gamma$; en somme, ici, le passage au équations de Hamilton n'est autre que l'opération bien familière qui consiste à remplacer une équation différentielle d'ordre 2 par deux équations différentielles d'ordre 1 ! Les vecteurs L et A sont des constantes du mouvement (calcul facile pour L, fastidieux pour A).

6.3. Relations entre L et A

Il est facile de voir que ces vecteurs sont orthogonaux. En fait cette relation est la seule qui les relie . En effet, étant donné deux vecteurs u et v orthogonaux de $\mathbb{R}^3$, il existe un élément (r, p) satisfaisant $L(r, p) = u$ et $A(r, p) = v$. Pour le voir on peut prendre une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que (e_1, e_2) soit une base du plan orthogonal à L et chercher r et p sous la forme $(r_1, r_2, 0)$ et $(p_1, p_2, 0)$; on peut même imposer $r_2 = 0$.

6.4. Groupes de symétries

On va maintenant déduire de ce qui précède, d'une part une action du groupe des rotations SO(3) sur Ω, qui entraîne une action de son algèbre de Lie $o(3)$, et d'autre part une seconde action de $o(3)$. On utilisera la base de $o(3)$ formée des matrices

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui satisfont les relations

$$[\xi_1, \xi_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} \xi_k.$$

où ε_{ijk} est égal à 0 si deux des indices sont égaux et, dans le cas contraire, au signe de la permutation (i, j, k).

6.4.1. Action du groupe SO(3) *sur* Ω

C'est l'action naturelle par rotations sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et sur $\mathbb{R}^3$; l'action de $o(3)$ donne les champs de vecteurs associés aux 3 composantes de L.

6.4.2. Seconde action de $o(3)$

Des calculs très fastidieux montrent que

$$\{A_i, A_j\} = -\sum_k \varepsilon_{ijk} L_k H \ , \{A_i, L_j\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} A_k \ ;$$

on est donc amené à se placer dans la région où $H(r,p) < 0$ (on rapprochera cette condition de celle, rencontrée au 2, qui assure que l'orbite est une ellipse) et à poser

$$N_i^{\pm} = \frac{1}{2}(L_i \pm (-H)^{-1/2} A_i)$$

de sorte que

$$\{N_i^{\pm}, N_j^{\pm}\} = \sum_k \varepsilon_{ijk} N_k^{\pm}, \{N_i^{+} N_j^{-}\} = 0 \ ;$$

prenant les champs de vecteurs associés aux N_i^{+} et N_i^{-}, on obtient deux actions de $o(3)$ qui commutent entre elles ; d'où une action du produit direct $o(3) \times o(3)$, ou enfin de $o(4)$, isomorphe à ce produit direct. Par les propriétés générales des groupes de Lie, on sait que cette action de $o(4)$ provient d'une action du groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $o(4)$, à savoir $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$; mais cette dernière action ne semble pas avoir été décrite explicitement ; la seule chose évidente est qu'elle n'est pas linéaire[9].

6.5. Cas de l'atome d'hydrogène[10] (traité quantiquement)

La situation est tout à fait analogue à celle étudiée ci-dessus. Dit en termes très formels, les « vecteurs » L et A (rappelons que ce sont des triplets d'opérateurs autoadjoints) sont définis comme suit. On a d'abord les 6 opérateurs représentant les 3 fonctions coordonnées et les 3 composantes de l'impulsion : r_k est l'opérateur de multiplication par la fonction coordonnée $r \mapsto r_k$ et p_k est l'opérateur $-i\hbar\frac{\partial}{\partial r_k}$. Ensuite $L_1 = r_2 p_3 - r_3 p_2$ et permutations circulaires

$A_1 = \frac{1}{2m}([p_2, L_3] - [p_3, L_2]) - e^2 \frac{r_1}{|r|}$ et permutations circulaires.

On a ensuite les mêmes formules que plus haut, en remplaçant $\{,\}$ par $[,]$, d'où une représentation de l'algèbre de Lie $o(3)$ par des opérateurs autoadjoints, qui sont connus explicitement et commutent avec l'hamiltonien H ; par les propriétés générales des groupes de Lie, cette représentation provient d'une représentation unitaire du groupe $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)$; cette représentation donne, par restriction au $\mathrm{n}^{\text{ième}}$ sous-espace propre de E_n de H, une représentation irréductible, équivalente au produit tensoriel $D^{(n-1)/2} \otimes D^{(n-1)/2}$ où $D^{(n-1/2)}$ désigne l'unique représentation irréductible de dimension n de $\mathrm{SU}(2)$; la description explicite de cette représentation irréductible de $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ dans E_n ne semble pas mieux connue que dans le cas du problème de Kepler. Ce qui précède explique en partie la « dégénérescence » n^2. Signalons enfin que V. Fock (1935) avait introduit une action de $o(4)$ dans ce but, et que V. Bargmann (1936) y avait adjoint le vecteur de Lenz.

---

[9] Voir par exemple H.H. Rogers, 1973.

[10] Voir par exemple Bander-Itzykson, I, 1966 ou Blaizot-Tolédano, 1997.

7. Références

[1] M. Bander, C. Itzykson. *Group Theory and the Hydrogen Atom , I*. Review of Modern Physics, t. 38, 1966, p. 330-345.
[2] V. Bargmann. *Zur Theorie des Wasserstoffatoms*. Zeitschrift für Physik, t. 99, 1936, p. 576-582.
[3] Johann Bernoulli. *Extrait de la réponse de M. Bernoulli à M. Herman*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, t. 1732, 1710, p. 521-544.
[4] J.-P. Blaizot, J-.C.Tolédano. *Symétries et physique microscopique*. Ed. Ellipses, 1997.
[5] E. du Châtelet. *Principes mathématiques de la philosophie naturelle, avec commentaires de Clairaut*. Paris, 1756.
[6] V. Fock. *Zur Theorie des Wasserstoffatoms*. Zeitschrift für Physik, t. 98 1935, p. 145-154.
[7] H. Goldstein. *Prehistory of the « Runge-Lenz » vector*. Amer. J. Phys., t.43, 1975, p. 737-738. *More on the prehistory of the Laplace or Runge-Lenz vector*. ibid, t. 44, 1976, p. 1123-1124.
[8] H.Goldstein-C.Poole-J.Safko. Classical Mechanics, 3ième édition. (Addison Wesley, 2002).
[9] J. Herman. *Extrait d'une lettre de M. Herman à M. Bernoulli*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, t. 1732, 1710, p. 519-521.
[10] P.S. de Laplace. *Traité de mécanique céleste (1799 et 1825)*. Voir œuvres complètes, édition de 1878, numérisée par la Bibliothèque Nationale de France.
[11] W. Lenz. *Über den Bewegungsverlauf und Quantenzustände des gestörten Keplerbewegung*. Zeitschrift für Physik, t. 24, 1924, p. 197-207.
[12] I. Newton. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. 1687.
[13] W. Pauli. *Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt des neuen Quantenmechanik*. Zeitschrift für Physik, t. 36, 1926, p. 336-363.
[14] E. Prugovecki. *Quantum Mechanics in Hilbert Spaces*. Academic Press, 1971.
[15] H.H.Rogers. *Symmetry Transformations of the Classical Kepler Problem*. J. Math. Phys., t. 14, 1973, p. 1125-1129.
[16] C. Runge. *Vectoranalysis*. Verlag S.Hirzel, Leipzig, 1926. Il existe une édition plus ancienne, 1919, chez le même éditeur.
[17] P. Varignon. *Trois mémoires de l'académie royale des sciences*.1700.
[18] Wikipedia, the free Encyclopedia. Laplace-Runge-Lenz vector.

MATHÉMATIQUES ET MUSIQUE

Sur la formalisation par Euler du plaisir musical

François Nicolas[1]

La théorie eulérienne de la musique, engagée dès 1731 (Euler avait alors 24 ans) et prolongée jusqu'à la fin de sa vie (« Euler ne lâchait jamais ses idées » Don Zagier[2]) constitue à différents titres une théorie mathématique de la musique sans précédent : non seulement son « objet » – la musique de son temps – est neuf (il s'agit de la musique tonale qui n'a émergé que depuis un siècle), non seulement ses « outils » théoriques – la mathématique eulérienne – sont également neufs (Euler mobilise ici la palette entière des nouvelles disciplines mathématiques en cours de déploiement), mais plus encore le rapport entre cet « objet » et ces « outils »– la manière eulérienne de concevoir ce que *théoriser* veut mathématiquement dire – est lui-même neuf : on propose ici, à la suite de Christian Houzel[3], de le concevoir comme une *formalisation*.

À tous ces titres, on peut donc dire que cette théorie eulérienne (formalisation de la musique tonale grâce à la mathématique du XVIII^e^) inaugure un type nouveau de théorie mathématique de la musique, dont la généalogie vivifiante va se poursuivre jusqu'en ce début de XXI^e^ siècle.

Indiquons, au passage, que ce type nouveau se conforme de facto au *principe* qu'on dira du *contemporain* : une théorie de la musique *contemporaine* (ici tonale) doit être une théorie *contemporaine* (ici mathématiquement contemporaine) de la musique.

La journée annuelle 2008 de la SMF[4], consacrée aux rapports « Mathématique et musique », a permis de contextualiser cette théorie mathématique de la musique d'un type nouveau, en montrant en particulier de quelle manière sa confrontation (en 1752) avec la théorie ramiste de la musique (elle-même théorie musicale de la musique d'un type nouveau) préfigure la possibilité d'un nouveau type d'alliance entre mathématiciens et musiciens. Pour tout détail sur cette journée, on se reportera au volume « Mathématique et musique » de la SMF réunissant les trois textes suivants :

– Thomas Noll : *Sturmian Sequences and Morphisms, A Music-Theoretical Application* ;

[1] Compositeur, École normale supérieure/Ircam, `http://www.entretemps.asso.fr/Nicolas`

[2] Journée *Leonhard Euler, mathématicien universel* (IHÉS, Bures-sur-Yvettes ; 24 mai 2007) `www.ihes.fr/jsp/site/Portal.jsp?page_id=226`

[3] *Euler et l'apparition du formalisme* ; in *Philosophie et calcul de l'infini* de Houzel, Ovaert, Raymon et Sansuc (François Maspéro, coll. *Algorithme* ; Paris, 1976).

[4] 21 juin 2008.

– François Nicolas : *Pour des rapports d'un type nouveau entre mathématiques et musique, en germe dans l'échange Euler/Rameau de 1752 ;*

– Franck Jedrzejewski : *Structures algébriques et topologiques de l'objet musical.*

On voudrait, dans cette chronique, présenter un seul aspect – il est vrai cardinal – de cette formalisation eulérienne de la musique : sa théorie du plaisir musical qui le conduit à une mesure des degrés de « suavité » harmonique. On tentera, sur cet exemple, d'indiquer comment subjectivités mathématicienne et musicienne peuvent à la fois se rencontrer et diverger, comment elles peuvent entrer en *rai*sonances[5].

La formalisation eulérienne des degrés de suavité

Euler théorise la suavité (ou la *douceur*, ou *l'agrément*) musicale dans son premier écrit : le *Tentamen novæ theoriæ musicæ ex certissimis harmoniæ principiis dilucide expositæ*[6]. Le projet d'Euler est le suivant : donner forme mathématique au plaisir proprement musical, en particulier – on se limitera ici à ce point – au plaisir proprement harmonique.

« La théorie de la musique est fondée sur deux principes. Le premier qui consiste dans l'exacte connaissance des sons, appartient à la physique. L'autre, puisé dans la métaphysique, a pour but de définir comment il se fait que l'ensemble de plusieurs sons simultanés ou successifs éveille en nous le sentiment du plaisir ou de l'aversion. » [7]

Prenons d'abord mesure de la gageure. L'ambition est sans précédent à raison de sa difficulté intrinsèque : il ne s'agit plus seulement de donner forme mathématique aux rapports acoustiques sous-jacents aux différents intervalles de musique – ceci mobilise l'antique voie pythagoricienne[8] – ; il ne s'agit pas simplement de prendre mathématiquement mesure de la manière spécifique dont la perception auditive décompte ces intervalles – la théorie de la concordance des coups tend alors à y répondre – ; il s'agit surtout de formaliser la dimension proprement musicale (et non plus seulement physico-acoustique et physiologico-perceptive) du plaisir pris à ces intervalles !

Euler a bien conscience de devoir formaliser ici une triple stratification : *« Ce n'est pas uniquement dans l'objet qu'il faut chercher la cause pour laquelle nous le trouvons agréable ou désagréable* [1^er^ niveau] *; il faut aussi avoir égard aux sens qui*

---

[5] Voir ma chronique « *Rai*sonances mathématiques en musique » dans le numéro 111 de la *Gazette* de janvier 2007. On désigne ici par « *rai*sonance » une résonance entre raisons de genres différents (en l'occurrence entre raison *mathématique* et raison *musicale*).

[6] *Essai d'une nouvelle théorie de la musique exposée en toute clarté selon les principes de l'harmonie* ; 1731/1739. Les extraits en français renvoient à la traduction des Œuvres complètes d'Euler publiées à Bruxelles en 1839.

[7] Préface (p. iv) du *Tentamen*

[8] Cependant remaniée chez Euler par une problématique désormais des rapports de fréquences et non plus de rapports entre segments du monocorde. On se reportera sur ce point à l'exposé de Pierre Cartier au séminaire *mamuphi* (Ens, 25 février 2006) : *L'ouvrage d'Euler sur la théorie musicale (1739) : les principaux apports théoriques* www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=727

en représentent l'image à l'esprit [2^{e} niveau], *et surtout au jugement que l'esprit se forme de cette image* [3^{e} niveau]. » [9]

Ce faisant, Euler adopte un tout nouveau rapport à la musique : loin de considérer le plaisir musical comme un plaisir d'ordre arithmétique (fût-il occulte ou inconscient), la musique ne constituant alors qu'un domaine de particularisation sensible de lois mathématiques générales, Euler prend acte d'une autonomie des lois musicales, en particulier harmoniques (autonomie qui, entre autres, a conduit à l'invention de la tonalité) pour se proposer ce but tout neuf : mettre ces lois musicales autonomes en forme mathématique – les formaliser mathématiquement –, y compris jusqu'à leur dimension proprement sensible c'est-à-dire jusqu'au plaisir spécifiquement musical que ces lois peuvent générer. Autant dire que pour Euler le mathématicien doit désormais partir de ce que le musicien dit de ces lois musicales, et non plus prétendre lui apprendre qu'elle serait la vérité, jusque-là insue, en matière de lois musicales.

« En musique, comme dans tous les beaux-arts en général, il faut se régler d'après l'opinion de ceux qui possèdent à la fois un excellent goût et beaucoup de jugement, et conséquemment ne tenir compte que de l'avis des personnes qui, ayant reçu de la nature une oreille délicate, perçoivent de plus avec justesse tout ce que cet organe leur transmet, et sont capables d'en juger sainement. » [10] Il s'agit donc de *« consulter les métaphysiciens* [= ici les musiciens] *que cette recherche concerne plus particulièrement. »* [11]

Ce renversement du rapport mathématiques-musique, au principe même de la formalisation (vue comme rapport d'un type nouveau entre mathématiques et musique), traduit une reconnaissance mathématique de l'émancipation musicale, ce qui n'est pas rien. Rappelons que la Scolastique, à l'inverse, faisait l'éloge d'une musique sous tutelle de l'arithmétique pour y puiser l'exemple même de la légitime soumission requise des sujets face à leurs autorités de tutelle. Par exemple St-Thomas, au principe de sa *Somme théologique*, donne aux fidèles la musique en modèle de docilité : *« Sicut musica credit principia sibi tradita ab arithmetico, ita sacra doctrina credit principia revelata sibi a Deo »* [12]. Bien plus tard, un siècle avant Euler (et au moment même où Descartes – premier non-musicien à le faire – reconnaît l'émancipation des lois musicales), Mersenne plaide encore et toujours la cause de la même tutelle[13] :

« Théorème I. La Musique est une partie des mathématiques. [...] Théorème II. La musique dont je traite est subalterne à l'Arithmétique. [...] Il s'ensuit qu'un Arithméticien peut apprendre la Musique sans maître et qu'il n'y a nulle science si aisée puisque les meilleurs raisons consistent seulement à compter et à comparer ces nombres les uns aux autres. »

Euler – c'est aussi là sa grandeur de mathématicien – n'a nul besoin de contester l'autonomie durement conquise par la musique pour affirmer la puissance propre de la mathématique : tout au contraire, à ses yeux la mathématique fera d'autant plus la preuve de sa puissance spécifique de pensée qu'elle sera capable de donner

9 *Tentamen...*, Chap. II, p. 21.
10 ibid., chap. II, p. 22.
11 ibid., chap. II, p. 23.
12 *« Comme la musique s'en remet aux principes qui lui sont livrés par l'arithmétique, ainsi la doctrine sacrée accorde foi aux principes révélés par Dieu. »*
13 *Traité de l'harmonie universelle*, Livre premier.

forme proprement mathématique aux lois autonomes qu'elle rencontre et respecte et que, ce faisant, elle saura, pour son propre compte, en tirer énergie.

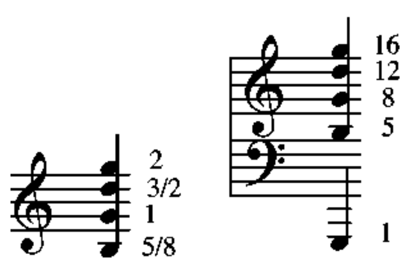
Comment Euler procède-t-il en matière de plaisir harmonique ?

Partons pour cela d'un exemple. Supposons qu'il s'agisse de formaliser, selon sa méthode, la suavité harmonique (le plaisir musical) de l'accord suivant :

Formalisation de la structure acoustique de l'accord

Euler va d'abord prendre mathématiquement mesure de la dimension proprement acoustique de cet accord en lui associant une série de nombres (rationnels) qui vont mesurer chaque hauteur du point de l'intervalle qu'elle forme avec la fondamentale de l'accord. En l'occurrence, il s'agit ici d'un accord de Sol majeur ($si - sol_1 - ré - sol_2$), en position de sixte (posé sur *si* en sorte que le premier intervalle à partir du bas est une sixte). On aura donc la suite de nombres suivants : $\{5/8\text{-}1\text{-}3/2\text{-}2\}$ puisque, par rapport au sol_1 à 392 Hz (juste en-dessous du *la* de référence – ici en position du « ténor »), le si (basse) est dans un rapport de 5/8 (sixte mineure), le *ré* (alto) de 3/2 (quinte) et le sol_2 supérieur (soprano) de 2 (octave).

La logique est donc de saisir ici l'accord $si - sol_1 - ré - sol_2$ comme suite d'intervalles centrés sur la fondamentale sol_1 ($si - sol_1 = 5/8, sol_1 - sol_1 = 1, sol_1 - ré = 3/2, sol_1 - sol_2 = 2$) et non pas comme un empilement d'intervalles (ce qui donnerait successivement de bas en haut : $si - sol_1$, $sol_1 - ré$, $ré - sol_2$). Euler se conforme ainsi à une lecture tonale – en terme de fonctions harmoniques – plutôt qu'« ensembliste » [14] de l'accord. Euler réduit alors cette suite de nombres rationnels en une suite de nombres entiers par multiplication du dénominateur commun (ici 8) en sorte d'obtenir la suite $\{5\text{-}8\text{-}12\text{-}16\}$. Cette nouvelle suite peut être comprise comme mesurant les intervalles avec cette fois un *sol* très grave qui constituerait la fondamentale implicite exacte[15] de l'accord initial selon le schéma suivant :



La suite de nombres entiers $\{5\text{-}8\text{-}12\text{-}16\}$ ainsi devenue irréductible (son pgcd est 1) formalise la structure proprement acoustique de notre accord.

[14] Au sens vulgaire que la *music theory* américaine a pu attacher à la *set theory*...

[15] Rappelons : la théorie des *partiels* harmoniques ne sera dégagée qu'un siècle plus tard, par Helmholtz (1863).

Formalisation d'un « exposant » synthétique

Euler construit ensuite, sur la base de cette liste de nombres, une représentation synthétique de l'accord qu'il va appeler son « exposant ». Pour cela, l'idée, très simple, est de prendre le ppcm de la suite précédente en le notant selon sa décomposition (unique) en nombres premiers. Dans notre exemple, cela donne : « exposant » de $\{5-8-12-16\} = 2^4.3.5\ [=240]$. L'accord devient ici indexé – « mesuré » – par un nombre entier unique – son « exposant » – qui résume sa complexité harmonique à laquelle l'oreille musicale va avoir à faire.

Formalisation de la suavité proprement dite

Enfin, Euler va édifier le troisième étage de sa formalisation – celui du plaisir proprement musical pris au décompte perceptif d'une suite de rapports acoustiques – en dégageant sa fonction de suavité. C'est là, bien sûr, l'acte le plus important de tout l'édifice. Sans qu'Euler l'ait explicité comme telle, on peut[16] cependant dégager de ses nombreux tableaux classificatoires la fonction « eulérienne » suivante[17] :

$$suavit\acute{e}(p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_n^{k_n}) = 1 + \sum k_i(p_i - 1)$$

qui, à un ensemble de hauteurs réductible au nombre $p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_n^{k_n}$ (dans notre exemple $2^4.3.5$) va associer le nombre (désormais noté en chiffres romains) $1 + \sum k_i(p_i - 1)$). Dans notre exemple, on aura :

$$suavit\acute{e}(2^4.3^1.5^1) = 1 + [4(2-1) + 1(3-1) + 1(5-1)] = 11$$

Notre accord aura donc une suavité harmonique qu'Euler note en chiffres romains : XI.

Remarquons que la suavité ainsi obtenue est bien synthétique : en particulier, elle n'est pas une simple addition des différents intervalles composant l'accord. Dans notre exemple :

$$si - sol_1 - r\acute{e} - sol_2 =$$
$$\text{sixte mineure}(si - sol_1) + \text{unisson}(sol_1 - sol_1) + \text{quinte}(sol_1 - r\acute{e}) + \text{octave}(sol_1 - sol_2)$$

mais

$$\text{suavité}(si - sol_1 - r\acute{e} - sol_2) \neq$$
$$\text{suavité(sixte mineure)} + \text{suavité(unisson)} + \text{suavité(quinte)} + \text{suavité(octave)}$$

ou

$$suavit\acute{e}(2^4.3.5) \neq suavit\acute{e}(2^3.5) + suavit\acute{e}(1) + suavit\acute{e}(2.3) + suavit\acute{e}(2)$$

car

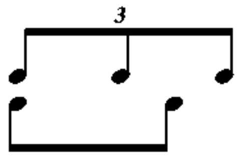
$$XI \neq VIII + I + IV + II$$

16 Cf. les travaux de Patrice Bailhache sur ce point, en particulier sa communication au colloque *Leonhard Euler, mathématicien, physicien et théoricien de la musique* (IRMA, Strasbourg - 16 novembre 2007 - `www-irma.u-strasbg.fr/article515.html`) :« *La "coïncidence des coups" à son paroxysme : Euler et la théorie de la musique* ».

17 Où les p_i sont des nombres premiers et les k_i des entiers.

La manière d'obtenir cette fonction est chez Euler à la fois simple et compliquée. Son aspect simple procède de la théorie alors en vogue de la concordance des coups (ou de la congruence des chocs) : son principe consiste à poser que, confrontée à une superposition de différentes régularités de « coups » [18], l'oreille décompte le nombre de frappes non simultanées.

Ainsi par exemple, confrontée à un rapport 3/2 qu'on noterait musicalement ainsi



l'oreille va compter quatre frappes différentes puisque la première d'entre elles est partagée par les deux séries de coups. Soit, en décomptant d'abord le coup commun et en l'ôtant ensuite à chaque série distincte superposée, la formule suivante :

$$\mathit{suavité}(2.3) = 1 + (2 - 1) + (3 - 1).$$

Il semble qu'à partir de là Euler ait dégagé sa formule générale de la suavité par récurrence selon l'idée générale que le plaisir musical pris à auditionner un accord serait inversement proportionnel au nombre des chocs perceptifs différents que cet accord génère. Mais, à bien y regarder, la formalisation retenue par Euler pour la suavité musicale s'écarte notamment d'un simple décompte perceptif (ainsi théorisé comme « coïncidence des coups »), ce qui peut se voir au simple fait que notre accord-test ($2^4.3.5$) a une suavité harmonique valant XI alors qu'il génère 22 coups non simultanés :

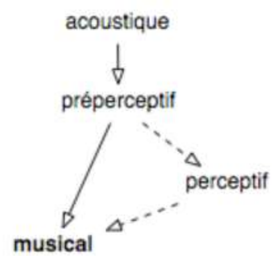
Cet écart peut s'exemplifier ainsi :

– La suavité de $\{3\text{-}4\}$ s'évalue comme suavité de ($2^2.3$) et vaut donc V alors que la suavité de $\{2\text{-}5\}$ s'évalue comme suavité de (2.5) et vaut donc VI : or, dans les deux cas, le nombre de coups non simultanés est le même : 6.

– À l'inverse, les suavités de ($2^2.3^2$) et (3.5) valent toutes deux VII alors que leurs rapports $\{4\text{-}9\}$ et $\{3\text{-}5\}$ génèrent respectivement 12 et 7 coups non simultanés.

[18] Pour Euler, la sensation du son procède d'une série de chocs sur le tympan *« qui reçoit les chocs de l'air et les transmet aux nerfs auditifs. [...] Le son n'est donc autre que la perception de chocs successifs »* , (*Tentamen*).

Il n'échappera à personne que cette disjonction tient mathématiquement à la différence entre $\sum({p_i}^{k_i} - 1)$, et $\sum k_i(p_i - 1)$ et théoriquement à la différence entre une formalisation de la perception (décompte des coups non simultanés) et la fonction eulérienne de la suavité puisqu'un strict décompte des coups non simultanés conduirait à la formule $1 + \sum({p_i}^{k_i} - 1)$[19]. Ce point exhausse donc la liberté mathématique avec laquelle Euler traite son « objet ». Comme le remarque Yves Hellegouarch, *« beaucoup d'autres fonctions auraient pu être proposées »* [20] ; il est remarquable que celle retenue par Euler assume une disjonction du musical par rapport au pur et simple perceptif : Euler formalise – implicitement – que le jugement musical porté sur un accord assure un décalage par rapport à sa simple évaluation perceptive. En ce point, on pourrait soutenir qu'Euler, en formalisant son « exposant » non selon des nombres premiers entre eux (4 et 9 par exemple) mais selon leur décomposition en puissances de nombres premiers ($2^2 et 3^2$), préstructure la perception (en vue de sa saisie musicale ultérieure) selon le schème hiérarchique suivant :



avec

Niveau	Formalisation
acoustique	{5-8-12-16}
pré-perceptif	$2^4.3.5$ (plutôt que 3.5.8)
perceptif (ici implicite et court-circuité)	$1 + \sum({p_i}^{k_i} - 1)$
musical	$1 + \sum k_i(p_i - 1)$

Face à cette contribution propre d'Euler à la formalisation de l'autonomie musicale, non seulement par rapport à l'acoustique mais, plus encore, par rapport à ce qu'on appellera, plus tard, la psycho-physiologie de la perception, le musicien pensif ne peut que rendre grâce à Euler d'avoir *mathématiquement* inscrit le germe de l'écart (musicalement décisif) entre écoute musicale et perception auditive au cœur même de sa formalisation.

Au total, Euler nous propose ainsi une mesure mathématique de l'intensité du plaisir musical pris à goûter une complexité perceptive enracinée dans une structure acoustique. Cette formalisation stratifiée peut se récapituler selon le tableau suivant :

[19] Comme dans $\mathbb{N}$ $kp \leqslant p^k$, la suavité sera toujours inférieure ou égale au nombre de coups non simultanés perçus.

[20] « L'"Essai d'une nouvelle théorie de la musique" *de Leonhard Euler* », publication de l'IREM de Caen.

« Objet » : niveau	Mesure	Notations	
de la *« cause »*	de sa structure accoustique élémentaire	Suite de nombres entiers	{5-8-12-16}
de *« l'image »*	synthétique de son degré de complexité pour le sens auditif	Nombre unique présenté selon sa décomposition en nombres premiers	$2^4.3.5$
du *« jugement »*	de son degré de suavité musicale	Numéro d'ordre noté en chiffres romains	XI

Une fois cette fonction de suavité élaborée sur les simples intervalles puis les accords plus complexes, Euler indique qu'elle vaudrait tout autant pour des suites d'accords ce qui l'autorise, chemin faisant, à soutenir qu'elle permettrait de prendre mesure de la suavité d'une pièce de musique dans son entier. Où Euler mobilise la puissance de systématisation que délivre en propre la nouvelle formalisation...

Évaluations

Comment évaluer une telle formalisation ? C'est en ce point que mathématiciens et musiciens vont discuter, et se disputer (voir, dès 1752, Euler et Rameau...) s'il est vrai que l'évaluation musicienne de cette formalisation va différer de son évaluation proprement mathématicienne.

Évaluation musicienne

Pour le musicien, le terrain d'épreuve d'une telle formalisation va forcément être la musique telle qu'il la pratique et la connaît. Son raisonnement sera donc le suivant : l'ordre ainsi mathématiquement produit concorde-t-il avec l'ordre musical des consonances-dissonances et des complexités harmoniques tel qu'un musicien a l'habitude de le pratiquer[21] ?

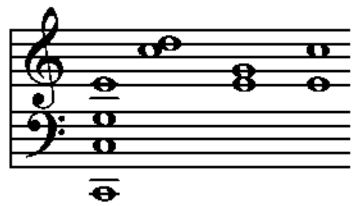
D'où, venant du musicien, une série d'objections plutôt que d'approbations : le musicien ne voyant guère, au premier abord, quels avantages tirer de cette formalisation dans la pratique de son art, préfère alors objecter :

– pourquoi donner à la quarte comme telle une plus grande suavité harmonique (degré V) qu'à la tierce (degré VII)[22] quand pour le musicien, grosso modo depuis la Renaissance, la tierce à l'inverse a plus de puissance consonante que la quarte ?

– pourquoi constituer des classes d'équivalences de suavité harmonique où vont se retrouver des harmonies assez disparates aux yeux des musiciens ? Par exemple pourquoi donner la même suavité (VIII) à la série des accords suivants qui, pour un musicien, apparaissent fort différents, ne serait-ce que par leur densité de notes :

[21] Euler tenait l'habitude spécifiquement musicienne en estime, la considérant non comme une paresse ou un arbitraire mais bien comme le produit heureux d'une discipline, cette discipline qui permet à la musique de faire le musicien, de façonner son corps et ses sens à l'exercice si singulier de ses lois propres : *« L'habitude est excellente, non pour persuader qu'une composition musicale est bonne, quand même elle déplairait à d'autres, mais pour exercer l'organe de l'ouïe et pour le perfectionner à tel point qu'il puisse se rendre compte de tout ordre qui s'y rencontre. »* (Préface du *Tentamen*).

[22] La quarte vaut 3/4 et sa suavité ($2^2.3$) vaut V. La tierce (majeure) vaut 4/5 et sa suavité($2^2.5$) vaut donc VII.



$$suavit\acute{e}(2.3.5) = suavit\acute{e}(2^3.3^2) = suavit\acute{e}(2.3.5) = suavit\acute{e}(2^3.5) = VIII$$

soit, successivement :

– un accord de Do majeur, dont la registration des quatre hauteurs est bien équilibrée : {1-2-3-5} ;

– une simple seconde majeure (9/8), isolée, et nettement dissonante, insuffisante à caractériser par elle-même quelque fonction tonale que ce soit ;

– une tierce mineure (6/5) et une sixte mineure (8/5) sonnant avec douceur et suggérant différentes fonctions tonales.

Le musicien, ne voyant guère quel parti musical tirer d'une formalisation pour lui aussi inattendue – mettre son plaisir en équation ! –, ne s'y rapportera donc spontanément que sous l'angle des inexactitudes.

Comment Euler répond-il à cela ? Il nous faut ici conjecturer : on ne connaît pas de réponse d'Euler à la réponse de Rameau de décembre 1752. Et à ma connaissance, Rameau fut le seul musicien d'envergure qui ait été confronté à cette théorie eulérienne du vivant de son auteur.

Une première manière de répondre à la place d'Euler consiste à dire : cette formalisation ne prétend pas exactement « mesurer » la suavité, mais seulement quantifier une de ses composantes, plus restrictivement encore indiquer des contours et dessiner des limites[23], comme le suggère par exemple cette remarque d'Euler :

« À l'aide de notre méthode, on pourra assigner jusqu'à un certain point les limites qui séparent ces deux classes... » [24]

Il est vrai que :

– les degrés de suavité sont utilisés par Euler comme ordinaux plutôt que cardinaux (la suavité d'ordre XIV n'est pas deux fois moindre que celle d'ordre VII[25]) ;

– Euler argumente, face à Rameau, que l'évaluation exacte de la suavité de la quarte dépend du contexte : *« J'y ai exposé sur la quarte à peu près le même sentiment que vous m'avez fait l'honneur de me marquer, ayant dit que ce n'est pas la quarte elle-même, mais d'autres tons qui l'accompagnent nécessairement dans nos systèmes usités de musique, qui la rendaient dissonante, ces sons y étant ajoutés ou actuellement ou sous-entendus. »* [26]

---

[23] C'est le point de vue soutenu par Franck Jedrzejewski dans sa communication (*Euler et les réseaux harmoniques*) du colloque *Leonhard Euler, mathématicien, physicien et théoricien de la musique* (IRMA, Strasbourg - novembre 2007).

[24] *Tentamen...*, p. 62.

[25] Et il ne s'agit pas davantage ici d'une mesure d'ordre logarithmique.

[26] À dire vrai, le problème proprement musical n'est pas tant ici d'expliquer en quoi la quarte peut devenir dissonante que bien plutôt l'inverse : à quelles conditions la quarte peut-elle être acceptée comme consonance, n'appelant donc pas de résolution ? Une de ces conditions musicales est par exemple que cette quarte n'apparaisse pas à la base de l'accord (voir les résolutions nécessaires des accords dits « de quarte et sixte »).

Mais ceci n'éponge nullement le différend musicien/mathématicien car si l'on peut soutenir en effet qu'à proprement parler, Euler ne formalise pas une mesure des consonances mais une mesure de leur ordre, il n'empêche que l'ordre alors musicalement établi des consonances s'ajuste mal à la mesure qu'en propose sa formalisation.

Rendu en ce point, l'important me semble de bien voir que l'évaluation par Euler de cette formalisation ne repose pas sur les mêmes principes que l'évaluation musicienne qui vient d'être esquissée.

Évaluation mathématicienne

L'idée importante est que, pour le mathématicien, le véritable terrain d'épreuve d'une telle formalisation sera moins la musique que la mathématique. Ce qui peut également se dire ainsi : pour Euler, la cible d'une théorie mathématique de la musique est essentiellement... la mathématique, et non la musique. Euler finalement évalue sa théorie à bien d'autres titres que son exactitude minutieuse en matière de pratiques musicales. Si Euler a fait l'effort du *Tentamen*, ce n'est pas pour « traduire » les traités musicaux d'harmonie et contrepoint en formules mathématiques, mieux aptes – parce que plus compactes, plus unifiées, plus systématiques – que les règles empiriques des musiciens à les instruire des lois de son art ; ce n'est pas essentiellement pour mettre les mathématiques de son temps au service de la musique.

Certes Euler pense que son travail théorique peut intéresser le musicien, en lui donnant envie d'aller y regarder plus loin. *« Nous abandonnons aux musiciens instruits [expertis musicis] le soin de développer ces recherches plus que nous ne l'avons fait et de les rendre applicables dans la pratique ».*[27] Précisément, il s'agit pour lui *« de montrer de quelle extension la musique est encore susceptible »* [28], Estimant ainsi en 1731 (*Tentamen*) que les musiciens travaillent jusqu'ici sur des accords peu complexes car n'utilisant que les nombres 2, 3 et 5, il examine la possibilité de tirer profit du nombre 7... pour finalement rejeter cette éventualité :

« Jusqu'à nos jours on n'a admis dans la musique que des accords dont les exposants sont comptés des seuls nombres 2, 3 et 5 [...] ce qui a fait dire autrefois au grand Leibniz que dans la musique on ne saurait compter au delà de 5. »

« Outre ces trois nombres, il serait assez difficile d'en introduire un autre dans la musique, savoir le nombre 7, parce que les accords dans lesquels entrerait celui-ci auraient un effet trop dur et contraire à l'harmonie. »

Trente ans plus tard (dans ses ouvrages de 1764[29]), prenant enfin mesure que les musiciens utilisent bien ce nombre dans leur « septième de dominante », Euler leur en rend désormais acte[30] : *« Le grand Leibniz a déjà remarqué que dans la musique on n'a pas encore appris à compter au-delà de 5. [...] Mais si ma conjecture a lieu, on peut dire que dans la composition on compte déjà jusqu'à 7 et que l'oreille y est déjà accoutumée. C'est un nouveau genre de musique qu'on a commencé à mettre*

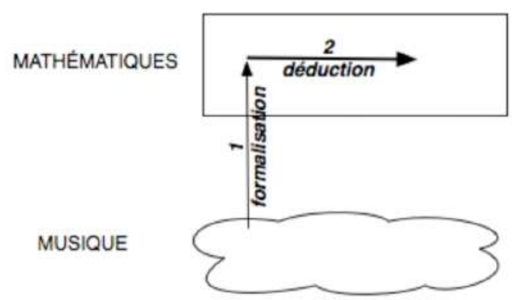
[27] ibid., Préface, p. vii.
[28] Cf. *Tentamen* (1731/1739).
[29] « Du véritable caractère de la musique moderne » et « Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique »
[30] Ipso facto, ceci suggère alors qu'il faudrait désormais que les musiciens aillent voir du côté du nombre 11, ce qui s'avère une tout autre paire de manches...

en usage et qui a été inconnu aux anciens. » [31] et réitère ce diagnostic en 1773 : *« L'accord de septième a été ajouté par les musiciens modernes. »* [32]

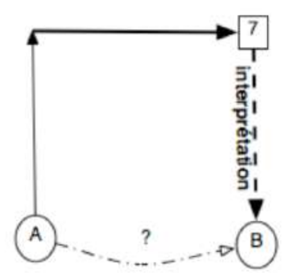
Ainsi Euler imagine bien mathématiquement une extension musicale, mais son imagination proprement musicienne l'en dissuade aussitôt, au moment même, pourtant, où, à l'inverse, l'imagination musicale des musiciens leur fait inventer cette même extension, à l'écart bien sûr chez eux de toute imagination d'ordre proprement mathématique...

Tout ceci indique bien que l'argument d'Euler (*montrer de quelle extension la musique est encore susceptible*) ne joue qu'un rôle tout à fait secondaire dans la justification de son travail mathématique ; l'enjeu ultime de ce travail de formalisation reste bien d'ordre mathématique, ce qui peut aussi se dire ainsi : pour Euler, l'intérêt de montrer de quelle extension la musique est encore susceptible est surtout de montrer ainsi la capacité de la mathématique... à montrer ce genre de choses, c'est-à-dire à faire rayonner tous azimuts sa propre puissance de pensée.

D'où, au total, l'idée suivante : la théorie eulérienne de la musique, comme à mon sens toute théorie mathématique de la musique, constitue une flèche qui a la musique pour source et la mathématique pour cible. Ceci peut être diagrammatisé de la manière suivante : la théorie eulérienne (comme toute théorie mathématique de la musique, j'y insiste) procède par enchaînement d'une formalisation (musique-mathématiques) et d'une déduction intra-mathématique qu'on peut représenter ainsi :



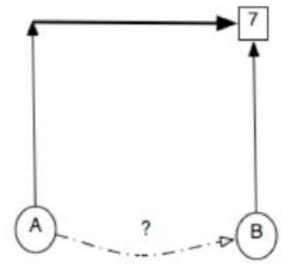
Lorsqu'Euler suggère alors au musicien d'examiner s'il n'y aurait pas parti musical à tirer d'un nouveau nombre premier (tel 7, ou, pourquoi pas, 11), il n'a pas, à mon sens, en tête le schéma suivant :



[31] « Conjecture... » (1764).

[32] « Des véritables principes de l'harmonie, représentés par le miroir musical »

qui soutendrait la question suivante : *« de nouveaux accords B pouvant découler de l'interprétation (dans l'espace musical) des nouvelles formules mathématiques déduites grâce au nouveau nombre premier 7, comment le musicien évalue-t-il le rapport de ces nouvelles entités B aux accords initiaux A ? »* mais bien plutôt ce schème-ci :



qui diagrammatise la question suivante : *« le musicien n'aurait-il pas à examiner s'il n'y a pas une extension de sa pratique harmonique telle qu'elle dégage de nouveaux accords B dont la formalisation requierrerait alors le nouveau nombre premier 7 (ou 11) ? »* Bref, quand Euler suggère au musicien que le nombre 7 pourrait l'intéresser, il ne revient pas sur l'autonomie reconnue à la musique ; il ne prétend pas utiliser sa formalisation pour réinstaller, ne serait-ce qu'en un point, la musique sous tutelle de la mathématique. Il ne cherche pas plus à « appliquer » sa théorie mathématique à la musique[33]. Il reste en tous points fidèle à sa nouvelle subjectivité formalisatrice : il mise sur le fait que ce que la mathématique lui permet de découvrir pour son propre compte de mathématicien doit avoir une correspondance dans le champ musical, à charge alors au musicien de savoir tirer parti, à sa manière propre, de cette suggestion venue des mathématiques : *« Nous abandonnons aux musiciens instruits le soin de développer ces recherches... »* .

Que la formalisation eulérienne de la musique ait pour cible véritable les mathématiques plutôt que la musique peut s'attester par l'examen plus systématique des notions mathématiques convoquées par Euler dans sa théorie de la musique – et qui ne se réduisent nullement à l'arithmétique des exposants :

– il y a la série des $n + 1/n$, au principe des intervalles musicaux, et dont par ailleurs Euler a développé le calcul des limites ;

– il y a l'introduction des logarithmes, pour la juste quantification des intervalles musicaux (Euler conseille bien sûr d'utiliser ici les logarithmes à base 2) ;

– il y a l'usage des fractions continues pour évaluer les rapports de logarithmes[34] :

$$\text{mutatur in hanc } 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{y}}}} \qquad \text{ad } 1$$

33 Pour la différence entre la *formalisation* du mathématicien et *l'application* de l'ingénieur, voir *De trois manières de théoriser la musique avec les mathématiques – Petit bilan mamuphi 1999-2008* (séminaire *mamuphi* ; ÉNS) ; à paraître dans la *Revue de synthèse* (`www.entretemps.asso.fr/Nicolas/2008/3theorisations.htm`).

34 *Tentamen...*, p. 75 du texte original en latin.

– il y a la convocation d'un problème de théorie des graphes à propos du « miroir musical » ;

– il y a également des problèmes d'ordre combinatoire...

À tous ces titres, on peut entendre sa manière diversifiée de théoriser mathématiquement la musique non pas comme une collection de récréations mathématiques mais bien comme une façon d'avérer en acte l'unité des mathématiques dans un contexte nouveau marqué par la dispersion de nouvelles disciplines.

D'où l'idée suivante : la théorie eulérienne de la musique sert ultimement la mathématique (plutôt que la musique), non seulement en servant de terrain d'épreuve à la nouvelle problématique de la formalisation mais, plus encore, en éprouvant combien cette nouvelle problématique est susceptible d'unifier la mathématique de son temps selon une même problématique. Et tout ceci prend tournure car le jeune Euler apprend ainsi à *faire* de la mathématique à partir de la musique. Finalement pour lui, l'enjeu de théoriser mathématiquement la musique est peut-être surtout de faire de la mathématique plus librement, ou, du moins, d'avoir ainsi l'occasion d'en faire dans un espace moins saturé de théorèmes, problèmes et conjectures, bref d'éprouver plus immédiatement la joie de penser mathématiquement par soi-même.

À ce titre plus encore qu'aux précédents, ce geste d'Euler dessine un avenir pour la mathématique (faire de la bonne mathématique à partir de la musique, plus encore que la théoriser) et fait signe vers les musiciens en leur suggérant qu'ils pourraient peut-être de leur côté, et pour leur propre compte, apprendre également à faire de la (bonne !) musique à partir de la mathématique...

ENSEIGNEMENT

ICMI, la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Michèle Artigue[1]

Présentation d'ICMI

La Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique, connue aujourd'hui sous l'acronyme ICMI pour International Commission on Mathematical Instruction fut créée lors du IV^{e} congrès international des mathématiciens qui eut lieu à Rome du 6 au 11 avril 1908, et Felix Klein, éminent mathématicien et promoteur d'une importante réforme de l'enseignement des mathématiques en Allemagne, en fut le premier président. Il faut cependant mentionner que la proposition de fonder un organisme international de ce type avait en fait été formulée dès 1905 par David Eugene Smith, professeur au Teachers College de New York nourrissant un fort intérêt pour l'éducation et l'histoire des mathématiques.

L'objectif initial donné à la Commission était de « faire une enquête et publier un rapport général sur les tendances actuelles de l'enseignement mathématique dans les divers pays ». La Commission, très productive pendant ses premières années, a connu par la suite des périodes de stagnation et de reprise liées aux événements dramatiques de la première moitié du XX^{e} siècle. En 1952, elle est devenue la sous-commission permanente de l'Union Mathématique Internationale (IMU) en charge des questions d'enseignement mathématique, puis, à la fin des années soixante, sous la présidence d'Hans Freudenthal, elle a connu une véritable renaissance. Depuis, ses activités se sont élargies et diversifiées, reflétant et contribuant notamment à la naissance d'une nouvelle discipline : la didactique des mathématiques.

Les activités de la Commission sont multiples mais elles restent assez mal connues des mathématiciens français, malgré l'existence d'une sous-commission nationale d'ICMI : la CFEM (Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques) au sein de laquelle la SMF et la SMAI sont représentées. C'est la raison d'être de la description synthétique des activités actuelles de la commission qu'en tant que présidente d'ICMI j'ai rédigée à l'intention des lecteurs de la *Gazette* de la SMF. Elle précède un compte-rendu du colloque qui a été organisé à Rome pour célébrer le centenaire d'ICMI en mars dernier rédigé par les collègues italiens Ferdinando Arzarello, Fulvia Furinghetti, Livia Giacardi et Marta Menghini, responsables de son organisation.

[1] Présidente d'ICMI.

Pour être informé régulièrement des activités d'ICMI, il suffit de s'abonner à sa Newsletter électronique qui paraît tous les deux mois, en alternance avec celle d'IMU. Pour les modalités d'abonnement et des informations plus détaillées sur ICMI, vous pouvez consulter le site web de la commission :

`http://www.mathunion.org/Organization/ICMI/index.html`

L'ambition d'ICMI est de fournir un forum international pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques partout dans le monde, un espace de réflexion, d'échange, de collaboration, favorisant la dissémination des idées et des résultats auprès de tous ceux qui sont directement concernés par l'enseignement des mathématiques : enseignants, formateurs d'enseignants, didacticiens, historiens des mathématiques et de leur enseignement, mathématiciens, responsables institutionnels et politiques...

Pour réaliser ces ambitions, ICMI a progressivement mis en place différentes activités et structures :

– Les congrès ICME qui se tiennent tous les quatre ans (en alternance de deux ans avec les congrès ICM) et constituent une activité essentielle d'ICMI. Le premier fut organisé à Lyon en 1969 sous la présidence de Hans Freudenthal, le 11^{e} aura lieu à Monterrey au Mexique cet été, du 6 au 13 juillet. Ce sera la première fois qu'un congrès ICME se tiendra en Amérique latine, la première fois aussi qu'il se tiendra dans un pays émergent et cela en fait un événement particulier et symbolique.

– Les études ICMI qui se proposent de faire le point sur l'état des connaissances sur des questions jugées importantes par la communauté internationale et pour lesquelles la réflexion, la recherche et les réalisations éducatives semblent suffisamment avancées pour rendre utile un tel travail de synthèse. Une fois la thématique choisie, pour chaque étude qui dure environ 4 ans, un comité international de programme est mis en place par le comité exécutif d'ICMI. Il prépare un document (Discussion Document) qui est largement diffusé et cadre précisément le travail visé par l'étude. Une conférence est ensuite organisée sur invitation à partir des contributions reçues et/ou sollicitées, et la production finale est un livre publié par Kluwer et aujourd'hui par Springer. Les premières études ont été lancées sous la présidence de Jean-Pierre Kahane dans les années 80 et nous sommes aujourd'hui en train de préparer le lancement des études 20 et 21. Les titres des dernières études reflètent la diversité des thèmes abordés : *Mathematics Education in Different Cultural Traditions : A Comparative Study of East-Asia and the West* (ouvrage paru en 2006), *Applications and Modelling in Mathematics Education* (2007), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics* (parution en 2008), *Challenging mathematics in and beyond the classroom* (parution 2008), *Digital technologies and mathematics teaching and learning : Rethinking the terrain* (parution en 2009), *Statistics Education in School Mathematics : Challenges for Teaching and Teacher Education* (étude menée en collaboration avec IASE : International Association for Statistical Education, conférence associée en juillet 2008 à Monterrey), *The Role of Mathematical Reasoning and Proving in Mathematics Education* (conférence associée en 2009), *Educational Interfaces between Mathematics and Industry* (étude menée en collaboration avec ICIAM : International Council for Industrial and Applied Mathematics et dont l'un des co-responsables sera Alain Damlamian, conférence associée en 2010), *(Re)sourcing the teaching and learning of mathematics in multilingual contexts* (sera lancée en juillet 2008).

À ces études s'ajoutent aujourd'hui deux projets spéciaux menés en collaboration avec IMU :

– Le *Pipeline project*, qui vise à étudier les dynamiques à l'œuvre dans les populations d'étudiants de mathématiques dans différents pays, de la transition secondaire-supérieur à l'accès au monde professionnel. Pour ce projet, un premier volet est engagé concernant 7 pays en partenariat avec leurs sociétés mathématiques. La France est l'un de ces pays et les responsables pour la SMF sont Pierre Arnoux et Daniel Duverney.

– Le *Felix Klein project*, qui vise à revisiter l'œuvre de Felix Klein à destination des enseignants de mathématiques : *Mathématiques élémentaires d'un point de vue avancé*, en prenant en compte l'évolution des mathématiques, des interactions entre mathématiques et autres domaines de connaissance, ainsi que l'évolution technologique.

– Les conférences et réseaux régionaux : le premier de ces réseaux : CIAEM (Comité Interamericano de Educación Matemática) a été créé en Amérique latine dès les années 50, à l'initiative de Marshall Stone. Le second a été créé en Asie, associé à l'organisation des conférences régionales EARCOME (East Asia Regional Conference on Mathematics Education). Les deux derniers, plus récents sont le réseau EMF (Espace Mathématique Francophone) qui s'est constitué à l'issue de la conférence EM2000 organisée par la CFEM à Grenoble pour l'année mondiale des mathématiques, et le réseau AFRICME qui concerne l'Afrique anglophone et est né en 2005. Tous ces réseaux organisent des conférences régulières, généralement tous les trois ans qui ont le statut de conférence régionale ICMI. Avec EMF s'est constituée une nouvelle notion de régionalité : celle de régionalité linguistique, cherchant à compenser les effets de la domination de l'anglais et des obstacles que cette domination met à la participation aux activités d'ICMI d'un certain nombre de pays, et en particulier aux enseignants de ces pays.

À ceci s'ajoutent les actions supportées par le *Solidarity Fund* d'ICMI, initiées sous la présidence de Miguel de Guzmán, ou celles menées en collaboration avec l'UNESCO comme l'exposition itinérante Experiencing Mathematics ! (Pourquoi les mathématiques !) réalisée et gérée par le Centre-Sciences d'Orléans qui connaît un énorme succès (`www.MathExpo.org`), avec le CIMPA ou PCMI (Park City Mathematics Institute). Au cours des dernières années, ICMI a cherché à élargir son champ d'action, notamment en direction des pays en voie de développement ou émergents. Contribuer à l'amélioration de l'enseignement des mathématiques dans ces pays, soutenir et faire connaître les nombreuses initiatives qui s'y développent, permettre aux enseignants, formateurs et chercheurs de ces pays de participer à ses actions, est pour ICMI aujourd'hui une priorité essentielle qui se manifeste dans toutes ses activités.

– Les groupes d'étude affiliés (ASG)

ICMI c'est aussi cinq groupes d'études affiliés qui ont été progressivement créés et organisent leurs propres activités :

– The International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics (HPM) ;

– The International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) ;

– The International Organization of Women and Mathematics Education (IOWME) ;

– The World Federation of National Mathematics Competitions (WFNMC) ;

– The International Study Group for Mathematical Modeling and Applications (ICTMA).

Deux de ces groupes : HPM et PME organisent en juillet au Mexique une conférence satellite du congrès ICME.

Enfin, pour terminer cette description synthétique, je voudrais mentionner les *ICMI Awards* qui ont été créés au début des années 2000, pour reconnaître l'excellence dans des travaux de recherche en éducation mathématique, et ont été décernés pour la première fois au congrès ICME-10 à Copenhague in 2004. Ces ICMI Awards sont au nombre de deux : la médaille Félix Klein récompense « a life long achievement » et la médaille Hans Freudenthal récompense « a major cumulative program of research ». Le didacticien français Guy Brousseau a été le premier récipiendaire de la médaille Félix Klein.

Comme je le soulignais dans ma conférence de clôture au colloque de Rome, au fil des années les relations d'ICMI avec la communauté mathématique ont eu tendance à se distendre et la participation des mathématiciens aux congrès ICME par exemple n'est plus ce qu'elle était lors des premiers congrès. Il y a à cela des raisons diverses. Les désillusions engendrées par la réforme des mathématiques modernes, l'émergence d'une communauté de recherche en didactique des mathématiques qui s'est progressivement forgé ses outils conceptuels et ses moyens d'expression, n'y sont sans doute pas étrangères. Face aux difficultés réelles que rencontre l'enseignement des mathématiques, de l'école élémentaire à l'université, il est pourtant important que l'on puisse compter aujourd'hui sur la mutualisation des énergies et des expertises, que l'on prenne des décisions s'appuyant sur des connaissances établies, et sur des réalisations dont les effets ont été sérieusement évalués et les conditions de fonctionnement soigneusement analysées. C'est à cette collaboration de toutes les expertises sans exclusive, c'est à rendre accessible au-delà de la seule communauté des chercheurs les connaissances qu'apporte la recherche, une fois leur solidité établie, en attirant l'attention sur la sensibilité de ce champ aux contextes et cultures, qu'ICMI souhaite contribuer.

Compte-rendu du colloque organisé pour le Centenaire d'ICMI (Rome 5-8 mars 2008)[2]

Pour célébrer le Centenaire de la fondation de l'ICMI, un colloque international intitulé *The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction. Reflecting and Shaping the World of Mathematics Education*

[2] Compte-rendu rédigé par Ferdinando Arzarello, Fulvia Furinghetti, Livia Giacardi, Marta Menghini.

(`http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/`) s'est tenu à Rome du 5 au 8 mars dernier. Le Comité scientifique international (IPC), composé de 16 membres, était présidé par Ferdinando Arzarello, alors que Marta Menghini représentait le Comité d'organisation au sein de l'IPC. Le Palazzo Corsini, siège de l'Académie Nationale des Lincei, et le Palazzo Mattei di Paganica, siège de l'Institut de l'Encyclopédie Italienne, ont constitué le merveilleux décor des travaux.

À partir d'une analyse des principaux thèmes liés à l'activité de l'ICMI tout au long de ses cent ans d'histoire, le colloque a tenté d'identifier de futures directions pour la recherche et des initiatives susceptibles d'améliorer le niveau de la culture mathématique dans les différents pays. Les travaux ont été organisés en 10 conférences plénières, 8 conférences parallèles, 5 groupes de travail et un après-midi réservé aux enseignants italiens, avec des interventions de spécialistes italiens et étrangers. Les conférences de cet après-midi ont été transmises en visioconférence dans 50 écoles secondaires, sur toute l'Italie. Divers thèmes ont été abordés lors des interventions : les origines de l'ICMI et le rôle joué par Klein et Smith, sa renaissance à la fin des années Soixante et l'émergence d'un nouveau domaine de recherche, la dialectique entre rigueur et intuition dans l'enseignement des mathématiques, les rapports entre mathématiques pures et appliquées et l'importance à attribuer à la modélisation dans l'enseignement et dans l'apprentissage de cette discipline, les interactions entre la recherche et la pratique, les relations entre les centres et les périphéries du monde, les rapports entre mathématiques et didactique des mathématiques, la formation des enseignants, les rapports de l'éducation mathématique avec la technologie, avec la société et avec les autres disciplines. Deux cents participants provenant de 43 pays et représentant toutes les régions du monde ont contribué à ce colloque et, tout comme il y a cent ans, les travaux se sont achevés par une excursion qui a conduit les congressistes à Tivoli pour la visite de la Villa d'Este et de la Villa Adriana, des lieux riches en histoire.

Le congrès a donné lieu à la création d'un site sur l'histoire de l'ICMI, réalisé par Fulvia Furinghetti et Livia Giacardi (`http://www.icmihistory.unito.it/`), qui permet d'en évoquer les événements les plus significatifs et les personnages-clés à travers des documents, des photos et des interviews. Le site est composé de six sections : Timeline, Portrait Gallery, Documents, The Affiliated Study Groups, The International Congresses on Mathematical Education, Interviews and Film Clips. La section Timeline présente les moments les plus importants de l'histoire de l'ICMI et chaque événement est documenté et accompagné de références aux sources originales. La section Portrait Gallery propose, quant à elle, une liste complète des *officers* de l'ICMI et les profils biographiques de ceux qui sont décédés, précisant le rôle de chacun d'eux au sein de l'ICMI, ses contributions à l'étude des problèmes liés à l'enseignement des mathématiques et publications associées.

Les Actes du colloque seront publiés par l'Encyclopédie Italienne dans la collection *Scienze e Filosofia*. Les conférences de l'après-midi italien viennent d'être publiées dans le volume IX, n° 25 de la revue *Progetto Alice*.

INFORMATIONS

La Fête de la Science et les mathématiques à Paris

Séverine Leidwanger, Matthieu Romagny, François Sauvageot

Depuis 2004, quelques mathématiciens de Chevaleret[1] vivent la riche expérience de confronter le monde des mathématiciens au grand public avec pour but avoué de changer l'image de mathématiques : qu'on ne demande plus « à quoi ça sert ? » mais « comment ça marche ? ». Pour ce faire, un bouquet de manifestations est proposé au public : interventions en milieu scolaire, projections de films, rallye, conférences... L'enjeu est multiple. Social, tout d'abord : reconnaître à tout le monde le droit de s'intéresser à des questions scientifiques, proposer d'autres approches que la transmission verticale, faire pratiquer la démarche expérimentale en mathématiques. Il s'agit aussi de faire se rencontrer mathématiciens et public : pour dissiper les peurs de chacun d'eux vis-à-vis de l'autre.

Des interventions dans des écoles maternelles et primaires

Lors de l'édition 2007, trois écoles élémentaires et quatre écoles maternelles ont été visitées.

Des équipes de deux à trois personnes par classe proposent une animation sur un thème issu de la magie, des jeux de stratégie, d'énigmes diverses... Pour pouvoir comprendre le phénomène observé, on est amené à expliquer quelles sont les mathématiques qui se cachent derrière. Ces activités peuvent être exploitées par l'équipe enseignante après le départ des animateurs : le but est aussi de créer un lien entre les enseignants du primaire et les chercheurs en mathématiques.

Il est important ici de s'attacher à la mise en scène. Pour capter l'attention jusqu'au dénouement, il faut s'assurer qu'on a éveillé suffisamment de désir de comprendre. La piste suivie doit être accessible mais un brin mystérieuse, être ancrée dans la réalité immédiate du public mais suggérer quelque chose d'inattendu. Cette mise en scène est le travail le plus ardu et nécessite de s'y attarder, pour s'assurer que les idées mathématiques ne sont pas passées à la trappe.

[1] Le site de Chevaleret regroupe des mathématiciens des Universités Paris VI, Paris VII et du CNRS.

Mathématiques et Magie

La magie, d'un point de vue mathématique est reliée à la question de la transmission de l'information : coder, transformer, envoyer, recevoir.

De la magie par l'intermédiaire de châtaignes murmurant à l'oreille de la *mathémagicienne* quel groupe a choisi une pomme, quel groupe une banane, et quel groupe un kiwi ...

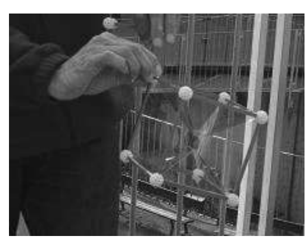
... aux explications mathématiques.

En fonction du nombre de châtaignes restantes, on peut savoir qui a pris quoi. On touche ici du doigt la notion de fonction injective et d'encodage, sans avoir besoin de la lecture : il suffit de constater que chaque choix induit un résultat différent.

Phil Defer est le *mathémagicien* le plus fin du monde : il passe à travers les feuilles de papier ... et il défie les enfants de faire comme lui. D'un point de vue mathématique, il s'agit de faire prendre conscience aux élèves qu'une surface d'aire finie contient un ruban de longueur infinie. On touche au passage à la notion de fractale.

Découverte de la géométrie

À l'aide d'eau savonneuse et de structures en plastique, fabrication de bulles de savon de formes diverses et interrogations géométriques : géométrie dans l'espace, surfaces minimales, etc.



Dès la grande section de maternelle, on peut s'interroger sur les formes qui vont créer de bonnes bulles, construire des patrons à plat et se demander s'ils vont donner naissance à un

« volume fermé ». Plus tard, on peut voir les plans médiateurs et autres objets géométriques en savon.

Des interventions dans des collèges

Lors de l'édition 2007, six collèges ont été visités.

Une équipe composée d'un ou deux animateurs présente aux élèves, par un exposé oral interactif ou une projection de vidéo, un « morceau (mathématique) choisi » pour son esthétique ou son pouvoir de questionnement. Cette présentation est suivie d'une discussion, durant laquelle on a aussi parlé de la présence des mathématiques dans les autres sciences, dans la vie quotidienne ... et des mathématicien(ne)s ! Elle permet de changer de point de vue : sur un sujet, sur les mathématiques en général. Il y a une dimension culturelle : quels sont les règles, les buts et les enjeux des mathématiques ?

Un mathématicien fait tirer cinq cartes à une personne de la classe, lui en laisse une et lui demande de la cacher. Un autre mathématicien arrive. On lui montre les quatre autres cartes tirées et il annonce alors la carte cachée.

Objectif mathématique : quelle information peut-on transmettre avec le moins de communication possible ? Peut-on la coder de façon à la rendre uniquement intelligible par le destinataire ? Trouver le code utilisé ici.

Un Rallye Mathématique

Lors de l'édition 2007, 115 bulletins réponses.

Les stands de ce grand rallye mathématique sont répartis dans le quartier latin (autour de Jussieu). Le public (de 7 à 77 ans) est invité à répondre à des questions et défis mathématiques ludiques de trois niveaux différents suivant l'envie du participant. L'accent est mis sur la manipulation : toucher et manipuler pour comprendre. Et ensuite démontrer ! De nombreux lots sont distribués, offerts par des éditeurs, des musées...


Des conférences

– « *Petits problèmes, grandes questions* » Quelques problèmes dont la formulation est compréhensible par tout le monde, mais qui ont fait sécher tous les mathématiciens professionnels jusqu'à maintenant. Par Emmanuel Ferrand, enseignant-chercheur à l'Université Paris VI.

– « *L'aventure des nombres* » Les Grecs ont découvert, voici presque 2500 ans, un phénomène scientifique étonnant : certaines grandeurs géométriques, comme par exemple la diagonale d'un carré et son côté, sont incommensurables. En d'autres termes on ne peut pas trouver de longueur, si petite soit-elle, telle que le côté et la diagonale soient tous deux des multiples entiers de cette longueur. Cette découverte signifie encore que certains algorithmes (comme l'algorithme d'Euclide) ne convergent pas toujours quand on les applique à un couple de grandeurs arbitraires. L'époque moderne a connu une révolution similaire, résultat des travaux des logiciens du vingtième siècle et en particulier de Kurt Gödel : il n'y a pas d'automate, si complexe soit-il, qui permette de décider si un énoncé quelconque de l'arithmétique est vrai ou faux. Cela nous conduit à une conclusion troublante : il existe des énoncés de l'arithmétique qui sont vrais, mais indémontrables. Par Gilles Godefroy, directeur de recherche au CNRS.

Vous trouverez de plus amples descriptions aux adresses suivantes :

`http://www.institut.math.jussieu.fr/FS2007/`
`http://www.math.jussieu.fr/~leidwang/siteirem/siteirem.html`

Et en 2008 ?

Nous commençons à nous organiser pour l'édition 2008 de la Fête de la Science. Toutes ces activités seront à nouveau proposées, alors si vous vous sentez l'âme d'un *mathémagicien*, d'un *magémathicien* ou tout simplement d'un mathématicien, venez nous rejoindre !

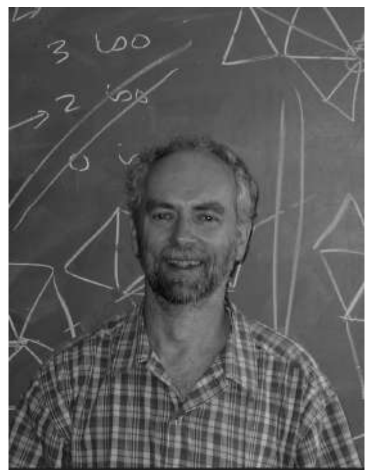
La prochaine fête de la science aura lieu du 14 au 23 novembre 2008
`http://www.fetedelascience.fr/`

CARNET

Pierre Leroux

(1942 – 2008)

Xavier Viennot



Après une mémorable chute de neige, par un beau dimanche ensoleillé québécois, Pierre Leroux s'en est allé le 9 mars 2008 après une courte et fulgurante maladie. Il a beaucoup œuvré pour le développement de la coopération mathématique franco-québécoise, en particulier dans le domaine de la combinatoire, en interaction avec les autres domaines des mathématiques pures, l'informatique et la physique statistique.

J'ai connu Pierre à San Diego (UCSD[1]). Tous les deux nous passions l'année scolaire 1978/79. C'était une grande année avec beaucoup de visiteurs en combinatoire (Dominique Foata, Anders Björner, Rod Canfield,...) et, avec Adriano Garsia et d'autres, nous suivions assidûment le cours de Richard Stanley. Nous avions eu droit en primeur, à ce qui allait devenir vingt ans plus tard le livre de référence en combinatoire énumérative et algébrique[2].

Pierre, qui venait du monde des catégories et des foncteurs, a attrapé la passion de la combinatoire et, revenu dans son département à l'UQAM[3], l'a communiquée à ses collègues et amis. C'est ainsi que naquit le Groupe de recherche en Combinatoire de l'UQAM. C'est également à cette époque, au début des années 80 qu'André Joyal, autre membre de l'UQAM, publie son article séminal sur les « *espèces de structures* ». Cette « *philosophie* » de la combinatoire des séries génératrices exponentielles, permettant de formaliser la notion d'objet combinatoire et leurs diverses opérations, va animer le groupe combinatoire pendant des dizaines d'années. Je donnerai plus bas une idée intuitive de cette « *philosophie* », voir aussi l'article de Gilbert Labelle pour une explication plus détaillée et complète. C'est le début du fameux séminaire combinatoire de l'UQAM, qui poursuit sa route depuis trente ans.

---

1 Université de Californie à San Diego.
2 2 volumes chez Cambridge University Press.
3 Université du Québec à Montréal.

Pour ma part, j'avais déjà attrapé le *« virus combinatoire »* avant de venir à San Diego grâce à mon bon Maître M.P. Schützenberger. À mon retour en France, j'étais décidé à venir renforcer la petite équipe de combinatoire créée par Robert Cori à Bordeaux, au sein de l'équipe d'Informatique du département *« Maths-Info »* de l'Université de Bordeaux. Pendant les dizaines d'années qui ont suivi, une coopération s'est installée entre les deux groupes de chaque côté de l'Atlantique. Nous nous aidions mutuellement pour développer cette *« nouvelle combinatoire »* dans nos universités respectives, en interaction fructueuse avec le contexte de l'Informatique. C'est ainsi que le groupe de recherche en Combinatoire de l'UQAM est devenu en 1989 le LACIM[4], tout premier laboratoire à Montréal, grâce à l'impulsion créatrice et constante de Pierre Leroux, qui est devenu naturellement son premier directeur. À Bordeaux, notre groupe avait aussi grossi et était devenu une composante forte du LaBRI[5].

Deux événements ont jalonné ces parcours conjoints. Tout d'abord, Pierre Leroux et l'équipe du futur LACIM, ont organisé à Montréal en 1985 un grand colloque international de Combinatoire (énumérative et algébrique), suivi d'une session spéciale de combinatoire au colloque des mathématiciens canadiens à Québec. Tous les *« grands »* du domaine étaient là. Les comptes rendus des deux rencontres ont donnés lieu au *« Lecture Notes in Mathematics »* numéroté 1234 (numéro qui convient bien à un colloque dédié à *« compter »*).

Le deuxième événement a eu lieu à Bordeaux en 1991 avec le lancement véritable de la série de colloques internationaux appelés SFCA/FPSAC[6]. Au début, avaient déjà eu lieu deux rencontres à Lille, puis Paris, sous l'impulsion de Gérard Jacob, Christophe Reutenauer, Gérard Duchamp et Daniel Krob, réunissant la communauté des gens passionnés de séries formelles non commutatives. Ces séries sont à la base d'une formalisation algébrique, due à M.P. Schützenberger, de la notion de langages et automates issus de l'informatique théorique, et aussi sont à la base d'une approche algébrique de la théorie du contrôle et des équations différentielles en régime forcé (c'est-à-dire l'école de Michel Fliess à Paris, suivi par Gérard Jacob à Lille). La troisième rencontre a eu lieu à Bordeaux, organisée par Maylis Delest. Avec Jean Berstel, Pierre Leroux était de passage lors de l'organisation préliminaire et, sous son impulsion et sa guidance, il a été décidé d'élargir le thème de ces rencontres. C'est ainsi qu'est née cette série de colloques, qui est devenue le grand colloque mondial annuel de référence dans le domaine de la combinatoire énumérative et algébrique, en relation avec la physique et l'informatique théorique, avec comité de sélection des articles et posters, rapporteurs, conférenciers invités, etc. À Bordeaux, la rencontre était suivie d'un *« atelier franco-québécois de combinatoire »* et Pierre avait réussi à faire venir au grand complet toute l'équipe du LACIM.

Le 4^{e} colloque a eu lieu bien naturellement à Montréal et Pierre a pris une part très active dans l'organisation et la continuité de ces colloques. Il était membre permanent du comité permanent. Au début, il y avait une alternance entre un lieu européen, et un lieu nord américain, puis le colloque s'est promené du côté de Melbourne, Tienjin et cette année à Valparaiso. Soulignons, que la solide organisation

[4] Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématiques.
[5] Laboratoire Bordelais de recherche en Informatique.
[6] Séries Formelles et Combinatoire Algébrique/ Formal Power Series and Algebraic Combinatorics.

franco-québécoise a permis de mettre en valeur la francophonie. Même maintenant le français reste une des langues officielles, et les auteurs se doivent toujours de faire un résumé en anglais et en français. Pierre était un ardent défenseur de l'identité québécoise et du français, tout en étant un fin diplomate au niveau international.

L'organisation de ces colloques n'est qu'un exemple des excellentes qualités d'organisateur de Pierre, conjuguées avec une parfaite combinaison d'opiniâtreté et de diplomatie. Pierre pouvait obtenir, dans la douceur, tout ce qu'il voulait. Il faisait les choses dans la discrétion et l'efficacité, en laissant de la place pour les autres autour de lui. Le LACIM avec le CIRGET[7] sont les deux *« laboratoires ».* de l'UQAM. Le LACIM a toujours fait une place prépondérante aux jeunes, à l'éducation, à l'entraide et sa convivialité est légendaire. Le dévouement de Pierre pour les jeunes, les visiteurs, ses collègues, était sans bornes. C'était pour moi toujours un rayon de soleil d'amitiés et de recherches fructueuses d'aller à Montréal.

La coopération entre le LABRI à Bordeaux et le LACIM à Montréal a été continue, fructueuse à tous points de vue, puisque non seulement des articles conjoints ont vu le jour, mais aussi des couples se sont formés et des bébés sont nés. Certains québécois du LACIM se sont installés en France, comme Guy Melançon, professeur à Montpellier et maintenant au LaBRI, d'autres du LaBRI sont devenus professeurs au LACIM, puis à Vancouver comme Cédric Chauve. Nous avons eu parfois des soutiens officiels et des financements au titre de la coopération franco-québécoise, avec comme responsables au début Pierre et moi-même, puis ensuite Srecko Brlek (LACIM), André Arnold et Olivier Guibert (LABRI), dans le cadre de deux PICS[8]du CNRS. Cette coopération a parfois inclus certains membres des équipes de théorie des nombres de Bordeaux et de Québec. Pierre a aussi développé une coopération avec d'autres centres combinatoires comme ceux de San Diego, Minnesota, Erlangen, Orsay, Florence, Melbourne.

Mais revenons un peu à cette *« philosophie »* qui a animé (et anime toujours) le groupe combinatoire de Montréal depuis bientôt trente ans. Pour résumer et expliquer intuitivement en termes simples, il s'agit au départ de formaliser la notion d'*« objet combinatoire »*, ainsi que les opérations combinatoires que l'on peut faire dessus, tel que ces opérations soient le pendant au niveau combinatoire des opérations classiques sur les séries génératrices (somme, produit, dérivée, substitution, etc.). On parle d' *« espèces de structures »* vivant sur un ensemble fini donné à n éléments, comme par exemple l'espèce arbre, permutation, cycle ou encore graphe planaire, etc. Si l'on change l'ensemble sous-jacent, il y a une notion de *« transport de structure »* et, pour une espèce donnée, le nombre de structures vivant sur un ensemble donné ne dépend que du cardinal n de cet ensemble, ce qui permet de définir la série génératrice exponentielle de l'espèce. La *« combinatoire énumérative classique »* (récurrence, calculs sur les séries génératrices,...) apparaît alors comme la *« projection »* au niveau des calculs, de propriétés de structures au niveau des objets combinatoires. Des opérations sont définies en toute généralité au niveau des espèces de structure. Pour que l'outil *« espèces de structures »* prenne toute sa puissance, les espèces sont *« pondérées »* (par des poids *« formels »*, c'est-à-dire des monômes ou des polynômes) et le nombre a_n de structures d'un

[7] Dirigé au début par François Lalonde.
[8] Programme International de Coopération Scientifique.

certain type F est remplacé par un polynôme : la somme des poids de toutes les structures vivant sur un ensemble ayant n éléments.

Un exemple est donné par la théorie que nous avons déroulée sur plusieurs années avec Pierre sur une « *théorie combinatoire des équations différentielles et du calcul intégral* ». Partons de l'exemple très simple de la fonction tangente solution de l'équation différentielle suivante

$$y' = 1 + y^2 \ ; y(0) = 0 \ .$$

Il est bien connu que les coefficients de la série génératrice exponentielle sont des entiers et que ces entiers dénombrent certaines permutations, appelées alternantes, découvertes par Désiré André dans les années 1880. La théorie des espèces permet d'élever la résolution de cette équation au niveau des objets combinatoires. Pierre et ses disciples aiment dire qu'il suffit d'écrire l'équation sous la forme intégrale $y = t + \int_0^t y^2(t)dt$, puis pour relever cette équation au niveau combinatoire, il suffit de changer les lettres minuscules par des majuscules (!), c'est-à-dire considérer l'équation (au niveau des objets combinatoires) $Y = T + \int_0^T Y^2(T)dT$. Tout ceci a un sens au niveau de la théorie des espèces. Cette équation définit de manière récursive une classe (une espèce) du type Y. Il s'agit des « *arbres binaires croissants complets* ». Une projection de ces arbres, bien connus des informaticiens, permet de retrouver les permutations alternantes. La méthode peut en fait être étendue dans un cadre tout à fait général, pour des équations (et aussi des systèmes) du type $y' = f(y, t)$, où f est un polynôme ou une fonction analytique en y et t. Mieux, si l'on considère l'équation de la théorie du contrôle $y' = y^2 + u(t)$ (u est une fonction nommée « *entrée* » , y est la « *sortie* »), on sait que la solution peut s'exprimer comme une somme infinie d'intégrales itérées. C'est la théorie de Michel Fliess évoqué ci-dessus avec Gérard Jacob. Alors la combinatoire des arbres permet de calculer les coefficients de chacune de ces intégrales itérées. C'est le début d'une collaboration heureuse et fructueuse que j'ai eu la chance d'avoir avec Pierre Leroux pendant de nombreuses années. Pour plus de détails, voir le livre « *Combinatorial species and tree-like stuctures* » écrit par Pierre, en collaboration avec Gilbert Labelle et François Bergeron, véritable « *bible* » sur le sujet.

Mais revenons à Pierre. Plus récemment, durant ces dernières années, Pierre s'est beaucoup investi dans les rapports entre la combinatoire et la physique statistique, notamment avec les « *développements de Meyer* ». Il a assimilé le langage des physiciens et a montré tout l'intérêt que pouvait avoir les espèces de structures dans certains développements (au deux sens du mot !) de la physique statistique. L'année dernière 2007, il a pris une part très active dans la grande année combinatoire du Centre de Recherche Mathématique (CRM) de Montréal, pilotée par le LACIM. Notamment, il a organisé un « *atelier* » et une « *école* » (l'un à l'université de Montréal, l'autre dans une auberge perdue au milieu de la neige des Laurentides) sur le thème « *Combinatoire et Physique* » qui a réuni des jeunes chercheurs, ainsi que les meilleurs spécialistes du domaine. Cette année 2008, à nouveau deux semestres spéciaux « *Combinatoire et Physique* » ont lieu, l'un au « *Isaac Newton Institute* » à Cambridge, l'autre au « *Erwin Schrödinger Institute* » à Vienne. Pierre organisait avec Abdelmalek Abdessalam un atelier en avril à Cambridge et devait venir participer un mois à Cambridge et un mois à Vienne dans ce domaine actuellement en pleine action. L'un des meilleurs hommages que pouvait avoir Pierre pour sa vision de l'introduction de la théorie des espèces dans la physique statistique est contenu dans le dernier exposé de l'atelier de Cambridge par William Faris de l'université d'Arizona : *« A Rosetta stone : Combinatorics, Physics, Probability »*. [9]

Pierre était aussi un très grand sportif, amoureux de la nature. Il adorait partir en expédition aussi bien l'hiver avec ses skis de fond, que l'été avec son canot pour les descentes de rivières. Il a co-fondé la Fédération québécoise de canot-kayak et a été très longtemps son président avant de donner la main et transmettre sa passion. J'ai eu la chance de participer à de nombreuses expéditions, tant en hiver qu'en été, sous sa guidance. Comme pour l'organisation de colloques ou de semestres spéciaux, Pierre excellait pour l'organisation d'expéditions. Tout était minutieusement préparé et planifié. C'était un régal de partir avec lui. Les souvenirs d'une expédition dans le Grand Nord sont gravés d'une pierre blanche dans ma mémoire : trois semaines de descentes de rapides au Nunavik, du Lac des Loups Marins à la baie d'Ungava, suivant un ancien itinéraire inuit ou amérindien, permettant de passer de l'océan Arctique à l'océan Atlantique. Pierre avait tout préparé durant toute une année, la longue négociation pour l'hydravion qui devait nous larguer sur le Lac des Loups Marins, le transport des deux canots à Kuujjuak, la *« capitale »* du Nunavik, la nourriture lyophilisée, des mois à l'avance. Un sac avec des sous-sacs était prévu pour chaque repas, tout était emballé, avec la recette du jour, les épices, les menus, la date, le planning pour les trois semaines, etc. Après chaque rapide, Pierre prenait des notes pour contribuer à un futur guide sur les rapides du Québec. Soir et matin, c'était la cuisine au traditionnel feu de bois allumé (même sous la pluie) avec de l'écorce de bouleau (québécois) bien sèche. Pierre a entraîné dans sa passion du canot-camping les étudiants, collègues du LACIM et les nombreux visiteurs.

Les expéditions hivernales étaient aussi enchantantes, conviviales et chaleureuses qu'étaient parfois les très grands froids. Là encore, tout était soigneusement organisé et c'était un bonheur de partir avec Pierre dans la féerie de la nature hivernale. Une fois, nous étions arrivés fatigués en fin d'après midi à un refuge. Une des participantes avait fait une mauvaise chute et il fallait l'évacuer. Immédiatement, Pierre est parti avec un compagnon vers l'endroit *« civilisé »* le plus proche pour aller chercher du secours qui est arrivé le lendemain sous forme d'hélicoptère.

Pierre adorait la nature et tout était prétexte à vivre en harmonie avec elle. En ville, hiver comme été, son vélo ne le quittait pas. Lors de colloques lointains, dans n'importe quel coin de la planète, il amenait cartes, chaussures et matériel pour randonner. Une année, Il y avait eu un hiver au Québec avec des *« pluies verglaçantes »*. Usuellement le phénomène ne dure que quelques heures, tous les arbres se couvrent de glace. Cette année-là, le phénomène avait duré cinq jours. Ce

[9] *Abstract : The purpose of this talk is to relate enumerative combinatorics, statistical physics, and probability. Specifically, it will explain how the theory of species of structures is exactly what is needed for the equilibrium statistical mechanics of particles. Thus, for example, the condition that the rooted tree equation has a finite fixed point is precisely equivalent to the Kotecky-Preiss condition used in the theory of cluster expansions. Furthermore, there is a fixed point equation for rooted connected graphs from which the rooted tree bound follows immediately. The talk will conclude with an indication about how the recent Fernandez-Procacci cluster expansion condition corresponds to an enriched rooted tree bound. Conclusion : Combinatorics and mathematical physics tell the same story, perhaps in different languages.*

fut une catastrophe, la plupart des lignes électriques, couvertes de verglas étaient par terre et Montréal était paralysé par le froid et l'obscurité. Comme le disait sa famille lors des funérailles, ces jours-là Pierre jubilait de vivre en camping dans sa propre maison, avec sa lampe frontale, son petit réchaud et son sac de couchage. Il était heureux comme un roi !

Pierre laisse sur le chemin son épouse, Madeleine, après 44 années de complicité, juste à l'orée d'une retraite bien méritée et pleine de projets. Il a transmis a ses deux filles Marie-Claude et Sophie de belles valeurs, le goût de l'excellence et des voyages, le souci de la rigueur, et bien sûr il les a initiées aux plaisirs du plein air, avec ses joies et ses affres parfois avec le blizzard par -20°C ou les fameux moustiques, mouches noires et autres joyeusetés typiquement québécoises. Pierre était aussi un grand'père à l'image de ce qu'il a toujours été avec ses nombreux élèves : dévoué, présent, aimant et généreux, faisant partager à Marie-Eve et Philippe de bons moments en ski de fond, en canot, en randonnée ou des mathématiques, et avec la petite Camille tout son amour de grand'père.

J'ai eu la chance d'être là, au Québec, en février 2008, lorsque sa maladie s'est déclarée et qu'il a dû aller à l'hôpital. Le verdict des médecins était tombé et Pierre savait qu'il ne lui restait que quelques jours à vivre. Nous avons pu nous dire au-revoir. Pierre avait accepté son départ et a donné jusqu'au dernier moment ses instructions, pour sa dernière élève Amel Kaouche et son papier accepté à FPSAC Valparaiso, pour le colloque *« Combinatoire et Physique »* qu'il organisait avec A. Abessalam en avril au Newton Institute à Cambridge. Il est parti en paix après avoir goûté toutes les saveurs d'une vie bien remplie.

Le colloque d'avril dernier à Cambridge lui fut dédié. Des vidéos sont visibles sur le site de l'Institut (page *« web seminars »*). Le prochain FPSAC à Valparaiso lui sera dédié. Pierre était aussi un grand ami des *« Séminaires Lotharingiens de Combinatoire »* (SLC), ayant lieu deux fois par an en France, Italie, Allemagne et quelques pays voisins. Le prochain séminaire (le 61^{e}, au Portugal) en septembre lui sera également dédié, et un numéro spécial de la revue électronique SLC lui sera consacré sous la direction de Volker Strehl.

Je terminerai avec un *« poème »* en hommage à Pierre, poème qui a été lu aux funérailles de Pierre à Longueuil le samedi 15 mars, au 60^{e} SLC à Strobl en Autriche en mars dernier, et que j'ai mis en images avec des photos de Pierre au début de mon exposé du 7 avril 2008 au Newton Institute[10].

Quelques références[11]

– le site du workshop *« Combinatorial identities and their applications to statistical mechanics »* dédié à Pierre Leroux, organisateur de ce workshop. Isaac Newton Institute, `http://www.newton.ac.uk/programmes/CSM/csmw03.html`

– Voir les vidéos des exposés et des hommages rendus à Pierre, notamment les exposés de Gilbert Labelle (avec un hommage par Adelmalek Abdesselam au début du colloque), Xavier Viennot, David Brydges, Alan Sokal et Christian Krattenthaler sur le site : `http://www.newton.ac.uk/webseminars/pg+ws/2008/csm/csmw03/`

[10] *« Introduction to the theory of heaps of pieces with applications to statistical mechanics and quantum gravity »*. Référence vidéo en fin de texte.

[11] Voir aussi la liste exhaustive donnée par Gilbert Labelle.

– le site de Pierre Leroux : http://www.lacim.uqam.ca/~leroux/

– le site du LACIM : http://www.lacim.uqam.ca/

– le site du (20e) colloque FPSAC'08 à Valparaiso, Chili (du 23 au 27 Juin 2008) dédié à Pierre Leroux : http://inst-mat.utalca.cl/fpsac2008/

– le site du Séminaire Lotharingien de Combinatoire et de l'annonce du 61e SLC à Curia, Portugal (21-24 Septembre 2008) dédié à Pierre Leroux :
http://www.mat.univie.ac.at/~slc/

Remerciements pour leurs écrits inspirant :
à Madeleine, Sophie et Marie-Claude,
Gilbert Labelle, Christophe Reutenauer,
François Lalonde, Srecko Brlek

Hommage à Pierre

C'est l'hiver, le soleil joue avec les cristaux de neige qui virevoltent au vent
Les épinettes chantent, se courbent et nous regardent tendrement
Les skis martèlent la trace gelée
Tu es l'ami Pierre qui glisse et nous entraîne sur le chemin poudré.

C'est le soir, la bougie illumine les ombres
L'amitié des cœurs autour des bols fumant
Le velours de la nuit glaciale coule sur les étoiles immaculées
Tu es l'ami Pierre qui veille et nous réveille.

Dans ma tête les délicieux souvenirs dansent et s'entrechoquent
Monts-Valin, Saguenay, Charlevoix, Chic-Chocs...
Et bien d'autres des Rocheuses aux Pyrénées
Tu es là, le sourire paisible, entre neige et cosmos.

C'est l'été, appel, écart, R2, appel, R3, bac avant, chaque seconde compte
La peur s'alourdit, l'attention redoublée, le rapide gronde et se rebelle
Le canot fend les vagues et les souvenirs se gravent à jamais
Tu es l'ami Pierre qui guide, apaise et conduit sur l'écume.

C'est la nuit, les flammes dansent sur la plage
Un rayon de Jupiter émerge de la rivière des Inuits
Entends-tu le loup hurler dans la nuit du grand Nord ?
Tu es l'ami Pierre dans les draperies de l'aurore boréale.

C'est l'automne, les couleurs des arborescences rivalisent d'élégance
Arborescences différentielles, noyau des intégrales itérées
Entends-tu bruisser les bourgeons des éclosions combinatoires ?
Tu es l'ami Pierre qui navigue sur les cimes mathématiques.

C'est l'hiver, la neige est abondante et la douleur s'installe
De ta grande fenêtre, une dernière éclipse de lune
Une dernière embrassade, une heure intense et poignante,
Le moment du départ approche, un dernier au revoir,
Tu es mon ami Pierre qui est gravé dans mon cœur.
Je ne t'oublierai jamais.

Avec infiniment de reconnaissance,

Ton ami Xavier
Isle-Saint-Georges
le 12 mars 2008

La carrière mathématique de Pierre Leroux

Gilbert Labelle

Pierre Leroux a été professeur au département de mathématiques de l'université du Québec à Montréal (UQÀM) de juin 1971 à août 2007, moment où il a pris sa retraite. Loin de cesser ses activités de recherche et d'encadrement d'étudiants, il les avait reprises de plus belle jusqu'au moment de son décès, tout-à-fait inattendu, le 9 mars 2008.

Les activités mathématiques proprement dites de Pierre Leroux débutent au milieu des années 60 par ses travaux en algèbre et, plus particulièrement, en théorie des catégories. À l'université de Montréal, il publie, en 1965, un mémoire de maîtrise [1] sur *l'existence des enveloppes injectives* puis, en 1970 sous la direction de Jean-Marie Maranda, une thèse de doctorat remarquable [2] sur *l'extension à des catégories de morphismes d'une paire de foncteurs adjoints*. En 1970-71 il travailla comme chercheur boursier post-doctoral du CRSNG (Canada), au Laboratoire de mathématiques à la Faculté des sciences d'Orsay (France).

Viennent ses trois premiers articles de recherche publiés dans des revues scientifiques de niveau international : le premier [3], en 1970 en collaboration avec Paul Ribenboim, sur *les dérivations d'ordre supérieur dans les catégories semi-additives*, suivi en 1971-72, de deux publications [4, 5] portant respectivement sur *les structures d'effacement*, et une *caractérisation de la catégorie des groupes*.

Il introduit, en 1975, une intéressante extension, au niveau des catégories, de l'inversion de Möbius qui était jusqu'alors confinée à la théorie des nombres, et plus généralement, au contexte des algèbres d'incidence. Il créa ainsi une nouvelle classe de catégories qu'il a appelées les *catégories de Möbius* [7]. De 1980 à 1982, en collaboration avec Mireille Content, François Lemay et Jean Saraillé, il publie trois autres articles sur diverses propriétés des catégories de Möbius [8, 11, 13].

Durant une année sabbatique au département de mathématiques de l'université de San Diego (UCSD), Californie (États Unis), 1978-79, il découvre le monde de la combinatoire moderne en collaborant avec des chercheurs dont Adriano Garsia, Richard Stanley, Xavier G. Viennot, etc. Son enthousiasme pour ce sujet est tel qu'il démarre en 1979, à son retour à l'UQÀM, un nouveau séminaire hebdomadaire de recherche : le *Séminaire de combinatoire et d'informatique mathématique*. Ce séminaire obtint un tel succès auprès de la communauté mathématique nationale et internationale, que ses activités, chaque vendredi, existent encore aujourd'hui, même après trente ans.

C'est sous l'impulsion de ce séminaire que le *Groupe de Recherche en Combinatoire de l'UQÀM*, prit naissance autour des années 1980, regroupant initialement André Joyal, Gilbert Labelle, Jacques Labelle, Pierre Bouchard, François Bergeron, Hélène Décoste, etc. (une multitude d'autres chercheurs s'étant ajoutés depuis). Au même moment, inspiré des travaux de Dominique Foata sur les séries génératrices exponentielles [6], André Joyal introduisit la *théorie combinatoire des espèces de structures* par son texte fondamental intitulé *Une théorie combinatoire des séries formelles* [9]. En résumé, une espèce de structures est un endofoncteur F de la catégorie des ensembles finis. Pour chaque ensemble fini, U, un élément de $F[U]$ est appelé une F-*structures* sur U et pour chaque bijection $f : U \to V$ entre ensembles finis, la bijection correspondante $F[f] : F[U] \to F[V]$ est appelée *le transport, le long de f, des F-structures sur U vers les F-structures sur V*. On peut associer canoniquement à chaque espèce de structures une fonction symétrique ainsi que des séries génératrices et indicatrices pour le dénombrement des structures étiquetées ou non étiquetées en y intégrant la théorie de Pólya. Plusieurs opérations combinatoires permettent de construire des espèces à partir d'autres espèces. Ces opérations donnent aussi lieu à des équations fonctionnelles et différentielles combinatoires facilitant l'analyse des propriétés des espèces étudiées. Le groupe de recherche en combinatoire est devenu en 1989, avec Pierre Leroux comme premier directeur, un centre institutionnel de recherche à l'UQÀM appelé le LaCIM : Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique. La théorie des espèces constitue encore aujourd'hui l'un des principaux axes de recherches du LaCIM.

Poursuivons avec les travaux mathématiques de Pierre Leroux. Il publie en 1982, en collaboration avec Hélène Décoste et Gilbert Labelle, un article intitulé *Une approche combinatoire pour l'itération de Newton-Raphson* [12]. Dans cet article, la racine de l'équation étudiée est l'espèce des arborescences dites « enrichies » [10], plutôt qu'un nombre comme en analyse numérique. L'itération de Newton-Raphson correspond, dans ce contexte, à des approximations de cette espèce en produisant des arborescences portées par des ensembles de plus en plus grands (dont la cardinalité double à chaque étape). Viennent ensuite deux article fondamentaux, avec Dominique Foata en 1983 [14] et Volker Strehl en 1985 [17] sur des modèles combinatoires des polynômes de Jacobi et de diverses identités qui en résultent. Leroux fait un retour en algèbre pure en publiant aussi en 1985, avec R.E. Block [16], un article *Generalized dual coalgebras of algebras, with applications to cofree coalgebras*.

Viennent ensuite une série d'articles (1985-91) [19, 21, 22, 26] avec Gérard Xavier Viennot, sur la *résolution combinatoire des systèmes d'équations différentielles* dans le cadre des L-espèces, c'est-à-dire des espèces dont les structures vivent sur des ensembles linéairement ordonnés. Cette approche des équations différentielles fournit, par exemple, une méthode unifiée pour résoudre combinatoirement des problèmes différentiels du type $y' = f(x, y), y(0) = y_0$. En particulier, le résultat classique de Désiré André qui interprète à l'aide des permutations alternantes les coefficients de la série, $y = y(x)$, solution du problème $y' = 1+y^2, y(0) = 0$, découle immédiatement de cette théorie et apparaît de façon parfaitement automatique. De plus, cette approche des équations différentielles, fournit un cadre nouveau pour les intégrales itérées en théorie classique du contrôle.

Soulignons, au passage, le texte *Methoden der Anzahlbestimmung für einige Klassen von Graphen, Bayreuther Mathematische Schriften* (1988) [20] dans lequel Pierre décrit les méthodes de la théorie des espèces à la communauté mathématique allemande lors d'un séjour à Bayreuth.

Après deux articles sur les *matrices réduites et la q-log convexité des nombres q-Stirling*, en 1990 [23] et les nombres *p,q-Stirling* la même année avec Anne de Médicis [30], Pierre Leroux poursuit avec trois articles en théorie des espèces : en 1991, avec François Bergeron et Gilbert Labelle [24], *sur l'espérance du nombre de feuilles d'un arbre ayant un automorphisme donné* ; en 1992, avec Hélène Décoste et Gilbert Labelle [27] sur l'utilisation de la *composition fonctorielle* (par opposition à la composition partitionnelle) en théorie des espèces et ses applications en théorie des graphes notamment ; en 1993, avec Ibrahim Miloudi [28] sur des *généralisations de la formule d'Otter* sous la forme d'équations combinatoires qui relient des familles d'arbres (ou graphes) pointés à ces mêmes familles non pointées. Ces équations, qu'il a appelées *formules de dissymétrie*, permettent de se débarrasser élégamment des pointages (augmentant ainsi les groupes d'automorphismes des structures considérées) à partir d'équations combinatoires (en général plus simples) qui caractérisent les structures pointées correspondantes. En collaboration avec Anne de Médicis en 1995 Leroux publie aussi un texte sur les *nombres de Stirling généralisés, convolutions et p,q-analogues correspondants* [32]. Notons aussi son travail conjoint avec Étienne Rassart et Ariane Robitaille, *Enumeration of Symmetry Classes of Convex Polyominoes in the Square Lattice* [38], dans lequel les auteurs dénombrent et classifient les polyominos convexes selon leurs groupes de symétrie diédrales à l'aide d'équations fonctionnelles diverses. Cette étude est étendue, avec Étienne Rassart, à la classe des polyominos parallélogrammes dans *Enumeration of symmetry classes of Parallelogram Polyominoes* [44]. Soulignons aussi le travail *Stirling Numbers Interpolation using Permutations with Forbidden Subsequences* (2002) [48], fait en collaboration avec nos amis italiens Elisa Pergola et Renzo Pinzani ainsi que *Enumeration of Symmetry classes of Convex Polyominoes on the Honeycomb Lattice*, (2005) [55] avec Dominique Gouyou-Beauchamp.

À partir de 1996, cependant, les travaux de Pierre se concentrent pour la plupart sur la théorie des espèces proprement dite et ses applications.

Dans *An extension of the Exponential Formula in Enumerative Combinatorics* (1996) [34], en collaboration avec Gilbert Labelle, une nouvelle espèce virtuelle pondérée, notée $\Lambda^{(\alpha)}$, est introduite. Elle satisfait à la propriété remarquable qu'elle permet d'ajouter un compteur, α, de composantes connexes aux structures de toute espèce $F, (F(0) = 1)$ pour former une autre espèce, $F_{(\alpha)}$, par simple composition : $F_{(\alpha)} = \Lambda^{(\alpha)} \circ F_+$ où $F_+ = F - 1$. Pour chaque espèce F, cette équation donne lieu canoniquement à sept identités correspondantes au niveau des séries, et q-séries génératrices et indicatrices. La décomposition en composantes homogènes de l'espèce $\Lambda^{(\alpha)}$ constitue une extension combinatoire du théorème du binôme de Newton pour $(1+X)^\alpha$. Un autre co-auteur, Pierre Auger, s'ajoute et apparaissent d'autres extensions combinatoires du binôme (et du multinôme) de Newton. Elles font appel, cette fois, aux développements en composantes homogènes de toute espèce de la forme $M(1+X)(\text{resp.} M(X_1 + \ldots + X_n))$ où $M = M(X) = X^n/H$ est une espèce moléculaire quelconque, H étant le groupe stabilisateur des M-structures, voir *Generalized Binomial Coefficients for Molecular Species* (2000) [39], *Combinatorial addition formulas and applications* (2002) [45]. Soulignons aussi le travail fondamental avec Gábor Heteyi qui introduit une variante de la théorie des espèces dans laquelle les groupes symétriques sont remplacés par les groupes hyperoctaédraux : *Cubical Species and Nonassociative Algebras* (1998) [37] ainsi que l'introduction, avec Pierre Auger et Gilbert Labelle, du programme Devmol, écrit dans le langage Maple, qui permet de calculer le développement moléculaire des espèces dites *cyclo-ensemblistes* (c.-à-d., contenant les cycles orientés, les ensembles finis et fermés sous les opérations combinatoires d'addition, multiplication et substitution) : *Computing the molecular expansion of species with the Maple package "Devmol"* (2003) [49].

Dans une série d'articles, en collaboration avec Miklos Bóna, Michel Bousquet, Cédric Chauve, Martin Ducharme, Tom Fowler, Ira Gessel, Gilbert Labelle, Cédric Lamathe, plusieurs résultats concernant la classification et le dénombrement exact ou asymptotique des arbres, cartes planaires et cactus *non pointés* (ce qui augmente considérablement les groupes d'automorphismes de ces structures) font leur apparition par l'introduction de formules de dissymétrie et d'équations fonctionnelles adéquates : *Enumeration of (uni- or bi-colored) plane trees according to their degree distribution* (1996) [35], *Enumeration of m-ary cacti* (2000) [40], *Enumeration of Planar two-face Maps* (2000) [41], *The specification of 2-trees* (2002) [46], *Two bijective proofs of the arborescent form of the Good-Lagrange formula and some applications to colored rooted trees and cacti* (2003) [50], *A classification of plane and planar 2-trees* (2003) [51], *Labelled and unlabelled enumeration of k-gonal 2-trees* (2004) [52], *Dénombrement des 2-arbres k-gonaux selon la taille et le périmètre*, (2005) [56], *Une classification des arbres plans* (2006) [57].

Une autre série d'articles, avec Andrei Gagarin et Gilbert Labelle, fait le pont entre la théorie des espèces et la topologie des graphes plongeables sur des surfaces telles le plan projectif ou le tore : *Structure and labelled enumeration of K33-subdivision-free Projective-Planar Graphs* (2005) [54], *Counting unlabelled toroidal graphs with no K33-subdivisions* (2007) [58] et *The structure of K33-subdivision - free toroïdal graphs*, (2007) [59]. En plus de classifier ces espèces de graphes par des équations fonctionnelles par l'utilisation d'une substitution spéciale de classes de réseaux dans les arêtes de graphes, les auteurs parviennent à dénombrer ces graphes à isomorphisme près par passage aux séries « indicatrices de Walsh » qui constituent une sorte d'extension des séries indicatrices à la Pólya. Par l'ajout de Timothy Walsh, un nouveau travail, basé sur les précédents traite de l'étude et la classification des graphes 2-connexes dont les composantes 3-connexes font partie d'une espèce de graphes donnée : *Two-connected graphs with prescribed three-connected components* (2008) [61].

Pierre Leroux s'est aussi intéressé, récemment, à faire des rapprochements entre la théorie des espèces et la mécanique statistique. Son premier travail sur le sujet est intitulé *Enumerative problems inspired by Mayers' theory of cluster integrals* (2004) [53], suivi, avec la collaboration de Martin G. Ducharme et Gilbert Labelle, d'un texte *Graph invariants arising from the theory of cluster integrals* (2007) [60]. Dans ces travaux, les intégrales de Mayer (cluster integrals) sont reliées à la théorie des espèces. Des équations fonctionnelles pour des espèces de graphes pondérées par ces poids de Mayer sont établies et des méthodes efficaces de calcul de ces poids sont données pour certaines classes de graphes.

Pierre Leroux est co-auteur avec François Bergeron et Gilbert Labelle de la monographie *Combinatorial species and tree-like structures* [36] (voir [31] pour une version française) publiée par Cambridge University Press en 1998. Dans ce livre de 457 pages, les auteurs font une synthèse des travaux qui avaient été faits jusqu'alors dans le développement de la théorie des espèces par l'école québécoise du LaCIM et d'autres collaborateurs aux États-Unis, en France et en Allemagne, notamment.

Soulignons finalement quatre textes de Pierre qui étaient encore en chantier au moment de son décès : *Enumerating combinatorial structures equipped with a list of commuting automorphisms* [62], avec Gilbert Labelle et Miguel Mendez ; *A classification of outerplanar k-gonal 2-trees* [63], avec Martin Ducharme, Gilbert Labelle, Cédric Lamathe ; *Legendre transform and line-irreducible graphs* [64] avec David Brydges ; *Mayer and Ree-Hoover weights of infinite families of 2-connected graphs* [65] avec son étudiante de doctorat Amel Kaouche.

La carrière mathématique de Pierre a aussi été marquée par son souci constant de diffusion et de promotion de la recherche. Il a non seulement donné une multitude de conférences mathématiques lors de congrès nationaux et internationaux (publiées, sous invitation, etc.), mais a aussi été organisateur principal de plusieurs colloques importants. Mentionnons en particulier, le *Séminaire de combinatoire et d'informatique mathématique*, à l'UQÀM (1979-2004) ; le *Colloque de combinatoire énumérative*, à l'UQAM (1985) [18] ; les 3e, 4e et 8e *Colloques sur les Séries formelles et la combinatoire algébrique* (SFCA/FPSAC), au LaBRI, université Bordeaux I, (1991) [25], au LaCIM, UQÀM (1992) [29, 33], à Minneapolis (1996) [43] ; le *Colloque LaCIM 2000*, à l'UQÀM [42, 47] ; l'*École de Mécanique statistique et combinatoire*, Val-Morin, Québec (2007). Notons que de 1993 à 2002, if fut membre du comité permanent de programme (président de 1993 à 1998) des colloques internationaux annuels SFCA/FPSAC. Il fut chercheur/professeur invité à plusieurs institutions : université de Nantes (1972) ; université de Calgary (1974) ; Institut national de statistiques et d'économie appliquée, Rabat, Maroc (1975) ; university of California, San Diego (1978-79) ; université Bordeaux I (1984 et 2002) ; Universtät Erlangen-Nürnberg (1987) ; university of Minnesota (1987) ; university of Sidney (1994) ; université de Florence (2002) ; université de Paris-sud (2002). De 1983 à 1986, il fut responsable administratif, pour l'UQÀM, de la revue *Topologie structurale*. De 1988 à 1998, il fut Président du comité de direction de la revue de recherche *Annales des sciences mathématiques du Québec*. Il était aussi membre du comité éditorial des revues *Electronic Journal of Combinatorics* (depuis 1993) et *Discrete Mathematics* (depuis 1999).

Le dévouement de Pierre Leroux envers les autres est légendaire. Pour ne citer que quelques exemples parmi plusieurs autres, mentionnons qu'il a dirigé les recherches d'une quarantaine d'étudiants en maîtrise et en doctorat. Il a été membre de plusieurs comités internes à l'UQÀM. En particulier, de 2004 à 2007, il fut vice-doyen à la recherche de la faculté des sciences de l'UQÀM. De 2003 à 2007, il fut co-président d'une campagne majeure de développement de la Fondation de l'UQAM. Deux jours avant son décès, il apprenait avec grande joie qu'on venait de terminer la traduction – *en braille* – de son livre bien connu [15] sur l'algèbre linéaire...

Le monde vient de perdre un grand bâtisseur et un important mathématicien[1].

[1] Pour d'autres informations sur la carrière de Pierre Leroux, consulter le site du LaCIM : www.lacim.uqam.ca

Références

[1] P. Leroux, *L'existence des enveloppes injectives*, Mémoire de maîtrise, université de Montréal, septembre 1965.

[2] P. Leroux, *Extension à des catégories de morphismes d'une paire de foncteurs adjoints*, Thèse de doctorat, université de Montréal, mars 1970.

[3] P. Leroux et P. Ribenboim, *Dérivations d'ordre supérieur dans les catégories semiadditives*, Cahiers de topologie et géométrie différentielle, Vol. X (1970), 437-465.

[4] P. Leroux, *Sur les structures d'effacement*, Math. Zeitschrift, 121 (1971), 329-340.

[5] P. Leroux, *Une caractérisation de la catégorie des groupes*, Bull. Can. Math. 15 (1972), 375-380.

[6] D. Foata, *La série génératrice exponentielle dans les problèmes d'énumération*, Montréal, Presses de l'université de Montréal (1974) 186p.

[7] P. Leroux, *Les catégories de Möbius*, 2e Colloque sur l'algèbre des catégories (Amiens 1975), Cahiers de topologie et géométrie différentielle, Vol. XVI (1975), 280-282.

[8] M. Content, F. Lemay, P. Leroux, *Catégorie de Möbius et fonctionarité, un cadre général pour l'inversion de Möbius*, Jour. Combinatorial Theory (A), 28 (1980), 169-190.

[9] A. Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. In Math. 42 (1981) 1-82.

[10] G. Labelle, *Une nouvelle démonstration des formules d'inversion de Lagrange*, Adv. In Math. 42, no,3 (1981) 217-241.

[11] P. Leroux et J. Sarraillé, *Structure of Incidence Algebras of Graphs*, Comm. Algebra, 9 (1981), 1479-1517.

[12] H. Décoste, G. Labelle, P. Leroux, *Une approche combinatoire pour l'itération de Newton-Raphson*, Advances in Applied Mathematics, 3 (1982), 407-416.

[13] P. Leroux, *The Isomorphism problem for Incidence algebras of Möbius Categories*, Illinois Journal of Mathematics, 26 (1982), 52-61.

[14] D. Foata et P. Leroux, *Polynômes de Jacobi : interprétation combinatoire et fonction génératrice*, Proc. Amer. Math. Soc., 87 (1983), 47-53.

[15] P. Leroux, *Algèbre linéaire, une approche matricielle*, Modulo-Editeur (1983) 512 p. ISBN 2-89113-201-7. Huitième tirage, août 2001.

[16] R.E. Block et P. Leroux, *Generalized dual coalgebras of algebras, with applications to cofree coalgebras*, Jour. of Pure and Applied Algebra, 36 (1985), 15-21.

[17] P. Leroux et V. Strehl, *Jacobi polynomials : Combinatorics of the basic identities*, Discrete Math. 57 (1985), 167-187.

[18] G. Labelle et P. Leroux, éditeurs, *Combinatoire énumérative*, Montréal, Québec 1985, Proceedings. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1234, Springer-Verlag, Heidelberg,1986, 387 p. ISBN 3-540-12707-6.

[19] P. Leroux et G. Viennot, *Combinatorial resolution of systems of differential equations, I : Ordinary differential equations*, dans Combinatoire énumérative, UQAM 1985, Proceedings, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1234, Springer-Verlag (1986) 210-245.

[20] P. Leroux, *Methoden der Anzahlbestimmung für einige Klassen von Graphen, Bayreuther Mathematische Schriften*, 26 (1988), 1-36.

[21] P. Leroux et G.X. Viennot, *Résolution combinatoire des systèmes d'équations différentielles, II : Calcul intégral combinatoire*, Ann. Sci. Math. Québec. Vol. 12 (1988), 233-253.

[22] P. Leroux et G.X. Viennot, *Combinatorial resolution of systems of differential equations, IV : Separation of variables*, Discrete Math. 72 (1988), 237-250.

[23] P. Leroux, *Reduced matrices and q-log concavity properties of q-Stirling numbers*, Jour. Combinatorial Theory (A), 54 (1990), 64-84.

[24] F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux, *Computation of the Expected Number of Leaves in a Tree Having a Given Automorphism, and Related Topics*, Discrete Applied Math. 34 (1991), 49-66.

[25] M. Delest, G. Jacob et P. Leroux, éditeurs, *Séries formelles et combinatoire algébrique*, Actes du 3e colloque, LaBRI, Bordeaux, 2-4 mai 1991, 450 p.

[26] P. Leroux et X.G. Viennot, *A combinatorial approach to non linear functional expansions : An introduction with an example*,Theoretical Computer Science, 79 (1991), 179-193.

[27] H. Décoste, G. Labelle et P. Leroux, *The Functorial Composition of Species, a Forgotten Operation*, Discrete Math. 99 (1992), 31-48.

[28] P. Leroux et B. Miloudi, *Généralisations de la Formule d'Otter*, Annales des Sciences mathématiques du Québec, 16 (1992), 53-80.
[29] P. Leroux et C. Reutenauer, éditeurs, *Séries formelles et combinatoire algébrique*, Actes du 4e colloque, LACIM-UQAM, 15-19 juin 1992, Publications du LACIM, nº 11, 487p. ISBN 2-89276-103-4.
[30] A. de Médicis et P. Leroux, *A unifed combinatorial approach for q and p,q-Stirling numbers*, Conference on Lattice Paths Combinatorics and Applications, McMaster University, Hamilton, 1990. J. of Statistical Planning and Inference, 34 (1993), 89-105.
[31] F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux, *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*. Publications du LACIM, Vol. 19, 394 p., octobre 1994, ISBN 2-89276-135-2.
[32] A. de Médicis et P. Leroux, *Generalized Stirling Numbers, Convolution Formulae and p, q-analogues*, Canadian Journal of Mathematics, 47 (1995), 474-499.
[33] P. Leroux et C. Reutenauer, Guest editors, numéro spécial consacré aux comptes-rendus arbitrés du 4e colloque sur les séries formelles et la combinatoire algébrique tenu à Montréal (UQAM) en juin 1992, Discrete Mathematics, Vol. 139, no. 1-3, mai 1995, 1-490.
[34] G. Labelle et P. Leroux, *An extension of the Exponential Formula in Enumerative Combinatorics*, Electronic Journal of Combinatorics, 3 (1996), # R12, 14 p.
[35] G. Labelle et P. Leroux, *Enumeration of (uni- or bi-colored) plane trees according to their degree distribution, Discrete Mathematics*, 157 (1996), 227-240.
[36] F. Bergeron, G. Labelle and P. Leroux, *Combinatorial Species and Tree-like Structures*, Monographie dans la série Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 67, Cambridge University Press, 1998, 457 p. ISBN 0-521-57323-8.
[37] G. Hetyei, G. Labelle et P. Leroux, *Cubical Species and Nonassociative Algebras, Advances in Applied Mathematics*, 21 (1998) 499-546.
[38] P. Leroux, E. Rassart, A. Robitaille, *Enumeration of Symmetry Classes of Convex Polyominoes in the Square Lattice*, Advances in Applied Mathematics, 21 (1998), 343- 380.
[39] P. Auger, G. Labelle, P. Leroux, *Generalized Binomial Coeffcients for Molecular Species*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 91 (2000), 15-48.
[40] M. Bóna, M. Bousquet, G. Labelle, P. Leroux, *Enumeration of m-ary cacti*, Advances in Applied Mathematics, 24 (2000), 22-56.
[41] M. Bousquet, G. Labelle et P. Leroux, *Enumeration of Planar two-face Maps*, Discrete Math., 222 (2000), 1-25.
[42] G. Labelle et P. Leroux, éditeurs, Colloque LaCIM 2000, *Combinatoire, informatique et Applications*, Actes du Colloque LaCIM 2000, LACIM-UQAM, 7-10 septembre 2000, Publications du LACIM, nº 27, 315 p. ISBN 2-89276-179-4.
[43] P. Leroux and D. Stanton, Guest Editors, Numéro spécial consacré aux comptes-rendus arbitrés du 8e colloque SFCA/FPSAC, Minneapolis, 1996, Discrete Mathematics, Vol. 210, nº 1-3, jan. 2000, 1-184.
[44] P. Leroux et Etienne Rassart, *Enumeration of symmetry classes of Parallelogram Polyominoes*, Annales des Sciences mathématiques du Québec, 25 (2001), 71-90.
[45] P. Auger, G. Labelle, P. Leroux, *Combinatorial addition formulas and applications*, Advances in Applied Mathematics, 28 (2002), 302-342.
[46] T. Fowler, I. Gessel, G. Labelle, P. Leroux, *The specification of 2-trees*, Advances in Applied Mathematics, 28 (2002), 145-168.
[47] G. Labelle et P. Leroux, Guest Editors, Numéro spécial consacré à LaCIM 2000, Conference on Combinatorics, Computer Science, and applications, Discrete Mathematics, Vol. 256, nº 3, Oct. 2002, 523-858.
[48] G. Labelle, P. Leroux, E. Pergola, R. Pinzani, *Stirling Numbers Interpolation using Permutations with Forbidden Subsequences*, Discrete Mathematics, 246 (2002), 177-195.
[49] P. Auger, G. Labelle et P. Leroux, *Computing the molecular expansion of species with the Maple package "Devmol"*. Séminaire Lotharingien de Combinatoire, B49z (2003), 34 p. `http://euler.univ-lyon1.fr/home/slc`
[50] M. Bousquet, C. Chauve, G. Labelle, P. Leroux, *Two bijective proofs of the arborescent form of the Good-Lagrange formula and some applications to colored rooted trees and cacti*, Theoretical Computer Science, 307 (2003), 277-302.
[51] G. Labelle, C. Lamathe, P. Leroux, *A classification of plane and planar 2-trees*, Theoretical Computer Science, 307 (2003), 337-363.

[52] G. Labelle, C. Lamathe, P. Leroux, *Labelled and unlabelled enumeration of k-gonal 2-trees*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 106 (2004), 193-219.

[53] P. Leroux, *Enumerative problems inspired by Mayers' theory of cluster integrals*, Electronic Journal of Combinatorics, 11 (2004), #R32, 1-28. `http://www.combinatorics.org/Volume11/Abstracts/v11i1r32.html`

[54] A. Gagarin, G. Labelle and P. Leroux, *Structure and labelled enumeration of K33-subdivision-free Projective-Planar Graphs*, Pure Mathematics and Applications, 16 (2005), n° 3, 267-286. [arXiv :math.CO/0406140].

[55] D. Gouyou-Beauchamp et P. Leroux, *Enumeration of Symmetry classes of Convex Polyominoes on the Honeycomb Lattice*. Theoretical Computer Science, 346 (2005), 307-334.[arXiv :math.CO/0403168].

[56] G. Labelle, C. Lamathe, P. Leroux, *Dénombrement des 2-arbres k-gonaux selon la taille et le périmètre*, Annales des Sciences mathématiques du Québec, 29 (2005), 215-236.

[57] M. Ducharme, C. Lamathe, P. Leroux, *Une classifcation des arbres plans*, Annales des Sciences mathématiques du Québec, (2006), À paraître.

[58] A. Gagarin, G. Labelle and P. Leroux, *Counting unlabelled toroidal graphs with n° K33-subdivisions*, Advances in Applied Mathematics 39 (2007), 51-75 [arXiv :math.CO/0509004].

[59] A. Gagarin, G. Labelle and P. Leroux, *The structure of K33-subdivision-free toroidal graphs*, Discrete Mathematics, 307 (2007) 2993-3005 [arXiv :math.CO/0411356].

[60] M. G. Ducharme, G. Labelle and P. Leroux, *Graph weights arising from Mayers' theory of cluster integrals*, Séminaire Lotharingien de combinatoire, 54 (2007), Article B54m, 40pp.

[61] A. Gagarin, G. Labelle, P. Leroux, T. Walsh, *Two-connected graphs with prescribed three-connected components*, (2008), soumis.

[62] M. Mendez, G. Labelle and P. Leroux, *Enumerating combinatorial structures equipped with a list of commuting automorphisms*, (2008), en préparation.

[63] M. Ducharme, G. Labelle, C. Lamathe and P. Leroux, *A classification of outerplanar k-gonal 2-trees*, (2008), en préparation.

[64] D. Brydges and P. Leroux, *Legendre transform and line-irreducible graphs*, (2008), en préparation.

[65] A. Kaouche and P. Leroux, *Mayer and Ree-Hoover weights of infinité families of 2-connected graphs*, (2008), en préparation.

COURRIER DES LECTEURS

À propos du socle de la licence (1)

Cher collègue,

J'ai pris connaissance du document « Pour un socle de la licence de Maths » préparé, en particulier, par la SMF. Ce document m'inspire les réflexions suivantes.

La logique est quasiment absente de ce document. Elle n'y apparaît que dans le paragraphe 0 (connaissances transversales, paragraphe c) et j'ai bien peur que, dans les faits, ce paragraphe ne se résume qu'à quelques minutes de la première séance de cours, un peu comme, à la période des « maths modernes », le premier cours de maths en lycée et collège était consacré aux ensembles pour pouvoir, ensuite, se consacrer davantage aux « choses sérieuses ».

Il n'y aurait, je pense, pas d'objections majeures (et, dans ce cas, pourquoi ne pas le faire) à ce que, dans la partie « au delà du socle » on ajoute une ou deux propositions en logique. Mais là n'est pas l'essentiel de mon propos car je veux parler du socle commun et la logique dont je veux parler ici n'est pas celle qui est un thème mathématique à part entière au même titre que la géométrie différentielle ou l'algèbre linéaire (c'est celle-ci qui serait à mettre dans le « au delà du socle »). Je veux simplement parler d'un apprentissage de la notion de démonstration : comment les manipuler et comment les rédiger. Il me semble en effet qu'il serait nécessaire d'y passer beaucoup plus de temps que ce qui est suggéré par les quelques mots du paragraphe 0 : à mon avis, cela devrait être de l'ordre d'une trentaine d'heures en L2 et en L3.

Voici pourquoi.

Les difficultés de nos étudiants

Elles sont de deux ordres :

– d'une part dans les concepts (mais aussi les méthodes ou algorithmes) qu'on leur introduit : par exemple la différence entre continuité et continuité uniforme est, objectivement, difficile à comprendre et pour la maîtriser il faut du temps

– et d'autre part dans le fait qu'on ne leur apprend pas à faire des démonstrations ni à les rédiger.

On passe beaucoup de temps à s'occuper du premier point et c'est évidemment normal. On n'en passe, en général, aucun sur le deuxième. L'argument souvent évoqué pour dire qu'il ne faut pas y consacrer du temps est le suivant : les étudiants apprennent à faire des démonstrations en imitant celles que fait le professeur (comme l'enfant apprend à parler en imitant son entourage). Mais cela ne marche pas (ou plus précisément, ne marche plus) ainsi. Pour 100% des enseignants de l'université, cela a effectivement marché. C'est aussi le cas pour nos très bons étudiants. Mais ce n'est, malheureusement, plus le cas pour la grande majorité de nos étudiants et, me semble-t-il, la seule façon d'y remédier est de passer du temps à les faire travailler ce point spécifique i.e. travailler des démonstrations non plus dans le but de montrer un nouveau résultat mais dans le but de détailler l'enchaînement, la progression dans une preuve d'un résultat qu'ils ont déjà vu par ailleurs.

Alors que nos étudiants font souvent d'inquiétantes erreurs dans leurs démonstrations (montrant ainsi que les règles de base ne sont pas acquises), s'ils réussissent quand même à avoir leur licence, c'est parce qu'ils réussissent bien à appliquer les méthodes (ou les algorithmes de calcul) qu'on leur a apprises et que c'est cela qu'on valorise. Mais tous les enseignants savent bien que, quand il n'y a plus de méthode à appliquer, les étudiants sont perdus alors que, souvent, une connaissance des règles de base des démonstrations suffirait...

Une expérience pour essayer d'y remédier

Cela fait maintenant une dizaine d'années que je fais un TP sur le thème « apprentissage des démonstrations en maths » aux étudiants de L3 maths (et depuis trois ans, un collègue fait le même genre de choses avec les L2). Ce TP (5 séances de 2 heures) est en option (je n'ai jamais pu obtenir de mes collègues matheux qu'il soit obligatoire) et il est suivi, chaque année, par une quinzaine d'étudiants (ce TP est en « compétition » avec d'autres cours plus faciles : sport, histoire des sciences,...). On travaille avec un logiciel d'édition de preuves. Je fais travailler les étudiants sur des preuves simples (en général de topologie élémentaire) qu'ils ont vues dans les autres cours et je choisis les exemples pour que la partie difficile soit, pour eux, la manipulation des quantificateurs. Je constate, chaque année, que la plupart des étudiants sont incapables de refaire, en détail, des preuves élémentaires de résultats (pourtant de base) qu'ils ont vus peu avant dans le cours correspondant : par exemple, si une suite converge vers l toute suite extraite aussi ou bien la preuve de l'équivalence (suivant que l'on met des inférieurs strict ou des inférieur ou égal) des définitions (avec epsilon et eta) de la limite d'une fonction ou encore l'image d'un connexe par une fonction continue est connexe, etc. Le but de ce TP n'est donc pas le résultat mathématique pour lui même (en général, ils le connaissent) mais bien de comprendre l'enchaînement « logique » (i.e. comment on a utilisé les « règles » de démonstration) qui a permis de l'obtenir. Je leur demande aussi, à la fin, de rédiger en détail sur papier leur démonstration et je corrige en détail leur travail avec, souvent, de grosses surprises. Quand, à la fin des séances, on demande aux étudiants ce qu'ils pensent de ce travail, ils en sont, pour la plupart, très contents et regrettent souvent qu'on n'en fasse pas plus...

Voici un exemple (mais j'en ai des dizaines d'autres) qui montre bien que les bases du raisonnement mathématique ne sont pas acquises. L'une des choses que je dois répéter un grand nombre de fois (et les 10 heures que j'ai ne suffisent pas à ce que ce soit acquis pour tout le monde) est la suivante. La seule façon d'utiliser une hypothèse de la forme « pour tout x, si on a $A(x)$ alors on a $B(x)$ » c'est que vous choisissiez un objet a (et c'est à vous de dire explicitement ce qu'est cet objet) pour lequel vous savez montrer $A(a)$ et alors vous saurez (et donc pourrez utiliser) $B(a)$. Quand les étudiants « cliquent » pour utiliser cette hypothèse et que la machine remplace le x par un ? ils me demandent alors ce qu'est ce ?, je leur explique que c'est à eux de dire avec quoi ils veulent l'appliquer, alors eux : « ben, avec x », moi : « quel x ? », eux : « ben,... j'sais pas »...

Pourquoi je pense qu'un tel enseignement est nécessaire ?

À qui est destinée la licence de maths ? Je pense que la réponse, dans la plupart des universités, est la suivante.

– Il y a ceux qui seront chercheurs (quelques %) : ils auront compris seuls les règles de démonstration et un tel cours n'est donc pas indispensable pour eux. Encore que... Je me souviens d'un normalien (de l'ÉNS. Lyon, il est maintenant Mcf quelque part) qui avait fait son stage de maîtrise en logique avec moi parce qu'il voulait comprendre ce que signifiait, dans une démonstration, le mot « prendre » dans l'expression « on prend un x tel que... » ou, pire, « on construit une suite u_n en prenant, pour chaque entier n, un objet qu'on nomme u_n tel que... » Et pourtant cet étudiant était bon et n'avait pas de problème pour faire des démonstrations. Combien d'enseignants de maths sont capables de répondre précisément à sa question ?

– Il y a ceux qui auront l'agrégation (quelques %) ou un master « professionnel » (10 ou 20% ?). Les premiers sont, en général, assez bons en ce qui concerne les raisonnements mais on trouve quand même chez eux de grossières erreurs de raisonnement et un tel apprentissage ne leur serait pas inutile. Les seconds ont, c'est vrai, davantage besoin de « méthodes de calcul » (du genre calcul scientifique, statistiques,...) que de raisonnement mais son apprentissage ne les aiderait-il pas à mieux comprendre ce qu'on leur fait en cours ?

– Il y ceux qui auront un jour le Capes ou le Cape. Cela fait probablement de l'ordre de 20%. Le socle proposé est nécessaire pour avoir le concours (mais il ne l'est pas pour leur futur métier...). Le fait d'avoir compris ce qu'est une démonstration n'est-il pas indispensable à la fois pour les aider à avoir le concours mais aussi (et peut-être surtout) pour qu'ils puissent ne pas dire trop de bêtises à leurs futurs élèves ? Je pense que, si on demandait aux certifiés ce que veut dire précisément le « $(+2k\pi)$ » qu'on met au bout de beaucoup d'égalités quand on fait de la trigonométrie on aurait de grosses surprises. Faites donc l'essai avec vos étudiants de L3 !

– Et il y a enfin tous les autres (n'est-ce pas, finalement, la majorité ?) à qui cette licence donnera une culture scientifique de base (mathématique mais aussi physique,...) qui leur servira dans leur vie professionnelle. À ceux-là, une grosse partie du socle ne servira jamais à rien sinon à avoir leur licence mais il me semble qu'avoir compris les règles de base du langage mathématique et de ses démonstrations servira au moins autant (je n'ose pas dire bien plus) que le reste du socle.

Conclusion

Si l'objectif d'une licence de maths c'est de donner une formation solide aux futurs chercheurs en maths, alors la logique obligatoire ne s'impose probablement pas (mais pourquoi l'en écarter ?). Mais je ne pense pas que ce soit ce qu'avaient en tête les gens qui ont travaillé pour préparer ce socle. Alors, de même qu'un enfant apprend à parler correctement en imitant son entourage, mais qu'on lui fait faire quand même de la grammaire parce que c'est le meilleur moyen qu'on a trouvé pour lui faire comprendre des phrases dont la construction est plus complexe, de même, si on veut que nos étudiants comprennent (et sachent reproduire) des démonstrations un peu complexes (je veux dire celles dont on considère qu'un étudiant ayant une licence de maths doit les avoir comprises), il faut s'en donner les moyens. Pour l'instant, le socle proposé ne le fait pas. Je suis, bien sûr, prêt à vous aider à l'améliorer en ce sens.

Cordialement,

René David
Université de Savoie

À propos du socle de la licence (2)

Le texte sur le socle de la licence de mathématiques adopté par la SMF, la SMAI et la SFdS soulève des questions importantes et appelle des critiques de fond. D'abord, il propose d'emblée une nette réduction de contenu, tant dans ses horaires (la moitié seulement – au lieu des deux tiers avant – d'une « licence de mathématiques » serait formée... de mathématiques) que dans ses programmes (par exemple – mais il y en a bien d'autres – ce qui est proposé explicitement ou ce qui est proposé comme complément éventuel du socle, sur les équations différentielles, ne contient rien de plus que ce qui figure en terminale en mathématiques et en physique).

Cette réduction des contenus entraînera pour nos étudiants un handicap rédhibitoire pour suivre les préparations au CAPES ou à l'agrégation, ou pour suivre les masters de mathématiques, qui ne seraient ainsi accessibles qu'aux étudiants passés par les classes préparatoires. On imagine les conséquences sur la sélection sociale accrue, et même sur les effectifs, dans les cursus menant aux professions hautement mathématisées, dès lors que cet état de choses sera connu des bacheliers.

Ensuite, la réduction des contenus proposés se fait très nettement sur l'aspect conceptuel des notions mathématiques, souvent remplacé par des techniques isolées (par exemple, une compréhension véritable du concept d'intégrale semble repoussée en master). De plus, et contrairement aux intentions affichées, la manière dont les concepts de mathématiques sont introduits et/ou utilisés ne permet pas leur réinvestissement dans les autres disciplines scientifiques, telles la physique. La démonstration est aisée à faire en ce qui concerne par exemple l'intégrale et les équations différentielles. Enfin, l'aspect culturel de la discipline mathématique, tant dans ses liens à une volonté de compréhension rationnelle du monde que dans son mode historique de développement à partir de grands problèmes, est complètement évacué du projet de socle.

Tout se passe comme si l'intelligence de nos étudiants avait été profondément sous-estimée au motif des insuffisances notoires de leur formation secondaire et des conceptions aberrantes sur ce que sont les mathématiques qu'ils présentent

en arrivant à l'université. Alors qu'il eût été plus important de se demander comment améliorer cet état de choses, le projet de socle propose de fait de s'y résigner (mais il est vrai que la mise en place du LMD contenait en germe cette évolution vers un DEUG en trois ans). Sur tous ces points, une analyse plus détaillée (qui a été estimée trop longue pour figurer dans la *Gazette*) peut être obtenue :
- en écrivant à : marc.rogalski@upmc.fr ;
- ou en allant sur le site de la Commission Inter-Irems Université (CI2U, qui soutient ce texte) : `http://www.univ-irem.fr` (jusque fin juin), ou `http://www2.univ-irem.fr` (après) ;
- ou en allant sur le site d'EducMath : `http://educmath.inrp.fr/Educmath/en-debat`

Marc Rogalski
Université Lille I

LIVRES

Fontenelle et l'invention de l'histoire des sciences à l'aube des Lumières
Simone Mazauric
Fayard, 2007. 390 p. ISBN : 978-2-213-63306-0. 24€

L'Académie royale des sciences, créée par Colbert en 1666, devient vite le centre de la vie scientifique française, même si aucune recherche ne s'effectue dans ses locaux. On ne peut cependant pas dire qu'en Europe à la fin du XVII^e et au début du XVIII^e siècles, la France soit la puissance hégémonique qu'elle deviendra dans les sciences quelques décennies plus tard. Mais il est intéressant de voir comment le secrétaire perpétuel, détenteur du record de la longévité dans cette fonction (1697-1740) et d'ailleurs dans la vie (1657-1757), à savoir Fontenelle, a vécu, décrit et commenté le demi-siècle des mathématiques qui a précédé le triomphe des Clairaut, des D'Alembert, des Euler et des Lagrange.

Fontenelle est plus un témoin exceptionnel, un accompagnateur intelligent et un diffuseur talentueux de la science qu'un savant qui aurait laissé son nom à des grandes découvertes. Par ses chroniques, comptes rendus et présentations non techniques, rédigées à l'usage d'un public cultivé (la série *Histoire de l'Académie royale des sciences* – ou *HARS*), par ses éloges des académiciens morts au cours de son secrétariat, il a eu l'occasion et le devoir de s'exprimer sur le triomphe des nouvelles mathématiques de Newton, de Leibniz et des frères Jacques et Jean Bernoulli. Sa période de secrétariat a en effet vu non seulement le décès des trois premiers, mais aussi les mémoires et ouvrages de leurs disciples ou contemporains français, eux-mêmes académiciens, L'Hôpital, Varignon, Rolle, eux aussi décédés pendant cet intervalle de quatre décennies et demi.

Dans les premiers chapitres, l'auteure rappelle les cadres institutionnels et philosophiques de la science du XVII^e siècle ; elle présente ensuite le personnage de Fontenelle sous plusieurs facettes, par exemple comme figure de proue des Modernes dans la querelle contre les Anciens, où elle précise les aspects scientifiques de ce moment historique. Après avoir montré les intentions et le style des ouvrages de ce savant, ses rapports nuancés à Descartes, à Newton et à Leibniz, elle aborde, plus en détail, dans les chapitres IX et X, ses positions et ses écrits concernant les mathématiques, la physique et leurs relations.

Fontenelle s'est beaucoup investi personnellement pour étudier, comprendre et faire valoir la nouvelle « géométrie de l'infini » : dans sa préface à l'*Analyse des infiniment petits* du Marquis de l'Hôpital (1696), dans ses contributions à l'HARS et dans ses Eloges, enfin dans son important ouvrage travaillé sur plus de deux décennies et publié seulement en 1727 : *Éléments de la géométrie de l'infini*. Le lecteur n'y trouvera évidemment pas les aspects techniques propres aux mathématiques du calcul différentiel et intégral, ni d'ailleurs la relation de la fameuse querelle de priorité entre newtoniens et leibniziens, mais plutôt les réflexions de Fontenelle sur la rupture ou la continuité entre la géométrie des Anciens et celle de l'infini, sa volonté de dégager la doctrine qui peut ressortir de ces nouvelles mathématiques, les places respectives de l'expérience et des mathématiques dans la physique (alors encore dans son enfance)...

Pierre Crépel,
Université Lyon I