SOMMAIRE DU Nº 116

Éditorial

La Gazette *entame une réflexion sur sa fonction et son rôle, en veillant à rester en accord avec les valeurs et principes de fonctionnement généraux de notre Société. L'une des difficultés majeures auxquelles se trouvent confrontées la science et les mathématiques contemporaines est celle de l'accessibilité de leurs contenus : accessibilité au grand public, mais également accessibilité aux mathématiciens eux-mêmes, qui peuvent chaque jour constater les obstacles qui existent à la communication d'un domaine de recherche à l'autre.*

Sans prétendre à un rôle de diffusion des savoirs trop ambitieux, qu'elle ne pourrait remplir, sans prétendre non plus se substituer à l'effort nécessaire que notre communauté doit entreprendre, la Gazette *peut et doit contribuer à améliorer la vision d'ensemble que les mathématiciens ont de leur communauté de recherche et de savoir. Bien entendu, ce rôle a toujours existé, mais il nous a paru utile de le renforcer en encourageant désormais la parution d'articles courts (autour de 6 pages, guère plus), mettant en avant, de façon accessible, une grande idée mathématique, ses tenants et aboutissants. Christophe Reutenauer a accepté de se livrer, le premier, à cet exercice délicat, en nous présentant le jeu de taquin de Schützenberger – une construction dont la définition est élémentaire, mais aux conséquences surprenantes pour la théorie des représentations et la combinatoire algébrique.*

Toujours au titre des contenus mathématiques, ce numéro accueille un article d'Olivier Lablée, qui présente un panorama à la fois historique et actuel sur l'étude du laplacien et de l'opérateur de Schrödinger sur une variété, tandis que Christian Retoré conclut, avec un second volet, sa présentation des mathématiques de la linguistique computationnelle. Au titre de la rubrique enseignement, nous publions, sous la coordination de Frédérique Petit, un dossier sur les conclusions de la commission chargée, à l'initiative des trois sociétés savantes (SMF, SMAI, SFdS), de réfléchir à la formulation d'un socle commun pour les programmes des Licences de mathématiques.

Quelques nouvelles, en conclusion, du Comité de Rédaction. Laurent Berger nous quitte : c'est l'occasion, pour nous, de le remercier pour le travail accompli. Enfin, comme annoncé dans les numéros précédents, la Gazette *se dote désormais d'une direction bicéphale, les signataires de cet éditorial ayant convenu, avec l'accord de la Société, de partager les tâches de la Rédaction en chef.*

— Zindine Djadli, Frédéric Patras

Mot du Président

Je remercie tous ceux qui ont signé la pétition[1] en faveur de notre collègue tchadien Ibni Oumar Mahamet Saleh, enlevé le 3 février 2008, et dont nous sommes toujours sans nouvelles à l'heure où nous mettons sous presse ; les mathématiciens français ont largement répondu à cet appel, et notre pétition a maintenant une diffusion internationale. Nos sociétés savantes resteront vigilantes, et prêtes à d'autres types d'action si elles s'avéraient utiles.

Les mathématiques en France ont été de nouveau mises à l'honneur avec le prix Abel décerné à Jacques Tits (professeur au collège de France) et la « Clay Award » à Claire Voisin (IHÉS), et nous les félicitons chaleureusement !

Ceci confirme une fois de plus la place des mathématiques françaises dans le monde : quels que soient les critères d'excellence choisis, elles sont au deuxième rang dans l'absolu, et au premier si l'on tient compte de la taille de la population. Cette situation est cependant précaire pour au moins deux raisons :

– ces dernières années, les universités ont redéployé des postes d'enseignant-chercheur de mathématiques vers d'autres disciplines. Le nombre de postes en mathématiques n'a pu être maintenu qu'avec l'apport des postes étiquetés recherche ; or ces postes n'existent plus, et l'autonomie des universités risque d'accélérer le mouvement de redéploiements.

– les nombreuses réformes lancées ou annoncées par nos dirigeants partent de l'affirmation que la science française n'est pas au niveau international qu'elle mérite et que des changements, inspirés par les systèmes étrangers, sont donc nécessaires. Cette prémisse est peut-être vraie dans certains domaines, mais certainement pas en mathématiques. Sans refuser toute forme de réforme, nous devons appeler à ne pas détruire sans discernement ce qui fonctionne bien. Les mathématiques peuvent même légitimement, sans arrogance ni triomphalisme, proposer leur mode de fonctionnement, souvent atypique et parfois incompris, comme source d'inspiration pour les évolutions futures. C'est l'un des messages que nous essayons de faire passer lors des rencontres que la SMF, la SFP et la SFC ont avec les conseillers ministériels ou présidentiels.

Le 24 mars 2008
Stéphane Jaffard

[1] `http://smf.emath.fr/PetitionSaleh/`

MATHÉMATIQUES

Le jeu de taquin de Schützenberger

Christophe Reutenauer[1]

Le jeu de taquin, au sens où on l'entend ici, a été introduit par Schützenberger [1] dans les années 70, au cours de ses recherches sur les tableaux de Young, la transformation de Robinson-Schensted, les relations de Knuth et leur interprétation algébrique, le monoïde plaxique[2] de Lascoux et Schützenberger. Le jeu de taquin se définit et s'étudie de manière élémentaire et sa beauté intrinsèque un peu magique se révèle aisément à tout mathématicien. Il comporte les traits typiques du génie schützenbergien, à savoir des subtilités d'ordre combinatoire mélangées à des incidences algébriques. Le jeu de taquin a permis à Schützenberger de donner une des deux premières preuves complètes de la profonde règle de Littlewood-Richardson (l'autre preuve, apparue au même moment, est due à G.P. Thomas [4]). Cette règle, énoncée dans les années 30, permet de multiplier les fonctions de Schur et de calculer les produits tensoriels externes des représentations du groupe symétrique, et par conséquent a aussi des applications en physique théorique.

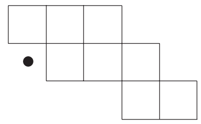
Ceci constitue un sujet moins élémentaire, que nous essaierons de présenter sans trop rentrer dans les détails spécialisés. Nous utiliserons pour la règle de Littlewood-Richardson le formalisme des fonctions symétriques, dont une base sur $\mathbb{Z}$ est formée par les fonctions de Schur s_λ, indexées par les partages[3]. Les fonctions de Schur sont en bijection avec les représentations irréductibles des groupes symétriques et les représentations polynomiales irréductibles des groupes linéaires. On a donc $s_\mu\, s_\nu = \sum c_{\mu\,\nu}^{\lambda} s_\lambda$ et ce sont les entiers naturels $c_{\mu\,\nu}^{\lambda}$ que calcule la règle de Littlewood-Richardson.

1. Jeu de taquin

Une *forme* est une partie finie et convexe[4] de $\mathbb{Z}^2$, muni de son ordre naturel. Un *tableau* est une bijection croissante $F \to \{1, 2, \ldots, n\}$, où F est une forme de cardinalité n. Un *coin inférieur* d'une forme F est un élément u de $\mathbb{Z}^2 \setminus F$ tel que $F \cup \{u\}$ soit convexe et qu'il existe $v \in F$ tel que $u < v$. Voir la figure 1, où les éléments de $\mathbb{Z}^2$ et de F sont représentés par des *cases*, et le tableau T par le *contenu* des cases.

---

[1] Université du Québec à Montréal.
[2] L'adjectif « plaxique » est forgé du grec et signifie « des tableaux ».
[3] Un *partage* de n est un multi-ensemble d'entiers strictement positifs dont la somme vaut n. On dit aussi souvent *partition*.
[4] Une partie P d'un ensemble ordonné E est *convexe* si : $\forall x, z \in P, \forall y \in E, x \leqslant y \leqslant z \Rightarrow y \in P$.



Une forme et un coin inférieur

5	6	7		
	2	3	8	
			1	4

Un tableau

Figure 1

Appelons *voisin supérieur* d'une case (x, y) de $\mathbb{Z}$ l'une ou l'autre des cases $(x+1, y)$ et $(x, y+1)$. Étant donnés un tableau et un coin inférieur u_0 de sa forme, nous définissons la *traînée* correspondante comme l'ensemble des cases $u_1 < u_2 < \cdots < u_k$ de T, où $u_i (i = 1, \ldots, k)$ est celui des voisins supérieurs de u_{i-1} dont le contenu est le plus petit (si un seul des deux voisins supérieurs de u_{i-1} est dans T, c'est lui qu'on prend pour u_i). Le *glissement* est l'opération qui transforme le tableau T en le tableau T', obtenu en mettant dans u_i le contenu de u_{i+1}, pour $i = 0, \ldots, k-1$; la forme de T' est $F \backslash \{u_k\} \cup \{u_0\}$. Voir la figure 2, où la traînée est représentée par les nombres encerclés.

1	9	12	13		
	8	5	10		
	3	4	7	14	
	•	2	6	11	15

Une traînée

1	9	12		
	8	10	13	
	3	5	7	14
	2	4	6	11	15

Le tableau après glissement

Figure 2

Rappelons qu'à un partage $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k)$ est associée une forme définie à translation près ; on la note encore λ. Si μ est un autre partage, on écrit $\mu \subseteq \lambda$ pour désigner l'inclusion des formes correspondantes, et on note λ/μ la forme complémentaire de μ dans λ. Par exemple, la forme à gauche de la figure 3 est 431, et celle à gauche de la figure 2 est 6544/211.

2. Règle de Littlewood-Richardson

Nous pouvons maintenant énoncer la règle de Littlewood-Richardson, du moins dans sa version par jeu de taquin : soient λ, μ, ν des partages ; choisissons un tableau T de forme ν. Alors *$c^{\lambda}_{\mu\nu}$ est égal au nombre de tableaux de forme λ/μ qu'on peut transformer en T par une suite de glissements.*

Par exemple, prenons $\lambda = 543$, $\mu = 31$, $\nu = 431$. Alors $c^{\lambda}_{\mu\nu} = 2$. En effet, choisissant T comme dans la figure 3, il y a deux tableaux de forme λ/μ, indiqués dans cette figure. Les glissements pour l'un d'eux sont indiqués dans la figure 4.

$T =$

5			
2	6	7	
1	3	4	8

5	6	7		
	2	3	8	
			1	4

5	6	7		
	2	3	4	
			1	8

Figure 3

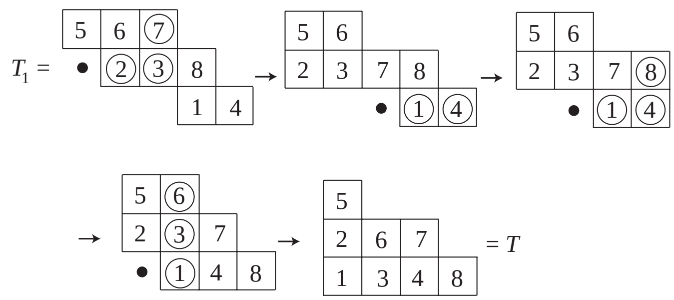


Figure 4

3. Confluence du jeu de taquin

Après ce qui précède, il se pose naturellement la question suivante : comment le choix des glissements (de manière équivalente, le choix des coins inférieurs) influe-t-il sur le tableau obtenu ? Pour y répondre, appelons *forme normale* une forme correspondant à un partage ; c'est-à-dire, une forme ayant un unique élément minimal (comme la forme de T dans la figure 3).

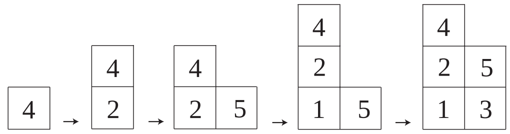
On a alors : *quel que soit le choix des glissements, le tableau de forme normale obtenu à partir d'un tableau donné, est unique*.

Pour esquisser une preuve de ce théorème de Schützenberger, nous associons à tout tableau un invariant de sa classe d'équivalence sous le jeu de taquin ; cet invariant sera une classe d'équivalence de permutations sous une relation appelée *équivalence plaxique* (introduite par Knuth [2]) ; enfin, on verra qu'il y a un unique tableau normal ayant le même invariant.

D'abord, étant donné un tableau T, nous notons π_T la permutation, vue comme un mot, obtenue en lisant les entrées de T de gauche à droite, et de haut en bas. Par exemple, pour T_1 comme dans la figure 4, on a $\pi_{T_1} = 5\,6\,7\,2\,3\,8\,1\,4$. L'équivalence plaxique, notée $\equiv$, est la fermeture réflexive et transitive de la relation suivante : celle-ci identifie deux permutations, vues comme des mots, qui ne diffèrent que par un facteur ($=$ sous-mot connexe) de longueur 3, qui pour l'une est bac et l'autre bca, ou alors acb et cab, où $a < b < c$ (on peut voir les 2 relations : $bac \equiv bca$ et $acb \equiv cab$ comme la commutation de a et de c, sous la condition que le « témoin de commutation » b soit placé à côté d'eux, et ait une valeur intermédiaire entre a et c). On montre alors (ce n'est pas très commode) que si T_2 s'obtient de T_1 par glissement, alors $\pi_{T_1} \equiv \pi_{T_2}$ (voir [1] Th. 2.4 ou [6] Prop. 3.9.4). Il reste donc à vérifier que si T est un tableau normal, alors T ne dépend que de la classe modulo $\equiv$ de π_T.

On utilise pour cela la méthode d'insertion de Schensted [3], qui associe à toute permutation un tableau normal, voir par exemple [6] 3.3. On montre que deux permutations, qui sont équivalentes pour $\equiv$, donnent le même tableau (la réciproque est vraie aussi ; ces résultats sont dus à Knuth). Enfin, on montre que si T est un tableau normal, l'algorithme de Schensted associe à π_T le tableau T.

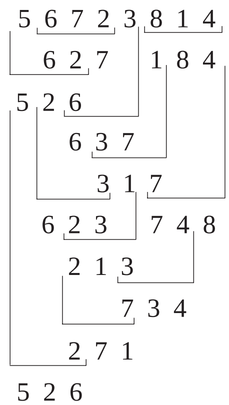
Nous illustrons l'algorithme de Schensted dans la figure 5, ainsi que la dernière assertion.



Insertion de Schensted pour $\sigma = 42513$

Figure 5

Le fait que π_{T_1} et π_T soient plaxiquement équivalents est montré dans la figure 6.



Équivalence plaxique de $\pi_{T_1} = 56723814$ et $\pi_T = 52671348$

Figure 6

4. Preuve de la règle de Littlewood-Richardson

Pour esquisser une preuve de la règle de Littlewood-Richardson, nous suivons la méthode de Schützenberger. Le *mélange* $u \sqcup\!\sqcup v$ de deux mots u et v est la somme des mots w obtenus en écrivant les lettres de u dans leur ordre, ainsi que celles de v, de toutes les manières possibles. Par exemple, $12 \sqcup\!\sqcup 43 = 1243 + 1423 + 1432 + 4123 + 4132 + 4312$. Définissons alors un produit associatif $*$ sur $\bigoplus_{n \geqslant 0} \mathbb{Z}S_n$: si σ, α sont des permutations dans S_n et S_p, respectivement, soit $\bar{\alpha}$ obtenue en additionnant n à chaque chiffre de σ ; alors $\sigma * \alpha = \sigma \sqcup\!\sqcup \bar{\alpha}$. Par exemple, $12 * 21$ est l'élément $12 \sqcup\!\sqcup 43$ ci-dessus. On observe alors, à la suite de Schützenberger, que si A, B sont des classes plaxiques[5], alors $A * B$ est une somme de classes plaxiques.

Ci-dessus par exemple, nous multiplions les classes 12 et 21 (ces classes sont des singletons) et l'on a bien que $\{1243, 1423, 4123\}$ et $\{1432, 4132, 4312\}$ sont des classes plaxiques. Comme, par l'algorithme de Schensted, les classes plaxiques sont en bijection avec les tableaux normaux, nous obtenons une structure d'anneau sur le $\mathbb{Z}$-module libre de base les tableaux normaux. Le produit sur les tableaux se décrit directement ainsi : soient U, V deux tableaux ; soit $\bar{V}$ le tableau obtenu en ajoutant n à chaque entrée de V, où n est le nombre de cases dans U. Alors $U * V$ est égal à la somme des tableaux normaux T tels que : T restreint à $\{1, \ldots, n\}$

[5] Par classe plaxique, nous entendons la somme des éléments d'une telle classe.

est identique à U ; T restreint aux autres entiers se réduit à $\bar{V}$ par jeu de taquin (voir [7] 5c, qui est une variante de [5] Th. 2.22). Un exemple est donné dans la figure 7.

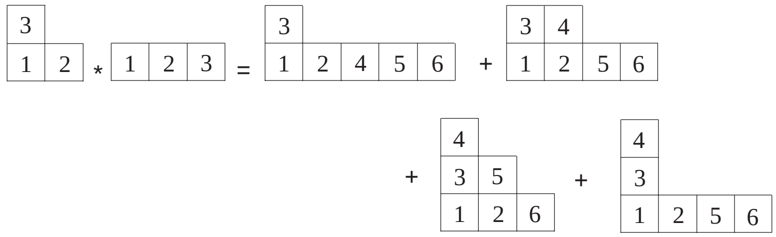
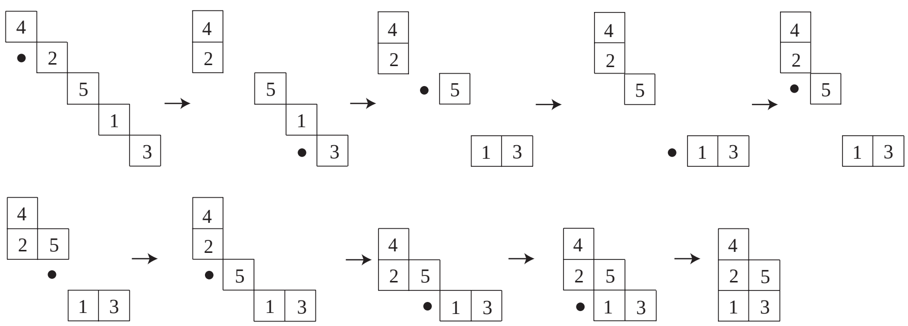


Figure 7

Pour retrouver la règle de Littlewood-Richardson énoncée plus haut, il reste à montrer que l'algèbre obtenue, de base les tableaux, s'envoie surjectivement sur l'algèbre des fonctions symétriques. Ceci se fait en envoyant le tableau normal T, de forme λ, sur la fonction de Schur s_λ ; voir par exemple [7] Th. 4.3.

5. L'algorithme de Schensted revu par jeu de taquin

À toute permutation σ, on associe le tableau, de forme anti-diagonale, dont les contenus sont donnés par σ ; voir la figure 8. Si on applique le jeu de taquin à ce tableau, on retrouve le tableau normal obtenu par l'algorithme de Schensted. Voir la figure 8 et comparer à la figure 5.



Le jeu taquin simule l'algorithme de Schensted : $\sigma = 42513$

Figure 8

6. Commentaires et références

Pour comprendre mieux ce qui a été brièvement expliqué ici, on pourra consulter le livre de B. Sagan, qui en donne une présentation très simple. D'autres démonstrations existent : M. Haiman [8] donne une approche totalement planaire, sans passer par les permutations, et a aussi une équivalence duale de tableaux ; S. Fomin [9] donne une approche par tableaux de croissance de partages ; une preuve de la règle de Littlewood-Richardson proche de la preuve originelle de Schützenberger, ainsi qu'une introduction au monoïde plaxique, se trouve dans [10] ; voir [11] pour une approche par algèbres de Hopf ; voir aussi M. van Leeuwen [12], où le lecteur trouvera aussi toutes les références supplémentaires, ainsi qu'un historique.

[1] M. P. Schützenberger, *La correspondance de Robinson*, Lecture Notes in mathematics 579, 59-113, 1977.

[2] D.E. Knuth, Permutations, matrices, and generalized Young tableaux, Pacific J. Math. 34, 1970, 709-727.

[3] C. Schensted, *Longest increasing and decreasing subsequences*, Canadian Journal of mathematics 13, 1961, 179-191.

[4] G. P. Thomas, On Schensted's construction and the multiplication of Schur functions, Advances in Mathematics 30, 1978, 8-32.

[5] A. Lascoux, M. P. Schützenberger, *Le monoïde plaxique*, Quaderni della Ricerca 109, 1981, 129-156, CNR, Rome.

[6] B. Sagan, *The symmetric group. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*, Wadsworth & Brooks/Cole, 1991 (seconde édition Springer 2001).

[7] S. Poirier, C. Reutenauer, *Algèbres de Hopf de tableaux*, Annales des Sciences mathématiques du Québec 19, 1995, 79-90.

[8] M. Haiman, Dual equivalence with applications, including a conjecture of Proctor, Discrete Mathematics 99, 1992, 79-113.

[9] S. Fomin, Knuth equivalence, jeu de taquin, and the Littlewood-Richardson rule, Appendice au livre de R.Stanley, Enumerative Combinatorics, vol.2, Cambridge univ. Press, 1999.

[10] A. Lascoux, B. Leclerc, J.-Y. Thibon, The plactic monoid, dans : M. Lothaire, Algebraic combinatorics on words, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 90. Cambridge University Press, 2002.

[11] D. Blessenohl, M. Schocker, Noncommutative character theory of the symmetric group, Imperial college Press, 2005.

[12] M. van Leeuwen, *The Littlewood-Richardson rule, and related combinatorics, Interaction of combinatorics and representation theory*, 95-145, MSJ Mem., 11, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.

Spectre du laplacien et de l'opérateur de Schrödinger sur une variété : de la géométrie spectrale à l'analyse semi-classique

Olivier Lablée[1]

Il serait difficile de faire une présentation exhaustive de l'étude de l'opérateur laplacien et de celui de Schrödinger en quelques pages, néanmoins ces notes donnent un panorama partiel et historique sur l'étude spectrale de ces deux opérateurs. On y présente quelques résultats remarquables qui illustrent en particulier la diversité des thèmes mathématiques associés.

L'étude du laplacien dans l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$, et plus généralement de l'opérateur de Schrödinger, est bien sûr très présente en physique, comme par exemple en mécanique quantique : dans un système physique constitué d'une particule se déplaçant dans une partie ouverte X de $\mathbb{R}^n$, l'espace de Hilbert associé est $L^2(X)$, et, si la particule n'est soumise à aucune force, l'hamiltonien[2] est :

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

où $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ est le laplacien de $\mathbb{R}^n$, m la masse de la particule, et $\hbar$ la constante de Planck. Si au contraire la particule est soumise à un champ de force dérivant d'un potentiel réel V, l'hamiltonien est alors :

$$H = H_0 + V$$

V désignant l'opérateur de multiplication par la fonction V.

En géométrie riemannienne, l'opérateur de Laplace-Beltrami[3] est la généralisation du laplacien de $\mathbb{R}^n$. Pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs réelles définie sur une variété riemannienne (M, g), et pour $\varphi : U \subset M \to \mathbb{R}$ une carte locale de la variété M, l'opérateur de Laplace-Beltrami, ou plus simplement laplacien de (M, g), appliqué à la fonction f est donné par la formule locale :

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_k} \right)$$

où $g = \det(g_{ij})$ et $g^{jk} = (g_{jk})^{-1}$.

Cet opérateur joue un très grand rôle au sein même des mathématiques : son spectre est un invariant géométrique majeur. Beaucoup de géomètres, motivés par le livre de Berger, Gauduchon et Mazet [10] se sont alors intéressés à cet invariant

[1] Institut Fourier, laboratoire de Mathématiques, université Joseph Fourier Grenoble I.

[2] En physique il représente l'énergie de la particule, mathématiquement c'est une fonction (contexte classique) ou bien un opérateur linéaire (contexte quantique).

[3] Dans ces notes, on utilise la convention de signe des analystes pour l'opérateur de Laplace-Beltrami. Dans la convention des géomètres $\Delta_g f = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_k} \right)$.

spectral. L'étude du laplacien, et plus particulièrement de son spectre, est un carrefour entre la théorie spectrale, l'analyse harmonique, la géométrie différentielle et même la théorie des groupes.

Le plan de ces notes est le suivant : dans une première partie on donne le contexte mathématique de manière à voir le laplacien et l'opérateur de Schrödinger comme des opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert. La partie suivante est consacrée aux problèmes directs consistant à déterminer le spectre de ces opérateurs. Ensuite, dans une autre partie, on présente rapidement la problématique inverse : à savoir dans quelle mesure le spectre peut-il déterminer la géométrie de départ ? Enfin, la dernière partie est une invitation à l'analyse semi-classique.

1. Préliminaires

1.1. Le contexte

Considérons une variété riemannienne (M, g) complète connexe de dimension $n \geqslant 1$. On lui associe l'espace de Hilbert $L^2(M) = L^2(M, d\mathcal{V}_g)$, $\mathcal{V}_g$ désignant le volume riemannien associé à la métrique g.

L'opérateur de Schrödinger H associé à la variété (M, g) de potentiel V, V étant une fonction de M dans $\mathbb{R}$, est l'opérateur linéaire non-borné sur les fonctions lisses à support compact $\mathcal{C}_c^\infty(M, \mathbb{R})$ défini par :

$$H = -\frac{h^2}{2}\Delta_g + V \tag{1}$$

Δ_g étant le laplacien de (M, g), et h un paramètre positif. Par la suite, sauf dans la partie 5, pour des raisons de commodité d'écriture, on supposera que $h = \sqrt{2}$. Dans le cas où $V \equiv 0$, on parle simplement d'opérateur laplacien.

Si $M = \mathbb{R}^n$ le laplacien canonique est $\Delta = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

1.2. Motivation

On s'intéresse au problème spectral : trouver les couples non-triviaux (λ, u) de scalaires complexes et de fonctions tels que :

$$-\Delta_g u + Vu = \lambda u$$

(avec $u \in L^2(M)$ dans le cas non compact).

Dans le cas des variétés à bord on a besoin en supplément d'imposer des conditions au bord sur les fonctions u, comme par exemple les conditions de Dirichlet : on impose $u = 0$ sur le bord de M, ou celles de Neumann : $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur le bord de M, n étant la normale extérieure au bord de M. Dans le cas des variétés compactes sans bord, comme par exemple la sphère, on parle de problème fermé.

Il y a deux problématiques majeures liées au spectre du laplacien (ou de l'opérateur de Schrödinger) sur une variété riemannienne complète (M, g) :

(1) Les problèmes directs : étant donnée une variété riemannienne (M, g), que dire du spectre de l'opérateur $-\Delta_g$ ou de celui de l'opérateur $-\Delta_g + V$?

(2) Les problèmes inverses : étant donné le spectre de l'opérateur $-\Delta_g$, que dire géométriquement de la variété (M, g) ?

Avant de répondre à ces questions, examinons quelques propriétés générales du spectre.

1.3. Quelques propriétés de l'opérateur $\mathbf{H} = -\mathbf{\Delta_g} + \mathbf{V}$

Intéressons nous aux hypothèses assurant d'une part le caractère auto-adjoint des opérateurs laplacien et de Schrödinger, et d'autre part l'obtention d'un spectre discret.

1.3.1. Le caractère auto-adjoint

Une des premières questions à traiter lors de l'étude spectrale d'un opérateur linéaire est celle du caractère auto-adjoint, ou à défaut du caractère essentiellement auto-adjoint. Rappelons que un opérateur linéaire H est essentiellement auto-adjoint si son unique fermeture $\overline{H}$ est auto-adjointe. Quel est l'intérêt du caractère auto-adjoint ? Il y a au moins deux bonnes raisons d'en parler :

(1) Si H est auto-adjoint, on a déjà une première information spectrale importante : le spectre de l'opérateur H est une partie de $\mathbb{R}$.

(2) Le caractère auto-adjoint assure en mécanique quantique l'unicité de la solution de l'équation de Schrödinger : en effet, à partir de l'hamiltonien auto-adjoint H, on peut, via le calcul fonctionnel [42], [49] construire de manière unique le groupe unitaire fortement continu $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ où :

$$U(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H}.$$

Ainsi, pour tout état initial ψ_0, l'évolution quantique de ψ_0 par l'hamiltonien H au cours du temps est donnée par

$$\psi(t) = U(t)\psi_0 = e^{-i\frac{t}{\hbar}H}\psi_0 \in L^2.$$

Notons bien qu'en dérivant la précédente expression on obtient :

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -\frac{i}{\hbar}H\psi(t)$$

C'est l'équation de Schrödinger qui régit toute la mécanique quantique !

Quels sont les principaux résultats connus sur le caractère auto-adjoint ?

– dans le cas où la variété est $M = \mathbb{R}^n$ avec sa métrique standard, T. Carleman [12] en 1934 à montré que si la fonction V est localement bornée et globalement minorée, alors l'opérateur de Schrödinger H est essentiellement auto-adjoint ;

– en 1972, T. Kato [37] a montré que l'on pouvait remplacer dans l'énoncé de Carleman l'hypothèse $V \in L^\infty_{loc}(M)$ par $V \in L^2_{loc}(M)$;

– en 1994, I. Olenik [46], [47], [48] donne un énoncé très général concernant des variétés riemanniennes complètes connexes quelconques avec des hypothèses plus complexes sur la fonction V. Un corollaire sympathique de cet énoncé est le suivant :

Théorème 1. *Soit (M, g) une variété riemannienne complète connexe de dimension $n \geqslant 1$, et V une fonction de $L^{\infty}_{loc}(M)$ telle que $\forall x \in M$, $V(x) \geqslant C$, où C est une constante réelle, alors l'opérateur $H = -\Delta_g + V$ est essentiellement auto-adjoint.*

1.3.2. Le spectre de l'opérateur est-il discret ?

Hormis le fait que le spectre est réel, que savons nous de plus ? En 1934 K. Friedrichs [31] a montré que dans le cas où la variété $M = \mathbb{R}^n$ avec sa métrique standard, si la fonction V est confinante, ie $\lim\limits_{|x| \to \infty} V(x) = +\infty$, alors le spectre de l'opérateur de Schrödinger H est constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicités finies s'accumulant en $+\infty$:

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots$$

Dans le contexte d'une variété riemannienne compacte avec un laplacien pur ($V \equiv 0$), nous savons aussi [10] que le spectre de l'opérateur $-\Delta_g$ est constitué d'une suite de valeurs propres positives, de multiplicités finies, et s'accumulant en $+\infty$

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots$$

Qu'en est-il des variétés non compactes ? Commençons par donner une définition :

Définition 1. *Soit (M, g) une variété lisse et V une fonction de M dans $\mathbb{R}$, on dira que $\lim\limits_{|x| \to \infty} V(x) = +\infty$, si et seulement si*

$$\forall A > 0, \exists K \subset\subset M, \forall x \in M \setminus K, |f(x)| \geqslant A$$

Un des théorèmes concernant le spectre de l'opérateur de Schrödinger est celui de Kondratev et Shubin [38], [39] qui donnent un énoncé assez technique sur les variétés à géométrie bornée ; de cet énoncé, on a le corollaire bien pratique suivant :

Théorème 2. *Soit (M, g) une variété riemannienne complète connexe de dimension $n \geqslant 1$, et V une fonction de $L^{\infty}_{loc}(M)$ telle que $\lim\limits_{|x| \to \infty} V(x) = +\infty$. Alors le spectre de l'opérateur $H = -\Delta_g + V$ est constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicités finies s'accumulant en $+\infty$*

$$\inf_{x \in M} V(x) \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots$$

Le théorème de Courant de 1953 [27], assure en particulier que la première valeur propre λ_1 de l'opérateur H est simple :

$$\inf_{x \in M} V(x) \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots$$

2. Un aperçu sur les problèmes directs

L'objectif est, à géométrie fixée, de pouvoir calculer, ou à défaut de donner des propriétés sur le spectre de l'opérateur $-\Delta_g$ ou de celui de l'opérateur $-\Delta_g + V$. On va d'abord parler de résultats exacts, puis de méthodes qualitatives.

2.1. Calcul explicite de spectre

Il n'y a bien sûr pas de méthodes générales pour calculer un spectre d'opérateur linéaire ; même dans le cas de Schrödinger sur une variété raisonnable, le calcul est souvent difficile, et finalement on dispose de peu d'exemples ou l'on peut expliciter complètement le spectre. Voici tout de même quelques calculs exacts :

2.1.1. Premier exemple : un problème fermé sur un tore

La théorie des séries de Fourier sur le tore T_L de dimension un et de longueur $L > 0$ nous informe que le spectre de l'opérateur

$$H = -\frac{d^2}{dx^2}$$

est :

$$\sigma(H) = \left\{ \frac{4\pi^2 n^2}{L^2},\ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

avec comme vecteurs propres associés les fonctions :

$$e_n(x) = e^{\frac{2i\pi nx}{L}},\ n \in \mathbb{Z}$$

En effet, si $\lambda \in \sigma(H)$, alors par définition du spectre $\exists u \in L^2(\mathsf{T}_L)$, $u \neq 0$ telle que $-u'' = \lambda u$. Par la théorie L^2 des séries de Fourier la suite de fonctions

$$\left(e_n(x) = e^{\frac{2i\pi nx}{L}} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$$

est une base hilbertienne de $L^2(\mathsf{T}_L)$, ainsi $\exists!\,(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n$$

Ainsi l'équation différentielle $-u'' - \lambda u = 0$ devient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \left(\frac{4\pi^2 n^2}{L^2} - \lambda \right) e_n = 0$$

Comme $u \neq 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$, tel que $a_{n_0} \neq 0$, ainsi $-u'' - \lambda u = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4\pi^2 n_0^2}{L^2}$. On vient donc de montrer l'inclusion

$$\sigma(H) \subset \left\{ \frac{4\pi^2 n^2}{L^2},\ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Réciproquement il est clair que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $He_n = \frac{4\pi^2 n^2}{L^2} e_n$, ainsi nous avons bien que

$$\sigma(H) = \left\{ \frac{4\pi^2 n^2}{L^2},\ n \in \mathbb{Z} \right\}$$

2.1.2. Second exemple : l'oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique, ou opérateur d'Hermite comme on le nomme en analyse harmonique, est l'un des rares exemples d'opérateur de Schrödinger sur une variété non compacte dont on arrive à calculer explicitement le spectre. L'oscillateur harmonique joue un rôle très important dans l'étude des systèmes intégrables en classification symplectique : il sert en effet de modèle de référence des équilibres stables de type elliptique ; pour plus de détails, on peut consulter le livre de Vu Ngoc [54].

Ici on prend $M = \mathbb{R}$ et :

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2}$$

Les propriétés spectrales de l'opérateur H sont très remarquables : on arrive à calculer son spectre et les vecteurs propres associés de manière explicite. Ces calculs, d'un point de vu très formel, se trouvent dans n'importe quel bon livre de mécanique quantique. Pour des démonstrations précises, on conseille par exemple le livre de M.E. Taylor [53]. Le résultat est alors le suivant, le spectre de l'opérateur H est *:*

$$\sigma(H) = \left\{ n + \frac{1}{2},\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

avec comme vecteurs propres associés la base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ constituée des fonctions d'Hermite :

$$e_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \text{ où } H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

2.2. Étude qualitative spectrale

Dans nombre de cas on ne sait pas calculer un spectre ; on essaye alors de le décrire de manière qualitative. Il y a, disons, deux sous thèmes :

– le premier concerne le bas du spectre : on s'intéresse aux plus petites valeurs propres de l'opérateur.

– le second est l'étude de l'asymptotique des grandes valeurs propres : l'analyse semi-classique.

2.2.1. Exemples de résultats qualitatifs en bas du spectre

Donnons quelques exemples de résultats concernant le bas du spectre. Commençons par des résultats de comparaison des premières valeurs propres.

Théorème 3. *(Théorème de Faber-Krahn, 1953) : soit M une partie bornée de $\mathbb{R}^n$. En notant par $\lambda_1(M)$ la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec conditions de Dirichlet, on a :*

$$\lambda_1(M) \geqslant \lambda_1(B_M)$$

B_M désignant la boule euclidienne de volume égal à Vol(M). Et on a égalité si et seulement si Mest isométrique à B_M.

Dans le même style, on a aussi la version avec conditions de Neumann où l'inégalité est dans l'autre sens :

Théorème 4. *(Théorème de Szegö-Weinberger, 1954) : soit M une partie bornée de $\mathbb{R}^n$. En notant par $\mu_1(M)$ la première valeur propre de de l'opérateur $-\Delta$ avec conditions de Neumann, on a :*

$$\mu_1(M) \leqslant \mu_1(B_M)$$

B_M désignant la boule euclidienne de volume égal à $Vol(M)$. Et on a égalité si et seulement si Mest isométrique à B_M.

Un autre type de résultat classique concerne les constantes de Cheeger :

Soit (M, g) une variété riemannienne connexe et compacte de dimension $n \geqslant 1$. Pour toute partie bornée régulière D de M, on considère la quantité

$$h(D, g) = \frac{\mathrm{Vol}(\partial D, g)}{\mathrm{Vol}(D, g)}$$

où $\mathrm{Vol}(\partial D, g)$ est le volume $n-1$ dimensionnel.

On définit ensuite la constante de Cheeger par

$$h(M, g) = \inf_{D \in X} h(D, g)$$

X étant l'ensemble de tous les domaines de M de volumes majorés par $\frac{\mathrm{Vol}(M,g)}{2}$. Alors un des résultats de Cheeger est que la première valeur propre non nulle du laplacien est minorée par $\frac{h(M,g)^2}{4}$ [10].

Pour finir, donnons un autre résultat intéressant qui concerne la multiplicité des valeurs propres en fonction de la topologie. Pour cela plaçons nous un instant dans le cas des surfaces : si (M, g) est une surface complète connexe, et

$$H = -\Delta_g + V$$

avec $V \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ tels que $\lim\limits_{|x| \to \infty} V(x) = +\infty$. En notant (cf. Théorème 2) par

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots$$

le spectre de l'opérateur H et par m_k la multiplicité de la k-ème valeur propre λ_k, nous avons le résultat dû à S.Y. Cheng [14] et amélioré par G. Besson [11], Y. Colin De Verdière [19], N. Nadirashvili [45] et B. Sévennec [51] :

Théorème 5. *Sous les hypothèses précédentes nous avons :*

– *Si $X = \mathbb{S}^2$ ou $\mathbb{R}^2$, alors $\forall k \geqslant 3$, $m_k \leqslant 2k - 3$.*
– *Si $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ou K_2 (la bouteille de Klein), alors $\forall k \geqslant 1$, $m_k \leqslant 2k + 1$.*
– *Si $X = \mathrm{T}^2$, alors $\forall k \geqslant 1$, $m_k \leqslant 2k + 2$.*
– *En notant par $\chi(M)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré, si $\chi(M) < 0$, alors $\forall k \geqslant 1$, $m_k \leqslant 2k - 2\chi(M)$.*

2.2.2. Étude qualitative du « haut » du spectre

L'exemple de base est la formule asymptotique de Weyl de 1911,[10]. Pour le laplacien dans un domaine rectangulaire Ω de $\mathbb{R}^2$ avec des conditions de Dirichlet aux bords, le physicien P. Debye conjectura que le nombre de valeurs propres $\mathcal{N}(\lambda)$ inférieure à un réel positif λ, vérifié l'équivalence, pour $\lambda \to +\infty$

$$\mathcal{N}(\lambda) \sim \frac{\mathrm{Vol}(\Omega)}{4\pi}\lambda$$

où $\mathrm{Vol}(\Omega)$ est l'aire du rectangle Ω. En 1911, H.Weyl démontra cette conjecture.

Théorème 6. *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte connexe de dimension n, si on note par $\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots$ les valeurs propres de l'opérateur $-\Delta_g$ sur M, on a l'équivalent pour $\lambda \to +\infty$*

$$\mathrm{Card}\left(\{k \in \mathbb{N},\ \lambda_k \leqslant \lambda\}\right) \sim \frac{B_n Vol(M,g)}{(2\pi)^n}\lambda^{\frac{n}{2}}$$

où $B_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

On reviendra dans la dernière partie à l'étude du « haut » du spectre en utilisant l'analyse semi-classique.

3. Problèmes inverses : la géométrie spectrale

3.1. Le son détermine t-il la forme d'un tambour ?

La problématique inverse est la suivante : étant donné le spectre d'un laplacien ou d'un opérateur de Schrödinger, quelles informations géométriques sur la variété (M,g) peut-on avoir ? Dans le cas du laplacien, un des premiers à formaliser mathématiquement cette question est sans doute Mark Kac [36] en 1966 dans son célèbre article *« Can one hear the shape of a drum ? »*[4] : pour le laplacien riemannien, une suite de valeurs propres (un ensemble d'harmoniques du tambour) caractérise-t-elle, à isométrie près, la variété de départ (la géométrie du tambour) ? Il est connu que si deux variétés sont isométriques, elles sont alors isospectrales (c'est-à-dire ont le même spectre). Mais qu'en est-t-il de la réciproque ?

On sait depuis 1964, que la réponse au problème de M. Kac est négative ; en effet, J. Milnor [53] donne comme exemple de variétés isospectrales mais non isométriques, une paire de tores plats de dimension 16. Depuis, de nombreux autres exemples ont été trouvés, a commencer par T. Sunada [52], qui en 1985 donne une méthode de construction systématique de variétés isospectrales non isomorphes. C. Gordon et E.N. Wilson [32] ont aussi donné en 1984 une méthode de construction de déformations continues de variétés qui sont isospectrales sans être isométriques. L'histoire ne s'arrête pas là, d'autres méthodes de construction apparaissent, comme par exemple la méthode de transplantation de P. Bérard [3], [4] etc...

En 1992, C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert [33] donnent le premier exemple de deux domaines plans non isométriques, mais ayant tout de même un spectre

[4] « Peut-on entendre la forme d'un tambour ? »

commun pour le laplacien avec conditions de Neumann ou de Dirichlet. Pour plus de détails sur cet exemple ou pourra consulter les auteurs [33], [34] mais aussi voir les articles très pédagogiques de P. Bérard [6], [7], [8]. Mentionnons aussi pour finir le travail de S. Zelditch [55] datant de 2000, où il montre que si on se restreint à des parties de $\mathbb{R}^2$ simplement connexes avec un bord analytique et possédant deux axes de symétrie orthogonaux, alors le spectre détermine complètement la géométrie.

3.2. Spectre des longueurs et formules de traces

La donnée du spectre du laplacien donne des informations sur d'autres invariants géométriques comme la dimension, le volume et l'intégrale de la courbure scalaire. En fait le laplacien fournit aussi d'autres invariants, comme par exemple le spectre des longueurs d'une variété. Le spectre des longueurs d'une variété riemannienne est l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques. En 1973 Y. Colin de Verdière [15], [16], montre que dans le cas compact, modulo une hypothèse de généricité toujours vérifiée à courbure sectionnelle négative, le spectre du laplacien détermine complètement le spectre des longueurs. La technique utilisé par Y. Colin de Verdière repose sur les formules de traces. Ces dernières s'utilisent dans un cadre beaucoup plus général que celui des opérateurs de Schrödinger.

Le principe formel des formules de traces est le suivant : considérons d'abord un opérateur linéaire H non-borné sur un Hilbert ayant un spectre discret : $\sigma(H) = \{\lambda_n,\, n \geqslant 1\}$, et puis une fonction f « sympathique ». La formule de trace consiste alors à calculer la trace de l'opérateur $f(H)$ de deux façons différentes :

– la première façon, lorsque que cela a un sens, avec les valeurs propres de l'opérateur linéaire $f(H)$

$$\mathrm{Tr}(f(H)) = \sum_{k\geqslant 1} f(\lambda_k)$$

– la seconde façon, via le noyau de Schwartz de l'opérateur $f(H)$, si $f(H)\varphi(x) = \int_M K_f(x,y)\varphi(y)\,dy$, alors

$$\mathrm{Tr}(f(H)) = \int_M K_f(x,x)\,dx$$

Ainsi

$$\sum_{k\geqslant 1} f(\lambda_k) = \int_M K_f(x,x)\,dx$$

La difficulté réside dans le choix de f, d'une part pour légitimer ces formules, et d'autre part pour arriver à en tirer des informations spectro-géométriques. Les choix de fonctions f les plus courants sont : $f(x) = e^{-xt}$ où $t \geqslant 0$ (fonction de la chaleur), $f(x) = \frac{1}{x^s}$, où $s \in \mathbb{C}$, avec $Re(s) > 1$ (fonction zêta de Riemann), $f(x) = e^{-\frac{itx}{h}}$ où $t \geqslant 0$ (fonction de Schrödinger), etc ...

Pour fixer les idées, donnons un exemple simple de formule de trace exacte : la formule sommatoire de Poisson pour un réseau [5] Γ de $\mathbb{R}^n$. La formule de Poisson sur le tore $\Gamma \setminus \mathbb{R}^n$ nous donne l'égalité :

$$\sum_{\lambda\in\sigma(\Delta_g)} e^{-\lambda t} = \frac{\mathrm{Vol}\,(\Gamma \setminus \mathbb{R}^n)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \sum_{l\in\Sigma} e^{-\frac{l^2}{4t}} \tag{2}$$

où $\sigma(\Delta_g)$ est le spectre de l'opérateur Δ_g et Σ le spectre des longueurs comptées avec leurs multiplicités, la multiplicité d'une longueur étant le nombre de classes d'homotopies de lacets du tore plat $\Gamma \setminus \mathbb{R}^n$ représentées par une géodésique périodique de cette longueur. Dans l'égalité (2) le terme de droite correspond à la partie géométrique (volume, dimension,...) alors que le terme de gauche contient les informations spectrales. Pour une référence récente voir [26].

4. Une invitation à l'analyse semi-classique

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude spectrale de l'opérateur de Schrödinger sur une variété riemannienne complète connexe de dimension $n \geqslant 1$:

$$H = -\frac{h^2}{2}\Delta_g + V \tag{3}$$

où h est un paramètre réel strictement positif.

De manière extrêmement simple et naïve, l'idée de l'analyse semi-classique est de comprendre le spectre de l'opérateur H lorsque le paramètre $h \to 0$. On va dans cette partie donner une idée générale de ce qu'est l'analyse semi-classique, puis on terminera sur un exemple concret de calcul de spectre. Pour le lecteur qui voudrait en savoir plus sur l'analyse semi-classique, on conseille la littérature suivante : Y. Colin de Verdière [25], Dimassi-Sjöstrand [28], L. Evans et M. Zworski [29], A. Martinez [43], D. Robert [50], S. Vu Ngoc [54].

4.1. Philosophie de l'analyse semi-classique

Dans la limite des grandes valeurs propres, l'asymptotique du spectre de l'opérateur de Schrödinger

$$H = -\frac{h^2}{2}\Delta_g + V$$

ou plus généralement d'un opérateur pseudo-différentiel, est remarquablement liée à une géométrie sous-jacente. Celle-ci vit sur le fibré cotangent T^*M, vu comme une variété symplectique[6] : c'est la géométrie de l'espace des phases. C'est d'ailleurs le même phénomène qui permet de voir la mécanique classique (structure de variété symplectique) comme limite de la mécanique quantique (structure d'algèbre d'opérateurs).

[5] Un réseau de $\mathbb{R}^n$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$ qui engendre $\mathbb{R}^n$.

[6] Rappelons que le fibré cotangent d'une variété différentiable est naturellement muni d'une structure symplectique. En effet, pour toute variété M lisse de dimension n, on peut munir de façon intrinsèque son fibré cotangent T^*M d'une structure de variété symplectique (T^*M, ω) de dimension $2n$ définie par la différentielle extérieure $\omega = d\alpha$ de la 1-forme de Liouville α.

Voyons pourquoi s'intéresser à l'asymptotique du spectre de l'opérateur H, revient dans une certaine mesure à faire tendre le paramètre h vers 0 (limite semi-classique).

Par exemple, pour $E > 0$ fixé, l'équation :

$$-\frac{h^2}{2}\Delta_g\varphi = E\varphi$$

admet φ_k, le k-ième vecteur propre du laplacien Δ_g, comme solution si

$$-\frac{h^2}{2}\lambda_k = E$$

Ainsi si $h \to 0^+$, alors $-\lambda_k \to +\infty$. C'est pourquoi la limite semi-classique peut se voir comme l'asymptotique des grandes valeurs propres du laplacien.

Revenons un instant à la limite $h \to 0$, quel est son sens physique ? En « principe » tout système physique est de par nature quantique. D'après les fameuses inégalités d'incertitude de Heisenberg, on ne peut pas mesurer précisément à la fois vitesse et position d'un électron, sauf si $h = 0$. En fait plus h est petit, plus on peut faire des mesures simultanées précises. Ainsi plus $h \to 0$, plus on se rapproche du déterminisme de la mécanique classique sur le fibré cotangent T^*M.

En pratique quand on fait de l'analyse semi-classique, on travaille à la fois avec des objets classiques (variétés symplectiques, algèbre des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, crochet de Poisson, équations de Hamilton,...) et des objets quantiques (espace de Hilbert, algèbre d'opérateurs, commutateur, équation de Schrödinger,...). Pour l'étude d'un opérateur de Schrödinger on est amené à considérer deux hamiltoniens vivant sur deux structures mathématiques distinctes :

– Hamiltonien classique

On notera par p la fonction définie sur le fibré cotangent de M par :

$$p(x,\xi) = \frac{\xi^2}{2} + V(x) \in \mathcal{C}^\infty(T^*M, \mathbb{R})$$

– Hamiltonien quantique

On associe à la fonction p définie ci dessus, son quantifié de Weyl $\widehat{P}$, opérateur linéaire à domaine agissant sur une sous partie de $L^2(M)$:

$$\widehat{P} = -\frac{h^2}{2}\Delta_g + V$$

Pour finir, donnons une notation utile :

Notation 1. *Soient u_h et v_h deux fonctions dépendant d'un paramètre $h > 0$, alors si*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists C_k > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |u_h(x) - v_h(x)| \leqslant C_k h^k$$

on dira alors que les deux fonctions u_h et v_h sont égales à $O(h^\infty)$ près, et on notera $u_h = v_h + O(h^\infty)$.

Définition 2. *Le spectre semi-classique d'un opérateur linéaire auto-adjoint $\widehat{H}$ est l'ensemble $\Sigma_h(\widehat{H})$ des $\mu_h \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\exists u_h \in L^2(M),\ u_h \neq 0,\ \Big(\widehat{H} - \mu_h I_d\Big)(u_h) = O(h^\infty)$$

I_d étant l'opérateur identité.

Moralement le spectre semi-classique (ou microlocal) correspond aux valeurs propres approchées avec une précision d'ordre $O(h^\infty)$.

Le lien précis entre spectre exact et semi-classique est donné par la

Proposition 1. *[54] Sur un compact K de $\mathbb{R}$, le spectre semi-classique $\Sigma_h(\widehat{H})$ et le spectre exact $\sigma(\widehat{H})$ de l'opérateur linéaire auto-adjoint $\widehat{H}$ sont liés par :*

$$\Sigma_h(\widehat{H}) \cap K = \sigma(\widehat{H}) \cap K + O(h^\infty)$$

au sens où si $\lambda_h \in \Sigma_h(\widehat{H}) \cap K$, alors $\exists \mu_h \in \sigma(\widehat{H}) \cap K$ tel que $\lambda_h = \mu_h + O(h^\infty)$; et si $\mu_h \in \sigma(\widehat{H}) \cap K$, alors $\exists \lambda_h \in \Sigma_h(\widehat{H}) \cap K$ tel que $\mu_h = \lambda_h + O(h^\infty)$.

4.2. Un exemple de calcul de spectre semi-classique : le double puits

Dans une série de trois articles [20], [21] et [24] Y. Colin de Verdière et B. Parisse se sont interéssés au spectre semi-classique de l'opérateur de Schrödinger

$$\widehat{P} = -\frac{h^2}{2}\Delta + V$$

sur la variété $M = \mathbb{R}$, avec un potentiel V type double puits ayant un unique maximum local non dégénéré. Dans [21] et [24] les deux auteurs donnent une condition nécessaire et suffisante pour trouver le spectre semi-classique de l'opérateur $\widehat{P}$ dans une boule de taille h centrée autour de l'origine. Dans [41] on donne, à partir de la formule de Colin de Verdière-Parisse, la forme de ce spectre.

4.2.1. Le contexte

Soit $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\lim_{|x| \to \infty} V(x) = +\infty$, et V possédant exactement un maximum local non dégénéré, que l'on supposera atteint en 0, ainsi : $V(0) = 0,\ V'(0) = 0, V''(0) < 0$. Un exemple typique est la fonction : $V(x) = x^4 - x^2$.

On notera par p l'hamiltonien classique définie sur le fibré cotangent de $\mathbb{R}$ par :

$$p(x,\xi) = \frac{\xi^2}{2} + V(x) \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

On associe à cette fonction, l'hamiltonien quantique $\widehat{P}$, vu comme opérateur linéaire non-borné sur $L^2(\mathbb{R})$:

$$\widehat{P} = -\frac{h^2}{2}\Delta + V$$

Pour étudier le spectre de l'opérateur $\widehat{P}$ dans un voisinage de taille h autour de l'origine, fixons nous un $C > 0$, et pour $\lambda \in [-C, C]$ considérons l'opérateur :

$$\widehat{H_\lambda} = \widehat{P} - h\lambda I_d$$

Ainsi par définition du spectre semi-classique, nous avons que

$$\exists u_h \in L^2(\mathbb{R}),\ u_h \neq 0,\ \widehat{H_\lambda}(u_h) = O(h^\infty) \Longleftrightarrow \lambda h \in \Sigma_h(\widehat{P})$$

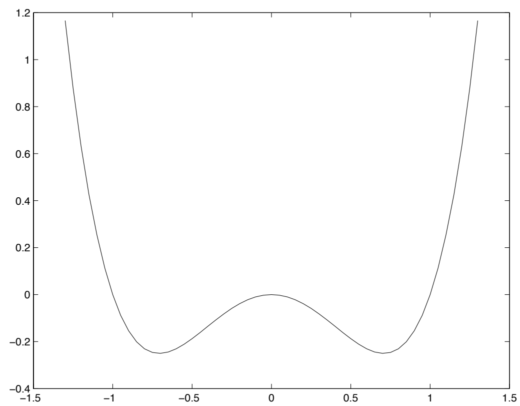


FIG. 1. La courbe représentative de la fonction potentiel $V(x) = x^4 - x^2$. On distingue les deux puits (les minimums) du potentiel, le droit et le gauche.

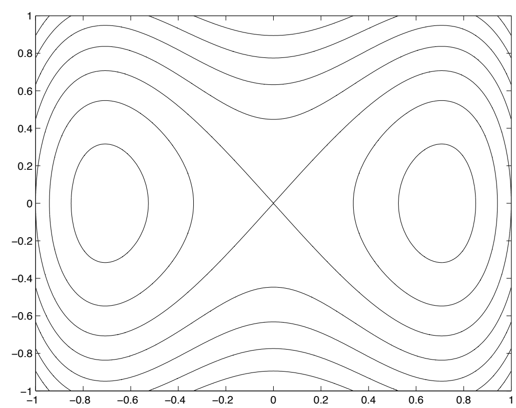


FIG. 2. Courbes de $p^{-1}(c)$ dans le fibré cotangent $T^*\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$. Avec des $c > 0$: une seule composante connexe, $c = 0$: le huit hyperbolique, $c < 0$: deux composantes connexes elliptiques.

4.2.2. La formule de Colin de Verdière-Parisse

Y. Colin de Verdière et B. Parisse, à l'aide de techniques fines d'analyse microlocale, et en utilisant des formes normales, ont démontré la formule suivante [21], [24] :

Théorème 7. *L'équation $\widehat{H_\lambda}(u_h) = O(h^\infty)$ admet une solution $u_h \in L^2(\mathbb{R})$ non triviale, avec son microsupport $MS(u_h) = p^{-1}\{0\}$, si et seulement si λ vérifie l'équation suivante :*

(4)
$$\frac{1}{\sqrt{1+e^{2\pi\varepsilon}}}\cos\left(\frac{\theta_g-\theta_d}{2}\right)=\cos\left(\frac{\theta_g+\theta_d}{2}+\frac{\pi}{2}+\varepsilon\ln(h)+\arg\left(\Gamma(\frac{1}{2}+i\varepsilon)\right)\right)$$
où $\varepsilon=\varepsilon(h,\lambda)$, $\theta_{g/d}=\theta_{g/d}(h,\lambda)$ sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à λ et admettant des développements asymptotiques en puissance de h. Plus précisément :

$$\varepsilon(h,\lambda)=\frac{\lambda}{\sqrt{-V''(0)}}+\sum_{j\geqslant 1}\varepsilon_j(\lambda)h^j$$
$$\theta_{g/d}(h,\lambda)=\frac{1}{h}A_{g/d}(0)-\lambda\sigma_{g/d}(0)+\sum_{j\geqslant 1}\theta_{g/d,j}(\lambda)h^j$$

où $A_{g/d}(0)$ désigne l'intégrale d'action du puit gauche/droit, et $\sigma_{g/d}(0)$ l'invariant symplectique associé [54].

4.2.3. Le spectre est un doublet en quinconce

En utilisant la formule de Colin de Verdière-Parisse, on peut en déduire des informations sur la forme du spectre semi-classique de l'opérateur

$$\widehat{P}=-\frac{h^2}{2}\Delta+V$$

autour de l'origine. A cause de la présence des deux puits de potentiel on s'attend à avoir deux spectres qui s'entremêlent ; dans [41] on montre que dans une bande $[-Ch,Ch]$, où C est une constante réelle strictement positive et indépendante du paramètre h, le spectre semi-classique de l'opérateur $\widehat{P}$ est constitué de deux familles de réels en quinconce, et l'interstice est d'ordre $O(h/|\ln(h)|)$:

Théorème 8. *Le spectre semi-classique de l'opérateur $\widehat{P}$ sur un compact de la forme $[-Ch,Ch]$ où $C>0$, s'écrit comme la réunion disjointe de deux suites :*

$$(h\alpha_k(h))_k\coprod(h\beta_l(h))_l$$

avec $\alpha_k(h)=\mathcal{A}_h(k)$ et $\beta_l(h)=\mathcal{B}_h(l)$, $\mathcal{A}_h$ et $\mathcal{B}_h$ étant des fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Les deux suites $(h\alpha_k(h))_k$ et $(h\beta_l(h))_l$ sont strictement décroissantes et en quinconce :

$$h\beta_{k+1}(h)<h\alpha_k(h)<h\beta_k(h)<h\alpha_{k-1}(h)$$

En outre l'interstice est de l'ordre de $O(h/|\ln(h)|)$:

$$|h\alpha_k(h)-h\alpha_{k-1}(h)|=O\left(\frac{h}{|\ln(h)|}\right)\quad et\quad |h\beta_l(h)-h\beta_{l-1}(h)|=O\left(\frac{h}{|\ln(h)|}\right)$$

5. Références

[1] C. ANNÉ, *Majoration de multiplicités pour l'opérateur de Schrödinger,* Séminaire de théorie spectrale et géométrie de Grenoble 8 : 53-60, 1989-1990.

[2] P. BÉRARD, *Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques ,* Astérisque 177-178 : 127-154, 1989.

[3] P. BÉRARD, *Transplantation et isospectralité I ,* Math. Ann. 292 : 547-559, 1992.

[4] P. BÉRARD, *Transplantation et isospectralité II ,* J. London Math. Soc. 48 : 565-576, 1993.

[5] P. BÉRARD, *The isospectral problem for Riemannian manifolds,* Cours de DEA, Grenoble 1993. http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/isos-dea93.ps

[6] P. BÉRARD, *On ne peut pas entendre la forme d'un tambour : Introduction,* Auxerre 2001. http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/tambours.pdf

[7] P. BÉRARD, *On ne peut pas entendre la forme d'un tambour : Exposé 1,* Auxerre 2001. http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/auxerre1.pdf

[8] P. BÉRARD, *On ne peut pas entendre la forme d'un tambour : Exposé 2,* Auxerre 2001. http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/auxerre2.pdf

[9] P. BÉRARD & M. BERGER, *Le spectre d'une variété riemannienne en 1982,* Kaigai (Tokyo) 1983.

[10] M. BERGER, P. GAUDUCHON & E. MAZET, *Le spectre d'une variété Riemannienne* , Lectures Notes in Mathematics 194, Springer-Verlag 1971.

[11] G. BESSON, *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes,* Ann. Inst. Fourier. 30 : 109-128, 1980.

[12] T. CARLEMAN, *Sur la théorie mathématique de l'équation de Schrödinger,* Ark. Mat. Astr. Fys. 24B 11 :1-7, 1934.

[13] S. Y. CHENG, *Eingenvalues comparison theorems and geometric applications,* Math. Z. 143 : 289-290, 1975.

[14] S. Y. CHENG, *Eingenfunctions and nodal sets,* Comment. Math. Helv. 51 : 43-55, 1979.

[15] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I,* Compositio Mathematica, 27 : 80-106, 1973.

[16] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II,* Compositio Mathematica, 27 : 159-184, 1973.

[17] Y. COLIN DE VERDIÈRE & J. VEY, *Le lemme de Morse isochore,* Topology, 18 : 283-293, 1979.

[18] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien,* Comment. Math. Helv, 61 : 254-270, 1986.

[19] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée,* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris, 20 : 599-615, 1987.

[20] Y. COLIN DE VERDIÈRE & B. PARISSE, *Equilibre instable en régime semi-classique I : Concentration microlocale,* Comm PDE, 19 : 1535-1564, 1994.

[21] Y. COLIN DE VERDIÈRE & B. PARISSE, *Equilibre instable en régime semi-classique II : Conditions de Bohr-Sommerferld,* Ann IHP, 61 : 347-367, 1994.

[22] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Le spectre du laplacien : survol partiel depuis le Berger-Gauduchon-Mazet et problèmes,* Actes de la table tournante en l'honneur de Marcel Berger, Séminaires et Congrès SMF, 1 : 233-252, 1996.

[23] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectres de graphes,* Cours Spécialisés numéro 4, SMF, 1998.

[24] Y. COLIN DE VERDIÈRE & B. PARISSE, *Singular Bohr-Sommerfeld rules,* Commun. Math. Phys, 205 : 459-500, 2000.

[25] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Méthodes semi-classiques et théorie spectrale*, Cours de DEA, 2006.

[26] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectrum of the Laplace operator and periodic geodesics : thirty years after,* Ann. Inst. Fourier. 57 (7) : 2429-2463, 2008.

[27] R. COURANT & D. HILBERT, *Methods of mathematical physics,* Intersciences Publishers, New York, 1953.

[28] M. DIMASSI & J. SJÖSTRAND, *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, London Math Society Lectures Note Series 268, 1999.

[29] L. EVANS & M. ZWORSKI, *Lectures on semiclassical analysis*. http ://math-berkeley.edu/~zworski/semiclassical.pdf.

[30] G. FABER, *Beweis, dass unter allen homogen Menbranen von gleicher Fläche ung gleicher Spannung die kriesförmige den tiefsten Grundton gibt. Sitzungberitchte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München Jahrgang,* 169-172, 1923.

[31] K. FRIEDRICHS, *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren*, Math. Ann. 109 : 465-487, 685-713, 1934.

[32] C. GORDON & E. N. WILSON, *Isospectral deformations on compact solvmanifolds*, J. Diff. Geom. 19 : 241-256, 1984.

[33] C. GORDON, D. WEBB & S. WOLPERT, *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, Inventiones mathematicae 110 : 1-22, 1992.

[34] C. GORDON, D. WEBB & S. WOLPERT, *One cannot hear the shape of a drum*, Bulletin of the AMS 27 : 134-138, 1992.

[35] C. GORDON, *Isospectral closed riemannian manifolds which are not localy isometric*, J. Diff. Geom. 37 : 639-649, 1993.

[36] M. KAC, *Can one hear the shape of a drum ?*, American Mathematical Monthly 73 (4) : 1-23, 1966.

[37] T. KATO, *Schrödinger operators with singular potentials*, Israel J. Math. 13 : 135-148, 1972.

[38] V. A. KONDRAT'EV & M.A. SHUBIN, *Discreteness of the spectrum for Schrödinger operators on manifolds of bounded, geometry* , Proceedings of the conference "Functional Analysis, Partial Differential Equations and Applications" dedicated to the V. G. Maz'ya 60th birthday, Rostock, 1998.

[39] V. A. KONDRAT'EV & M.A. SHUBIN, *Conditions for the discreteness of the spectrum for Schrödinger operators on manifold*s, Funct. Anal. and Appl. 33, 1999.

[40] E. KRAHN, *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*, Math. Ann. 94 : 97-100, 1925.

[41] O. LABLÉE, *Sur le calcul du spectre semi-classique de l'opérateur de Schrödinger autour d'une singularité hyperbolique*. http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~lablee/hyperbolique.pdf

[42] P. LÉVY-BRUHL, *Introduction à la théorie spectrale*, Dunod, 2003.

[43] A. MARTINEZ, *An introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*, Springer, 2001.

[44] J. MILNOR, *Eingenvalues of the Laplace operator on certain manifolds*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 51 : 542, 1964.

[45] N. NADIRASHVILI, *Multiple eigenvalues of the Laplace operator,* Math. USSR Sbornik, 61 : 225-238, 1988.

[46] I. M. OLEINIK, *On the essential self-adjointness of the Schrödinger operators on a complete Riemannian manifold* , Math. Notes. 54 :934-939, 1993.

[47] I. M. OLEINIK, *On the connection of the classical and quantum mechanical compl-teness of a potential at infinity on complete Riemannian manifolds* , Math. Notes. 55 : 380-386, 1994.

[48] I. M. OLEINIK, *On the essential self-adjointness of the Schrödinger-type operators on a complete Riemannian manifold* , PhD thesis, Northeastern University, 1997.

[49] M. REED & B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics*, Academic Press, 1975.

[50] D. ROBERT, *Autour de l'approximation semi-classique*, volume 68 of Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1987.

[51] B. SEVENNEC, *Majoration topologique de la multiplicité du spectre des surfaces*, Séminaire de Théorie spectrale et géométrie de Grenoble, 12 : 29-35, 1993-1994.

[52] T. SUNADA, *Riemannian covering and isospectral manifolds*, Ann. of Math. 121 : 169-186, 1985.

[53] M. E. TAYLOR, *Noncommutative harmonic analysis*, Mathematical Surveys and Monographs, AMS, 1986.

[54] S. VU NGOC, *Systèmes intégrables semi-classiques : du local au global,* Panoramas et synthèses 22, SMF,2006.

[55] S. ZELDITCH, *Spectral determination of analytic bi-axisymmetric plain domains,* Geom. And Func. Ana. 10 : 628-677, 2000.

L'auteur remercie les prélecteurs de ces notes, en particulier, Stéphane Baseilhac, Pierre Bérard, Gérard Besson, Yves Colin de Verdière, Gilles Leborgne et Hervé Pajot.

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Les mathématiques de la linguistique computationnelle

Deuxième volet : Logique[1]

Christian Retoré[2]

À mon père et professeur de mathématiques de première, aujourd'hui artiste peintre, pour ses 70 ans

Cet article est le second volet d'une présentation de la linguistique computationnelle qui place l'accent sur les modèles mathématiques ou informatiques utilisés ou initiés par des considérations linguistiques. Nous avons organisé ces modèles en deux familles, non disjointes : la théorie des langages qu'a présentée le premier volet et la logique qui fait l'objet de ce second volet. Partant de remarques sur les origines communes de la logique et de la grammaire, on verra comment les grammaires catégorielles, en particulier depuis le calcul syntaxique de Joachim Lambek, font des dérivations syntaxiques des preuves dans une version non commutative de la logique linéaire de Jean-Yves Girard. La combinatoire particulière des grammaires catégorielles permet aussi de les acquérir automatiquement à partir d'exemples de phrases. Surtout, leur lien fort avec la théorie des types et le lambda calcul leur permet d'analyser la syntaxe des phrases (comme le fait la théorie des langages), mais aussi de calculer le sens qu'elles véhiculent. Finalement nous abordons les premiers résultats qui relient les approches décrites dans ces deux volets, la théorie des langages et la logique.

1. Logique et grammaire : une longue histoire

Tandis que le premier volet de notre présentation [60] s'est concentré sur des modèles calculatoires de la syntaxe de la phrase, celui-ci portera davantage vers le sens de la phrase en s'ancrant dans la tradition logique. En effet, depuis l'antiquité gréco-romaine (Aristote, Denis de Thrace) grammaire et logique ont un cheminement parallèle [35, 8], qui s'est poursuivi au Moyen-Âge (scholastique) [35, 14], au

[1] Je remercie de leurs relectures Christian Bassac (CLLE et INRIA Bordeaux Sud-Ouest, université de Bordeaux), Alain Lecomte (SFL, université Paris VIII), Jean-Jacques Loeb (LAREMA, université d'Angers), Frédéric Patras (CNRS, université de Nice), Sylvain Pogodalla (LORIA, INRIA Nancy Grand Est), Jean-Xavier Rampon (LINA, université de Nantes), Gilles Zémor (IMB, université de Bordeaux).

[2] LaBRI (CNRS et université de Bordeaux) & INRIA Bordeaux Sud-Ouest

XVIII[e] (Port-Royal) [6, 5]... La raison en est simple : une phrase a une structure logique, la phrase simple est pour ainsi dire la version grand public de la proposition logique et la connexion entre logique et langage est toujours d'actualité [67, 26].

Un exemple que nous traiterons en entier plus loin est le suivant :

(1) Certains énoncés parlent d'eux-mêmes[3].

(2) $\exists x(\texttt{enonce}(x) \wedge \texttt{parler\_de}(x, x))$

Ce parallèle entre phrases et propositions participe d'une plus vaste correspondance entre rôles logiques et catégories syntaxiques. Plutôt qu'une similitude établie *a posteriori*, c'est tout simplement que les notions, logiques et grammaticales, ont été développées conjointement.

Les groupes nominaux correspondent aux individus de la logique (individus ou variables d'individus souvent quantifiées), les verbes intransitifs et les groupes verbaux correspondent à des prédicats monadiques (unaires) tandis que les verbes transitifs correspondent aux prédicats binaires et les verbes ditransitifs (*quelqu'un donne quelque chose à quelqu'un*) à des prédicats ternaires. Les adjectifs partagent des caractères avec les noms et groupes nominaux (accord, déclinaisons) mais aussi avec les verbes puisqu'ils expriment un prédicat ; quant aux groupes prépositionnels, ce ne sont ni des prédicats, ni des individus.

Bien évidemment les débats de l'antiquité et de la scholastique étaient considérablement entravés par l'absence de formalisme logique et en particulier de variables, ainsi que par l'absence de logique d'ordre supérieur qui permette de quantifier sur les propriétés. Les adjectifs comme *bon* sont plutôt des prédicats de prédicats, tandis que les adjectifs comme *français* dits adjectifs intersectifs sont de simples prédicats. C'est ce qui explique que de (3) on puisse déduire (4) et pas (5).

(3) tous les médecins sont des conducteurs

(4) (donc) tous les médecins français sont des conducteurs français

(5) *(donc) tous les bons médecins sont des bons conducteurs

Cette origine commune étant posée, on remarquera que nous avons déjà croisé, dans le premier volet, certains domaines de la logique et en particulier de la logique mathématique. Plus précisément, il s'agissait de deux domaines fort distants dans l'espace de la logique mathématique.

D'une part, concernant la syntaxe du langage naturel et les arbres d'analyse nous avons évoqué la théorie des modèles qui permet de décrire la classe des modèles d'une théorie, notamment les structures d'arbres décrivant la structure syntaxique d'une phrase.

D'autre part nous avons évoqué, de manière moins formelle, dans les différents champs d'étude de la linguistique, la sémantique. Cette dernière étudie le « sens » véhiculé par la langue et notamment le sens d'une phrase ou d'un discours, et c'est de cette étude, initialement philosophique, qu'est issue la logique. La logique mathématique apparue au début du XX[e] siècle notamment avec Frege est encore très proche des considérations linguistiques initiales. Il s'agit d'une part d'interpréter un énoncé dans un univers donné, mais aussi de construire à partir de ce qui est dit une représentation du sens, en général par une formule logique.

[3] Au sens de : « certains énoncés sont circulaires », comme *Cette phrase est vraie*, ou pire, *Je mens*.

A priori, ces deux aspects relèvent plutôt de la théorie des modèles : il s'agit d'interpréter une formule ou une théorie, de la relier aux structures dans lesquelles elle est vraie.

En fait, on peut unir ces deux aspects, forme et sens, par le biais d'un autre aspect de la logique, la théorie des types qui fait partie de la théorie de la démonstration. Ces théories étudient et formalisent le raisonnement logique, qu'il soit naturel ou mathématique, et les structures formelles utilisées par ce domaine de la logique, arbres et λ-termes, s'avèrent d'une pertinence qui excède largement la description du raisonnement : c'est aussi un modèle du calcul qui fonde aussi bien la programmation fonctionnelle que le calcul parallèle [28, 37, 43].

Ce rapprochement peut être *grosso modo* formulé ainsi : pourquoi ne pas identifier la structure d'une phrase avec la preuve formelle qu'elle est une phrase ? Il s'agira bien sûr d'une logique simple et élégante, bien adaptée à décrire une grammaire formelle, le calcul de Lambek [39]. Dans ce cas, on peut espérer traduire les formules particulières qui expriment la correction grammaticale de la phrase en formules de la logique ordinaire qui expriment le sens de la phrase, la preuve de bonne formation syntaxique se muant en une preuve de bonne formation sémantique : une phrase doit se traduire en une proposition.

On réalisera ainsi formellement un modèle en accord avec la compositionnalité chère à Gottlob Frege, même si cela est parfois discuté [35, 33] : le sens du tout est fonction du sens des parties. Richard Montague alla jusqu'à un parallèle règle à règle entre structure syntaxique et structure sémantique où la fonction qui compose les sens des parties est l'image de la composition syntaxique [65].

Nous allons consacrer l'essentiel de ce second volet aux grammaires catégorielles dites de Lambek, qui réalisent ce parallèle entre composition syntaxique et composition des sens. On verra qu'elles ramènent la bonne formation syntaxique d'une phrase à la prouvabilité d'une formule (ou au typage des constituants de la phrase) dans une logique. Tandis que la structure syntaxique est la preuve elle-même, un morphisme entre systèmes logiques transforme formules et preuves en représentations sémantiques. Cette organisation de la grammaire permet aussi de l'acquérir à partir d'exemples de phrases en un nombre fini d'étapes. Nous parlerons assez en détail des liens qui commencent à apparaître entre ces grammaires et la théorie des langages standard, en particulier de la complétude du calcul de Lambek pour ses modèles à base de monoïdes libres [15], et de la résolution par Mati Pentus en 1993 [52] de la conjecture formulée par Chomsky en 1963 [20] : les langages engendrés par les grammaires de Lambek sont algébriques (non contextuels). Hormis les résultats nouveaux pour lesquels on renvoie aux articles originaux, on trouvera davantage de détails dans nos notes de cours [59] ou, sur les questions d'acquisition de grammaire, dans un article de synthèse [7].

2. Grammaires catégorielles

Comme nous l'avons dit dans le premier volet, les grammaires non contextuelles sont une approximation raisonnable de la syntaxe des langues humaines. Nous avons également entrevu qu'il y a un lien étroit entre la structure syntaxique d'une phrase et sa structure logique. Nous allons présenter ici avec un peu plus de précision une famille de formalismes qui décrivent l'analyse syntaxique d'une phrase comme une déduction dans une logique des ressources (logique linéaire non commutative)[27, 1].

Le principal avantage de ce type de formalisme est la possibilité de calculer la structure logique d'une phrase à partir de sa structure syntaxique. Nous pourrons donc mieux, dans ce genre de formalisme, faire le lien avec des questions de sémantique logique évoquées au paragraphe 1.3 du premier volet, en particulier lorsqu'il s'agit de questions proches de la syntaxe comme la portée des quantificateurs.

Un autre intérêt de ce genre de syntaxe logique est la possibilité d'apprendre ces grammaires à partir d'exemples positifs, comme nous le verrons à la section 5, ce qui est l'un des deux critères de Chomsky pour un formalisme syntaxique comme mentionné au paragraphe 3.2 du premier volet. Quant à l'autre critère, la polynomialité de l'analyse en fonction du nombre de mots, elle résulte de l'équivalence avec les grammaires non contextuelles, ce qui sera un des résultats fondamentaux de la section 6.3 : la conjecture de Chomsky 1963 résolue par Pentus en 1993.

Comme nous l'avons dit plus haut, les catégories syntaxiques ont un pendant sémantique et logique. Un verbe transitif est un prédicat à deux places, et il peut être vu comme une fonction à deux arguments de type individu (groupes nominaux) qui produit une proposition. Ce genre de modèle, qui s'inscrit dans une tradition que l'on peut faire remonter aux recherches logiques d'Edmund Husserl [32, 29, 19] voire à Aristote, a été d'abord introduit pour vérifier la bonne formation des formules logiques par Kazimierz Ajdiukiewicz [3], et se présentait comme un calcul de fractions. Tout simplement, si t et e désignent respectivement la catégorie des valeurs de vérité et la catégorie des individus, un prédicat à un argument est de catégorie $\frac{t}{e}$, un prédicat à deux arguments est de catégorie $\frac{t}{ee}$, une opération logique comme $\wedge$ est de catégorie $\frac{t}{tt}$, et la formule *Dort Pierre* $\wedge$ *Regarde Marie Pierre* est bien formée, de catégorie $t = (\frac{t}{e}e)(\frac{t}{tt})(\frac{t}{ee}ee)$ – on verra ci-après que pour traiter convenablement les quantificateurs, il ne faut pas considérer que $\frac{t}{(\frac{t}{e})}$ soit égal à e.

À la différence des formules logiques en notation polonaise préfixée, les langues naturelles ont un ordre des mots qui leur est propre : en français l'ordre est généralement Sujet Verbe Objet, tandis qu'en japonais c'est plutôt Sujet Objet Verbe et en arabe classique Verbe Sujet Objet. Il faut donc plutôt utiliser des fractions non commutatives, notées $a \setminus b$ et $b \,/\, a$ comme l'a proposé Bar-Hillel en 1953 [9], soit à peu près en même temps qu'ont été introduites les grammaires de réécriture usuelles présentées dans le premier volet.

2.1. Catégories, séquents et dérivations

L'idée est d'associer à chaque mot une catégorie (aussi appelée formule, car il s'agit des formules d'une logique propositionnelle) qui exprime les compléments qui lui font défaut, à gauche et à droite. L'ensemble cat des catégories est le plus petit ensemble contenant des catégories de base et clos par les deux opérations $\setminus$ (lu *sous*) et / (lu *sur*). Les catégories de base (aussi appelées variables propositionnelles) contiennent en général S : phrase, *sn*, syntagme (ou groupe) nominal, *n* nom commun, *sv* syntagme (ou groupe) verbal, et éventuellement quelques autres, comme les groupes prépositionnels, les groupes verbaux, etc. On peut écrire cela $\mathrm{cat} ::= \mathrm{P} \quad | \quad \mathrm{cat} \setminus \mathrm{cat} \quad | \quad \mathrm{cat} \,/\, \mathrm{cat}$ avec $\mathrm{cat} = \{S, sn, n, \ldots\}$. Les sous catégories (ou sous formules) d'une catégorie (ou d'une formule) sont les catégories qui figurent à l'intérieur de cette catégorie ; par exemple, $(a \setminus b)$ est une sous catégorie de $d \ / \ ((a \setminus b) \ / \ c)$ mais pas $(d \ / \ a)$.

Ainsi on affectera par exemple la catégorie $(sn \setminus S) \ / \ sn$ à un verbe transitif : celui-ci doit recevoir à sa droite son complément d'objet, puis, à sa gauche, son sujet, et tous deux sont de catégorie *sn*. On peut rapprocher cette catégorie de l'expression $(sn^{-1}S)sn^{-1}$ mais on se méfiera de cette ressemblance : $(a^{-1}b)^{-1}$ ne se réduit pas à (ba^{-1}) et des expressions comme a^{-1} ou aa ne correspondent pas à des catégories.

Une grammaire catégorielle est définie par la donnée d'une application Lex des mots (ou terminaux) dans les parties finies de cat. Les règles que l'on verra ci-après, dites de réduction ou de déduction, sont universelles : c'est la fonction Lex qui détermine le langage engendré par la grammaire.

Définition 2.1. *Étant donnée une grammaire catégorielle de lexique* Lex, *une suite de mots $m_1 \dots m_n$ est de catégorie U si pour chaque mot m_i il existe un type $t_i \in \mathrm{Lex}(m_i)$ tel que la séquence de catégories $t_1, \dots, t_n$ se réduise en U, ce que l'on notera $t_1, \dots, t_n \vdash U$. Le langage engendré est l'ensemble des suites de mots de catégorie S.*

On observe des différences de conception entre les habituelles grammaires de réécriture :

Terminaux = mots	Terminaux = mots
Non-terminaux sans structure.	Catégories structurées.
Règles de production qui déterminent le langage engendré, écrites indépendamment des non terminaux.	Règles de réduction, indépendantes du langage décrit, qui s'appliquent en fonction de la structure des catégories.

Les règles universelles utilisées sont de deux sortes.

– Les règles d'élimination, les seules considérées par Bar-Hillel affirment concernant $\setminus$ que

– si une suite de mots $m_1 \dots m_n$ est de catégorie a
– et si une suite de mots $w_1 \dots w_p$ est de catégorie $a \setminus b$
– alors la suite de mots $m_1 \dots m_n w_1 \dots w_p$ est de catégorie b

et, concernant / que

– si une suite de mots $m_1 \dots m_n$ est de catégorie $b \ / \ a$
– et si une suite de mots $w_1 \dots w_p$ est de catégorie a
– alors la suite de mots $m_1 \dots m_p \ w_1 \dots w_n$ est de catégorie b

– Les règles d'introduction, que Lambek a apportées en 1958, sont les réciproques des règles d'élimination. Elles font des réductions de catégories un système déductif comme on le verra ci-après, en particulier aux paragraphes 3.3 puis 6.1. Pour $\setminus$, elles disent que :

– si la suite de mots $m_1 \dots m_n w_1 \dots w_p$ est de catégorie b
– et si la suite de mots $m_1 \dots m_n$ est de catégorie a
– alors la suite de mots $w_1 \dots w_p$ est de catégorie $a \setminus b$

tandis que pour / elles affirment symétriquement que :

– si la suite de mots $m_1 \dots m_n w_1 \dots w_p$ est de catégorie b
– et si une suite de mots $w_1 \dots w_p$ est de catégorie a
– alors la suite de mots $m_1 \dots m_n$ est de catégorie $b \,/\, a$

En transformant nos jugements *la suite de mots est de catégorie* X en jugements de la forme *la suite des catégories correspondantes se réduit en* X, on obtient les règles de réduction de la figure 1. Les points de départ des dérivations sont des axiomes $A \vdash A$, où la catégorie A est librement choisie. Les expressions manipulées par ces preuves sont appelés *séquents* et leur symbole principal est $\vdash$: à gauche de ce signe figure une suite finie de catégories appelées *hypothèses du séquent* où les majuscules grecques désignent des suites de catégories, et à droite *une* catégorie appelée *conclusion du séquent*. Ces règles se lisent *si la ou les réductions au dessus de la barre sont déjà établies, alors on a celle inscrite en dessous*. Lorsqu'un séquent s'obtient à partir des axiomes en appliquant les règles il est dit *dérivable* (comme dans un système grammatical) ou *démontrable* (puisqu'il s'agit aussi d'un système déductif). Les dérivations sont aussi appelées *preuves* ou *démonstrations*.

Les grammaires catégorielles de Yehoshua Bar-Hillel [9] sont appelées grammaires AB (pour Ajdukiewicz Bar-Hillel) ou *Basic Categorial Grammars* : elles n'utilisent que l'axiome et les deux règles $/_e$ et $\backslash_e$, parmi les quatre règles de la figure 1. Les grammaires de Lambek utilisent toutes les règles.

$$\frac{}{A \vdash A}\ \textit{axiome}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash A \backslash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}\ \backslash_e \qquad \frac{A, \Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash A \backslash C}\ \backslash_i \quad \Gamma \neq \varepsilon$$

$$\frac{\Delta \vdash B \,/\, A \quad \Gamma \vdash A}{\Delta, \Gamma \vdash B}\ /_e \qquad \frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash C \,/\, A}\ /_i \quad \Gamma \neq \varepsilon$$

FIG. 1. Les règles des grammaires AB (les deux règles de gauche, $/_e, \backslash_e$) et celles du calcul de Lambek en déduction naturelle (les quatre règles $/_e, \backslash_e, /_i, \backslash_i$). Les majuscules grecques désignent des suites de formules.

3. Exemples de dérivations et structure des analyses

3.1. Grammaires AB

Donnons un petit exemple de lexique/grammaire emprunté à une langue cousine du français, l'italien qui un peu plus loin, aura pour nous l'avantage de ne pas avoir d'inversion du sujet dans les questions.

Mot	Catégorie(s)	Traduction
cosa	$(S\,/\,(S\,/\,sn))$	*que* (interrogatif)
guarda	$(S\,/\,sv)$	(il, elle) *regarde*
passare	$(sv\,/\,sn)$	*passer*
il	$(sn\,/\,n)$	*le* (article)
treno	n	*train*

La phrase *guarda passare il treno* (*il regarde passer le train*) appartient au langage engendré, puisque le séquent $(S\,/\,sv), (sv\,/\,sn), (sn\,/\,n), n \vdash S$ est dérivable.

On peut comme dans les règles de la figure 2 écrire tous les contextes, ce qui donne :

$$\dfrac{(S\,/\,sv)\vdash(S\,/\,sv) \qquad \dfrac{(sv\,/\,sn)\vdash(sv\,/\,sn) \qquad \dfrac{(sn\,/\,n)\vdash(sn\,/\,n) \quad n\vdash n}{(sn\,/\,n), n\vdash sn}\,/_e}{(sv\,/\,sn),(sn\,/\,n),n\vdash sv}\,/_e}{(S\,/\,sv),(sv\,/\,sn),(sn\,/\,n),n\vdash S}\,/_e$$

Il existe plusieurs manières de représenter un arbre de dérivation et on peut aussi, sans perte d'information, ne noter que les conclusions des séquents, et dans ce cas les feuilles forment la suite des catégories qui correspondent aux mots.

$$\dfrac{(S\,/\,sv) \qquad \dfrac{(sv\,/\,sn) \qquad \dfrac{(sn\,/\,n) \quad n}{sn}\,/_e}{sv}\,/_e}{S}\,/_e$$

L'arbre de dérivation peut aussi être représenté ainsi :

$$[_{/_e}(S\,/\,sv) \quad [_{/_e}(sv\,/\,sn) \quad [_{/_e}(sn\,/\,n) \quad n]]]$$

Considérons maintenant la phrase *Cosa guarda passare*? (Que regarde-t-il passer ?). Elle n'appartient pas au langage engendré puisque la suite de catégories

$$(S\,/\,(S\,/\,sn))(S\,/\,sv)(sv\,/\,sn)$$

ne contient jamais deux catégories successives qui se réduisent.

3.2. Grammaires de Lambek

Les grammaires de Lambek sont définies comme les grammaires catégorielles de base – en particulier ce sont toujours des grammaires lexicalisées – à ceci près que l'on peut introduire des hypothèses, c'est-à-dire faire comme s'il y avait une suite de mots d'une catégorie donnée, puis supprimer cette hypothèse par les nouvelles règles d'introduction. Avec le même lexique que celui donné pour la grammaire AB ci-dessus, nous donnons en figure 2 la dérivation de $(S\,/\,(S\,/\,np)), S\,/\,vp, vp\,/\,np \vdash S$ qui montre que *cosa guarda passare* est une phrase – au passage, on dérive la transitivité de $/$.

$$\dfrac{(S\,/\,(S\,/\,sn)) \vdash (S\,/\,(S\,/\,sn)) \qquad \dfrac{\dfrac{(S\,/\,sv) \vdash (S\,/\,sv) \qquad \dfrac{(sv\,/\,sn) \vdash (sv\,/\,sn) \quad sn \vdash sn}{(sv\,/\,sn), sn \vdash sv}\,/e}{(S\,/\,sv), (sv\,/\,sn), sn \vdash S}\,/_e}{(S\,/\,sv), (sv\,/\,sn) \vdash S\,/\,sn}\,/_i}{(S\,/\,(S\,/\,sn)), (S\,/\,sv), (sv\,/\,sn) \vdash S}\,/_e$$

FIG. 2. Une déduction naturelle dans le calcul de Lambek

On peut se passer des contextes, ce qui donne un arbre plus aisément lisible, comme celui ci-dessous. Le contexte associé à une formule F est l'ensemble des feuilles, qui ne sont pas entre crochets ou dont les crochets qui les entourent sont associées à une règle d'introduction située plus bas que F(on verra ci-après qu'on peut reconstruire cette information).

$$\dfrac{(S\,/\,(S\,/\,sn) \qquad \dfrac{\dfrac{(S\,/\,sv) \qquad \dfrac{(sv\,/\,sn) \quad [sn]_1}{sv}\,/e}{S}\,/_e}{S\,/\,sn}\,/_i(1)}{S}\,/_e$$

3.3. Structure des dérivations dans les grammaires de Lambek

Nous proposons deux formulations du calcul de Lambek, et nous les comparons ici brièvement, ce sont du reste des résultats assez immédiats, qui s'obtiennent par récurrence sur la hauteur des preuves. La première propriété est une bonne nouvelle : les mêmes séquents sont dérivables dans l'un et l'autre système et la correspondance est relativement facile à établir.

$$\dfrac{}{A \vdash A}\,axiome \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \vdash K \qquad \Delta, K, \Theta \vdash C}{\Delta, \Gamma, \Theta \vdash C}$$

$$\dfrac{\Gamma, B, \Gamma' \vdash C \quad \Delta \vdash A}{\Gamma, \Delta, A \setminus B, \Gamma' \vdash C}\setminus_h \qquad \dfrac{A, \Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash A \setminus C}\setminus_i \quad \Gamma \neq \varepsilon$$

$$\dfrac{\Gamma, B, \Gamma' \vdash C \quad \Delta \vdash A}{\Gamma, B\,/\,A, \Delta, \Gamma' \vdash C}\,/_h \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash C\,/\,A}\,/_i \quad \Gamma \neq \varepsilon$$

FIG. 3. Les règles du calcul de Lambek, calcul des séquents. Les majuscules grecques désignent des suites de formules qui peuvent être vides.

Le lecteur est en droit de se demander pourquoi donner deux ensembles similaires de règles indigestes. En fait, il est difficile de se passer d'un de ces deux calculs :

le premier est plus adapté aux calcul de représentations sémantiques et le second est mieux adapté à la correspondance avec la théorie des langages standard.

La première remarque qui s'impose, c'est qu'en lisant $A \setminus B$ et B / A comme $A \Rightarrow B$, les règles du calcul de Lambek sont les règles usuelles de l'implication, ou plus précisément une restriction des règles usuelles, puisqu'on ne peut ni ajouter d'hypothèses, ni en fusionner (linéarité), ni même en permuter (non commutativité) : nous avons une authentique suite de formules sans à gauche de $\vdash$.

Une autre remarque concerne les deux formulations : dans un séquent $\Gamma \vdash X$ la suite d'hypothèses Γ n'est jamais vide (elle ne l'est pas initialement, et ne peut jamais le devenir à cause de la restriction sur les règles $\setminus_i$ et $/_i$), ce qui peut étonner. Du point de vue des suites de mots, cela revient à ne jamais affecter de catégorie à la suite vide. Si on omettait cette restriction, la suite vide ε aurait effectivement des catégories, toutes les catégories A telles que $\vdash A$, et notamment n / n (la catégorie des adjectifs antéposés). On pourrait alors donner la suite vide comme argument à une suite de mots ou un mot de catégorie de la forme $A \setminus B$ ou A / B, et par exemple à *très* qui est de catégorie $(n / n) / (n / n)$ (la catégorie des modifieurs d'adjectifs antéposés). Et tandis qu'on pensait qu'une suite de mots de catégorie A / B (ici $(n / n) / (n / n)$) *nécessitait* à sa droite une suite de mots de catégorie A (ici n / n) pour donner une suite de mots de catégorie B, avec la séquence vide, on pourrait montrer que *un très exemple* est un groupe nominal (tout comme si le vide entre *très* et *exemple* était un adjectif antéposé de catégorie n / n, comme le serait l'adjectif *simple*).

$$\dfrac{\text{un} : np / n \qquad \dfrac{\dfrac{\text{très} : (n / n) / (n / n) \qquad \dfrac{[n]_\alpha}{n / n}\,/_i{-}\alpha}{n / n}\,/_e \qquad \text{exemple} : n}{n}\,/_e}{np}\,/_e$$

Dans le calcul des séquents, les règles $\setminus_e$ et $/_e$ sont valides, mais on leur préfère des règles $\setminus_h$ et $/_h$ d'introduction de connecteurs en hypothèses, du côté gauche de $\vdash$. Voici de nouveau la dérivation de $(S / (S / np)), S / vp, vp / np \vdash S$ qui montre que *cosa guarda passare* est une phrase mais dans le calcul des séquents cette fois.

$$\dfrac{S \vdash S \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{S \vdash S \quad vp \vdash vp}{S / vp, vp \vdash S}\,/_h \quad np \vdash np}{S / vp, vp / np, np \vdash S}\,/_h}{S / vp, vp / np \vdash S / np}\,/_i}{(S / (S / np)), S / vp, vp / np \vdash S}\,/_h$$

Mentionnons brièvement quelques propriétés du calcul des séquents. L'axiome peut-être restreint aux catégories élémentaires puisque $A \vdash A$ est dérivable à partir de $p \vdash p$ et des autres règles (sans la coupure). La règle de coupure est redondante : toute preuve d'un séquent peut être transformée en une preuve sans coupure aussi dite *normale* (ce résultat s'établit facilement pour ce calcul, mais pour les logiques usuelles comme la logique classique, c'est plus délicat). On remarquera que les dérivations sans coupure satisfont la propriété de la sous formule : toute formule apparaissant dans l'un des séquents d'une dérivation est une sous formule d'une formule du séquent établi.

Dans la déduction naturelle une dérivation est dite *normale* lorsqu'on n'introduit jamais une formule $A \setminus B$ par la règle $\setminus_i$ pour immédiatement l'éliminer par la règle $\setminus_e$ (et bien sûr on traite $/$ de la même manière). Il est aussi possible de transformer toute dérivation en une dérivation normale du même séquent, la transformation étant légèrement différente de l'élimination des coupures. Une propriété extrêmement importante et particulière au calcul de Lambek, si on le compare à d'autres formalismes logiques, logique intuitionniste ou même linéaire est la suivante : il suffit de noter les règles utilisées et les catégories syntaxiques de départ (celles des axiomes) pour connaître la preuve, car l'hypothèse A supprimée par la règle $\setminus_i$ ou $/_i$ peut-être déterminée à partir de l'arbre en partant des feuilles vers la racine, car c'est toujours l'hypothèse la plus à droite pour $/_i$ ou la plus à gauche pour $\setminus_i$ qui est supprimée. Une dérivation est donc un véritable arbre au sens usuel, dont les noeuds internes sont soit binaires et étiquetés par $\setminus_e$ ou par $/_e$, soit unaires et étiquetés par $\setminus_i$ ou par $/_i$ tandis que les feuilles sont des catégories – et pour les dérivations normales, on peut supposer que ces catégories sont des sous catégories de celles qui figurent dans le lexique. Ainsi on peut noter, sans perte d'information, notre déduction naturelle de la figure 2 ainsi :

$$/_e[(S \,/\, (S \,/\, sn)), /_i[/_e[S \,/\, sv, /_e[sv \,/\, sn, sn]]]]$$

Dans le calcul des séquents, comme dans la déduction naturelle, la possibilité de transformer les dérivations en dérivations du même séquent satisfaisant la propriété de la sous formule garantit qu'un séquent est dérivable si et seulement s'il l'est au moyen d'une preuve ne contenant que des sous formules du séquent qu'on souhaite dériver. On en déduit relativement aisément qu'on peut décider en un nombre fini d'opérations si un séquent est ou non démontrable dans le calcul de Lambek. Les formules apparaissant dans toute analyse syntaxique sont de taille inférieure ou égales à la taille maximale d'une formule du lexique – en revanche, le nombre de formules en hypothèse d'un séquent, c'est-à-dire la longueur de la suite de mots analysées n'est pas bornée[39].

Théorème 3.1 (Lambek). *Toute dérivation dans le calcul de Lambek admet une forme normale qui satisfait la propriété de la sous formule. Par conséquent, le calcul de Lambek est décidable ainsi que l'appartenance d'une phrase au langage engendré par une grammaire de Lambek.*

Les deux résultats de complexité qui suivent closent deux questions longtemps ouvertes. Ils sont tous les deux dus à Mati Pentus [52, 53] et le premier fera l'objet de la section 6.3 – pour être précis, notre formulation du premier est un corollaire dû à Alain Finkel et Isabelle Tellier [25].

Théorème 3.2 (Pentus). *L'analyse d'une phrase dans le calcul de Lambek est un problème polynomial (cubique) en fonction du nombre de mots de la phrase. La prouvabilité d'un séquent dans le calcul de Lambek est un problème NP complet (en fonction de la taille du séquent).*[4]

[4] Ma formulation du second résultat n'est pas tout à fait exacte car son résultat porte sur le calcul de Lambek *avec produit*. J'ai ici ignoré ce connecteur, qui *grosso modo* correspond à la

Si on pense, comme on le fait dans le calcul de Lambek, qu'une analyse syntaxique est une preuve alors la syntaxe ordinaire de la logique est bien peu satisfaisante. En effet, des preuves peuvent ne différer que pour des raisons inessentielles comme l'ordre dans lequel les règles sont appliquées. Il est possible et souhaitable de quotienter les preuves par les permutations de règles. Ce travail a tout d'abord été fait pour la logique linéaire de Jean-Yves Girard, dans l'article originel [27] qui a introduit la notion de *réseau de démonstration* : ce sont des graphes qui sont le quotient des preuves usuelles par les permutations de règles. Ils permettent d'avoir à la fois une définition inductive des preuves et aussi une caractérisation universelle des preuves comme l'ensemble des graphes satisfaisant une propriété universelle (de la forme $\forall x \exists y \cdots$).

Il existe plusieurs variantes équivalentes des réseaux de démonstrations qui quotientent les preuves par les permutations de règles. Néanmoins, seule la nôtre [58] permet aussi de quotienter les formules par les propriétés algébriques des connecteurs (associativité et commutativité le cas échéant). Initialement conçue pour le calcul commutatif, nous l'avons récemment étendue au calcul non commutatif avec Sylvain Pogodalla [56]. C'est cette dernière que nous allons ici présenter.

L'expression « l'associativité des connecteurs » peut surprendre puisque $(A \setminus B) \setminus C \not\equiv A \setminus (B \setminus C)$.... L'associativité des connecteurs est celle de connecteurs que nous avons volontairement laissés implicites. Ce sont ceux de la logique linéaire, logique qui dispose d'une disjonction, d'une conjonction et d'une négation. La conjonction correspond à la virgule : on aurait pu écrire un séquent $A, B, C \vdash X$ comme $A \wedge B \wedge C \vdash X$. Cette virgule est bien associative et, comme on l'a fait remarquer, non commutative. La disjonction permet avec la négation notée d'exprimer l'implication : $A \setminus B \equiv \neg A \vee B$ et (ce qui est l'analogue de $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$). Elle n'est pas commutative, et c'est pour cela que nous avons deux implications, l'autre étant $B \,/\, A \equiv B \vee \neg A$. L'associativité de ce connecteur est perceptible dans le calcul de Lambek par le fait que l'on a bien $(A \setminus X) \,/\, B \equiv A \setminus (X \,/\, B)$ qui s'écrit aussi : $(\neg A \vee X) \vee \neg B \equiv \neg A \vee (X \vee \neg B)$ ce qui est bien de l'associativité.

Voyons comment associer à une catégorie syntaxique C une formule de la logique linéaire $\ell(C)$ dont nous noterons les opérations $\wedge$ (conjonction) $\vee$ (disjonction) $\neg$ (négation) – en logique linéaire la conjonction s'écrit habituellement $\otimes$, la disjonction comme un & à l'envers et la négation $(\cdots)^{\perp}$.

- $\ell(p) = p$
- $\ell(F \setminus G) = \neg\ell(F) \vee \ell(G)$
- $\ell(G \,/\, F) = \ell(G) \vee \neg\ell(F)$

La logique linéaire non commutative vérifie les lois d'Augustus de Morgan qui s'écrivent $\neg\neg X = X$, $\neg(A \wedge B) = \neg B \vee \neg A$, $\neg(A \vee B) = \neg B \wedge \neg A$, non commutativité oblige. En utilisant ces lois, il est possible d'écrire toute formule de la logique linéaire et donc tout $\ell(C)$ ou même $\neg\ell(C)$ comme une formule de la logique linéaire, avec des $\wedge$ des $\vee$ et une ou zéro négation sur chaque catégorie de base : c'est ce qu'on appelle la *forme normale négative d'une formule*. Les occurrences

virgule à gauche : $A, B \vdash C$ et $A \bullet B \vdash C$ sont équiprouvables, $(A \setminus (B \setminus C)$ et $(B \bullet A) \setminus C$ sont équivalents, etc. Du calcul de Lambek avec $\setminus$ et $/$ nous ne savons pour le moment qu'une chose : il est dans NP, mais je serais surpris qu'il y ait une grande différence de complexité entre les calculs de Lambek avec et sans produit.

des catégories de bases sont appelées atomes. Lorsqu'elles sont non niées on parle d'atomes positifs et lorsqu'elles le sont (et alors elles le sont exactement une fois, puisque $\neg\neg p = p$) on parle d'atomes négatifs.

Mot m	Catégorie $c(m)$	$\ell(c(m))$	$\neg\ell(c(m))$	Forme Normale Négative
cosa	$(S\ /\ (S\ /\ sn))$	$(S \vee \neg(S \vee \neg sn))$	$\neg(S \vee \neg(S \vee \neg sn))$	$(S \vee \neg sn) \wedge \neg S$
guarda	$(S\ /\ sv)$	$(S \vee \neg sv)$	$\neg(S \vee \neg sv)$	$sv \wedge \neg S$
passare	$(sv\ /\ sn)$	$(sv \vee \neg sn)$	$\neg(sv \vee \neg sn)$	$sn \wedge \neg sv$

Si on se penche sur le calcul de Lambek, tel qu'il est formulé dans le calcul des séquents, on peut se demander ce qu'il faut connaître pour reconstituer une preuve. Une fois qu'on a remarqué que les catégories de base sont introduites deux par deux dans un axiome $p \vdash p$, une positive et une négative, qu'on peut les suivre tout au long d'une preuve normale, on peut deviner qu'il suffit de connaître les paires de *a* introduites par un même axiome. C'est effectivement suffisant pour une preuve normale, sans coupure.

Étant donné un couple d'atomes (x, y) d'une formule F on dit qu'il se rencontre sur l'occurrence $*$ d'un connecteur s'il existe une sous formule $(G * H)$ de F telle que x est dans G et y dans H.

Étant donnée une formule de la logique linéaire, on lui associe un graphe orienté dont les arêtes sont $\mathfrak{r}$ (rouge) ou $\mathfrak{n}$ (noir) ainsi : les sommets du graphe sont les atomes de la formule, et on place un arc $\mathfrak{n}$ de x vers y si le couple (x, y) se rencontre sur une disjonction, et un arc $\mathfrak{r}$ de x vers y s'ils se rencontrent sur une conjonction. On remarquera que la relation *il existe un arc* $\mathfrak{r}$ *ou* $\mathfrak{n}$ *de* x *vers* y est un ordre total, que le graphe $\mathfrak{r}$, tout comme le graphe $\mathfrak{n}$ est un ordre serie-parallèle et que le graphe non orienté sous-jacent est un graphe complet. Sur les ordres série-parallèle, maintes fois redécouverts, on pourra consulter [46]

Rappelons (voir par exemple [45]) qu'un *ordre cyclique total* est une relation ternaire $C(x, y, z)$ telle que $C(x, y, z) \Rightarrow C(y, z, x)$ (cyclicité), $C(x, y, z) \wedge C(x, u, y) \Rightarrow C(u, y, z)$ (transitivité) et $C(x, y, z) \vee C(x, z, y)$ (totalité). La relation $C(x, y, z)$ indique comment les points sont disposés sur un cercle orienté : en allant de x à z dans le sens positif on rencontre y. Une application bijective σ telle que $\sigma(x) \neq x$ et $\sigma(\sigma(x)) = x$ pour tout x est dite *compatible* avec C si et seulement si $\forall x, u \quad C(x, u, \sigma(x)) \Rightarrow C(x, \sigma(u), \sigma(x))$

Étant donné un séquent $\mathbb{S} = A_1 \ldots, A_n \vdash C$ on lui associe un graphe $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{n}$ comme suit. Dans un premier temps, on construit les graphes $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{n}$ des formes normales négatives de $\ell(C)$, $\neg\ell(A_1)$, ..., $\ell\neg(A_n)$. On ajoute ensuite des arcs $\mathfrak{n}$ pour ordonner cycliquement les formules : un arc $\mathfrak{n}$ du dernier atome (qui est le maximum du point de vue de l'ordre total) de $\neg\ell(A_i)$ vers le premier (le minimum du point de vue de l'ordre) de $\neg\ell(A_{i-1})$, du dernier atome de $\ell(C)$ vers le premier de $\neg\ell(A_n)$ et du dernier de $\neg\ell(A_1)$ vers le premier de $\ell(C)$. Ce graphe contient un cycle hamiltonien orienté, qui donne un ordre cyclique aux atomes. Il est aisé de reconnaître si un graphe bicolore est la traduction graphique d'un séquent du calcul de Lambek.

On peut alors donner une caractérisation des dérivations avec des termes standard de la théorie des graphes, dont le principal intérêt est de donner aux dérivations, en plus de la définition inductive usuelle (issue de la notion de dérivation vue ci-dessus), une définition comme l'ensemble des structures (des graphes colorés) satisfaisant certaines propriétés universelles (de la forme $\forall x \exists y \cdots$). C'est un premier pas vers une caractérisation du genre modèles finis ou langage de graphes.

Pour traduire une dérivation en un graphe, on peut procéder inductivement, mais en fait il suffit de connaître les atomes provenant d'un même axiome $p \vdash p$: il suffit de construire le graphe $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{n}$ du séquent, et d'ajouter une arête non orientée d'une troisième couleur, $\mathfrak{b}$ (bleu) entre les atomes provenant d'un même axiome.

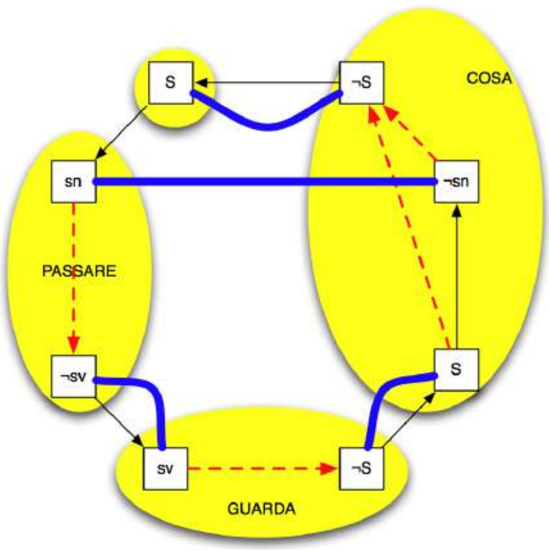


FIG. 4. Un réseau de démonstration, le graphe d'analyse de la phrase *cosa guarda passare*. Les arêtes $\mathfrak{b}$ sont les plus épaisses (non orientées) les $\mathfrak{r}$ sont en pointillés, et les arêtes $\mathfrak{n}$ fines et pleines. Les ellipses indiquent les atomes appartenant à une même catégorie.

Théorème 3.3 (Pogodalla, Retoré)**.** *Un graphe dont les sommets sont des atomes et dont les arêtes sont $\mathfrak{r}$ (orientées), $\mathfrak{n}$ (orientées) ou $\mathfrak{b}$ (non orientées) correspond à au moins une démonstration du calcul de Lambeck si et seulement si :*

– Les arêtes $\mathfrak{b}$ joignent des occurrences de polarité opposée d'une même catégorie de base. Elles ne sont jamais adjacentes et couvrent tous les sommets du graphe (elles forment un couplage parfait).

– La partie $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{n}$, orientée, décrit des formules du calcul de Lambek et un ordre cyclique entre elles, au sens où on l'a défini ci-dessus, et contient un cycle hamiltonien orienté.

– *Le graphe non orienté* $\mathfrak{r}$ *et* $\mathfrak{b}$ *obtenu en supprimant les arêtes* $\mathfrak{n}$ *et en omettant l'orientation des arêtes rouges, a la propriété suivante : tout cycle élémentaire alternant contient une corde.*[5]

– *La fonction* σ *qui à un sommet associe l'autre extrémité de l'unique arête* $\mathfrak{b}$ *qui lui est adjacente est compatible avec l'ordre cyclique défini par le circuit hamiltonien du séquent.*

On trouvera sur la figure 4 notre analyse dans le calcul de Lambek de *cosa guarda passare* vue comme un réseau de démonstration. Ce genre de représentation capte mieux l'essence de la preuve, et si on pense qu'une preuve est une analyse syntaxique, alors il ne faut qu'une analyse par preuve, alors que plusieurs preuves du calcul des séquents peuvent correspondre à une même analyse. De plus ce genre de représentation permet d'utiliser des algorithmes sur les graphes qui sont plus efficaces pour construire des preuves ou analyses syntaxiques, comme par exemple dans [49] .

4. De la structure syntaxique d'une phrase à sa structure logique

Nous avons affirmé voire répété que la syntaxe catégorielle permettait de convertir une analyse syntaxique en une formule logique. Nous expliquons dans cette section comment cela fonctionne. Tout d'abord, il faut représenter la logique d'ordre supérieur dans le λ-calcul typé, car il permet de gérer proprement la composition, pour appliquer le principe frégéen suivant lequel le sens du tout est fonction du sens des parties. Ceci a été développé par Richard Montague au début des années soixante-dix en combinant la représentation de la logique d'ordre supérieur en λ-calcul typé d'Alonso Church, ses propres idées sur la logique intentionnelle et son interprétation dans des mondes possibles à la Kripke, voir [26, 65], mais nous ne parlerons pas ici de ces deux derniers points. Nous nous contenterons de montrer comment une analyse dans le calcul de Lambek permet de calculer automatiquement les formules logiques associées à la phrase analysée. Cette correspondance est bien entendu liée à la nature logique des analyses dans le calcul de Lambek.

4.1. Des catégories syntaxiques aux types sémantiques

La description de la logique dans le λ-calcul typé, fondé sur la notion de fonction, représente les ensembles au moyen de leurs fonctions caractéristiques. Par exemple, une relation n-aire est une fonction qui associe à un n-uplet la valeur VRAI s'il est dans la relation et la valeur FAUX sinon – on peut éventuellement utiliser d'autres valeurs de vérités. Les types de base sont les individus ou entités e ainsi que les valeurs de vérités t, et l'ensemble des types est le plus petit qui contienne e, t et soit clos par l'opération $\rightarrow$:

$$types ::= e \quad | \quad t \quad | \quad types \rightarrow types$$

Le type $A \rightarrow B$ est bien évidemment celui des fonctions de A dans B. Le produit n'est pas nécessaire : une fonction à deux arguments de $A \times B$ dans C peut se voir comme une fonction de A dans $B \rightarrow C$, l'ensemble des

[5] C'est la seule condition dans le cas commutatif, avec une autre condition de connexité, mais elle est ici automatiquement assurée parce que le graphe $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{n}$ provient de catégories syntaxiques du calcul de Lambek et non de formules quelconques de la logique linéaire.

fonctions de B dans C, Plus généralement, une fonction $A_1 \times \cdots \times A_n$ dans C sera vue comme un élément de $(A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\cdots (A_{n-1} \to (A_n \to C))))))$.

Un nom commun tel *chaise* aura pour type sémantique $e \to t$ et sera interprété comme une fonction qui s'applique à des entités et vaudra VRAI des entités qui sont des chaises. Un prédicat unaire comme *dort* sera interprété de même. Un verbe transitif comme *regarde* aura pour type sémantique $e \to (e \to t)$ et sera interprété comme une fonction qui vaut VRAI lorsqu'on l'applique successivement à deux entités x et y dont la première regarde la seconde. La parenté avec les catégories syntaxique est manifeste, et plus précisément on peut définir un morphisme $(\_)^*$ des catégories syntaxiques vers les types sémantiques qui matérialise les intuitions logico-mathématiques helléniques :

(Catégorie syntaxique)*	$=$	Type Sémantique type	
S^*	$=$	t	une phrase est une proposition
sn^*	$=$	e	un syntagme nominal est une entité
n^*	$=$	$e \to t$	un nom commun est un sous-ensemble des entités, un prédicat à une place
$(a \setminus b)^* = (b \,/\, a)^*$	$=$	$a^* \to b^*$	étend $(\_)^*$ à toutes les catégories syntaxique

Le lexique qui jusqu'ici associait à chaque mot une catégorie syntaxique u, va maintenant aussi lui associer un λ-terme dont le type est u^*. Un λ-*terme* est une expression du λ-calcul, ensemble de termes et système de réécriture fondé sur la notion de fonction, qui se distingue ainsi des visions ensemblistes. L'ensemble des λ-termes simplement typés est défini ainsi :

– Chaque type a contient les termes suivants : des variables de type a qui sont libres dans le terme qu'elles constituent, et éventuellement des constantes de type a.

– Si x une variable de type a et si u est un terme de type b alors $\lambda x.u$ est un terme de type $a \to b$. C'est la fonction qui à x associe u, terme qui généralement contient x. Les variables libres de $\lambda x.u$ sont celles de u exceptée x (toutes les occurrences libres de x dans u sont devenues liées).

– Si u est un terme de type $a \to b$ et v est un terme de type a, alors $(u(v))$ est un terme de type b. On applique la fonction de a dans b à un élément de a. Les variables libres de $(u(v))$ sont celles de u et celles de v.

L'expression $t : A$ signifie que λ-terme t est de type A. Un vecteur $\vec{X}$ désigne une suite $X_1, \ldots, X_n$ de types, un vecteur $\vec{x}$ désigne une suite $x_1, \ldots, x_n$ de variables et $\vec{x}{:}\vec{X}^*$ signifie $x_1{:}X_1^*, \ldots, x_n{:}X_n^*$ où les x_i sont des variables. Une expression $\vec{x}{:}\vec{X}^* \vdash t : T$ signifie que t est un terme de type T dont les variables libres sont parmi les x_i qui sont respectivement de type X_i.

Le λ-calcul a été initialement inventé pour gérer proprement la substitution dans les tentatives de formalisation totale des mathématiques au début du XX^{e}siècle, et c'est effectivement de cette manière – et non dans la correspondance entre λ-termes et déductions – qu'on va tout d'abord l'utiliser pour modéliser la logique d'ordre supérieur. Le λ-calcul contient une opération appelée β-réduction qui effectue les substitutions : chaque fois qu'une expression $(\lambda x.u)v$ apparaît dans un terme on peut la β-réduire en u dans lequel la variable x est remplacée par le terme v (on remarquera que par construction x et v ont nécessairement le même type). Pour prendre un exemple simple avec le type de base $\mathbb{N}$ et les constantes $+$ et $*$ de type $\mathbb{N} \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$, que vaut l'expression $((\lambda x \lambda y((+x)((*2)y))((\lambda z.((+z)3))4))((+5)7))$? On pourrait l'écrire $g(h(4), 5+7)$ avec $h : z \mapsto z+3$ et $g : (x,y) \mapsto x+2y$. Elle se réécrit par β-réduction en $((\lambda y.((+((\lambda z.((+z)3))4))((*2)y)))((+5)7))$ puis en $((+((\lambda z.((+z)3))4))((*2)((+5)7)))$ et finalement en $(+((+3)4)((*2)((+5)7)))$ qui ne se réduit plus (et qu'en notation standard, non préfixée on écrirait $(3+4)+(2*(5+7))$.

Pour décrire le langage de la logique, plutôt que des fonctions sur les entiers, nous aurons besoin des connecteurs et quantificateurs. Les connecteurs binaires prennent pour arguments deux propositions et en fabriquent une nouvelle, ils sont donc de type $t \rightarrow (t \rightarrow t)$ La quantification du premier ordre prend comme argument une fonction des entités dans les propositions et construit une proposition, elle est donc de type $(e \rightarrow t) \rightarrow t$. En effet, étant donnée une formule à une variable libre, par exemple $\mathit{regarde}(x, \mathit{Marie})$ (que l'on écrit $\lambda x.((\mathit{regarde}\ x)\mathit{Marie}))$ pour écrire comme un λ-terme la formule $\forall x\ \mathit{regarde}\ (x, \mathit{Marie})$, on commence par construire la fonction $x \mapsto \mathit{regarde}(x, \mathit{Marie})$ (que l'on écrit $\lambda x.((\mathit{regarde}\ x)\mathit{Marie}))$, qui est bien de type $e \rightarrow t$ et on lui applique la constante $\forall$ qui fabrique la proposition $\forall x\ \mathit{regarde}\ (x, \mathit{Marie})$ de type t que l'on écrit $\forall(\lambda x.((\mathit{regarde}\ x)\mathit{Marie}))$. On parle de logique d'ordre supérieur car on a naturellement, par exemple, des prédicats du second ordre comme $(e \rightarrow t) \rightarrow t$ et qu'on peut très bien quantifier sur de tels objets avec un quantificateur de type $((e \rightarrow t) \rightarrow t) \rightarrow t$.

Voici les constantes logiques dont nous aurons besoin pour décrire la logique du premier ordre :

Constante	Type
$\exists$	$(e \rightarrow t) \rightarrow t$
$\forall$	$(e \rightarrow t) \rightarrow t$
$\wedge$	$t \rightarrow (t \rightarrow t)$
$\vee$	$t \rightarrow (t \rightarrow t)$
$\Rightarrow$	$t \rightarrow (t \rightarrow t)$

Il nous faudra aussi des constantes pour décrire les termes du lexique :

aime	$\lambda x \lambda y$ (aime x) y	$x : e,\ y : e, \text{aime} : e \rightarrow (e \rightarrow t)$
aime est un prédicat à deux places		

Pierre	λP (P Pierre)	$P : e \rightarrow t,\ \text{Pierre} : e$
Pierre est vu à la Leibnitz comme l'ensemble des propriétés vraies de Pierre		

4.2. Des analyses aux λ-termes

Voyons comment on obtient une représentation sémantique d'une phrase $m_1 \ldots m_n$ à partir des ingrédients suivants :

– *une analyse syntaxique, dans le calcul de Lambek en déduction naturelle de* $m_1 \ldots m_n$, c'est-à-dire une preuve formelle $\mathcal{D}$ de $t_1, \ldots, t_m \vdash S$ et

– *un* λ*-terme sémantique de chaque mot* $m_1, \ldots$ *et* m_n, c'est-à-dire des λ-termes τ_i de type t_i^*,

Il suffit de suivre la procédure que nous donnons ici, dont le fonctionnement se comprend aisément, surtout sur un exemple. Nous donnons aussi au passage les raisons de son bon fonctionnement, même si elles nécessitent quelques notions de théorie des types comme [28, 37] que nous ne donnons pas ici (la correspondance de Curry-Howard entre preuves intuitionnistes et λ-termes, le plongement du calcul de Lambek dans la logique intuitionniste).

(1) On remplace toute catégorie syntaxique A de $\mathcal{D}$ par le type sémantique qui lui correspond, A^* ; comme la logique intuitionniste est une extension du calcul de Lambek, on obtient une preuve en logique intuitionniste $\mathcal{D}^*$ de $t_1^*, \ldots, t_n^* \vdash t = S^*$.

(2) Par le célèbre isomorphisme de Curry-Howard [31] cette preuve peut se voir comme un λ-terme $\mathcal{D}_\lambda^*$ de type $t^* = S$ qui contient une variable libre x_i de type t_i^* pour chaque mot m_i. Le modus ponens correspond à l'application d'une fonction à un argument et l'introduction correspond à la λ-abstraction, c'est-à-dire à la définition d'une fonction à partir d'un terme ayant une variable libre. Cette correspondance entre règles de construction de l'analyse syntaxique et règles de construction de la représentation sémantique est donnée dans le tableau ci-dessous :

règles syntaxiques		règles sémantiques construction du λ terme
$\dfrac{\vec{X} \vdash A \quad \vec{Y} \vdash A \backslash B}{\vec{X}, \vec{Y} \vdash B} \backslash_e$	$\dfrac{\vec{Y} \vdash B / A \quad \vec{X} \vdash A}{\vec{Y}, \vec{X} \vdash B} /_e$	$\dfrac{\vec{x}{:}\vec{X}^* \vdash u{:}A^* \quad \vec{y}{:}Y^* \vdash f{:}A^* \to B^*}{\vec{x}{:}\vec{X}^*, \vec{y}{:}Y^* \vdash (fu){:}B^*} \backslash_e$
$\dfrac{A, \vec{X} \vdash C}{\vec{X} \vdash A \backslash C} \backslash_i$	$\dfrac{\vec{X}, A \vdash C}{\vec{X} \vdash C / A} /_i$	$\dfrac{x{:}A^*, \vec{x}{:}\vec{X}^* \vdash t{:}C^*}{\vec{x}{:}\vec{X}^* \vdash (\lambda x.t){:}A^* \to C^*} \backslash_i$
$\dfrac{}{A \vdash A}$ *axiome*		$\dfrac{}{x{:}A^* \vdash x{:}A^*}$ *axiome*

(3) On remplace dans $\mathcal{D}_\lambda^*$. chaque variable x_i par le λ-terme τ_i – dont le type est aussi t_i^*, il s'agit donc d'une substitution correcte.

(4) On réduit le λ-terme de type t obtenu : il s'agit d'un λ-terme sans variable libre et de type t et donc, par suite de résultats assez simples, d'une proposition : c'est la formule logique associée à la phrase.

4.3. Un exemple

On donne ci-dessous un lexique analysant la (!) phrase : « Certains énoncés parlent d'eux-mêmes. » [6]

[6] Toujours au sens de : « *certaines phrases sont circulaires* », comme *Cette phrase est vraie*, ou pire, *Je mens.*

mot	Type syntaxique u Type sémantique u^* Représentation sémantique : λ-terme de type u^* x^v variable ou constante x de type v	
énoncés	$n = E$	*« énoncés » est un nom commun*
	$e \rightarrow t = E^*$	*du point de vue sémantique c'est un prédicat à une place*
	$\lambda x^e(\mathtt{enonce}^{e\rightarrow t}\ x)$	*ce prédicat est la fonction qui a tout individu x associe la valeur de vérité de « x est un énoncé »*
parlent_de	$(sn \setminus S) \,/\, sn = P$	*parler_de attend à sa droite un groupe nominal, et à sa gauche un groupe nominal pour produire une phrase*
	$e \rightarrow (e \rightarrow t) = P^*$	*du point de vue sémantique « parler_de » est un prédicat à deux places*
	$\lambda y^e\ \lambda x^e\ ((\mathtt{parler\_de}^{e\rightarrow(e\rightarrow t)}\ x)y)$	*c'est-à-dire une fonction qui prend deux individus et rend* VRAI *si et seulement si le second argument (le sujet) parle du premier (l'objet)*
eux-mêmes	$((sn \setminus S) \,/\, sn) \setminus (sn \setminus S) = X$	*« eux-mêmes » (objet) attend à sa gauche un verbe transitif, pour produire une phrase à la quelle il manque un sujet, c'est-à-dire un verbe transitif*
	$(e \rightarrow (e \rightarrow t)) \rightarrow (e \rightarrow t) = X^*$	*du point de vue sémantique, « eux-mêmes » prend un prédicat à deux places $P(x,y)$ (le verbe transitif) et rend un prédicat à une place*
	$\lambda P^{e\rightarrow(e\rightarrow t)}\ \lambda x^e\ ((P\ x)x)$	*le prédicat fabriqué par « eux-mêmes » à partir de $P(x,y)$ est $P(x,x)$*
certains	$(S \,/\, (sn \setminus S)) \,/\, n = C$	*« certains » (sujet) attend à droite un nom puis une phrase à laquelle il manque un sujet pour donner une phrase.*
	$(e \rightarrow t) \rightarrow ((e \rightarrow t) \rightarrow t) = C^*$	*étant donné un prédicat à une place P (nom commun) et un prédicat à une place Q (groupe verbal) « certains » fabrique une formule close*
	$\lambda P^{e\rightarrow t}\ \lambda Q^{e\rightarrow t}\ (\exists^{(e\rightarrow t)\rightarrow t}\ (\lambda x^e(\wedge^{t\rightarrow(t\rightarrow t)}(P\ x)(Q\ x))))$	*la formule fabriquée par « certains » est $\exists x P(x) \wedge Q(x)$*

0. Analyse syntaxique

Il faut dériver le séquent suivant dans le calcul de Lambek en déduction naturelle :

$$(S \,/\, (sn \setminus S)) \,/\, n \;,\; n \;,\; (sn \setminus S) \,/\, sn \;,\; ((sn \setminus S) \,/\, sn) \setminus (sn \setminus S) \vdash S$$

En utilisant les abréviations C, E, P, X, S pour les catégories syntaxiques, voici la dérivation ou analyse syntaxique :

$$\dfrac{\dfrac{C \vdash (S/(sn\backslash S))/n \quad E \vdash n}{C, E \vdash (S/(sn\backslash S))} /_e \quad \dfrac{P \vdash (sn\backslash S)/sn \quad X \vdash ((sn\backslash S)/sn)\backslash(sn\backslash S)}{P, X \vdash (sn\backslash S)} \backslash_e}{C, E, P, X \vdash S} /_e$$

1. Calcul de l'ossature sémantique de l'énoncé

On applique le morphisme des catégories syntaxiques vers les types sémantiques, ce qui nous donne une déduction naturelle intuitionniste :

$$\dfrac{\dfrac{C^* \vdash (e \to t) \to (e \to t) \to t \quad E^* \vdash e \to t}{C^*, E^* \vdash (e \to t) \to t} \to_e \quad \dfrac{P^* \vdash e \to e \to t \quad X^* \vdash (e \to e \to t) \to e \to t}{P^*, X^* \vdash e \to t} \to_e}{C^*, E^*, P^*, X^* \vdash t} \to_e$$

On extrait, par étiquetage, un λ-terme sur la conclusion du séquent final, λ-terme qui a une variable libre de chacun des types C^*, E^*, P^*, X^* :

$$((\mathsf{c}^{\mathsf{C}^*} \mathsf{e}^{\mathsf{E}^*})(\mathsf{x}^{\mathsf{X}^*} \mathsf{p}^{\mathsf{P}^*}))^t$$

3. Remplacement des variables par les λ-termes du lexique

On remplace chaque variable par le λ-terme sémantique correspondant, qui est fourni par le lexique et qui a le même type, ce qui donne le premier λ-terme de l'item suivant (il s'étend sur deux lignes).

4. Calcul de la sémantique par β-réduction

$$\Big(\big(\lambda P^{e\to t}\ \lambda Q^{e\to t}\ (\exists^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^e(\wedge(P\ x)(Q\ x))))\big)\big(\lambda x^e(\mathtt{enonce}^{e\to t}\ x)\big)\Big)$$
$$\Big(\big(\lambda P^{e\to(e\to t)}\ \lambda x^e\ ((P\ x)x)\big)\big(\lambda y^e\ \lambda x^e\ ((\mathtt{parler\_de}^{e\to(e\to t)}\ x)y)\big)\Big)$$

$$\downarrow \beta$$

$$\big(\lambda Q^{e\to t}\ (\exists^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^e(\wedge^{t\to(t\to t)}(\mathtt{enonce}^{e\to t}\ x)(Q\ x))))\big)$$
$$\big(\lambda x^e\ ((\mathtt{parler\_de}^{e\to(e\to t)}\ x)x)\big)$$

$$\downarrow \beta$$

$$\big(\exists^{(e\to t)\to t}\ (\lambda x^e(\wedge(\mathtt{enonce}^{e\to t}\ x)((\mathtt{parler\_de}^{e\to(e\to t)}\ x)x)))\big)$$

Cette formule écrite dans le λ-calcul s'écrit habituellement :

$$\exists x : e\ (\mathtt{enonce}(x) \wedge \mathtt{parler\_de}(x, x))$$

Ce qui est la formule souhaitée.

Un exemple classique est de traiter la phrase suivante qui contient deux quantificateurs et peut être interprétée de deux manières.[7]

(6) Les enfants prendront une pizza.

(7) $\forall x \quad (\mathit{enfant}(x) \Rightarrow (\exists y \quad \mathit{pizza}(y) \wedge \mathit{prendre}{-}\mathit{futur}(x, y)\ )\ )$

(8) $\exists y \quad (\mathit{pizza}(y) \wedge \forall x \quad (\mathit{enfant}(x) \Rightarrow \mathit{prendre}{-}\mathit{futur}(x, y)\ )\ )$

Les grammaires catégorielles rendent compte de ce phénomène en produisant deux analyses syntaxiques, chacune produisant l'une des deux lectures. Mais c'est encore plus long que l'exemple développé ci-dessus.

4.4. Questions classiques de sémantique formelle

Les quantificateurs de notre langue sont plus riches et plus variés que ceux de la logique du premier ordre : *la plupart, les, un grand nombre de, peu de, etc.*

(9) La plupart des politiciens ont lu un livre d'économie.

Les *nombres* sont aussi des sortes de quantificateurs, en ce sens qu'ils lient des variables et posent aussi des problèmes de portée :

(10) Mettre huit gouttes dans trois cuillerées à soupe d'eau.

(11) 3x8=24 gouttes ?

(12) 8 gouttes ?

Se posent aussi des questions de portée entre les verbes de croyance et les quantificateurs qui peuvent figurer dans la complétive.

(13) James Bond croit que l'un des chercheurs du laboratoire est un espion.

(14) James Bond pense que Blofeld est un espion.

(15) James Bond a trouvé un microfilm dans le laboratoire.

Cette distinction, connue sous le nom de lecture *de re* (14) et lecture *de dicto*, (15) est due à Thomas d'Aquin, fondateur de l'université de Paris, même si le nom est du à Guillaume d'Ockham [35]. Du point de vue de la sémantique dite vériconditionnelle, on identifie le sens d'un énoncé à l'ensemble des conditions qui lui confèrent la valeur VRAI, c'est-à-dire la classe des mondes possibles dans lesquels il vaut VRAI [26].

(16) Cet étudiant croit que Chomsky est informaticien.

On interprétera la phrase ci-dessus ainsi : dans tous les mondes possibles compatibles avec les croyances de cet étudiant, Chomsky est un informaticien. La vérité de cette phrase dépend bien sûr de celle de la proposition subordonnée mais ne dépend pas du fait que Chosmky soit ou non informaticien, en accord notre intuition du sens de « croire » – voir par exemple [26].

Le principe Fregéen selon lequel le sens du tout est construit à partir du sens des parties connaît peu d'exceptions : en général on compose le sens des parties de la phrase en suivant sa structure :

(17) Dieu qui est invisible a créé le monde visible.

(18) Le chauffeur, qui n'a pas bu, raccompagnera les convives.

[7] On remarquera qu'il y a de subtiles différences entre les différentes formes de quantification ($\forall$: chaque, tout, tous, les, … ; $\exists$: un, des, certains, …) qui influent sur notre préférence entre les deux lectures. On notera aussi que nous avons une préférence pour que le premier quantificateur énoncé ait la plus grande portée, en comparant la phrase ci-dessus avec la suivante : *une pizza sera servie aux enfants.*

(19) Le chauffeur qui n'a pas bu raccompagnera les convives.

Néanmoins, ce principe de compositionnalité peut être mis en défaut, notamment à cause des pronoms qui montrent une divergence entre la syntaxe de la langue et celle de la logique. Prenons pour exemple la phrase suivante.

(20) Si une paysanne possède un âne, alors elle le bat.

(21) Si ($\exists p\ \exists a\quad Ane(a) \wedge Paysanne(p) \wedge\ Poss\grave{e}de(p,a)$) alors $Bat(p,a)$.
Le 2^{e} a et le 2^{e} p sont libres !

Il s'agit d'une implication entre deux propositions, mais si le sens de la phrase est que le sens de la première implique le sens de la seconde, alors la seconde contient des variables libres alors qu'elles devraient être liées par les quantificateurs existentiels implicites dans les articles indéfinis de la première proposition, les deux *un*.

La distinction entre le langage formel de la logique et langage naturel doit rester présente. En effet, si la modélisation oublie les phrases dont sont issues les formules logiques alors on peine à expliquer la différence d'acceptabilité entre les deux phrases suivantes, qui sont logiquement identiques.

(22) J'avais trois trombones dans ma poche, je les ai tous perdus sauf un. Je le range dans un tiroir.

(23) * J'avais trois trombones dans ma poche, j'en ai perdu deux. Je le range dans un tiroir.

Ce genre de question est bien résolu par la *Discourse representation Theory* (DRT) [36, 23].

5. Modèles de l'acquisition de la syntaxe

Outre le calcul de représentations sémantiques, l'un des avantages des grammaires catégorielles que nous avons annoncés est l'existence d'algorithmes qui permettent à partir d'exemples de phrases de construire un lexique catégoriel (donc une grammaire, puisque les règles sont universelles) qui engendre ces phrases. Il s'agit donc de modéliser le processus naturel d'acquisition de la grammaire par le jeune enfant dont nous avons déjà parlé au paragraphe 3.3 du premier volet mais aussi d'acquérir automatiquement une grammaire à partir de données plus ou moins structurées.

Précisons les données du problème. Étant donnée une classe de grammaires, une fonction d'apprentissage φ est une fonction qui associe à tout ensemble fini d'exemples de phrases (de suite finies d'éléments de mots supposées être des phrases correctes) une grammaire de la classe (pour les grammaire catégorielles, un lexique, puisque les règles sont universelles, il n'y a pas à les apprendre). Il faut néanmoins un critère de convergence, nous utiliserons celui de E. Mark Gold aussi appelé apprentissage à la limite. Une classe de langages est dite apprenable à la limite s'il existe une fonction d'apprentissage telle que pour toute énumération $s_1, s_2, \ldots$ d'un langage $\mathbb{L}$ engendré par une grammaire de la classe, il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, $\varphi(\{s_1, \ldots, s_N, \ldots, s_n\}) = \varphi(\{s_1, \ldots, s_N\})$ et $L(\varphi(\{s_1, \ldots, s_N\})) = \mathbb{L}$ – en notant $L(G)$ le langage engendré par une grammaire G. En français, cela signifie qu'au delà d'un certain nombre d'exemples, la fonction d'apprentissage propose toujours la même grammaire, et que celle-ci engendre exactement le langage qui est énuméré. [30]

Le cadre le plus simple pour présenter un algorithme d'apprentissage est le suivant : la classe de grammaires catégorielles considérée est celle des grammaires AB et les exemples de phrases sont les arbres de dérivation munis des noms des règles mais privés des catégories. Nous commenterons plus loin cette dernière restriction qui présuppose d'alimenter l'algorithme par des exemples bien plus structurés que de simples suites de mots.

Il est aisé de trouver des catégories syntaxiques pour chaque mot qui permettent de dériver les exemples. Nous savons que la racine d'un arbre de dérivation est S et en introduisant une nouvelle catégorie de base à chaque règle d'élimination, on peut facilement arriver à reconstruire une catégorie à chaque feuille de l'arbre, et donc à chaque mot. Si la conclusion de la règle est u, que la règle est $/_e$ (resp. $\backslash_e$) alors le sous arbre de droite (resp. de gauche) a pour racine x, une nouvelle catégorie de base, et celui de gauche $u \,/\, x$ (resp. celui de droite $x \setminus u$).

Cependant, si un mot a plusieurs occurrences dans les exemples proposés et que celles-ci requièrent des catégories syntaxiques différentes, on perd alors tout espoir de convergence au sens de Gold puisque, dans le lexique, on ajoutera sans fin des catégories syntaxiques. C'est pourquoi on limite le nombre de catégories par mot et le plus facile est de se limiter à *une* catégorie par mot : les grammaires ainsi faites sont dites *rigides* – là encore nous reviendrons sur cette restriction à la fin de cette section.

Afin de ne pas bloquer à chaque nouvelle occurrence d'un mot déjà vu, l'algorithme va chercher une catégorie syntaxique qui permette d'effectuer les dérivations autorisées par la catégorie syntaxique déjà présente dans le lexique ainsi que la dérivation associée au nouvel exemple. Une *substitution* σ est une fonction des catégories de base (hormis S) dans les catégories qui s'étend trivialement à l'ensemble des catégories ainsi :

$$\sigma(S) = S \qquad \sigma(A \setminus B) = \sigma(A) \setminus \sigma(B) \qquad \sigma(B \,/\, A) = \sigma(B) \,/\, \sigma(A)$$

Une substitution σ unifie les catégories $(A_i)_{i \in I}$ lorsque pour tout $i \in I$ $\sigma(A_i) = \sigma(A_1)$. Lorsqu'il existe une telle substitution appelée *unificateur*, il en existe une, disons σ_u, appelée unificateur principal, qui a la propriété suivante : si τ est un autre unificateur alors il existe une substitution σ_τ telle que $\tau = \sigma_\tau \circ \sigma_u$. On remarque que l'unification peut échouer, par exemple $a \setminus b$ et $x \,/\, y$ ne peuvent s'unifier car leur symbole principal n'est pas le même.

L'algorithme d'apprentissage *RG* (*Rigid Grammar*) proposé par Wojciech Buzkowsky et Gerald Penn [18] est relativement naturel :

(1) Associer comme indiqué un peu plus haut une catégorie à chaque mot de sorte que les exemples structurés $s_1, \ldots, s_n$ aient bien tous pour racine S.

(2) Unifier les catégories associées à un même mot. Si cela est possible, le lexique associé par *RG* à $s_1, \ldots, s_n$ est le lexique obtenu par l'unificateur principal (qui a bien une seule catégorie par mot).

La propriété de l'unification essentielle à l'apprentissage est une simple remarque : si un lexique *Lex* permet une dérivation d alors tout lexique obtenu par substitution à partir de *Lex* permet aussi la dérivation d. On peut donc, s'il existe, pour chaque mot, un unificateur de toutes les catégories correspondant à ses différentes occurrences, dériver tous les exemples avec cette unique catégorie obtenue par unification.

Si on considère les exemples structurés suivants :

(24) $[_{\backslash e}[_{/e}$ cette anguille] nage]

(25) $[_{\backslash e}[_{/e}$ cette loutre $][_{\backslash e}$ nage vite]]

Les catégories obtenues sont les suivantes en ajoutant des catégories de base comme expliqué plus haut :

(26) $[^{S}_{\backslash e}[^{x_2}_{/e}$ cette :$(x_2 \,/\, x_1)$ anguille :$x_1]$ nage :$(x_2 \setminus S)]$

(27) $[^{S}_{\backslash e}[^{y_2}_{/e}$ cette :$(y_2 \,/\, y_3)$ loutre :$y_3][^{(y_2\setminus S)}_{\backslash e}$ nage :y_1 vite :$(y_1 \setminus (y_2 \setminus S))]]$

Les catégories collectées sont alors :

mot	catégorie 1	catégorie 2
cette :	$x_2 \,/\, x_1$	$y_2 \,/\, y_3$
vite :		$y_1 \setminus (y_2 \setminus S)$
anguille :	x_1	
loutre :		y_3
nage :	$x_2 \setminus S$	y_1

Il faut maintenant unifier toutes les catégories associées à chaque mot, et dans ce cas c'est possible :

(28)

$$\begin{array}{rcl} \sigma_u(x_1) & = & z_1 \\ \sigma_u(x_2) & = & z_2 \\ \sigma_u(y_1) & = & z_2 \setminus S \\ \sigma_u(y_2) & = & z_2 \\ \sigma_u(y_3) & = & z_1 \end{array}$$

et cela conduit à la grammaire catégorielle rigide suivante :

(29)

$$\begin{array}{rl} \text{cette :} & z_2 \,/\, z_1 \\ \text{vite :} & (z_2 \setminus S) \setminus (z_2 \setminus S) \\ \text{anguille :} & z_1 \\ \text{loutre :} & z_1 \\ \text{nage :} & z_2 \setminus S \end{array}$$

L'algorithme est assez aisé à comprendre mais la preuve de sa convergence due à Makoto Kanazawa n'a rien d'évident [34]. Schématiquement, l'unification construit une suite croissante de grammaires pour un certain ordre et cette suite est majorée par la grammaire ayant engendré le langage énuméré.

Théorème 5.1 (Buszkowski, Penn, Kanazawa)**.** *Les grammaires catégorielles AB avec au plus une catégorie par mot sont apprenables au sens de Gold à partir d'arbres d'analyse incomplets.*

Ce résultat appelle quelques commentaires. Observons déjà qu'il ne contredit pas le résultat de Gold publié dans le même article [30] qui affirme que toute classe contenant les langages réguliers n'est pas apprenable : les grammaires AB rigides constituent une classe transverse à la hiérarchie de Chomsky, qui engendre des langages algébriques (produits par une grammaire non contextuelle) non réguliers, mais pas tous les langages réguliers.

On remarque aussi qu'on apprend à partir de structures (des arbres étiquetés). On peut se passer des étiquettes, voire des arbres, mais alors il faut les essayer toutes et modifier le critère de convergence. La fonction d'apprentissage associe un ensemble de grammaires aux exemples vus, et le critère de convergence devient : au-delà d'un certain nombre d'exemples cet ensemble contient toujours la grammaire solution.

Une autre contrainte est de n'avoir qu'une seule catégorie par mot (les grammaires apprises sont rigides). D'un point de vue pratique, dans une langue à ordre des mots assez fixe, les modèles de Markov cachés du premier volet section 2.4 réussissent fort bien à distinguer les occurrences d'un même mot nécessitant des catégories syntaxiques distinctes, comme *le* article et *le* pronom, ou comme *manger* dans un usage absolu ou transitif (*Que fait-il ? Il mange.* par opposition à *Il mange une pomme.*), auquel cas on peut supposer que les grammaires à apprendre sont effectivement rigides, puisqu'on distingue *mange :* $vt = (sn \setminus S) \,/\, sn$ de *mange :* $vi = (sn \setminus S)$.

En revanche, d'un point de vue théorique, comment faire ? On peut, comme l'a fait Kanazawa, chercher à unifier en gardant toujours moins de k catégories par mot. L'algorithme consiste à essayer les possibilités et procède donc, comme précédemment avec des ensembles de solutions.

Une solution plus astucieuse consiste à contraindre la forme des catégories. Effectivement, est apprenable la classe des grammaires dont les catégories ne contiennent pas de connecteurs en position négative (ce qui ne limite pas la capacité générative) et diffèrent toujours en plus d'un endroit pour un même mot (ce qui limite la capacité générative et correspond à une notion de réversibilité).[11]

Finalement, concernant les grammaires de Lambek, nous avons montré avec Roberto Bonato qu'elles sont apprenables à partir des structures de dérivation décrites en section 3.2. C'est surtout la partie assignation de catégories aux mots qui diffère, elle ressemble à l'algorithme de calcul du type simple le plus général d'un λ-terme. [13]

Sur ce sujet on pourra consulter une synthèse récente et peu technique [7].

6. Grammaires catégorielles et théorie des langages standard

6.1. Complétude de l'interprétation du calcul de Lambek dans les monoïdes libres

Une bonne logique, outre un système déductif élégant et symétrique, se doit d'avoir une notion de modèle aussi naturelle que possible et d'être complète pour cette notion de modèle. Par exemple la notion naturelle de modèle pour le calcul propositionnel classique est l'algèbre de Boole dont un représentant particulièrement simple est $\{\mathrm{FAUX}, \mathrm{VRAI}\}$, modèle pour lequel il y a complétude : une proposition qui vaut VRAI quelles que soient les valeurs assignées aux variables propositionnelles (l'analogue des catégories de base) est démontrable. Nous donnerons ici l'analogue de l'algèbre de Boole pour le calcul de Lambek, les semi-groupes résidués, et en donnerons deux exemples naturels : le groupe libre (qui n'est pas complet) et les parties d'un semi-groupe libre, pour lequel il y a complétude en partant d'un cas particulier appelé semi-groupe syntaxique. On pourrait ainsi dire que le calcul de Lambek est *le* système déductif adapté à décrire le semi-groupe libre.

Un modèle est un ensemble ordonné muni de trois opérations qui correspondent aux implications \ et / et à la virgule qui concatène les hypothèses.

Un *semi-groupe résidué*, est une structure $(M, \circ, \backslash\!\backslash, /\!/, \sqsubset)$où

- M est un ensemble
- $\circ$ est une loi de composition associative sur M ($(M, \circ)$ est un semi-groupe)
- $\backslash\!\backslash$ et $/\!/$ sont deux lois de composition sur M.
- $\sqsubset$ est un ordre (partiel) M.

qui satisfait la propriété suivante :

(RSG) Quels que soient les éléments a, b, c de M les relations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{rcl} a & \sqsubset & (c /\!/ b) \\ (a \circ b) & \sqsubset & c \\ b & \sqsubset & (a \backslash\!\backslash c) \end{array}$$

Une interprétation est la donnée, pour chaque catégorie de base de son interprétation comme élément de M, laquelle sera notée $[p]$. L'interprétation s'étend alors trivialement à toute catégorie :

$$[A \setminus B] = [A] \backslash\!\backslash [B] \qquad [B \mathbin{/} A] = [B] /\!/ [A]$$

ainsi qu'aux suites de catégories :

$$[A_1, \ldots A_n] = [A_1] \circ \cdots \circ [A_n]$$

Un séquent $A_1, \ldots, A_p \vdash C$ est dit valide dans le modèle pour l'interprétation $[\ ]$ si et seulement si $[A_1, \ldots, A_p] \sqsubset [C]$ – tout comme, dans une algèbre de Boole, $A \vdash B$ est VRAI lorsque que $[A] \leqslant [B]$. Donnons de suite une propriété facile à démontrer par induction sur la hauteur de l'arbre de dérivation, qui montre le bien fondé de cette interprétation du calcul de Lambek dans les semi-groupes résidués :

Théorème 6.1 (Validité de l'interprétation dans les semi-groupes résidués)**.** *Si un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash C$ est démontrable alors quels que soient le semi-groupe résidué et l'interprétation choisie, le séquent est valide, c'est-à-dire $[A_1, \ldots, A_p] \sqsubset [C]$.*

Donnons quelques exemples de monoïdes résidués pour lesquels la vérification de (RSG) est aisée.

Le modèle du groupe libre est défini par :

- $(M, \cdot)$ est le groupe libre sur les catégories de base
- $a \backslash\!\backslash b$ est $(a)^{-1}b$
- $b /\!/ a$ est $b(a)^{-1}$
- $a \sqsubset b$ est $a = b$ (ordre discret)

On peut bien évidemment utiliser l'interprétation $[p] = p$, et c'est l'interprétation standard. On calcule l'interprétation d'une formule A au moyen de $[p] = p$, de $[A \setminus B] = [A]^{-1}[B]$ et de $[B \mathbin{/} A] = [B][A]^{-1}$ et des équations $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^{-1})^{-1} = A$ et $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. L'interprétation d'une suite de formules est le produit des interprétations des formules qui la composent. Un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash C$ est valide dans ce modèle si et seulement si $[A_1] \ldots [A_n] = [C]$ c'est-à-dire $[A_n]^{-1} \cdots [A_1]^{-1}[C] = 1$.

On notera que ce modèle n'est pas complet : une raison intuitive est qu'il traduit $A \vdash B$ qui n'est pas une relation symétrique par $[A] = [B]$ qui est symétrique. Or dans le calcul de Lambek il y a bien des couples de catégories A, B telles que $A \vdash B$ sans que $B \vdash A$, par exemple $x \vdash (a \,/\, x) \setminus a$ mais $(a \,/\, x) \setminus a \not\vdash x$.

Le modèle des parties d'un semi-groupe est défini par la donnée un semi-groupe $(W, \cdot)$, éventuellement libre :

- $M = 2^W$
- $A \circ B = \{a \cdot b \quad | \quad a \in A \text{ and } b \in B\}$
- $A \setminus\!\setminus B = \{z \quad | \quad \forall a \in A \quad a \cdot z \in B\}$ (*)
- $B \,/\!/\, A = \{z \quad | \quad \forall a \in A \quad z \cdot a \in B\}$ (**)
- $A \sqsubset B$ lorsque $A \subset B$ (inclusion d'ensembles).

Le semi-groupe syntaxique est définie comme précédemment mais le semi-groupe dont on considère les parties est le semi-groupe libre des suites non vides de formules. L'interprétation standard est $[p] = \{\Gamma \mid \Gamma \vdash p \text{ est démontrable}\}$. On peut vérifier que l'extension de l'interprétation aux formules par (*) et (**) ci-dessus préserve cette propriété : par récurrence sur F on montre que pour toute catégorie F on a $[F] = \{\Gamma \mid \Gamma \vdash F \text{est démontrable}\}$ (1), et par conséquent on a toujours $F \in [F]$ (2).

Théorème 6.2 (Buszkowski)**.** *Un séquent valide dans tout semi-groupe résidué pour toute interprétation est démontrable dans le calcul de Lambek.* [16, 17]

Démonstration. Un tel séquent $A_1, \ldots, A_p \vdash C$ est en particulier valide dans le semi-groupe syntaxique pour l'interprétation standard. Par (2) on a $A_i \in [A_i]$ et donc $A_1, \ldots, A_n \in [A_1, \ldots, A_n]$ et comme le séquent est valide $[A_1, \ldots, A_p] \sqsubset [C]$, c'est-à-dire $[A_1, \ldots, A_p] \subset [C]$ et donc $A_1, \ldots, A_n \in [F]$. D'après (1) cela signifie que $A_1, \ldots, A_p \vdash C$ est démontrable. $\square$

6.2. Les grammaires AB sont non contextuelles

Théorème 6.3 (Bar-Hillel, Gaifman, Shamir)**.** *Les grammaires AB sont faiblement équivalentes aux grammaires non contextuelles : elles engendrent la même classe de langages.* [10]

Démonstration. Étant donnée une grammaire catégorielle Lex, construisons une grammaire non contextuelle G, en forme normale de Chomsky (voir premier volet théorème 3.2) qui engendre le même langage. Les terminaux sont les mêmes, c'est-à-dire les mots du lexique. Les non terminaux N sont toutes les catégories du lexique et toutes leurs sous catégories au sens du paragraphe 2.1 et le symbole de départ est S, le même. Quant aux règles de production, elles contiennent les règles $V \to U(U \setminus V)$ et $V \to (V \,/\, U)U$ pour tous les non terminaux U, V de N (en nombre fini) ainsi que les règles $C \to a$ lorsque $C \in \text{Lex}(a)$ (en nombre fini également).

Réciproquement, étant donnée une grammaire non contextuelle que l'on peut sans perte de généralité du point de vue du langage engendré supposer en forme normale de Greibach (voir le théorème 3.3 du premier volet), c'est-à-dire avec des règles de la forme $X \to aX_1 \ldots X_p$, on peut définir une grammaire catégorielle qui engendre le même langage : les mots sont les terminaux, les catégorie de bases sont les non terminaux et pour chaque règle $X \to aX_1 \ldots X_p$ on ajoute la catégorie $(((X \,/\, X_p) \,/\, X_{p-1}) \cdots \,/\, X_1$ à l'ensemble de catégories $\text{Lex}(a)$. $\square$

6.3. La conjecture de Chomsky (63) et sa résolution par Pentus (93) : les grammaires de Lambek sont non contextuelles

Avant de voir que les grammaires de Lambek sont non contextuelles, assurons nous déjà que pour toute grammaire non contextuelle il existe une grammaire de Lambek engendrant le même langage. Nous venons de voir qu'une grammaire non contextuelle est équivalente à une grammaire AB qui n'utilise que des catégories de la forme $(((X \,/\, X_p) \,/\, X_{p-1}) \cdots \,/\, X_1$. Mais avec la propriété de la sous formule dont nous avons parlé à la section 3.2, il n'est pas très difficile de voir qu'avec des catégories de cette forme, AB et le calcul de Lambek dérivent les mêmes séquents. Le même lexique engendre donc le même langage, celui de la grammaire non contextuelle initiale. Ce résultat a été établi par Joel M. Cohen dans [22] (mathématicien qui s'est ensuite consacré à la topologie algébrique).

En fait cet article contenait aussi une preuve fausse de la réciproque, problème proposé par Noam Chomsky dans [20] où il conjecture que les grammaires de Lambek n'engendrent que des langages algébriques, c'est-à-dire que les grammaires de Lambek sont faiblement équivalentes aux grammaires non contextuelles. *A posteriori* il est difficile de dire s'il s'agit d'une intuition géniale ou d'une remarque en l'air. Toujours est-il que c'est vrai. Wojciech Buszkowski en 1982 [15] a découvert l'erreur de [22] et Mati Pentus, en 1992 a effectivement établi cette conjecture [52]. C'est un joli résultat qui utilise des notions récentes de la logique linéaire [27] et un raffinement du théorème d'interpolation de Dirk Roorda [62, 63] qui n'existait pas à l'époque de Lambek. On utilisera ici le calcul des séquents plutôt que la déduction naturelle, car la règle de coupure jouera un rôle essentiel – même si elle n'augmente pas la classe des tautologies.

Théorème 6.4 (Pentus)**.** *Les grammaires de Lambek sont faiblement équivalentes aux grammaires non contextuelles : pour toute grammaire de Lambek, il existe une grammaire non contextuelle qui engendre le même langage.*

Plutôt que la preuve complète nous donnons ici les lemmes, une idée de leurs preuves (sauf pour celui sur le groupe libre, qui, en fait, était déjà connu), et la preuve du résultat principal à partir des lemmes. On note $|A|$ la taille d'une catégorie c'est-à-dire son nombre d'occurrences de catégories de bases (par exemple $|(a \setminus b) \,/\, a| = 3$).

Lemme 6.5. *Si un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash A_{n+1}$ avec $|A_i| \leqslant K$ alors il est démontrable avec uniquement la règle de coupure à partir de séquents démontrables $U, V \vdash X$ ou $U \vdash X$ avec $|U|, |V|, |X| \leqslant K$.*

On remarquera que l'ensemble S_K des séquents démontrables $U, V \vdash X$ et $U \vdash X$ avec $|U|, |V|, |X| \leqslant K$ est fini.

Démonstration de 6.5 entraîne 6.4. Considérons la grammaire non contextuelle suivante dont les mots (les terminaux) sont les mêmes, dont les non terminaux sont les catégories de taille inférieure à K et dont les règles sont $X \to UV$ si $(U, V \vdash X) \in \mathsf{S}_K$ et $X \to U$ si $(U \vdash X) \in \mathsf{S}_K$.

Si une phrase $m_1 \ldots m_n$ est dans le langage de la grammaire catégorielle, alors elle appartient au langage de la grammaire non contextuelle. Prenons K la taille de la plus grande catégorie du lexique. Comme $m_1 \ldots m_n$ est dans le langage de la grammaire catégorielle, il existe des catégories $t_i \in \mathrm{Lex}(m_i)$ (et donc de taille inférieure à K) une déduction de $t_1, \ldots, t_n \vdash S$. D'après le lemme 6.5, on peut supposer que cette déduction n'est composée que de séquents de S_K et de coupures, c'est-à-dire de règles de la grammaire non contextuelle et de la composition de règles. On obtient donc une dérivation de $S \to t_1 \cdots t_n$ dans la grammaire non contextuelle, dérivation qui, poursuivie par les règles lexicales, donne une dérivation de $S \to m_1 \cdots m_n$.

Si une phrase appartient au langage de la grammaire non contextuelle, alors elle appartient au langage de la grammaire catégorielle. Une dérivation avec cette grammaire non contextuelle peut-être divisée en deux parties : d'une part l'application des règles (en commençant par une règle $S \to \ldots$) qui correspondent aux séquents de S_K et la composition de ces règles (qui correspond à la coupure) et d'autre part les règles lexicales qui réécrivent un non terminal en un terminal. La première partie, donne, *mutatis mutandis*, une preuve formelle de $t_1, \ldots, t_n \vdash S$ n'utilisant que des coupures, et comme $t_i \in \mathrm{Lex}(m_i)$, la phrase $m_1 \cdots m_n$ appartient au langage de la grammaire catégorielle. $\square$

Le lemme 6.5 qu'il reste à prouver a une allure bien connue des logiciens : il s'agit d'un lemme d'interpolation, et pour des séquents dits *minces* on sait majorer précisément la taille de l'interpolant. Les séquents minces sont des séquents démontrables où toute catégorie de base apparaît exactement zéro ou deux fois. Il est facile de voir que toute démonstration dans le calcul de Lambek s'obtient par substitution lettre à lettre de catégories de base dans une démonstration ne comportant que des séquents minces, comme on peut l'observer dans les exemples de dérivations du paragraphe 3.3. Il en résulte que tout séquent démontrable est le résultat d'une substitution lettre à lettre dans d'un séquent mince.

Lemme 6.6 (Interpolation pour les séquents minces). *Soit* $\Gamma, \Delta, \Theta \vdash C$ *un séquent mince alors il existe une formule* B *(un interpolant de* Δ*), tel que :*

(1) $\Delta \vdash B$ *est mince*

(2) $\Gamma, B, \Theta \vdash C$ *est mince*

(3) $|B| = \|[\Delta]\|$ – *le nombre d'occurrences de catégories de base dans* B *est égal à la taille de l'interprétation de* Δ *dans le groupe libre.*

On remarquera que (1) et (2) entraînent $\Gamma, \Delta, \Theta \vdash C$ à l'aide de la règle de coupure. On peut combiner ce résultat avec une propriété sur la taille notée ||...|| des mots réduits du groupe libre redécouverte par Pentus mais qui se trouvait déjà dans [51, 2].

Lemme 6.7 (Une propriété du groupe libre). *Soit* u_i $i = 1, \ldots, n+1$ *des éléments du groupe libre tels que* $u_1 \cdot \cdots \cdot u_{n+1} = 1$ *alors il existe* $l \leqslant n$ *tel que*

$$\|u_l u_{l+1}\| \leqslant \max(\|u_l\|, \|u_{l+1}\|)$$

Démonstration de 6.6 et 6.7 entraînent 6.5. Comme la taille des formules et des séquents n'est pas modifiée par les substitutions lettre à lettre, il suffit de montrer cela pour les séquents minces. En effet, si tout séquent mince se déduit de tels séquents, il en est de même des séquents non minces, il suffit de faire une substitution qui ne change ni la forme des séquents, ni la taille des formules.

Pour montrer ce résultat pour les séquents minces, on procède par récurrence sur le nombre de formules dans le séquent. Si $n \leqslant 2$, il n'y a rien à démontrer.

Sinon, comme il s'agit d'un séquent démontrable, l'interprétation canonique dans le groupe libre du paragraphe 6.1 nous dit que $[A_1]\ldots.[A_n][A_{n+1}]^{-1} = 1$.

En utilisant la propriété 6.7 et le fait que la taille de chaque formule et donc de chaque $[A_i]$ soit moins que K, il existe deux formules consécutives $A_l A_{l+1}$ (le cas où se sont les deux dernières nécessite une petite adaptation) telles que la taille dans le groupe libre du mot réduit $[A_l][A_{l+1}]$ soit moins que K. En utilisant le lemme d'interpolation 6.6 on trouve donc un interpolant de taille $\leqslant K$, et donc deux séquents minces (démontrables) l'un ayant deux formules à gauche et l'autre $n-1$ et dont toutes les formules sont de taille $\leqslant K$. Par hypothèse de récurrence chacun des deux est démontrable à partir de séquents de la forme voulue, et donc aussi le séquent mince initial qui s'obtient à partir d'eux par une simple règle de coupure. $\square$

6.4. Analyses catégorielles et langages de graphes et d'arbres

Dans la mesure où, comme nous le mentionnions dans le premier volet, la théorie des langages s'intéresse depuis les années soixante-dix aux grammaires d'arbres et depuis la fin des années quatre-vingt aux langages de graphes, il est normal de se demander où se situent les analyses catégorielles, qui sont des arbres ou des graphes, dans ce type de hiérarchies. Le premier résultat, dû à Hans-Jorg Tiede [66] a montré que les arbres de dérivation d'une grammaire de Lambek (les arbres correspondant à des déductions naturelles normales) constituent un langage d'arbres qui peut ne pas être régulier – les langages réguliers d'arbres se reconnaissent par des machines similaires aux transducteurs définis dans le premier volet. C'est étonnant, car les chaînes reconnues par ces deux types de grammaires sont les mêmes, les langages non contextuels, et les arbres d'analyses des grammaires non contextuels sont réguliers (et même locaux). Il a même été montré tout récemment par Makoto Kanazawa et Sylvain Salvati que les langages des arbres de dérivation d'une grammaire de Lambek, ou les réseaux de démonstration, ne sont pas des langages d'arbres non contextuels, mais sont dans une classe incomparable : ils appartiennent à la classe des langages d'arbres obtenus par des grammaires de graphes dites à remplacement d'hyperarêtes (HR grammars). Étonnant pour des grammaires dont les langages de chaînes sont non contextuels, lesquels correspondent usuellement à des langages réguliers d'arbres ! Les résultats en cours sur les réseaux de démonstration du paragraphe 3.3 semblent similaires.

Nous n'avons pas formellement défini la variante non associative des grammaires de Lambek, due au même auteur [40], mais on peut en donner une idée rapidement. Au lieu d'être une simple suite de formules, la partie gauche d'un séquent est un arbre binaire de formule, qu'on peut noter avec des $\langle , \rangle$. Les règles d'élimination fabriquent de tels arbres (par exemple la conclusion de la règle $\backslash_e$ serait : $\langle \Gamma, \Delta \rangle$) et pour pouvoir appliquer une règle d'introduction il faut que l'hypothèse du séquent soit une fille de la racine (par exemple $\langle A, \Gamma \rangle$ pour la règle $\backslash_i$). Ces grammaires engendrent aussi tous les langages produits par des grammaires non contextuelles (elles contiennent clairement les grammaires AB) et le calcul a une complexité polynomiale (et donc ces grammaires ont une analyse polynomiale). Les grammaires de Lambek non associatives ont effectivement des langages d'arbres d'analyse réguliers c'est-à-dire qu'ils sont, à renommage près, pas plus compliqués que ceux des grammaires non contextuelles : c'est moins surprenant. [61]

7. Grammaires catégorielles d'hier et d'aujourd'hui

À travers les grammaires catégorielles et leur présentation logique à l'aide du calcul de Lambek, on peut donc en même temps qu'on analyse une phrase construire sa structure sémantique dans la logique d'ordre supérieur. On peut aussi tirer parti de la lexicalisation pour les acquérir automatiquement à partir d'exemples positifs structurés ou de corpus annotés.

Mais au vu des résultats d'équivalence avec les grammaires hors-contextes, ces grammaires semblent trop limitées d'un point de vue syntaxique, puisque nous avons vu au paragraphe 3.2 du premier volet que les langues naturelles ont des syntaxes légèrement contextuelles. Effectivement, les grammaires de Lambek peinent à rendre compte de nombreuses constructions syntaxiques courantes : constituants discontinus (*ne ... pas*), pronoms clitiques dans les langues romanes (*Je la fais réparer. Je peux la réparer.*),... Pour ce faire, les travaux récents proposent deux types d'extensions qui préservent la correspondance entre la structure syntaxique et la structure logique de la phrase.

La première approche due à Michael Moortgat [47] consiste à enrichir la logique de base le calcul de Lambeck non associatif par des modalités (connecteurs unaires) et à utiliser des postulats qui régissent le comportement de ces modalités. On peut ainsi fabriquer des formules dont les constituants sont inaccessibles jusqu'à ce qu'ils interagissent avec une formule précédée de la modalité duale. On décrit ainsi tous les langages récursivement énumérables, et lorsqu'on se limite à certains type de postulats, on garde une analyse polynomiale. Cette approche a été développée jusqu'à des développements pratiques très conséquents, comme l'analyseur Grail de Richard Moot qui a utilisé un processus d'extraction automatique de la grammaire (du lexique) à partir d'un corpus correctement annoté. [48]

Une autre famille d'approches consiste à construire une structure profonde dans la logique linéaire commutative (une variante du calcul de Lambek qui identifie $\backslash$ et $/$) et à en déduire d'une part la forme de surface (l'ordre des mots) et d'autre part la forme logique. On peut rattacher à cette tendance les grammaires minimalises catégorielles d'Alain Lecomte et moi-même [41, 42] qui s'inspirent de la formalisation par Edward Stabler [64] du programme minimaliste de Noam Chomsky [21]. L'idée est de pouvoir reprendre les analyses minimalistes de nombreuses constructions syntaxiques et la variation qu'elles proposent entre phrases et même entre langues, et aussi d'aborder les questions de syntaxe et sémantique comme les coréférences possibles ou impossibles des pronoms [4, 12]. D'autres systèmes basés sur la même architecture sont apparus : les grammaires d'interaction de Guy Perrier [54], les grammaires catégorielles abstraites de Philippe de Groote [24], les *lambda grammars* de Reinhard Muskens [50], les *higher-order categorical grammars* de Carl Pollard [55].

Le lien entre théorie des langages standard et théorie de la démonstration conserve des mystères en dépit des résultats importants dont nous venons de parler. D'un point de vue algorithmique et donc pratique la théorie des langages est plus efficace, comme le montre le résultat de complexité, le théorème 3.2. Cependant, la richesse des preuves permet de construire des représentations sémantiques et les grammaires catégorielles sont plus aisées à acquérir. Ce lien entre les deux approches, s'il était mieux connu, permettrait peut-être d'importer dans les grammaires catégorielles des algorithmes rapides ; et, utilisé en sens contraire, il pourrait permettre de compiler les grammaires catégorielles en grammaires de réécriture plus efficaces, en maintenant une correspondance qui permettrait de calculer des représentations du sens.

8. Conclusion

L'objet de cet article en deux volets était de présenter les méthodes mathématiques en linguistique computationnelle, et, après une présentation de la linguistique, nous avons exposé deux traditions relativement mathématiques pour décrire la structure du langage naturel, ou, plus particulièrement, celle des mots et de la phrase : celle issue de la théorie des langages et celle issue de la logique, avec des connexions prometteuses qui commencent à se tisser entre les deux.

Si on revient au panorama des domaines de la linguistique esquissé dans le premier volet, il est étonnant que la sémantique ne soit que très schématiquement évoquée par notre présentation et que l'énonciation ou la pragmatique ne le soient pas du tout.

En fait, du côté sémantique, il existe déjà bien plus que ce que nous avons présenté ici. Par exemple les questions mentionnées au paragraphe 4.4 sont à peu près toutes correctement modélisées, notamment par l'intensionnalité et les mondes possibles à la Kripke, ou par la *Discourse Representation Theory* de Hans Kamp [36]. On voit aussi apparaître des modèles relativement formels de la sémantique lexicale, qui relie les sens des mots et explore leur lien au monde. [57]

Cependant, même s'il existe des modèles de la sémantique plus fins que ceux que nous avons esquissés ici, d'un point de vue mathématique, ils sont encore instables et il n'y a guère de résultats mathématiques hormis sur des questions particulières comme les quantificateurs généralisés [38]. Cet état de fait est également frustrant d'un point de vue pratique : tandis qu'on sait analyser automatiquement de très gros volumes de textes en peu de temps, on ne sait pas interpréter les structures syntaxiques obtenues, alors que la recherche d'informations, le dialogue homme machine ou la traduction assistée par ordinateur bénéficieraient grandement de modèles calculatoires du sens. Du point de vue des sciences cognitives, il serait également intéressant de savoir comment nous nous comprenons à travers le langage, quel type de modèle mathématique correspond le mieux à cette activité, et peut-être quels fragments de quelles logiques nous utilisons – si toutefois la logique est la mieux adaptée à décrire ces questions de sens.

En se limitant aux considérations syntaxiques et à une sémantique rudimentaire dont les modèles mathématiques respectifs sont suffisamment développés, on espère avoir suscité l'intérêt du mathématicien pour un domaine relativement traditionnel, entre linguistique, mathématiques et informatique où il est à la fois possible de résoudre des problèmes ouverts mais aussi de construire des objets mathématiques, en particulier de nature logique ou de combinatoire, qui soient à la fois satisfaisants en tant qu'objets mathématiques mais aussi pertinents d'un point de vue linguistique.

9. Références

[1] V. M. Abrusci – « Phase semantics and sequent calculus for pure non-commutative classical linear logic », *Journal of Symbolic Logic* **56** (1991), n° 4, p. 1403–1451.

[2] J.-M. Autebert, L. Boasson & G. Sénizergues – « Langages de parenthèses, langages N.T.S. et homomorphismes inverses », *R.A.I.R.O. Informatique Théorique* **18** (1984), n° 4, p. 327–344.

[3] K. Ajdukiewicz – « Die syntaktische konnexität », *Studia Philosophica* **1** (1935), p. 1–27, (English translation in [44], pages 207–231).

[4] M. Amblard – « Calcul de représentations sémantiques et syntaxe générative : les Grammaires Minimalistes Catégorielles », Thèse, Université de Bordeaux I, 2007.

[5] A. Arnauld & C. Lancelot – *Grammaire générale et raisonnée*, Le Petit, 1660, Appelée *Grammaire de Port-Royal*. Rééditée en 1997 par les Éditions Allia.

[6] A. Arnauld & P. Nicole – *La logique ou l'art de penser : contenant outre les règles communes, plusieurs observations nouvelles, propres à former le jugement.*, G. Desprez, 1683, Réédité par Vrin en 2002.

[7] D. Bechet, R. Bonato, A. Dikovsky, A. Foret, Y. Le Nir, E. Moreau, C. Retoré & I. Tellier – « Modèles algorithmiques de l'acquisition de la syntaxe : concepts et méthodes, résultats et problèmes », *Recherches Linguistiques de Vincennes* **36** (2007), p. 123–152.

[8] M. Baratin & F. Desbordes – *L'analyse linguistique dans l'antiquité classique – I les théories*, Klincksieck, 1981.

[9] Y. Bar-Hillel – « A quasi arithmetical notation for syntactic description », *Language* **29** (1953), p. 47–58.

[10] Y. Bar-Hillel, C. Gaifman & E. Shamir – « On categorial and phrase-structure grammars », *Bulletin of the research council of Israel* **F** (1963), n° 9, p. 1–16.

[11] J. Besombes & J.-Y. Marion – « Learning discrete categorial grammars from structures », *RAIRO, Theoretical Informatics and Applications* **42** (2008), p. 165–182.

[12] R. Bonato – « An integrated computational approach to binding theory », Tesi di dottorato di ricerca and thèse de doctorat, Università degli Studi di Verona and Université Bordeaux I, May 2006.

[13] R. Bonato & C. Retoré – « Learning rigid Lambek grammars and minimalist grammars from structured sentences », in *Proceedings of the third workshop on Learning Language in Logic, LLL 01* (Strabourg) (L. Popelînskỳ & M. Nepil, éds), FI MU Report series, n° FI-MU-RS-2001-08, Faculty of Informatics – Masaryk University, September 2001, p. 23–34.

[14] J. Busquets – *Logique et langage : apports de la philosophie médiévale*, Presses Universitaires de Bordeaux, 2006.

[15] W. Buszkowski – « Compatibility of a categorial grammar with an asssociated category system », *Zeitschrift für matematische Logik und Grundlagen der Mathematik* **28** (1982), p. 229–238.

[16] ———, « Completeness results for Lambek syntactic calculus », *Zeitschrift für matematische Logik und Grundlagen der Mathematik* **32** (1986), p. 13–28.

[17] ———, « Mathematical linguistics and proof theory », in *Handbook of Logic and Language* [67], p. 683–736.

[18] W. Buszkowski & G. Penn – « Categorial grammars determined from linguistic data by unification », *Studia Logica* **49** (1990), p. 431–454.

[19] C. Casadio – « Semantic categories and the development of categorial grammars », in *Categorial Grammars and Natural Language Structures* (R. Oehrle, E. Bach & D. Wheeler, éds), Reidel, Dordrecht, 1988, p. 95–124.

[20] N. Chomsky – « Formal properties of grammars », in *Handbook of Mathematical Psychology*, vol. 2, Wiley, New-York, 1963, p. 323 – 418.

[21] ———, *The minimalist program*, MIT Press, Cambridge, MA, 1995.

[22] J. M. Cohen – « The equivalence of two concepts of categorial grammars », *Information and Control* **10** (1967), p. 475–484.

[23] F. Corblin – *Représentation du discours et sémantique formelle. introduction et applications au francais.*, Linguistique Nouvelle, Presses Universitaires de France (PUF), 2002.

[24] P. de Groote – « Abstract categorial grammars », in *Proceedings of the 39th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics, ACL 2001* (Toulouse), ACL, July 2001.

[25] A. Finkel & I. Tellier – « A polynomial algorithm for the membership problem with categorial grammars », *Theoretical computer science* **164** (1996), n° 1–2, p. 207–221.

[26] L. T. F. Gamut – *Logic, language and meaning – volume 2 : Intensional logic and logical grammar*, The University of Chicago Press, 1991.

[27] J.-Y. Girard – « Linear logic », *Theoretical Computer Science* **50** (1987), n° 1, p. 1–102.

[28] J.-Y. Girard, Y. Lafont & P. Taylor – *Proofs and types*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, n° 7, Cambridge University Press, 1988.

[29] G. Gobber – « Alle origini della grammatica categoriale », *Rivista di Filosofia Neo-Scolastica* **77** (1985), p. 258–295.

[30] E. M. Gold – « Language identification in the limit », *Information and control* **10** (1967), p. 447–474.

[31] Howard, William A. – « The formulae-as-types notion of construction », To H.B. Curry : Essays on Combinatory Logic, λ-calculus and Formalism, J. Hindley and J. Seldin eds., Academic Press, p.479-490.

[32] E. Husserl – *Logische untersuchungen*, second éd., Max Niemeyer, 1913, Traduction française de Hubert Élie, Lothar Kelkel et René Schérer : Recherches Logiques, Presses Universitaires de France, 1962.

[33] T. M. V. Janssen – « Compositionnality », in *Handbook of Logic and Language* [67], p. 417–473.

[34] M. Kanazawa – *Learnable classes of categorial grammars*, Studies in Logic, Language and Information, FoLLI & CSLI, 1998, distributed by Cambridge University Press.

[35] W. Kneale & M. Kneale – *The development of logic*, 3rd éd., Oxford University Press, 1986.

[36] H. Kamp & U. Reyle – *From discourse to logic*, D. Reidel, Dordrecht, 1993.

[37] J.-L. Krivine – *Lambda calcul – types et modèles*, Etudes et Recherches en Informatique, Masson, Paris, 1990.

[38] E. L. Keenan & D. Westerståhl – « Generalized quantifiers in linguistics and logic », in *Handbook of Logic and Language* [67], p. 837–894.

[39] J. Lambek – « The mathematics of sentence structure », *American mathematical monthly* (1958), p. 154–170.

[40] ———, « On the calculus of syntactic types », in *Structure of language and its mathematical aspects* (R. Jakobson, éd.), American Mathematical Society, 1961, p. 166–178.

[41] A. Lecomte & C. Retoré – « Towards a minimal logic for minimalist grammars : a transformational use of Lambek calculus », in *Formal Grammar, FG'99*, FoLLI, 1999, p. 83–92.

[42] ———, « Extending Lambek grammars : a logical account of minimalist grammars », in *Proceedings of the 39th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics, ACL 2001* (Toulouse), ACL, July 2001, p. 354–361.

[43] D. Mazza – « Interaction nets : Semantics and concurrent extensions », Ph.D. Thesis, Université de la Méditerranée/Università degli Studi Roma Tre, 2006.

[44] S. McCall (éd.) – « Polish logic, 1920-1939 », Oxford University Press, 1967.

[45] N. Meggido – « Partial and complete cyclic orders », *Bulletin of the American Mathematical Society* **82** (1976), n° 2, p. 274–276.

[46] R. H. Möhring – « Computationally tractable classes of ordered sets », in *Algorithms and Order* (I. Rival, éd.), NATO ASI series C, vol. 255, Kluwer, 1989, p. 105–194.

[47] M. Moortgat – « Categorial type logic », in *Handbook of Logic and Language* [67], p. 93–177.

[48] R. Moot – « Automated extraction of type-logical supertags from the spoken dutch corpus », in *The Complexity of Lexical Descriptions and its Relevance to Natural Language Processing : A Supertagging Approach* (S. Bangalore & A. Joshi, éds), MIT Press, 2007.

[49] ———, « Filtering axiom links for proof nets », in *Proceedings of the 12th conference on Formal Grammar (FG 2007), Dublin, Ireland* (L. Kallmeyer, P. Monachesi, G. Penn & G. Satta, éds), CSLI Publications, 2007, To appear, ISSN 1935-1569.

[50] R. Muskens – « Lambdas, Language, and Logic », in *Resource Sensitivity in Binding and*

Anaphora (G.-J. Kruijff & R. Oehrle, éds), Studies in Linguistics and Philosophy, Kluwer, 2003, p. 23–54.

[51] M. Nivat – « Congruences de thue et t-langages », *Studia scientiarum mathematicarum hungarica* **6** (1971), p. 243–249.

[52] M. Pentus – « Lambek grammars are context-free », in *Logic in Computer Science*, IEEE Computer Society Press, 1993.

[53] ______, « Lambek calculus is np-complete », *Theor. Comput. Sci.* **357** (2006), n° 1-3, p. 186–201.

[54] G. Perrier – « Les grammaires d'interaction », Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université Nancy 2, Janvier 2003.

[55] C. Pollard – « Higher-order categorical grammars », in *Categorial grammars – an efficient tool for natural language processing* (Montpellier), C.N.R.S., June 2004, p. 340–361.

[56] S. Pogodalla & C. Retoré – « Handsome non-commutative proof-nets : perfect matchings, series-parallel orders and hamiltonian circuits », Tech. Report RR-5409, INRIA, 2004, Presented at Categorial Grammars 2004, to appear in the Journal of Applied Logic.

[57] J. Pustejovsky – *The generative lexicon*, M.I.T. Press, 1995.

[58] C. Retoré – « Handsome proof-nets : perfect matchings and cographs », *Theoretical Computer Science* **294** (2003), n° 3, p. 473–488, Complete version RR-3652 `http://www.inria.fr`.

[59] C. Retoré – « The logic of categorial grammars – lecture notes », Tech. Report RR-5703, INRIA, 2005, ESSLLI 2000 / ACL 2001 / Bordeaux Master in CS Lecture Notes.

[60] ______, « Les mathématiques de la linquistique computationnelle. premier volet : la théorie des langages », *Gazette des Mathématiciens* (2008), p. 35–62.

[61] C. Retoré & S. Salvati – « Non-associative categorial grammars and abstract categorial grammars », in *New Directions in Type Theoretic Grammars* (R. Muskens, éd.), ESSLLI07, FoLLI, 2007, p. 51–58.

[62] D. Roorda – « Resource logic : proof theoretical investigations », Thèse, FWI, Universiteit van Amsterdam, 1991.

[63] ______, « Interpolation in fragments of classical linear logic », *Journal of Symbolic Logic* **59** (1994), n° 2, p. 419–444.

[64] E. Stabler – « Derivational minimalism », in *Logical Aspects of Computational Linguistics, LACL'96* (C. Retoré, éd.), LNCS/LNAI, vol. 1328, Springer-Verlag, 1997, p. 68–95.

[65] R. Thomason (éd.) – *The collected papers of richard montague*, Yale University Press, 1974.

[66] H.-J. Tiede – « Lambek calculus proofs and tree automata », in *Logical Aspects of Computational Linguistics, LACL'98, selected papers* (M. Moortgat, éd.), LNCS/LNAI, n° 2014, Springer-Verlag, 2001.

[67] J. van Benthem & A. ter Meulen (éds) – *Handbook of logic and language*, North-Holland Elsevier, Amsterdam, 1997.

10. Rectificatif

Correctif à l'article « Les mathématiques de la linguistique computationnelle. Premier volet : la théorie des langages » paru dans la *Gazette* 115.

Dans l'exemple de transducteur réalisant l'accord de l'adverbe *tout* exprimant le degré complet, j'ai commis de nombreuses inversions entre les mots *consonne* et *voyelle* ainsi qu'entre les règles à appliquer dans chacun des deux cas. Voici la figure et le texte que j'aurais dû mettre à la fin du paragraphe 2.3 pages 45-46.

Nous donnons en figure 5 un transducteur qui représente la règle d'accord de *tout* utilisé comme adverbe de degré. F et M désignent respectivement les traits *féminin* et *masculin*, S et P désignent respectivement les traits *singulier* et *pluriel*. Une transition K/es_K est une abréviation pour les transitions de mêmes états initial et final b/b, c/c ... (pour toute consonne, y compris le *h* aspiré), de même V/V est une abréviation pour les transitions a/a, e/e (pour toute voyelle, y compris le *h* non aspiré). La transition $?/?$ récrit n'importe quel caractère en lui même. Le transducteur réalise entre autres *tout FP_entières* $\rightarrow$ *tout entières* et *tout FP_grandes* $\rightarrow$ *toutes grandes*.

La règle dit que *tout* est invariable, sauf si l'adjectif qui le suit est au féminin et commence par une consonne : *les fenêtres tout entières ouvertes* et *les fenêtres toutes grandes ouvertes* – voir par exemple le Grévisse, §955.

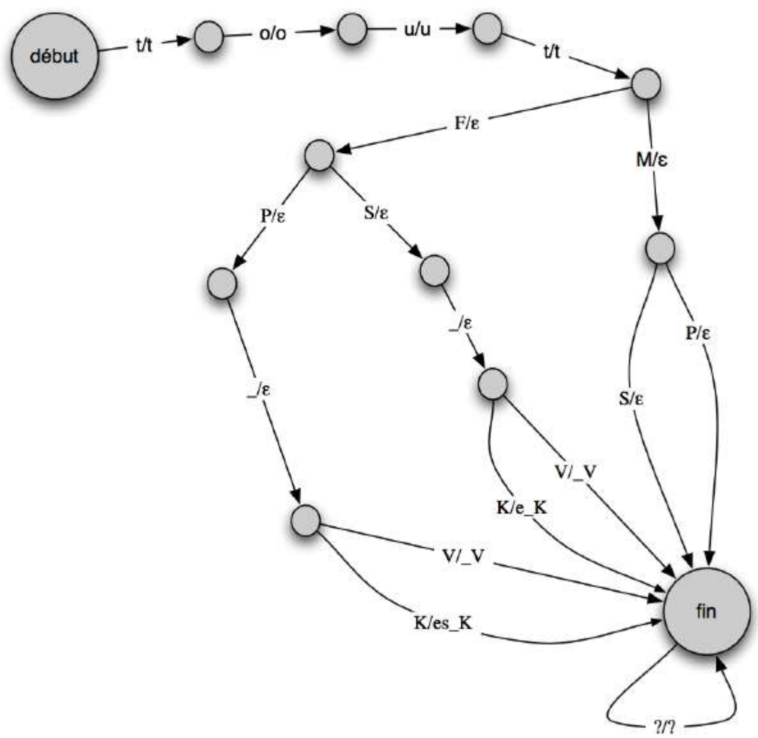


FIG. 5. Un tranducteur réalisant l'accord de l'adverbe *tout* exprimant le degré complet.

ENSEIGNEMENT

Le 12 janvier dernier, le Conseil d'Administration de la SMF a adopté le texte que nous reproduisons ci-dessous sur la licence de mathématiques. Mais auparavant, Jean-Pierre Borel qui a suivi de près l'élaboration de ce document, nous présente le travail effectué.

Pourquoi un socle de la Licence de Mathématiques ?

Jean-Pierre Borel

Les trois sociétés savantes SMF, SMAI et SFdS, viennent d'adopter le texte intitulé « Pour un socle de la licence de Mathématiques ». Cette adoption est le résultat d'un long travail. Pour l'avoir suivi comme responsable de la Commission Enseignement de la SMF, puis comme animateur du groupe qui s'est constitué pour construire ce texte, il me semble pouvoir apporter quelques éléments d'éclairage sur les motifs et la démarche suivie, éléments de nature à mieux comprendre le texte et les enjeux.

Le point déclencheur est indubitablement la mise en place du système LMD, bien connu de tous. Il ne s'agit pas ici de savoir si c'est une réforme positive ou non, si ses objectifs sont atteints, partiellement atteints, voire simplement définis ; mais simplement de rappeler que ce changement a été profond. D'une part, la licence n'est plus le diplôme intermédiaire du second cycle, mais est maintenant le premier niveau de diplôme de l'enseignement supérieur. Il ne s'agit plus d'une année après le DEUG, mais d'un ensemble de 180 crédits (ECTS), de 6 semestres, de 3 années, suivant l'unité de compte que chacun préfère. Il a normalement – naturellement ? – sa cohérence d'ensemble. D'autre part, les textes précédents détaillant, au moins partiellement, les « programmes » de licence (et donc, pour notre licence de mathématiques, son contenu mathématique), sont oubliés. Pour reprendre une terminologie utilisée dès le début de la mise en place du LMD, il appartient à chacun de prendre ses responsabilités : les universités pour ce qui est des contenus des diplômes, les étudiants pour ce qui est de leur « parcours », qui se doit quand même d'avoir une cohérence validée.

Dans ce contexte, la question de la cohérence s'est rapidement posée : en faut-il une, pourquoi, et qui doit la prendre en charge ? Si l'idée de programmes nationaux exhaustifs n'a jamais été d'actualité et ne le sera probablement jamais – c'est en tout cas mon souhait – le besoin d'une cohérence minimale est largement partagé : nos étudiants sont mobiles, pour certains en cours de licence, pour beaucoup lors de leur passage en master. Ils se retrouvent souvent candidats à un même concours, le CAPES suite à la licence. Notre communauté, chargée de l'enseignement des mathématiques dans les universités, et intéressée au premier chef par cette cohérence, nous a paru, à moi et à d'autres, le bon acteur.

Enfin, et ce n'est pas un point mineur, nous sommes confrontés à une baisse nette du nombre de nos étudiants, de leur motivation et, disent certains, de leur « niveau », notion que personnellement j'ai du mal à cerner de manière rigoureuse. Mais chacun sait bien que les étudiants d'aujourd'hui ont un passé très différent de ceux d'il y a une ou deux dizaines d'années.

La commission enseignement de la SMF s'est donc intéressée à la question dès 2004. La première interrogation a été de voir ce qui se passait sur le terrain : la mise en place du LMD conduisait-elle, comme certains pensaient le voir, à une plus grande disparité des formations mathématiques de licence ?

Une enquête a donc été menée auprès de l'ensemble des départements de Mathématiques fin 2004. Un nombre significatif a répondu, et avec une diversité représentative de nos différences : région parisienne et province, universités de tailles variées. Une présentation de ses résultats a été faite lors de la journée de janvier 2005, consacrée au L de Mathématiques. Une seconde enquête, plus précise et portant notamment sur les contenus enseignés en licence, a été menée fin 2005. Les principaux enseignements tirés de ces enquêtes peuvent se résumer ainsi :

– les appellations restent assez homogènes, surtout Licence Sciences-Technologies-Santé, mention Mathématiques ;

– les articulations avec les autres disciplines scientifiques sont peu modifiées, même si certaines différences apparaissent : un ou deux semestres communs avec Physique et Chimie, trois à quatre avec l'Informatique (sauf cas particuliers) ;

– des stratégies différentes selon les universités, quant au degré de pluridisciplinarité en début de licence, conduisent à des volumes mathématiques très différents lors du premier semestre (de 36 à 134 heures !) ;

– ces différences semblent s'atténuer ensuite. Mais les statuts « obligatoire », « facultatif », « optionnel », « libre » des unités d'enseignement rendent très difficile le calcul réel du volume mathématique suivi par un étudiant ayant obtenu sa licence, ou même d'une fourchette réaliste ;

– une forte tendance à l'émiettement apparaît. Le volume en ECTS des unités de mathématiques varie dans des proportions considérables, et surtout l'étudiant peut rencontrer plus de dix enseignants de mathématiques lors de sa première année (cas hélas non isolé).

Enfin, sur le plan des contenus, de grands chapitres font l'objet d'approches très différentes, soit dans le temps (proposé en semestre 3 ici, en semestre 6 là, ou jamais ailleurs), soit dans leur statut (obligatoire ici, facultatif là, optionnel ailleurs). C'est le cas pour ce qui est de la théorie de la mesure, des probabilités, de la statistique. Mais pas seulement.

Le constat ainsi fait a été jugé déraisonnable, et nous avons engagé une réflexion pour voir comment notre communauté pouvait agir pour que la situation s'améliore. Des travaux ont été menés dans leur domaine par les informaticiens (travail de SPECIF) et les physiciens (travail de la SFP), réalisés d'ailleurs dans des états d'esprit assez différents. Nous avons donc essayé de définir ce que devait savoir impérativement tout étudiant titulaire d'une licence de mathématiques. Une grosse année de travail, essentiellement d'octobre 2006 à décembre 2007, a conduit au texte adopté.

Le débat a été très ouvert. Le groupe de travail a réuni des enseignants intéressés de diverses universités, il s'est étoffé au cours du temps. Un débat a été organisé en janvier 2007 à Paris, des versions provisoires du texte ont circulé, permettant des réactions nombreuses et pas toujours positives.

Le groupe qui y a travaillé, et je tiens à remercier à nouveau tous ceux qui y ont consacré du temps, souvent avec passion, n'a pas eu la tâche facile. Les avis n'ont pas toujours été convergents, au moins en début de discussion. Les nombreux mails échangés ont même été vifs quelquefois. Mais le fait que chacun ait toujours eu à l'esprit nos étudiants, ce qu'ils sont, ce à quoi nous souhaitons les mener, et également ce que sont les mathématiques, a chaque fois permis de converger. Le socle est donc, bien plus que les idées de ses auteurs, le point d'équilibre auquel nous sommes arrivés après une année de travail.

Je voudrais souligner quelques points importants, ou qui pourraient être mal interprétés.

(1) Il s'agit de préciser une liste de connaissances que tout étudiant ayant obtenu une licence de mathématiques doit connaître, et donc que tout master de mathématiques pourra exiger. Ce n'est pas une liste d'unités d'enseignements, ce n'est pas un programme. Il appartient à chaque enseignant, à chaque équipe pédagogique, de voir comment insérer ces éléments dans une formation bien construite, bien découpée en unités semestrielles, bien mise en perspective. Le socle a pour objectif de donner une liste de concepts à faire acquérir et de techniques à maîtriser en fin de licence. Il ne dit volontairement rien sur les méthodes les plus efficaces pour donner aux étudiants la maîtrise de ces techniques, ni sur les techniques les mieux adaptées pour permettre d'appréhender un concept. De même, le socle n'est pas une reprise de l'ancien DEUG. Il insiste sur l'introduction des probabilités et des statistiques dans tous les parcours. Il encourage l'usage de logiciels, la modélisation.

(2) Tout élément de cette liste doit faire l'objet d'une compréhension en profondeur, ce qui me paraît être un progrès : je pense que tout enseignant en licence sait que ce n'est pas le cas aujourd'hui. C'est ici un point fondamental. Il est inutile de traiter énormément de chapitres, pour constater ensuite qu'en fait rien n'est vraiment acquis. Cela donne en plus, à mon avis, une vision complètement fausse des mathématiques et de la démarche mathématique : il ne s'agit pas d'apprendre quelques théorèmes et de savoir les utiliser dans quelques cas types. Les notions de base doivent être comprises en profondeur, avant d'aller plus avant, et surtout pour aller plus avant.

(3) La licence doit comporter une large proportion de connaissances qui ne sont pas dans le socle, d'autres points doivent être traités (le socle représente environ les deux tiers du contenu mathématique de la licence), et pas seulement lors des semestres 5 et 6. La liste complémentaire proposée a uniquement pour but d'éclairer l'esprit dans lequel le groupe a travaillé. Les discussions ont montré qu'il n'y a pas accord général pour considérer que ces notions feraient partie du bagage indispensable de tout étudiant de licence, même si chacun est libre de penser autrement à titre personnel.

(4) Le volume horaire de mathématiques est un point sensible, il a donc été longuement débattu. Il dépend évidemment des contextes locaux, puisqu'il faut bien composer à un moment. Il est hors de question qu'il soit trop bas, la seule indication donnée dans le texte est un minimum. L'idée d'une fourchette a finalement été retirée, car elle s'est avérée peu praticable. Plus que dans les chiffres, l'essentiel réside dans l'équilibre tout au long des six semestres, dans la démarche pédagogique et l'articulation des notions abordées. Le texte rappelle aussi l'importance des autres disciplines scientifiques, des enseignements d'ouverture, capables de développer d'autres compétences – pour reprendre un mot à la mode – que celles développées par nos enseignements de mathématiques.

(5) La démarche et les objectifs sont au moins aussi importants que les contenus des chapitres et les théorèmes. C'est pour cela que la présentation du socle commence par deux pages générales, avant de préciser les notions mathématiques, et que limiter le socle à la lecture de ses pages 3 et 4 lui enlève tout sens.

Comme tout texte, celui sur le socle pourra toujours être critiqué. Il est certainement améliorable à l'infini. Nous espérons simplement avoir pu construire un ensemble équilibré, raisonnable, qui réponde au besoin de cohérence et permette d'envisager la mobilité de nos étudiants, à partir de références partagées.

Car il nous a semblé que, presque plus que le détail de son contenu, l'existence d'un tel texte et la capacité de notre communauté mathématique de se l'approprier, de se regrouper à travers lui, seront particulièrement importantes dans les mois et les années qui viennent : la licence est devenue un grand chantier national, beaucoup avancent des idées sur ce qui doit être fait. Nous devons donc être présents et unis sur ce terrain.

Je tiens, en terminant ce texte, à remercier tous les acteurs de ce dossier, et tout particulièrement les deux « chevilles ouvrières » de ce travail qu'ont été Gilles Christol et Pierre Arnoux.

Pour un socle de la licence de Mathématiques

Contexte général

Afin d'éviter de trop grands écarts dans les différentes universités, la SMF, la SMAI et la SFdS proposent un cadre général pour la licence de mathématiques. Elles suggèrent une liste de notions que tout étudiant doit maîtriser lorsqu'il a obtenu une telle licence. Une licence de mathématiques doit comporter, sur l'ensemble des six semestres d'études, au moins une moitié – en horaire et crédits – d'enseignements de mathématiques. Il est essentiel qu'elle contienne également, dans des volumes très significatifs, des enseignements d'ouverture et des enseignements portant sur les autres disciplines scientifiques, avec des orientations pouvant varier selon les situations et les objectifs choisis.

Il n'est pas question de définir un programme pour les enseignements de mathématiques. L'approche retenue est de présenter un « socle », ensemble de chapitres ou thèmes qui doivent être traités au cours des six semestres de formation, qui ne sont en rien des intitulés d'Unités d'Enseignement, et dont le poids est estimé à un tiers environ du volume total de la licence, toutes disciplines confondues. Un cursus complet de licence ne saurait donc se limiter à la présentation des éléments figurant dans ce socle. D'autres points seront inscrits dans chaque maquette, selon des modalités – enseignement obligatoire ou optionnel, place dans les six semestres, etc. - variables selon les établissements. Bien entendu, un bon étudiant motivé peut suivre plus d'unités que les 180 crédits nécessaires pour une licence.

L'efficacité de l'enseignement de mathématiques en licence impose de veiller à la taille des Unités d'Enseignement en mathématiques, déterminée par les établissements mais qui ne doit pas être trop petite, à la répartition des enseignements, qui ne doivent pas conduire à trop de morcellement, et à l'organisation du contrôle des connaissances qui n'est pas une fin en soi et ne doit pas conduire à une dépense de temps et d'énergie démesurée.

Les enseignants de master, de préparation au CAPES, pourront donc s'appuyer sur ce socle de connaissances en principe acquises quelle que soit l'origine de leurs étudiants. Les étudiants poursuivant vers d'autres voies ou d'autres métiers en disposeront comme base de références, permettant d'exploiter leurs acquis en mathématiques.

Il y a plusieurs choix cohérents pour l'ordre dans lequel ces différentes notions sont présentées ainsi que pour la présentation de chacune d'entre elles. La pertinence de ces choix pédagogiques dépend souvent de contraintes locales. Même si quelques hypothèses sur cette organisation figurent ci-dessous, celle-ci est bien évidemment laissée à l'initiative de chaque université et de chaque équipe pédagogique. À elles de décider dans quelle mesure ces choix seront imposés aux enseignants. L'existence d'unités indépendantes incite à construire des enseignements partant de résultats admis, ou justifiés heuristiquement, à partir desquels les autres résultats du cours sont démontrés correctement. Par exemple un cours d'intégration peut parfaitement reposer sur le théorème de Lebesgue alors que celui-ci ne sera démontré qu'en master.

La formation en licence doit permettre à l'étudiant d'améliorer sa perception de la démarche mathématique, en particulier :

– mise en place des « objets mathématiques », l'introduction d'une notion étant justifiée par des exemples, des motivations liées à son utilisation... , avant même l'énoncé de la définition et la présentation des théorèmes,

– rôle central de la démonstration, même si tout démontrer n'est pas un objectif en soi,

– organisation du raisonnement, ce qui suppose une certaine familiarisation avec les outils de la logique,

– compréhension des structures (en particulier à l'occasion des cours d'algèbre),

– mise en œuvre informatique des calculs formels, numériques, statistiques quand le sujet s'y prête.

Ce socle vise quatre grands objectifs :

– une bonne appropriation de R, R^2, R^3 du point de vue algébrique, analytique et géométrique,
– la résolution d'équations (linéaires, algébriques, différentielles),
– la notion d'approximation (dans divers cadres),
– l'étude de l'aléatoire (probabilités et statistiques) et du traitement de données.

Chaque étudiant ayant obtenu la licence de mathématiques doit, pour cela, posséder les connaissances correspondant aux neuf thèmes ci-après. Il doit être capable, pour chacun d'eux, de réaliser son activité mathématique, que l'on peut traduire par « exercice/problème/capacité de calcul », avec une capacité réelle d'autonomie. Les contenus précis à traiter doivent bien sûr l'être en partant des programmes du lycée.

Éléments du socle

Connaissances transversales

(1) Nombres réels. Bornes supérieure et inférieure. Nombres complexes, se rappeler que l'introduction en terminale n'est pas suffisante pour entraîner une vraie familiarité.

(2) Langage ensembliste. La présentation des probabilités peut être un bon moment pour une étude un peu plus systématique.

(3) Logique élémentaire, quantificateurs. Par exemple en liaison avec les manipulations sur les limites.

(4) Notion d'algorithme. Donner des exemples classiques.

Géométrie

Droites et plans. Produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte. Changements de repère, transformations affines. Courbes paramétrées. Coordonnées polaires. Longueur, courbure. Notions élémentaires sur les coniques, applications en mécanique et en physique.

Algèbre linéaire

(1) Théorie élémentaire. Calcul matriciel, méthode du pivot. Espace vectoriel et applications linéaires. Rang.

(2) Déterminants. Calcul et emploi pour l'indépendance linéaire et le calcul de volumes.

(3) Théorie spectrale. Valeurs propres et vecteurs propres, diagonalisation. Exemples d'applications : systèmes dynamiques, systèmes différentiels, analyse des données.

(4) Algèbre bilinéaire. Formes bilinéaires et quadratiques, espaces euclidiens, espaces de Hilbert. Applications aux coniques.

Fonctions d'une variable

(1) Théorie élémentaire. Étude locale (développements limités), étude globale (théorème des accroissements finis,...), fonctions usuelles.

(2) Intégrales et primitives. Définition de l'intégrale et interprétation comme aire (la démonstration de l'existence n'est pas indispensable). Méthodes de calcul et de calcul approché. Théorème de la convergence dominée et applications.

(3) Équations différentielles. Équations linéaires du premier ordre et du second ordre à coefficients constants (utilisation des nombres complexes et quelques applications en physique). Méthodes de résolution numériques. Exemples d'équations différentielles plus générales.

(4) Intégrales généralisées.

Fonctions de plusieurs variables

(1) Représentations graphiques. Surfaces, lignes de niveau, champs de vecteurs.

(2) Calcul différentiel. Différentielle et plan tangent, recherche d'extremum, formule de Taylor à l'ordre 2, utilisation du théorème des fonctions implicites. Gradient.

(3) Intégrales multiples. Énoncé des théorèmes de Fubini et du changement de variables, calcul d'aires et de volumes.

Suites et séries

(1) Suites et séries numériques.

(2) Suites et séries de fonctions. Séries entières, séries de Fourier.

Probabilités et statistique

(1) Probabilités élémentaires. Conditionnement, indépendance. Variables aléatoires discrètes et continues dans R et R^2. Convergence (loi faible et théorème central limite), usage pour les approximations. Simulation aléatoire, principe et applications.

(2) Statistique descriptive et inférentielle. Analyse en composantes principales (en liaison avec le point 2.c), notion de qualité d'une représentation résumée de données. Modélisation aléatoire en statistique. Estimation et intervalle de confiance, problématique et exemple de tests (sur les paramètres : proportion, moyenne, variance ; du χ^2). Application aux sondages.

Analyse numérique

Méthodes de résolution de systèmes linéaires, d'équations $f(x) = 0$. Calculs approchés d'intégrales, de solutions d'équations différentielles. Mise en œuvre numérique par un logiciel adapté.

Arithmétique

Arithmétique de Z. Arithmétique des polynômes. Z/nZ. Corps finis (cas de Z/pZ). Applications aux codes ou à la cryptographie.

Structures de base

Notion de groupe, groupe des permutations, groupes de la géométrie (des déplacements, conservant une figure donnée), exemples de structures quotient.

En outre, la formation devra obligatoirement comprendre :

(1) l'apprentissage d'un logiciel de calcul (calcul formel ou calcul scientifique)

(2) la conduite de situation(s) de modélisation

Tous les thèmes peuvent donner lieu à des exercices de géométrie, en particulier 0 (nombres complexes), 2, 3, 4, 8 (racines de l'unité, géométries finies pour le codage), 5, 7, 9. Plusieurs d'entre eux, en particulier les thèmes 2 (théorie spectrale, formes quadratiques), 3, 4, 5, 7 (calculs explicites de moyennes, logiciels de simulation, méthodes de type Monte-Carlo) ont des applications en, ou utilisent, les probabilités et l'analyse numérique.

Il est également intéressant que la formation inclue certains problèmes classiques de la physique qui ont un fort aspect mathématique : mécanique classique, rudiments de relativité restreinte, de mécanique quantique pour des problèmes en dimension finie, de propagation de la chaleur...

Au delà du socle

Ce socle n'inclut pas de larges pans des mathématiques, accessibles pourtant par les étudiants de licence et pouvant figurer, selon les maquettes de chaque université, au titre de la nécessaire part « hors socle » de l'enseignement. Il peut s'agir aussi bien d'approfondissements de notions faisant partie du « socle » que de « nouvelles notions », donnant lieu à un premier apprentissage, approfondissements et nouveautés pouvant dans certains cas être intimement associés.

Voici une liste purement indicative de telles nouvelles notions.

Algèbre générale
Applications industrielles de la statistique (fiabilité, contrôle de qualité)
Calcul différentiel
Équations aux dérivées partielles
Fonctions de variable complexe
Géométrie différentielle
Géométrie élémentaire et analytique
Histoire des mathématiques
Intégrales de surface, flux, formule de Green-Riemann
Intégration : transformées de Fourier, espaces L^2
Introduction aux mathématiques de la décision
Mathématiques discrètes : dénombrement, graphes,...
Méthodes numériques (pour l'algèbre linéaire, l'optimisation,...)
Modèles linéaires en statistique
Optimisation et analyse convexe
Processus stochastiques
Réseaux – pavages
Statistique non paramétrique
Systèmes différentiels et stabilité des solutions
Théorie des nombres
Topologie (de R^n)

INFORMATIONS

Compte-rendu sur la campagne PEDR 2007 pour les mathématiques

Pascal Auscher, Michel Kern[1]

Ce texte a pour but de donner quelques informations sur le concours PEDR 2007 pour les enseignants-chercheurs des sections 25 et 26 du CNU.

Rappelons que la PEDR est attribuée par la Direction Générale de l'Enseignement Supérieur (DGES) : c'est un appel d'offres contingenté budgétairement et le taux d'attribution est le même pour toutes les disciplines scientifiques. Pour les mathématiques, le nombre de primes est donc fonction du nombre de candidatures. La situation antérieure d'un candidat au regard de la PEDR n'est pas prise en compte (pas de renouvellement automatique).

Les années précédentes, la DGES chargeait la Mission Scientifique Technique et Pédagogique (MSTP) d'en organiser l'expertise. La MSTP a officiellement disparu à la création de l'Agence d'Évaluation de la Recherche et de l'Enseignement Supérieur. Une lettre de mission lui a permis d'exercer certaines de ses activités jusqu'à fin septembre 2007 et, en particulier, elle a organisé l'expertise de la campagne 2007 de la PEDR. Le mode opératoire de cette expertise et la politique scientifique suivie ont été les mêmes que ceux décrits dans l'article d'Aline Bonami et Laurent Boudin[2] pour les années 2003 à 2006.

Le déroulement de l'expertise

Pour les mathématiques, le groupe d'experts couvrait les deux sections 25 et 26 du CNU. Il était composé cette année de 23 collègues. Chaque expert a reçu à l'avance moins de cinquante dossiers. Chaque dossier a été examiné par deux rapporteurs en s'appuyant sur les critères mis en place par nos prédécesseurs et toujours disponibles sur le site de la MSTP[3][4]. L'un d'eux était l'« expert thématique », choisi en fonction du domaine de recherche concerné. De plus, deux experts supplémentaires ont reçu quelques dossiers (histoire des mathématiques, didactique...), mais n'ont pas participé à la réunion. L'autre était l'« expert géographique », rapportant sur l'ensemble des dossiers d'un même établissement. Un expert ne rapporte évidemment pas sur un collègue de son laboratoire ou de

---

[1] Directeur scientifique et Coordinateur scientifique du département *Mathématiques et leurs interactions* à la MSTP, du 1er septembre 2006 au 31 septembre 2007.

[2] La PEDR, et autres appels d'offres du ministère, La *Gazette des mathématiciens*, n° 112, avril 2007.

[3] `http://160.92.130.199/mstp/criteres.htm`

[4] voir Aline Bonami et Laurent Boudin, op. cit., pour des précisions supplémentaires.

son établissement. La réunion du groupe d'experts a duré 2 jours en juillet 2007. Il y a eu 558 dossiers traités en séance. Le premier jour l'ensemble des dossiers a été examiné et réparti suivant un pré-classement en plusieurs groupes. Le deuxième jour, le classement a été effectué suivant les 3 catégories MC, PR2, et enfin PR1 et PR0 (classe exceptionnelle)[5] avec un taux présumé de satisfaction transmis par la DGES plutôt bas, à hauteur de 42%. Puis une règle automatique a permis l'interclassement permettant d'atteindre le même taux pour chacune des trois catégories.

Composition du groupe d'experts

Le groupe d'experts était composé des collègues suivants[6].

Mmes Fatiha Alabau-Boussouira, Valérie Berthé, Monique Dauge, Elisabeth Gassiat, Sophie Grivaux, Christine Laurent, Petra Wittbold et MM. Moulay Barkatou, Didier Bresch, Stéphane Cordier, Jean-Yves Dauxois, Jean-Marc Delort, Giambattista Giacomin, François Hamel, Emmanuel Kowalski, Michel Merle, Jérôme Pousin, Jean-Marc Schlenker, Philippe Soulier, Pierre Vallois, Jean-Pierre Wintenberger, Abdelghani Zeghib. Le groupe d'experts était présidé par M. Jean-Marc Delort.

Chiffres et analyses

Il y a eu 5659 candidatures en 2007 toutes disciplines confondues, dont 549 pour les mathématiques (voir ci-après pour la raison de la différence avec le nombre donné plus haut), soit 9,7%, alors que la discipline représente 6,5% de tous les enseignants-chercheurs. Le taux de candidatures est en très faible diminution comparé à 2006. Les résultats du Tableau 1 appellent trois commentaires. Le taux

	Total	MCF	PR2	PR1/0
Candidatures **2003**	**502**	259	127	116
Bénéficiaires **2003**	**254 (50 %)**	103 (40 %)	63 (50 %)	88 (76 %)
Candidatures **2006**	**558**	284	126	147
Bénéficiaires **2006** après recours	**268 (48 %)**	130 (46 %)	58 (46 %)	80 (54 %)
Candidatures **2007**	**549**	298	105	146
Bénéficiaires **2007** avant recours	**262 (48 %)**	145 (49 %)	50 (48 %)	67 (46 %)

TAB. 1. Résultats des campagnes PEDR 2003, 2006 et 2007 en mathématiques par statut.

de satisfaction est 47,7%, plus élevé donc que le taux présumé. Ensuite, la politique scientifique depuis 2004 a été d'encourager des jeunes collègues MCF, en vérifiant que leurs travaux ne se situent pas directement dans le prolongement de thèse. Cela rend du même coup le concours plus difficile pour les PR1/0. On le voit nettement en comparant les données de 2003 avec celles de 2007. Enfin, on observe un déséquilibre entre les trois catégories avec un taux relativement plus faible des PR1/0, contrairement à ce qui été écrit plus haut. Cela vient du fait que

5 voir Aline Bonami et Laurent Boudin, op. cit.

6 Un expert n'a pas souhaité que son nom figure sur la liste.

la commission de recours[7] du concours 2006 a communiqué ses résultats après la réunion du groupe d'experts en donnant satisfaction à neuf collègues (8 PR1/0 et un MC[8]) qui s'étaient retrouvés en bonne position pour l'obtention de la prime et dont la candidature en 2007 devenait *a posteriori* irrecevable. Ceci explique aussi la différence entre les 558 candidatures examinées en séance et les 549 candidatures recevables.

	Total	Femmes	Hommes	F/ F+H
Candidatures **2003**	**502**	77	425	18 %
Bénéficiaires **2003**	**254 (50 %)**	32 (42 %)	222 (52 %)	14,5 %
Candidatures **2006**	**558**	79	479	16,5, %
Bénéficiaires **2006** après recours	**268 (48 %)**	32 (41 %)	236 (49 %)	13,5 %
Candidatures **2007**	**549**	75	474	16 %
Bénéficiaires **2007** avant recours	**262 (48 %)**	29 (39 %)	233 (49 %)	12,5 %

TAB. 2. Résultats des campagnes PEDR 2003, 2006 et 2007 en mathématiques par civilité.

Dans le Tableau 2 les pourcentages dans les colonnes Femmes et Hommes se lisent par rapport à la civilité. Ceux de la dernière colonne sont les pourcentages de femmes candidates et bénéficiaires en mathématiques. Ils montrent que nos collègues féminines postulent dans une proportion inférieure à 2003. Pour comparaison, il y a 20% de femmes enseignants-chercheurs en mathématiques. Le taux de satisfaction est encore plus faible. Ces tendances valent pour les 5 années précédentes et il y a là matière à réflexion. On voit qu'en chiffres bruts, le nombre de mathématiciennes candidates et bénéficiaires est à peu près constant d'une année sur l'autre. En revanche, nos collègues masculins sont plus nombreux à postuler qu'en 2003.

Un mot sur le non-renouvellement, source de frustration que la statistique suivante peut atténuer. Parmi les sortants en 2007, 65% ont eu leur prime renouvelée (taux semblable à celui de 2006) et 39% des sortants en 2006, non-bénéficiaires en 2006, ont eu leur prime renouvelée en 2007 (le taux aurait pu être plus élevé si le recours de 2006 avait été connu), parfois parce que le dossier a été mieux présenté par le candidat. Il n'est pas inutile de rappeler qu'un dossier mal renseigné est un dossier plus difficile à évaluer.

Commentaires

La PEDR est attribuée pour les quatre ans à venir s'appuyant sur la base de l'activité des quatre années écoulées. Même si ce n'est pas explicitement demandé, il est néanmoins judicieux d'indiquer dans le CV les directions et projets de recherche envisagés.

[7] Celle-ci a un fonctionnement indépendant. La répartition suivant les disciplines se fait également à la pression.

[8] Le fait que la commission de recours distribue plus de primes aux PR1/0 vient probablement du fait que les PR1/0 sont ceux qui font le plus de demandes. Cela fait du même coup remonter le taux de PR1/0 bénéficiaires en 2006 de 5 points comparé à celui donné par Aline Bonami et Laurent Boudin.

Le concours est particulièrement sélectif, surtout pour les PR1/0, et on peut se poser la question de savoir quel serait un taux raisonnable de primes pour ne pas laisser sur le carreau de trop nombreux bons dossiers. Il semble pour la plupart des disciplines qu'un taux entre 60 et 65% serait plus satisfaisant, et pour les mathématiques cela représenterait une centaine de primes supplémentaires.

La campagne 2008 sera traitée au niveau national par la DGES. L'appel d'offres a été publié mi-février. La bonne nouvelle est que le budget prévoit une augmentation de l'ordre de 1000 primes au niveau PR2 (ce qui représente compte tenu du montant actuel des primes environ 1330 primes au niveau MC ou 660 primes au niveau PR1/0, ou encore 1000 primes si le taux de succès des trois catégories est identique), ce qui ferait environs cent primes supplémentaires pour les mathématiques. Les arguments de nos prédécesseurs restent valables plus que jamais. Il ne faut pas hésiter à postuler, d'autant plus qu'en 2009, la modalité d'attribution va certainement changer compte tenu de la loi LRU.

CARNET

Michel Kervaire

(26 avril 1927 – 19 novembre 2007)

Shalom Eliahou, Pierre de la Harpe,
Jean-Claude Hausmann et Claude Weber

Photo Teresa Dib, 2005

Michel Kervaire est mort le 19 novembre 2007 à Genève. De nationalité française, né le 26 avril 1927 à Czestochowa en Pologne, il avait fait ses études secondaires en France, des études de mathématiques à l'EPF de Zurich (1947-1952), une thèse de doctorat à Zurich [14] sous la direction de Heinz Hopf (1955), et une seconde thèse, française, publiée en 1965 [18]. Il a été professeur aux universités de New York (1959-1971) et Genève (dès 1971), ainsi que professeur invité à l'*Institute for Advanced Study* de Princeton (1957/58), à l'université de Paris (1960/61 et 1965/66), à Chicago, au M.I.T. (Cambridge, USA), au *Tata Institute* (Bombay), et à l'université de Cambridge (GB). Il était lauréat d'un doctorat honoris causa de l'université de Neuchâtel (1986).

Michel Kervaire fut à la fois, exemplairement, un généraliste et un spécialiste. Comme généraliste, il savait apprécier et encourager les sujets les plus divers ; il le faisait notamment comme directeur du Troisième Cycle Romand de Mathématiques, dont l'activité la plus connue hors de Suisse avait pour cadre le modeste village montagnard des Plans-sur-Bex. Comme spécialiste, il a notamment créé un sujet de grand avenir, les nœuds de dimensions supérieures, et il a imprimé sa marque par des résultats spectaculaires en topologie des variétés, en algèbre et en combinatoire.

Les Plans

Le séminaire des Plans-sur-Bex fut fondé en 1968 par des doctorants locaux, dont Daniel Amiguet, à la suggestion de Roger Bader, avec le soutien financier de l'UIM, et avec la complicité active de Georges de Rham. Il fut rapidement intégré dans les activités du Troisième Cycle Romand de Mathématiques, fondé par André Haefliger et Georges de Rham. Lorsque Kervaire arriva à Genève en

1971, il fut immédiatement élu à la présidence du Troisième Cycle. L'organisation des séminaires des Plans fut son activité « administrative » préférée. Les guillemets sont dus à son refus absolu de jamais tolérer que l'intendance et autres contraintes administratives puissent freiner ses projets. La structure souple des Plans lui convenait donc parfaitement. Nous logions dans un grand chalet de vacances pour enfants, au confort sommaire, mais nous étions totalement libres de la gestion (à condition de rendre des comptes corrects !). Kervaire décida de compenser la rusticité des locaux par une qualité irréprochable de la table, solidement aidé en cela par le génie culinaire de la mère de Daniel Amiguet. En ce qui concerne les mathématiques, Kervaire choisit de placer le séminaire à l'extrême pointe de la recherche. Évoquons quelques-unes de ces semaines mémorables, le plus souvent deux de suite peu avant Pâques, chacune sur un thème précis.

En 1972, Haefliger savait qu'un jeune étudiant de Berkeley avait obtenu des résultats remarquables sur les feuilletages. La nouvelle qu'une semaine serait organisée aux Plans pour en savoir plus se répandit rapidement, et nous fûmes à la limite de refuser du monde. La salle de classe de l'école du village n'avait pas assez de sièges pour accueillir tous les participants. Cet étudiant était William Thurston.

En 1978, le premier des deux séminaires était consacré aux feuilletages. À titre d'exemple, voici la liste des participants étrangers à la première semaine : A. Connes, D. Epstein, M. Herman, D. McDuff, J. Milnor, V. Poénaru, L. Siebenmann, D. Sullivan, W. Thurston (plus tout à fait inconnu cette fois), E. Vogt, A. Fathi, R. Langevin, G. Levitt, H. Rummler, R. Stern, et T. Thickstun ; Dennis Sullivan confessa en fin de semaine que, pour la première fois de sa vie, il se sentait fatigué à la fin d'une conférence. Le second séminaire 1978 portait sur les algèbres d'opérateurs. Parmi les rares participants aux deux semaines, il y eut bien sûr Kervaire, ainsi qu'Alain Connes qui fit des exposés aux deux publics, sur des sujets voisins. Aux auditeurs de la première semaine, Connes affirmait qu'il n'était pas nécessaire de savoir quoi que ce soit sur les algèbres d'opérateurs ; à ceux de la seconde, idem concernant les feuilletages. Ainsi, seuls les auditeurs des deux semaines avaient le droit de tout ignorer.

Les maîtres scandinaves des algèbres d'opérateurs se racontent encore les danses russes d'un certain expert, tard le soir après la fondue, sur un fond de conversations mêlant le flot des poids, Atiyah-Singer feuilleté, le dernier vin dégusté, une partie d'échecs en blitz et l'état de la neige pour les skieurs de l'aube à venir.

Une autre année (mars-avril 1981), Michael Freedman présenta ses projets (encore à l'état d'ébauche) pour étudier la structure topologique des variétés de dimension 4. Ces idées lui valurent la Médaille Fields en 1986. La semaine suivante était consacrée aux représentations des groupes de Lie.

En 1985, de la semaine « codes et formes quadratiques », on se souvient encore des exposés de N. Sloane, A. Odlyzko, J-P. Serre et M. Kneser. La semaine suivante était celle des algèbres de Kac-Moody.

Malgré quelques années de pause, ces rencontres du Troisième Cycle Romand se sont poursuivies jusqu'à ce jour, désormais dans d'autres villages montagnards comme Champoussin, Château-d'Oex et Les Diablerets.

La variété de Kervaire et les résultats de Kervaire-Milnor

Michel Kervaire donne dans [16] le premier exemple d'une variété topologique qui n'admet aucune structure différentiable. Il s'agit d'une variété close $\hat{V}$ de dimension 10 qui n'a même pas le type d'homotopie d'une variété différentiable.

Pour cela, Kervaire construit une variété V comme plombage de deux copies du fibré tangent en boules à S^5, la sphère de dimension 5. Grâce à un lemme de Milnor, il sait que son bord bV est homéomorphe à S^9. La variété topologique $\hat{V}$ est obtenue en collant un disque sur bV. Kervaire définit une forme quadratique sur l'homologie modulo 2 de la variété en dimension 5, à valeurs dans le corps $\mathbf{F}_2$ à 2 éléments. L'invariant d'Arf d'une telle forme lui permet plus généralement de définir un homomorphisme du $(4k+2)$-ième groupe d'homotopie stable des sphères dans $\mathbf{F}_2$, qui s'appelle l'*invariant de Kervaire*. Par un véritable tour de force, Kervaire démontre que cet invariant est nul en dimension 10, d'où il déduit que $\hat{V}$ a les propriétés annoncées. Incidemment, bV est homéomorphe mais non difféomorphe à S^9.

Milnor avait déjà démontré qu'il existe plusieurs structures différentiables sur S^7. Dans un article célèbre [13], Kervaire et Milnor étudient le groupe des sphères d'homotopie différentiables modulo h-cobordisme. Les résultats de Smale impliquent que ce groupe dénombre les structures différentiables sur les sphères ; par exemple, il y a exactement 28 structures différentiables sur S^7. Cet article est l'un des fondements de la chirurgie dans le cas simplement connexe [3]. Dans un autre article très influent [12], Kervaire et Milnor étudient les plongements différentiables de S^2 dans les variétés de dimension 4.

Les nœuds de dimension supérieure

Soit K un sous-espace de la sphère S^{p+q} homéomorphe à la sphère S^p. La dualité de Poincaré-Alexander implique que le complémentaire $C = S^{p+q} \setminus K$ a l'homologie (sur les entiers) de la sphère S^{q-1}. Supposons désormais que K est une sous-variété différentiable, pour une certaine structure sur S^p ; on peut alors préciser la structure de C et de son groupe fondamental. Il y a essentiellement deux cas.

(1) *Codimension* $q \geqslant 3$. Un argument de « position générale » dit que C est simplement connexe, et donc que C a le type d'homotopie de S^{q-1}. Mieux : un théorème de John Stallings dit qu'il existe un homéomorphisme qui envoie K sur la sphère standard de dimension p dans S^{p+q}. Autrement dit, du point de vue topologique, il n'y a pas de nœud ! Mais il y en a du point de vue différentiable, un résultat surprenant dû à Haefliger et poursuivi par Levine ; voir [11].

(2) *Codimension* $q = 2$. C'est là que Kervaire intervient ([17] et [18]). Le complémentaire C a l'homologie du cercle S^1, de sorte que l'abélianisé de $\pi_1(C)$ est cyclique infini. Question : quels groupes π (nécessairement de présentation finie) peuvent-ils apparaître comme $\pi_1(C)$? Kervaire trouve facilement trois conditions nécessaires :

(i) π/π' isomorphe à $\mathbf{Z}$; qui s'écrit aussi $H_1(\pi) = \mathbf{Z}$;

(ii) π est engendré par les conjugués d'un seul élément (argument de transversalité qui généralise la position générale du cas $q \geq 3$) ;

(iii) $H_2(\pi) = 0$, via le théorème de Hopf sur le H_2 d'un groupe car $H_2(C) = 0$.

Kervaire entreprend alors de démontrer que n'importe quel groupe qui satisfait à ces trois conditions est le groupe fondamental du complémentaire d'un plongement de S^p (munie de la structure standard) dans S^{p+2} pour $p \geq 3$.

La solution proposée par Kervaire est originale. C'est par chirurgie qu'il construit un nœud dans S^{p+2} dont le complémentaire a les propriétés désirées. En utilisant la même technique, Kervaire détermine le premier groupe d'homotopie de C qui n'est pas isomorphe au groupe correspondant de S^1. C'est le début des *modules de nœuds* dont l'étude fut poursuivie par Jerome Levine et par deux élèves de Kervaire, Éva Bayer et Françoise Michel.

Kervaire a également lancé l'étude algébrique du cobordisme des nœuds, dont la détermination fut poursuivie par Levine et achevée par Neal Stolzfus.

La conjecture de Kervaire

En discutant les conditions (i) à (iii) dans [17], Kervaire observe qu'il est facile de trouver des groupes satisfaisant à (i) et (iii) : c'est par exemple le cas d'un produit libre $G * \mathbf{Z}$ si G satisfait à $H_1(G) = 0 = H_2(G)$. (Les groupes de présentation finie satisfaisant à (i) et (iii) sont exactement les groupes fondamentaux des sphères d'homologie en dimension au moins 5 [19].)

C'est bien sûr la condition (ii) qui conduit à la conjecture de Kervaire ; elle fut énoncée en 1963/64 dans des conversations avec G. Baumslag, et apparaît dans [20]. Elle s'énonce comme suit : soit G un groupe ; s'il existe un élément w, dans le produit libre $\pi = G * \mathbf{Z}$, tel que le quotient de π par la relation w soit le groupe trivial, alors G lui-même est (conjecturalement) trivial. Voir [9] et [10] pour quelques résultats ultérieurs.

Algèbre, combinatoire et théorie des nombres

Michel Kervaire a maintenu une activité mathématique intense jusqu'à ses derniers jours. Passé l'âge de 60 ans, c'est-à-dire entre 1987 et 2007, il a encore publié plus de 25 articles de recherche. Les sujets traités se situent presque tous à l'interface entre l'algèbre et la combinatoire.

Un résultat datant de 1990, amplement cité en algèbre commutative, est la *résolution d'Eliahou-Kervaire* [4]. Il s'agit d'une résolution minimale explicite d'une large classe d'idéaux monomiaux, dits *stables*. On en déduit des formules combinatoires pour leurs nombres de Betti, qui ont des propriétés extrêmales très utiles comme observé ensuite par Bigatti, Hulett et Pardue.

Un résultat moins connu concerne une version faible de la conjecture de Hadamard. On conjecture depuis 1893 que, pour tout n multiple de 4, il existe une matrice carrée d'ordre n, à coefficients 1 et -1, orthogonale à un facteur scalaire près. La version faible consiste à n'exiger l'orthogonalité que modulo un entier m donné. Dans un travail de mathématiques expérimentales [5], Kervaire et son coauteur ont résolu le cas $m = 32$ par constructions explicites. L'ordinateur a joué un rôle crucial mais, en fin de compte, les preuves fournies sont de facture purement classique. La conjecture faible reste à ce jour ouverte pour tout module m dépassant 32.

Plusieurs autres travaux concernent l'existence de suites binaires finies avec propriétés données. Mentionnons par exemple un joli résultat sur les paires complémentaires de Golay. Il est conjecturé depuis 1960 que leurs seules longueurs possibles sont les $n = 2^r 10^s 26^t$. Kervaire et ses coauteurs ont montré dans [8] qu'aucune paire de Golay ne peut exister en longueur multiple d'un premier $p \equiv 3 \bmod 4$. La preuve originale, grandement simplifiée ensuite, exploite la théorie algébrique des nombres. Ce résultat est la seule restriction générale connue à ce jour sur ces longueurs (à part une contrainte facile de parité).

Les derniers travaux de Kervaire ont porté sur des extensions du théorème de Cauchy-Davenport en théorie additive des nombres. Ce résultat ancien dit que, pour deux sous-ensembles A, B d'ordres r, s du groupe cyclique $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ avec p premier, l'ensemble-somme $A + B$ contient au moins $\min\{r + s - 1, p\}$ éléments ; cette borne inférieure, de plus, est optimale. Au fil des décennies, les progrès sur la question analogue dans d'autres groupes ont été plutôt sporadiques. Par exemple, Kemperman résout le cas des groupes sans torsion en 1955 et donne $|A \cdot B| \geq r + s - 1$ comme borne inférieure optimale (notation multiplicative $A \cdot B$ car le groupe n'est pas nécessairement abélien). Il a fallu attendre 2005 pour voir émerger une solution complète dans le cas abélien. La formule $\min\{r + s - 1, p\}$ du cas d'ordre premier devient alors

$$\min_h \left(\lceil r/h \rceil + \lceil s/h \rceil - 1\right) h$$

pour un groupe abélien quelconque G, où h parcourt l'ensemble des ordres des sous-groupes finis de G [6]. On ne sait pas grand chose sur cette question dans le cas non-abélien de torsion. Mais l'un des derniers articles de Kervaire étend la formule du cas abélien aux groupes diédraux [7]. La méthode de preuve fait intervenir des idées inspirées de la topologie algébrique. Oui, c'est Kervaire qui l'a suggérée, établissant ainsi un ultime lien avec ses travaux de jeunesse.

Et bien d'autres choses

Il faudrait en dire plus.

Sur la détermination des sphères parallélisables et des algèbres à division réelles, un problème remontant à Hurwitz. La solution, qui résulte de la périodicité de Bott, fut publiée indépendamment par Kervaire [15] et Bott & Milnor [1] (pourquoi l'article de Kervaire est-il ignoré de MathSciNet ?).

Sur les séances de rédaction pour les *Commentarii* (de 1980 à 2001) et pour *L'Enseignement Mathématique* (de 1978 à 2007), ces journaux qui lui doivent tant.

Sur tous les cours incroyablement stimulants qu'il donnait. Qui a enseigné le corps de classes mieux que lui ? Et la topologie algébrique ? cours dont par exemple Vaughan Jones dit encore que « il m'a marqué et par le contenu et par la façon dont Michel l'abordait - on sentait quelque chose de magnifique et qu'il se battait avec nous pour le mater ». Et sur ses exposés de séminaire, dont trois à Bourbaki (sur la périodicité de Bott, sur la conjecture de Poincaré, et sur les fractions rationnelles invariantes par un groupe fini) et d'innombrables improvisés.

Et surtout sur les fêtes qu'il savait susciter, au tableau noir comme en buvant un café. Et en offrant des repas superbes, dans les restaurants qu'il savait choisir, ou chez lui avec sa femme, le peintre Aimée Moreau.

Références

[1] R. Bott et J. Milnor, *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958), pp. 87-89.

[2] W. Browder, *The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalization*, Annals of Math. 90 (1969), pp. 157-186.

[3] W. Browder, *Surgery on simply-connected manifolds*, Springer (1972).

[4] S. Eliahou et M. Kervaire, *Minimal resolutions of some monomial ideals*, J. Algebra 129 (1990), pp. 1-25 .

[5] S. Eliahou et M. Kervaire, *Modular sequences and modular Hadamard matrices*, J. Comb. Designs 9 (2001), pp. 187-214.

[6] S. Eliahou et M. Kervaire, *Minimal sumsets in infinite abelian groups*, J. Algebra 287 (2005), pp. 449-457.

[7] S. Eliahou et M. Kervaire, *Minimal sumsets in finite solvable groups*, Discrete Math (à paraître).

[8] S. Eliahou, M. Kervaire et B. Saffari , *A new restriction on the lengths of Golay complementary sequences*, J. Comb. Theory (Series A) 55 (1990), pp. 49-59.

[9] R. Fenn et C. Rourke, *Klyachko's methods and the solution of equations over torsion–free groups*, Enseign. Math. 42 (1996), pp. 49-74.

[10] F. Gonzalez–Acuna et A. Ramirez, *A knot-theoretic equivalent of the Kervaire conjecture*, J. Knot Theory and its Ramifications 15 (2006), pp. 471-478.

[11] A. Haefliger, *Sphères d'homotopie nouées (d'après Kervaire–Milnor–Levine)*, Séminaire Bourbaki, 17^{e} année, 1964/ 65, n^{o} 280. Secrétariat mathématique, Paris (1966), 12 pages.

[12] M. Kervaire et J. Milnor, *On* 2*-spheres in* 4*-manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 47 (1961), pp. 1651-1657.

[13] M. Kervaire et J. Milnor, *Groups of homotopy spheres*, Annals of Math. 77 (1963), pp. 504-537.

[14] M. Kervaire, *Courbure intégrale généralisée et homotopie*, Math. Ann. 131 (1956), pp. 219-252.

[15] M. Kervaire, *Non-parallelizability of the n-sphere for* $n > 7$, Proc. National Academy Sciences 44 (1958), pp. 280-283.

[16] M. Kervaire, *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Comment. Math. Helv. 34 (1960), pp. 257-270.

[17] M. Kervaire, *On higher dimensional knots in "Differential and combinatorial topology, a symposium in honor of Marston Morse, Princeton 1963"*, S.S. Cairns Editor, Princeton Univ. Press (1965), pp. 105-119.

[18] M. Kervaire, *Les nœuds de dimensions supérieures*, Bull. Soc. Math. France 93 (1965), pp. 225-271.

[19] M. Kervaire, *Smooth homology spheres and their fundamental groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 144 (1969), pp. 62-72.

[20] W. Magnus, A. Karras et D. Solitar, *Combinatorial group theory*, J. Wiley (1966), p. 403.

LIVRES

L'algèbre et le groupe de Virasoro. Aspects géométriques et algébriques, généralisations (avec un appendice de Vlad Sergiescu)
LAURENT GUIEU ET CLAUDE ROGER
Les publications CRM, PM 027, Montréal, 2007. 815 p.
ISBN : 2-921120-44-5. $CAN 88

Il est enfin sur mon bureau, le livre de Laurent Guieu et Claude Roger. Ce « bouquin » de plus de 800 pages et ayant eu une gestation de douze ans, de quoi traite-il ?

On part de l'algèbre des champs de vecteurs sur le cercle, $\mathrm{Vect}(S^1)$, identifiée avec $C^\infty(S^1, \mathbb{R})$, avec son commutateur habituel

$$\left[f(t)\frac{d}{dt}, g(t)\frac{d}{dt}\right] = (f(t)\cdot g'(t) - g(t)\cdot f'(t))\ \frac{d}{dt}\ ,$$

de sa complexification $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(S^1)$, ainsi que de l'algèbre de Lie $L_{\mathbb{C}}$ de base $\{e_n = i\exp(int)d/dt \mid n \in \mathbb{N}\}$ et de commutateur $[e_n, e_m] = (n-m)e_{n+m}$.

Des raisonnements relativement faciles montrent que ces trois algèbres de Lie possèdent des extensions centrales unidimensionnelles « universelles », c'est-à-dire engendrant toute extension centrale. Sachant qu'une représentation projective d'une algèbre de Lie se relève en une représentation linéaire de l'extension centrale universelle (si elle existe), il est évident que de telles extensions sont fort importantes pour la théorie des représentations. (Comparer au « credo de Karl-Hermann Neeb » qui consiste à étudier d'une façon très systématique les extensions centrales avant de passer à la théorie générale des représentations des algèbres et groupes de Lie de dimension infinie.)

Remarquons aussi que les cocycles définissant les extensions centrales unidimensionnelles donnent naturellement des structures (presque) symplectiques sur l'algèbre de Lie et des quotients appropriés. Par conséquent, les extensions centrales jouent un rôle essentiel dans la géométrie symplectique et kählerienne des espaces homogènes. Via la quantification géométrique on relie ces structures aux représentations (voir le théorème de Borel-Weil ou la théorie de Kirillov pour les groupes nilpotents comme exemples de réussite de la « méthode des orbites », généralisée par la quantification géométrique).

L'extension centrale universelle de $\mathrm{Vect}(S^1)$ est appelé « l'algèbre de Virasoro » en l'honneur du physicien Miguel Angel Virasoro. Il y a aussi un groupe de Lie (de dimension infinie) intégrant cette algèbre mais dans ce texte il apparaît essentiellement via ses orbites coadjointes... qui se calculent déjà en connaissant l'algèbre de Virasoro et le groupe de difféomorphismes du cercle. Cette algèbre de Virasoro intervient en physique au moins dans la théorie des cordes et dans la théorie des champs conformes, qui sont des théories de grande importance dans la physique (théorique !) des hautes énergies des dernières décennies. Ces théories ont aussi eu un fort impact en mathématiques ne serait ce que pour donner une énorme incitation à développer une théorie des représentations des algèbres de Lie de dimension infinie et pour fournir de nombreuses conjectures en géométrie différentielle et algébrique (symétrie miroir et dualités, cohomologie quantique, géométrie énumérative,...).

Même si les auteurs « ne prétendent jamais écrire le traité exhaustif [sur ces sujets ; rajout de l'auteur de cette recension] » (voir page 479), ils parviennent néanmoins à en donner un très vaste panorama du point de vue des mathématiques mais avec des nombreuses digressions en direction de la physique théorique ainsi que dans beaucoup de directions mathématiques.

Ce livre s'adresse aux enseignant-chercheurs qui, soit, sont déjà convaincus de la beauté et l'intérêt de ce sujet, soit souhaitent s'y familiariser d'une façon pas trop formelle, ainsi qu'aux étudiants en Master et surtout en Doctorat dans ce domaine. De plus, il servira certainement pour préparer et accompagner des cours de niveau Master et plus. Disons-le toute suite : ce livre devrait satisfaire les attentes de ces groupes de lecteurs potentiels.

Soulignons la passion des auteurs pour leur thème et pour sa « diffusion » au sein de la communauté des mathématiciens, qui dédommage à mes yeux de la longueur du texte. Mentionnons tout de suite d'autres atouts : à savoir le très grand nombre d'exercices allant de la simple vérification à des (presque) conjectures, l'intéressante « Notice historique » et l'effort constant de rendre agréable la lecture de ce texte. Notons aussi l'appendice de Vlad Sergiescu sur des « Versions combinatoires de Diff(S^1) » qui est, surtout en comparaison avec le reste du livre, malheureusement très dense et un peu aride pour le non-initié.

Le livre se compose de trois grandes parties :

– les chapitres « de rappel », i.e. les chapitres 1-3

– les chapitres spécifiquement sur l'algèbre et le groupe de Virasoro et ses représentations, plus le « bestiaire » (chapitre 5), i.e. 4-7

– les chapitres traitant quelques généralisations récentes de l'algèbre de Virasoro, i.e. 8-10.

Regardons les chapitres de plus près :

Le **Chapitre 1** (« Quelques préliminaires à propos de groupes et algèbres de Lie classiques ») est très sommaire, apparemment le sujet abordé y est supposé connu. Il est en fait vrai qu'il y a des très bonnes monographies sur le sujet, comme celles d'Anthony Knapp.

Le **Chapitre 2** (« Notions d'algèbre homologique, la cohomologie des algèbres et des groupes de Lie ») me semble très utile car concernant un sujet moins standard. Ce chapitre réussit à expliquer les grandes lignes de ce sujet important et devrait aider des « jeunes » (et des moins jeunes) à suivre le texte principal.

Le **Chapitre 3** (« Éléments de géométrie symplectique ») est d'une lecture extrêmement agréable, utile surtout pour la présentation claire et succincte de certains types de « quantification » des variétés symplectiques.

Les **Chapitres 4, 6 et 7** (« L'algèbre et le groupe de Virasoro : leurs premières propriétés », « Géométrie des orbites coadjointes de l'algèbre de Virasoro » et « Les représentations de l'algèbre et du groupe de Virasoro ») vont au cœur du sujet. Remarquons d'abord l'étude soignée des aspects cohomologiques, importants pour les représentations et pour les liens avec la cohomologie de Gel'fand-Fuks et les feuilletages, et la présentation détaillée des orbites coadjointes (essentiellement provenant de la thèse de doctorat du premier auteur), et les liens avec les divers « espaces de Teichmüller ». Dans le chapitre 7, on trouve beaucoup d'informations sur des représentations de l'algèbre et du groupe de Virasoro, mais certains théorèmes fondamentaux ne sont qu'expliqués et pas démontrés (notamment les théorèmes 7.5.1, 7.5.2 et 7.6.6, ainsi que la formule du déterminant de Kac sur la page 548). En contrepartie le lecteur y trouve une très efficace introduction aux algèbres d'opérateurs de vertex et à leurs « développements en produits d'opérateurs ». Avec un minimum de théorie générale, mais avec des explications très claires, les auteurs arrivent, par ex., à donner les « constructions de Sugawara », importantes en mathématique et physique. Afin de finalement construire certaines classes des représentations du groupe de Virasoro, les auteurs utilisent la seconde quantification.

Le **Chapitre 5** (« Un bestiaire symplectique en dimension infinie ou les aventures de la méthode des orbites »), encore d'une lecture fort agréable, est malheureusement parfois assez bref, notamment en ce qui concerne la topologie algébrique. C'est regrettable, mais probablement le coût en pages d'une « complétion » serait trop grand et la perte en ne parlant pas du tout des liens importants entre les groupes de Lie de dimension infinie, les espaces classifiants et les classes caractéristiques ... le serait aussi.

Le **Chapitre 8** (« Généralisations de l'algèbre et du groupe de Virasoro dans le domaine complexe ») contient trois parties, dont chacune traite une de ces généralisations, toutes liées aux variétés complexes (de dimension un). Il faut remarquer que les sujets -hautement intéressants- sont plutôt mis en place que développés. La section 8.1 donne une introduction rapide et claire à quelques notions de la théorie des catégories, notamment aux « PROP » s (« *product and permutation categories* »). De plus, les auteurs y rappellent brièvement la « catégorie des pantalons » avec (resp. sans) structure conforme, ici appelée « Shtan » resp. « TShtan » et ils définissent une théorie des champs conformes resp. topologiques comme un foncteur multiplicatif Shtan $\to$ PROP(E) resp. TShtan $\to$ PROP(E), avec E un espace vectoriel. Dans le deuxième cas, ils montrent l'équivalence entre les théories des champs topologiques $(1+1)$-dimensionnelles et les structures d'algèbre de Frobenius sur E en utilisant des dessins « habituels », mais jolis ; dans le premier cas, ils n'abordent que les définitions de cette célèbre « théorie » toujours pas achevée, mais donnant lieu à beaucoup de développements mathématiques intéressants... On pourrait regretter le peu de références signalées au lecteur curieux d'en savoir plus sur les théories de champs conformes et topologiques. La section 8.2 guide le lecteur rapidement mais d'une façon claire vers les algèbres de Krichever-Novikov et ses généralisations dues notamment à Martin Schlichenmaier et Oleg Sheinman ; et dans la troisième partie, 8.3, la structure complexe (ou conforme, selon le goût) d'une surface de Riemann X est utilisée afin de donner des idées sur les « extensions holomorphes » des groupes et des algèbres des courants lisses sur X.

Le **Chapitre 9** (« Les super-algèbres de Lie superconformes ») introduit lesdites superalgèbres d'une façon relativement abordable après un rappel concis et précis de la superalgèbre de base, ainsi que de la supergéométrie à la Yuri Manin. (Dans cette approche une supervariété est simplement une variété munie d'un faisceau de superalgèbres supercommutatives, et les superfonctions locales sont les sections locales de ce faisceau.) Malheureusement, il n'est – au moins pour moi – pas clair que cette approche couvre les manipulations faites par les physiciens en utilisant des « supercoordonnées locales », mais dans le cadre choisi on trouve déjà une très riche théorie mathématique ...

Par la suite (9.3 - 9.6) les auteurs analysent cette famille des superalgèbres soigneusement sous des angles divers et classifient leurs extensions centrales. La section 9.7 rapporte sur des extensions des idées déjà hypothétiques de Mark Bowick et S. Rajeev (voir 7.7) à un programme de la « quantification géométrique des supercordes »...

Dans le **Chapitre 10** (« La géométrie des algèbres de Gel'fand-Dikii et une introduction aux algèbres-W ») les auteurs étudient les algèbres des symboles des opérateurs différentiels respectivement pseudo-différentiels sur le cercle (notées $\mathcal{OD}(S^1)$ resp. $\psi\mathcal{D}(S^1)$), et notamment deux « structures de Poisson » sur un espace de fonctionnelles sur $\psi\mathcal{D}(S^1)$, les « deux crochets de Gel'fand-Dikii ». En faisant intervenir des constructions classiques de la géométrie de Poisson comme la restriction aux feuilles symplectiques ou la réduction dans ce contexte de dimension infinie (et d'une nature a priori très algébrique), ils développent un très riche paysage contenant entre outres les hiérarchies liées aux équations de Korteweg-de Vries et de Kadomtsev-Petviashvili.

Sans être un expert de ce domaine, j'ai beaucoup apprécié l'effort de « linéariser » la construction des multiples algèbres intervenant, qui sont souvent approchées d'une façon plutôt calculatoire dans la littérature. Notamment, ils essaient de donner une description homogène des algèbres-W classiques comme $\mathbf{w}(n) = \mathcal{A}_n / \frac{d}{dx}\mathcal{A}_n$, où $\mathcal{A}_n$ est l'algèbre différentielle suivante :

$$\left(C^\infty(S^1) \otimes \mathbb{C}\left[u_i, u_i^{(k)} \mid i = 0, 1, ..., n-1 \text{ et } k \in \mathbb{N} \right] \; ; \; \frac{d}{dx} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} u_i^{(k+1)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(k)}} \right) \; ,$$

munie des deux crochets de Gel'fand-Dikii.

La description précise de la spécialisation à l'algèbre de Virasoro (ou plutôt au crochet de Poisson sur son dual régulier) demande du travail (voir la section 10.3), mais l'interprétation des $\mathcal{A}_n$ comme des espaces de fonctions sur

$$\mathrm{GD}(n) = \left\{ \partial^n + \sum_{j=0}^{n-1} u_j \partial^j \;\middle|\; u_j \in C^\infty(S^1) \right\}$$

(avec $\partial = \frac{d}{dx}$) rend évident qu'il y a « un fort lien » avec l'algèbre de Virasoro.

Ce chapitre finit avec une section sur les « algèbres-W quantiques », des mathématiques prospectives et prometteuses...

Un œuvre d'autant de pages contient inévitablement quelques « coquilles ». Il semble y en avoir peu et je souhaite seulement mettre en garde les lectrices et lecteurs contre quelques pièges. Les algèbres-W sont notées de plusieurs façons ; la traduction de « twistors » en « torseurs » (p. 571) et pas en « twisteurs » risquent de perturber pas mal de mathématiciens francophones ; dans l'introduction il est question d'un second volume (p. xii).

Du côté des [sujets ; rajout de l'auteur de cette recension] « absents », il y a déjà des remarques des auteurs dans l'introduction page xvi. Je souhaite y rajouter une seule thématique : les genres et la cohomologie elliptiques, beaucoup étudiés en topologie algébrique depuis quelques années. Les articles de Graeme Segal (Séminaire Bourbaki 1987/88) et de Jean-Luc Brylinski (Topology 29, 1990), ainsi que le petit livre de Hirotaka Tamanoi (Springer Lecture Notes in Mathematics, volume 1704) laissent comprendre que l'algèbre et le groupe de Virasoro devraient à terme faire leur entrée rigoureuse dans ce domaine, pour l'heure dominé par des constructions assez peu géométriques et relativement éloignées des idées des physiciens comme Edward Witten (voir par exemple, Springer Lecture Notes in Mathematics, volume 1326).

Tilmann Wurzbacher,
CNRS et Université Paul Verlaine-Metz