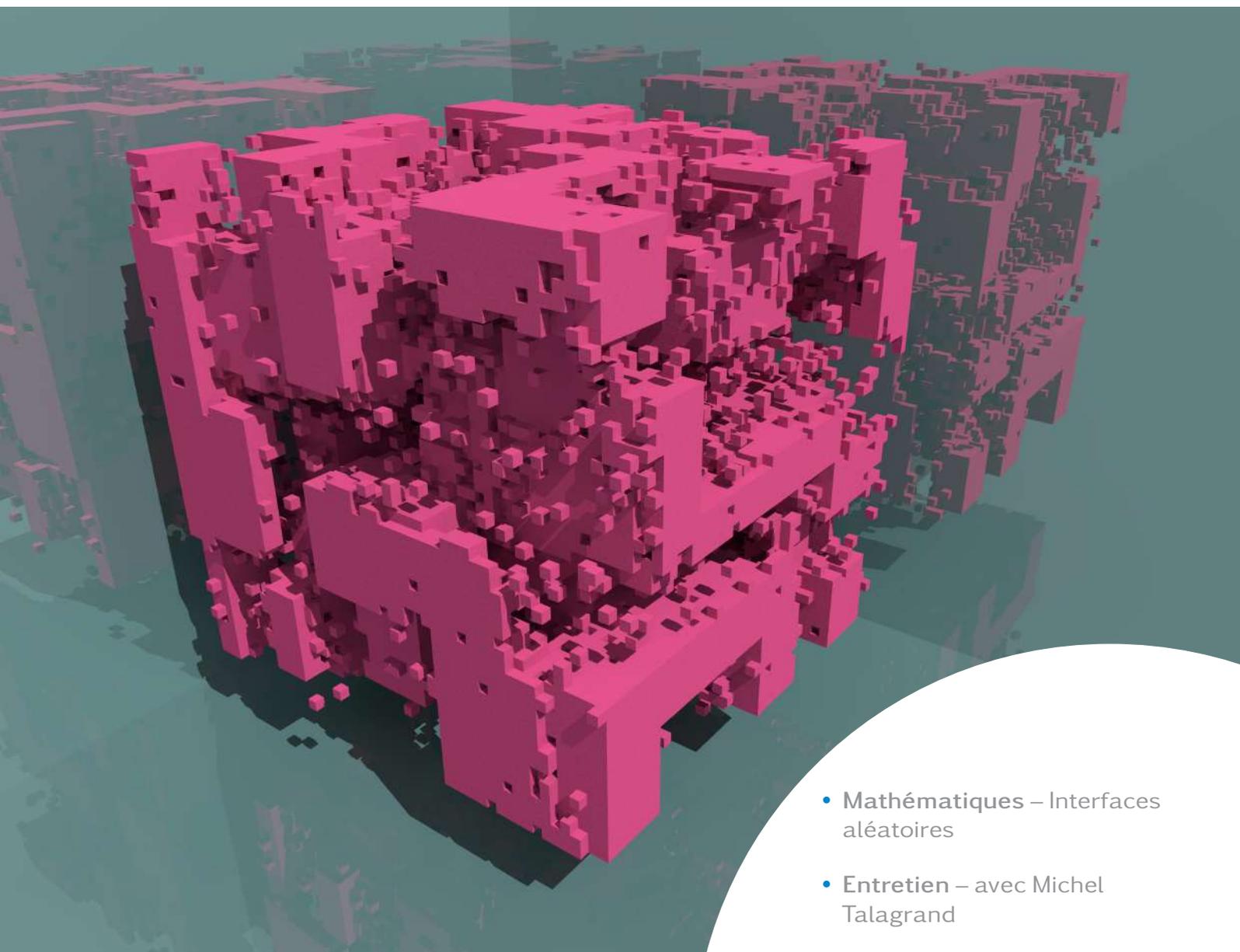


la Gazette

des **Mathématiciens**



- **Mathématiques** – Interfaces aléatoires
- **Entretien** – avec Michel Talagrand
- **Raconte-moi...** les groupes approximatifs
- **Tribune libre** – Le procès d’Ayşe Berkman

Société
Mathématique
de France



Comité de rédaction

Rédacteur en chef

Damien GAYET

Institut Fourier, Grenoble
damien.gayet@ujf-grenoble.fr

Rédacteurs

Boris ADAMCZEWSKI

Institut Camille Jordan, Lyon
boris.adamczewski@math.cnrs.fr

Maxime BOURRIGAN

Lycée Sainte-Geneviève, Versailles
maxime.bourrigan@gmail.com

Christophe ECKÈS

Archives Henri Poincaré, Nancy
eckes@math.univ-lyon1.fr

Sébastien GOUÉZEL

Université de Nantes
sebastien.gouezel@univ-nantes.fr

Sophie GRIVAUX

Université de Lille
grivaux@math.univ-lille1.fr

Fanny KASSEL

IHÉS
kassel@ihes.fr

Pauline LAFITTE

École Centrale, Paris
pauline.lafitte@centralesupelec.fr

Romain TESSERA

Université Paris-Sud
romain.tessera@math.u-psud.fr

Secrétariat de rédaction :

SMF – Claire ROPARTZ

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05

Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96

gazette@smf.emath.fr – <http://smf.emath.fr>

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

ISSN : 0224-8999



À propos de la couverture. Le modèle d'Ising est un modèle de mécanique statistique qui reproduit le phénomène de transition de phase ferromagnétique. Une configuration assigne à chaque point d'un réseau un signe, et la probabilité de chaque configuration est proportionnelle à $\exp(\beta N)$ où N est le nombre de paires de sommets adjacents portant le même signe, et où β est un paramètre jouant le rôle de l'inverse de la température. Pour β petit, le système est désordonné, alors pour β grand il exhibe un ordre à grande portée. Si on impose par ailleurs une magnétisation totale nulle (autant de + que de -), on observe des interfaces macroscopiques dont la forme se rapproche, en grand volume, de surfaces minimales pour une tension de surface dépendant de la direction et de la valeur de β . Au-delà d'une certaine valeur, les interfaces orientées dans les axes de coordonnées deviennent rigides, et les interfaces présentent des facettes dans ces directions. L'image correspond à une réalisation de la dynamique de Kawasaki pour ce modèle en dimension 3 avec des conditions au bord périodiques, pour une grande valeur de β , observée un peu avant son temps de mélange. (crédit : Vincent BEFFARA).

N° 160

Éditorial

Les universitaires chérissent la liberté académique, et les mathématiciennes et mathématiciens n’y échappent certainement pas, de France ou d’ailleurs. Dans ce numéro d’avril de la *Gazette*, nous publions deux tribunes de natures politiques très différentes. Dans la seconde, l’auteur relate la situation en Turquie et la répression juridique qui s’est abattue sur les signataires universitaires d’une pétition dénonçant les pratiques de l’armée turque dans le sud-est de ce pays. Parmi les universitaires poursuivis, la mathématicienne Ayşe Berkman a rédigé une plaidoirie s’appuyant en partie sur les mathématiques, plaidoirie poignante dont nous publions des extraits frappants dans ce volume, et l’intégralité sur le site de la SMF. L’autre tribune est une réaction très argumentée de collègues à la récente lettre du directeur de l’INSMI sur un trait particulier des recrutements dans notre communauté mathématique, la mobilité, un joli mot pour désigner une absence, celle du recrutement local. En information, ne manquez pas l’appel du réseau national des bibliothèques de mathématiques au sujet de nos pratiques bibliographiques, un autre enjeu politique et financier important.

Bien sûr, les mathématiques proprement dites ne sont pas en reste, et deux textes de primés par l’Académie des sciences viendront aiguillonner votre curiosité. Le point commun entre les deux articles est la présence de probabilités, pour l’un chez les équations aux dérivées partielles avec conditions initiales aléatoires, pour l’autre dans l’évolution d’interfaces géométriques nées du hasard, comme la croissance d’une couche de neige. Un raconte-moi traite des *groupes approximatifs*, des sous-ensembles de groupes presque stables, dont l’usage est en pleine expansion, et a permis récemment, entre autres, de mieux comprendre les parties génératrices du groupe spécial linéaire sur un corps fini.

Les lectrices et lecteurs se réjouiront a posteriori de l’étonnante vitalité des mathématiques européennes après la première guerre mondiale, avec la synthèse d’une conférence sur ce sujet ; ils exploreront de nouveaux horizons pédagogiques avec une expérience audacieuse sur le terrain narrée par un collègue, puis découvriront, grâce à un texte de présentation, un nouveau site magnifique et déjà indispensable, *le Florilège de la populari-*

sation des mathématiques, rassemblant les actions de diffusion dans notre discipline préférée.

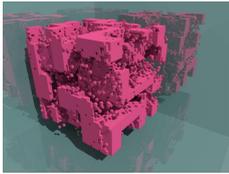
En juillet 2017, nous avons publié une interview de Roger Godement, certes un peu technique, mais tout à fait passionnante. Nous avons pensé au sein du comité éditorial publier de façon beaucoup plus régulière les interviews de mathématiciennes et mathématiciens qui ont marqué leur domaine.

Dans ce numéro, je suis certain que vous prendrez un très grand plaisir à lire celle de Michel Talagrand, qui nous parle entre autres de Sputnik, des salaires du CNRS, d'intervalles « coupés en rondelles », de robots, et du bonheur de faire des mathématiques.

Enfin, vous découvrirez une recension d'une bande dessinée sur l'intemporel Joseph Fourier, ainsi qu'un *retroviseur* de 1986 où des collègues de tous pays réclamaient l'arrêt de la course aux armements. Aux survivants comme moi de cette ambiance d'apocalypse nucléaire, et à celles et ceux qui ne l'ont pas subie, je souhaite une bonne lecture!

Je m'associe à Boris Adamczewski pour remercier chaleureusement Jean-René Chazottes pour son travail dans le comité lors de ces deux dernières années.

Damien GAYET



N° 160

Sommaire

SMF	4
Mot du président	4
MATHÉMATIQUES	6
EDP non linéaires en présence d'aléa singulier – <i>N. TZVETKOV</i>	6
Dynamique d'interfaces aléatoires et limites hydrodynamiques – <i>F. L. TONINELLI</i>	15
ENTRETIEN	27
Un interview de Michel TALAGRAND	27
DIFFUSION DES SAVOIRS	32
Les communautés mathématiques au lendemain de la Grande Guerre – <i>L. MAZLIAK et R. TAZZIOLI</i>	32
Le Florilège de la popularisation des mathématiques – <i>M. CHALEYAT-MAUREL et al.</i>	38
<i>Apprendre Autrement</i> : la création d'un parcours de licence – <i>F. VIGNERON</i>	41
RACONTE-MOI	53
... les groupes approximatifs – <i>M. C. H. TOINTON</i>	53
TRIBUNE LIBRE	60
La mobilité heureuse – <i>O. GARET et B. SCHAPIRA</i>	60
Procès d'Ayşe Berkman (ou : « En défense de la logique ») – <i>A. DELORO</i>	65
INFORMATION	67
Position de l'InSMI sur la mobilité au recrutement en Mathématiques	67
Mathématiciens, mathématiciennes : parlez-nous de vos pratiques !	68
RÉTROVISEUR	69
LIVRES	70

Mot du président

Chères et chers collègues,

Ce printemps est celui des réformes pour le monde de l'enseignement et de la recherche.

Suite à l'annonce du projet de financement pluri-annuel de la recherche par le premier ministre en février dernier, une large consultation de la communauté scientifique est organisée. Une série de mesures sera ensuite dévoilée par le gouvernement au mois de juillet prochain. Les thématiques retenues (financement de la recherche, attractivité des métiers, recherche partenariat) nous concernent pleinement, aussi nous souhaitons porter la voix des mathématiques avant que des orientations ne soient choisies : celles-ci pourront concerner le financement récurrent et par projet, la valorisation salariale, l'organisation administrative de la recherche, la rénovation des bâtiments... Pour être entendues, les sociétés savantes ont décidé de proposer un sondage en ligne afin de connaître les attentes et les priorités des scientifiques français : à ce jour, nous avons reçu plus de 3000 réponses ! Les résultats, qui seront affinés au cours du mois de mai, seront présentés directement auprès des groupes de travail en charge de cette consultation. Il est donc fondamental que vous y participiez et que vous incitiez en particulier les jeunes (en doctorat ou en post-doc) à faire de même : leurs attentes ne sont pas les mêmes que celles des chercheurs depuis longtemps en poste. Vous trouverez ce sondage sur notre site ou dans mes courriels mensuels.

Par ailleurs, l'ensemble du parcours de formation, du primaire jusqu'au concours d'enseignement, est impacté par les (projets de) réformes en cours. Je ne reviendrai pas longuement dans ce mot sur la réforme du lycée, sur laquelle la SMF s'est beaucoup exprimée. Je vous invite fortement à vous saisir de ce sujet qui nous concerne toutes et tous (parents, enseignants, chercheurs) et à lire sur notre site web le manifeste rédigé avec l'APMEP : nous y proposons deux ajustements à moindre coût qui rendraient la réforme du lycée et son contenu plus conformes à ce qui nous semble être un socle commun indispensable en mathématiques pour une formation de qualité, répondant aux enjeux du monde numérique actuel.

L'autre réforme qui nous interroge est celle des concours d'enseignement. Avouons que nous avons été pris au dépourvu par le report des concours au niveau M2, alors que l'ensemble des acteurs souligne la difficulté (et la nécessité) de mener de front un renforcement disciplinaire, une formation pédagogique et des expériences effectives devant des élèves en dernière année de master, pour préparer au mieux l'arrivée des professeurs (des écoles, certifiés ou agrégés) devant leurs classes. Nous avons du mal à comprendre comment ajouter le concours durant cette période cruciale du M2 améliorera et fluidifiera l'apprentissage, tout en garantissant une qualité de formation. La SMF avait d'ailleurs porté un message en ce sens auprès de T. Coulhon en août dernier.

Enfin, si vous lisez ce mot, c'est que vous recevez la *Gazette* et donc avez renouvelé votre adhésion en 2019 : merci ! Il est important pour la SMF de renforcer son socle d'adhérent.e.s (là aussi, consolidons le socle), aussi je vous remercie d'encourager vos collègues, étudiant.e.s, post-docs, à nous soutenir également. Pour les convaincre, n'hésitez pas à les diriger vers notre site sur lequel sont décrites nos nombreuses activités et nos actions, qui toutes concourent à la promotion des mathématiques. Dans une période aussi agitée que celle que nous traversons, un soutien franc de la communauté est un atout majeur pour défendre notre vision et la qualité globale de la formation et de la recherche, en sciences et notamment en mathématiques.

Bien à vous

Le 6 avril 2019

Stéphane SEURET, président de la SMF



EDP non linéaires en présence d'aléa singulier

• N. TZVETKOV

Ce texte décrit des résultats de construction de solutions de régularité faible d'équations aux dérivées partielles non linéaires, qui dépendent d'un paramètre aléatoire. Les motivations pour cette étude sont très variées. Cependant, il se trouve qu'à la fin les résultats obtenus et les méthodes utilisées sont conceptuellement très proches.

1. Séries de Fourier multiples et espaces de Sobolev sur le tore

Pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$\langle x \rangle := (1 + x_1^2 + \dots + x_d^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}))^d$ le tore de dimension d . Si $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de classe C^∞ alors pour tout $x \in \mathbb{T}^d$,

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(n) e^{in \cdot x},$$

où $\hat{f}(n)$ sont les coefficients de Fourier de f . Pour $s \in \mathbb{R}$, on définit la norme de Sobolev de f par

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{T}^d)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle n \rangle^{2s} |\hat{f}(n)|^2. \quad (1)$$

Pour $s \geq 0$ entier, nous avons l'équivalence de normes

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{T}^d)}^2 \approx \sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{T}^d)}^2. \quad (2)$$

Dans (2), ∂^α représente une dérivée partielle d'ordre au plus s . Pour $s = 0$, on retrouve la norme de l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{T}^d)$.

L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^d)$ est défini comme l'adhérence de $C^\infty(\mathbb{T}^d)$ par rapport à la norme (1). Au contraire du cas $s \geq 0$, les éléments de $H^s(\mathbb{T}^d)$ ne sont pas des fonctions classiques sur le tore pour $s < 0$ mais s'interprètent comme des distributions de Schwartz. Notons que les espaces de

Sobolev sont emboîtés : plus s est grand plus les éléments de $H^s(\mathbb{T}^d)$ sont réguliers, l'intersection de tous les $H^s(\mathbb{T}^d)$ étant $C^\infty(\mathbb{T}^d)$. Dans l'autre sens, plus s est petit plus $H^s(\mathbb{T}^d)$ est gros, la réunion de tous les $H^s(\mathbb{T}^d)$ étant l'ensemble des distributions de Schwartz $(2\pi\mathbb{Z})^d$ périodiques sur \mathbb{R}^d .

2. Effets probabilistes dans des questions d'analyse fine

2.1 – Une amélioration presque sûre de l'injection de Sobolev

Soit (Ω, \mathcal{F}, p) un espace probabilisé. On rappelle qu'une variable aléatoire $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\sigma > 0$ si la mesure image de p par g est

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (3)$$

dx étant la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . La variable g a alors pour loi la loi normale centrée (3). De même, la variable aléatoire $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ appartient à $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$, si $g = h + il$, avec $h \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $l \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ indépendantes.

Soit $u \in L^2(\mathbb{T})$ une fonction déterministe. Il existe une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ (les coefficients de Fourier de u) telle que

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}.$$

Considérons maintenant une version randomisée de u donnée par l'expression

$$u_\omega(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n g_n(\omega) e^{inx},$$

où $(g_n(\omega))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables indépendantes de $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$. L'effet de la randomisation sur la régularité Sobolev de u_ω est presque sûrement nulle (voir par exemple [5]). En revanche, la randomisation a un effet important sur la régularité dans les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{T}^d)$. En utilisant l'invariance par les rotations de $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$, on obtient que $g_n(\omega) e^{inx} \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$, puis l'indépendance des g_n assure qu'à x fixé

$$u_\omega(x) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}\left(0, \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2\right).$$

Puisque les variables gaussiennes ont des moments finis à tout ordre, il vient

$$u_\omega(x) \in L^p(\Omega \times \mathbb{T}), \quad \forall p < \infty$$

ce qui implique que $u_\omega(x) \in L^p(\mathbb{T})$ presque sûrement, amélioration remarquable de la régularité L^p de u_ω par rapport à celle de u . Remarquons en effet que l'injection de Sobolev demande une régularité $H^{1/2}(\mathbb{T})$ d'une fonction déterministe pour pouvoir conclure qu'elle est dans $L^p(\mathbb{T})$ pour tout $p < \infty$ (et cette restriction sur la régularité est optimale). De manière imagée, la randomisation fait gagner une demie dérivée par rapport à l'injection de Sobolev. Tout comme l'injection de Sobolev, cet effet est connu depuis le début du xx^e siècle et il peut sembler surprenant que l'interaction entre les deux phénomènes n'ait pas été plus étudiée dans le passé.

Remarquons finalement que grâce à l'inégalité de Khinchin, il est permis de remplacer dans la discussion précédente les variables gaussiennes par une famille de variables aléatoires plus générale (par exemples des variables de Bernoulli).

2.2 – Produits presque sûrs dans des espaces de Sobolev d'indice négatif

Soit la série aléatoire

$$u_\omega(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{g_n(\omega)}{\langle n \rangle^\alpha} e^{inx}, \quad \frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2},$$

avec g_n comme dans la section précédente. Il est facile de vérifier que presque sûrement $u_\omega \in H^\sigma(\mathbb{T})$

pour $\sigma < \alpha - \frac{1}{2}$ mais presque sûrement $u_\omega \notin H^{\alpha - \frac{1}{2}}(\mathbb{T})$. Dans la suite, on fixe un nombre σ tel que $\sigma < \alpha - \frac{1}{2}$ (il faut penser que ce nombre est très proche de $\alpha - \frac{1}{2}$). La série u_ω est donc dans un espace de Sobolev d'indice négatif et il s'avère difficile de définir un objet comme $|u_\omega|^2$. Après renormalisation, il est néanmoins possible de donner un sens à $|u_\omega|^2$, et même de déterminer sa régularité dans les espaces de Sobolev. Commençons par considérer les sommes partielles

$$u_{\omega, N}(x) = \sum_{|n| \leq N} \frac{g_n(\omega)}{\langle n \rangle^\alpha} e^{inx}$$

qui sont bien des fonctions de classe C^∞ . On développe

$$\begin{aligned} |u_{\omega, N}(x)|^2 &= \sum_{|n| \leq N} \frac{|g_n(\omega)|^2}{\langle n \rangle^{2\alpha}} \\ &+ \sum_{\substack{n_1 \neq n_2 \\ |n_1|, |n_2| \leq N}} \frac{g_{n_1}(\omega) \overline{g_{n_2}(\omega)}}{\langle n_1 \rangle^\alpha \langle n_2 \rangle^\alpha} e^{i(n_1 - n_2)x}. \end{aligned}$$

Le premier terme de ce développement (le coefficient de Fourier d'ordre zéro) contient toute la singularité alors que le deuxième terme a une limite presque sûrement dans $H^{2\sigma}(\mathbb{T})$. On pose alors

$$c_N := \ell \left(\sum_{|n| \leq N} \frac{|g_n(\omega)|^2}{\langle n \rangle^{2\alpha}} \right) = \sum_{|n| \leq N} \frac{2}{\langle n \rangle^{2\alpha}} \sim N^{1-2\alpha},$$

et on définit la somme partielle renormalisée

$$\begin{aligned} |u_{\omega, N}(x)|^2 - c_N &= \sum_{|n| \leq N} \frac{|g_n(\omega)|^2 - 2}{\langle n \rangle^{2\alpha}} \\ &+ \sum_{\substack{n_1 \neq n_2 \\ |n_1|, |n_2| \leq N}} \frac{g_{n_1}(\omega) \overline{g_{n_2}(\omega)}}{\langle n_1 \rangle^\alpha \langle n_2 \rangle^\alpha} e^{i(n_1 - n_2)x}. \end{aligned}$$

L'indépendance des variables aléatoires g_n assure que le coefficient de Fourier d'ordre zéro est bien défini. Plus précisément, on obtient

$$\ell \left(\left| \sum_{|n| \leq N} \frac{|g_n(\omega)|^2 - 2}{\langle n \rangle^{2\alpha}} \right|^2 \right) = \sum_{|n| \leq N} \frac{4}{\langle n \rangle^{4\alpha}},$$

ce qui a une limite pour $N \rightarrow \infty$ si $\alpha > 1/4$.

De même, l'indépendance conduit à ce que l'espérance

$$\ell \left(\left\| \sum_{\substack{n_1 \neq n_2 \\ |n_1|, |n_2| \leq N}} \frac{g_{n_1}(\omega) \overline{g_{n_2}(\omega)}}{\langle n_1 \rangle^\alpha \langle n_2 \rangle^\alpha} e^{i(n_1 - n_2)x} \right\|_{H^{2\sigma}}^2 \right)$$

soit majorée par un terme de l'ordre de

$$\sum_{n_1, n_2} \frac{\langle n_1 - n_2 \rangle^{4\sigma}}{\langle n_1 \rangle^{2\alpha} \langle n_2 \rangle^{2\alpha}}.$$

Cette dernière somme est convergente sous la condition $-4\sigma + 4\alpha > 2$, ce qui est équivalent à notre hypothèse $\sigma < \alpha - \frac{1}{2}$. La suite

$$\left(|u_{\omega, N}(x)|^2 - c_N \right)_{N \geq 1} \quad (4)$$

a donc une limite dans $L^2(\Omega; H^{2\sigma}(\mathbb{T}))$. Cette limite est par définition la renormalisation de $|u_\omega|^2$. On peut également démontrer (par des arguments plus élaborés) la convergence presque sûre dans l'espace de Sobolev $H^{2\sigma}(\mathbb{T})$ de la suite (4). Remarquons que puisque $\sigma < 0$ la norme dans $H^{2\sigma}(\mathbb{T})$ est plus faible que celle dans $H^\sigma(\mathbb{T})$ (où la série $u_\omega(x)$ est définie).

Pour résumer d'une manière très informelle, le module au carré d'un élément de H^σ est dans $H^{2\sigma}$, après renormalisation. Il s'agit d'un effet probabiliste remarquable qui est au cœur de l'étude d'EDP d'évolution, en présence d'aléa, dans des espaces de Sobolev d'indice négatif. Nous allons développer cette problématique dans la suite de ce texte.

3. Résolution de l'équation des ondes non linéaire avec des données initiales peu régulières

L'équation des ondes est un exemple typique d'une EDP dispersive. La résolution d'EDP dispersives avec des données initiales peu régulières a une longue histoire depuis les travaux fondateurs de Ginibre-Velo et de Kato. Kenig-Ponce-Vega, Klainerman-Machedon et notamment Bourgain ont développé des outils permettant d'obtenir des solutions d'une régularité très basse. La question de l'optimalité de ces résultats s'est ensuite posée. C'est le travail de Lebeau qui a lancé une série de résultats de construction des contre-exemples qui montrent l'optimalité de l'hypothèse de régularité dans les résultats précédents. C'est dans ce contexte que l'idée de démontrer une sorte de caractère bien posé probabiliste, pour des régularités où des contre-exemples étaient construits, est apparue dans [21, Section 10.1], et ensuite mise en place dans [5, 4].

3.1 – Résolution de l'équation des ondes linéaire avec des données initiales distribuées périodiques

On considère l'équation des ondes linéaire

$$(\partial_t^2 - \Delta)u = 0, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x), \quad (5)$$

où $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{T}^3$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ et Δ est l'opérateur de Laplace. On vérifie aisément que pour

$$(u_0, u_1) \in C^\infty(\mathbb{T}^3) \times C^\infty(\mathbb{T}^3)$$

la solution de (5) est donnée par l'application $S(t)$ définie par

$$S(t)(u_0, u_1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \left(\cos(t|n|) \widehat{u}_0(n) + \frac{\sin(t|n|)}{|n|} \widehat{u}_1(n) \right) e^{in \cdot x},$$

où $|n| = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{1/2}$. Pour $n = 0$, l'expression $\frac{\sin(t|n|)}{|n|}$ est ici naturellement comprise comme sa limite t .

Comme $|\cos(t|n|)| \leq 1$ et $|\sin(t|n|)| \leq 1$, il résulte de la définition ci-dessus que

$$\|S(t)(u_0, u_1)\|_{H^s} \leq C(1 + |t|)(\|u_0\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^{s-1}}). \quad (6)$$

Puisque $S(t)$ est linéaire, nous pouvons définir une unique extension de $S(t)$ pour

$$(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)$$

et résoudre ainsi (5) avec des données initiales dans $H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)$ pour $s \in \mathbb{R}$ arbitraire.

3.2 – Le problème non linéaire. Résolution par des méthodes déterministes

La discussion précédente permet de facilement résoudre (5) avec des données initiales singulières (dans des espaces de Sobolev d'indice arbitrairement négatif). L'argument repose sur l'estimation a priori (6) et la nature linéaire de l'application $S(t)$ (ou de l'équation (5)). La situation change radicalement si on considère une perturbation non linéaire de (5). Dans ce texte, nous restreignons notre attention au cas d'une interaction non linéaire cubique. Plus précisément, nous considérons le problème

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta)u + u^3 = 0, \quad u(0, x) = u_0(x), \\ \partial_t u(0, x) = u_1(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Pour ce problème, on perd l'information cruciale (6) et la nature linéaire de l'équation. Néanmoins, l'équation (7) est de nature hamiltonienne. Par

conséquent, formellement, les solutions de (7) satisfont à la relation algébrique suivante

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^3} \left((\partial_t u(t, x))^2 + |\nabla_x u(t, x)|^2 + \frac{1}{2} u^4(t, x) \right) dx = 0. \quad (8)$$

Cette relation entraîne que l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{T}^3)$ est l'un des cadres naturels de l'étude de (7). Le départ de cette étude est donné par le résultat classique suivant.

Théorème 1. *Pour tout $(u_0, u_1) \in H^1(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3)$ (à valeurs réelles) il existe une unique solution globale de (7) dans la classe*

$$(u, \partial_t u) \in C^0(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{T}^3) \times L^2(\mathbb{T}^3)).$$

Si de plus $(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)$ pour un certain $s \geq 1$ alors

$$(u, \partial_t u) \in C^0(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)). \quad (9)$$

Finalement, la dépendance par rapport aux données initiales est continue.

Par des méthodes de compacité (remontant aux travaux de Leray) on peut exploiter (8) et obtenir une version beaucoup plus faible du Théorème 1, sans avoir l'unicité et sans avoir la propagation de régularité (9). Dans le Théorème 1, l'unicité résulte d'une utilisation de l'injection de Sobolev $H^1(\mathbb{T}^3) \subset L^6(\mathbb{T}^3)$. La norme L^6 apparaît naturellement ici lorsque l'on étudie la norme L^2 du terme non linéaire u^3 . Quant à la propagation de la régularité, elle résulte de l'estimation suivante

$$\|u^3\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} \leq C \|(1 - \Delta)^{s/2} u\|_{L^6(\mathbb{T}^3)} \|u\|_{L^6(\mathbb{T}^3)}^2. \quad (10)$$

Les détails de la preuve de (10), peuvent se consulter dans l'ouvrage [1] où les estimations de type (10) sont appelées « douces » (« tame » en anglais). Le point clé dans l'estimation (10) est que les s dérivées agissant sur l'expression u^3 sont redistribuées d'une telle manière qu'à la fin le membre de droite de (10) ne dépend que d'une manière linéaire de la norme forte (celle qui contient des dérivées).

Compte tenu de la discussion sur le problème linéaire (5), il est maintenant naturel de se demander si le Théorème 1 se généralise pour des données initiales dans $H^s \times H^{s-1}$ pour certains $s < 1$. Comme on le verra ci-dessous une telle généralisation est possible pour certains s mais pas tous. En utilisant des estimations de Strichartz au lieu de l'injection de

Sobolev $H^1(\mathbb{T}^3) \subset L^6(\mathbb{T}^3)$, une partie du Théorème 1 se généralise pour

$$(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^3), \quad s \geq 1/2. \quad (11)$$

Plus précisément, on peut obtenir le caractère localement bien posé de (7) sous l'hypothèse (11). Une description plus détaillée des estimations de Strichartz irait au-delà de nos objectifs dans ce texte. Nous nous restreindrons à dire que les estimations de Strichartz peuvent être vues comme des améliorations presque partout en temps des injections de Sobolev, lorsqu'au lieu de considérer une fonction arbitraire on considère une fonction qui satisfait à une EDP dispersive. Nous renvoyons à [22] pour plus de détails sur les estimations de Strichartz et la généralisation du Théorème 1 sous l'hypothèse (11). On peut conjecturer que la partie globale en temps du Théorème 1 reste vraie sous l'hypothèse (11). Les résultats les plus avancés vers la résolution de cette conjecture sont contenus dans [7, 20].

3.3 – La limite des méthodes déterministes

La restriction (11) est optimale en ce qui concerne le caractère bien posé au sens d'Hadamard de (7) avec des données initiales dans $H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)$. Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2. *Soient $s \in (0, 1/2)$ et*

$$(u_0, u_1) \in H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^3).$$

Il existe une suite

$$u_N(t, x) \in C^0(\mathbb{R}; C^\infty(\mathbb{T}^3)), \quad N = 1, 2, \dots$$

telle que

$$(\partial_t^2 - \Delta)u_N + u_N^3 = 0$$

avec

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|(u_N(0) - u_0, \partial_t u_N(0) - u_1)\|_{H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)} = 0$$

mais pour tout $T > 0$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|(u_N(t), \partial_t u_N(t))\|_{L^\infty([0, T]; H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^3))} = +\infty.$$

Le caractère bien posé au sens d'Hadamard requiert l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport aux données initiales. Le Théorème 2 contredit la dépendance continue par rapport aux données initiales.

La preuve du Théorème 2 repose sur une idée de Lebeau (voir par exemple [14]) : si les données initiales sont localisées à haute fréquence alors pour

des temps petits une bonne approximation de la solution de (7) est donnée par la solution de

$$\partial_t^2 u + u^3 = 0, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x) \quad (12)$$

qui est obtenue à partir de (7) en négligeant l'effet du laplacien Δ . Autrement dit, sous l'hypothèse du Théorème 2, ce sont les effets non linéaires qui dominent dans le régime décrit ci-dessus. La solution de (12) manifeste le phénomène d'amplification décrit par le Théorème 2 et cette propriété est propagée aux solutions de (7) par un argument perturbatif, hautement non trivial. Une preuve détaillée du Théorème 2 se trouve dans [22].

3.4 – Résolution par des méthodes probabilistes au-delà des limites de la théorie déterministe

Malgré le résultat du Théorème 2, on peut se demander si une forme du caractère bien posé de (7) reste vrai pour des données initiales dans

$$H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^3), \quad s < 1/2. \quad (13)$$

La réponse à cette question est positive si on munit l'espace (13) d'une mesure de probabilité non dégénérée telle que nous avons l'existence, l'unicité et (une forme) de dépendance continue presque sûrement par rapport à cette mesure.

On va choisir les données initiales de (7) parmi les réalisations des séries aléatoires suivantes

$$u_0^\omega(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \frac{g_n(\omega)}{\langle n \rangle^\alpha} e^{in \cdot x},$$

$$u_1^\omega(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \frac{h_n(\omega)}{\langle n \rangle^{\alpha-1}} e^{in \cdot x}. \quad (14)$$

Ici $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}^3}$ et $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}^3}$ sont deux familles de variables aléatoires indépendantes conditionnées par $g_n = \overline{g_{-n}}$ et $h_n = \overline{h_{-n}}$, afin que u_0^ω et u_1^ω soient à valeurs réelles. De plus, on suppose que pour $n \neq 0$, g_n et h_n sont des variables gaussiennes complexes de loi $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$, alors que g_0 et h_0 sont des variables gaussiennes réelles de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Les sommes partielles associées à (14) sont de Cauchy dans $L^2(\Omega; H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^3))$ pour tout $s < \alpha - \frac{3}{2}$. Par conséquent, les données initiales (14) appartiennent presque sûrement à $H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)$ pour $s < \alpha - \frac{3}{2}$. De plus, la probabilité de l'événement

$$(u_0^\omega, u_1^\omega) \in H^{\alpha-\frac{3}{2}}(\mathbb{T}^3) \times H^{\alpha-\frac{5}{2}}(\mathbb{T}^3)$$

est nulle. Il résulte que pour $\alpha > 5/2$ on peut appliquer le Théorème 1 pour des données (u_0, u_1) décrites par (14). Pour $\alpha > 2$, on peut appliquer les résultats déterministes raffinés (reposant sur les estimations de Strichartz). Finalement pour $\alpha \in (3/2, 2)$, le Théorème 2 s'applique et on obtient :

Théorème 3. Soient $\alpha \in (3/2, 2)$ et $0 < s < \alpha - 3/2$. Pour presque tout ω , il existe une suite

$$u_N^\omega(t, x) \in C^0(\mathbb{R}; C^\infty(\mathbb{T}^3)), \quad N = 1, 2, \dots$$

telle que

$$(\partial_t^2 - \Delta)u_N^\omega + (u_N^\omega)^3 = 0$$

avec

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|(u_N^\omega(0) - u_0^\omega, \partial_t u_N^\omega(0) - u_1^\omega)\|_{H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^3)} = 0$$

mais pour tout $T > 0$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|(u_N^\omega(t), \partial_t u_N^\omega(t))\|_{L^\infty([0, T]; H^s(\mathbb{T}^3) \times H^{s-1}(\mathbb{T}^3))} = +\infty.$$

On peut néanmoins démontrer le résultat suivant.

Théorème 4. Soient $\alpha \in (3/2, 2)$ et $0 < s < \alpha - 3/2$. Définissons grâce au Théorème 1 la suite $(u_N^\omega)_{N \geq 1}$ de solutions de (7) pour les conditions initiales régulières données par

$$u_{0,N}^\omega(x) = \sum_{|n| \leq N} \frac{g_n(\omega)}{\langle n \rangle^\alpha} e^{in \cdot x},$$

$$u_{1,N}^\omega(x) = \sum_{|n| \leq N} \frac{h_n(\omega)}{\langle n \rangle^{\alpha-1}} e^{in \cdot x}. \quad (15)$$

La suite $(u_N^\omega)_{N \geq 1}$ converge presque sûrement lorsque $N \rightarrow \infty$ dans $C^0(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{T}^3))$ vers une (unique) limite qui satisfait à (7) au sens des distributions.

Les résultats des Théorèmes 3 et 4 montrent que le type d'approximation des données initiales est crucial lorsque l'on établit le caractère bien posé probabiliste.

Par des méthodes de compacité (à la Leray), on peut espérer obtenir la convergence d'une sous-suite de $(u_N^\omega)_{N \geq 1}$. La convergence de toute la suite $(u_N^\omega)_{N \geq 1}$ est hors de portée des techniques de solutions faibles. Le fait que toute la suite converge contient déjà une forme d'unicité. Dans [4], on peut trouver une forme d'unicité qui se formule dans un cadre fonctionnel adapté.

Dans [4], on obtient aussi une dépendance continue par rapport aux données initiales probabiliste, dont la preuve fait appel à des propriétés

de grandes déviations conditionnées qui semblent avoir un intérêt indépendant.

Enfin, on peut démontrer le résultat du Théorème 4 pour des randomisations plus générales que (14). Par exemple, on peut remplacer les variables gaussiennes par des variables de Bernoulli et les coefficients déterministes $\langle n \rangle^{-\alpha}$ par d'autres coefficients ayant un comportement « semblable » pour $|n| \gg 1$. On renvoie à [4] pour plus de détails.

3.5 – Aller encore plus loin

Pour $\alpha < 3/2$, u_0^ω n'est plus une fonction classique. Dans ce cas, elle s'interprète comme une distribution qui appartient à un espace de Sobolev d'indice négatif. On ne peut pas espérer avoir un résultat comme celui du Théorème 4 pour $\alpha < 3/2$. Une renormalisation est nécessaire, comme le montre le résultat suivant récemment établi dans [17].

Théorème 5. Soient $\alpha \in (\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$ et $s < \alpha - 3/2$. Il existe des constantes positives γ, c, C, T_0 et une suite divergente $(c_N)_{N \geq 1}$ telles que pour tout $T \in (0, T_0)$ il existe un ensemble Ω_T tel que la probabilité de son complémentaire est $\leq C \exp(-c/T^\gamma)$ et tel que si on note par $(u_N^\omega)_{N \geq 1}$ la solution de

$$\partial_t^2 u_N^\omega - \Delta u_N^\omega - c_N u_N^\omega + (u_N^\omega)^3 = 0, \quad (16)$$

avec une donnée initiale donnée par (15) alors pour tout $\omega \in \Omega_T$ la suite $(u_N^\omega)_{N \geq 1}$ converge pour $N \rightarrow \infty$ dans $C^0([-T, T]; H^s(\mathbb{T}^3))$. En particulier, pour presque tout ω il existe $T_\omega > 0$ tel que $(u_N^\omega)_{N \geq 1}$ converge dans $C^0([-T_\omega, T_\omega]; H^s(\mathbb{T}^3))$.

Le Théorème 5 est un premier pas dans l'étude de (7) dans les espaces de Sobolev d'indice négatif. Le but ultime est d'arriver à traiter le cas $\alpha = 1$. Dans ce cas un argument exploitant des mesures invariantes permettrait d'avoir aussi des solutions globales. Pour les autres valeurs de α , on peut espérer qu'un argument de type l -méthode à la Tao et al. permettrait de globaliser les solutions du Théorème 5. Toutes ces questions font l'objet du travail en cours [17].

4. Mesures invariantes pour l'équation de Schrödinger non linéaire

Considérons maintenant l'équation de Schrödinger non linéaire, posée sur le tore de dimension deux,

$$(i\partial_t + \Delta)u - |u|^2 u = 0, u(0, x) = u_0(x), x \in \mathbb{T}^2. \quad (17)$$

Ici la solution u est à valeurs complexes mais l'équation est d'ordre 1 en temps. Nous avons l'analogie suivant du Théorème 1 dans le contexte de (17).

Théorème 6. Pour tout $u_0 \in H^1(\mathbb{T}^2)$ il existe une unique solution globale de (17) dans la classe $C^0(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{T}^2))$. Si de plus $u_0 \in H^s(\mathbb{T}^2)$ pour un certain $s \geq 1$ alors $u \in C^0(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{T}^2))$. La dépendance par rapport aux données initiales est aussi continue.

L'équation (17) est de nouveau de nature hamiltonienne. Cela implique que la fonctionnelle

$$E(u) = \int_{\mathbb{T}^2} (|\nabla_x u(t, x)|^2 + |u(t, x)|^2 + \frac{1}{2}|u(t, x)|^4) dx \quad (18)$$

est conservée par (17). La mesure de Gibbs associée à (17) est une « renormalisation » de l'objet complètement formel

$$\exp(-E(u)) du. \quad (19)$$

Cette renormalisation est une procédure classique en théorie quantique des champs, qu'il serait impossible de présenter dans ce texte. Disons seulement que la mesure obtenue par cette renormalisation est absolument continue par rapport à la mesure gaussienne induite par la série aléatoire

$$u_0^\omega(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \frac{g_n(\omega)}{\langle n \rangle} e^{in \cdot x} \quad (20)$$

où $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}^2}$ est une famille de variables gaussiennes complexes indépendantes de $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$. Une fois posée la définition rigoureuse de la mesure (19), la question naturelle est de savoir si on peut définir une dynamique reliée à (17) qui laisse cette mesure invariante. La réponse à cette question est donnée par le travail de Bourgain [3]. La difficulté tient au fait que (20) ne définit pas une fonction classique. L'objet défini par (20) appartient presque sûrement à l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^2)$ pour tout $s < 0$. Une telle régularité implique que le Théorème 6 ne peut pas s'appliquer dans le contexte d'une donnée initiale donnée par (20). Cette régularité est également hors de portée des techniques déterministes les plus élaborées. Néanmoins, l'énoncé suivant peut se déduire de [3].

Théorème 7. Définissons grâce au Théorème 6 la suite $(u_N^\omega)_{N \geq 1}$ de solutions de (17) pour les conditions initiales de classe C^∞ données par

$$u_{0,N}^\omega(x) = \sum_{|n| \leq N} \frac{g_n(\omega)}{\langle n \rangle} e^{in \cdot x}. \quad (21)$$

Alors pour tout $s < 0$ la suite

$$\left(\exp\left(\frac{it}{2\pi^2} \|u_N^\omega(t)\|_{L^2}^2\right) u_N^\omega(t) \right)_{N \geq 1}$$

converge presque sûrement dans $C^0(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{T}^2))$ vers une limite qui satisfait (au sens des distributions) à une version renormalisée de (17).

On observe une ressemblance entre les Théorèmes 4 et 7. Une différence notable est la nécessité de renormaliser la suite $(u_N^\omega)_{N \geq 1}$ du Théorème 7 afin d'obtenir une limite. Cette renormalisation est liée à la construction de la mesure provenant de l'objet formel (19) mentionné ci-dessus.

On peut formuler le résultat du Théorème 7 dans l'esprit du Théorème 5. Plus précisément, on peut démontrer la convergence des solutions du problème

$$i\partial_t u_N + \Delta u_N + c_N u_N - |u_N|^2 u_N = 0$$

avec donnée initiale (21), où $(c_N(\omega))_{N \geq 1}$ est une suite de nombres réels presque sûrement divergente vers $+\infty$.

5. EDP stochastiques singulières

La problématique considérée dans les sections précédentes est très proche de l'analyse d'EDP en présence d'un terme source aléatoire singulier (bruit). Cette thématique a reçu beaucoup d'attention dans les dernières années (voir par exemple, [6, 8, 9, 10, 11, 13]).

L'équation la plus proche de celles des sections précédentes est l'équation de la chaleur non linéaire. Plus précisément, nous considérons

$$\partial_t u - \Delta u + u^3 = \xi, \quad u(0, x) = 0, \quad x \in \mathbb{T}^3. \quad (22)$$

Dans cette équation ξ est le bruit blanc espace-temps sur $[0, \infty[\times \mathbb{T}^3$. L'inconnue u est une fonction à valeurs réelles. Il existe beaucoup de motivations physiques à considérer une EDP perturbée par un bruit blanc. Une discussion sérieuse sur ces motivations n'entre pas dans l'objectif de ce texte.

C'est le terme source ξ qui représente l'aléa singulier dans (22), alors que dans (7) et (17) c'est la donnée initiale qui est la source d'aléa singulier. Un peu d'expérience avec l'analyse des EDP d'évolution suffit à savoir que les deux situations sont en fait très proches et que, même dans certains cas, pour des raisons de commodité, on transforme facilement le problème avec donnée initiale en un

problème avec un terme source et donnée initiale zéro.

Une représentation dans l'esprit de (14) et (20) du bruit blanc sur $[0, \infty[\times \mathbb{T}^3$ est donnée par la formule

$$\xi = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \dot{\beta}_n(t) e^{in \cdot x}, \quad (23)$$

où β_n sont des mouvements browniens indépendants, conditionnés par $\beta_n = \overline{\beta_{-n}}$ (β_0 est réel et pour $n \neq 0$, β_n est à valeurs dans \mathbb{C}). La dérivée par rapport à t de β_n dans (23) est au sens des distributions.

Si $\xi \in C^\infty([0, \infty[\times \mathbb{T}^3)$, l'équation (22) se résout par des méthodes déterministes. C'est l'analogue des Théorèmes 1 ou 6 dans le contexte de (22). Pour $N \gg 1$, on définit une approximation de ξ donnée par (23) par des fonctions lisses par

$$\xi_N(t, x) = \rho_N \star \xi$$

où $\rho_N(t, x) = N^5 \rho(N^2 t, Nx)$ avec ρ une fonction-test d'intégrale 1 sur $[0, \infty[\times \mathbb{T}^3$. C'est une régularisation par convolution, très proche des régularisations utilisées dans (15) et (21). L'énoncé suivant peut être déduit de [10, 16].

Théorème 8. *Il existe une suite $(c_N)_{N \geq 1}$ de nombres positifs, divergente lorsque $N \rightarrow \infty$ telle que si on note par u_N la solution de*

$$\partial_t u_N - \Delta u_N - c_N u_N + u_N^3 = \xi_N, \quad u(0, x) = 0$$

alors $(u_N)_{N \geq 1}$ converge en loi lorsque $N \rightarrow \infty$.

On peut aussi avoir convergence presque sûre dans des espaces de Hölder convenables. La donnée initiale $u(0, x)$ peut être différente de zéro : il suffit qu'elle appartienne à un espace fonctionnel bien choisi (voir [16]).

L'analogue complet de (14) et (20) dans le contexte de (22) serait le bruit blanc sur $\mathbb{T} \times \mathbb{T}^3$ défini par

$$\xi = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} g_{m,n}(\omega) e^{imt} e^{in \cdot x}, \quad (24)$$

où $\{g_{m,n}\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^4}$ est une famille de variables gaussiennes indépendantes conditionnées pour que ξ soit à valeurs réelles. Le résultat du Théorème 8 reste vraie pour un bruit ξ défini par (24).

Il y a d'autres EDP paraboliques pour lesquelles un résultat dans l'esprit du Théorème 8 peut être obtenu, l'exemple le plus connu est peut-être l'équation de KPZ (voir [11]).

6. Discussion finale

Les énoncés des Théorèmes 4, 5, 7 et 8 se ressemblent. Leurs preuves aussi suivent le même schéma conducteur. D'abord, on construit des solutions locales en temps. Ensuite, on utilise une information globale qui est soit une mesure invariante, soit une estimation d'énergie pour passer vers des solutions globales en temps.

Pour construire des solutions locales, on cherche les solutions sous la forme

$$u = u_1 + u_2,$$

où u_1 contient la partie singulière de la solution.

Par des arguments probabilistes, très proches des considérations de la Section 2, u_1 a des propriétés meilleures que celles données par les méthodes déterministes. Toute la partie probabiliste se trouve dans cette partie de l'analyse. Dans la preuve du Théorème 4, on utilise des améliorations presque sûres de l'injection de Sobolev alors que dans les preuves des Théorèmes 5, 7 et 8, on construit des produits presque sûrs dans des espaces de Sobolev d'indice négatif.

Ensuite, on résout le problème pour u_2 par des arguments déterministes. À cet endroit la nature de l'équation devient encore plus importante. Dans le cas du Théorème 8 l'outil de base est la régularité elliptique alors que dans les Théorèmes 4, 5 et 7 on exploite d'une manière cruciale les oscillations en temps (captées par les espaces de Bourgain, par exemple).

Le passage vers des solutions globales en temps dans le Théorème 7 utilise une mesure invariante comme un contrôle global sur les solutions. Dans le Théorème 4 la globalisation des solutions se fait par

un argument reposant sur des estimations d'énergie. Il est remarquable que, dans le contexte du Théorème 8, on puisse aussi utiliser ces deux méthodes pour globaliser les solutions locales : dans [12] la globalisation se fait en utilisant un contrôle provenant d'une mesure invariante alors que le travail [16] utilise la (bien plus flexible) méthode d'estimations d'énergie.

Le travail d'Oh [18] établit l'analogie du Théorème 2 dans le contexte du Théorème 7. À ma connaissance, un tel résultat d'amplification de certaines approximations particulières n'est pas connu dans le contexte du Théorème 8.

Nous avons déjà mentionné que, dans le Théorème 4, nous autorisons des randomisations plus générales comparé au Théorème 7. Cela a permis de considérer des randomisations pour les fonctions des espaces de Sobolev sur l'espace entier \mathbb{R}^d et de démontrer des résultats dans l'esprit du Théorème 4 pour des problèmes posés sur l'espace entier (au lieu du tore). Pour des travaux dans cette direction, on peut consulter [2, 15].

Le Théorème 4 autorise des randomisations plus générales que le Théorème 7 mais il ne dit rien concernant le transport de la mesure définissant l'ensemble des données initiales (alors que la preuve du Théorème 7 nous dit que la mesure gaussienne initiale est quasi-invariante par le flot). On ne connaît toujours pas la nature de la mesure transportée par le flot dans le contexte du Théorème 4. On peut consulter [19] pour un progrès récent sur ce problème intéressant.

La liste des références ci-dessous est loin d'être complète. Il s'agit d'un domaine très actif. Pour la description d'autres résultats directement liés à ce que nous venons de décrire dans les pages précédentes, nous renvoyons le lecteur à [8, 11, 22].

Références

- [1] S. ALINHAC et P. GÉRARD. *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*. Savoirs Actuels. [Current Scholarship]. InterEditions, Paris; Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), Meudon, 1991, p. 190.
- [2] A. BENYI, T. OH et O. POCOVNICU. « On the probabilistic Cauchy theory of the cubic nonlinear Schrödinger equation on \mathbb{R}^d , $d \geq 3$ ». *Transactions of the American Mathematical Society, Series B* 2, n° 1 (2015), p. 1-50.
- [3] J. BOURGAIN. « Invariant measures for the 2D-defocusing nonlinear Schrödinger equation ». *Communications in mathematical physics* 176, n° 2 (1996), p. 421-445.
- [4] N. BURQ et N. TZVETKOV. « Probabilistic well-posedness for the cubic wave equation ». *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 16, n° 1 (2014), p. 1-30.
- [5] N. BURQ et N. TZVETKOV. « Random data Cauchy theory for supercritical wave equations ». *Inventiones mathematicae* 173, n° 3 (2008), p. 449-475.
- [6] G. DA PRATO et A. DEBUSSCHE. « Strong solutions to the stochastic quantization equations ». *The Annals of Probability* 31, n° 4 (2003), p. 1900-1916.

- [7] B. DODSON. « Global well-posedness and scattering for the radial, defocusing, cubic wave equation with initial data in a critical Besov space ». *Analysis & PDE* **12**, n° 4 (2018), p. 1023-1048.
- [8] M. GUBINELLI. « A panorama of singular SPDEs ». *Proc. Int. Cong. Math-Rio de Janeiro* Vol. 2 (2018), p. 2277-2304.
- [9] M. GUBINELLI, P. IMKELLER et N. PERKOWSKI. « Paracontrolled distributions and singular PDEs ». *Forum of Mathematics Pi* **3** (2015).
- [10] M. HAIRER. « A theory of regularity structures ». *Inventiones mathematicae* **198**, n° 2 (2014), p. 269-504.
- [11] M. HAIRER. « Singular stochastic PDEs ». *Proceedings of the International Congress of Mathematicians-Seoul 2014. Vol. IV* (2014), p. 49-73.
- [12] M. HAIRER et K. MATETSKI. « Discretisations of rough stochastic PDEs ». *The Annals of Probability* **46**, n° 3 (2018), p. 1651-1709.
- [13] A. KUPIAINEN. « Renormalization group and stochastic PDEs ». *Ann. Henri Poincaré* **17**, n° 3 (2016), p. 497-535.
- [14] G. LEBEAU. « Perte de régularité pour les équations d'ondes sur-critiques ». *Bull. Soc. Math. France* **133**, n° 1 (2005), p. 145-157.
- [15] J. LÜHRMANN et D. MENDELSON. « Random data Cauchy theory for nonlinear wave equations of power-type on \mathbb{R}^3 ». *Communications in Partial Differential Equations* **39**, n° 12 (2014), p. 2262-2283.
- [16] J.-C. MOURRAT et H. WEBER. « The dynamic Φ_3^4 model comes down from infinity ». *Communications in Mathematical Physics* **356**, n° 3 (2017), p. 673-753.
- [17] T. OH, O. POCOVNICU et N. TZVETKOV. *Probabilistic local Cauchy theory of the cubic wave equation in negative Sobolev spaces*.
- [18] T. OH. « A remark on norm inflation with general initial data for the cubic nonlinear Schrödinger equations in negative Sobolev spaces ». *Funkcialaj Ekvacioj* **60**, n° 2 (2017), p. 259-277.
- [19] T. OH et N. TZVETKOV. « Quasi-invariant Gaussian measures for the cubic fourth order nonlinear Schrödinger equation ». *Probab. Theory Related Fields* **169**, n° 3-4 (2017), p. 1121-1168.
- [20] T. ROY. « Adapted linear-nonlinear decomposition and global well-posedness for solutions to the defocusing cubic wave equation on \mathbb{R}^3 ». *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A* **24**, n° 4 (2009), p. 1307-1323.
- [21] N. TZVETKOV. « Invariant measures for the defocusing Nonlinear Schrödinger equation (Mesures invariantes pour l'équation de Schrödinger non linéaire) ». *Annales de l'institut Fourier* **58** (2008), p. 2543-2604.
- [22] N. TZVETKOV. « Random data wave equations ». *arXiv preprint arXiv:1704.01191* (2017).



Nikolay TZVETKOV

Université de Cergy-Pontoise
 nikolay.tzvetkov@u-cergy.fr

Nikolay Tzvetkov est professeur au laboratoire d'Analyse, Géométrie et Modélisation de l'université de Cergy-Pontoise. Ses travaux portent sur l'analyse d'équations aux dérivées partielles modélisant la propagation d'ondes.

Je remercie les éditeurs de la *Gazette* pour leur invitation à écrire ce texte. Ce dernier a bénéficié des remarques de Benoît Claudon, Patrick Gérard, Philippe Gravejat, Jean-Christophe Mourrat, Tadahiro Oh et Frédéric Rousset.

Dynamique d'interfaces aléatoires et limites hydrodynamiques

Dans cette note, nous allons présenter un panorama de résultats mathématiques et de problèmes ouverts concernant les propriétés à grande échelle, spatiale et temporelle, des dynamiques d'interfaces aléatoires. Il s'agit d'un domaine de recherche très vaste, dont les motivations proviennent de la physique [1] et qui touche à plusieurs branches des mathématiques, notamment les probabilités (processus de Markov) et l'analyse (EDPs déterministes et stochastiques, calcul des variations) mais aussi la combinatoire (pavages aléatoires du plan, processus de Schur) et les algorithmes probabilistes (chaînes de Markov « Monte Carlo »). Nous allons nous concentrer seulement sur quelques aspects choisis.

• F. L. TONINELLI

1. Introduction

Pour introduire le sujet, commençons par deux exemples de la vie quotidienne, qui illustrent le type de problèmes dont il est question. Nous passerons ensuite à la modélisation mathématique de tels phénomènes physiques. Comme premier exemple, imaginons la croissance de la couche de neige dans un jardin lors d'une journée d'hiver. Bien que la trajectoire des flocons individuels soit un processus essentiellement aléatoire, si on observe le paysage de loin on aura l'impression que le profil de hauteur de la neige croît d'une façon assez régulière pour former une surface lisse. Si par contre on observe de plus près, on notera une structure bien plus irrégulière et rugueuse, sur une échelle plus grande que la taille typique des flocons individuels, due au fait que les flocons ne se répartissent pas de façon uniforme sur la surface. Notons en passant qu'il y a des phénomènes de croissance dont l'étude est d'importance pratique bien plus grande : mentionnons notamment la croissance de colonies bactériennes en biologie ou la croissance épitaxiale de cristaux par déposition de jet moléculaire dans la physique de l'état solide [1]. Notre deuxième exemple concerne la coexistence de phases thermodynamiques. Par exemple, imaginons un récipient à une température de 0°C qui contient des glaçons flottant dans l'eau.

Bien qu'à cette température à la fois la glace et l'eau se trouvent dans un état thermodynamique stable, on pourra observer une évolution temporelle de la forme des glaçons (et donc de l'interface eau/glace). Encore une fois, l'évolution apparaît régulière et déterministe à grande échelle, et essentiellement aléatoire si on observe l'interface au microscope. Notons que ce deuxième exemple est de nature très différente : si le premier est un phénomène de croissance (la couche de neige augmente avec le temps), dans le deuxième l'interface eau/glace est a priori dans un état d'équilibre, car l'eau et la glace sont également stables à la température choisie de 0°C . Cette distinction de deux situations physiques très différentes se répercutera sur les modèles mathématiques que nous introduirons dans la suite.

Le but de ce domaine de recherche est de comprendre à la fois l'évolution macroscopique (déterministe) à grande échelle et les fluctuations autour de ce comportement macroscopique. Soulignons que le point de vue du mathématicien qui travaille sur ces problèmes est de faire abstraction des détails microscopiques des systèmes physiques ou biologiques spécifiques et d'essayer d'extraire des comportements « universels ».

Évidemment, il est hors de question d'étudier de tels phénomènes physiques en partant des lois fon-

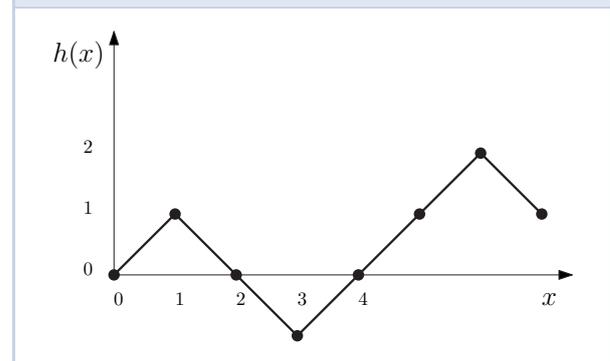
damentales qui régissent le mouvement des molécules d'eau ou des flocons de neige. Suivant l'esprit habituel de la physique statistique, l'idée est plutôt d'introduire des modèles mathématiques fortement simplifiés qui, toutefois, retiennent les aspects qualitatifs essentiels des systèmes réels. Tout d'abord, l'interface dont il est question est habituellement modélisée par une *fonction de hauteur* $h(x)$ à valeurs réelles (ou bien, souvent, à valeurs entières), où la coordonnée spatiale x prend ses valeurs dans un réseau d -dimensionnel, $x \in \mathbb{Z}^d$. Il faut interpréter $h(x)$ comme la coordonnée verticale de l'interface au-dessus du point x . Notons que ce type de description est déjà une grosse simplification, non seulement car l'espace physique n'est pas discret, mais aussi parce que toute interface réaliste présentera des « surplombs » qui empêchent de l'identifier avec le graphe d'une fonction h . À propos de la dimension d , le cas physiquement le plus intuitif est celui de $d = 2$, auquel cas la fonction de hauteur décrit une interface bidimensionnelle dans l'espace tridimensionnel habituel. Il est toutefois intéressant de considérer le cas de dimension quelconque, non seulement par souci de généralité mathématique, mais aussi parce que, par exemple, le cas $d = 1$ est très riche en applications physiques. Par exemple, dans le phénomène de combustion d'une feuille de papier, le front de combustion est une interface unidimensionnelle qui se propage dans un espace bidimensionnel (la feuille).

Une deuxième simplification cruciale est de supposer que l'évolution temporelle de la fonction de hauteur h est un processus stochastique, et plus particulièrement un processus markovien temporellement homogène. L'interface sera donc décrite par une fonction aléatoire $h(x, t)$, avec $t \geq 0$ un paramètre continu qui désigne le temps : la propriété de Markov implique que la probabilité de transition d'une configuration $h_A = \{h_A(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ au temps t_A à une configuration $h_B = \{h_B(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ au temps $t_B > t_A$ dépend uniquement de h_A, h_B et de $t_B - t_A$, et non pas de toute l'histoire du système entre le temps 0 et t_A , ni des valeurs individuelles de t_A, t_B . Conceptuellement, il peut paraître très hasardeux de remplacer les lois déterministes de la physique par des lois d'évolution aléatoires, mais cela correspond exactement à la démarche habituelle de la physique statistique de remplacer les équations hamiltoniennes (déterministes) d'un ensemble de molécules par une description probabiliste. Puisque les interactions « vraies » entre composantes élémentaires (molécules, flocons de neige...) du système physique sont essentiellement locales (i.e. à

courte portée) dans l'espace, on choisira un processus markovien dont les transitions élémentaires sont elles-mêmes locales : par exemple, lors d'une transition élémentaire $h \mapsto h'$, la hauteur à un certain point x passe de la valeur $h(x)$ à la valeur $h'(x) = h(x) + n, n \in \mathbb{Z}$, tandis que les autres valeurs restent inchangées. On dénotera $c(h \rightarrow h') > 0$ le taux de transition infinitésimal, c'est-à-dire que la probabilité de transition entre h et h' en un intervalle de temps infinitésimal $[0, \delta]$ sera donnée par $c(h \rightarrow h')\delta + O(\delta^2)$. Toujours pour respecter la nature locale des interactions physiques, on supposera que le taux de transition dépend seulement de la configuration de h autour du point x , plutôt que de toute la fonction h globalement.

Pour rendre cette discussion plus concrète, nous allons d'abord décrire l'exemple le plus canonique et le mieux étudié d'évolution stochastique d'interface [9] : le processus d'exclusion simple unidimensionnelle. Dans ce modèle, les configurations d'interfaces $h = \{h(x)\}_{x \in \mathbb{Z}}$ admises sont les suivantes : chaque hauteur $h(x)$ prend ses valeurs dans \mathbb{Z} et ses gradients $h(x) - h(x-1)$ prennent seulement les valeurs $+1$ ou -1 . On peut donc visualiser une telle interface comme un chemin unidimensionnel en zigzag dans l'espace bidimensionnel, comme dans la figure 1.

FIGURE 1 – Une portion de profil de hauteur du modèle d'exclusion simple



Décrivons maintenant le processus de Markov associé. Les transitions ont lieu à des instants aléatoires réels, et chacune est une transition élémentaire de l'un des deux type suivants :

- si $h(x-1) = h(x+1) = h(x) + 1$, i.e. si la hauteur a un minimum local en x , alors on peut avoir la transition $h \rightarrow h^{(x,+)}$, où $h^{(x,+)}(y) = h(y)$ pour tout $y \neq x$ tandis que $h^{(x,+)}(x) = h(x) + 2$ (le minimum local en x devient un maximum local);
- inversement, si $h(x-1) = h(x+1) = h(x) - 1$ (maximum local en x) alors on peut avoir la

transition $h \rightarrow h^{(x,-)}$, où l'on note $h^{(x,-)}$ la configuration où la hauteur en x est diminuée de 2, tandis qu'elle est inchangée partout ailleurs.

Il nous reste seulement à spécifier les taux associés à ces deux types de transitions. Étant donné un nombre réel $p \in [0, 1]$, on assignera le taux $c(h \rightarrow h^{(x,+)}):= p$ aux transitions qui font croître l'interface, et le taux $c(h \rightarrow h^{(x,-)}):= 1-p$ à celles qui la font décroître. Le cas particulier $p = 1/2$ est connu sous le nom d'*exclusion simple symétrique* (SSEP en anglais), le cas $p \neq 1/2$ est l'*exclusion simple asymétrique* (ASEP) et le cas particulier $p \in \{0, 1\}$, où seulement les transitions d'un des deux types sont admises, est connu comme *exclusion simple totalement asymétrique* (TASEP).

Une description équivalente du processus d'exclusion simple est la suivante : chaque x a une horloge aléatoire indépendante, qui sonne à des intervalles de temps aléatoires exponentiels de moyenne 1. Si l'horloge en x sonne au temps t , on lance une pièce de monnaie qui donne \wedge avec probabilité p et \vee avec probabilité $1-p$. Si on obtient \wedge et la fonction de hauteur au temps t a un minimum local en x , alors on effectue la transition $h \mapsto h^{(x,+)}$, autrement on ne fait rien ; analogiquement, si on obtient \vee et la fonction de hauteur au temps t a un maximum local en x , alors on effectue la transition $h \mapsto h^{(x,-)}$, autrement on ne fait rien. Remarquons que, puisque les horloges de deux points $x \neq x'$ sont indépendantes, on n'aura jamais (sauf avec probabilité zéro) deux horloges qui sonnent au même instant de temps, et donc chaque transition change la hauteur h à un seul point x .

Comme nous l'avons dit au tout début de cette note, nous nous intéressons au comportement à grande échelle des dynamiques d'interface. Il y a plusieurs façons d'entendre l'expression « comportement à grande échelle ». Pour comprendre ce point, oublions pour un instant la dynamique d'interface et pensons à une question probabiliste beaucoup plus simple : le comportement asymptotique pour N grand de la somme

$$S_N = \sum_{i=1}^N X_i$$

de N variables aléatoires indépendantes et également distribuées X_i que, par simplicité, nous suppo-

serons avoir une variance finie

$$\sigma^2 := \ell(X^2) - (\ell(X))^2 < \infty,$$

où $\ell(f)$ dénote la moyenne d'une variable aléatoire f . On peut d'abord se demander quel est le comportement asymptotique de $(1/N)S_N$, et la réponse bien connue est la *loi des grands nombres*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N}{N} = \ell(X_1),$$

où la convergence de la variable aléatoire S_N/N vers la quantité déterministe $\ell(X_1)$ est valable avec probabilité 1. Ensuite, on peut se demander quelles sont les fluctuations de S_N/N autour de sa limite déterministe : on aura donc le *Théorème central limite*,

$$\sqrt{N} \left(\frac{S_N}{N} - \ell(X_1) \right) \stackrel{N \rightarrow \infty}{\Rightarrow} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ est une variable aléatoire normale (i.e. gaussienne) centrée de variance σ^2 et « \Rightarrow » signifie que la loi de la variable aléatoire à gauche tend vers la loi de la variable aléatoire à droite. Si le théorème central limite décrit les fluctuations typiques ou « normales » de S_N/N à l'échelle $1/\sqrt{N}$, on peut aussi s'intéresser aux déviations atypiques (disons, des déviations d'ordre 1). On aura donc des énoncés de type « grandes déviations » :

$$-\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_N}{N} - \ell(X_1) \right| \geq \delta \right) = I(\delta)$$

pour une certaine fonction $I(\cdot)$ qui dépend de la loi des variables X_i . Ici, $\mathbb{P}(A)$ désigne la probabilité d'un évènement A . Bien que l'évolution d'une interface aléatoire soit quelque chose de bien plus compliqué qu'une somme de variables indépendantes, ces trois types de questions (loi des grands nombres, théorème central limite, grandes déviations) sont très naturelles aussi dans ce contexte.

Dans cette note, pour la dynamique d'interfaces, nous nous concentrerons surtout sur les deux premières questions (« loi des grands nombres » et « fluctuations »). Dans le contexte de la dynamique d'interface, mais plus généralement de la physique statistique hors équilibre, on parlera plutôt de « limite hydrodynamique » que de « loi des grands nombres »¹. La question peut être posée de la façon suivante. Supposons que la condition initiale de la dynamique, c'est à dire la configuration

1. La terminologie de « limite hydrodynamique » provient de la dynamique des fluides : si le mouvement des molécules est régi au niveau microscopique par des équations hamiltoniennes au comportement chaotique et essentiellement aléatoire, à l'échelle du laboratoire on observe l'évolution déterministe d'un nombre fini de paramètres macroscopiques (pression, densité, ...), décrite par des équations aux dérivées partielles.

$h(\cdot, 0) = \{h(x, 0)\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ de hauteur au temps $t = 0$, approche un profil de hauteur limite $\phi_0 : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$. Plus précisément supposons que le profil initial $h(\cdot, 0)$ satisfait, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, à

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon h(\lfloor \epsilon^{-1} u \rfloor, 0) = \phi_0(u). \quad (1)$$

Par exemple, pour le processus d'exclusion simple, étant donnée une fonction ϕ_0 de constante de Lipschitz inférieure à 1, on pourrait choisir $h(x, 0)$ comme étant l'entier le plus proche de

$$\frac{1}{\epsilon} \phi_0(\epsilon x)$$

et ayant la même parité que x (cette dernière condition garantit que $h(x, 0) - h(x - 1, 0) \in \{-1, +1\}$). On dira que la dynamique admet une limite hydrodynamique s'il existe une fonction *déterministe* $\phi = \phi(u, t)$, et un exposant $\gamma \geq 0$ tels que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon h(\lfloor \epsilon^{-1} u \rfloor, \epsilon^{-\gamma} t) = \phi(u, t) \quad (2)$$

pour tout $t \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^d$. Ici, la convergence doit être interprétée comme une convergence en probabilité : pour tout $\delta > 0$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(|\epsilon h(\lfloor \epsilon^{-1} u \rfloor, \epsilon^{-\gamma} t) - \phi(u, t)| \geq \delta) = 0.$$

Comme on peut facilement l'imaginer, il y aura un seul choix pour l'exposant γ qui permette de trouver une limite hydrodynamique bien définie et non triviale. Par exemple, si γ est trop petit (e.g., $\gamma = 0$) on aura que $\phi(x, t) = \phi(x, 0)$ pour tout t . Dans tous les exemples dont il sera question dans cette note, cet exposant vaut soit $\gamma = 1$ soit $\gamma = 2$. Dans le premier cas on dira qu'on a une limite hydrodynamique dans l'échelle eulérienne (ou hyperbolique), tandis que dans le deuxième cas on parlera d'échelle diffusive. En gros, les modèles de croissance d'interface (comme l'exemple de la chute de neige) correspondent à l'échelle eulérienne, tandis que les modèles de dynamique d'interface entre phases thermodynamiques en coexistence (comme l'exemple de l'interface eau/glace à 0°C) correspondent à l'échelle diffusive.

Illustrons ce fait en revenant au cas de l'exclusion simple. Prenons d'abord le cas $p = 1$ (ou plus généralement $p \neq 1/2$). Dans ce cas, la croissance de l'interface a un caractère intrinsèquement irréversible : on permet seulement les transitions où la hauteur augmente. Si on exclut le cas pathologique où la pente ρ macroscopique de l'interface vaut ± 1 , on a une densité positive $r = (1 + \rho)/2$ de points

x avec $h(x) - h(x - 1) = 1$, et une densité positive $r = (1 - \rho)/2$ de points x avec $h(x) - h(x - 1) = -1$. Il y aura donc également une densité positive de points x où $h(\cdot)$ a un maximum local (resp. un minimum local). Puisqu'en un temps d'ordre 1 tout minimum local a une probabilité d'ordre 1 de devenir un maximum local, c'est intuitif qu'après un temps d'ordre t , en moyenne la fonction de hauteur aura augmenté d'une quantité d'ordre t . Il faut donc choisir $\gamma = 1$ pour espérer obtenir une limite hydrodynamique non triviale. La situation est très différente pour l'exclusion symétrique où $p = 1/2$: dans ce cas, puisque les transitions positives et négatives tendent a priori à se compenser (tout comme le glaçon n'a pas de tendance naturelle ni à croître ni à fondre à 0°C) il faut regarder des échelles de temps beaucoup plus longues pour voir une évolution non triviale. Le fait que $\gamma = 2$ soit le bon choix demande un peu plus de réflexion et nous renvoyons le lecteur à la discussion en section 2.

Puisque nous avons mentionné le mot « irréversible », il convient de faire l'observation suivante. Supposons que le profil de hauteur $\{h(x)\}_{x \in \mathbb{Z}}$ au temps zéro soit aléatoire et notamment que chaque gradient $h(x) - h(x - 1)$ soit indépendant et prenne la valeur $+1$ avec probabilité r et la valeur -1 avec probabilité $1 - r$, pour un certain $r \in (0, 1)$. Il est facile de vérifier que, tant pour l'exclusion simple symétrique que pour l'asymétrique, une telle distribution est invariante pour la dynamique : la loi des gradients $h(x, t) - h(x - 1, t)$ sera exactement la même au temps $t > 0$. Il s'agit donc d'un état stationnaire (ou *mesure invariante* : nous utiliserons ces deux termes comme synonymes). Ce qui distingue le cas symétrique $p = 1/2$ du cas asymétrique n'est donc pas la mesure invariante, mais la réversibilité. En effet, supposons qu'au temps initial (et donc pour tout temps) les gradients soient distribués selon la mesure stationnaire et comparons la loi du processus des gradients, $\{h(x, t) - h(x - 1, t)\}_{x \in \mathbb{Z}, t \geq 0}$ et celle du processus après renversement de temps, $\{h(x, -t) - h(x - 1, -t)\}_{x \in \mathbb{Z}, t \geq 0}$. Or, il se trouve que ces deux processus ont la même loi (i.e. le processus est réversible) si et seulement $p = 1/2$.

Il est naturel de se demander quel type d'évolution va suivre le profil « hydrodynamique » $\phi(u, t)$. Si, comme pour l'exclusion simple, nous sommes partis d'une évolution markovienne dont les taux de transition dépendent seulement des gradients locaux de la configuration h , on peut s'attendre à ce que $\partial_t \phi(u, t)$ dépende seulement des dérivées spatiales de $\phi(u, t)$ au point u . Autrement dit, on

s'attend à ce que ϕ suive une EDP. Plus précisément, il se trouve que :

- dans le cas $\gamma = 2$ l'EDP hydrodynamique sera de type parabolique :

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(u, t) \\ = \mu(\nabla \phi(u, t)) \sum_{i,j=1}^d \sigma_{i,j}(\nabla \phi(u, t)) \partial_{u_i u_j}^2 \phi(u, t) \end{aligned} \quad (3)$$

avec $\mu(\nabla \phi) > 0$ une fonction qui prend le nom de « mobilité » et $(\sigma_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$ une matrice symétrique et définie positive dont les éléments sont les dérivées secondes de la tension superficielle σ du modèle. Pour le lecteur souhaitant comprendre la signification physique de μ et de σ , nous renvoyons à la discussion très instructive de [14];

- dans le cas des modèles de croissance où $\gamma = 1$, l'EDP sera de type « Hamilton-Jacobi »

$$\partial_t \phi(u, t) = v(\nabla \phi(u, t)). \quad (4)$$

La fonction $v(\cdot)$, en général non linéaire, décrit la vitesse de croissance de l'interface comme fonction de la pente locale $\nabla \phi$.

Remarquons que, comme conséquence de (2), l'EDP hydrodynamique doit être invariante par reparamétrisation $\phi(u, t) \mapsto c\phi(c^{-1}u, c^{-\gamma}t)$ pour tout $c > 0$. En effet, les deux équations (3) et (4) satisfont à cette propriété.

Reprenons notre analogie avec la somme de variables aléatoires indépendantes : après la loi des grands nombres, c'est le tour des fluctuations. Pour des modèles diffusifs tels l'exclusion simple symétrique ou ses analogues en dimension $d \geq 1$, définissons le « champ de fluctuations de hauteur » comme

$$\begin{aligned} \hat{h}^{(\epsilon)}(u, t) \\ := \epsilon^{1-d/2} \left\{ h([\epsilon^{-1}u], \epsilon^{-2}t) - \ell h([\epsilon^{-1}u], \epsilon^{-2}t) \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Bien que $\hat{h}^{(\epsilon)}$ ne soit pas une somme de variables indépendantes, son aléa découle de l'effet cumulé de beaucoup d'évènements aléatoires (les transitions de la dynamique dans un intervalle de temps d'ordre ϵ^{-2}); il est donc naturel de s'attendre à un théorème central limite, c'est-à-dire que $\hat{h}^{(\epsilon)}(u, t)$ tende vers un processus gaussien pour $\epsilon \rightarrow 0$. Plus précisément, supposons par simplicité que la condition initiale soit telle que le profil ϕ_0 (cf. (1)) est affine dans l'espace : $\phi_0(u) = \rho \cdot u$, $\rho \in \mathbb{R}^d$, de telle

façon que la solution de l'équation hydrodynamique (3) est simplement $\phi(u, t) = \phi_0(u) = \rho \cdot u$. Alors, sous des hypothèses assez générales, on s'attend [15, 14] à ce que le champ de fluctuations (5) converge, au sens des distributions, vers la solution $\hat{\phi}$ de l'EDPS (EDP stochastique) linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\phi}(u, t) = \mu(\nabla \phi) \sum_{i,j=1}^d \sigma_{i,j}(\nabla \phi) \partial_{u_i u_j}^2 \hat{\phi}(u, t) \\ + \sqrt{2\mu(\nabla \phi)} \dot{W}(u, t). \end{aligned} \quad (6)$$

Cette équation nécessite des explications. Tout d'abord, $\dot{W}(u, t)$ dénote le « bruit blanc spatio-temporel », c'est-à-dire une fonction aléatoire (plus précisément, une distribution aléatoire) gaussienne indexée par l'espace u et le temps t , de moyenne nulle ($\ell \dot{W}(u, t) = 0$) et de covariance

$$\ell [\dot{W}(u, t) \dot{W}(v, s)] = \delta(t - s) \delta(u - v).$$

Notons aussi que l'équation est linéaire en $\hat{\phi}$, car $\nabla \phi = \rho$ est une constante. Pour cette raison la solution $\hat{\phi}(u, t)$ est un processus gaussien. L'origine de l'équation (6) est assez facile à comprendre intuitivement : le premier terme, proportionnel aux dérivées secondes, s'obtient en écrivant la fonction de hauteur h comme sa limite hydrodynamique $\phi(u, t)$ plus les fluctuations \hat{h} , et en linéarisant l'EDP hydrodynamique (3) autour de $\phi(\cdot, \cdot)$. Quant au terme de bruit, pour le choix du facteur $\sqrt{\dots}$, qui garantit que le processus (6) ait la correcte mesure stationnaire, nous renvoyons à la discussion en [15, Sec. II.3.5] dans un contexte similaire.

Le lecteur pourrait s'attendre à ce que pour les modèles de croissance (tel le TASEP par exemple), le champ de fluctuations tende lui aussi vers la solution d'une certaine EDPS. Ce n'est pourtant pas le cas en général, et en effet la compréhension mathématique (et même heuristique) de cette question est encore très incomplète. Nous en dirons un petit peu plus en section 3.

Le reste de cette note est organisé de la façon suivante. Dans la section 2 nous discuterons de dynamiques d'interface réversibles, qui correspondent à $\gamma = 2$ et qui généralisent notre exemple élémentaire de l'exclusion simple symétrique. Dans la section 3 il est question de modèles de croissance. En particulier, nous nous concentrerons sur le cas $d = 2$, où il y a une relation non triviale entre les fluctuations de l'interface et les propriétés de

convexité de la fonction $v : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ qui apparaît dans l'EDP (4).

Pour terminer cette introduction, il est important de faire deux remarques.

- Comme c'est souvent le cas en physique statistique, sur la base de l'intuition physique on s'attend à ce que certains phénomènes soient qualitativement « universels », i.e. qu'ils se produisent pour une grande classe de modèles, indépendamment de leurs détails. Dans notre contexte, c'est le cas par exemple de la convergence vers des EDP hydrodynamiques de type (3)-(4), ou de la convergence des fluctuations vers l'EDPS (6) dans le cas diffusif. Toutefois, c'est seulement dans des cas très spécifiques que l'on peut obtenir des preuves mathématiques. Par exemple, pour ce qui est de la convergence du champ de fluctuations vers la solution de (6) pour des dynamiques d'interface en dimension $d > 1$, la référence [7] est quasiment le seul résultat connu.
- La plupart des résultats mathématiques connus dans ce domaine sont spécifiques au cas de la dimension spatiale $d = 1$. Les résultats en dimension $d \geq 2$ sont beaucoup plus rares et nous allons mentionner quelques-uns des plus récents.

2. Dynamiques réversibles d'interface

Jusqu'à assez récemment, le seul exemple de dynamique réversible d'interface en dimension $d > 1$ pour lequel une limite hydrodynamique du type (2)-(3) était prouvée mathématiquement était le modèle de type « Ginzburg-Landau » de [6]. Il s'agit d'un modèle de nature très différente de l'exclusion simple, puisque les variables de hauteur prennent des valeurs réelles continues et leur évolution ne procède pas par sauts discrets, mais suit une dynamique de type « Langevin ». Cela signifie que chaque hauteur $h(x)$ est soumise à un bruit brownien indépendant, avec un drift qui dépend des différences $h(x) - h(y)$ pour tout y voisin de x et qui agit comme une force de rappel qui tend à aplatir l'interface en pénalisant les gradients importants. L'EDP limite que l'on obtient est de type très spécial, car le coefficient de mobilité $\mu(\cdot)$ dans (3) se trouve être constant. Il est naturel de se demander s'il existe d'autres exemples de dynamique non triviale

en dimension $d > 1$ où la preuve mathématique de (2)-(3) peut être obtenue, et notamment si on peut trouver des exemples, si possibles plus proches en esprit de l'exclusion simple, avec mobilité $\mu(\cdot)$ non constante.

Pour cela, reprenons pour un instant notre exemple d'exclusion simple symétrique et supposons que l'interface soit définie non pas sur tout \mathbb{Z} mais sur un tore unidimensionnel de taille $1/\epsilon$, qui est supposé être un entier pair. En d'autres termes, la fonction de hauteur est $\{h(x)\}_{x=0, \dots, 1/\epsilon}$ avec la contrainte de périodicité $h(0) \equiv h(1/\epsilon)$ et, comme avant, $h(x) - h(x-1) = \pm 1$. Étant donnée la fonction de hauteur $h(\cdot, t)$ à un instant t , calculons sa valeur moyenne au temps $t + \delta$, avec δ infinitésimal. Si l'interface a un minimum local (respectivement un maximum local) au point x , i.e. si $\Delta h(x, t) = +2$ (resp. -2) alors la hauteur en x change de $+2$ (resp. de -2) avec probabilité $p \times (\delta + O(\delta^2)) = \delta/2 + O(\delta^2)$. Il est facile d'en déduire que

$$\frac{d}{ds} \ell [h(x, t+s) | h(\cdot, t)] \Big|_{s=0^+} = \frac{1}{2} \Delta h(x, t), \quad (7)$$

où $\ell [\dots | h(\cdot, t)]$ désigne l'espérance conditionnée à la configuration de hauteur au temps t . On a donc que la dérivée temporelle de la hauteur est proportionnelle au laplacien de la hauteur elle-même. Or, si nous définissons $\tilde{h}(u, t) := \epsilon h(\epsilon^{-1}u, t)$ avec $u = 0, \epsilon, 2\epsilon, \dots, 1$, le même calcul donne

$$\frac{d}{ds} \ell [\tilde{h}(u, t+s) | \tilde{h}(\cdot, t)] \Big|_{s=0^+} = \frac{\epsilon^2}{2} \Delta \tilde{h}(u, t), \quad (8)$$

À partir de là, il est immédiat de se convaincre que la bonne échelle temporelle est diffusive ($\gamma = 2$) et que l'équation hydrodynamique (3) de l'exclusion simple symétrique sera simplement l'équation de la chaleur :

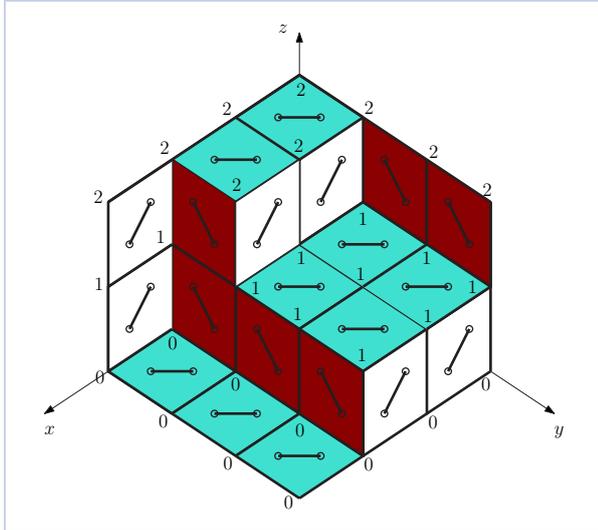
$$\partial_t \phi(u, t) = \frac{1}{2} \partial_u^2 \phi(u, t).$$

En effet, il n'est pas difficile de montrer une convergence dans le sens (2), voir e.g. [9, Ch. 4]. L'exemple de l'exclusion simple symétrique est instructif mais très spécial : la dérivée temporelle de la hauteur est donnée par un opérateur linéaire (le laplacien) appliqué à la hauteur elle-même, comme le montre (7).

Ce type de miracle ne se produit pas en général. Essayons en effet de généraliser le modèle d'exclusion simple symétrique à la dimension $d = 2$. Si le profil de hauteur du cas unidimensionnel est un

chemin en zigzag dans le plan, l'analogie bidimensionnel le plus naturel est une interface discrète comme dans la figure 2.

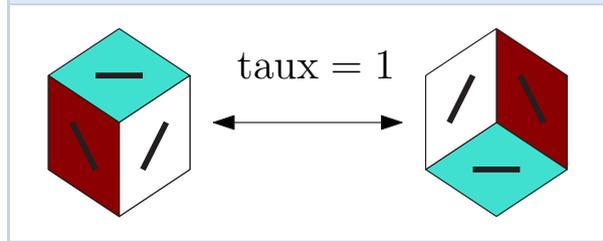
FIGURE 2 – Une interface bidimensionnelle monotone : la fonction de hauteur est (faiblement) décroissante en direction x et y . Chaque ligne de niveau est un chemin en zigzag comme en figure 1. Les différentes lignes de niveau ne s'intersectent pas.



Il y a plusieurs façons équivalentes d'interpréter cette image. On peut la voir comme un pavage du plan avec trois types de tuiles en forme de losange, ou bien comme un empilement monotone de cubes (« monotone » au sens où la hauteur d'une colonne de cubes dont la base a pour coordonnées (x, y) est décroissante par rapport à x et à y ; il s'agit donc d'une *partition plane*), ou bien encore comme un appariement parfait du graphe hexagonal (les petits segments désignent les paires de sommets qui sont appariés). Notons que toute section de cette interface par un plan perpendiculaire à l'un des trois axes donne un chemin en zigzag, donc un profil de hauteur de l'exclusion simple unidimensionnelle. Toutefois, ces sections unidimensionnelles satisfont à des contraintes non triviales de non-intersection et ne sont donc pas indépendantes.

Une dynamique markovienne qui généralise de façon naturelle au cas bidimensionnel l'exclusion simple symétrique unidimensionnelle est celle où les transitions élémentaires possibles correspondent à ajouter ou enlever un cube élémentaire, avec taux de transition 1 : voir figure 3.

FIGURE 3 – Les transitions élémentaires de la dynamique correspondent à ajouter ou enlever un cube unitaire.



Malheureusement, les choses sont loin d'être aussi faciles que pour l'exclusion simple unidimensionnelle. Essayons en effet de répéter le même calcul que (7). Pour cela, pour tout sommet x d'un losange, notons $h(x) \in \mathbb{Z}$ la hauteur du sommet du cube correspondant par rapport au plan horizontal, comme dans la figure 2. On aura donc

$$\frac{d}{ds} \ell [h(x, t+s) | h(\cdot, t)] \Big|_{s=0^+} = A_x - B_x,$$

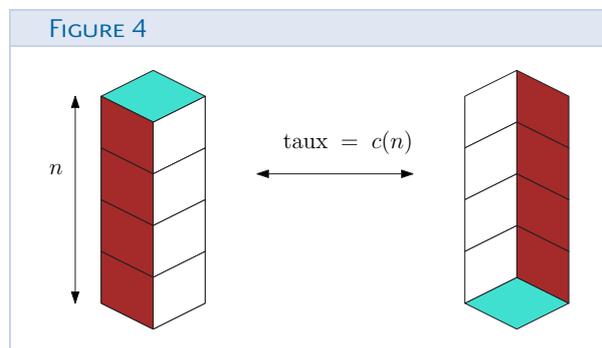
où A_x (resp. B_x) vaut 1 si la configuration autour de x au temps t est comme dans le dessin de droite (resp. gauche) de la figure 3, et 0 sinon. Il y a deux différences importantes par rapport à l'Eq. (7) : tout d'abord, on n'a pas obtenu une équation fermée pour la fonction de hauteur ; deuxièmement, le résultat n'est pas donné par un opérateur discret du deuxième ordre appliqué à la fonction de hauteur, donc ce n'est pas évident a priori que l'équation hydrodynamique (si elle existe) soit de type parabolique.

En effet, c'est un problème ouvert (probablement très difficile) de montrer que cette dynamique admet une limite hydrodynamique : même du point de vue heuristique, on ne sait pas deviner une expression exacte pour la mobilité μ qui devrait apparaître dans (3). On peut être moins ambitieux et espérer montrer au moins que la bonne échelle temporelle est la diffusive. Plus précisément, considérons la même dynamique de pavages non pas dans le plan tout entier, mais dans un domaine bidimensionnel de taille $1/\epsilon$ (e.g. un tore bidimensionnel). La seule mesure de probabilité invariante (et réversible) de cette dynamique est la mesure uniforme, qui donne le même poids à tout pavage admissible du domaine. Étant donnée une petite constante δ (disons $\delta = 1/100$), on définit le *temps de mélange* T_{mix} de la dynamique comme la plus petite valeur de t telle que, pour toute condition initiale, la loi du processus au temps t est à distance (en variation totale) au plus δ de la mesure invariante. Il est naturel de se demander comment T_{mix} croît en fonction

de la taille $1/\epsilon$ du système. Si l'on interprète la dynamique de Markov comme un algorithme probabiliste (de type « Markov Chain Monte Carlo ») qui prend en entrée un pavage η_0 à l'étape zéro et sort le pavage η_T au temps T , avoir une borne supérieure $T_{mix} \leq N$ implique de savoir que l'algorithme produit, après un temps de simulation N , un pavage de façon presque parfaitement uniforme (à δ près). Ce genre de questions de vitesse de convergence d'algorithmes probabilistes est très étudié en informatique théorique. Pour revenir à notre dynamique d'interface bidimensionnelle, une conjecture importante dans ce domaine est que T_{mix} est d'ordre $\epsilon^{-2+o(1)}$. Sous certaines hypothèses sur la forme du domaine, cette conjecture a été démontrée récemment [4, 11]. La preuve utilise des propriétés à grande échelle des pavages uniformes de grands domaines du plan, notamment le fait que leurs fluctuations de hauteur sont seulement logarithmiques par rapport à la taille du domaine. L'histoire est toutefois encore loin d'être conclue :

Problème ouvert. Pour la dynamique restreinte à un domaine hexagonal de côté $1/\epsilon$ (comme en figure 2 où $1/\epsilon = 3$) montrer que $T_{mix} = O(\epsilon^{-2+o(1)})$ pour $\epsilon \rightarrow 0$. Actuellement, la meilleure borne supérieure connue est d'ordre $\epsilon^{-4+o(1)}$.

Revenons au problème de la limite hydrodynamique pour la dynamique d'interfaces bidimensionnelles monotones. Puisque cette question est trop ardue pour la dynamique dont les mouvements élémentaires sont ceux de la figure 3, on peut se demander si une modification des règles de transition du processus de Markov peut simplifier l'affaire. Par exemple, on pourrait décider de permettre plus généralement des transitions où l'on ajoute/enlève n cubes à la fois, avec taux de transition $c(n)$. Voir figure 4.



Dans le travail récent [12], nous nous sommes aperçus que, si on choisit $c(n)$ comme étant inversement proportionnel à n , la dérivée temporelle de

la moyenne de la hauteur $h(x)$ est donnée (moyennant certaines approximations heuristiques) par un opérateur discret du deuxième ordre qui agit sur $h(\cdot)$, ce qui nous a donné l'espoir d'obtenir une limite hydrodynamique dans l'échelle de temps diffusive. Dans un article ultérieur [10], nous avons effectivement réussi à démontrer rigoureusement que pour cette dynamique on a une convergence comme en (2), où ϕ satisfait à une EDP parabolique non linéaire de type (3) de forme complètement explicite et, notamment, avec un coefficient de mobilité $\mu(\cdot)$ non linéaire. Une étude de l'EDP hydrodynamique et de la forme spécifique de la mobilité $\mu(\cdot)$ montre que l'équation a des propriétés analytiques remarquables, notamment elle contracte les distances L^1 et L^2 entre ses solutions (ce qui est vrai aussi pour l'équation de la chaleur, mais non pas pour toute équation de la forme (3)). Nous renvoyons le lecteur à [12] pour une discussion du lien entre ces propriétés analytiques et le fait que, pour notre choix particulier de taux de transition $c(n) \propto 1/n$, le processus stochastique

$$t \mapsto V(t) := \sum_x (h^{(1)}(x, t) - h^{(2)}(x, t))$$

a la propriété d'être décroissant en moyenne (plus précisément, il s'agit d'une sur-martingale). Ici, $h^{(j)}(\cdot, t)$, $j = 1, 2$ désignent deux profils de hauteur suivant la dynamique markovienne avec deux conditions initiales différentes $h^{(j)}(\cdot, 0)$, pour lesquelles on suppose que $h^{(1)}(\cdot, 0) \geq h^{(2)}(\cdot, 0)$, tandis que $V(t)$ désigne leur différence de volume.

3. Modèles de croissance d'interface

L'étude mathématique des modèles de croissance d'interface unidimensionnels, tel le TASEP et ses généralisations, est extrêmement active depuis plusieurs années. Un aspect remarquable est l'émergence de distributions universelles *non-gaussiennes* pour les fluctuations de hauteur $h(x, t) - h(x, 0)$ dans la limite de temps long. En outre, l'évolution asymptotique du champ de fluctuations n'est pas régie par une EDPs mais par un processus stochastique (« point fixe KPZ » [13]) qui est encore mal compris. Nous n'allons pas développer ce thème, ni ses liens avec l'équation de Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) unidimensionnelle (une EDPs non-linéaire hautement singulière), ou avec la statistique des valeurs propres des grandes matrices aléatoires, entre autres car ces sujets ont

déjà été l'objet de plusieurs articles de revue récents, e.g. [5].

Nous parlerons plutôt de modèles de croissance en dimension $d = 2$, un domaine beaucoup moins exploré et connu, où un phénomène nouveau apparaît. Tout d'abord, quelques généralités. Étant donné un modèle markovien de croissance, tel le TASEP par exemple, il y a des quantités très naturelles qui y sont associées (nous soulignons toutefois qu'en général c'est un défi mathématique important de démontrer que ces quantités sont bien définies). Supposons que la condition initiale de la dynamique soit un profil $h(x)$ déterministe affine de pente $\rho \in \mathbb{R}^d$, i.e. $h(x) = x \cdot \rho$ (éventuellement il faudra prendre la partie entière si la fonction de hauteur est discrète). Il est intuitif (mais difficile à montrer dans des exemples concrets!) que :

- la loi des gradients $\{h(x, t) - h(x', t)\}$, avec $x \in \mathbb{Z}^d$ et x' qui prend ses valeurs parmi les $2d$ voisins de x , tend pour $t \rightarrow \infty$ vers une loi limite π_ρ , stationnaire et invariante par translations;
- il y a une vitesse de croissance limite $v = v(\rho)$, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (h(x, t) - h(x, 0)) = v(\rho)$$

et la fonction $v(\cdot)$ sera la même que dans l'EDP hydrodynamique (4);

- les fluctuations typiques de $h(x, t) - h(x, 0)$ (mesurées par exemple par leur écart-type) se comportent pour t grand comme t^β , avec $\beta \in \mathbb{R}$ qui prend le nom d'*exposant de croissance*;
- les fluctuations typiques de $h(x, t) - h(y, t)$ pour $t \rightarrow \infty$ et $|x - y|$ grand se comportent comme $|x - y|^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ qui prend le nom d'*exposant de rugosité* car plus cet exposant est grand, et plus le profil de hauteur asymptotique a des fluctuations importantes par rapport à un profil affine.

Dans le cas particulier de la dimension $d = 2$ on a la conjecture suivante, qui lie les propriétés de convexité de $v(\cdot)$ aux exposants α, β :

Conjecture 1. Soient λ_1, λ_2 les valeurs propres de la matrice hessienne $D^2 v$ de $v(\cdot)$. Si le produit $\lambda_1 \lambda_2$ est négatif ou nul (donc si $\det(D^2 v) \leq 0$), alors $\alpha = \beta = 0$ et la croissance des fluctuations pour t ou $|x - y|$ qui tendent à l'infini est seulement logarithmique. Si par contre $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, alors α et β sont des exposants strictement positifs et universels (i.e. indépendants des valeurs particulières de λ_i).

Notons que les λ_i sont des fonctions de la pente ρ et donc le signe de $\det(D^2 v)$ (et donc les valeurs des exposants critiques) pourrait en principe dépendre de ρ .

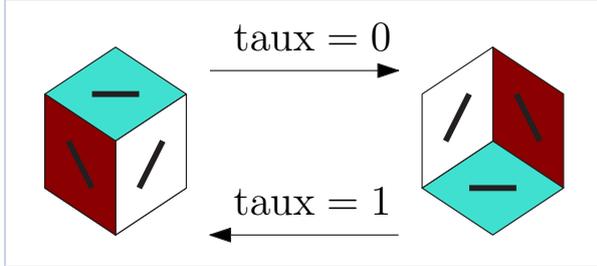
La conjecture 1 est un énoncé d'universalité assez typique en physique statistique : c'est un fait assez commun que la classe de modèles microscopiques qui décrivent un certain phénomène macroscopique (ici, le phénomène de croissance) se répartissent en un petit nombre (ici, deux) de « classes d'universalité ». Les modèles dans la même classe sont caractérisés par les mêmes « exposants critiques » (ici, α et β) et la classe d'appartenance est déterminée par certaines symétries qualitatives (ici, le signe de $\lambda_1 \lambda_2$, donc les propriétés de convexité de $v(\cdot)$). Un petit point de nomenclature : on dira que

- un modèle de croissance pour lequel $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ appartient à la *classe d'universalité KPZ*;
- un modèle de croissance pour lequel $\lambda_1 \lambda_2 \leq 0$ appartient à la *classe d'universalité KPZ Anisotrope (ou AKPZ)*.

La conjecture ci-dessus, qui peut paraître arbitraire à première vue, repose sur des calculs non rigoureux de physiciens [1] et elle est confirmée de façon convaincante par des simulations numériques de plusieurs modèles de croissance; nous renvoyons le lecteur à [16] pour une discussion et des références. Dans le reste de cette section, notre but est de donner un exemple de modèles pour chacune des deux classes d'universalité et de discuter un ou deux résultats mathématiques récents qui jettent un peu de lumière sur la conjecture.

Pour rendre la discussion plus concrète, discutons deux modèles de croissance bidimensionnels spécifiques. Pour faire plus facilement le lien avec la discussion de la section précédente, supposons que les profils de hauteurs admis pour notre interface soient à nouveau des fonctions discrètes monotones correspondant à des pavages du plan par losanges, comme dans la figure 2. Dans la section 2 notre candidat le plus naturel pour une dynamique réversible pour cette interface était le processus markovien dont les transitions élémentaires sont celles de la figure 3, avec taux symétriques. En revanche, le candidat naturel pour un processus de croissance consiste à permettre un seul de ces deux types de transition, par exemple celle qui ajoute un cube élémentaire, voir figure 5.

FIGURE 5 – Si on permet uniquement les transitions qui ajoutent un cube, on obtient un modèle de croissance qui appartient à la classe d'universalité KPZ



Ce modèle de croissance est attractif de plusieurs points de vue :

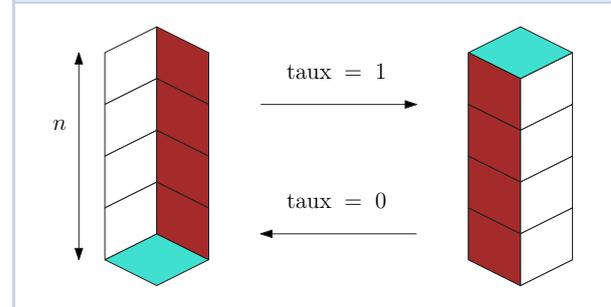
- il est très facile à définir, à visualiser et à simuler numériquement ;
- il n'est pas difficile de montrer, par un argument de sous-additivité, que la vitesse limite $v(\cdot)$ existe, est concave, et que le profil de hauteur satisfait à une limite hydrodynamique comme en (2) à l'échelle eulérienne $\gamma = 1$, où l'EDP limite est donnée par (4).

Deux remarques : la concavité de $v(\cdot)$ implique que sa matrice hessienne sera définie négative et (moyennant l'hypothèse que ses valeurs propres sont strictement négatives, ce qui n'a pas été montré rigoureusement car $v(\cdot)$ n'est pas connue explicitement) on a donc un candidat pour la classe d'universalité KPZ. Deuxièmement, il est bien connu que des équations de Hamilton-Jacobi non linéaires du type (4) développent des singularités en temps fini ; toutefois, quand $v(\cdot)$ est concave, une façon naturelle d'obtenir une solution (faible) définie globalement en temps passe par la formule variationnelle de Hopf-Lax. En effet, l'argument de sous-additivité mentionné ci-dessus donne la convergence du profil de hauteur précisément vers cette solution ! Malheureusement, l'étude mathématique de ce processus de croissance s'arrête là : on n'a aucune idée de quels sont les états stationnaires π_ρ invariants par translations, ni aucun résultat mathématique sur les exposants critiques α, β (bien qu'ils soient connus avec grande précision sur la base de simulations numériques!), ni une expression explicite pour $v(\cdot)$. En effet, nous ne connaissons *aucun résultat mathématique* sur les états stationnaires ni sur les exposants critiques pour *aucun* modèle de croissance bidimensionnel de la classe d'universalité KPZ.

Tout comme pour le cas de dynamiques réversibles, on peut se demander si les choses changent

qualitativement si on modifie un peu les règles de transition du processus de Markov. Une possibilité est de généraliser le processus de croissance en permettant, lors de chaque transition, de rajouter $n \geq 1$ cubes à la fois, comme dans la figure 6.

FIGURE 6 – Dans le modèle de croissance étudié en [2] on permet des transitions qui rajoutent n cubes à la fois et le taux de transition ne dépend pas de n .



À noter que le taux de transition est choisi ici indépendant de la valeur de n . Ce processus de croissance a été introduit en [2] et, de façon assez surprenante, il se trouve que (voir [16] pour les références bibliographiques précises) :

- (i) la vitesse $v(\cdot)$ peut être calculée explicitement et sa hessienne a deux valeurs propres de signe opposé ;
- (ii) les exposants critiques α et β valent zéro ;
- (iii) les états stationnaires π_ρ peuvent être déterminés explicitement ;
- (iv) sous certaines restrictions sur le profil de hauteur initial, on peut montrer la convergence (au sens de (2), avec $\gamma = 1$) vers la solution de viscosité de l'EDP (4). (La solution de viscosité est une solution faible qui se réduit à la solution de Hopf-Lax dans le cas où $v(\cdot)$ est concave.)

Ce modèle de croissance est donc un représentant de la classe d'universalité KPZ Anisotrope. Si le lecteur est confus du fait qu'un détail apparemment mineur du processus de croissance (la possibilité de rajouter un seul cube à la fois ou bien plusieurs) puisse changer les propriétés qualitatives du comportement à grande échelle, nous pouvons le rassurer sur le fait que cela n'a rien d'intuitif même pour les experts. En effet, il n'est pas facile en général de deviner la classe d'universalité d'un modèle de croissance a priori, juste en partant de sa définition. Il est par contre important de mentionner que le modèle « anisotrope » que nous venons de discuter

n'est pas un exemple isolé dans la littérature. En effet, il y a toute une classe de modèles de croissance [2] qui peuvent être formulés en termes de processus de Schur, un objet combinatoire introduit par Okounkov et Reshetikhin en lien avec les partitions planes. Le modèle spécifique que nous avons décrit ci-dessus est un cas particulier de cette classe, et les résultats (i)-(iv) ont été démontrés rigoureusement pour plusieurs autres.

Sans vouloir entrer dans les détails techniques, il convient de souligner ici qu'une particularité des modèles de croissance de [2] (tel celui de la figure 6) qui les rend traitables est que leurs mesures stationnaires π_ρ ont la propriété déterminantale suivante. Étant donné n points du plan x_1, \dots, x_n et n couleurs c_1, \dots, c_n , où chaque c_i est une des trois couleurs des tuiles d'un pavage par losanges, soit $A = A(x_1, c_1; \dots; x_n, c_n)$ l'évènement « il y a un losange de la couleur c_i au point x_i , pour tout $i \leq n$ ». Alors, la probabilité de A est donnée par le déterminant d'une matrice $n \times n$, dont les éléments sont des coefficients de Fourier d'une certaine fonction explicite, définie sur le tore bidimensionnel $[0, 1]^2$. Cette propriété déterminantale remarquable s'étend aussi aux corrélations spatio-temporelles dans le sens où, sous certaines restrictions, la probabilité d'évènements du type : « il y a un losange de couleur c_i au point x_i et au temps t_i pour tout $i \leq n$ » est elle aussi donnée par un déterminant.

En conclusion, on peut dire que la compréhension mathématique des modèles de croissance de la classe KPZ Anisotrope est beaucoup plus satisfaisante que celle des modèles de la classe KPZ tout court. Il y a toutefois deux aspects qui sont restés assez mystérieux jusqu'à très récemment.

1. Premièrement, pour tous les modèles de la classe AKPZ pour lesquels une étude rigoureuse est possible, la preuve que $\lambda_1 \lambda_2 \leq 0$ passe par un calcul explicite et très peu éclairant des dérivées secondes de $v(\cdot)$, qui doit être fait au cas par cas, et qui repose sur la formule explicite de $v(\cdot)$. Pourtant, selon la conjecture 1 formulée ci-dessus, la négativité de ce produit devrait être liée à des propriétés qualitatives du modèle.
2. En plus, il se trouve souvent que, bien que la fonction $v(\rho)$ ait une expression très compliquée en termes de la pente ρ , elle peut être réécrite comme une fonction harmonique très simple en termes d'une variable complexe $z(\rho)$ naturelle, introduite par Kenyon et Okounkov

[8] dans le contexte des modèles de dimères.

Dans un travail très récent [3] nous avons fait un peu de lumière sur ces deux points et nous avons compris que, pour tous les modèles de croissance de la classe KPZ Anisotrope connus jusqu'ici, le fait que $\lambda_1 \lambda_2 \leq 0$ et la propriété d'harmonicité de $v(\cdot)$ ont une origine géométrique assez simple. Nous donnons ici les étapes principales de notre raisonnement.

- (1) Tout d'abord, à ces modèles de croissance est associée de façon naturelle une famille continue \mathcal{F} de mesures de probabilités π (cette famille inclut les états stationnaires π_ρ mais aussi des mesures qui ne sont pas invariantes par translation). En général, $\pi \in \mathcal{F}$ n'est pas un état stationnaire du processus de Markov. Toutefois, si la condition initiale est distribuée selon $\pi^{(0)} \in \mathcal{F}$, alors à tout instant $t > 0$ la loi $\pi^{(t)}$ de l'interface appartient encore à \mathcal{F} .
- (2) La deuxième observation est qu'un profil de hauteur typique $\{h(x)\}_{x \in \mathbb{Z}^2}$ tiré au hasard selon $\pi \in \mathcal{F}$ est proche à grande échelle d'un minimiseur ϕ_0 d'une fonctionnelle du type

$$\int_{\mathbb{R}^2} \sigma(\nabla \phi) dx \quad (9)$$

où $\sigma(\cdot)$ est une fonction convexe (tension superficielle). Plus explicitement, le fait que $h(\cdot)$ et $\phi_0(\cdot)$ soient « proches à grande échelle » signifie que, avec probabilité 1,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon h(\lfloor \varepsilon^{-1} x \rfloor) = \phi_0(x).$$

Les minimiseurs ϕ_0 de (9) satisfont aux équations de Euler-Lagrange associées :

$$\operatorname{div}(\nabla \sigma \circ \nabla \phi_0(x)) = 0,$$

où div dénote la divergence par rapport aux variables spatiales $x \in \mathbb{R}^2$, tandis que $\nabla \sigma \circ \nabla \phi_0$ dénote le gradient de $\sigma(\rho)$ par rapport à son argument ρ , calculé pour $\rho = \nabla \phi_0(x)$.

- (3) De ces deux faits il découle que, si la donnée initiale ϕ_0 de l'EDP hydrodynamique (4) est une solution de l'équation de Euler-Lagrange, ce sera le cas aussi pour la solution $\phi(\cdot, t)$ à tout temps $t > 0$.
- (4) Ce lien entre les équations de Euler-Lagrange (qui font intervenir σ) et l'équation hydrodynamique (qui fait intervenir v) implique une relation non linéaire entre la hessienne $D^2 v$ de $v(\cdot)$ et la hessienne (définie positive) de σ . À son tour, cette relation implique que le déterminant de $D^2 v$ n'est pas strictement positif

(ce dernier passage demande quelques lignes de calcul que nous ne développons pas ici).

Il s'agit donc d'un premier pas rigoureux, reposant non plus sur des calculs explicites pour un modèle spécifique mais sur des arguments analytiques généraux, qui jette un peu de lumière sur la conjec-

ture 1. La route vers sa justification complète reste toutefois très longue, ne serait-ce qu'en raison du fait qu'on ne sait presque rien sur les modèles de la classe KPZ, où $v(\cdot)$ est strictement convexe ou strictement concave, et sur leurs exposants critiques α, β supposés être universels.

Références

- [1] A. BARABÁSI et H. STANLEY. *Fractal Concepts in Surface Growth*. Cambridge : Cambridge University Press, 1995.
- [2] A. BORODIN et P. FERRARI. « Anisotropic Growth of Random Surfaces in $2 + 1$ Dimensions ». *Comm. Math. Phys.* **325** (2014), p. 603-684.
- [3] A. BORODIN et F. L. TONINELLI. « Two-dimensional anisotropic KPZ growth and limit shapes ». *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* **2018**, n° 8 (2018), p. 083205.
- [4] P. CAPUTO, F. MARTINELLI et F. L. TONINELLI. « Mixing times of monotone surfaces and SOS interfaces: a mean curvature approach ». *Communications in Mathematical Physics* **311**, n° 1 (2012), p. 157-189.
- [5] I. CORWIN. « The Kardar-Parisi-Zhang equation and universality class ». *Random Matrices: Theory Appl.* **01** (2012), p. 1130001.
- [6] T. FUNAKI et H. SPOHN. « Motion by Mean Curvature from the Ginzburg-Landau $\nabla\phi$ Interface Model ». *Comm. Math. Phys.* **185** (1997), p. 1-36.
- [7] G. GIACOMIN, S. OLLA et H. SPOHN. « Equilibrium fluctuations for $\nabla\phi$ interface model ». *Annals of probability* (2001), p. 1138-1172.
- [8] R. KENYON et A. OKOUNKOV. « Limit shapes and the complex Burgers equation ». *Acta Math.* **199** (2007), p. 263-302.
- [9] C. KIPNIS et C. LANDIM. *Scaling Limits of Interacting Particle Systems*. Berlin : Springer Verlag, 1999.
- [10] B. LASLIER et F. L. TONINELLI. « Lozenge tiling dynamics and convergence to the hydrodynamic equation ». *Communications in Mathematical Physics* **358**, n° 3 (2018), p. 1117-1149.
- [11] B. LASLIER et F. L. TONINELLI. « Lozenge tilings, Glauber dynamics and macroscopic shape ». *Communications in Mathematical Physics* **338**, n° 3 (2015), p. 1287-1326.
- [12] B. LASLIER et F. TONINELLI. « Hydrodynamic limit equation for a lozenge tiling Glauber dynamics ». In : *Annales Henri Poincaré*. Vol. 18. 6. Springer. 2017, p. 2007-2043.
- [13] K. MATETSKI, J. QUASTEL et D. REMENIK. « The KPZ fixed point ». *arXiv:1701.00018* (2017).
- [14] H. SPOHN. « Interface motion in models with stochastic dynamics ». *Journal of statistical physics* **71**, n° 5-6 (1993), p. 1081-1132.
- [15] H. SPOHN. *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*. Texts and Monographs in Physics. Heidelberg : Springer Verlag, 1991.
- [16] F. L. TONINELLI. « $(2+1)$ -dimensional interface dynamics: mixing time, hydrodynamic limit and Anisotropic KPZ growth ». *arXiv:1711.05571, to appear on Proc. ICM 2018* ().



Fabio Lucio TONINELLI

Université Claude Bernard Lyon 1
toninelli@math.univ-lyon1.fr

Fabio Toninelli est directeur de recherches à l'Institut Camille Jordan de l'université Lyon 1 Claude Bernard. Ses travaux portent sur les probabilités et la physique statistique.



Un interview de Michel TALAGRAND

Propos recueillis par G. GODEFROY

Comment et quand as-tu commencé à t'intéresser aux mathématiques ?

J'ai eu la chance d'avoir des parents enseignants, qui ont pris soin de mon éducation scientifique dès mon plus jeune âge. J'étais abonné à *Science et Avenir* dès 7 ans (à la suite du lancement de Sputnik en octobre 1957) et cette lecture a déterminé un intérêt précoce pour la science. L'école avait joué pour ma famille un rôle d'ascenseur social. Mon grand-père était cheminot et vivait misérablement. Mais son fils – mon père – avait été remarqué par son instituteur, qui a su convaincre mon grand-père de faire tous les sacrifices nécessaires pour ne pas retirer cet élève exceptionnel de l'école. Mon grand-père l'a écouté, et l'élève fut le seul à obtenir la mention *Très Bien* au Baccalauréat de toute son académie, puis obtint l'agrégation de mathématiques, et un poste de professeur en classes préparatoires au Lycée du Parc à Lyon. C'est ainsi que mon père a pu me sauver une première fois, lors de l'entrée en classe de Sixième : j'ai pu en effet intégrer le Lycée du Parc malgré mon orthographe catastrophique ! Je ne me suis jamais d'ailleurs vraiment réconcilié avec l'orthographe, et je ne ressentais aucune motivation pour étudier ce que je percevais comme des règles arbitraires. Mais n'est-il pas injuste d'avoir *toujours* eu Zéro en dictée, alors que je faisais vingt fautes en Sixième et seulement cinq en Troisième ? Notez que les temps ont bien changé et qu'aujourd'hui, une petite promenade sur Internet suffit à me décomplexer.

J'ai intégré le Lycée du Parc à ma juste place, cependant : car il y avait à l'époque six classes de Sixième « Classique » et une seule classe de Sixième « Moderne » qui regroupait les moins bons élèves, où bien sûr je me suis retrouvé. Le principe était qu'au fil des années les moins bons élèves de Classique se retrouvaient en Moderne, cependant que les moins bons élèves de Moderne partaient dans l'enseignement technique. De toute ma classe de

Sixième, nous ne sommes que deux à avoir eu le Baccalauréat sans redoubler.

On aurait pu s'attendre à ce que la classe dite Moderne regroupe les meilleurs enseignants dans les matières scientifiques, mais ce n'était pas le cas et les professeurs de science n'étaient pas au niveau. Je me contenterai de les évoquer par leurs surnoms : Zoch, Gaston, Tonton... Ils étaient chahutés, et l'atmosphère dans leurs classes n'était certes pas propice à l'étude. Nos gouvernants, semble-il, n'avaient pas su prévoir que tous ces élèves nés après la guerre auraient un jour besoin de professeurs de mathématiques compétents. Mon père, cependant, faisait de son mieux pour m'intéresser aux mathématiques, en m'expliquant par exemple les groupes de transformations, ou bien qu'il y avait deux groupes d'ordre 4, le groupe cyclique et le groupe de Klein. Mais cette discipline n'éveillait pas mon enthousiasme à l'époque.

Il me faut maintenant évoquer une autre de mes conditions initiales. Les hommes de ma famille souffrent d'une faiblesse génétique de leur rétine, sujette à des décollements suivis de cécité s'ils ne sont par traités très rapidement. J'ai totalement perdu l'usage de l'œil droit à l'âge de cinq ans, et je n'ai aucun souvenir de la vision en relief. À quinze ans, c'est à l'œil gauche que ma rétine s'est décollée, avec deux récides. J'ai donc manqué la Seconde à partir de février, et j'ai passé des semaines à l'hôpital. Mon père venait me rendre visite chaque jour après ses cours et me parlait de mathématiques pendant une bonne heure. C'est ainsi qu'il m'a sauvé une deuxième fois, puis une troisième fois en convainquant le proviseur de ne pas me faire redoubler, et en permettant que j'abandonne en Première ma deuxième langue vivante – le Russe, dont il avait eu la mauvaise idée de me conseiller l'étude et dont la grammaire m'avait tant fait souffrir.

Mais l'essentiel, c'est qu'en classe de Première je n'étais plus le même. J'étais devenu excellent en

mathématiques et en physique. Pourquoi? Il est difficile de répondre à cette question, peut-être s'agit-il d'une réaction de survie après un choc psychologique épouvantable et la terreur de ce à quoi je venais tout juste d'échapper. Quoi qu'il en soit, j'étais nettement le meilleur de ma classe en Terminale, jusqu'à susciter l'inquiétude des parents du deuxième, Jacques Biot - qui allait pourtant réussir assez bien lui-même puisqu'il termine en 2018 son mandat de Président de l'École polytechnique. Les professeurs à ce niveau étaient absolument excellents, ils m'ont beaucoup appris, et je leur en suis encore reconnaissant. J'y ai aussi appris à travailler : je faisais, sans les rédiger, tous les problèmes des manuels. Malgré quelques petites difficultés en géométrie où je n'ai jamais été vraiment bon, j'ai été présenté au Concours Général en mathématiques et en physique et j'ai reçu le troisième prix dans les deux disciplines, avant d'obtenir mon Bac en 1969. J'ai trouvé très amusant que le jury se sente obligé de me repêcher pour la mention Très Bien, malgré de nombreux points manquants.

Tu as fait toutes tes études à l'université, sans passer par les classes préparatoires. Pourquoi?

C'était avant tout le choix de mes parents. Ils pensaient que mes problèmes de vue n'étaient pas compatibles avec une scolarité en classe préparatoire. Mais je n'ai jamais été aussi heureux que pendant ces années-là puisque je ne faisais plus que ce qui m'intéressait, c'est-à-dire des mathématiques et de la physique! Et c'est l'occasion de rendre hommage à mes enseignants de l'université de Lyon, dont les cours étaient clairement d'un niveau trop élevé pour la plupart de leurs auditeurs, mais qui ont pleinement répondu à mon désir d'apprendre : et parmi eux à Henri Buchwalter, Edmond Combet, Pierre Dazord et Michel Haque.

J'ai passé le concours des IPES en 1970, une excellente idée qui améliore considérablement la retraite que je touche aujourd'hui! Je ne me sentais pas de vocation pour l'enseignement, c'était un choix raisonné. Je ne savais d'ailleurs pas du tout à quel niveau je pourrais enseigner. Tout simplement, je vivais à l'époque dans la terreur de devenir aveugle. Je savais qu'un poste de fonctionnaire était un choix raisonnable dans mon cas, car l'État français ne laisse pas tomber ceux qui travaillent pour lui s'il leur arrive malheur. Cette décision était sage. J'ai eu bien d'autres problèmes visuels. Je suis une sorte de miraculé, et j'ai dû plus tard à un concours de circonstances favorables de continuer à y voir.

Quelques souvenirs de l'étudiant lyonnais des années 70?

Plus tard à l'université, j'ai suivi une ribambelle de cours de maîtrise et de DEA dans des domaines variés : géométrie différentielle, algèbre, logique... sans que j'accroche véritablement sur l'un de ces sujets en particulier, malgré les cours lumineux donnés entre autres par Jean Braconnier, toujours vêtu d'un costume de velours noir qui se couvrait progressivement de craie!

Pourrais-tu dire vers quel âge, et dans quelles circonstances, tu as réalisé que les mathématiques pourraient être pour toi un métier?

Ayant déjà opté pour l'enseignement, il me restait à choisir entre la physique et les mathématiques. Mais dès la fin du DEUG, on m'a informé qu'il n'y avait tout simplement pas de postes en physique, et j'ai donc opté pour les mathématiques.

Qu'est-ce que l'Agrégation, où tu as été reçu premier en 1974, a représenté pour toi?

Pour être franc, un grand gâchis et une perte de temps. J'ai en effet passé une bonne moitié de l'année à la préparer en apprenant l'ensemble du programme, par exemple la géométrie projective qui en faisait alors partie. La préparation qu'offrait l'université de Lyon manquait d'ambition, mais j'ai résolu seul de nombreux problèmes des *Annales de l'agrégation* ou des concours d'entrée aux ÉNS. Je ne me suis pas mal débrouillé à l'écrit, j'étais vraiment bien préparé. En plus, le problème de mathématiques appliquées était en pratique de l'analyse : un régal! Enfin, j'avais assisté en 1973 à la très belle planche d'oral de Christophe Soulé et le hasard a voulu que je tombe essentiellement sur la même leçon!

Après ce succès à l'Agrégation, tu as été recruté au CNRS. Veux-tu dire quelques mots sur cette transition?

Fait remarquable, ce n'est pas après mais avant l'Agrégation que j'ai été recruté! Jean Braconnier (dont le bâtiment qui abrite le Département de mathématiques de Lyon 1 porte aujourd'hui le nom) m'a proposé en 1974 de postuler au CNRS et a adressé au Comité national une lettre collective signée par quatre de mes enseignants lyonnais. C'était une année favorable puisqu'il y avait le nombre record de 17 recrutements en mathématiques au CNRS. Mon dossier est parvenu après la date limite mais en ce temps-là les contraintes administratives étaient moins impitoyables. Peu après

j'ai reçu une lettre de Jean-Pierre Kahane, chargé de rapporter sur mon dossier, qui me demandait d'expliquer mon parcours inhabituel pour pouvoir défendre ce dossier. Et j'ai été recruté! Cela m'a sauvé, car pratiquement aucune université n'avait voulu de moi. Bien plus tard j'ai remercié Jean Pierre Kahane, qui m'a répondu avec une modestie extraordinaire : « Vous savez, je n'ai rien fait. Je n'ai fait que lire votre lettre à la Commission. »

Tu as fait toute ta carrière au CNRS. Que pense le chercheur de cette carrière bien particulière ?

C'était pour moi la carrière parfaite, puisque je n'ai fait que ce que j'aime faire : des mathématiques, et autant que j'ai voulu, c'est-à-dire beaucoup. Malgré tout, le CNRS m'a infligé ma seule réelle douleur de mathématicien. Il fallu 17 ans et 8 mois pour que mon salaire soit sensiblement différent de ce qu'il aurait été si j'avais fait au CNRS le minimum de travail possible – à supposer qu'un tel minimum soit non nul – et je l'ai ressenti comme une profonde injustice. La stratégie des instances du CNRS n'était pas d'optimiser le rendement scientifique mais de faire que ceux qui étaient entrés au CNRS n'en sortent à aucun prix. Bien sûr, ceci concerne une période révolue et je ne doute pas qu'à présent le recrutement et les carrières au CNRS aient évolué positivement.

Tu as également connu le système universitaire nord-américain. Quelles sont ses forces et ses faiblesses ?

On est beaucoup plus rapidement récompensé quand on réussit. Est-ce bien ou mal? Ici n'est pas le lieu de développer des arguments dans ce sens. Le fait important est que le système universitaire français est en compétition avec le système nord-américain sans vraiment pouvoir lutter à armes égales. En particulier les universités nord-américaines font des efforts systématiques pour parvenir à la parité, et offrent des ponts d'or à nos meilleures mathématiciennes. Le revers du système nord-américain est d'être assez rude pour ceux qui réussissent moins bien, ils font beaucoup d'enseignement pour des salaires bien plus bas.

Tu es désormais Académicien. C'est une reconnaissance, parmi d'autres prix et invitations, de la qualité de tes recherches. Qu'en penses-tu ?

J'ai été élu à l'Académie alors que cette institution était engagée dans une réforme qui visait à augmenter le nombre de postes, pour faire croître la

représentativité de l'Académie tout en faisant diminuer l'âge de ses membres. Pendant cinq ans il y a donc eu plusieurs postes par an, et ceux qui comme moi étaient dans la bonne tranche d'âge étaient beaucoup plus facilement élus que s'ils avaient eu quelques années de plus ou de moins. C'est bien sûr un honneur d'être membre de l'Académie, mais permettez-moi cependant de dédramatiser l'évènement : ceux (nécessairement Académiciens) qui ont participé à une séance d'élection de nouveaux membres savent que le facteur aléatoire est tel que nul ne devrait souffrir de n'être pas élu! Un souvenir à propos de mon élection : Gustave Choquet, mon patron de thèse, l'avait beaucoup désirée. Il était déjà atteint de la maladie de Parkinson lorsqu'elle a eu lieu. Mais il a tenu à m'écrire, d'une écriture hélas tremblante, une lettre adressée à Monsieur Talagrand, Membre de l'Académie des Sciences, et qui portait ces simples mots : c'était écrit.

Un peu de mathématiques à présent. Tu as choisi l'analyse fonctionnelle pour tes premières recherches. Dans quelle mesure cela a-t-il été utile pour la suite ?

En fait je n'ai pas vraiment choisi l'analyse fonctionnelle, le hasard l'a choisie pour moi. Lorsque je suis entré au CNRS j'ai compris que je devrais quitter Lyon. L'influence de Jean Braconnier a été déterminante : quand nous avons discuté pour savoir ce qui me plaisait le mieux, je lui ai dit : « ce que j'aime, c'est de couper des intervalles en rondelles ». Ce à quoi il m'a répondu : « il faut aller chez Choquet ». Je me suis donc retrouvé à l'automne 1974 dans l'équipe d'analyse dirigée par Gustave Choquet à l'université Paris 6, qui accueillait à l'époque un nombre relativement élevé de chercheurs débutants, un séminaire dynamique et de nombreux visiteurs, par exemple Richard Haydon et Haskell Rosenthal. Il était alors bien naturel de s'intéresser à l'analyse fonctionnelle.

Les résultats pour lesquels tu es le plus connu relèvent plutôt des probabilités. Par exemple, il est difficile de parler de processus gaussiens sans prononcer rapidement ton nom. Comment s'est faite cette évolution ?

Je me suis beaucoup intéressé – peut-être même trop – à la théorie de la mesure pendant mes premières années de recherche. David Fremlin visitait fréquemment Paris à cette époque, il m'a beaucoup influencé, et nous avons collaboré. La théorie de la mesure m'a graduellement amené à apprendre des probabilités, même si ce que j'appelle par ce

nom n'est pas toujours reconnu comme tel par les « vrais » probabilistes. Mais ma grande chance a été la venue de Gilles Pisier, recruté en 1981 comme professeur à Paris 6, dans l'équipe d'analyse. Il est arrivé exactement au bon moment, et m'a donné par exemple des notes de cours qui m'ont permis en deux mois d'apprendre la théorie dite des probabilités dans les espaces de Banach, laquelle a été l'inspiration de bien de mes travaux. Je n'y serais jamais arrivé seul. C'est encore lui qui m'a suggéré d'étudier le problème de la caractérisation de la continuité et de la bornitude des processus gaussiens, que j'ai résolu en 1985. Gilles Pisier m'a alors dit avec simplicité : « j'aurais bien voulu le faire, mais je suis content que ce soit toi qui l'aies fait. »

Comment décrirais-tu ton mode de fonctionnement mathématique ?

Une de mes particularités les plus limitatives est que je suis incapable d'utiliser des résultats sans les avoir entièrement démontés et en avoir analysé tous les rouages. Je suis donc incapable de lire quoi que ce soit sans y passer un temps considérable. Au moins, cela m'a forcé à aller au fond des choses. Et il n'y a pas de miracle. Je prends des périodes de repos total, parfois longues, et j'aime beaucoup les voyages culturels. Mais pendant mes périodes de travail je terminais mes journées en état d'épuisement.

Quels sont tes résultats préférés ?

Ce qui compte, ce sont ceux de mes résultats que les autres préfèrent. Comme le disait Gustave Choquet, il importe d'avoir des enfants mathématiques. La beauté intrinsèque d'un résultat est un mauvais critère. Par exemple, l'un des résultats préférés de mes jeunes années est la τ -régularité des mesures gaussiennes, publié en 1981 suite à une question d'Albert Torrat. J'évalue le nombre de personnes qui connaissent à la fois la définition d'une mesure gaussienne et celle de la τ -régularité à trois, moi compris. Et de fait, cet article a été cité exactement une fois... mais bien sûr, reste toujours l'espoir secret que nos idées seront utilisées plus tard. Et ce travail sur les mesures gaussiennes en a préparé d'autres, dont l'impact a été plus significatif.

Quelles sont les plus grandes émotions que t'ont apportées les mathématiques ?

Les plus grandes émotions ont été provoquées par les découvertes : elles ont été à la fois relativement étalées dans le temps et assez intenses, et elles

font partie des meilleurs moments de toute mon existence. J'ai aussi connu des émotions extrêmement concentrées, dues à un facteur extérieur : ainsi j'ai été stupéfait d'apprendre en 1995 que j'étais lauréat du Prix Loeve, attribué une fois tous les deux ans à un unique probabiliste – et généreusement doté. Ce fut une stupéfaction encore bien plus grande de trouver dans ma boîte aux lettres le courrier qui m'invitait à donner une conférence plénière au Congrès International des Mathématiciens de Berlin, en 1998. L'idée que cela pourrait arriver un jour ne m'était jamais venue. Mais peut-être la plus grande émotion a été l'appel de Gustave Choquet, qui se savait en fin de vie après une fracture du col du fémur et a voulu me dire avant de partir : « Talagrand, c'était vous mon meilleur élève. »

Les mathématiques m'ont rendu profondément heureux. Je regrette surtout de ne pas avoir compris plus tôt que mes travaux pouvaient avoir un certain impact, il m'a fallu de longues années pour cela. Surtout au début, j'ai été porté par la satisfaction d'un besoin psychologique. Peut-être aurais-je alors perdu moins de temps sur des bêtises qui n'en valaient pas la peine. Mais les choses ne sont pas simples. Certaines de ces bêtises m'ont conduit à des choses bien plus conséquentes !

Quels sont les mathématiciens d'hier et d'aujourd'hui qui t'ont le plus influencé ?

Je n'ai pas assez lu pour pouvoir véritablement parler des mathématiciens d'autrefois. Quant aux mathématiciens d'aujourd'hui, j'ai déjà mentionné l'impact de Gilles Pisier et des directions de recherche qu'il m'a ouvertes. J'ai également été fondamentalement influencé par Vitali Milman, qui ne manquait pas une occasion de parler de concentration de la mesure et des inégalités correspondantes. De plus, l'un des séminaires donnés par Milman à Paris sur l'usage des réarrangements dans ses travaux avec Noga Alon m'a permis de démarrer mes premières recherches sur les inégalités isopérimétriques. Mais il y a bien sûr d'autres contemporains qui m'ont influencé et je n'essaierai pas de fournir une liste exhaustive.

Comment vois-tu l'avenir des mathématiques ?

Les théories mathématiques ont une jeunesse, une maturité, une vieillesse et une agonie. Et malheureusement, ce quatrième âge est le plus long, et de loin. L'agonie est cette période sans fin déterminée où le temps des fruits est passé et où l'on explore des recoins : par exemple, des questions

ouvertes très difficiles qui ne sont pas motivées par des problèmes extérieurs au champ de recherche concerné, et qu'on persiste à chercher obstinément parce qu'elles étaient considérées comme importantes trente ans plus tôt. J'ai été exposé à beaucoup de ces sujets, et je remercie mon instinct qui m'en a tenu éloigné, mais pas de tous hélas. Pour éviter de stagner dans des théories à l'agonie, hier comme aujourd'hui, les mathématiques ont besoin d'influences extérieures : par exemple, la physique et en particulier maintenant la théorie des cordes ont suscité de grands progrès, la théorie de l'information et ce qu'on appelle désormais le Big Data, ou encore l'informatique théorique avec par exemple les travaux d'Assaf Naor qui fournissent de toutes nouvelles applications de l'analyse fonctionnelle.

Les automates vont-ils révolutionner la pratique de la recherche mathématique ?

Ma première impression est qu'il y a une différence profonde entre des jeux de stratégie comme le Go, de complexité considérable mais finie, et où l'ordinateur dépasse maintenant les capacités des meilleurs humains, et la recherche mathématique qui semble évoluer dans un espace de dimension infinie... Qui peut donc savoir aujourd'hui si l'intelligence artificielle pourra un jour inventer de vraies mathématiques ? Je crains que si c'est le cas, notre espèce ne soit en vrai danger. Ce qui est certain, c'est que les ordinateurs ont déjà bouleversé notre

façon de travailler. J'ai connu les machines à écrire IBM avec différentes boules pour les caractères mathématiques ! Et l'accès à l'information a été révolutionné. Pour le futur proche, on peut espérer que les robots délivreront bientôt les auteurs de nouvelles tâches ingrates. L'auteur de science-fiction Isaac Asimov n'avait-il pas imaginé que les robots intelligents seraient inventés pour relire les épreuves ?

Quels conseils donnerais-tu à un jeune mathématicien ?

J'ai posé moi-même cette question à Gustave Choquet, et je crois que ses réponses sont toujours d'actualité. Son premier conseil était : lorsque vous cherchez un problème, adoptez les hypothèses minimales pour lesquelles ce problème a encore un sens. J'ai par exemple utilisé cette démarche en étudiant les processus gaussiens. On y rencontre des espaces métriques qui sont sous-espaces d'un espace de Hilbert. Le succès m'est venu quand j'ai décidé d'oublier cette particularité et de n'y penser qu'en tant qu'espaces métriques abstraits. Un autre conseil plus technique, qu'il m'avait donné avec un petit clin d'œil souriant, était simplement : il est toujours utile de penser à prendre l'enveloppe convexe. Cette idée m'a bien servi, si bien qu'aujourd'hui on enseigne au niveau M2 certaines inégalités qu'on appelle inégalités de Talagrand convexifiées. J'étais bien préparé pour les découvrir !



Les recherches de **Michel Talagrand** sont principalement consacrées à l'analyse fonctionnelle et aux probabilités théoriques. Parmi ses résultats les plus connus figurent sa caractérisation de la continuité des processus gaussiens, ses travaux en mécanique statistique sur l'analyse mathématique des verres de spin, sa démonstration de la formule de Parisi, sa résolution du problème de Maharam (et du problème de von Neumann qu'il contenait), les inégalités probabilistes désormais appelées inégalités de Talagrand, l'analyse du phénomène de concentration de la mesure. Son ouvrage le plus récent est une introduction à la théorie quantique des champs destinée aux mathématiciens. Michel Talagrand a reçu le Prix Peccot (1980), le Prix Servant (1985), le Prix Loeve (1995), le Prix Fermat (1997). Membre correspondant de l'Académie des Sciences depuis 1997, il a été élu Académicien en 2004. Il a été Conférencier invité à l'ICM de Kyoto (1990), et Conférencier plénier à l'ICM de Berlin (1998).



Les communautés mathématiques au lendemain de la Grande Guerre

- L. MAZLIAK
- R. TAZZIOLI

À propos de la rencontre au CIRM « Les communautés mathématiques dans la reconstruction de l'après-guerre (1918-1928) », 12-16 novembre 2018.

Du 12 au 16 novembre 2018, une rencontre en histoire des mathématiques était organisée au CIRM¹, consacrée à l'étude des communautés mathématiques au lendemain de la Première Guerre mondiale, plus précisément pendant la décennie 1918-1928. Après le 11 novembre 1918, de nombreuses personnes furent confrontées à une situation nouvelle découlant de la capitulation des puissances centrales et de leurs alliés. Une conséquence visible en était l'inévitable restructuration de la carte politique de l'Europe. Un premier point mérite d'être souligné : loin d'être la conclusion du terrible cycle de violence qui avait submergé le monde depuis 1914 – et même depuis 1912, si l'on songe à la guerre italo-turque et aux guerres des Balkans –, l'Armistice avait été le prélude à une nouvelle vague de rage meurtrière, parfois encore plus brutale que celle des années précédentes et qui ne se calma qu'au milieu des années 1920 et, comme on sait, seulement pour quelques années avant que ne survienne la crise économique de 1929 et les convulsions politiques qui s'ensuivirent. L'historien allemand Robert Gerwarth écrit ainsi : « Contrairement à la Grande Guerre, qui fut menée dans le simple but de contraindre l'ennemi à accepter des conditions spécifiques de paix (même si elles étaient drastiques), les violences d'après 1917-1918 échappaient à tout contrôle. Il s'agissait de conflits existentiels qui avaient pour but d'anéantir l'ennemi – qu'il soit ennemi de classe ou d'ethnie, sous-tendus par une logique génocidaire qui en

viendrait à prédominer dans la majorité de l'Europe entre 1939 et 1945. »² Cette situation se cristallisait dans des guerres conventionnelles ou civiles, et souvent dans un mélange des deux.

Cette question des suites de la guerre (au sens étroit de la période 1914-1918) a amené les historiens à davantage s'intéresser à la situation de certains pays vaincus, comme ceux de l'Europe centrale ou orientale, mais aussi à des situations locales, comme l'Italie des années 1919-1920, souvent décrites comme le *Biennio Rosso* (les deux années rouges) en raison des nombreuses révoltes ouvrières et paysannes qui ont caractérisé cette période. Nives Banin, dans le livre éponyme qu'il consacre à cette période³, analyse ce moment comme un pont entre le parlementarisme libéral épuisé par le conflit et la dictature de Mussolini. Bien que le déroulement ait été différent dans les divers pays, les années qui ont immédiatement suivi la Première Guerre mondiale ont donc été cruciales pour l'histoire européenne dans son ensemble. L'exposition présentée cet automne à Paris au musée de l'Armée, consacrée précisément à la période 1918-1923, et l'excellent catalogue qui en a été tiré⁴, permettait bien de se rendre compte des tragédies qui survinrent pendant ces années de chaos.

Avec une telle peinture apocalyptique, il est étonnant que la vie mathématique ait pu exister et se développer, et pas uniquement dans la partie occidentale de l'Europe pour laquelle novembre 1918 vit un retour à la vie normale. Ce point af-

1. Des compléments d'information, et notamment les résumés des différents exposés peuvent être trouvés sur la page de la rencontre <https://conferences.cirm-math.fr/1850.html>

2. Robert Gerwarth. *Les Vaincus. Violences et guerres civiles sur les décombres des empires 1917-1923*. Seuil, 2017. p.6

3. Nives Banin. *Il Biennio Rosso (1919-1920)*. Helicon, 2013.

4. Emmanuel Ranvoisy, Carine Lachèvre, François Lagrange, Christophe Bertrand. *À l'Est, la guerre sans fin : (1918-1923)*. Gallimard, 2018.

floura à plusieurs reprises pendant la rencontre – la vie scientifique et les échanges, en particulier les échanges internationaux, reprurent immédiatement après 1918, et cela même entre anciens ennemis. Il y eut bien entendu des tensions, des exclusions, de l'ostracisme; mais aussi des efforts constructifs, des tentatives de réconciliation, des retrouvailles et des manœuvres de contournement pour que la vie mathématique normale puisse se poursuivre. Cela se fit d'ailleurs parfois en lien avec la création d'instances internationales⁵ comme la Commission internationale de coopération intellectuelle, organe créé en 1922 auprès de la Société des Nations, à laquelle participèrent divers mathématiciens tels Émile Borel. Rupture et continuité au sein des communautés mathématiques, et adaptation à la situation politique et sociale changeante de l'époque, furent donc les thèmes centraux de cette rencontre au CIRM. Le choix de se concentrer sur la décennie entre 1918 et 1928, forcément un peu arbitraire quant à la deuxième date, s'explique néanmoins par le fait que l'année 1928 culmina avec le Congrès international des mathématiciens de Bologne en Italie, le premier où l'on vit revenir des mathématiciens allemands et le dernier avant longtemps auquel les Soviétiques participèrent en nombre. Trois axes principaux de réflexion avaient été choisis pour rendre compte des évolutions de la période : les institutions internationales, nouvelles ou anciennes, et leur adaptation à la nouvelle carte du monde; les territoires, et notamment les « nouveaux territoires » avec la naissance de nombreuses nouvelles structures nationales sur la carte européenne; et enfin le redécoupage disciplinaire des mathématiques, avec l'émergence ou la montée en puissance dans les années 1920 de nouvelles questions et de nouvelles problématiques, qu'elles soient ou non directement liées à la guerre.

À la satisfaction des organisateurs – Tom Archibald (Vancouver), Angelo Guerraggio (Milan), Laurent Mazliak (Paris) et Rossana Tazzioli (Lille) – une assistance variée et très internationale d'une soixantaine de participants a pris part à ce colloque. L'importante présence de jeunes chercheurs fut notamment particulièrement appréciée. Même si,

comme on va le voir, les conférences furent nombreuses et les thématiques très variées, beaucoup reste encore à faire pour mieux comprendre la complexité de ce moment, et on peut espérer qu'à l'instar de ce qui s'est passé pour l'histoire du conflit proprement dit, les années du centenaire de l'après-guerre vont donner l'occasion à de nombreux développements. Fait original qui mérite d'être signalé, plusieurs exposés concernaient l'étude des mathématiques en Europe centrale et orientale, encore trop peu examinées dans l'historiographie. De plus, traiter en même temps, et parfois de façon comparative, territoires ou disciplines, nous a semblé un moyen efficace pour mieux saisir à la fois les difficultés et les ouvertures permises par des initiatives institutionnelles ou scientifiques de ces années.

Le présent colloque, probablement le tout premier consacré spécifiquement à ce thème, commençait un jour hautement symbolique : le 12 novembre 2018. Il fut l'occasion d'avoir une meilleure perception de l'histoire des mathématiques dans la période de l'entre-deux-guerres. Son succès a été rendu possible par le soutien de nombreux sponsors qu'il faut commencer ici par remercier : le Centre Cournot, Sorbonne université, l'université Bocconi, la Commission internationale pour l'histoire des mathématiques, la Faculté de mathématiques de Sorbonne université, le Labex Cempi, ainsi que plusieurs laboratoires : le Laboratoire de probabilités, statistique et modélisation (Sorbonne université), le laboratoire Paul Painlevé (université de Lille), le laboratoire Jean Dieudonné (université de Nice). La Mission du Centenaire⁶ avait en outre choisi la conférence dans le cadre du programme scientifique officiel, ce qui lui a donné visibilité et résonance. Naturellement, la réussite de la rencontre a été possible grâce à l'environnement exceptionnel du CIRM, bien qu'il fût un peu troublé par l'interminable chantier d'agrandissement, et l'efficacité toujours souriante de son personnel que nous remercions ici chaleureusement.

Les trois axes qui composaient le programme – disciplines, territoires, institutions – ont fait l'objet de nombreuses interactions au cours des exposés, révélant un paysage complexe dont l'étude

5. On peut consulter à ce sujet Anne Rasmussen. Réparer, réconcilier, oublier : enjeux et mythes de la démobilisation scientifique, 1918-1925. Histoire@Politique. Politique, culture, société, N°3, novembre-décembre 2007.

6. La Mission du Centenaire (<http://www.centenaire.org/fr>) est une mission gouvernementale mise en place en 2012 afin de coordonner l'ensemble des manifestations organisées autour du centenaire de la Première Guerre mondiale. Il est à noter que la France est le pays où ces commémorations ont été les plus nombreuses. Si certaines ont été l'occasion de manifestations cocardières pas très subtiles, beaucoup d'initiatives se sont révélées vraiment intéressantes et des colloques scientifiques de grande valeur ont été organisés, qui ont considérablement alimenté la recherche historique sur les années 1910. Elle est présidée par Joseph Zimet, ancien directeur au ministère de la défense, et l'historien français Antoine Prost, spécialiste de l'histoire de l'enseignement en France et de la Première Guerre mondiale, en dirige le comité scientifique.

mérite d'être approfondie. Un bon exemple d'une telle confluence est donné par les recherches en analyse fonctionnelle et sur les fondements des mathématiques dans la Pologne des années 1920 qui rentraient de manière naturelle dans les axes « disciplines » et « territoires », vu que la Pologne s'est constituée en état indépendant au lendemain de la guerre. Roman Murawski (Poznan) a ainsi pu illustrer quelques épisodes de l'école de Varsovie dans les années 1920, spécialisée en théorie des ensembles mais dont certains membres, tels Kazimierz Twardowski, avaient aussi des préoccupations philosophiques. Son exposé a mis en évidence les relations et les influences mutuelles entre philosophes et mathématiciens, comme Zygmunt Janiszewski et Wacław Sierpinski, au sein de cette école. Lukas Verburgt (Utrecht) s'est quant à lui focalisé sur les fondements des mathématiques en explorant l'approche intuitionniste de L. E. J. Brouwer et en examinant la position de l'école mathématique soviétique face à la polémique qui a opposé Brouwer à Hilbert pendant les années 1920. Également consacrée à l'Union soviétique, la contribution d'Alexander Karp (New York) a considéré l'enseignement des mathématiques en mettant en avant certains contrastes avant et après la révolution de 1917, ainsi que le rôle significatif dévolu aux mathématiques en URSS : elles furent immédiatement promues comme un élément essentiel à la construction d'un homme nouveau, en refusant toutefois de les voir comme une discipline abstraite et formelle mais comme une science capable de former à l'expérience pratique. Sur l'enseignement des mathématiques en Hongrie, Katalin Gosztonyi (Budapest) quant à elle, a présenté comment les changements politiques et sociaux avant et après la Grande Guerre avaient influencé l'activité du mathématicien Leopold Fejér.

L'objet de plusieurs communications était d'explorer les trajectoires scientifiques et institutionnelles de certains mathématiciens pour questionner la dynamique entre « nouveaux » et « anciens » territoires, en considérant aussi bien leur présence dans des colloques internationaux, que des articles de journaux ou des publications d'ouvrages. La question des voyages d'un pays à un autre est apparue comme un point particulièrement important de la période, surtout des jeunes scientifiques. Laurent Mazliak (Paris), en suivant le parcours mouvementé

de Kyrille Popoff, a ainsi montré comment ce jeune mathématicien avait réussi à reprendre contact très rapidement avec ses correspondants français, bien que la Bulgarie ait été dans le camp des vaincus, et à exploiter ses recherches balistiques du temps de guerre pour devenir un expert international du domaine. Une autre trajectoire individuelle intéressante, analysée par Jan Kotůlek (Ostrava), est celle du mathématicien et actuaire Emil Schoenbaum en relation avec la réforme du système d'assurance mis en place en Tchécoslovaquie après les bouleversements de la Première Guerre mondiale. Le gouvernement tchécoslovaque avait nommé une commission spéciale au ministère des Affaires sociales chargée de préparer les parties techniques de la loi sur la sécurité sociale des travailleurs en 1922-1924 : Schoenbaum, *privatdozent*⁷ en mathématiques appliquées à l'université de Prague et à la tête de l'Institut général des pensions de Prague, en devint le principal expert tchèque en lien avec les commissions internationales sur le sujet. L'exposé d'Helena Durnova (Brno), lui aussi consacré à la Tchécoslovaquie, s'est concentré sur la carrière du géomètre Bohumil Bydžovský dont elle a suivi la présence sur la scène internationale. Dans une autre zone géographique, João Caramalho Domingues (Minho), a examiné les tentatives d'internationalisation de la communauté mathématique portugaise juste après la Première Guerre mondiale à travers le rôle des congrès ibériques pour l'avancement des sciences, qui débutèrent en 1921 et connurent quatre occurrences avant 1928, ainsi que la participation des mathématiciens portugais à la fondation de l'Union Mathématique Internationale, tentatives qui peuvent être considérées comme un prolongement d'initiatives antérieures, centrées sur le premier journal mathématique portugais visant à des échanges internationaux « le Journal de Teixeira » pour élever le niveau de la pratique mathématique au Portugal.

Les réflexions autour de l'internationalisation ont été complétées par d'autres conférences de l'axe « Institutions », prenant en compte aussi bien des organisations internationales émanant de la nouvelle configuration géopolitique, que des sociétés « locales » développant certaines de leurs activités vers les contacts avec l'étranger afin de s'adapter aux profonds changements de l'immédiat après-guerre. Organisation mathématique internationale

7. Un *privatdozent*, dans le système universitaire allemand (et dans de nombreux pays dont le système s'en est inspiré), est une personne (le plus souvent un jeune docteur) à qui l'on confère le droit (*venia legendi*) de proposer un cours à l'université mais sans être titulaire d'un poste. Les cours peuvent ainsi être dispensés gratuitement, ou contre une rémunération offerte par un financement privé ou même par les étudiants.

par excellence, née juste après la Grande Guerre, l'International Mathematical Union (IMU) a constitué l'objet de la conférence de Guillermo Curbera (Séville). Il a illustré, à travers la figure du couple de mathématiciens anglais Grace Chisholm et William Henry Young, l'engagement de l'élite mathématique dans l'IMU et son attitude face aux difficultés rencontrées par la nouvelle institution. L'IMU ne réussit en fait jamais à atteindre le rôle qu'elle espérait dans l'organisation mondiale des mathématiques, mais la crainte d'une hégémonie qu'elle suscita entraîna paradoxalement la création de nouvelles sociétés mathématiques nationales, telle que l'Union Mathématique Italienne, créée en 1922. Cette création a été analysée dans l'exposé de Livia Giacardi (Turin) et Rossana Tazzioli (Lille) qui ont examiné les aspects nationaux et internationaux de cette fondation par l'étude de l'organisation effective du congrès international de Bologne en 1928. Dirigée par Salvatore Pincherle de la fondation jusqu'à sa mort en 1937, l'Union Mathématique Italienne avait été promue par Vito Volterra, mathématicien qui joua un rôle institutionnel de premier plan en Italie ainsi que dans des organisations internationales entre le tournant du vingtième siècle et les années 1930. L'exposé de Giovanni Paoloni fut d'ailleurs consacré à l'engagement de Volterra dans la politique scientifique des années 1920. Les activités de Volterra se déployèrent tout d'abord en Europe, et notamment en Italie, où il fonda le Conseil National de Recherche, dont il fut le premier président et dont le but principal était de renforcer les liens entre la recherche académique et le monde industriel; elles se développèrent également aux États-Unis ou dans des institutions internationales comme le Conseil International de Recherches, l'IMU, le Bureau International des Poids et Mesures ou l'International Education Board de la fondation Rockefeller. Elles furent cependant menacées en raison de l'opposition de Volterra au régime fasciste. La tension entre « national » et « international » dans des organisations telles que l'Union Mathématique Italienne ou le Conseil National des Recherches, existait aussi dans des institutions françaises nées dans les années 1920. C'est le cas de l'Institut de Mécanique des Fluides fondé à Lille en 1929 auquel Antonietta Demuro (Lille) a consacré son exposé. En étudiant le réseau de relations entretenues par son fondateur et directeur, Joseph Kampé de Fériet (1893-1982), elle a pu questionner le « statut » de la communauté de mécanique des fluides en France et ses liens notamment avec la communauté américaine. De son côté, Matthias Cléry (Paris) a ana-

lysé les conditions qui ont amené à la fondation de l'Institut Henri Poincaré à Paris. Il a mis en particulier en évidence le rôle essentiel de la Rockefeller Foundation dans la création du nouvel institut ainsi que l'activisme d'Émile Borel dans la sphère académique parisienne afin de mettre en place un espace pour la théorie des probabilités dans le domaine mathématique.

Autre institution, fondée cette fois à Berlin par Richard von Mises au lendemain du conflit, la Société des Mathématiques Appliquées et de Mécanique (*GAMM, Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik*), participa au redressement allemand après la guerre notamment à travers le périodique qu'elle fonda, le Journal de mathématiques appliquées et de mécanique (*ZAMM, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*). Reinhard Siegmund-Schultze (Kristiansand) a exploré dans sa conférence la façon dont von Mises a organisé grâce à cette société une interface active et efficace entre ingénieurs et mathématiciens. L'exposé d'Hélène Gispert (Orsay) a été pour sa part consacré au journal *L'Enseignement mathématique*, fondé en Suisse en 1899 et devenu en 1908 l'organe officiel de la CIEM (Commission internationale de l'enseignement mathématique). S'intéressant à deux rubriques régulières, la Bibliographie consacrée aux journaux et la partie consacrée aux activités de la CIEM, elle a examiné leur évolution avant et après-guerre dans les années 1920, et commenté ce que ces changements nous apprennent sur le nouveau paysage mathématique européen de l'après-guerre. Ce dernier fut d'ailleurs regardé avec des sentiments ambigus par les mathématiciens américains. Laura Turner (Monmouth) a montré, à travers la vie et la carrière de George A. Miller (1863-1951), comment, face aux nombreuses difficultés et perspectives liées à la situation de l'espace européen au lendemain de la guerre, ceux-ci ont pu percevoir une opportunité à saisir. En 1917, Miller proposa la création d'un dictionnaire mathématique américain à la *Mathematical Association of America*, qui venait d'être créée. Bien que ce projet ne fût jamais réalisé sous la forme prévue, il reçut une importante impulsion juste après la guerre, illustrant l'attitude conquérante de la communauté américaine pour prendre symboliquement la place d'anciens territoires mathématiquement en pointe mais affaiblis par la guerre.

La partie du programme destinée à l'examen de l'évolution de certaines disciplines mathématiques dans les années 1920 avait la particularité

d'inclure trois demi-journées thématiques où les organisateurs avaient proposé à des mathématiciens d'exposer des considérations d'une part sur la topologie, d'autre part sur les probabilités. Il s'agissait d'essayer de présenter quelques résultats emblématiques de la période, sans entrer dans des détails trop techniques. Miroslav Husek (Prague) a ainsi présenté un panorama des résultats de topologie générale obtenus dans la décennie concernée, particulièrement en Russie/URSS, cependant que Dikran Dikranjan (Udine) s'est concentré plus spécifiquement sur les travaux de l'école polonaise, notamment autour de la classification topologique des espaces à travers l'étude de leurs composantes connexes par des mathématiciens comme Mazurkiewicz, Sierpinski ou Kuratowski. Lors de l'autre demi-journée dédiée aux probabilités et coordonnée par Rémi Catellier (Nice), quatre intervenants ont tenté d'illustrer l'essor des mathématiques du hasard à travers des situations variées : Patricia Reynaud-Bouret (Nice) a présenté quelques éléments de la théorie des tests avec les travaux de Fisher et Neyman, Hans Fischer (Eichstätt-Ingolstadt) la théorie des collectifs de Richard von Mises élaborée en 1919, Alexandre Gaudillière (Aix-Marseille) quelques théorèmes limites comme le théorème central ou la loi du logarithme itéré à travers les travaux de Paul Lévy ou d'Alexandr Khinchin, et Rémi Catellier la construction mathématique par Wiener du mouvement brownien. Ces deux demi-journées ont au passage montré, s'il en était besoin, toute la difficulté qu'on rencontre quand on veut faire comprendre des concepts techniques (même ayant un siècle d'âge) à des non-spécialistes - mais il est intéressant de noter que de cet ensemble disparate de présentations se dégageait en tout cas nettement qu'on avait affaire à une décennie significative dans l'histoire de l'autonomisation des deux disciplines. La troisième matinée, co-organisée avec le Centre Cournot sur l'histoire de l'économie mathématique, a peut-être été la plus convaincante. Les trois intervenants ont bien réussi à montrer comment, tout en conservant un important volet empirique, les économistes des années 1920 opérèrent une nette transition vers une mathématisation de certaines questions économiques, au premier rang desquelles on trouve le concept de cycle autour duquel la matinée s'est articulée. Michel Armatte (Paris) s'est intéressé au regard porté sur certaines statistiques descriptives par l'américain Henry Ludwell Moore pour l'élaboration de cycles des échanges commerciaux. Irina Konovalova-Peaucelle (Paris) a examiné la situation soviétique et notamment le rôle majeur de

Nikolaï Dmitrievitch Kondratiev, qui fut totalement occulté après le brutal arrêt de la NEP par Staline, pour l'étude des cycles de décroissance-croissance des sociétés capitalistes à travers ses considérations aussi bien quantitatives que philosophiques. Enfin, Pierre-Charles Pradier a montré comment la dissémination de certains travaux après la guerre, comme par exemple ceux de Vilfredo Pareto qui dataient d'une vingtaine d'années, encouragèrent des ingénieurs à élaborer une économétrie susceptible d'interroger la relation entre observation et théorie.

Une dernière demi-journée consacrée aux disciplines mathématiques, comprenant cette fois des exposés à caractère historique, a permis de compléter le tableau en se penchant sur d'autres thématiques. Tom Archibald (Vancouver) a considéré le cas du polonais Otton Nikodym autour de l'intégration. Frédéric Brechenmacher (Palaiseau) a présenté la manière dont l'algèbre matricielle s'imposa dans les années considérées à travers différentes circulations impliquant surtout des mathématiciens français et américains. Frédéric Jaëck (Paris) a examiné comment les deux journaux *Fundamenta Mathematicae* et *Studia Mathematica* fondés dans ces années servirent de support à Banach et à l'école polonaise pour développer une nouvelle approche de l'analyse fonctionnelle. Martina Schiavon (Nancy) a montré comment la création de l'Union géodésique marqua un regain d'intérêt pour les questions de topographie après un conflit pendant lequel elle avait eu une importance capitale. Loïc Petitgirard (Paris), quant à lui, s'est penché sur la théorie des oscillations non linéaires et sur le rôle de l'ingénieur naval Nikolai Minorsky, réfugié russe aux États-Unis dès 1918, qui élaborait d'importants dispositifs d'aide à la navigation. Enfin, Tilman Sauer (Mayence) est revenu sur certains aspects de la réception de la théorie de la relativité d'Einstein, notamment par Jan Schouten et Vaclav Hlavaty, et du rôle qu'elle joua par rapport à la géométrie différentielle dans les années 1920.

En dehors du programme strictement scientifique, les organisateurs de la conférence avaient voulu profiter du moment symbolique du centenaire de l'Armistice pour proposer, le mercredi après-midi, deux conférences en milieu scolaire au Lycée Thiers sur des thèmes liés à la sortie de guerre. Les orateurs invités étaient les historiens Anne Rasmussen (EHES, Paris) qui a parlé de la reprise des échanges scientifiques au lendemain du conflit, et Yvan Gastaut (Nice) qui a évoqué la façon dont les vagues de réfugiés causées par la guerre et ses innom-

brables répliques au début des années 1920 ont été reçues plus ou moins bien en France. De nombreux élèves du lycée, notamment des classes préparatoires dont un professeur d'histoire animait la rencontre, sont venus assister et participer à cette rencontre qui, bien qu'académique, les sortait un peu d'une approche plus scolaire. Les enseignants que nous avons rencontrés à cette occasion nous ont fait part de leur intérêt pour ce type d'interaction avec les activités de recherche – et donc par exemple les conférences du CIRM – soit plus fré-

quent.

Un dernier mot enfin pour mentionner la belle soirée du mardi où le Quatuor à cordes de Cannes est venu présenter un programme de concert très original centré autour des années 1918 et 1919 : il a ainsi interprété le Quatuor (1919) de Germaine Tailleferre, le Quatuor Op.83 (1919) d'Edward Elgar, le Quatuor n°2 (1918) de Zoltan Kodaly et le Quatuor n°2 (1918) de Paul Hindemith, illustrant combien la période de l'après-guerre s'avéra aussi d'une grande fécondité dans le domaine musical.

Suggestions bibliographiques : depuis les années 2000, l'histoire des sciences, et notamment celle des mathématiques, a reconsidéré l'importance de la Grande Guerre pour comprendre ce qui s'est joué dans la communauté des mathématiciens au début du xx^e siècle. Les quelques titres suivants concernent des études historiques variées sur les mathématiques dans les années 1920 (sans aucune prétention d'exhaustivité).

Références

- [1] T. ARCHIBALD et R. TAZZIOLI. « Integral equations between theory and practice: the cases of Italy and France to 1920. » English. *Arch. Hist. Exact Sci.* **68**, n° 5 (2014), p. 547-597.
- [2] D. AUBIN et C. GOLDSTEIN, éd. *The war of guns and mathematics. Mathematical practices and communities in France and its Western allies around World War I.* English. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2014, p. xviii + 391.
- [3] M. AUDIN. *Fatou, Julia, Montel. The Great Prize of mathematical sciences of 1918, and beyond. Transl. from the French.* English. 2014. Berlin: Springer, 2011, p. viii + 332.
- [4] M.-C. BUSTAMANTE, M. CLÉRY et L. MAZLIAK. « Le *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*. Étendue et limites d'un projet borélien de grande envergure (1921–1939). » French. *North-West. Eur. J. Math.* **1** (2015), p. 111-167.
- [5] R. CATELLIER et L. MAZLIAK. « L'émergence de la statistique probabiliste française. Borel et l'Institut Henri Poincaré dans les années 1920. » English. *Rev. Hist. Math.* **18**, n° 2 (2012), p. 271-335.
- [6] H. GISPERT et J. LOLOUP. « Des patrons des mathématiques en France dans l'entre-deux-guerres. » French. *Rev. Hist. Sci.* **62**, n° 1 (2009), p. 39-117.
- [7] C. GOLDSTEIN. « La théorie des nombres en France dans l'entre-deux-guerres: de quelques effets de la première guerre mondiale. » French. *Rev. Hist. Sci.* **62**, n° 1 (2009), p. 143-175.
- [8] A. GUERRAGGIO et P. NASTASI. *Italian mathematics between the two world wars.* English. **29**. Basel: Birkhäuser, 2005, p. x + 299.
- [9] L. MAZLIAK. « The beginnings of the Soviet encyclopedia. The utopia and misery of mathematics in the political turmoil of the 1920s. » *Centaurus* **60**, n° 1 (2018), p. 1-27.
- [10] L. MAZLIAK. « The ghosts of the École Normale. » English. *Stat. Sci.* **30**, n° 3 (2015), p. 391-412.
- [11] L. MAZLIAK et P. ŠIŠMA. « The Moravian Crossroad: Mathematics and Mathematicians in Brno Between German Traditions and Czech Hopes. » *International Archives for History of Science* **65**, n° 2 (2015), p. 729-758.
- [12] L. PETITGIRARD. « L'ingénieur Nicolas Minorsky (1885–1970) et les mathématiques pour l'ingénierie navale, la théorie du contrôle et les oscillations non linéaires. » French. *Rev. Hist. Math.* **21**, n° 2 (2015), p. 173-216. ISSN : 1262-022X; 1777-568X/e.
- [13] L. M. VERBURGT et O. HOPPE-KONDRIKOVA. « On A. Ya. Khinchin's paper 'Ideas of intuitionism and the struggle for a subject matter in contemporary mathematics' (1926): a translation with introduction and commentary. » English. *Hist. Math.* **43**, n° 4 (2016), p. 369-398.

**Laurent MAZLIAK**

LPSM, Sorbonne université
 laurent.mazliak@upmc.fr

Historien des mathématiques, et mathématicien de formation, il est Maître de conférences au Laboratoire de probabilités, statistiques et modélisation à Sorbonne université à Paris. Il s'est surtout intéressé à l'histoire des mathématiques, notamment des probabilités, au début du xx^e siècle, et plus particulièrement au rôle joué par la Première Guerre mondiale sur les communautés mathématiques de différents pays (France, Italie, et plusieurs pays de d'Europe centrale et de l'est). Il a publié plusieurs ouvrages avec Rossana Tazzioli, notamment *Mathematicians at War* (Springer, 2009), qui analyse la correspondance entre Vito Volterra et ses collègues français au cours de la Grande Guerre.

**Rossana TAZZIOLI**

Laboratoire Paul Painlevé, Lille
 rossana.tazzioli@univ-lille.fr

Elle enseigne l'histoire des mathématiques à l'université de Lille où elle est Professeur depuis 2008. Son domaine de recherche principal est l'histoire des mathématiques aux xix^e et xx^e siècles, et notamment le développement de concepts mathématiques pour la physique, comme la théorie de l'élasticité de Lamé, les équations de Fredholm ou le calcul différentiel absolu de Levi-Civita. Elle s'est en outre beaucoup intéressée à la période de la Première Guerre mondiale, et a publié différents ouvrages et articles sur la question.

Le Florilège de la popularisation des mathématiques

- M. CHALEYAT-MAUREL
- S. CORDIER
- M. DARCHE
- M. J. ESTEBAN



FLORILÈGE
 DE LA POPULARISATION
 des mathématiques

Depuis quelques mois un nouveau site dédié aux modes de popularisation des mathématiques est né : il s'agit du « Florilège de la popularisation des mathématiques », <https://www.florilege-maths.fr>. Ce site n'a pas été conçu pour être actif dans la popularisation, mais pour être la mémoire de la popularisation des mathématiques en France et dans les régions francophones.

La création du Florilège vient du sentiment qu'il serait dommage de perdre l'information et le souvenir de tout ce qui a été accompli par des individus et des institutions depuis toujours et qui pourrait inspirer d'autres dans l'avenir. Des trésors inattendus se sont révélés ! L'équipe qui a préparé la base de données qui alimente le site du Florilège

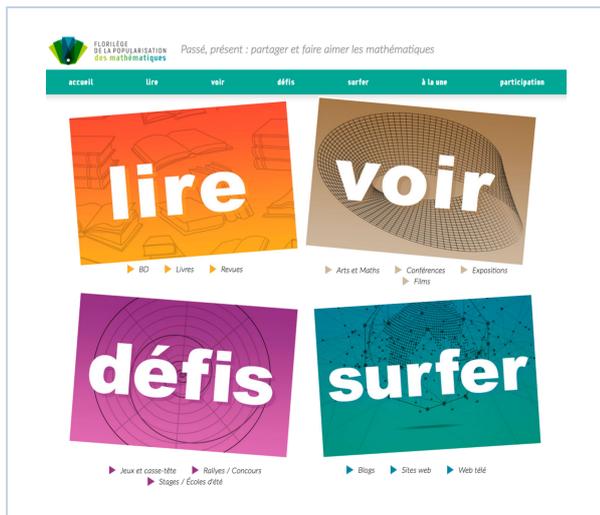
a découvert qu'en plus des actions et publications qui étaient bien connus d'eux, il y a eu, et parfois loin dans le temps, d'innombrables actions et initiatives très intéressantes pour promouvoir les mathématiques auprès du grand public, des étudiants, etc. Qui savait par exemple que George Sand avait eu pour premier amant un grand vulgarisateur de sciences, le beau Stéphane Ajasson de Gransagne (1802-1846) ? Aviez-vous remarqué les noms des mathématiciens apposés en lettres d'or sur la Tour Eiffel ?

Dans le site du Florilège il y a deux niveaux : (1) la base de données sous-jacente qui contient un nombre important de fiches concernant des actions ou produits de la popularisation des mathématiques en français (livres, vidéos, films, BD, expos, blogs, jeux), mais aussi les acteurs derrière eux, auteurs et associations, ainsi que (2) les lieux où ces actions se produisent. Au moment du lancement du site il y avait plus de 1300 fiches dans cette base de don-

nées, et il y en a au moins une centaine de plus à ce jour.

Cependant, la richesse de la base de données n'est pas tout, loin de là. Il faut une interface pratique et facile à utiliser qui invite à la consulter. Donc après l'étape importante de la collecte d'informations, il y a eu une réflexion sur la structuration des données, et sur la présentation afin que ce site ne soit pas une liste inutilisable ou difficilement exploitable.

Les données et fiches ont été classées en quatre catégories : LIRE, VOIR, DEFIS, SURFER, elles-mêmes classées en sous-catégories. Dans LIRE nous trouvons naturellement les livres, les BD et les revues. Dans VOIR il y a les vidéos et films qui parlent des mathématiques en vue de leur popularisation, des expositions et conférences, et tout ce qui se rapporte au sujet « Arts et maths ». La section DEFIS répertorie les jeux, rallyes, casse-têtes, concours, mais aussi les écoles d'été qui ont à voir avec la vulgarisation. Finalement, dans SURFER on trouve les activités liées à internet, comme les blogs, sites web et web-télévisés.



Naturellement les publications (livres, revues, etc.) forment le plus ancien support de vulgarisation. Au début du projet du Florilège nous avons décidé de ne pas prendre en compte les ouvrages pédagogiques destinés à l'enseignement des mathématiques, qu'on trouve très tôt en Europe à partir du philosophe romain Boèce (480-524), et de se consacrer à la vulgarisation des mathématiques pour un public plus large. En suivant cette décision, et grâce à l'immense savoir de deux historiens des mathématiques, Bernard Bru et Pierre Crépel, dont les précieuses indications ont été déterminantes

pour dresser l'historique de la vulgarisation mathématique, il apparut que les premières publications étaient de l'ordre du divertissement avec les « Problèmes plaisants et délectables » (1612) du mathématicien et humaniste Bachet de Méziriac (1581 - 1638).

La rubrique LIRE correspond aux activités « classiques » liées à la popularisation des sciences en général, et des mathématiques en particulier. Mais il est clair que l'évolution actuelle des moyens de communication fait que la rubrique VOIR est devenue très importante, et que la rubrique SURFER pourra peut-être devenir primordiale dans l'avenir.

Trois éléments complètent le site du Florilège : (1) un bon moteur de recherche avec, si besoin, des critères de recherche (âges, auteurs, lieux, dates); (2) un onglet « Participation » qui permet à qui veut de proposer des informations qui manquent dans le site ou qui sont nouvelles. En effet, personne ne peut prétendre tout connaître et l'équipe du Florilège est consciente qu'il y a eu sûrement des oublis; (3) des textes de réflexion sur ce qu'est la popularisation des sciences et d'introductions aux activités liées aux différentes rubriques du site. Cette partie a été réalisée par Michèle Chouchan, ancienne productrice et coordinatrice à France Culture et auteur d'essais sur les sciences et leurs publics.



L'actualité n'est pas *a priori* un des objectifs du site, mais nous avons quand même décidé de créer deux rubriques « à la une » et « Zoom » pour les fiches qui rentrent dans le site et qui sont d'actualité. Nous avons aussi prévu une lettre d'information

trois fois par an pour annoncer les nouveautés, soit par rapport à des activités du moment, soit à des trouvailles intéressantes sur le passé.

Nous invitons tous les collègues intéressés par la vulgarisation des mathématiques à consulter le site et à l'utiliser. Mais aussi nous encourageons toutes les personnes qui l'apprécient à le faire connaître auprès des gens en dehors de notre communauté, jeunes, étudiants et grand public en général. Ce site est un site de mémoire, mais nous

voulons qu'il s'agisse d'une mémoire vivante, qu'il continue à s'enrichir, pour que ce qui se passe actuellement et dans un futur proche ou plus lointain reste aussi dans la mémoire et puisse intéresser, inspirer, motiver d'autres futurs acteurs de la popularisation des mathématiques.

Si vous voulez être tenu au courant, abonnez-vous sans attendre sur la page d'entrée du site : <https://www.florilege-maths.fr>



Mireille CHALEYAT-MAUREL

Professeur émérite de mathématiques, université Paris Descartes
Mireille.Chaleyat@math-info.univ-paris5.fr



Stéphane CORDIER

Professeur en mathématiques appliquées à l'université d'Orléans
cordier@math.cnrs.fr



Michel DARCHE

Directeur honoraire et fondateur de Centre•Sciences, ccst1 de la région Centre-Val de Loire
mldarche@gmail.com



Maria J. ESTEBAN

DR-CNRS, spécialiste des EDP non linéaires et physique mathématique
esteban@ceremade.dauphine.fr

Les auteurs de l'article remercient chaleureusement Rouchdi Bahloul pour sa relecture détaillée et pour ses conseils.

Apprendre Autrement : le point de vue d'un mathématicien sur la création d'un parcours de licence

Apprendre Autrement est un parcours sur les deux premières années de licence qui permet à des étudiants en grande difficulté, en particulier à ceux issus de bacs technologiques, de poursuivre leurs études au sein d'une licence de sciences pour l'ingénieur. Les enseignements de mathématiques, de physique et d'informatique sont adaptés au public et conçus autour d'une synergie multi-disciplinaire et suivant des objectifs réalistes. Le succès de ce projet a attiré l'attention du jury du Prix Jacqueline Ferrand 2018 de la Société Mathématique de France (mention spéciale). Je partage ici mon expérience concernant l'enseignement des mathématiques.

• F. VIGNERON

Le parcours *Apprendre Autrement* est une formation universitaire dédiée aux étudiants en grande difficulté, en priorité (mais pas seulement) à ceux issus d'un baccalauréat technologique. Il est intégré aux deux premières années de la licence de sciences pour l'ingénieur de la Faculté des sciences et technologie de Créteil. Le parcours est adapté à son public non seulement au niveau des contenus enseignés mais aussi dans le choix des méthodes pédagogiques. L'objectif premier est de permettre une poursuite d'étude en licence de sciences pour l'ingénieur « standard », en troisième année.

Après plusieurs années de test et d'expérimentation pédagogique, les résultats confirment la qualité de la formation et son adéquation au public spécifique visé. L'objet de cet article est de recueillir l'expérience pédagogique acquise lors de la mise en place de ce parcours. L'accent est porté sur l'enseignement des mathématiques, l'analyse de son rôle structurant et des relations entre cette discipline et les autres matières enseignées.

Le reste de l'article est organisé de la façon suivante. Dans une première partie, je présente le projet *Apprendre Autrement* dans son ensemble, ainsi que les données statistiques qui attestent du succès de ce programme. Dans une seconde partie,

je dégage les éléments clé de la stratégie pédagogique qui a été retenue dans le projet, concernant l'enseignement des mathématiques, en identifiant six axes d'action majeurs. Dans une troisième partie, je présente en détail chacun des axes d'action pour répondre aux trois questions : comment est-il concrètement implémenté, quel est son rôle pédagogique et comment est-il reçu par les étudiants ? Une dernière partie met brièvement le projet en perspective et présente les conclusions de cette étude qui, rappelons-le, relève avant tout de la pédagogie expérimentale.

1. Présentation générale du projet *Apprendre Autrement*

En 2013-2014 et à l'occasion de la réforme des bacs technologiques et l'apparition du bac technologique STi2D¹, la faculté des sciences et technologie de Créteil s'est intéressée, à la demande du recteur de l'académie et sous l'impulsion d'un collègue de sciences pour l'ingénieur, Franck Monmasson, au devenir des étudiants issus des filières technologiques. Le constat s'est avéré très alarmant. Aussi loin que remontent les statistiques antérieures à

1. STi2D = Sciences et Technologies de l'industrie et du Développement Durable.

2014, parmi les étudiants titulaires d'un bac technologique inscrits chaque année au portail MISIPC² des licences de la faculté, quasiment aucun n'a pu valider le premier semestre.

Les mathématiques et la physique jouant un rôle central dans le tronc commun de l'offre de formation, j'ai reçu, avec une collègue physicienne, Monique Margulies, la mission d'analyser les raisons de cet échec et de proposer des solutions pédagogiques innovantes pour y remédier. Nos efforts ont conduit à la création d'un nouveau parcours, baptisé *Apprendre Autrement*, en première et deuxième années de licence (L1 et L2) au sein du portail MISIPC. La pédagogie de ce parcours a été spécifiquement étudiée pour adoucir la transition Lycée-Supérieur, renforcer les prérequis nécessaires à la poursuite des études et préparer l'insertion des étudiants dans un L3 standard de sciences pour l'ingénieur, ainsi que dans des formations professionnalisantes. En 2018, une première promotion de L1 a intégré avec succès les enseignements communs de niveau L3 et a obtenu le diplôme de licence. Au printemps 2018, des collègues m'ont incité à partager mon expertise avec le reste de la communauté mathématique. C'est ainsi que j'ai rédigé le document de synthèse [6] et que j'ai postulé à la première édition du Prix Jacqueline Ferrand. Ce prix, organisé par la Société Mathématique de France, a pour objectif de « récompenser une opération pédagogique innovante dans le domaine des mathématiques ». J'ai été particulièrement honoré de recevoir une Mention spéciale.

1.1 – De quoi s'agit-il ?

L'organisation du parcours *Apprendre Autrement* est la suivante. Le parcours est constitutif de la licence de sciences pour l'ingénieur de la faculté des sciences de l'université Paris-Est Créteil. Ce parcours comporte deux ans de formation. Les étudiants n'obtiennent pas de diplôme au bout de deux ans, mais sont crédités chaque année de 60 ECTS.

Pendant les deux premières années de formation, les enseignements de tronc commun sont modifiés : tous les cours de mathématiques, de physique et d'informatique, soit environ 150h d'enseignement par semestre, sont remplacés par des enseignements spécifiques.

Au terme de ces deux ans, les étudiants intègrent la troisième année de la licence qui est com-

mune à tous les étudiants de sciences pour l'ingénieur et obtiennent alors le diplôme de Licence sans être distingués de leurs camarades de promotion.

L'ordre de grandeur des effectifs est celui d'un groupe de TD de licence. Nous acceptons 25 inscrits en L1 et cette capacité d'accueil est atteinte. Au début du second semestre, nous recevons des demandes supplémentaires d'étudiants du tronc commun souhaitant se réorienter et bénéficier du parcours *Apprendre Autrement* suite à un échec. Dans ce cas, il est souvent préférable d'inciter ces candidats au redoublement pour leur permettre de bénéficier de l'intégralité du dispositif, mais les plus motivés sont intégrés au groupe. En L2, l'effectif est un peu plus restreint, de l'ordre de 16 étudiants. Il correspond essentiellement aux étudiants du parcours ayant validé leur première année. Bien que la pédagogie du dispositif *Apprendre Autrement* soit conçue sur deux ans, la réorientation à partir du tronc commun est possible à l'entrée de L2 ; elle est alors étudiée au cas par cas.

1.2 – Quel public pour *Apprendre Autrement* ?

Le parcours a initialement été conçu pour accueillir les étudiants titulaires d'un baccalauréat technologique, en particulier ceux de profil STi2D. Il est cependant apparu très rapidement que ce parcours devrait s'adresser simultanément à plusieurs profils d'étudiants. Les raisons de ce choix sont les suivantes.

La diversité des profils offre d'abord un bénéfice interne au parcours : elle améliore l'ambiance de travail et l'émulation. Le fait de côtoyer des étudiants de niveaux variés (en particulier des bac S en difficulté) casse le complexe d'infériorité (typiquement, des bacs technologiques) et motive les plus faibles à fournir du travail personnel. Inversement, les étudiants prennent conscience de leurs forces et de leurs faiblesses et un état d'esprit d'entraide émerge rapidement.

La diversité offre aussi un bénéfice externe, à l'échelle de l'ensemble de l'offre de formation. En effet, les difficultés rencontrées par les étudiants titulaires de bacs technologiques sont statistiquement plus prononcées, mais de nature identique aux difficultés rencontrées par de nombreux étudiants titulaires de bacs scientifiques.

Parmi les compétences en souffrance, on peut citer :

2. MISIPC = Maths, Informatique, Sciences pour l'Ingénieur, Physique, Chimie.

FIGURE 1 – Maquette du parcours

	Semestre 1	Semestre 2	Semestre 3	Semestre 4
UE Spécifiques	Mathématiques 1	Mathématiques 2	Mathématiques 3	Mathématiques 4
	Introduction à Scilab & Javascool	Démarche Expérimentale 1	Démarche Expérimentale 2	Démarche Expérimentale 3
	Physique 1	Physique 2	Physique 3	Physique 4
Tronc commun	Atomes & Molécules			Systèmes électromécaniques
		Langage informatique 1	Architecture des ordinateurs	Bases de l'électronique
	Programmation 1	Langage informatique 2	Programmation en C	Electronique combinatoire Electronique séquentielle
	Techniques d'expression & méthodologie	Techniques d'expression & méthodologie		Automatismes et informatique industrielle
		Option transversale	Option transversale	
	Anglais	Anglais	Anglais	Anglais

1. le calcul des fractions ;
2. les manipulations algébriques du 1^{er} degré (en particulier, comment isoler un terme dans une expression ?) ;
3. comprendre la signification et savoir manipuler des inégalités ;
4. savoir faire des choix logiques et les enchaîner pour résoudre un problème ;
5. avoir conscience de l'universalité de la notion de fonction (en particulier pour exprimer un problème en termes mathématiques) ;
6. maîtriser le mécanisme de substitution (en particulier, identifier le mécanisme de composition qui engendre une expression donnée) ;
7. comprendre un texte scientifique ;
8. identifier puis exprimer une question mathématique ;
9. un manque chronique de pratique des notions abordées dans l'enseignement secondaire.

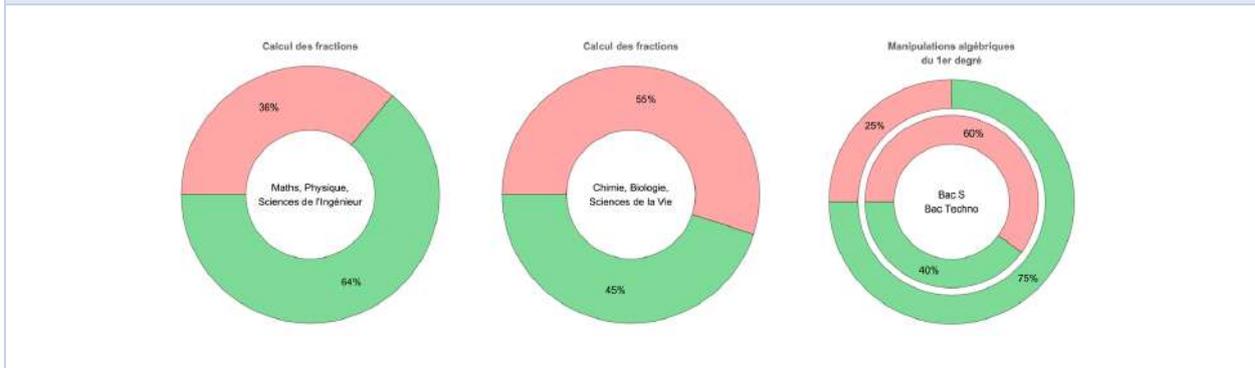
Dans la mesure du possible il est donc naturel d'offrir une solution à l'ensemble des étudiants en difficulté et pas seulement à une fraction très spécifique du public.

Pour avoir un effet optimal, la diversité des profils doit cependant être associée à un élément unificateur. Dans le cadre d'un entretien préalable, nous avons exigé comme prérequis d'entrée dans le parcours *Apprendre Autrement* que les étudiants reconnaissent la réalité de leurs difficultés, expriment leur motivation à accepter de l'aide pour y remédier, ainsi que leur détermination à travailler et consentir des sacrifices pour réussir.

1.3 – Est-ce que ça marche ?

Au terme de 5 ans d'expérimentations pédagogiques, le bilan est très positif. Si les deux premières années ont été surtout marquées par des

FIGURE 2 – Exemples de difficultés courantes rencontrées en licence scientifique. Les statistiques ci-dessus concernent l'ensemble des étudiants inscrits en L1 à la Faculté des sciences de Créteil (environ 500 étudiants en MISIPC et 600 en CB-SVT). Sur le 3^e diagramme, on compare les bacs S (intérieur) et les bacs techno (extérieur) sur un échantillon de 50 étudiants MISIPC. En vert le taux de réussite, en rouge le taux d'échec à la question posée.

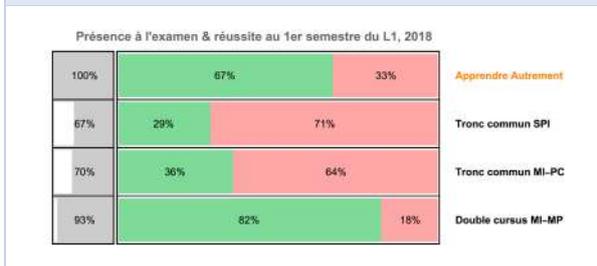


échecs (défaut d'effectif, erreurs pédagogiques...), le projet a atteint un « régime de croisière » sur la période 2015-2018. Il est important de noter que l'évaluation de *Apprendre Autrement* est différente des épreuves communes aux autres parcours en L1 et L2. L'objectif est donc considéré comme atteint au vu des résultats obtenus en L3 par les anciens élèves du parcours.

Au niveau du L1, le profil de réussite des étudiants *Apprendre Autrement* (mesuré en terme de présence à l'examen et de taux de réussite parmi les présents) est comparable au profil des parcours sélectifs comme les doubles cursus Maths-Info et Maths-Physique avec un effectif similaire de 24 étudiants.

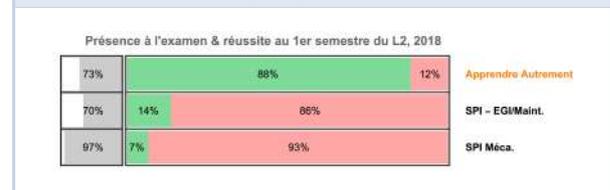
fil de réussite du parcours *Apprendre Autrement* est troublant, avec le succès de 2/3 des étudiants inscrits. Si ce taux a parfois provoqué l'incrédulité des collègues, voire l'accusation d'une notation de complaisance, les résultats d'intégration en L3 confortent l'authenticité du progrès des étudiants concernés. Il convient cependant de moduler ce succès par le fait qu'il n'existe pas d'éléments de comparaison au niveau L2 avec des étudiants d'un parcours « classique » mais dont le contenu serait correctement adapté à leur niveau. D'autre part, grâce à un mécanisme de compensation entre UES et entre semestres, les statistiques de l'année sont légèrement moins sévères, mais la rigueur du premier semestre entraîne beaucoup d'abandons.

FIGURE 3 – Profils de réussite comparés au 1^{er} semestre de L1, par parcours. À gauche, le taux de participation à l'examen. À droite, le taux de réussite (en vert) et d'échec (en rouge) parmi les étudiants présents à l'examen.



Au niveau du L2, le tronc commun est en général synonyme d'hémorragie pour la licence de sciences pour l'ingénieur avec un taux de réussite de l'ordre de 1 étudiant sur 10. Au contraire, le pro-

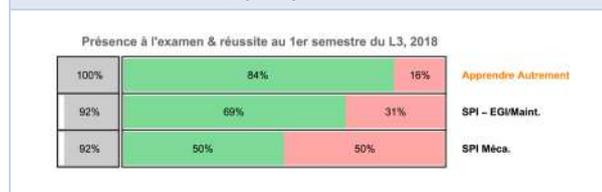
FIGURE 4 – Profils de réussite comparés au 1^{er} semestre de L2, par parcours.



En 2017-2018, une dizaine d'étudiants issus de la première promotion *Apprendre Autrement* a intégré le tronc commun de L3 de la Licence de sciences pour l'ingénieur (représentant 15% de l'effectif) avec un succès remarquable. Une fois les étudiants en L3, je n'ai eu aucun moyen d'influencer le contenu de leurs enseignements ou leur notation. Si les résultats de la 3^e année de licence sont globalement satisfaisants, ceux des anciens élèves du parcours *Apprendre Autrement* les distinguent

comme les éléments les mieux préparés aux enseignements d'ingénierie et constituent le principal indicateur de succès du parcours *Apprendre Autrement*.

FIGURE 5 – Profils de réussite comparés au 1^{er} semestre de L3, par parcours.



La réussite des élèves impliqués dans cette expérience pédagogique a nécessité une très forte implication des intervenants. Des milliers d'heures cumulées ont été nécessaires pour analyser le matériel pédagogique existant, pour concevoir de nouvelles maquettes et pour créer du matériel pédagogique multidisciplinaire nouveau. L'équilibre que nous avons atteint est le fruit d'une succession de tâtonnements, accompagnés d'une analyse critique des échecs et des succès. La suite de cet article détaille les conclusions auxquelles nous sommes arrivés.

2. Une stratégie sur plusieurs axes d'action

Au vu des statistiques présentées à la section précédente, la réussite du programme *Apprendre Autrement* est désormais établie. Il importe maintenant de dégager les principes pédagogiques qui l'ont permise, en particulier en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques. Le principe fondamental est celui de **l'adaptation du contenu**, à la fois au public et aux objectifs, qu'il convient d'identifier précisément et avec réalisme.

Concrètement, j'ai identifié six axes d'action majeurs. Mais j'insiste sur le fait que, si chaque axe a son importance propre, c'est bien l'action conjointe et simultanée le long de ces six axes qui a été la clé de la réussite de l'expérience *Apprendre Autrement*.

1. **Donner du recul et du sens** en construisant le cours autour de problèmes directs réalistes qui servent de motivation, d'exemples non artificiels, et, au terme de l'enseignement, de sujets de travaux pratiques.
2. **Remédier à l'incompréhension de l'écrit** (ou d'un cours structuré) en utilisant des sup-

ports interactifs permettant des expérimentations numériques. Au-delà du gadget, ces supports peuvent être utilisés pour transmettre une compréhension dynamique et en profondeur des concepts abstraits.

3. **Oser le « computational thinking »** : le fait de coupler l'enseignement des mathématiques à une pratique courante de la programmation permet de travailler la rigueur de pensée et d'expression et assoit la logique dans un cadre concret.
4. **Oser le multi-disciplinaire** : au-delà de la simple synchronisation des notations et de la progression entre les mathématiques, la physique et l'informatique, nous avons créé des UE dont l'enseignement se fait à partir de projets multi-disciplinaires co-encadrés. Ces enseignements permettent d'insister sur le sens et la cohésion des savoirs et de la démarche scientifique et permettent aux étudiants de travailler leur maîtrise de l'expression.
5. **Pratiquer un entraînement régulier au calcul** à l'aide de retours brefs mais systématiques sur des notions de l'enseignement secondaire, suivis de devoirs hebdomadaires à préparer à la maison. Une deuxième phase sur la plateforme WIMS permet d'automatiser l'entraînement et de le rendre autonome.
6. **Une nouvelle façon d'évaluer, associée à des objectifs pragmatiques**. Au lieu d'annoncer un programme féérique mais de n'exiger la maîtrise que d'une fraction relativement faible du programme, j'ai préféré définir clairement et publiquement des attendus réalistes, exprimés en termes de savoirs et savoir-faire (c'est-à-dire de *compétences*), et en exiger leur maîtrise (quasi) totale. Cela m'a permis de faire de l'évaluation un outil de travail en autonomie au lieu d'être un simple indicateur de progression que les étudiants en difficulté sont conditionnés à ignorer.

En fonction du public et de l'objectif pédagogique à long terme (en particulier, si on cherche à transposer l'expérience dans un autre contexte), le poids entre ces différents axes peut être modulé. Je pense cependant que la négligence de l'un des points ne peut que fragiliser l'ensemble de l'édifice des connaissances, compliquer sa transmission et engendrer des difficultés en aval.

3. Réalisation pratique des axes d'action

Le reste de cet article donne des précisions quant à la réalisation pratique des axes d'action présentés ci-dessus.

3.1 – Donner du recul et du sens

Voici un exemple de problème directeur, utilisé au 1er semestre de L1. Les objectifs du cours pour le semestre sont d'asseoir les concepts de fonction et d'équation, travailler le mécanisme de substitution et la signification de la dérivée, assurer le calcul vectoriel dans le plan et dans l'espace et l'utilisation correcte des fonctions trigonométriques.

L'un des problèmes directeurs choisis est celui de l'analyse de la trajectoire d'un avion à partir de données GPS qu'on peut télécharger facilement sur le web. Répondre à la question « identifier la phase de vol transsonique » permet de travailler les concepts de fonction, d'équation et de substitution dans un contexte réaliste et motivant.

$$\begin{cases} V_{\text{son}}(h) & : \text{vitesse du son en fonction de l'altitude,} \\ H(t) & : \text{altitude de l'avion en fonction du temps,} \\ V(t) & : \text{vitesse de l'avion en fonction du temps.} \end{cases}$$

La phase transsonique correspond à une inéquation entre fonctions composées :

$$\mathcal{T} = \{t \in [T_0, T_1] \mid V(t) \geq 0.8 \times V_{\text{son}}(H(t))\}.$$

Le calcul approché de la vitesse de l'avion à partir des relevés GPS amène son lot de compositions, de géométrie vectorielle et de trigonométrie, tout en donnant du sens à la notion de dérivée. La reconstruction de la trajectoire en intégrant les valeurs numériques de vitesse et de cap est validée si elle se superpose à la trajectoire enregistrée.

Au final, la programmation de tous ces calculs en travaux pratiques exige un niveau de compréhension du cours et une précision d'expression bien plus élevés que le niveau moyen dont les étudiants ont l'habitude de se satisfaire.

Pour discuter le mérite général de la notion de problème directeur, je tiens à insister sur le fait que cette démarche n'est pas nécessairement multidisciplinaire. Je n'oublierai jamais le splendide cours de géométrie différentielle de Jean-Benoît Bost à l'ÉNS : son problème directeur était le théorème de

la boule chevelue. Après nous l'avoir démontré à la main lors de la première séance, l'essentiel du cours a consisté à assembler des concepts nouveaux permettant, à la dernière séance, de fournir une nouvelle preuve bien plus riche de sens.

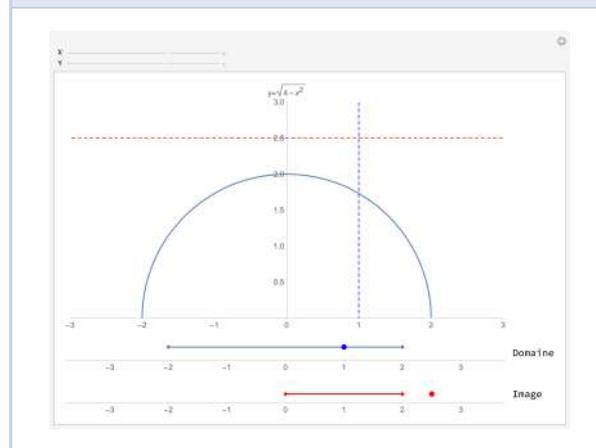
3.2 – Remédier à l'incompréhension de l'écrit

Beaucoup d'étudiants du parcours *Apprendre Autrement* ont des difficultés à comprendre un texte scientifique écrit ou un discours structuré [3].

Par exemple, les concepts associés à l'équation d'une droite (pente, ordonnée à l'origine, vecteur directeur quelconque, vecteur directeur dont la première composante est normalisée, vecteur normal, fonction affine et sa dérivée) sont souvent flous et mélangés. Le fait de voir un graphique fixe sur lequel l'enseignant ajoute peu à peu, à la craie, des annotations, semble ne pas du tout les éclairer.

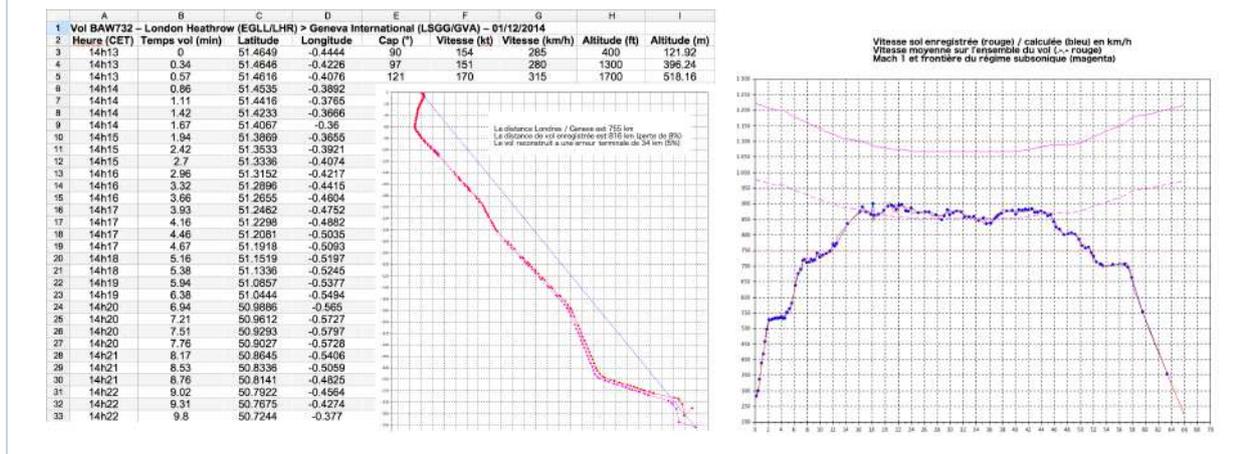
À l'inverse, l'utilisation de supports interactifs permet non seulement de capter l'attention [1] mais aussi de faire virtuellement l'expérience des effets des différents paramètres en les modifiant à la souris et donc de développer l'imagination scientifique.

FIGURE 7 – Un exemple d'applet interactif pour enseigner la distinction Domaine / Image.



Indépendamment des applets préparés à l'avance, le fait d'avoir un outil de programmation et de visualisation à disposition dans la salle de classe permet de donner, dans la mesure où l'enseignant est suffisamment à l'aise avec cet outil pour l'utiliser comme une craie, une dimension nouvelle aux questions des étudiants. Par exemple, en

FIGURE 6 – Le problème directeur de l'analyse de la trajectoire d'un avion.



traçant simultanément les graphes des deux fonctions suivantes, les étudiants ont non seulement été convaincus que

$$\sin(2x + 3) \neq \sin(2x) + 3$$

mais ils ont aussi pris conscience du fait que les mathématiques sont exactes « au caractère près ». Pour beaucoup d'étudiants du parcours *Apprendre Autrement*, ce fut une illumination.

Pour le mathématicien, la rigueur d'une définition est une évidence rassurante. L'enseignant hésite donc souvent à refaire, avec son public, le chemin qui a conduit les mathématiciens à définir un concept abstrait. Par exemple, le concept d'espace vectoriel est sobre et puissant. Mais l'introduire après avoir joué un peu dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 n'est pas suffisant. Au contraire, traiter d'abord numériquement un problème réel de contrôle de process industriel [2] sur lequel on illustre le principe de superposition et éventuellement ses limites en tant qu'approximation linéaire illustre que l'algèbre linéaire est la clé qui permet de choisir les paramètres de contrôle. Après un tel exemple complet, l'abstraction d'espace vectoriel apparaît naturellement comme le squelette qui reste une fois que les détails spécifiques ont été épurés.

Au-delà de l'aspect ludique, les supports interactifs et les expérimentations numériques peuvent donc être utilisés pour transmettre une compréhension dynamique et en profondeur des concepts abstraits. Le prix est un rythme de cours ralenti, mais le gain est incommensurable.

FIGURE 8 – Le « labo mobile » constitué de 20 ordinateurs portables, un projecteur et un serveur s'est avéré indispensable pour pallier le défaut de disponibilité des salles informatiques.



3.3 – Oser la pensée algorithmique ou « computational thinking »

Ce concept peu connu en France est simplement le processus mental à la racine de l'algorithmique. C'est l'enchaînement cyclique d'une phase d'analyse (en termes physiques, chimiques...) d'un problème concret, d'une phase mathématique de reformulation dans un cadre abstrait puis d'une phase informatique de construction d'une solution par un mécanisme automatisé. Le cycle se poursuit jusqu'à ce que la solution obtenue soit jugée satisfaisante.

L'exemple le plus simple consiste à écrire un algorithme pour répondre au problème suivant.

Un sapin a 50 cm. Il pousse de 50 cm par an. On veut le couper quand il me-

surement 2 m. Écrivez un programme qui indique quand couper le sapin.

Il y a une gradation naturelle des réponses, de `print` (« dans 3 ans ») où le travail de résolution est assuré par l'humain, à un code entièrement automatisé et paramétrable qui peut traiter, à l'aide d'un algorithme, toute la classe des problèmes analogues.

Le fait d'associer les mathématiques, la physique et l'informatique dans un seul processus mental contribue à resserrer les liens entre des disciplines que les étudiants ont tendance à penser comme orthogonales. Par exemple, beaucoup d'étudiants *Apprendre Autrement* ont du mal à identifier quelles opérations faire et dans quel ordre les enchaîner, afin de réaliser une tâche mathématique prescrite (par exemple isoler un terme dans une expression). L'algorithmique et la programmation permettent de travailler cette compétence dans un contexte plus concret où leur « bon sens » aide.

D'autre part, la programmation permet de travailler la rigueur de pensée et d'expression. Un message d'erreur `Syntax Error, Line 13, undefined operation` fait infiniment mieux pour convaincre les étudiants que les mathématiques (et les sciences en général) doivent être exactes au caractère près, qu'un sermon de l'enseignant sur l'importance de l'ordre des quantificateurs.

Il importe d'ailleurs d'insister sur le fait qu'une preuve mathématique est une forme d'algorithme de vérité dont le cerveau humain est le compilateur : le même niveau de précision du langage (exact au caractère près) est nécessaire dans une preuve mathématique, et de même qu'un programme « fait » quelque chose, une preuve mathématique doit s'accompagner d'un progrès dans la vérité mathématique. À ma grande surprise, beaucoup d'étudiants n'en avaient jamais pris conscience !

Le recours au « Computational Thinking » a permis aux étudiants du parcours *Apprendre Autrement* de s'ouvrir au cours de mathématiques et d'y trouver non seulement un nouvel intérêt mais aussi, lorsque leur programme tourne, une grande valorisation personnelle.

3.4 – Oser le multi-disciplinaire

Les mathématiques jouent un rôle central dans la pédagogie du parcours *Apprendre Autrement*. Il est cependant apparu très clairement qu'une stratégie d'enseignement efficace exige une collaboration soutenue avec la physique et l'informatique.

Le premier niveau de collaboration est la synchronisation des notations et de la progression entre mathématiques, physique et informatique.

Au deuxième niveau, la construction du cours de mathématiques autour de problèmes directeurs a pris pleinement son sens lorsque les collègues ont réalisé qu'ils pouvaient utiliser ces mêmes problèmes dans le cours de physique. Au lieu d'induire des répétitions, les points de vue complémentaires se sont avérés enrichissants.

Par exemple, le TP de mathématiques consacré à l'étude du circuit de commande d'une basse électrique a non seulement eu un certain succès théâtral, mais il a été utilisé en physique pour présenter les lois de l'électrocinétique, la notion d'impédance complexe et celle de réponse des dipôles linéaires. En mathématiques, le problème a été utilisé pour aborder la notion d'équation différentielle et de nombres complexes. Enfin, l'UE de Démarche Expérimentale s'en est servi pour présenter les effets sonores sous l'angle du traitement du signal.

Le troisième niveau a été la création de trois UE « Démarche expérimentale » (une par semestre, à partir du second semestre de L1). Le principe de chacune de ces UE est de réaliser deux ou trois projets multi-disciplinaires, co-encadrés par un enseignant de mathématiques et un de physique. La séquence typique d'un projet est la suivante.

1. Présentation du problème sous l'angle de la physique.
2. Modélisation mathématique.
3. Réalisation de l'expérience.
4. Résolution algorithmique du modèle et simulation numérique.
5. « Debriefing » : interprétation physique des prédictions du modèle en comparaison avec les résultats expérimentaux.
6. Rédaction d'un rapport (à la maison).
7. Soutenance devant un jury constitué des deux enseignants et devant le public des autres étudiants.

Si les rapports et les exposés des premières séquences sont souvent assez naïfs, la pratique régulière de ce mode d'enseignement induit des progrès très impressionnants. La plupart des étudiants ont passé de nombreuses heures à réfléchir aux problèmes et améliorer leur présentation. Au-delà du contenu scientifique, cette UE récurrente est donc aussi un entraînement régulier à s'exprimer correctement, à l'écrit et à l'oral, sur des sujets scientifiques.

La question de l'honnêteté intellectuelle a bien sûr été posée. Au lieu de recopier les uns sur les autres sans comprendre, ils ont appris à s'entraîner et à donner officiellement crédit à ceux qui les avaient aidés.

3.5 – Entraînement régulier au calcul

Une majorité d'étudiants du parcours *Apprendre Autrement* souffre d'un manque chronique de pratique du calcul numérique et algébrique. Pour y remédier, nous avons exigé qu'ils s'entraînent régulièrement sur les bases de mathématiques de collège/lycée. L'entraînement a revêtu deux formes.

1. Au début de chaque cours, nous exposons brièvement la notion du jour. Il s'agit d'un retour sur une notion élémentaire précisant les règles opératoires et les prérequis (écriture décimale et scientifique, opération sur les fractions, équation du premier degré, systèmes 2×2 , inégalités du premier degré, signe d'un trinôme...). Ce rappel suit un calendrier de révisions et s'appuie sur un support de cours spécifique. Une courte liste d'exercices associés est à rendre en DM pour la séance suivante.
2. En parallèle, j'ai utilisé une plateforme d'exercices en ligne : wims. L'intérêt pour l'enseignant est de réduire le volume de copies à corriger. Pour l'étudiant, c'est la possibilité de refaire des variantes du même exercice autant de fois que nécessaire.

Malgré les difficultés (environnement de travail dégradé à la maison, difficultés d'accès aux salles informatiques), la plupart des étudiants ont été attirés par la notation avantageuse associée et ont réalisé le travail régulier demandé. La pratique d'entraînements réguliers est à la fois un indicateur de la motivation de l'étudiant et un outil personnel de progression. La corrélation avec la réussite globale au parcours est très prononcée.

3.6 – Une nouvelle façon d'évaluer, associée à des objectifs pragmatiques

Au sein du parcours *Apprendre Autrement*, il a fallu trouver l'équilibre entre les contrôles qui valident l'acquisition des savoirs et savoir-faire, et

ceux dont le but est de donner aux étudiants l'opportunité d'un temps de travail en autonomie (voir aussi [4]).

Je me suis fixé comme règle d'exiger des compétences³ réalistes, de définir clairement et publiquement les attendus des contrôles, d'éviter tout effet de surprise. Dès le début du cours, j'ai publié un texte normatif, comparable au syllabus des cours américains, précisant ce qui est attendu. Ce texte est rédigé dans l'esprit du Bulletin officiel de l'éducation nationale : une colonne pour définir les connaissances, une pour expliquer les savoir-faire associés. Il permet aux étudiants d'identifier les points de cours à réviser et les exercices type à savoir refaire. J'ai aussi organisé des examens blancs facultatifs pendant la semaine de révisions pour donner aux étudiants matière à travailler ; la plupart ont participé.

FIGURE 9 – Exemple des compétences exigées au 1^{er} semestre de L1 sur la notion de fonction.

Savoir	Savoir faire
distinguer les expressions suivantes et les employer correctement dans une phrase :	reconnaitre si un graphe est celui d'une fonction ou pas
f est une fonction,	trouver graphiquement une valeur $f(x)$
la formule définissant f est $y = f(x)$,	décider graphiquement si l'équation
$f(x)$ est la valeur de la fonction f en x ,	$y = f(x)$
x est dans le domaine de définition de f ,	admet une solution ou pas, combien de solutions, et déterminer le cas échéant la valeur d'une ou de toutes les solutions.
x est un antécédent de y ,	savoir déterminer graphiquement quelles sont les valeurs prises par $f(x)$ lorsque $a \leq x \leq b$,
y est une valeur prise par f ,	savoir déterminer graphiquement les valeurs x telles que $c \leq f(x) \leq d$.
x est une solution de l'équation $y = f(x)$.	

Afin de privilégier la qualité du travail, j'ai convenu de ne pas accorder une fraction des points pour une fraction de réponse, mais seulement la totalité pour une réponse complète. La consigne donnée aux étudiants et appliquée lors de la notation est que la réussite à 80% d'un exercice représente seulement la moitié de la note maximale. Le fait de traiter complètement un exercice est donc bien mieux récompensé que picorer une question dans chaque exercice. D'autre part, le fait de définir les compétences avec pragmatisme mais de tester presque toutes les compétences annoncées lors de l'examen incite franchement les étudiants à viser au-dessus de la barre des 50% de réussite.

Dans la conception d'un sujet, il est important d'associer chaque exercice à un nombre limité de compétences précises, quitte à poser de nombreux exercices courts. L'exigence de traiter complètement un exercice prend alors tout son sens, en tant que validation de compétence.

3. Dans cet article, le terme *compétence* désigne la conjonction des savoirs et des savoir-faire.

Cela n'interdit pas de poser ponctuellement des exercices contenant des questions ouvertes, lorsque l'objectif pédagogique est précisément de tester la créativité ou la capacité à réagir face à un problème nouveau. Mais il est évident que cette compétence n'est pas la seule.

Il convient aussi d'éviter d'introduire (involontairement) une compétence multiplicative, c'est-à-dire une compétence dont la réussite est nécessaire pour valider chaque exercice et donc dont le défaut cause un échec global qui interdit l'évaluation des autres compétences.

Cette démarche a globalement permis de redonner confiance à des étudiants qui n'avaient jamais réellement appris à apprendre. Certains ont alors enfin commencé à travailler par eux-mêmes et les résultats ont suivi.

3.7 – Utiliser l'évaluation comme un outil de travail

Le premier niveau consiste à offrir un changement de point de vue pour motiver les étudiants à travailler régulièrement. Par exemple, au lieu de noter cinq DM courts sur 20 points et d'en faire la moyenne, je leur ai proposé de capitaliser de 0 à 4 points par semaine pendant 5 semaines. J'ai aussi proposé aux étudiants d'utiliser une partie de l'évaluation comme un outil de travail en autonomie. L'évaluation régulière est alors perçue comme une opportunité d'entraînement et l'échec éventuel n'est plus une sanction.

Le second niveau consiste à utiliser le texte normatif définissant les savoirs et savoir-faire attendus comme un outil de travail et un guide méthodologique auquel l'enseignant et les étudiants se réfèrent régulièrement.

Enfin, on peut mettre en place un temps de réflexion et d'entraide lors des contrôles.

Sous la forme la plus simple, l'enseignant passe dans les rangs à mi-contrôle pour proposer tour à tour à chaque étudiant une aide personnalisée qui permet de débloquer les points difficiles et les motive à reprendre le travail au lieu d'attendre avec ennui la fin de l'épreuve.

Une autre possibilité est un bref temps de pause au milieu du contrôle, avec la règle que tous les échanges sont permis, à condition que leur contenu soit public, c'est-à-dire connu de tous les étudiants et de l'enseignant. Après quelques minutes d'échange frénétique de réponses pour la

plupart fausses, les étudiants ont pris conscience de l'absurde de la situation. J'ai alors proposé aux étudiants d'élever leurs échanges au niveau d'un vrai débat scientifique. La plupart ont joué le jeu et ont proposé des arguments pour justifier leurs réponses. Après quelques minutes, ce travail de groupe improvisé a effectivement convergé vers les bonnes réponses.

Dans le même esprit, les collègues de physique ont organisé régulièrement des courtes séances de débat scientifique (20 minutes) autour des idées centrales du programme, de façon indépendante de toute évaluation. Ces séances ont été particulièrement appréciées des étudiants.

4. Conclusion

La réussite du projet *Apprendre Autrement* a été le résultat d'une action conjointe sur six fronts : donner du recul et du sens avec les problèmes directeurs, remédier à l'incompréhension de l'écrit avec des supports interactifs, oser pratiquer le « computational thinking » et l'algorithmique, développer des projets multidisciplinaires, assurer un entraînement régulier au calcul et repenser l'évaluation. Ce travail a demandé beaucoup d'efforts à l'équipe pédagogique, ainsi que la motivation et la confiance des étudiants. J'espère que le succès du parcours *Apprendre Autrement* pourra inspirer d'autres initiatives au niveau universitaire.

Quelques perspectives, pour aller plus loin

De nombreuses études internationales récentes ont été menées pour identifier les pratiques pédagogiques susceptibles d'améliorer l'expérience éducative dans l'enseignement supérieur. La réflexion s'amorce naturellement par un retour sur l'articulation entre cours magistral et travaux dirigés [7, Lad16, HMRR18]. De nombreuses initiatives pédagogiques, plus radicales, sont possibles : l'approche par compétences [7, CC10] et l'approche-programme [7, LS16], la classe inversée [7, GVG17], les pratiques interdisciplinaires [7, CFL09], l'approche par projet [7, JLV⁺14], les animations multimédias [7, BR07], l'utilisation de l'informatique [7, BDD16] et du numérique [7, MR17] et même la production de clips vidéo par les étudiants [7, RRPCG15]. Ces exemples ont été une source d'inspiration et sont, en grande partie, intégrés au cœur du dispositif *Apprendre Autrement*. Il est cependant important d'insister sur le fait que chaque élément

n'est qu'un ingrédient dans une recette complexe : l'efficacité maximale semble être atteinte par une pluralité d'approches pédagogiques conjointes.

Peu d'études sont spécifiquement consacrées à l'enseignement des mathématiques dans le supérieur. Beaucoup sont consacrées aux mathématiques mais au niveau du primaire [7, Pic09], [5]. La transposition de leurs conclusions à l'enseignement supérieur n'est pas nécessairement immédiate. Si des études internationales existent (*Wikipedia* recense 15 journaux anglophones sous le label « Mathematics education journals »), elles concernent l'ensemble de l'activité éducative, et pas seulement le niveau universitaire.

Il importe aussi d'identifier, au-delà du strict bénéfice pédagogique « théorique », les pratiques qu'on peut raisonnablement espérer pouvoir mettre en place à grande échelle, au sein de l'université, lorsqu'on prend en compte les contingences humaines, économiques et sociales. Par exemple, il est important de qualifier le ressenti des étudiants et de s'interroger sur la perception et l'appropriation des innovations pédagogiques [7, CH15, Dug15]. L'analyse de la posture intellectuelle des étudiants permet de déterminer l'influence des diverses innovations pédagogiques sur la motivation des étudiants [7, Koz10, LB14, TWRM18]. De façon complémentaire, on peut aussi adopter le point de vue des enseignants et aborder les difficultés pédagogiques rencontrées, les lacunes dans notre formation à la pédagogie et la diversité des conceptions de la notion d'innovation pédagogique [7, Pai10, DLP11, Lem18]. Bien qu'associé à une problématique particulière, le mérite de l'inclusion par rapport à l'enseignement spécialisé prodigué aux étudiants handicapés [7, BBVV09, Tre12] offre un élément de réflexion dans notre perspective d'accueil d'un public spécifique et pour l'élaboration de stratégies

d'accompagnement et de réorientation [7, AM17]. L'importance du contexte humain et social dans la démarche d'apprentissage est souvent négligée par les acteurs de l'éducation, en particulier au niveau universitaire. Ce contexte en est cependant une composante essentielle [7, RS14, Jea17] qui détermine, en grande partie, la persévérance et la réussite des étudiants [7, SFN⁺10, DDCG15].

L'analyse des dispositifs existants est un prérequis indispensable à toute initiative pédagogique, qu'il s'agisse de l'évaluation du plan de réussite en licence [7, PBB13, Per14], des remèdes pour traiter l'échec des étudiants et améliorer l'apprentissage [7, Pou14, PD15] ou du problème plus général des méthodes d'évaluation de la qualité des formations [7, SG17]. Le dispositif *Apprendre Autrement* étant intégré à la formation en sciences pour l'ingénieur, il a été naturel d'étudier les différents modèles possibles pour la professionnalisation des études et les liens avec les entreprises [7, BB12] ainsi que l'influence des dispositifs pédagogiques sur l'insertion professionnelle des étudiants [7, CG13].

Il est enfin naturel de s'interroger sur la possibilité de transposer l'expérience *Apprendre Autrement* pour l'accueil d'autres publics spécifiques. Par exemple, comment peut-on améliorer l'accès à l'université aux lycéens scientifiques ayant de nombreuses lacunes ? Il s'agit non seulement d'accueillir le public identifié « oui-si » dans *Parcoursup*, mais aussi d'accompagner les étudiants en situation d'échec en L1, L2 ou L3. Les axes d'action présentés au §2 sont une piste de réflexion.

Il semble aussi pertinent de réutiliser certains éléments développés dans cet article pour accompagner le contingent des étudiants les plus brillants de L2 et L3 vers un contenu mathématique (et multidisciplinaire) plus ambitieux.

Références

- [1] F. LANDRY et G. GOUPIL. « Trouble déficitaire de l'attention à l'université ». *Revue internationale de pédagogie de l'enseignement supérieur* 26-2 (2010).
- [2] D. C. LAY. *Algèbre Linéaire. Théorie, exercices et applications*. Ed. De Boeck, 2004.
- [3] B. MARIN et al. « Lire un texte documentaire scientifique : quels obstacles, quelles aides à la compréhension ? » *Revue française de pédagogie* 160 (2007). <http://journals.openedition.org/rfp/786>.
- [4] M. ROMAINVILLE. « Objectivité versus subjectivité dans l'évaluation des acquis des étudiants ». *Revue internationale de pédagogie de l'enseignement supérieur* 27-2 (2011).
- [5] C. TOROSSIAN et C. VILLANI. *21 mesures principales pour l'enseignement des mathématiques*. <http://www.education.gouv.fr/cid126423/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques.html>. 2018.

- [6] F. VIGNERON. *Création du parcours Apprendre Autrement en licence de sciences pour l'ingénieur : le point de vue d'un mathématicien*. https://www.dropbox.com/s/qvm3vgs9k0tnt9t/bilan_AA.pdf?dl=0. Mention spéciale du prix Jacqueline Ferrand 2018 (SMF), 2018.
- [7] F. VIGNERON. *Références complémentaires pour cet article*. https://www.dropbox.com/s/g0xdyufh8y2ctpa/vigneron_AA_auxbib.pdf?dl=0.



François VIGNERON

Université Paris-Est
francois.vigneron@u-pec.fr

François Vigneron est maître de conférences au Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées de l'université Paris-Est Créteil. Ancien élève de l'ÉNS, docteur de l'École polytechnique, habilité à diriger des recherches, il a reçu, en 2018, une mention spéciale du prix Jacqueline Ferrand, pour sa contribution à la création du parcours Apprendre Autrement. Il est depuis chargé de mission auprès de la direction de l'UFR de Sciences et Technologie, pour coordonner la nouvelle offre de formation 2020, dans les champs Mathématiques et Informatique.

L'auteur remercie chaleureusement le comité de rédaction et les relecteurs anonymes pour leurs suggestions qui ont grandement contribué à améliorer cet article. Il tient aussi à remercier les organismes qui ont permis le financement de cette initiative : l'université Paris-Est Créteil et, en particulier, l'UFR de Sciences et Technologie, ainsi que l'ANR qui a financé le projet de 2014 à 2017 par l'intermédiaire du dispositif d'Initiative d'Excellence en Formations Innovantes, IDEA.

Astérisque - nouveauté



Vol. 407
Séminaire Bourbaki, volume 2016/2017, exposés 1120-1135

ISBN 978-2-85629-897-8
 2019 - 588 pages - Softcover. 17 x 24
 Public: 70 € - Members: 49 €

Ce 69e volume du Séminaire Bourbaki contient les textes des quinze exposés de survol présentés pendant l'année 2016/2017 : correspondance de Langlands, empilements de sphères, entropie sofique, équation de Navier-Stokes, géométrie algébrique et géométrie analytique complexe, géométrie sous-riemannienne, problèmes de modules formels, propriété NIP en théorie des modèles, questions algorithmiques et géométriques en théorie des nœuds, relativité générale, théorie analytique des nombres.

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <http://smf.emath.fr>

*frais de port non compris





... les groupes approximatifs

On donne une brève introduction à la notion de *groupe approximatif* et à certaines de ses nombreuses applications.

• M. C. H. TOINTON

1. Ensembles presque stables

Une notion centrale de théorie des groupe est tout simplement celle de sous-groupe : rappelons qu'il s'agit d'un sous-ensemble contenant l'élément neutre qui est stable par produits et inverses. Il y a toutefois des circonstances où l'on a besoin de manipuler des sous-ensembles qui ne sont que « presque stables ». Cela se manifeste notamment dans le cadre de l'étude géométrique des groupes à *croissance polynomiale* (en lien avec l'isopérimétrie et les marches aléatoires), et dans la construction de *graphes expandeurs* (qui sont des objets importants en informatique), mais il y a aussi de nombreux autres exemples.

A priori, il y a plusieurs façons de définir la presque stabilité : l'une d'elles utilise la notion de partie à petit doublement par laquelle nous engagerons notre discussion ; une autre s'appuie sur la notion de *sous-groupe approximatif* que nous donnerons en section 4. Nous verrons que les deux sont étroitement liées.

Commençons par préciser ce que l'on entend par « partie presque stable ». Étant données des parties A, B d'un groupe G , on pose $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$ et $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$. On pose aussi $A^2 = AA$ puis $A^3 = AAA$ et ainsi de suite. Pour les groupes abéliens additifs on écrit plutôt $A+B$, $-A$, $2A = A+A$, $3A = A+A+A$ etc. Dire qu'une partie finie A est stable revient donc à dire que $A^2 = A$. La *presque* stabilité peut donc se traduire par la condition que A^2 n'est *pas beaucoup plus grande* que A (on discutera très brièvement en section 4 une extension possible aux parties infinies).

Considérons un instant les valeurs extrêmes que peut prendre le cardinal de A^2 . Il est clair que $|A^2| \geq |A|$ avec égalité si A est un sous-groupe. Inversement, il est évident que $|A^2| \leq |A|^2$, avec égalité si

$A = \{x_1, \dots, x_r\}$ et G est le groupe libre en les générateurs x_i .

Bien qu'extrême, le cas où $|A^2|$ est *comparable* à $|A|^2$ ne doit pas être considéré comme atypique. En effet, on peut mettre en évidence un phénomène assez général selon lequel une partie A de taille k choisie aléatoirement (en un sens approprié) dans un groupe G satisfait à $\ell(|A^2|) \geq ck^2$ pour une certaine constante c dépendant du contexte. Par exemple, dans le cas où A est choisie uniformément dans l'intervalle $\{1, \dots, n\} \subset (\mathbb{Z}, +)$ avec n beaucoup plus grand que k on peut essentiellement prendre $c = \frac{1}{2}$ [3]. Cela suggère qu'une condition de type $|A^2| = o(|A|^2)$ est une contrainte importante sur la partie A . Nous la considérerons sous sa forme la plus forte, à savoir

$$|A^2| \leq K|A| \tag{1}$$

pour un certain $K \geq 1$.

Définition 1. Un ensemble A vérifiant (1) est appelé un *ensemble à doublement au plus K* , ou simplement un *ensemble à petit doublement*. La valeur de $|A^2|/|A|$ est appelée *constante de doublement* de A . De la même façon, un ensemble A vérifiant $|A^3| \leq K|A|$ est appelé un *ensemble à triplement au plus K* , ou simplement un *ensemble à petit triplement*. La valeur de $|A^3|/|A|$ est appelée *constante de triplement* de A .

L'inégalité (1) étant à l'opposé du comportement aléatoire, on peut s'attendre à ce qu'une partie à petit doublement possède une certaine « structure ». L'un des buts principaux de la théorie des groupes approximatifs est de décrire cette structure. Pour le lecteur désireux d'en apprendre davantage ainsi que pour une bibliographie plus complète, nous renvoyons au livre de l'auteur [3].

On supposera souvent par la suite que la partie A contient l'élément neutre et qu'elle est *symétrique* – c'est-à-dire stable par inverses. Pour la plupart des résultats qu'on présentera cette hypothèse n'est pas nécessaire, mais elle simplifie l'exposition et les notations.

2. Premiers exemples

Des exemples banals d'ensembles à petit doublement sont les ensembles petits : si $|A| \leq K$ alors bien sûr A vérifie $|A^2| \leq K|A|$. On ne s'intéressera donc qu'aux ensembles de taille significativement plus grande que K . Les sous-groupes finis sont aussi des exemples évidents d'ensembles à petit doublement. Notons aussi que si un ensemble A_0 a une constante de doublement au plus K et si A est une partie de A_0 de densité au moins α , c'est-à-dire vérifiant $|A| \geq \alpha|A_0|$, alors on a

$$|A^2| \leq |A_0^2| \leq K|A_0| \leq \frac{K}{\alpha}|A|.$$

Dans ce cas-là la constante de doublement de A est donc au plus K/α . On voit donc que si A est suffisamment dense dans A_0 et si A_0 est un ensemble à petit doublement alors la constante de doublement de A est aussi petite. En particulier, si H est un sous-groupe fini de G et la densité de $A \subset H$ est au moins $1/K$ alors la constante de doublement de A est au plus K . Freiman a montré que si K est assez petit, alors cela épuise essentiellement tous les exemples : précisément, il a montré que si $|A^2| < \frac{3}{2}|A|$ alors A^2 est un translaté de sous-groupe fini.

Voyons maintenant un exemple plus intéressant. Observons d'abord que si $B \subset \mathbb{Z}^d$ est une boîte de la forme

$$B = \{x \in \mathbb{Z}^d : |x_i| \leq L_i \text{ pour } i = 1, \dots, d\}$$

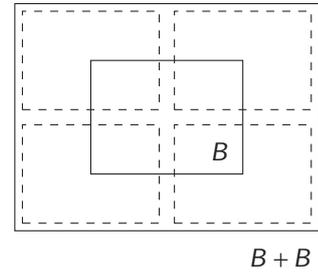
pour certains entiers L_i , alors

$$|B + B| \leq 2^d|B| \tag{2}$$

quelles que soient les valeurs des L_i . Les boîtes dans \mathbb{Z}^d sont donc des ensembles à petit doublement. Il est facile de voir que leurs images homomorphiques sont aussi des ensembles à petit doublement. Pour le comprendre, notons d'abord qu'une telle boîte B vérifie une forme forte de (2) : il existe un ensemble X avec $|X| = 2^d$ tel que

$$B + B \subset B + X, \tag{3}$$

comme illustré au diagramme suivant.

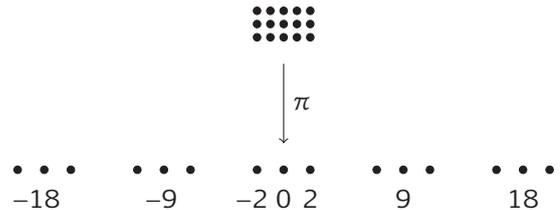


Cela veut dire que si G est un groupe abélien et $\pi : \mathbb{Z}^d \rightarrow G$ est un morphisme alors $\pi(B) + \pi(B) \subset \pi(X) + \pi(B)$. En particulier, $|\pi(B) + \pi(B)| \leq 2^d|\pi(B)|$, donc $\pi(B)$ est à petit doublement.

On appelle une image homomorphique d'une boîte comme B une *progression*. Plus précisément, si x_1, \dots, x_d sont des éléments dans un groupe abélien et $L_1, \dots, L_d \in \mathbb{N}$ alors on pose

$$P = P(x; L) = \{\ell_1 x_1 + \dots + \ell_d x_d : |\ell_i| \leq L_i\}.$$

On appelle P une *progression*, et on appelle d la *rang* ou la *dimension* de P . Par exemple, dans le diagramme suivant on représente la progression $P(9, 2; 2, 1) \subset \mathbb{Z}$ vue comme $\pi(\mathbb{Z}^2 \cap ([-2, 2] \times [-1, 1]))$ pour $\pi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ défini par $\pi(1, 0) = 9$ et $\pi(0, 1) = 2$.



Pour expliquer le terme de *progression*, notons que si le rang est 1 alors P est simplement une progression arithmétique.

Pour récapituler, on vient de voir que les sous-groupes, les progressions de rang majoré, et leurs sous-ensembles denses sont à petit doublement. Le théorème célèbre suivant, dû à Freiman dans le cas $G = \mathbb{Z}$, puis à Green et Ruzsa dans le cas général, montre que ce sont essentiellement les seuls exemples.

Théorème 1 (Green–Ruzsa). *Soient G un groupe abélien et A une partie finie telle que $|A + A| \leq K|A|$. Alors il existe un sous-groupe fini H et une progression P de rang au plus $r(K)$ tels que A soit une partie de $H + P$ de densité au moins $\delta(K)$.*

Reposant sur l'analyse de Fourier, sa démonstration fournit un majorant explicite de $r(K)$ et un

minorant explicite de $\delta(K)$. L'estimation de ces grandeurs fait l'objet de recherches actives que nous n'aborderons pas ici.

3. Les inégalités de Plünnecke et le lemme de recouvrement de Ruzsa

La preuve du théorème 1 étant trop longue pour être incluse dans cet article, nous nous contenterons d'en illustrer deux outils fondamentaux à travers le cas particulier suivant.

Proposition 1 (Ruzsa). *Soient $m \in \mathbb{N}$ et G un groupe abélien dans lequel chaque élément est d'ordre au plus m (par exemple $G = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$). Soit A une partie symétrique finie de G telle que $|A + A| \leq K|A|$. Alors A est une partie de densité au moins $1/(m^{K^4}K)$ dans un sous-groupe fini.*

Un premier outil sont les *inégalités de Plünnecke*, qui ont été prouvées par Plünnecke, puis redécouvertes et généralisées par Ruzsa, et enfin démontrées beaucoup plus simplement par Petridis.

Proposition 2 (Plünnecke–Ruzsa). *Soient G un groupe abélien et A une partie finie vérifiant $|A + A| \leq K|A|$. Alors $|mA - nA| \leq K^{m+n}|A|$ pour chaque $m, n \in \mathbb{N}$.*

Nous verrons bientôt concrètement où ce résultat apparaît dans la preuve de la proposition 1. Avant cela, essayons de comprendre le sens heuristique de cette proposition. Tout d'abord, notons que si H est un sous-groupe alors $mH = H$ pour chaque $m \in \mathbb{N}$, une propriété qu'on utilise souvent sans même y penser. La proposition 2 dit en substance qu'une partie à petit doublement satisfait à une forme approximative de cette propriété : si A est une partie vérifiant $|A + A| \leq K|A|$ alors pour chaque entier m , d'une part la partie mA n'est pas beaucoup plus grande que A , et d'autre part elle est aussi à petit doublement, au sens où $|mA + mA| \leq K^{2m}|A| \leq K^{2m}|mA|$.

Un autre outil important utilisé dans la preuve de la proposition 1 est le lemme de recouvrement de Ruzsa dont nous donnons une version légèrement simplifiée (voir [1, Lemma 5.1] pour un énoncé plus général).

Lemme 1 (Ruzsa). *Soit A une partie symétrique finie d'un groupe G telle que $|A^4| \leq K|A|$. Alors il*

existe une partie $X \subset G$ de taille au plus K telle que $A^3 \subset XA^2$.

Preuve. Considérons une partie maximale X de A^3 telle que les ensembles xA avec $x \in X$ soient disjoints. Notons qu'alors $|XA| = |X||A|$. Puisque $XA \subset A^4$ cela implique que $|X||A| \leq K|A|$, et donc que $|X| \leq K$. De plus, étant donné $z \in A^3$ la maximalité de X implique qu'il existe $x \in X$ et $a_1, a_2 \in A$ tels que $za_1 = xa_2$, donc $z = xa_2a_1^{-1} \in XA^2$. En particulier, $A^3 \subset XA^2$ comme demandé. \square

Preuve de la proposition 1. La proposition 2 implique que $|4A| \leq K^4|A|$. Le lemme 1 implique donc qu'il existe un ensemble X de taille au plus K^4 tel que $3A \subset X + 2A$. Cela implique par induction que $mA \subset (m - 2)X + 2A$ pour chaque $m > 3$. Écrivant $\langle B \rangle$ pour le sous-groupe engendré par une partie B , on en déduit en particulier que $\langle A \rangle \subset \langle X \rangle + 2A$, donc $|\langle A \rangle| \leq |\langle X \rangle||2A| \leq m^{K^4}K|A|$ comme demandé. \square

4. Groupes approximatifs

Quand G n'est plus abélien la proposition 2 ne subsiste pas telle quelle. Par exemple, si G est le produit libre $H * \langle x \rangle$ pour un élément x d'ordre infini, et si on prend

$$A = H \cup \{x\}, \tag{4}$$

alors on a $A^2 = H \cup xH \cup Hx \cup \{x^2\}$, donc en particulier $|A^2| \leq 3|A|$. Par contre, $A^3 \supset HxH$ et $|HxH| = |H|^2$, donc $|A^3| \geq \frac{1}{4}|A|^2$.

Il s'avère que si l'on remplace la condition $|A + A| \leq K|A|$ par une hypothèse légèrement plus forte alors on peut obtenir une conclusion analogue à celle de la proposition 2. En fait, il y a au moins deux manières possibles de renforcer la condition de petit doublement. La première consiste à la remplacer par celle de petit triplement : un argument de Ruzsa montre que si on pose $|A^3| \leq K|A|$ au lieu de $|A^2| \leq K|A|$ pour une partie symétrique finie A alors on peut conclure que $|A^m| \leq K^{m-2}|A|$ pour chaque $m \in \mathbb{N}$. Autrement dit, contrairement au petit doublement, la condition de petit triplement nous permet de majorer les tailles de tous les ensembles A^4, A^5, \dots

La deuxième possibilité consiste à remplacer la condition $|A^2| \leq K|A|$ par une propriété que l'on a déjà rencontrée à deux reprises (lemme 1 et (3)) : l'existence d'un ensemble X de taille bornée tel que $A^2 \subset XA$, ce qui est clairement plus fort que

la condition de petit doublement. C'est cette condition qui est au centre de la définition suivante de sous-groupe approximatif, due à Tao.

Définition 2. Une partie A d'un groupe G est un (sous-)groupe K -approximatif si elle est symétrique et contient l'élément neutre, et s'il existe un ensemble $X \subset G$ de taille au plus K tel que $A^2 \subset XA$.

On déduit par induction qu'un groupe K -approximatif A vérifie $A^m \subset X^{m-1}A$ pour tout m , donc si A est fini alors $|A^m| \leq K^{m-1}|A|$ et on en déduit là aussi un analogue de la proposition 2.

En fait, ces deux conditions – petit triplement et groupe approximatif – sont essentiellement équivalentes pour les parties finies. On vient de noter que si A est un sous-groupe K approximatif fini alors $|A^3| \leq K^2|A|$, donc A est aussi à petit triplement. D'autre part, pour un ensemble symétrique fini A vérifiant $|A^3| \leq K|A|$, le résultat de Ruzsa montre que $|A^4| \leq K^2|A|$, puis le lemme 1 implique que A^2 est un sous-groupe K^4 -approximatif (on a $A^3 \subset XA^2$ d'après le lemme 1, puis $A^4 = A^3A \subset XA^3 \subset X^2A^2$).

Notons toutefois qu'un avantage de la notion de sous-groupe approximatif est qu'elle peut s'appliquer sans modification aux parties infinies, pour lesquelles la notion de petit triplement n'a pas de sens en général. Les groupes approximatifs infinis ont d'ailleurs commencé à être étudiés dans certains contextes particuliers. Néanmoins, le niveau d'avancement de cette théorie reste sans commune mesure avec celui de l'étude des groupes approximatifs finis, et nous nous concentrerons donc sur ces derniers.

Tao a montré que l'étude des ensembles à petit doublement se ramène essentiellement à celle des groupes approximatifs. D'abord, remarquons que dans l'exemple (4), A possède une grande partie, à savoir H , qui est un sous-groupe 1-approximatif. Tao a montré qu'il s'agit d'un phénomène général, au sens où il existe $C > 0$ tel que si $|A^2| \leq K|A|$, alors il existe un sous-groupe K^C -approximatif $B \subset G$ de taille au plus $K^C|A|$ tel que A peut être recouvert par au plus K^C translatés à gauche de B . On peut donc remplacer la condition $|A^2| \leq K|A|$ par la condition d'être un sous-groupe K -approximatif sans vraiment perdre de généralité, mais en gagnant la possibilité de majorer la taille des ensembles A^4, A^5, \dots

Enfin, signalons que Ruzsa avait prouvé le lemme 1 plusieurs années avant l'introduction de la définition 2 par Tao. En ce sens il peut être considéré comme un précurseur de la notion de groupe approximatif.

5. Propriétés de base

Voici deux propriétés simples et utiles d'un vrai sous-groupe H de G :

1. si $\pi : G \rightarrow Z$ est un morphisme alors $\pi(H)$ est encore un sous-groupe de Z ;
2. si $N < G$ est un autre sous-groupe alors $H \cap N$ est aussi un sous-groupe.

Il s'avère que ces propriétés ont des analogues approximatifs pour les groupes approximatifs et les ensembles à petit triplement. Pour (1), si A est un sous-groupe K -approximatif de G et $\pi : G \rightarrow Z$ est un morphisme alors on voit immédiatement que $\pi(A)$ est un sous-groupe K -approximatif de Z . De manière moins évidente, un argument de Helfgott montre que si A est une partie symétrique finie et

$$\frac{|\pi(A)^m|}{|\pi(A)|} \leq \frac{|A^{m+2}|}{|A|},$$

donc en particulier si $|A^3| \leq K|A|$ alors $|\pi(A)^3| \leq K^3|\pi(A)|$. Pour (2), on peut montrer par exemple que si A et B sont des parties symétriques finies alors

$$\frac{|A^m \cap B^n|}{|A^2 \cap B^2|} \leq \frac{|A^{m+1}|}{|A|} \frac{|B^{n+1}|}{|B|}$$

pour chaque $m, n \geq 2$, donc en particulier si $|A^3| \leq K|A|$ et $|B^3| \leq L|B|$ alors $|(A^2 \cap B^2)^3| \leq (KL)^5|A^2 \cap B^2|$. De même, si A est un sous-groupe K -approximatif et B est un sous-groupe L -approximatif alors $A^2 \cap B^2$ est un sous-groupe $(KL)^3$ -approximatif. Voir [3] pour des preuves et des généralisations de ces assertions.

Comme nous l'avons vu, bien qu'ils fournissent des points de vue différents, les groupes approximatifs et les ensembles à petit triplement sont des concepts essentiellement équivalents. De plus, nous venons de voir qu'ils satisfont aux mêmes propriétés de base, ce qui les rend interchangeable dans de nombreuses démonstrations.

6. Sous-groupes approximatifs des groupes non abéliens

On peut généraliser le concept de progression à certains groupes non abéliens. Par exemple, considérons le groupe de Heisenberg H défini par

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & n_2 & n_3 \\ 0 & 1 & n_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : n_i \in \mathbb{Z} \right) \right\},$$

et posons

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \ell_1 & \ell_3 \\ 0 & 1 & \ell_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : |\ell_1| \leq L_1, |\ell_2| \leq L_1, |\ell_3| \leq L_1 L_2 \right\}.$$

C'est un exercice facile de vérifier que

$$Q^3 \subset \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \ell_1 & \ell_3 \\ 0 & 1 & \ell_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : |\ell_1| \leq 3L_1, |\ell_2| \leq 3L_1, |\ell_3| \leq 8L_1 L_2 \right\},$$

et donc que $|Q^3| \leq 72|Q|$ quelles que soient les valeurs de L_1, L_2 .

La propriété clé de H que nous avons utilisée est le fait qu'il est *nilpotent*. On appelle *suite centrale descendante* de G , la suite décroissante de sous-groupes distingués $G = G_1 > G_2 > \dots$ définie inductivement par $G_1 = G$ et $G_{n+1} = [G, G_n]$. Un groupe G est *nilpotent* s'il existe s tel que $G_{s+1} = \{1\}$. Le plus petit s est la *classe* de G . Dans le cas du groupe de Heisenberg, on a

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_3 = \{1\},$$

de sorte qu'il est nilpotent de classe 2.

Il s'avère que dans n'importe quel groupe nilpotent on peut, comme suit, définir une progression de la même façon que dans le groupe de Heisenberg.

Définition 3. Soient G un groupe nilpotent de classe s , x_1, \dots, x_r des éléments de G , et L_1, \dots, L_r des entiers positifs. Alors on note $P(x; L) \subset G$ l'ensemble des éléments de G exprimables comme produits en les éléments $x_i^{\pm 1}$ dans lesquels chaque x_i et son inverse apparaît au plus L_i fois. On appelle $P(x; L)$ une *nilprogression de rang r et de classe s* .

On peut montrer que si les L_i sont plus grands qu'une certaine fonction de r et de s , la nilprogression $P(x; L)$ est un groupe K -approximatif pour un certain K qui ne dépend que de r et s .

La « progression » Q n'est pas exactement une nilprogression, mais on peut vérifier que si on pose

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors $P(x; L) \subset Q \subset P(x; 5L)$, donc la notion de nilprogression et celle de la « progression » Q sont grossièrement équivalentes dans un certain sens. Voir [3] pour une généralisation plus directe de Q

aux groupes nilpotents arbitraires et plus de détails sur cette équivalence grossière.

Le résultat remarquable suivant de Breuillard, Green et Tao montre que les nilprogressions forment en un sens les exemples les plus généraux d'ensembles à petit doublement.

Théorème 2 (Breuillard–Green–Tao [1, Theorem 2.12]). Soient G un groupe arbitraire et A une partie finie telle que $|A^2| \leq K|A|$. Alors il existe dans G une partie P contenant un sous-groupe fini H normalisé par P tel que l'image de P dans G/H soit une nilprogression de rang au plus $r(K)$ et de classe au plus $s(K)$, et tel que $|P| \leq t(K)|A|$. Il existe aussi un ensemble X de taille au plus $i(K)$ tel que $A \subset XP$.

Outre la théorie générale des groupes approximatifs, la preuve du théorème 2 combine des outils de théorie des modèles introduits par Hrushovski avec des arguments essentiellement dus à Gleason dans le cadre de la solution du cinquième problème de Hilbert dans les années cinquante.

L'utilisation d'un ultrafiltre dans le cadre de la théorie des modèles nous prive d'un majorant explicite de $i(K)$. Pour certaines applications des groupes approximatifs, notamment celles à la *croissance* dans les groupes qu'on présente en section 7, cela ne pose pas de problème. Néanmoins, il y a aussi certaines applications, par exemple celles à l'*expansion* dans les groupes qu'on décrit aussi en section 7, pour lesquelles il est important d'avoir des versions explicites du théorème 2. En partie pour cette raison, divers auteurs ont donné des démonstrations alternatives du théorème 2 fournissant des majorants explicites de $i(K)$, à condition de se restreindre à certaines classes de groupes. C'est le cas, par exemple, des groupes résolubles, des groupes résiduellement nilpotents, ou bien de certains groupes linéaires. C'est sur la base de ces derniers que sont construits les exemples d'expansseurs que nous verrons dans la section suivante.

7. Applications à la croissance et à l'expansion dans les groupes

Décrivons à présent deux des applications les plus spectaculaires des groupes approximatifs. Commençons par la *croissance* dans les groupes de type fini, une notion qui est elle-même liée aux marches aléatoires, la théorie géométrique des groupes, la géométrie différentielle... Ensuite on discutera des applications à l'*expansion*, une notion qui apparaît dans de nombreuses branches des ma-

thématiques et a de multiples applications, notamment en informatique théorique.

Soient G un groupe de type fini et S une partie génératrice symétrique finie. L'expression *croissance* de G se réfère à la vitesse avec laquelle le cardinal des ensembles S^1, S^2, \dots croît. Il n'est pas très difficile de montrer que si G est *virtuellement nilpotent*, c'est-à-dire si G possède un sous-groupe nilpotent d'indice fini, alors il existe $C, d \geq 0$ tels que $|S^n| \leq Cn^d$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas-là on dit que G est à *croissance polynomiale*. Un théorème fondamental dû à Gromov nous donne l'implication réciproque : un groupe de type fini à croissance polynomiale est virtuellement nilpotent.

Il s'avère que les groupes approximatifs peuvent être utilisés pour prouver le théorème de Gromov. En fait, Breuillard, Green et Tao ont utilisé le théorème 2 pour en démontrer une version renforcée. Par exemple, le théorème de Gromov demande implicitement que la taille de la partie génératrice soit bornée, mais dans la version du théorème obtenue par Breuillard-Green-Tao cette hypothèse n'est pas nécessaire.

L'observation qui permet réduire le théorème de Gromov au théorème 2 est que la condition

$$|S^n| \leq n^d |S| \tag{5}$$

implique qu'il existe $K \geq 1$ dépendant seulement de d , et un entier m vérifiant $\sqrt{n} \leq m \leq n$, tels que $|S^{2m}| \leq K|S^m|$. Autrement dit, (5) implique qu'il existe une boule S^m , avec m pas trop petit, qui est une partie à petit doublement. Les groupes approximatifs apparaissent donc très naturellement dans l'étude des groupes à croissance polynomiale. Nous renvoyons le lecteur au livre [3, chapitre 11] et à sa bibliographie pour plus de détails et d'autres applications dans cette direction.

Une autre source importante d'applications des groupes approximatifs est la construction de graphes *expanseurs*. Un *graphe expanseur* est un graphe qui est fortement connecté bien qu'ayant « peu » d'arêtes. Précisément, étant donnée une partie A d'un graphe fini Γ , on définit la *frontière* ∂A de A en posant $\partial A = \{x \in \Gamma \setminus A : (\exists a \in A)(x \sim a)\}$, et on définit le *taux d'expansion* $h(\Gamma)$ de Γ en posant

$$h(\Gamma) = \min_{|A| \leq |\Gamma|/2} \frac{|\partial A|}{|A|}.$$

Étant donnés $\varepsilon > 0$ et $d \in \mathbb{N}$, une famille X de graphes est dite *famille de (ε, d) -expanseurs* si $h(\Gamma) \geq \varepsilon$ pour chaque $\Gamma \in X$, si $\sup_{\Gamma \in X} |\Gamma| = \infty$, et si chaque sommet de chaque graphe dans X est de degré au plus d . Notons que si un graphe Γ est complet alors $h(\Gamma) \geq 1$; le majorant des degrés des sommets permet d'exclure cette situation banale.

Pour voir pourquoi de tels graphes sont intéressants, notons que la borne sur le degré et la forte connectivité sont des propriétés appréciables dans le cadre des réseaux de communication et de transport, mais qui sont intuitivement difficiles à atteindre simultanément.

L'un des objectifs et l'une des difficultés de la théorie des graphes *expanseurs* réside dans leur construction. Une approche qui s'est révélée très fructueuse repose sur la théorie des groupes et la notion de *graphe de Cayley*. Étant donnés un groupe G de type fini et une partie génératrice symétrique finie S , le *graphe de Cayley* $\Gamma(G, S)$ a pour sommets les éléments de G , et pour arête joignant les sommets x et y s'il existe $s \in S$ tel que $xs = y$.

Certains résultats utilisant des techniques issues de la théorie des groupes approximatifs peuvent s'appliquer à la construction des graphes de Cayley *expanseurs*. Par exemple, pour $SL_n(\mathbb{K})$ on a le théorème suivant, qui a été annoncé indépendamment par Breuillard, Green et Tao et par Pyber et Szabo (avec un décalage de quatre heures!), Helfgott ayant déjà traité les cas $d = 2, 3$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ avec p premier.

Théorème 3 ([2, Theorem 1.5.1]). *Soient \mathbb{K} un corps fini et $n \geq 2$. Soit A une partie génératrice de $SL_n(\mathbb{K})$. Supposons que $\varepsilon > 0$ est assez petit dépendant de n . Alors soit $|A^3| \geq |A|^{1+\varepsilon}$, soit $|A| \geq |SL_n(\mathbb{K})|^{1-c_n\varepsilon}$, avec c_n une certaine constante qui ne dépend que de n .*

Il s'avère qu'en utilisant le théorème 3 et un argument ingénieux dû à Bourgain et Gamburd on peut montrer que certains graphes de Cayley des groupes $SL_n(\mathbb{F}_p)$ sont des graphes *expanseurs*.

Pour plus de détails sur cet argument et son histoire le lecteur peut consulter le livre [2] de Tao.

Références

- [1] E. BREUILLARD, B. J. GREEN et T. C. TAO. « The structure of approximate groups ». *Publ. Math. IHES.* **116** (2012), p. 115-221.
- [2] T. C. TAO. *Expansion in finite simple groups of Lie type.* **164**. Graduate Studies in Mathematics. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
- [3] M. C. H. TOINTON. *Introduction to approximate groups.* À paraître. Cambridge Univ. Press.



Matthew C. H. TOINTON

Pembroke College, University of Cambridge, Royaume-Uni
mcht2@cam.ac.uk

L'auteur s'intéresse en général à des problèmes et des résultats qui utilisent une combinaison d'algèbre, de combinatoire et de géométrie. Ses travaux sont à l'interface entre la combinatoire additive et la théorie géométrique des groupes.

L'auteur remercie Emmanuel Breuillard qui l'a aidé à traduire certains termes en français, ainsi que Alano Ancona et Romain Tessera pour leurs relectures attentives. L'auteur est soutenu par la bourse de Stokes de Pembroke College, University of Cambridge.

Mémoires - dernières parutions



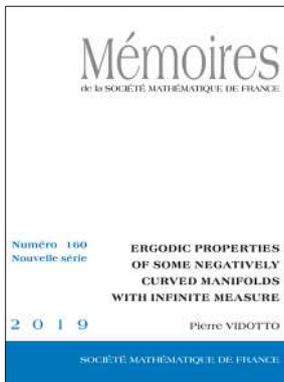
Vol. 159

Weakly curved A_∞ -algebras over a topological local ring

L. POSITSELSKI

ISBN 978-2-85629-899-2
2018 - 201 pages - Softcover. 17 x 24
Public: 45 € - Members: 32 €

We define and study the derived categories of the first kind for curved DG- and A_∞ -algebras complete over a pro-Artinian local ring with the curvature elements divisible by the maximal ideal of the local ring. We develop the Koszul duality theory in this setting and deduce the generalizations of the conventional results about A_∞ -modules to the weakly curved case. The formalism of contra-modules and co-modules over pro-Artinian topological rings is used throughout the memoir. Our motivation comes from the Floer-Fukaya theory.



Vol. 160

Ergodic properties of some negatively curved manifolds with infinite measure

P. VIDOTTO

ISBN 978-2-85629-901-2
2019 - 132 pages - Softcover. 17 x 24
Public: 35 € - Members: 24 €

Let $M=X/\Gamma$ be a geometrically finite negatively curved manifold with fundamental group Γ acting on X by isometries. The purpose of this book is to study the mixing property of the geodesic flow on T^1M , the asymptotic behavior as $R \rightarrow +\infty$ of the number of closed geodesics on M of length less than R and of the orbital counting function $\#\{\gamma \in \Gamma \mid d(o, \gamma \cdot o) \leq R\}$. These properties are well known when the Bowen-Margulis measure on T^1M is finite. We consider here Schottky group $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2 * \dots * \Gamma_k$ whose Bowen-Margulis measure is infinite

and ergodic, such that one of the elementary factor Γ_i is parabolic with $\delta_{\Gamma_i} = \delta_\Gamma$. We specify these ergodic properties using a symbolic coding induced by the Schottky group structure.



Disponible sur le site de la SMF : <http://smf.emath.fr>

*frais de port non compris



La mobilité heureuse¹

- O. GARET
- B. SCHAPIRA

Nous écrivons cette tribune en réaction à un texte de Pascal Auscher, directeur de l'INSMI (Institut de Mathématiques au CNRS). Ce texte, intitulé *Position de l'INSMI sur la mobilité au recrutement en mathématiques*², a été diffusé dans les laboratoires de mathématiques en janvier 2019. Le texte de l'INSMI réaffirme avec force sa volonté d'imposer la pratique de la communauté mathématique consistant à promouvoir les MCF et CR en PR et DR uniquement en mobilité, c'est-à-dire dans un autre laboratoire que là où ils exercent au moment de leur promotion. Il y voit un élément important pour la défense des postes en mathématiques. Ce texte, s'il constitue un simple rappel d'évidences pour certains collègues³, en a choqué d'autres. Nous souhaitons dans cette tribune nous opposer à ce point de vue, et discuter la notion de mobilité au sein de la communauté mathématique.

La mobilité et le non-recrutement local : définitions

Ne boudons pas notre plaisir de mathématiciennes⁴, définissons les termes employés. Le Larousse propose « mobilité = changement de lieu de résidence ou d'activité économique ». Dans la vision dominante au sein de la communauté mathématique française, rappelée par l'INSMI, la « mobilité » sous-entend changement de laboratoire lors d'un premier recrutement sur un poste permanent ou lors du passage de rang B à rang A. En particulier, cette « mobilité » suivant l'INSMI n'implique pas forcément de changement de lieu de résidence pour les Franciliens⁵. D'autre part, cette « mobilité » ne concerne pas les collègues cherchant à changer de laboratoire du fait d'un changement de résidence familiale passé ou futur (mutation pour rapprochement familial).

Un autre terme méritant définition est le « non-recrutement local ». En toute logique mathématique, cela devrait signifier la négation du recrutement local, i.e. un recrutement qui ne discrimine pas les candidats venus de l'extérieur du laboratoire. Mais toute la communauté mathématique française entend « non-recrutement local » comme le fait d'exclure les candidatures locales d'une procédure de recrutement. C'est donc un recrutement avec discrimination de fait suivant l'origine. C'est donc un acte illégal, même si les collègues n'en sont pas toujours conscientes⁶.

La mobilité permet-elle l'épanouissement des collègues ?

Dans ce texte, l'INSMI affirme que cette « politique de mobilité permet à notre communauté de

1. La « maternité heureuse » est l'ancêtre du planning familial.

2. NDLR : en rubrique information dans ce numéro et aussi disponible à l'adresse : <http://www.cnrs.fr/insmi/spip.php?article3043>

3. pour éviter les lourdeurs, nous pratiquerons l'alternance des accords masculins et féminins.

4. voir 3.

5. voir 3.

6. <https://www.justice.fr/fiche/faire-cas-discrimination>

s'épanouir ». Ainsi, la mobilité au passage de rang B à rang A serait de nature à favoriser l'épanouissement. Confrontons cette formule à la réalité de la vie des collègues. Dans le meilleur des cas, après une thèse soutenue vers 26-27 ans, souvent un post-doctorat à l'étranger, un jeune mathématicien sera recruté vers la trentaine dans un laboratoire différent de celui de sa thèse, souvent loin de ses proches. Lorsque la nouvelle recrue est déjà en couple, avec une personne éloignée géographiquement (combien d'entre nous se reconnaissent là...), la mobilité géographique se pose alors en les termes suivants :

- elle est très difficile, voire impossible, au début de carrière, en mutation pour rapprochement familial par exemple ;
- elle est quasiment obligatoire quelques années plus tard pour les collègues souhaitant une promotion au rang A. Une mathématicienne contrainte à vivre loin de ses proches, parfois à des centaines de kilomètres⁷ faute de mutation pour rapprochement familial, ou du fait d'une mobilité imposée par sa promotion, sera plutôt épuisée, voire complètement démotivée, par une situation sans issue.

Ignorant ces réalités aussi concrètes que moroses, ce texte fait l'éloge de ces « jeunes éléments parmi les plus dynamiques et productifs qui partent » comme professeurs après une mobilité. Qui sont-ils ? Ils sont certes jeunes, dynamiques et productifs, mais ce n'est pas tout. Leur situation familiale leur permet cette mobilité ; en effet, pour l'essentiel, ce sont des hommes, souvent franciliens, ou célibataires, ou dont la compagne est ou pense être mobile professionnellement (elle est souvent fonctionnaire, parfois elle ne travaille pas), et consent à cette mobilité.

Au passage, l'AMI⁸, indice de mobilité académique promu par l'INSMI, nous semble entaché d'un fort biais méthodologique. Les catégories observées par l'importante étude statistique réalisée par le ministère en 2007⁹, qui distinguent endo-recrutement, endo-recrutement régional, et exo-recrutement, nous semblent plus pertinentes si l'on cherche à comparer des laboratoires n'appartenant pas à la même zone géographique.

Faut-il alors, suivant le non-dit du texte de l'INSMI, refuser de s'intéresser aux

- jeunes dynamiques et productifs qui ne postulent nulle part car leur vie personnelle (responsabilité associative, parent malade, contrainte professionnelle de leur compagne, enfants trop fragiles, nos vies sont multiples et privées...) ne leur permet pas de mobilité ;
- immobiles, peut-être un peu moins jeunes et moins dynamiques et moins productifs, démotivés par l'absence de perspective de carrière ;
- jeunes et moins jeunes collègues, enseignants et chercheurs bien sous tous rapports, satisfaisant aux exigences sans toutefois les dépasser, qui attendent désespérément une mutation pour rapprochement familial.

Le texte de l'INSMI affirme qu'« au niveau local, une forte mobilité académique entrante et sortante au sein d'un laboratoire traduit sa force d'attractivité et de rayonnement et donc son dynamisme ». D'abord, on a du mal à voir comment la mobilité serait révélatrice de quoi que ce soit une fois qu'elle a été imposée. Par ailleurs, cette affirmation ignore le fait que l'attractivité d'un laboratoire dépend en bonne partie de l'attractivité géographique de la ville, et de son dynamisme économique, et donc de la possibilité pour une éventuelle conjointe d'y trouver un travail. Bien entendu, l'attractivité dépend aussi de l'environnement scientifique, mais nous sommes des humains payés pour faire des mathématiques, avec une vie personnelle à côté, pas des machines à théorèmes. Nous connaissons tous des gens du Sud ne voulant pas postuler au nord de Lyon, des gens du Nord trouvant qu'il fait bien trop chaud dans le Sud, des Bretons ne souhaitant pas déménager en Alsace, etc. Dans certains laboratoires, situés dans un bassin d'emploi restreint ou une région sinistrée économiquement, les candidatures issues du laboratoire peuvent être les meilleures. Il est alors scientifiquement déraisonnable d'imposer d'en haut le dogme anti-local en vigueur aujourd'hui. En réalité, toutes disciplines confondues, les statistiques nous montrent que la mobilité choisie au recrutement comme professeur n'existe presque pas : que ce soit en droit, en sciences, en lettres, ou en pharmacie, la matrice des mobilités est essentiellement diagonale, à l'exception de quelques échanges entre les académies de Paris et de Versailles¹⁰.

7. Rennes-Amiens, Marseille-Rennes, Dijon-Lille, Besançon-Rennes, Lyon-Paris, Marseille-Toulouse... vous aussi vous en connaissez des exemples bien sûr.

8. <http://postes.smai.emath.fr/apres/ami/>

9. Voir bilan des recrutements des MCF dans le corps des PR entre 1993 et 2007 <http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr/cid118435/personnels-enseignants-du-superieur-bilans-et-statistiques.html>

10. Voir le tableau 4.5 dans <https://tinyurl.com/yy8vj8q4>

La mobilité permet-elle l'excellence scientifique ?

À défaut de provoquer un épanouissement évident pour toutes, la mobilité est-elle nécessaire à la science ? La mobilité, oui, mais quelle mobilité ? La circulation des idées et des personnes est vitale. À l'heure d'internet, à l'heure où les colloques aux quatre coins du monde dans tous les sujets se multiplient, où nos jeunes collègues ont enchaîné les post-docs dans parfois 3 ou 4 pays différents, où les mobilités temporaires pour un semestre à l'étranger deviennent courantes, les idées circulent bien et les collaborations internationales sont la norme.

Nous savons qu'il y a une vingtaine d'années, dans un contexte où le nombre de postes¹¹ plus élevé rendait les questions de rapprochement familial plus facile à résoudre, l'incitation forte à la mobilité a permis, pour certaines équipes, de rompre un certain isolement thématique. De nos jours, cet argument semble anachronique. Aujourd'hui, l'exigence d'excellence scientifique doit faire assouplir les dogmes rappelés par l'INSMI :

- les collègues travaillant loin de leurs proches dilapident souvent leur énergie scientifique dans les transports, c'est un gâchis scientifique et humain considérable ;
- les « turbo-profs » venant à la fac pour faire leurs cours puis rentrant chez eux à l'autre bout de la France dès que possible ne peuvent pas toujours s'investir suffisamment dans la vie de leur laboratoire. Entre un recrutement local d'un excellent scientifique et une extérieure aussi excellente mais jamais présente, qui apportera le plus au laboratoire, au département ?
- la mobilité à tout prix crée un nouveau profil de collègues qui s'investissent plus dans des collaborations extérieures que dans des discussions scientifiques avec leurs collègues les plus proches géographiquement ;
- une jeune mathématicienne, après des années de thèse et post-doctorat à l'étranger, peut avoir envie d'animer dans le laboratoire une nouvelle thématique, de tisser des liens avec d'autres laboratoires du campus, ou avec l'industrie... Pérenniser ces activités par une promotion sur un poste de professeur peut être alors un choix scientifique tout à

fait pertinent ;

- depuis l'autonomie des universités, il est essentiel pour les laboratoires d'avoir aux postes à responsabilités, dans les différents conseils, en direction de laboratoire ou de département, des collègues qui connaissent très bien leur université et s'y sont fait connaître. Ainsi, c'est une grave erreur politique de se priver du poids que peuvent apporter les meilleures candidatures locales, quand les représentants des autres disciplines ont tissé des liens de longue date, parfois depuis leurs années de formation.

La mobilité géographique doit être considérée par l'INSMI comme un outil parmi d'autres au service d'une politique scientifique, non comme une fin en soi. Les étapes importantes de la vie personnelle et de la vie professionnelle ne sont pas forcément synchronisées (mise en couple, enfants en bas âge, rapprochement familial, promotion...) et l'INSMI pourrait favoriser la mobilité quand elle est possible ou nécessaire, et pas exclusivement lors d'une promotion.

La mobilité : compatible avec des politiques d'égalité ?

Rappelons ici que la proportion de femmes est divisée par trois en mathématiques lors du passage MCF → PR, en sections 25 et 26. La prime à la jeunesse joue un rôle évident. Malgré une tendance à la hausse, l'âge du recrutement comme professeur reste dans les plus bas (40 ans et 3 mois en section 25, 43 ans et 2 mois en section 26). On peut noter que les 2 femmes recrutées comme professeures en 2017 en section 25 ont un âge moyen de 39 ans, tandis que les 5 femmes recrutées en section 26 affichent un âge moyen de 47 ans et 4 mois. Rappelons que la fertilité décroît significativement de 30 à 40 ans¹². Ainsi, à l'âge où les mathématiciens préparent l'habilitation à diriger des recherches pour postuler sur des postes de professeurs, les mathématiciennes sont souvent mères de jeunes enfants et n'en ont ni le temps ni l'énergie. Les mathématiciens peuvent aussi être pères, mais cela les occupe statistiquement moins¹³.

La communauté mathématique valorise la jeunesse, comme en témoigne le texte de l'INSMI. L'âge moyen des collègues lors du passage rang

11. En 1998, les concours MCF 25-26 affichaient 180 postes ; en 2017 on dépassait à peine 50.

12. <https://www.ined.fr/fr/tout-savoir-population/memos-demo/focus/baisse-fertilite-age/>

13. <https://www.inegalites.fr/L-inegale-repartition-des-taches-domestiques-entre-les-femmes-et-les-hommes>

B → rang A, bien plus bas en mathématiques que dans d'autres disciplines, est un handicap certain pour l'égalité de carrière entre les hommes et les femmes. Pour celles qui malgré tout sont parvenues à passer leur habilitation à diriger des recherches assez tôt, l'exigence de mobilité au passage rang B → rang A apparaît comme un deuxième handicap pour les femmes. En effet, la perspective de réorganiser une vie de famille au bénéfice de la carrière d'un des parents n'est encore aujourd'hui pas considérée de la même manière suivant qu'il s'agit de l'homme ou de la femme. Une politique de ressources humaines ne peut se prétendre égalitaire si elle ignore les inégalités de la société ambiante.

Le modèle de mobilité prôné par l'INSMI, avec passage rang B → rang A autour de la quarantaine assorti d'une mobilité géographique, nous semble plus conforme à une société du siècle passé où la femme suit l'homme, qui fait carrière, qu'à une société moderne et plus égalitaire, comme la souhaitent de nombreux jeunes couples.

Changer les pratiques, un combat politique ?

Le questionnement sur nos pratiques de recrutement ne date pas d'hier. C'est un thème de discussion récurrent sur la liste *Parité*, où le premier auteur avait notamment diffusé ce texte¹⁴, écrit il y a dix ans déjà. En ignorant tout cela, le message envoyé par l'INSMI aujourd'hui déçoit. Mais nous pouvons en avoir une lecture optimiste. D'abord, ce texte existe ; il peut donc être critiqué. Nous pouvons en profiter pour engager un combat politique pour infléchir ou changer les règles de fonctionnement de notre communauté. Ensuite, l'existence de ce texte est le signe de l'existence d'une contestation du dogme, ce qui est en soi une bonne chose. En effet, la pratique de « non-recrutement local », qui perdure en dépit de la loi, et des arguments scientifiques et humains rappelés plus haut, est un dogme qui repose sur la puissance de mécanismes communautaires. Le texte de l'INSMI ne vise pas à convaincre les directeurs d'unités, simplement à rappeler la règle. Il agit comme un avertissement, un rappel du fait que la croyance au dogme n'est pas négociable, que ceux qui vont contre le dogme se mettent à l'écart de la communauté. Au sein d'une communauté, il est difficile de lutter

contre des interdits admis à un moment donné par le groupe, car leur étrangeté, leur différence avec ce qui est pratiqué ailleurs, renforce le lien communautaire. Les autres communautés pratiquent le recrutement local ? C'est une preuve supplémentaire de la supériorité de notre communauté ; on observe avec délectation les excès des autres, qui servent de justification à un positionnement rigoriste, qui n'est pas exempt d'un certain masochisme. Une fois admise la part d'irrationnel, on comprend les forces contre lesquelles on lutte, et pourquoi une conversation à la machine à café ne suffit pas pour convaincre. Par-delà les arguments que l'on peut avancer, le fait de dire haut et fort son opposition est très important. Nous ne souhaitons plus laisser dire « la communauté mathématique est contre le recrutement local », mais dire « Je suis mathématicien, je suis mathématicienne, et je ne cautionne pas la discrimination qui est faite envers les candidats locaux ».

Une mobilité compatible avec l'épanouissement et l'excellence scientifique ?

Concluons ce texte de manière constructive, par des propositions permettant de concilier excellence scientifique, égalité de carrières entre les femmes et les hommes, et respect des droits des mathématiciennes¹⁵ salariées de l'enseignement supérieur français.

- Promouvons la mobilité pour rapprochement familial dans nos laboratoires. Un collègue qui n'habite pas près de sa famille vit une souffrance inutile et ne peut pas s'investir efficacement dans son travail. Acceptons, au nom du droit au rapprochement familial en vigueur dans la fonction publique, de ne pas choisir toutes nos collègues et d'accueillir chaleureusement les collègues arrivés par rapprochement familial, même si ce ne sont pas les personnes que nous aurions imaginé recruter a priori.
- Exigeons de nos syndicats, de l'INSMI, de nos universités, de garantir dans nos pratiques ce droit au rapprochement familial écrit dans les statuts de la fonction publique par un pourcentage de postes réservés à la mutation, par un système de points avec un barème précis.

14. <http://www.iecl.univ-lorraine.fr/%7E0livier.Garet/apres.pdf>

15. voir 3.

Pour ce qui est du passage MCF/CR à PR/DR, promouvons une politique cohérente et équitable entre Paris et province, hommes et femmes. L'importance de cette équité n'est pas toujours bien comprise dans le milieu mathématique, car la liberté intellectuelle dont nous disposons généralement rend la différence de statut entre rang B et rang A plus discrète que dans d'autres disciplines. Si cette différence de statut ne joue en général pas sur l'aura scientifique internationale des collègues, elle est toutefois présente, et tous les rangs B le sentent, par exemple lorsqu'il s'agit de prendre des décisions stratégiques dans les laboratoires, UFR, universités. De fait, la suppression du double statut MCF/PR serait une option raisonnable. Nous sommes toutes enseignantes et chercheuses. Pourquoi ne pas choisir un seul statut avec des changements de grade comme aujourd'hui, par la voie locale et/ou la voie du CNU ? Plus modestement, il est possible d'humaniser le système à moindres frais et de défendre un système de promotions qui n'exclut et ne décourage pas une partie considérable des collègues pour des raisons d'immobilité familiale plutôt que des questions scientifiques.

À l'université, le concours de professeur joue un double rôle : enjeu stratégique pour le laboratoire, l'UFR, mais aussi, tel qu'il est largement pratiqué dans d'autres sections mais ignoré chez nous, promotion des collègues et reconnaissance du travail accompli.

- Pour le recrutement, respectons la loi et examinons systématiquement sans discrimination les candidatures locales lors des comités de sélection PR. Pour de jeunes responsables de laboratoire ou d'équipes, c'est sans doute un saut dans l'inconnu. Il y a assurément un travail collectif à faire dans les laboratoires pour définir les procédures permettant des délibérations incontestables. En effet, nous savons tous qu'une grande dif-

ficulté dans les laboratoires est non pas de choisir entre une candidature locale et une candidature extérieure, mais plutôt de répartir plusieurs excellentes candidatures locales. C'est une difficulté réelle qui, bien plus que les préconisations de l'INSMI, fait que nos laboratoires refusent de promouvoir des collègues localement.

- Pour ce qui est des promotions et du déroulement de carrière des enseignants-chercheurs, exigeons de nos syndicats, de l'INSMI, de nos universités, du CNU, du MESR, une voie alternative nationale pour le passage PR des collègues immobiles. Par exemple la transformation automatique des MCF HC HDR en PR, ou bien une promotion MCF HC → PR2 nationale via le CNU, qui permettrait de plus de rendre la proportion de femmes PR comparable à la proportion de femmes MCF.

La conjonction de toutes ces actions nous paraît nécessaire : une politique de mobilité géographique pour rapprochement familial facilitée, indépendante du passage rang B → rang A ; des recrutements de professeurs ou directeurs de recherches non discriminatoires sur des questions géographiques, et des perspectives de carrière nationales pour tous les enseignants-chercheurs de talent non-mobiles, qui n'auront pu être promus dans le cadre de la politique scientifique de leur laboratoire. C'est dans cet équilibre que, croyons-nous, le réel épanouissement scientifique et personnel de l'ensemble des collègues pourra être trouvé.

Ce texte se trouve aussi en ligne (http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Olivier.Garet/texte_mobilite.php), dans une version enrichie des noms de personnes qui affirment le soutenir. Si vous souhaitez soutenir le texte de cette tribune, merci d'envoyer un mail à O. Garet¹⁶ et B. Schapira¹⁷ pour que nous vous ajoutions à cette liste.

16. Olivier.Garet@univ-lorraine.fr

17. barbara.schapira@univ-rennes1.fr

Procès d’Ayşe Berkman (ou : « En défense de la logique »)

• A. DELORO

AYŞE BERKMAN est spécialiste de théorie des modèles. Elle a soutenu sa thèse en 1998 à Manchester, dirigée par Alexandre Borovik; le titre en était « Tame Groups of Finite Morley Rank ». De 1998 à 2011 elle était en poste à la *Middle East Technical University* (Ankara), et depuis cette date à l’*Université Mimar Sinan* (Istanbul), dont elle a dirigé le département de mathématiques jusqu’en 2017. Ses recherches portent sur la théorie des groupes de rang de Morley fini, qui font le lien entre la théorie des groupes finis, celle des groupes algébriques, et la théorie des modèles.

Mais ce 10 janvier 2019 elle ne parlait pas de son domaine d’expertise. Elle se défendait devant la 36^e Chambre du palais de justice de Çaglayan à Istanbul.

Ayşe est en effet accusée de propagande terroriste pour avoir signé une pétition. Le compte-rendu qui suit n’engage que son auteur. Fin 2015, suite aux couvre-feux décrétés par le gouvernement turc pour restaurer l’ordre dans le sud-est du pays, divers échos de violations des droits de l’homme ont commencé à filtrer [1, 2, 3]. Alarmé par ces bruits, un millier d’universitaires, suivi par un autre millier, a rédigé une pétition demandant avant toute chose le respect du droit [4]. La Justice turque veut démontrer que cette pétition fait le jeu du PKK (la guérilla kurde), et tombe ainsi sous le coup de l’article 7/2 de la loi anti-terroriste du pays [5]. Ses signataires sont pourchassés avec un intérêt dont les universitaires et autres intellectuels sont rarement l’objet en démocratie. Ayşe est l’une de ces figures, qu’en d’autres pays on nommerait pacifistes, objecteurs de conscience, ou lanceurs d’alerte.

Elle comparait donc en deuxième audience le 10 janvier pour livrer sa défense, ainsi que quatre universitaires de divers départements et établisse-

ments; il faut préciser qu’au jour du procès, 568 signataires étaient inculpés (voire déjà condamnés) des mêmes charges¹. L’acte d’accusation est le même aux informations personnelles près, et toujours formé sur celui qui sert pour Kivanç Ersoy, dont le nom n’est sans doute pas inconnu du lecteur. Pour les cinq du 10 janvier, qui font l’objet de poursuites techniquement indépendantes, le réquisitoire était rigoureusement le même; l’auteur ne se prononce pas sur la possibilité que ledit réquisitoire ait servi plus souvent encore mais le ton routinier du procureur le laissait penser [6].

Moins stéréotypée était la défense d’Ayşe, qui encourt jusqu’à cinq ans d’emprisonnement. Nous rapportons quelques extraits d’une traduction due à Noémi Levy, que nous remercions ici².

« Peut-être parce que je suis mathématicienne, et que je m’intéresse à une branche des mathématiques proche de la logique, lorsque j’ai lu l’acte d’accusation, j’ai été particulièrement frappée par la logique qu’il suivait. [...] Jusqu’à ces procès, je pensais qu’il en était du droit comme des mathématiques, que toute accusation devait être étayée par des preuves solides; en effet, si l’accusation pouvait se passer de preuve, chacun pourrait accuser l’autre à sa guise. » [...]

« Un second point a attiré mon attention : l’acte d’accusation est fondé sur une hypothèse. [...] En supposant que la critique est l’équivalent du terrorisme, le procureur conclut que nous nous sommes livrés à de la propagande terroriste. Cependant, en partant d’une proposition fautive et suivant les règles de la logique, il est possible de prouver n’importe quelle affirmation, vraie ou fautive : c’est l’une des règles fondamentales connues des mathématiciens et logiciens. Je pensais que les juristes connaîtraient aussi cette règle. » [...]

1. Début mars plus tard ce nombre dépasse six cent cinquante; cent quarante verdicts sont déjà tombés. Voir <https://academicsforpeace.net/node/431> et son lien à droite « Click here for up-to-date hearing statistics. »

2. Le texte complet est accessible sur le site de la SMF : <https://smf.emath.fr/smf-dossiers-et-ressources/dossier-turquie-evenements-recents>, ndlr.

« Le dernier point que je souhaite examiner est l'affirmation qu'aucun pays n'autorise la propagande terroriste. Si nous utilisons la définition de la propagande terroriste utilisée par le procureur, soit la critique de l'État, il y a de nombreux contre-exemples. Ainsi, en 1960, le *Manifeste des 121* fut publié en France par un groupe d'intellectuels, parmi lesquels Jean-Paul Sartre et André Breton, pour condamner les tortures et violations des droits de l'homme commises par l'armée française en Algérie. Ils dénonçaient la guerre comme cruelle et absurde et invitaient le peuple français à désobéir à l'armée. Le manifeste suscita à l'époque des réactions très vives en France : sa publication dans la presse fut interdite et les cours des professeurs d'université signataires furent suspendus. Cependant, même si des actes d'accusation furent préparés à l'encontre de 29 signataires sur 121, ils furent abandonnés ; ainsi, aucun des signataires ne fut condamné. » [...]

« La raison, l'attitude scientifique, l'honnêteté, la liberté d'opinion et d'expression sont les conditions *sine qua non* des mathématiques, et au-delà, de la sphère universitaire. Les idées neuves ne peuvent naître que d'esprits libres, dans un environnement libre. Si nous voulons que notre pays progresse, nous devons défendre la liberté d'opinion et d'expression dans tous les domaines, sans compromis. » [...]

« Avant de conclure, je voudrais revenir à la pétition. Elle appelle à reprendre les négociations de paix. Un texte de propagande terroriste peut-il appeler à la paix ? Je vous laisse décider. [...] Si cette pétition est un acte de propagande, c'est une propagande pour la paix, et en aucun cas pour le terrorisme. Elle ne contient pas d'insultes et s'inscrit dans les limites de la liberté d'expression qui est nécessaire à tous, et que nous devons tous défendre. En la signant, j'ai exercé ma responsabilité de citoyenne. »

« Pour toutes ces raisons, je demande mon acquittement. »

Toutes les suites seront mentionnées sur la page de la SMF.

D'autres mathématiciens sont en instance de jugement : Tuna Altinel (Lyon 1), Kivanç Ersoy, Feza Arslan et Özgür Martin (Université Mimar Sinan)³. À ce jour déjà plus d'un siècle de prison a été prononcé contre les « Universitaires pour la paix » ; ces derniers temps les peines ont tendance à devenir plus sévères.

On verra sur le même sujet la récente prise de position de l'AMS [7], ainsi qu'un article plus ancien de Kivanç Ersoy [8]. L'auteur de ces lignes a rédigé sur l'audition d'Ayşe Berkman un rapport en anglais [9]. On lira avec intérêt tout le dossier de la SMF sur ce beau pays qu'est la Turquie [10].

Références

- [1] URL : https://www.lemonde.fr/europe/article/2015/12/19/scenes-de-guerilla-dans-les-rues-de-diyarbakir_4835194_3214.html.
- [2] URL : <https://www.amnesty.org/en/documents/EUR44/3178/2016/fr/>.
- [3] URL : <https://www.amnesty.org/fr/latest/news/2016/12/turkey-curfews-and-crackdown-force-hundreds-of-thousands-of-kurds-from-their-homes/>.
- [4] URL : <https://barisicinakademisyenler.net/node/63>.
- [5] URL : <https://www.legislationline.org/documents/id/16875>.
- [6] URL : <https://afp.hypotheses.org/documentation/bill-of-indictment>.
- [7] URL : https://www.ams.org/news?news_id=4893.
- [8] URL : <https://smf.emath.fr/publications/la-gazette-des-mathematiciens-151-janvier-2017>.
- [9] URL : <https://afp.hypotheses.org/1369>.
- [10] URL : <https://smf.emath.fr/smf-dossiers-et-ressources/dossier-turquie>.

3. Le 21 février, la 33^e Cour a prononcé 27 condamnations contre des universitaires : 13 avec et 14 sans sursis, Öznur Yaşar Diner (informatique théorique, Université de Kadir Has) a été condamnée à 27 mois de prison ferme. Le 26 février, Özlem Beyarşlan (Université Boğaziçi) a été condamnée à 15 mois avec sursis.



Position de l'INSMI sur la mobilité au recrutement en Mathématiques

L'Institut National des Sciences Mathématiques et de leurs Interactions (INSMI) est un institut du CNRS qui a par ailleurs été investi en 2010 par le Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche et de l'Innovation des missions nationales d'animation et de coordination de la recherche en mathématique. Son action de structuration à travers les unités mixtes de recherche et les fédérations de recherche incluant certaines équipes d'accueil permettent d'affirmer que 90% des mathématiciennes et mathématiciens en poste en France ont accès à des moyens procurés par le CNRS. Cette couverture nationale, que l'INSMI travaille à améliorer, permet cette animation. Un autre objectif de la mission nationale est de maintenir l'école mathématique française au meilleur niveau international. Se pose donc la question de comment faire. Une réponse est la mobilité dans les recrutements.

Depuis plus de vingt ans, la communauté des mathématiciens applique globalement une politique de non-recrutement local (ou de mobilité active) qui consiste à ne pas recruter un maître de conférences (MC) ou de ne pas affecter un chargé de recherche (CR) dans le laboratoire/établissement¹ de soutenance de sa thèse; ni de recruter un professeur des universités (PU) ou d'affecter un directeur de recherche (DR) dans le laboratoire/établissement où il est déjà en poste en tant que MC ou CR. Avant même que l'INSMI n'existe comme institut, les responsables des mathématiques au CNRS ont également promu l'affichage d'un indice de mobilité académique (AMI) inspiré de pratiques internationales qui mesure à quel point la mobilité ci-dessus est réalisée.

On peut se demander quel est l'intérêt de cette politique vis-à-vis de l'objectif recherché.

Au niveau national, elle permet le brassage des idées et stimule l'activité scientifique des chercheurs et enseignants-chercheurs.

Au niveau local, une forte mobilité académique entrante et sortante au sein d'un laboratoire traduit sa force d'attractivité et de rayonnement et donc son dynamisme. Cet essaimage doit être considéré par les tutelles comme un gage de qualité des laboratoires.

Cette politique de mobilité permet à notre communauté de s'épanouir, de se renouveler et de se maintenir au plus haut niveau international. C'est pourquoi cette politique a été réaffirmée dans la dynamique de création de l'INSMI au CNRS en 2009 (voir <http://www.cnrs.fr/insmi/spip.php?article38>.) et est toujours un des éléments de la politique de l'institut. Il s'emploie à la mettre en œuvre lors des affectations des CR et DR.

L'INSMI la prône en particulier dans son partenariat avec les établissements via les unités mixtes de recherche où, rappelons-le, il y a en moyenne 9 enseignants-chercheurs pour un chercheur CNRS en mathématique.

Dans les établissements, du fait de cette politique de mobilité, les laboratoires de mathématiques sont pourvoyeurs de postes libérés par des MC devenant PU ailleurs après un processus de recrutement ouvert et compétitif. Ce sont donc des jeunes éléments parmi les plus dynamiques et productifs qui partent. L'INSMI (dans le cadre de sa mission nationale) recommande de ne pas supprimer ou réaffecter ces postes pour préserver le potentiel recherche et enseignement du laboratoire. C'est à ce prix que chaque établissement continuera à avoir des laboratoires de mathématiques à grande visibilité.

La communauté mathématique doit maintenir sa vigilance et ses efforts pour maintenir, globalement et dans la durée, la mobilité académique.

Pascal Auscher, directeur de l'INSMI

1. En mathématique, il est presque systématique, sauf rares exceptions, que l'établissement (très souvent universitaire) ne soit tutelle que d'un seul laboratoire couvrant tout le champ de la discipline présent dans l'établissement. Les exceptions sont des laboratoires sur des thématiques distinctes. Par ailleurs, certains laboratoires sont multi-tutelles avec plusieurs établissements. La mesure en référence au laboratoire est donc plus pertinente pour les mathématiques.

Mathématiciens, mathématiciennes : parlez-nous de vos pratiques !

Les pratiques de recherche, d'accès à l'information et de publication des résultats scientifiques en mathématiques évoluent.

Pour comprendre les mécanismes de cette évolution, en saisir les enjeux et les impacts, une étude sociologique auprès des mathématiciens va être menée d'avril à juin 2019 :

- via des entretiens avec un sociologue : n'hésitez pas à contacter Alexis Servoin (servoin@math.cnrs.fr), étudiant en Master 2 de sociologie à l'École des Hautes Études en Sciences Sociales, si vous souhaitez partager votre avis ;
- et une courte enquête en ligne (10 à 15 mn) qui sera diffusée sur le site du RNBm (<https://www.rnbm.org/>).

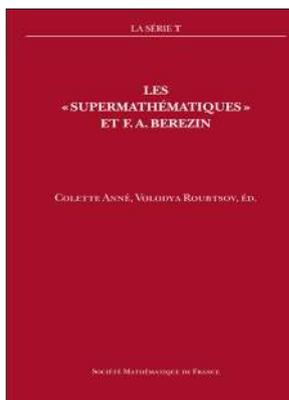
Tous les points de vue et avis sont importants et nous intéressent : faites-nous connaître vos usages en terme d'accès à l'information, de publication scientifique et de valorisation de votre recherche.

Nous encourageons tous les chercheurs (de toutes disciplines, âges, et statuts) à participer à l'enquête, même (et surtout) ceux qui n'utilisent pas ou plus les services d'une bibliothèque.

L'analyse des résultats de cette étude sera diffusée auprès de la communauté, lors des journées du RNBm au CIRM du 12 au 15 novembre 2019 et fera l'objet d'un article dans la *Gazette des Mathématiciens*.

Contact : Francesca Leinardi
(francesca.leinardi@univ-grenoble-alpes.fr).

La Série T



Les « supermathématiques » et F. A. Berezin

C. ANNÉ, V. ROUBTSOV, ÉDS.

ISBN 978-2-85629-897-8

2018 - 154 pages - Softcover. 17 x 24

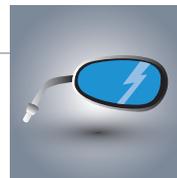
Public: 40 € - Members: 28 €

Les supermathématiques, domaine au carrefour des mathématiques et de la physique théorique promis à de riches et fondamentaux développements, ont largement été fondées en Union Soviétique autour de la figure de Felix Alexandrovich Berezin (1931-1980), et ses travaux font maintenant partie des classiques. F. A Berezin disparut prématurément le 14 juillet 1980 dans un accident durant une expédition géologique dans la région de la Kolyma. Ses amis et collègues, en rappelant leurs souvenirs, nous parlent d'un grand scientifique pris dans les tourments de l'histoire : une formation scientifique sous Staline, avec la chasse aux anciens révolutionnaires et la discrimination antisémite, et une carrière dans l'Union Soviétique de la deuxième glaciation, l'ère Brejnev.

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <http://smf.emath.fr>

*frais de port non compris





MATHEMATICIANS CALL FOR A HALT TO THE ARMS RACE

Mathematicians significantly contribute to military planning and the design of weapons systems both indirectly, by providing the theoretical basis for science and technology and directly, by working on arms research projects or by producing mathematical results which later are found to have military significance. We, mathematicians from all over the world, therefore feel obliged to publicly express our deep concern about the present acceleration of the arms race.

By consuming vast amounts of human and natural resources which otherwise could be used to help solve many of the urgent problems mankind now faces, the arms race is a major cause of much suffering, hunger and death in the world, especially in the developing nations. Also, the arms race does not prevent local wars.

We share the opinion of many colleagues in other scientific fields and of several military experts that in fact, if left unchecked, the arms race will most probably lead to nuclear war between the two major military blocs.

The increased danger of nuclear war, initiated either intentionally or unintentionally, stems mainly from the following facts which have been clearly brought out in the current public debate:

Many of the nuclear weapons systems and space weapons presently being developed and, in some cases, already being deployed are designed to be war-fighting rather than deterrent weapons. The associated control and warning systems are becoming more and more complex and they are fallible.

The success of negotiations depends greatly on the ability to verify compliance to arms control agreements. We still have a chance to solve the verification problem. As the arms race proceeds, this problem will become more and more difficult, if not impossible, to solve.

Nuclear war must be averted and initial steps toward this end must be made now. A necessary first step is a freeze on all nuclear weapons systems and space weapons. The freeze should not be postponed until the conclusion of time-consuming negotiations. Each nation can immediately enforce a comprehensive freeze on a unilateral basis without endangering its own security or that of its allies.

We call for an agreement to freeze all nuclear weapons systems and space weapons, that is, to stop their development, testing, production and deployment. Meanwhile, each nation should unilaterally enforce this freeze. We urge that measures then be taken to significantly reduce the present number of nuclear weapons and that serious efforts be made to reach further, more comprehensive agreements on other types of weapons, in particular chemical and biological weapons.

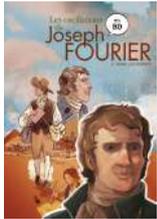
Initial signatories as of August 1st, 1985 include:

Australia: Roger Grimshaw, Alan Roberts. Brazil: Antonio Conde, Daciberg Lima Goncalves. Canada: H.S.M. Coxeter, Israel Halperin, Eric C. Milner, Anatol Rapoport. P.R. China: Wu Wen-istun. Columbia: Guillermo Restrepo. Denmark: Ib Madsen. Egypt: Fouad Mohamed Ragab. France: Claude Berge, Claude Godbillon, Jean-Pierre Kahane, Klaus Krickeberg, Bernard Malgrange, Yves Meyer. German Dem. Rep.: Günter Asser. Fed. Rep. of Germany: Hendrik Bramhoff, E. Brieskorn, Günter Harder, William Kerby, Detlef Laugwitz. Hungary: Akos Császár, Pal Erdős, Gabor Halasz, Bela Szokafalvi-Nagy. India: R.P. Bambah, C.G. Khatri, N. Sankaran, S. Raghavan, K. Venkatachallengar. Israel: S.A. Amit-sur. Italy: Bruno de Finetti. Japan: Yasumasa Akagawa, Yasunori Fujikoshi, Yasutaka Ihara, Kiyosi Ito, Shokichi Iyanaga, J.-iti Nagata. Mexico: Samuel Gitler. Netherlands: Michiel Hazewinkel. Nigeria: Samuel A. Ilori, Aderemi Kuku, Adegoke Olubumma. Poland: Z. Ciesielski, Cz. Olech. Spain: Baltasar Rodriguez-Salinas. Switzerland: Alexander Ostrowski. United Kingdom: J.F. Adams, Sheila Brenner, M.C.R. Butler. USA: Lars Ahlfors, Herbert Busemann, Martin Davis, J.L. Doob, Bradley Efron, Peter Hilton, Stephen C. Kleene, Neal Koblitz, John Lamperti, Serge Lang, Robert D. Langlands, Richard Pollack, George Polya, Steven Smale, Arthur H. Stone, Dorothy M. Stone, Robert E. Tarjan, William Thurston, Hasler Whitney. USSR: Alexander Alexandrov, Anatoli A. Dorodnicyn, Mark A. Krasnoselskii, A.A. Samarskii. Vietnam: Hoang Tuy.

continued overleaf:



LIVRES



Les oscillations de Joseph Fourier en BD

Emmanuel MARIE et Emmanuel CERISIER

Petit à petit, 2018. 64 p. ISBN : 979-10-95670-77-3

Cet ouvrage collectif réunissant mathématiciens et historiens des mathématiques présente de manière vivante et ludique la vie et l'œuvre de Joseph Fourier. La formule choisie par les auteurs est une alternance originale de bande dessinée illustrant des phases de sa vie et de pages documentaires abordant tour à tour le contexte historique et les contributions scientifiques du célèbre mathématicien.

Tout en révolutionnant les mathématiques et la physique par ses travaux sur la chaleur et la célèbre décomposition qui porte son nom, Fourier a su mettre son talent aux multiples facettes au service des événements exceptionnels qu'il a traversés. Bien loin du cliché du savant reclus, Fourier s'est mêlé avec passion à tous les défis de son temps. Ardent défenseur des valeurs portées par la révolution, il ira jusqu'à risquer sa vie sous la terreur. Il participera activement à l'expédition Égyptienne de Napoléon, comme scientifique mais aussi comme diplomate. De retour en France, il sera nommé préfet par ce même Napoléon qui malgré des désaccords politiques lui gardera une confiance indéfectible. Le caractère révolutionnaire de ses découvertes ne lui rendra pas la tâche facile auprès de ses contemporains qui tarderont à en reconnaître la valeur. Il parviendra malgré tout à convaincre certains mathématiciens de premier plan, et sera finalement élu à l'Académie. Enseignant hors pair, il inspirera de brillants successeurs, dont une femme, Sophie Germain qui prolongera son travail sur les cordes vibrantes.

Qu'on ne s'y trompe pas, il ne s'agit pas d'un récit romancé : la priorité n'est pas à l'humour ou au suspense. Le dessin est sobre, mais de qualité ; les dialogues ne recherchent pas la fantaisie, mais l'anecdote authentique. Chacun des 9 épisodes de sa vie nous transporte dans l'ambiance de l'époque, tantôt au milieu d'une scène historique, tantôt dans l'intimité du personnage. On y voit un Fourier présent sur tous les fronts, mais dont la curiosité scientifique reste sans cesse en éveil. Alors qu'il inspecte les conditions de travail des mineurs, on le voit s'extasier en constatant que la chaleur étouffante de la mine confirme ses prédictions sur la température de l'atmosphère ! Les pages documentaires sont quant à elles très instructives, on y apprend par exemple comment sont nées et ont évolué certaines institutions centrales de la recherche française comme l'Académie, l'École normale supérieure et l'École polytechnique. Enfin, le livre se conclut par un tour d'horizon des nombreuses technologies actuelles reposant sur ses travaux, depuis le scanner médical jusqu'au format JPEG.

Le parcours exceptionnel de ce scientifique engagé et la portée multiséculaire de ses travaux en font un superbe plaidoyer pour la recherche à un moment où celle-ci manque de reconnaissance dans la société. On ne peut que saluer ce travail de grande qualité et encourager sa publicité afin qu'il puisse atteindre et toucher un large public.

Romain TESSERA
Université Paris-Sud

MATHÉMATIQUES ÉTONNANTES

Mathématiciens
& ingénieurs
racontent en duo
leurs rencontres
étonnantes

Deux fois
par an
à 18h00

Un nouveau cycle de conférences

Pour découvrir des interactions surprenantes entre mathématiques réputées abstraites et applications concrètes ou entre différents domaines des mathématiques. Un.e chercheur.se à l'université et un.e chercheur.se en entreprise viendront raconter leur rencontre avec ses surprises, ses difficultés et ses succès.

Plus d'informations et programme :
smf.emath.fr

Société
Mathématique
de France



Aromaths

FONDATION
BLAISE PASCAL

Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (<http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/>).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (gazette@smf.emath.fr), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier \TeX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe \LaTeX *gztarticle* fournie par les distributions \TeX courantes (\TeX Live et Mac \TeX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiK \TeX), et sinon téléchargeable depuis la page <http://ctan.org/pkg/gzt>. Sa documentation détaillée se trouve à la page <http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf>. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution \TeX à jour.

Classe \LaTeX : Denis BITOUZÉ (denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr)

Conception graphique : Nathalie LOZANNE (n.lozanne@free.fr)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe CAIGNAERT.

