

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

NOMBRE DE CLASSES DE CONJUGAISON D'ÉLÉMENTS D'ORDRE FINI DANS LES GROUPES DE BROWN-THOMPSON

Hajer Hmili Ben Ammar & Isabelle Liousse

Tome 148
Fascicule 3

2020

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

pages 399-409

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel
de la Société Mathématique de France.

Fascicule 3, tome 148, septembre 2020

Comité de rédaction

Christine BACHOC	Laurent MANIVEL
Yann BUGEAUD	Julien MARCHÉ
Jean-François DAT	Kieran O'GRADY
Clothilde FERMANIAN	Emmanuel RUSS
Pascal HUBERT	Christophe SABOT

Marc HERZLICH (Dir.)

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
commandes@smf.emath.fr	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € (\$ 64)

Abonnement électronique : 135 € (\$ 202),

avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € (\$ 296)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Bulletin de la SMF

Bulletin de la Société Mathématique de France

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 1 44 27 67 99 • Fax : (33) 1 40 46 90 96

bulletin@smf.emath.fr • smf.emath.fr

© Société Mathématique de France 2020

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Fabien DURAND

NOMBRE DE CLASSES DE CONJUGAISON D'ÉLÉMENTS D'ORDRE FINI DANS LES GROUPES DE BROWN-THOMPSON

PAR HAJER HMILI BEN AMMAR & ISABELLE LIOUSSE

RÉSUMÉ. — Nous étendons un résultat de Matucci ([13]) sur le nombre de classes de conjugaison d'éléments d'ordre fini dans le groupe de Thompson T . D'après [12], le groupe de Brown-Thompson $T_{r,m}$ ne contient pas d'élément d'ordre q lorsque $\text{pgcd}(m-1, q)$ ne divise pas r . Nous montrons que si $\text{pgcd}(m-1, q)$ divise r alors il y a exactement $\varphi(q) \cdot \text{pgcd}(m-1, q)$ classes de conjugaison d'éléments d'ordre q dans $T_{r,m}$, où φ est la fonction phi d'Euler. Comme corollaire, nous obtenons que le groupe de Thompson T n'est isomorphe à aucun des groupes $T_{r,m}$ avec $m \neq 2$ et tout morphisme de T dans $T_{r,m}$, avec $m \neq 2$ et $r \neq 0 \bmod (m-1)$, est trivial.

Texte reçu le 22 janvier 2019, modifié le 7 mai 2019, accepté le 28 novembre 2019.

HAJER HMILI BEN AMMAR, Unité d'analyse mathématique et applications, Département de mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis, Tunisie • *E-mail* : hajermido@yahoo.fr
ISABELLE LIOUSSE, Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq Cédex, France • *E-mail* : liousse@univ-lille.fr

Classification mathématique par sujets (2010). — 20E45, 37E10, 37E15.

Mots clefs. — Groupes de Thompson, Groupes de Brown, Éléments de torsion, Classes de conjugaison, Homéomorphismes PL du cercle, Isomorphismes.

Hajer Hmili remercie l' Unité d'analyse mathématique et applications de la Faculté des Sciences de Tunis et exprime sa gratitude à son mari Mourad Ben Ammar pour son soutien. Isabelle Liousse remercie le Labex CEMPI (ANR-11-LABX-0007-01), le projet ANR Gromeo (ANR-19-CE40-0007) et le CNRS pour sa délégation 2019-20.

ABSTRACT (*Number of conjugacy classes of torsion elements in Brown-Thompson groups*). — We extend a result of Matucci ([13]) on the number of conjugacy classes of finite order elements in the Thompson group T . According to [12], if $\gcd(m-1, q)$ is not a divisor of r then there does not exist element of order q in the Brown-Thompson group $T_{r,m}$. We show that if $\gcd(m-1, q)$ is a divisor of r then there are exactly $\varphi(q) \cdot \gcd(m-1, q)$ conjugacy classes of elements of order q in $T_{r,m}$, where φ is the Euler function ϕ . As a corollary, we obtain that the Thompson group T is isomorphic to none of the groups $T_{r,m}$, for $m \neq 2$ and any morphism from T into $T_{r,m}$, with $m \neq 2$ and $r \neq 0 \bmod (m-1)$, is trivial.

1. Introduction et définitions

En 1965, R. Thompson découvrit les premiers exemples de groupes $T \subset V$ de présentation finie, simples et infinis. Le groupe T [resp. V] se représente comme groupe d'homéomorphismes [resp. échanges d'intervalles] affines par morceaux du cercle (voir [6], [14]). En 1987, K. Brown ([5]) a défini une famille $T_{r,m} \subset V_{r,m}$ englobant T et V et les groupes $V_{r,m}$ sont isomorphes aux groupes $G_{r,m}$ de Higman ([10]).

Plus précisément, soit r un entier strictement positif, on note $\mathbb{S}_r$ le cercle $\mathbb{R}/r\mathbb{Z}$ de longueur r . Le cercle de longueur 1 est $\mathbb{S}_1$, nous le noterons plus classiquement $\mathbb{S}^1$.

DÉFINITION. — Un homéomorphisme f du cercle $\mathbb{S}_r$ est *affine par morceaux* s'il existe une subdivision finie $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_p = r$ de l'intervalle $[0, r]$ et un relevé $\tilde{f}$ de f à $\mathbb{R}$ tels que $\tilde{f}|_{[a_i, a_{i+1}]}(x) = \lambda_i x + \beta_i$, $\lambda_i, \beta_i \in \mathbb{R}$.

Les points a_i sont appelés *points de coupure* de f et les nombres λ_i , *pentés de f* .

Le groupe des homéomorphismes affines par morceaux de $\mathbb{S}_r$ préservant l'orientation est noté $PL^+(\mathbb{S}_r)$.

DÉFINITION. — Soient r et $m \geq 2$ deux entiers strictement positifs. On définit le *groupe de Brown-Thompson* $T_{r,m}$ comme l'ensemble des éléments f de $PL^+(\mathbb{S}_r)$ tels que :

- les pentés de f appartiennent à $\langle m \rangle = \{m^s, s \in \mathbb{Z}\}$.
- les points de coupure de f appartiennent à $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}] = \{N \cdot m^s | N, s \in \mathbb{Z}\}$,
- les images par f de 0 et des points de coupure de f appartiennent à $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$.

Le *groupe de Thompson* T est $T_{1,2}$.

De nombreux auteurs se sont intéressés aux invariants et à la question d'isomorphisme pour ces groupes de type Thompson ([1], [2], [3], [4], [5], [10], [12], [13], [14], ...).

Dans cet article, nous nous concentrons sur les obstructions à l'isomorphie entre groupes $T_{r,m}$ issues des éléments d'ordre fini et de leurs classes de conjugaison. Le calcul du nombre de ces classes fût effectué pour $G_{r,m}$ par Higman ([10], section 6), pour T par Matucci ([13]) puis ultérieurement par Geoghegan-Varisco ([8]) et Fossas ([7]). Comme dans [13] et [8], nous utilisons la représentation comme groupe d'homéomorphismes affines par morceaux du cercle et disposons ainsi d'un invariant dynamique supplémentaire : le nombre de rotation de Poincaré. Nous indiquons sa définition et ses premières propriétés (voir [9] ou [11]).

DÉFINITION. — Soit f un homéomorphisme du cercle $\mathbb{S}_r$, on définit le *nombre de rotation* sur $\mathbb{S}_r$ de f par :

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{f}^n(0)/rn) \pmod{1} \in \mathbb{S}^1.$$

Ce nombre ne dépend pas du choix du relevé $\tilde{f}$ et satisfait les propriétés classiques :

PROPRIÉTÉS. —

- $\rho(R_\alpha) = \frac{\alpha}{r}$ où $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{r}$,
- $\rho(f^n) = n \rho(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
- si f est d'ordre fini $q \in \mathbb{N}^{>1}$ alors $\rho(f) = \frac{p}{q}$ avec $p < q$ et $p \wedge q = 1$,
- soit $h : \mathbb{S}_r \rightarrow \mathbb{S}_{r'}$ un homéomorphisme préservant l'orientation alors $\rho(h \circ f \circ h^{-1}) = \rho(f)$.

Commençons par cette observation : tout élément d'ordre q est conjugué dans $PL^+(\mathbb{S}^1)$ à une rotation d'angle $\frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$, une conjugante est construite par moyennisation (voir par exemple [11], Proposition 11.2.2). Comme deux rotations d'angles différents ne sont jamais C^0 -conjuguées, le nombre de classes de conjugaison d'éléments d'ordre q dans $PL^+(\mathbb{S}^1)$ est exactement le nombre d'entiers $p < q$ premiers avec q c'est à dire $\varphi(q)$ (la fonction phi d'Euler).

Le Théorème 7.1.5 de [13] (voir aussi [8] et [7]) exprime qu'il est encore vrai pour le groupe de Thompson T : « dans T , tout rationnel de $\mathbb{S}^1$ est réalisé comme nombre de rotation d'une unique classe de conjugaison d'éléments d'ordre fini ».

Ici, nous établissons que cette propriété n'est plus satisfaite par les autres groupes $T_{r,m}$:

THÉORÈME 1.1. — Soient $r \geq 1$, $m \geq 2$ et $q \geq 2$ des entiers.

- A. Si $\text{pgcd}(m-1, q)$ ne divise pas r alors il y a 0 classes de conjugaison d'éléments d'ordre q dans $T_{r,m}$.
- B. Si $\text{pgcd}(m-1, q)$ divise r alors il y a $\text{pgcd}(m-1, q)$ classes de conjugaison d'éléments d'ordre q et de nombre de rotation $\frac{p}{q}$ dans $T_{r,m}$, pour tout entier p premier avec q .
- C. Si $\text{pgcd}(m-1, q)$ divise r alors il y a $\varphi(q) \cdot \text{pgcd}(m-1, q)$ classes de conjugaison d'éléments d'ordre q dans $T_{r,m}$.

Nous en déduisons le

COROLLAIRE 1.2. — *Tout rationnel de $\mathbb{S}^1$ est réalisé comme nombre de rotation d'une unique classe de conjugaison d'éléments d'ordre fini dans $T_{r,m}$ si et seulement si $m = 2$.*

Le groupe de Thompson T n'est isomorphe à aucun des groupes $T_{r,m}$ avec $m \neq 2$ et tout morphisme de T dans $T_{r,m}$, avec $m \neq 2$ et $r \neq 0 \bmod (m-1)$, est trivial.

Ce corollaire contraste avec le résultat d'ubiquité de F montré par Brin ([3]). Notre approche diffère de celles de [13], [8] et [7] au sens où elle est essentiellement basée sur un critère dû à Bieri et Strebel [1].

REMARQUE 1.3. — Considérons un entier $m \in \mathbb{N}^{>1}$. La réduction modulo $m-1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{m-1} = \mathbb{Z}/(m-1)\mathbb{Z} = \{0, \dots, m-2\}$, $n \mapsto [n]$ envoie m sur 1. Par conséquent, elle s'étend en un morphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}] \rightarrow \mathbb{Z}_{m-1}$, $\frac{n}{m^s} \mapsto [n]$ qui coïncide avec l'application quotient par l'idéal principal $(m-1)\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$.

Maintenant, toute application affine de $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ dans lui-même de la forme $x \mapsto m^k x + \frac{N}{m^t}$ passe au quotient par cet idéal et l'application quotient est la translation $\mathbb{Z}_{m-1} \rightarrow \mathbb{Z}_{m-1}$, $[x] \mapsto [x] + [a]$.

Par récurrence sur le nombre d'intervalles où il est affine et par continuité en ses points de coupure, tout PL_m -homéomorphisme $f : [a, b] \rightarrow [a', b']$ induit une application $\bar{f}_m : \mathbb{Z}_{m-1} \rightarrow \mathbb{Z}_{m-1}$ qui est la translation $[x] \mapsto [x] + [a' - a]$ et l'application $f \mapsto \bar{f}_m$ est compatible avec la composition.

Finalement, les classes de conjugaisons dans $T_{r,m}$ des éléments de torsion de nombre de rotation $\frac{1}{q}$ sont caractérisées par l'image de 0 dans $\mathbb{Z}_{m-1}$. D'autre part, un point de $\mathbb{Z}_{m-1}$ est ainsi réalisé si et seulement si il est solution de l'équation de congruence $qa \equiv r$ (voir e.g. (2) $\Rightarrow$ (1) de la Proposition 3.3). On retrouve essentiellement le Théorème 1.1 en notant que cette équation n'a pas de solution si r ne divise pas $\text{pgcd}(q, m-1)$ et en a $\text{pgcd}(q, m-1)$ sinon.

2. Préliminaires

2.1. Critère de Bieri-Strebel pour les groupes de Brown-Thompson. — Nous reprenons ici le critère général de Bieri-Strebel déterminant à quelles conditions deux intervalles réels sont échangés par une application affine par morceaux avec points de coupure et pentes prescrites (voir le Théorème A 4.1 de [1]).

DÉFINITION. — • Un m -intervalle est un intervalle réel dont les extrémités sont dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$.

- Un homéomorphisme $f : I \rightarrow I'$ est dit PL_m s'il est affine par morceaux avec pentes dans $\langle m \rangle$ et points de coupure dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$.
- Deux intervalles I et I' sont dits PL_m -équivalents s'il existe un homéomorphisme PL_m entre-eux.

PROPOSITION 2.1 ([1], [12]). — Deux m -intervalles I et I' sont PL_m -équivalents si et seulement si $|I| - |I'| \in (m-1)\mathbb{Z} \left[\frac{1}{m} \right]$, où $|I|$ représente la longueur de l'intervalle I .

Démonstration. — Soient $I = [a, c]$ et $I' = [a', c']$ avec $a, a', c, c' \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{m} \right]$. Supposons qu'il existe f un homéomorphisme PL_m entre I et I' . Notons $a = b_0 < b_1 < \dots < b_{n-1} < b_n = c$, $b_i \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{m} \right]$, les points de coupure de f et $\lambda_i = m^{k_i}$, $k_i \in \mathbb{Z}$, la pente de f sur $[b_{i-1}, b_i]$. Nous allons montrer que $|I| - |I'| = (c-a) - (c'-a') \in (m-1)\mathbb{Z} \left[\frac{1}{m} \right]$.

Comme

$$c-a = \sum_i (b_i - b_{i-1}) \quad \text{et} \quad c'-a' = \sum_i \lambda_i (b_i - b_{i-1}),$$

on a

$$(c-a) - (c'-a') = \sum_i (1 - \lambda_i)(b_i - b_{i-1})$$

et

$$(1 - \lambda_i) = -(m-1) \sum_{p=0}^{k_i-1} m^p = (m-1)M_i \quad \text{avec } M_i \in \mathbb{Z}$$

et finalement

$$(c-a) - (c'-a') = (m-1) \sum_i M_i (b_i - b_{i-1}) \in (m-1)\mathbb{Z} \left[\frac{1}{m} \right].$$

Réciproquement, supposons

$$(*) \quad |I| - |I'| \in (m-1)\mathbb{Z} \left[\frac{1}{m} \right].$$

Quitte à composer à la source et au but par des rotations d'angles convenables dans $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{m} \right]$, on peut supposer que $I = [0, b]$ et $I' = [0, b']$ avec $b, b' \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{m} \right]$ positifs.

La condition $(*)$ se traduit par le fait qu'il existe $a \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{m} \right]$ tel que $b' = b + (m-1)a$ et il s'agit de construire un PL_m -homéomorphisme $f : [0, b] \rightarrow [0, b + (m-1)a]$ pour tous $a, b \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{m} \right]$ avec $b \geq 0$ et $b + (m-1)a \geq 0$. L'inverse d'un homéomorphisme PL_m entre m -intervalles étant PL_m , on peut aussi supposer, quitte à échanger b et b' , que $a \geq 0$.

CAS 1 ($a < b$ ($0 \leq b-a \leq b$)). — L'application $f_0 : [0, b] \rightarrow [0, b + (m-1)a]$ définie par

$$f_0(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, b-a] \\ m(x - (b-a)) + (b-a) & \text{si } x \in [b-a, b] \end{cases}$$

est l'homéomorphisme PL_m cherché.

CAS 2 ($a \geq b$). — Choisissons $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq m^{-p}a < b$. D'après le cas 1, il existe $f_0 : [0, b] \rightarrow [0, b + (m-1)m^{-p}a]$ ayant les propriétés requises. On définit alors $f_1 : [0, b + (m-1)m^{-p}a] \rightarrow [0, b + (m-1)a]$ par

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, b] \\ m^p(x - b) + b & \text{si } x \in [b, b + (m-1)m^{-p}a]. \end{cases}$$

L'application cherchée est $f = f_1 \circ f_0$. $\square$

CONSÉQUENCE (Isomorphisme de Bieri-Strebel). — Soient $m > 1$ un entier, si r et r' sont deux entiers positifs congrus modulo $m-1$ alors les groupes $T_{r,m}$ et $T_{r',m}$ sont isomorphes. Par suite tout $T_{r',m}$ est isomorphe à l'un des $m-1$ groupes $T_{r,m}$, $r \in 1, \dots, m-1$.

REMARQUE 2.2. — Tous les intervalles dyadiques sont PL_2 -équivalents et par suite tous les groupes $T_{r,2}$ sont isomorphes à T .

2.2. Nombres de rotation des éléments d'ordre fini. —

PROPOSITION 2.3 ([12]). — Soient $m \geq 2$, $r \geq 1$ et $q \geq 1$ des entiers.

1. Si le groupe $T_{r,m}$ contient un élément d'ordre q alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, le groupe $T_{r,m}$ contient un élément d'ordre fini de nombre de rotation $\frac{p}{q}$.
2. Le groupe $T_{r,m}$ contient un élément d'ordre q si et seulement si $\text{pgcd}(m-1, q)$ divise r .

Démonstration. — Nous supposons $q \geq 2$, pour $q = 1$ le résultat est trivial.

Premier item. Supposons qu'existe $f \in T_{r,m}$ d'ordre q . On a $\rho(f) = \frac{n}{q}$ où les entiers n et q sont premiers entre-eux. Par Bezout, il existe u et v entiers tels que $1 = un + vq$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on définit un élément d'ordre fini de $T_{r,m}$ par $g = f^{up}$. On a $\rho(g) = \rho(f^{up}) = up\rho(f) = \frac{upn}{q} = \frac{p(1-vq)}{q} = \frac{p}{q} - pv = \frac{p}{q} \pmod{1}$.

Deuxième item.

Condition nécessaire. Supposons que r soit un multiple de $\text{pgcd}(q, m-1)$. D'après Bezout, $r = uq + v(m-1)$, donc $r = uq$ modulo $(m-1)$. L'isomorphisme de Bieri-Strebel implique que les groupes $T_{uq,m}$ et $T_{r,m}$ sont isomorphes. De plus, le groupe $T_{uq,m}$ contient la rotation $x \mapsto x + u$ d'ordre q et de nombre de rotation $\frac{1}{q}$.

Condition suffisante. Par hypothèse et d'après le premier item, il existe $f \in T_{r,m}$ d'ordre q et $\rho(f) = \frac{1}{q}$. Fixons $\tilde{f}$ un relevé de f à $\mathbb{R}$ et identifions f à $\tilde{f} \pmod{r}$.

La f -orbite de 0 est ordonnée comme suit $0 < f(0) < \dots < f^{q-1}(0) < r$.

Les q intervalles $I_i := [f^{i-1}(0), f^i(0)]$, $i = 1, \dots, q$, sont tous PL_m -équivalents, donc d'après le critère de Bieri-Strebel, $|I_i| = |I_1| \pmod{(m-1)\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]}$ et

$|I_1| = f(0)$. Par conséquent

$$r = |I_1| + \cdots + |I_q| = qf(0) \bmod (m-1)\mathbb{Z} \left[\frac{1}{m} \right].$$

On en déduit qu'il existe des entiers u, v, s tels que $r - qf(0) = (m-1)\frac{v}{m^s}$ et $f(0) = \frac{u}{m^s}$. Ainsi, $m^s r - qu = (m-1)v$, autrement dit $m^s r = qu + (m-1)v$. Ceci implique que $m^s r$ est un multiple du $\text{pgcd}(q, m-1)$. Les entiers $(m-1)$ et m^s étant premiers entre-eux, on conclut que r est un multiple de $\text{pgcd}(q, m-1)$. $\square$

2.3. Critère de Conjugaison PL_m . —

PROPOSITION 2.4. — Soient f_1 et f_2 deux éléments de $T_{r,m}$ d'ordre fini q et de nombre de rotation $\frac{1}{q}$, on note $f_i(0) = \frac{N_i}{m^{s_i}}$, $i = 1, 2$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f_1 et f_2 sont PL_m -conjugués (dans $T_{r,m}$),
2. $N_2 - N_1$ est un multiple de $m-1$,
3. $f_1(0) - f_2(0) \in (m-1)\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ (autrement dit, les intervalles $[0, f_1(0)]$ et $[0, f_2(0)]$ sont PL_m -équivalents).

Démonstration. —

LEMME 2.5. — Soit $a = \frac{N_a}{m^{s_a}} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$, tout homéomorphisme $f \in T_{r,m}$ d'ordre q , de nombre de rotation $\frac{1}{q}$ et vérifiant $f(0) = a$ est PL_m -conjugué à la rotation R_{N_a} de $\mathbb{S}_{qN_a}$.

Démonstration. — L'intervalle $[0, r[$ s'écrit $\bigcup_{i=1}^q I_i$, où $I_i = [f^{i-1}(0), f^i(0)]$.

On considère l'application affine $H_1 : I_1 \rightarrow [0, N_a]$, $x \mapsto m^{s_a} \cdot x$ et on définit par récurrence $H_i : I_i \rightarrow [(i-1)N_a, iN_a]$ par $H_{i+1} = R_{N_a} \circ H_i \circ f^{-1}$.

On vérifie facilement que l'application $H : \mathbb{S}_r \rightarrow \mathbb{S}_{qN_a}$ définie par $H|_{I_i} = H_i$ est un PL_m -homéomorphisme qui conjugue f à R_{N_a} . $\square$

(1) $\implies$ (2). D'après le lemme précédent, f_i est PL_m -conjuguée à la rotation R_{N_i} de $\mathbb{S}_{qN_i}$. Il nous reste à étudier à quelles conditions deux telles rotations sont PL_m -conjuguées.

Soit $h : \mathbb{S}_{qN_1} \rightarrow \mathbb{S}_{qN_2}$ une PL_m -conjugaison entre R_{N_1} et R_{N_2} , quitte à composer au but h par la rotation $R_{-h(0)}$ de $\mathbb{S}_{qN_2}$, on peut supposer que $h(0) = 0$.

Les intervalles $[0, N_1]$ et $[0, N_2]$ étant PL_m -équivalents, l'entier $N_2 - N_1 \in (m-1)\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ et par suite $N_2 - N_1$ est un multiple de $m-1$.

(2) $\implies$ (1). Si $N_2 - N_1$ est un multiple de $(m-1)$ alors $[0, N_1]$ et $[0, N_2]$ sont PL_m -équivalents et on peut reprendre la preuve du lemme précédent avec pour H_1 l'homéomorphisme de Bieri-Strebel qui échange ces 2 intervalles.

(2) $\iff$ (3) résulte du calcul suivant :

$$\begin{aligned} f_1(0) - f_2(0) &= \frac{N_1}{m^{s_1}} - \frac{N_2}{m^{s_2}} = N_1(m^{-s_1} - 1) - N_2(m^{-s_2} - 1) + (N_1 - N_2) \\ &= (N_1 - N_2) \bmod (m - 1) \mathbb{Z} \left[\frac{1}{m} \right]. \quad \square \end{aligned}$$

3. Classes de conjugaison d'éléments d'ordre fini dans les groupes de Brown-Thompson

LEMME 3.1. — Soient p et $q > 1$ deux entiers premiers entre-eux et $u > 0$, v entiers tels que $up + vq = 1$.

Deux éléments f_1 et f_2 de $T_{r,m}$ d'ordre fini q et de nombre de rotation $\frac{p}{q}$ sont PL_m -conjugués si et seulement si f_1^u et f_2^u (de nombre de rotation $\frac{1}{q}$) sont PL_m -conjugués.

La preuve de ce lemme résulte du fait que la PL_m -conjugaison se transmet aux puissances et des généralités suivantes :

On a $\rho(f^u) = \frac{up}{q} = \frac{1-vq}{q} = \frac{1}{q}$ et $(f^u)^p = f^{1-vq} = f$ dès que f est d'ordre fini q .

REMARQUE 3.2. — Une conséquence de ce lemme est qu'étant donnés p et q deux entiers premiers entre-eux, le nombre de classes de conjugaison d'éléments d'ordre fini q et de nombre de rotation $\frac{p}{q}$ ne dépend pas de p .

3.1. Classes de conjugaisons dans $T_{r,2}$. — Soit $q \in \mathbb{N}^*$, d'après l'invariance par conjugaison topologique du nombre de rotation et la remarque précédente, il suffit de déterminer le nombre de classes de conjugaison d'éléments d'ordre q et de nombre de rotation $\frac{1}{q}$.

La Proposition 2.3 indique que $T_{r,2}$ contient un élément f_1 d'ordre q et de nombre de rotation $\frac{1}{q}$. Tous les intervalles dyadiques étant PL_2 -équivalents par la Remarque 2.2, l'item (3) de la Proposition 2.4 est vérifié pour tout autre $f_2 \in T_{r,2}$ d'ordre q et de nombre de rotation $\frac{1}{q}$. On en déduit qu'il y a exactement une classe de conjugaison d'éléments d'ordre q et de nombre de rotation $\frac{1}{q}$; le résultat de Matucci en découle.

3.2. Preuve du Théorème 1.1. —

Preuve de l'item A. — Il résulte directement de l'item (2) de la Proposition 2.3.

Preuve de l'item B. — Par la Remarque 3.2, il suffit d'établir le résultat pour $p = 1$.

PROPOSITION 3.3. — Soient $q \in \mathbb{N}^{>1}$ et $a = \frac{N_a}{m^{s_a}} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{m}] \cap]0, r[$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. Il existe $f \in T_{r,m}$ d'ordre q , vérifiant $f(0) = a$ et de nombre de rotation $\frac{1}{q}$.
2. $r - qa \in (m-1)\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$.
3. $r - qN_a$ est un multiple de $m-1$.

Démonstration. — (1) $\implies$ (2). Comme dans la preuve de la Proposition 2.3, les q intervalles $I_i := [f^{i-1}(0), f^i(0)[$, $i = 1, \dots, q$, sont tous PL_m -équivalents et forment une partition de $[0, r[$. Par conséquent $r = q|I_1| = qf(0) \bmod (m-1)\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$.

(2) $\implies$ (1). Supposons que $r - qa \in (m-1)\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ et considérons la rotation $R_a : x \mapsto x + a$ sur le cercle de longueur $qa \in \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$. Soit h l'homéomorphisme PL_m qui vaut l'identité sur $[0, a]$ et qui envoie $[a, qa]$ sur $[a, r]$ (son existence est assurée par le critère de Bieri-Strebel, Proposition 2.1).

Ainsi l'homéomorphisme $f_a = h \circ R_a \circ h^{-1} \in T_{r,m}$ est d'ordre q , de nombre de rotation $\frac{1}{q}$ et satisfait $f_a(0) = a$.

(2) $\iff$ (3) est conséquence du calcul suivant :

$$\begin{aligned} r - qa &= r - q \frac{N_a}{m^{s_a}} = \frac{rm^{s_a} - qN_a}{m^{s_a}} \in (m-1)\mathbb{Z}\left[\frac{1}{m}\right] \\ \iff rm^{s_a} - qN_a &= r(m^{s_a} - 1) + (r - qN_a) \text{ est un multiple de } m-1 \\ \iff r - qN_a &\text{ est un multiple de } m-1. \quad \square \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer le nombre de classes de conjugaison d'éléments d'ordre q de nombre de rotation $\frac{1}{q}$ dans $T_{r,m}$. D'après les Propositions 2.4 et 3.3, cette quantité est égale au nombre de classes modulo $(m-1)$ d'entiers N tels que $r - qN$ est un multiple de $m-1$, nous affirmons que c'est $d = \text{pgcd}(m-1, q)$.

En effet, sous la condition d divise r , le critère d'isomorphisme de Bieri-Strebel nous permet de supposer que $r = qu$. Posons $P = u - N$, on a $r - qN = q(u - N) = qP$, le problème se ramène à déterminer le nombre de classes modulo $(m-1)$ d'entiers P tels que qP est un multiple de $m-1$.

Puisque $m-1 = m_0.d$ et $q = q_0.d$ avec $m_0 \wedge q_0 = 1$, l'entier qP est un multiple de $m-1$ si et seulement si q_0P est un multiple de m_0 et donc si et seulement si P est un multiple de m_0 . Par conséquent, il y a exactement d tels entiers entre 0 et $m-2$.

Preuve de l'item C. — D'après l'invariance par conjugaison topologique du nombre de rotation et la Remarque 3.2, le nombre de classes de conjugaison d'éléments d'ordre q dans $T_{r,m}$ est $\varphi(q) \cdot \text{pgcd}(m-1, q)$, si $\text{pgcd}(m-1, q)$ divise r et 0 si non.

4. Problèmes d'isomorphisme et de plongement entre groupes de Brown-Thompson. Preuve du Corollaire 1.2

PROPOSITION 4.1. — Soit $m \in \mathbb{N}^{>1}$.

1. Parmi les groupes $T_{r,m}$, pour $0 < r \leq m-1$, seul le groupe $T_{m-1,m}$ contient des éléments d'ordre quelconque. Ainsi, il n'existe pas de morphisme injectif $T_{m-1,m} \rightarrow T_{r,m}$, pour $0 < r < m-1$.
2. Si $m_1 - 1$ possède un diviseur premier qui ne divise pas $m_2 - 1$ alors il n'existe pas de morphisme injectif $T_{1,m_2} \rightarrow T_{1,m_1}$.

Démonstration. — (1) Puisque pour tout $q \in \mathbb{N}^{>1}$, $\text{pgcd}(m-1, q)$ est un diviseur de $m-1$, le groupe $T_{m-1,m}$ contient des éléments de tout ordre. Réciproquement, si $0 < r < m-1$, $\text{pgcd}(m-1, m-1) = m-1$ ne divise pas r et il n'existe pas d'élément d'ordre $m-1$ dans $T_{r,m}$.

(2) Soit d un diviseur premier de $m_1 - 1$ ne divisant pas $m_2 - 1$. D'une part, $\text{pgcd}(m_1 - 1, d) = d$ ne divise pas $r = 1$ et T_{1,m_1} ne contient pas d'élément d'ordre d . D'autre part, $\text{pgcd}(m_2 - 1, d) = 1$ divise $r = 1$ et T_{1,m_2} contient des éléments d'ordre d . Par conséquent, il n'existe pas de morphisme injectif $T_{1,m_2} \rightarrow T_{1,m_1}$. $\square$

Preuve du Corollaire 1.2. — Comme T est simple, tout morphisme de T dans $T_{r,m}$ est injectif ou trivial. D'après l'item (1) de la Proposition 4.1, si T s'injecte dans $T_{r,m}$, pour $0 < r \leq m-1$, alors $r = m-1$. De plus, $T_{m-1,m}$ contient $m-1$ classes de conjugaison d'éléments d'ordre $m-1$ et de nombre de rotation $\frac{1}{m-1}$ alors que T n'en contient qu'une. Ces groupes ne sont isomorphes que lorsque $m-1 = 1$, correspondant au seul cas où tout rationnel se réalise comme nombre de rotation d'une unique classe de conjugaison d'éléments d'ordre fini. $\square$

Remerciements. — Nous adressons un grand remerciement au referee anonyme pour ses remarques, corrections, simplifications et surtout pour avoir partagé avec nous sa vision plus algébrique éclairant les mécanismes des preuves utilisés ici : la Remarque 1.3 lui est intégralement due.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. BIERI & R. STREBEL – *On groups of PL-homeomorphisms of the real line*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 215, American Mathematical Society, Providence, RI, 2016.
- [2] M. G. BRIN – « The chameleon groups of Richard J. Thompson : automorphisms and dynamics », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1996), no. 84, p. 5–33 (1997).
- [3] ———, « The ubiquity of Thompson's group F in groups of piecewise linear homeomorphisms of the unit interval », *J. London Math. Soc.* (2) **60** (1999), no. 2, p. 449–460.

- [4] M. G. BRIN & F. GUZMÁN – « Automorphisms of generalized Thompson groups », *J. Algebra* **203** (1998), no. 1, p. 285–348.
- [5] K. S. BROWN – « Finiteness properties of groups », *J. Pure Appl. Algebra* **44** (1987), no. 1-3, p. 45–75.
- [6] J. W. CANNON, W. J. FLOYD & W. R. PARRY – « Introductory notes on Richard Thompson’s groups », *Enseign. Math. (2)* **42** (1996), no. 3-4, p. 215–256.
- [7] A. FOSSAS – « On the number of conjugacy classes of torsion elements on Thompson’s group T », *preprint* (2016).
- [8] R. GEOGHEGAN & M. VARISCO – « On Thompson’s group T and algebraic K -theory », *ArXiv e-prints* (2014).
- [9] M.-R. HERMAN – « Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1979), no. 49, p. 5–233.
- [10] G. HIGMAN – *Finitely presented infinite simple groups*, Department of Pure Mathematics, Department of Mathematics, I.A.S. Australian National University, Canberra, 1974, Notes on Pure Mathematics, No. 8 (1974).
- [11] A. KATOK & B. HASSELBLATT – *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 54, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.
- [12] I. LIOUSSE – « Rotation numbers in Thompson-Stein groups and applications », *Geom. Dedicata* **131** (2008), p. 49–71.
- [13] F. MATUCCI – *Algorithms and classification in groups of piecewise-linear homeomorphisms*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2008, Thesis (Ph.D.)–Cornell University.
- [14] M. STEIN – « Groups of piecewise linear homeomorphisms », *Trans. Amer. Math. Soc.* **332** (1992), no. 2, p. 477–514.