# SOMMAIRE DU N$^o$ 115

# Éditorial

*Au nom de l'ensemble du Comité de Rédaction de la* Gazette *je voudrais tout d'abord souhaiter à tous nos lecteurs une excellente année 2008.*

*Dans ce premier numéro de l'année, nous publions outre les rubriques habituelles, deux articles sur la bibliométrie. Il ne fait guère de doute que ce sujet « agite » notre communauté depuis quelques mois et nous avons réuni deux contributions indépendantes susceptibles d'entamer un débat sur les éventuels bienfaits ou les inconvénients de ce type d'outils d'évaluation. N'hésitez donc surtout pas à nous faire part de vos réactions.*

*Bonne lecture à tous.*

*— Zindine Djadli*

# SMF

## Mot du Président

Les bruits les plus alarmistes concernant l'enseignement supérieur et la recherche circulent aujourd'hui : précarisation des emplois, disparition du CNRS, pouvoir sans contrôle des chefs d'établissements, universités à deux vitesses... Dangers imminents disent les uns, fantasmes sans fondements répondent les autres. Est-il possible aujourd'hui de faire la part des choses ?

Rappelons d'abord une évidence : si des changements structurels importants étaient devenus indispensables, tout changement n'est pas synonyme d'amélioration ; certaines expériences d'autonomie des universités menées chez nos voisins se sont soldées par des bilans clairement négatifs et une étude critique aurait été nécessaire afin d'être certains d'éviter ces erreurs. La prudence aurait exigé concertation et circonspection dans l'élaboration de la loi ; or, la communauté scientifique a été surprise par la rapidité de son adoption. Le ministère a mené un court dialogue avec la CPU et les représentants des étudiants, mais la communauté universitaire a été largement oubliée dans ce processus ; en particulier les remarques et interrogations que la SMF, conjointement avec les sociétés de physique et de chimie, avait adressées à la Ministre en juin dernier, ont été ignorées. Après la publication de la loi, loin de nous décourager, nous avons continué à nous concerter entre représentants des trois sociétés, et avons élaboré une nouvelle lettre où était soulevé un certain nombre d'interrogations concernant des points précis du texte de loi ou des conséquences probables de celle-ci ; cette lettre est disponible sur notre site internet. Elle a été suivie d'un article dans *Le Monde* (daté du 20 novembre). Cette fois-ci, nos démarches ont reçu un certain écho, et nous avons pu rencontrer des conseillers, tant à l'Elysée qu'au ministère, afin de transmettre nos craintes et interrogations.

En parallèle, de nombreuses questions se sont exprimées concernant la réorganisation de la recherche en France. La montée en puissance de l'ANR soulève la crainte que le rôle du CNRS ne soit amoindri, et que le financement direct des laboratoires ne s'amenuise ; en bref, que le développement de la recherche sur projets ne se fasse au détriment de la recherche fondamentale. Quelques signes sont alarmants : un redéploiement des laboratoires CNRS au seul profit des quelques laboratoires numériquement les plus importants serait contraire à la politique d'irrigation de l'ensemble du tissus universitaire qui a été menée en mathématiques depuis plusieurs décennies, conjointement par le CNRS et le Ministère. Nous soutenons bien sûr entièrement les efforts des mathématiciens en position de responsabilité au CNRS pour maintenir cette politique qui a permis notamment de développer de nombreuses équipes de taille modeste mais d'excellent niveau, et qui doivent continuer à être activement soutenues. Les projets concernant l'évolution des statuts de chercheur et d'enseignant-chercheur ainsi que leurs obligations sont encore flous. Nous devons être particulièrement vigilants sur ces questions, et en particulier sur le maintien des postes permanents : ils sont une chance pour l'enseignement et la recherche en France ; ils nous permettent notamment d'attirer des étrangers brillants qui ne disposent pas du même type de postes chez eux. Il n'est pas prévu de financements individuels de chercheurs (sauf à titre exceptionnel, comme l'IUF par exemple). Il n'est pas non plus prévu d'évaluation individuelle. Ce point est d'autant plus inquiétant que les universités auront désormais la responsabilité de l'attribution des PEDR (primes d'encadrement doctoral et de recherche) et pourront moduler les services d'enseignement de leurs enseignants-chercheurs, en fonction notamment de la qualité de leur recherche. Sur quelles évaluations pourront-elles se fonder ? En l'absence d'outils indiscutables mis nationalement à la disposition des universités, l'arbitraire risque, sinon d'être la règle, du moins de ne pas être l'exception. Les nombreuses interrogations soulevées actuellement quant à l'utilisation des outils de bibliométrie pour évaluer la recherche (dont ce numéro de la *Gazette* se fait l'écho) sont bien sûr liées à cette question.

Un faisceau inquiétant d'indicateurs montre que nous évoluons d'une gouvernance de l'enseignement supérieur et la recherche effectuée « par les pairs » vers une gouvernance plus politique (que ce soit au niveau national ou des établissements). Les déviances possibles du nouveau régime présidentiel des universités sans réel contrepoids ne semblent pas être perçues par nos dirigeants : l'argument classique suivant lequel les présidents n'auront pas intérêt à « se tirer une balle dans le pied » en faisant de mauvais choix relève plus de la méthode Coué que d'une argumentation sérieuse.

Face à toutes ces interrogations, que pouvons-nous faire ? Toutes les décisions consécutives à la loi LRU ne sont pas encore prises. De plus, la ministre a récemment précisé que la loi n'est pas intangible, et qu'elle pourra être modifiée lorsque des dysfonctionnements seront constatés. Dans ces conditions, les sociétés savantes, fortes de leur représentativité dans la communauté scientifique, doivent peser dans le débat afin que leurs réflexions soient prises en compte et que certaines dérives prévisibles soient évitées. Elles peuvent bien sûr œuvrer en concertation avec d'autres organisations. Au niveau local, chacun peut travailler à soutenir notre discipline. Les mathématiciens ont, dans plusieurs domaines, un mode de fonctionnement atypique, qui n'est pas nécessairement bien compris par leurs collègues. À l'heure de l'autonomie des universités il est encore plus nécessaire que nous soyons présents dans les conseils d'universités, pour expliquer ce fonctionnement et défendre la place des mathématiques. J'invite donc ceux d'entre nous qui sont universitaires à ne pas hésiter à être candidats dans les nouveaux conseils, voire à ne pas hésiter à prendre des postes de responsabilités. Enfin, il est important que nous puissions recueillir vos opinions et réactions pour vous représenter au mieux. Je vous propose donc d'utiliser le forum situé sur notre site web pour vous exprimer sur l'ensemble des sujets que je viens d'évoquer.

Au nom de la SMF, je vous souhaite une très bonne année 2008 !

Le 02 janvier 2008
*Stéphane Jaffard*

# Vie de la société

## Les conférences SMF/BnF 2008

Pour la quatrième année consécutive, la Bibliothèque nationale de France et la Société mathématique de France proposent en 2008 un cycle de quatre conférences, destinées à un très large public, sur le thème « un texte, un mathématicien ». Le principe en est maintenant bien connu : chaque conférencier choisit un texte datant de quelques dizaines à quelques centaines d'années ; il replace ce texte dans l'histoire et son contexte culturel et social, il donne quelques éléments biographiques sur son auteur, puis montre le cheminement des idées, des méthodes et des résultats depuis la publication du texte jusqu'aux recherches les plus contemporaines.

L'expression « texte mathématique » paraît antinomique pour les profanes, qui associent plutôt aux mathématiques les mots *ordinateur*, *nombres*, *équations* (qui ne sont pas du texte, dans l'imaginaire collectif). Nous savons bien qu'il en va tout autrement : les mathématiciens, depuis la nuit des temps, écrivent des articles de recherche et des livres ; articles ou livres dont la durée de vie peut être étonnamment longue – au sens où la pertinence des idées, des résultats, des méthodes perdurent. Les bibliothèques sont depuis toujours nos ateliers de travail. Et les techniques modernes ne font guère qu'en changer certaines modalités (apparition de bibliothèques numériques, comme Gallica et Numdam ou de bases de données de prépublications, comme HAL et Arxiv pour les textes les plus récents). Le premier message du cycle, vis-à-vis du grand public, est contenu dans le *titre* : les mathématiques sont une affaire de textes – et dans le *lieu*, la Bibliothèque nationale de France, reine des bibliothèques (et dont beaucoup de mathématiciens ignorent la richesse du fonds mathématique contemporain).

Remplir le grand auditorium de la BnF et même plus – à plusieurs reprises nous avons dû installer des auditeurs devant des écrans dans une deuxième salle –, est un succès inattendu pour des conférences de mathématiques ! À l'évidence les mathématiques intéressent un vaste public pour peu qu'elles soient présentées de manière vivante. Le format de ces conférences permet aux conférenciers de donner toute la mesure de leur talent.

Le deuxième message est qu'au-delà des mathématiques, derrière la froideur apparente des concepts et des équations (car c'est la représentation qu'en a le grand public), il y a des *femmes* et des *hommes* qui se sont enthousiasmés, ont éprouvé les joies fulgurantes et fugitives de la découverte, ont travaillé durement, ont pour certains connu des destins tragiques. Bref, il y a de l'humain dans les mathématiques. Enfin, troisième message, les mathématiques avancent grâce à des grandes *questions*, sur lesquelles on travaille d'une génération à d'autres et d'un continent à d'autres. En d'autres termes, il y a bien une pensée à l'œuvre dans les mathématiques, dont une approche historique peut restituer l'essor. Évoquer les destins des acteurs et donner toute leur dimension aux questions posées et aux œuvres écrites – tels sont les objectifs fixés aux conférenciers ; l'expérience prouve que cette approche intéresse tous ceux dont la curiosité s'étend aux mathématiques ; et ils sont nombreux.

Les conférences sont destinées à tous les publics. Un partenariat avec France Culture dans le cadre de l'émission « Continent Sciences » de Stéphane Deligeorges permet d'atteindre un vaste auditorat. Mais nous portons une attention particulière aux jeunes, en particulier lycéens des classes de première et de terminale scientifique. Depuis 2006, nous avons une coopération exemplaire avec l'académie de Versailles : nous faisons venir des classes de lycées et des groupes de lycéens de cette académie, mais aussi de celles de Créteil et de Paris qui assistent aux conférences. Préalablement aux conférences, des mathématiciens vont dans les classes présenter les thèmes traités, ceci dans le cadre de « promenades mathématiques Animath-SMF ». À l'occasion des conférences, nos partenaires de la Bibliothèque nationale de France mettent sur pied des visites des services de la Bibliothèque, des expositions. Ainsi, cette année, les lycéens pourront avant les conférences visiter des salles de lecture de la BNF, ainsi que l'exposition « Héros, d'Achille à Zidane ».

On peut retrouver les textes des conférences, ou des textes écrits à partir des conférences des années antérieures dans la revue *Tangente*, partenaire de l'opération « un texte, un mathématicien » et dans la *Gazette*.

## Programme 2008[1]

Mercredi 23 janvier

**« Du pli cacheté de Döblin aux équations différentielles stochastiques »**

Marc Yor, professeur à l'université Pierre et Marie Curie, membre de l'Académie des sciences, évoquera le destin tragique du mathématicien Wolgang Döblin, jeune mathématicien français, juif d'origine allemande, exilé en France, mobilisé en 1939, qui se suicida en 1940, avant que son bataillon ne soit fait prisonnier. Peu avant sa mort, il avait écrit un texte précurseur, dans le domaine des probabilités. Ce texte, intitulé « Sur l'équation de Kolmogoroff », fut déposé comme pli cacheté à l'Académie des sciences ; il n'a été ouvert qu'en 2000, révélant l'étendue des travaux de Döblin, qui préfiguraient une grande partie des travaux sur les processus stochastiques des années 1940 et 1950.

Mercredi 9 février

**« Le triangle de Pascal et ses propriétés »**

Christophe Soulé, directeur de recherches au CNRS, Institut des hautes études scientifiques, membre de l'Académie des sciences, montrera l'actualité du triangle de Pascal, introduit par Blaise Pascal en 1654 dans son *Traité du triangle arithmétique*. De manière étonnante, on en découvre encore aujourd'hui des propriétés nouvelles en relation avec la répartition des nombres premiers.

Mercredi 19 mars

**« Lucien Le Cam : comprendre la géométrie d'une expérience statistique »**

Dominique Picard, professeure à l'université Denis Diderot, partira d'un texte relativement récent puisqu'il remonte à 1964 : l'article du statisticien Lucien Le Cam, mathématicien américain d'origine française intitulé « Sufficiency and approximate sufficiency » (Suffisance et suffisance approchée). Ce texte, utilisant des mathématiques très théoriques a profondément modifié la vision de la statistique.

[1] Toutes les conférences ont lieu à 18h30 dans le grand auditorium de la BnF, site François Mitterrand.

De nos jours les statistiques sont un des domaines essentiels d'application des mathématiques ; elles jouent un rôle fondamental dans notre vie quotidienne, mais les non-spécialistes éprouvent quelques difficultés à appréhender la problématique de cette discipline.

Mercredi 9 avril
**« Alan Turing et la morphogenèse »**
Henri Berestycki, directeur d'études à l'École des hautes études en sciences sociales exposera une partie de l'œuvre d'Alan Turing, celle consacrée à la morphogenèse – la théorie des formes. Ce grand mathématicien anglais est célèbre pour ses contributions à la logique mathématique – les « machines de Turing » qui ont ouvert la voie à la conception des ordinateurs et à l'informatique en général. Pendant la guerre 1939-45, Turing a participé aux travaux sur le décodage des messages de l'armée allemande. Dans les années précédant sa disparition tragique en 1954, Turing s'était intéressé à la compréhension mathématique de certains mécanismes fondamentaux en biologie, écrivant plusieurs articles dont « A diffusion-reaction theory of morphogenesis in plants » (Une théorie de la morphogenèse des plantes reposant sur les équations de diffusion-réaction).

*Le cycle « Un texte, un mathématicien » est organisé par un comité présidé par Martin Andler (SMF), et composé de François Germinet, Claire Ropartz, Gérard Tronel pour la SMF, François Nida, Florence Usclat, Cédric Dameron et Hervé Colinmaire pour la BnF.*

Site du cycle : `http://smf.emath.fr/MathGrandPublic/BNF/2008`

*Martin Andler*
*Université de Versailles Saint-Quentin*

# MATHÉMATIQUES

## Le Problème de Levi

Ingo Lieb[1]

Les découvertes fondamentales de Fritz Hartogs et Eugenio Elia Levi (1906/11) ont exercé, pour un siècle complet, une profonde influence sur l'analyse complexe ; elles ont mené à des résultats nouveaux, à de nouvelles méthodes efficaces et – ce qui est peut-être plus important ! – à de nouvelles questions fructueuses. Je veux retracer dans ce conte, qui reflète bien sûr mes vues personnelles, le cours du développement et, en plus, présenter quelques-uns des acteurs.

### 1. Le Kugelsatz

L'histoire commence il y a plus de cent ans, en 1906. C'est dans cette année que F. Hartogs publia ses recherches sur le prolongement analytique simultané. Voici un résultat type :

**Théorème 1.** *(Kugelsatz - théorème de la boule) Soit*

$$G = K_1 - \bar{K}_2, \quad K_j = \{z : \|z\| < r_j\}, \quad 0 < r_2 < r_1$$

*une couronne dans* $\mathbb{C}^n$, $n > 1$. *Alors toute fonction* $f$ *holomorphe sur* $G$ *se prolonge holomorphiquement à* $K_1$.

Pour la preuve Hartogs considère d'abord dans $\mathbb{C}^2$ la différence de deux bi-disques, par exemple

$$D_1 = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1\},$$
$$D_2 = \{(z_1, z_2) : |z_1| < \frac{1}{2}, |z_2| < \frac{1}{2}\},$$
$$D = D_1 - \bar{D}_2,$$

et montre pour cette configuration le théorème d'extension correspondant par la formule intégrale de Cauchy. Ceci est presque évident :

Choisissons

$$\frac{1}{2} < |z_j| < r_j < 1, \quad j = 1, 2,$$

[1] Mathematisches Institut der Universität, Bonn, Allemagne

alors nous avons, pour $f$ holomorphe dans $D$, d'abord

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_2|=r_2} \frac{f(z_1, \zeta_2)}{\zeta_2 - z_2}\, d\zeta_2,$$

ensuite

$$f(z_1, \zeta_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=r_1} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1 - z_1}\, d\zeta_1,$$

dans les deux cas en raison de la formule de Cauchy en dimension 1.

Par conséquent,

$$f(z_1, z_2) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint_{\substack{|\zeta_1|=r_1 \\ |\zeta_2|=r_2}} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}\, d\zeta_1\, d\zeta_2.$$

Le côté droit de cette équation est défini et holomorphe sur l'ensemble $\overline{D_2}$ et fournit donc l'extension voulue. Le cas $n > 1$ se traite de manière analogue.

Pour déduire le Kugelsatz du résultat ci-dessus, Hartogs utilise une argumentation géométrique fort astucieuse – voir [19] ; cette fin s'atteint aujourd'hui beaucoup plus facilement par la formule intégrale de Bochner-Martinelli, comme je vais maintenant l'expliquer. D'abord quelques préliminaires – voir aussi [22], [26].

Une fonction $f$ est holomorphe si et seulement si elle satisfait aux équations de Cauchy-Riemann homogènes

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right) = 0;$$

de manière plus courte :

$$\overline{\partial} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j = 0.$$

L'opérateur $\overline{\partial}$, qui est donc la partie antiholomorphe de la différentielle totale, joue par conséquent un rôle fondamental en analyse complexe ; il est en particulier nécessaire de le définir pour les formes différentielles de degré quelconque, et d'étudier le système inhomogène de Cauchy-Riemann

$$\overline{\partial} u = f$$
$$\overline{\partial} f = 0.$$

Soit maintenant $\alpha(\zeta, z)$ une forme différentielle double de type $(1, 0; 0, 0)$ sur un ouvert $W \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ (coordonnées $\zeta$ et $z$), donc

$$\alpha(\zeta, z) = \sum_{j=1}^{n} a_j(\zeta, z) d\zeta_j,$$

où les $a_j$ sont des fonctions suffisamment différentiables sur $W$. Nous construisons à partir de $\alpha$ les formes doubles

$$\Omega_0^{\alpha}(\zeta, z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \alpha \wedge \left(\overline{\partial_\zeta} \alpha\right)^{n-1},$$

$$\Omega_1^\alpha(\zeta,z)=(n-1)\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\alpha\wedge\left(\overline{\partial_\zeta}\alpha\right)^{n-2}\wedge\overline{\partial_z}\alpha$$

du type $(n,n-1;0,0)$ respectivement $(n,n-2;0,1)$ ; les puissances se réfèrent à la multiplication extérieure. Prenons en particulier

$$\alpha(\zeta,z)=\sum_{j=1}^n\frac{\bar\zeta_j-\bar z_j}{\|\zeta-z\|^2}d\zeta_j\overset{def}{=}\beta(\zeta,z)$$

et

$$W=\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n-\Delta.$$

**Définition 1.** *Les formes doubles*

$$\Omega_q^\beta(\zeta,z)\overset{def}{=}B_{nq}(\zeta,z),\qquad q=0,1$$

*s'appellent noyaux de Bochner-Martinelli pour les formes différentielles de type* $(0,q)$*,* $q=0,1$.

Leurs propriétés principales sont formulées dans le théorème suivant :

**Théorème 2.** *(Formule intégrale de Bochner-Martinelli)*

a) $\overline{\partial_z}B_{n0}=-\overline{\partial_\zeta}B_{n1}$

b) $|B_{nq}(\zeta,z)|\leqslant const\frac{1}{\|\zeta-z\|^{(2n-1)}}$

c) *Si* $G\subset\subset\mathbb{C}^n$ *est un domaine à bord lisse par morceaux et* $f$ *une fonction continue sur* $\bar G$*, holomorphe sur* $G$*, alors pour tout* $z\in G$ :

$$f(z)=\int_{bG}f(\zeta)B_{n0}(\zeta,z).$$

$B_{10}$ est donc le noyau de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{d\zeta}{\zeta-z},$$

et le théorème 2c est dans ce cas la formule intégrale de Cauchy. Remarquez que $B_{11}=0$, en d'autres termes : le noyau de Cauchy est holomorphe en $z$. Pour $n>1$, le théorème 2a est plus faible : $B_{n0}$ n'est plus holomorphe dans le paramètre. Les preuves pour $n$ quelconque se trouvent, par exemple, dans [22], [26] ou [35].

Dans ce qui suit nous allons désigner l'algèbre des fonctions holomorphes sur un ensemble $M$ par $\mathcal{O}(M)$. Montrons maintenant le Kugelsatz !

Soit donc $f$ holomorphe sur $G$ ; en choisissant $G$ un peu plus petit nous pouvons même supposer $f\in\mathcal{O}(\bar G)$. D'après théorème 2c, on a, pour $z\in G$,

$$f(z)=\int_{bK_1}f(\zeta)B_{n0}(\zeta,z)-\int_{bK_2}f(\zeta)B_{n0}(\zeta,z)\overset{def}{=}f_1(z)-f_2(z).$$

Les fonctions $f_1$ et $f_2$ sont différentiables sur tout $K_1$ resp. sur le complémentaire entier de $\overline{K_2}$; de plus on a grâce au théorème 2a et à l'holomorphie de $f$, c.-à-d. $\bar\partial f=0$ :

$$\overline{\partial} f_j(z) = \int_{bK_j} f(\zeta)\overline{\partial_z} B_{n0}(\zeta, z) = -\int_{bK_j} f(\zeta)\overline{\partial_\zeta} B_{n1}(\zeta, z) = -\int_{bK_j} d_\zeta(f(\zeta)B_{n1}(\zeta, z)) = 0.$$

Cela signifie que les $f_j$ sont holomorphes. Enfin on déduit du théorème 2b que

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in H}} f_2(z) = 0$$

pour tout hyperplan $H$ de dimension positive, qui n'intersecte pas $\bar{K}_2$, et par conséquent $f_2|H \equiv 0$. Comme il y a, en dimension $n > 1$, de tels hyperplans, et comme leur union contient des ouverts non-vides, $f_2$ s'annule partout, et $f_1$ est le prolongement holomorphe de $f$ à $K_1$.

Il est clair que théorème 1 se transfère à des situations beaucoup plus générales – voir [22], [26], [35] ; mais la formulation que je viens de donner est particulièrement intuitive.

## 2. Domaines d'holomorphie

Le phénomène d'extension présenté par le Kugelsatz donne naissance au problème de trouver d'autres configurations où il a lieu. Nous avons besoin de quelques notions nouvelles.

**Définition 2.** *Soit $G$ un domaine. Une configuration d'extension pour $G$ est une paire d'ouverts $U$ et $V$ avec les propriétés suivantes :*

i) $\varnothing \neq U \subset G \cap V$;
ii) *$V$ est connexe et $V \not\subset G$.*

**Définition 3.** *Soit $f$ holomorphe sur $G$. Un prolongement holomorphe de $f$ est un triple $(U, V, \tilde{f})$, où $(U, V)$ est une configuration d'extension et où l'on a en plus :*

i) *$\tilde{f}$ est holomorphe sur $V$;*
ii) *$\tilde{f} \equiv f$ sur $U$.*

Nous utiliserons aussi le terme « extension holomorphe ». Nous pouvons maintenant introduire une notion centrale :

**Définition 4.** *Soit $f$ une fonction holomorphe sur le domaine $G$. $G$ est le domaine d'existence de $f$, si $f$ n'admet aucune extension holomorphe.*

La définition suivante paraît plus générale :

**Définition 5.** *$G$ s'appelle domaine d'holomorphie, si, pour toute configuration d'extension $(U, V)$, il existe une fonction $f$ holomorphe sur $G$, qui n'a aucun prolongement $(U, V, \tilde{f})$ avec la configuration $(U, V)$ donnée.*

Un domaine d'existence d'une fonction holomorphe est évidemment un domaine d'holomorphie. L'assertion réciproque est aussi vraie et sera établie au cours de la discussion qui suit. On peut dire de manière plus courte (et moins précise) :

Si $G$ est le domaine d'existence de $f$, alors $f$ ne se prolonge holomorphiquement dans aucun voisinage d'un point du bord de $G$ ; si $G$ est un domaine d'holomorphie, il existe pour chaque point du bord de $G$ une fonction holomorphe sur $G$ qui ne se prolonge dans aucun voisinage de ce point. Les définitions sont plus lourdes parce qu'elles tiennent compte de la possibilité d'un prolongement holomorphe multiforme. Les premiers chercheurs qui s'intéressaient à ce type de problèmes ont introduit les domaines d'holomorphie par la définition 4 et les ont appelés domaines de régularité.

Des couronnes dans $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, ne sont pas des domaines d'holomorphie, d'après le Kugelsatz ; les boules, d'autre part, et plus généralement les domaines convexes, le sont. Tout domaine dans le plan complexe est d'holomorphie – c'est pourquoi la notion n'apparaît pas dans la théorie d'une seule variable.

La question centrale qui résulte de tout ce qui précède est maintenant : comment peut-on « reconnaître » les domaines d'holomorphie ?

Il est clair qu'il faut préciser cette question.

## 3. Bords réguliers

Une première précision repose sur les travaux du mathématicien italien E. E. Levi (1910/11) et se réfère aux domaines à bord régulier dans l'espace $\mathbb{C}^2$ de deux variables complexes.

**Définition 6.** *Un domaine $G \subset \mathbb{C}^n$ a un bord $bG$ régulier de classe $C^k, k > 1$, s'il existe un voisinage $U$ de $bG$ et une fonction $r$ à valeurs réelles définie et $k$ fois continuement différentiable sur $U$, tels que :*

i) $G \cap U = \{z \in U : r(z) < 0\}$,
ii) $dr(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in U$.

Toute fonction $r$ avec ces propriétés s'appelle une fonction définissante régulière de classe $C^k$ pour $G$.

Alors nous avons d'après Levi [24] :

**Théorème 3.** *Soit $G \subset\subset \mathbb{C}^2$ un domaine avec une fonction définissante $C^2$-régulière $r$. Si $G$ est un domaine d'holomorphie, alors $r$ satisfait en chaque point frontière de $G$ à la condition de Levi (L).*

$$(L) \qquad \det \begin{pmatrix} 0 & r_{\bar{1}} & r_{\bar{2}} \\ r_1 & r_{1\bar{1}} & r_{1\bar{2}} \\ r_2 & r_{2\bar{1}} & r_{2\bar{2}} \end{pmatrix} \leq 0.$$

J'ai posé ici

$$r_{z_j} = r_j, \qquad r_{\bar{z}_j} = r_{\bar{j}}, \qquad r_{z_j \bar{z}_k} = r_{j\bar{k}},$$

et ainsi de suite. Compte tenu de ce théorème nous pouvons formuler la version originale du problème de Levi :

**Problème de Levi** : *les domaines qui satisfont à la condition de Levi sont-ils des domaines d'holomorphie ?*

Il paraît que le premier à formuler ce problème et à en reconnaître l'importance fut Otto Blumenthal [8] – cf. ci-dessous.

Un premier regard sur ce problème laisse plutôt attendre une réponse négative : pour montrer qu'un domaine $G$ est d'holomorphie, il faut construire des fonctions holomorphes globales, c.-à-d. définies sur $G$ tout entier ; mais les données ne sont que des informations locales sur la courbure du bord de $G$, à savoir la condition de Levi. Le but paraît donc fort éloigné du point de départ, et on peut se demander s'il y a un chemin qui relie ces deux points. La seule indication que la situation n'est pas sans espoir est la proposition facile que voici :

**Théorème 4.** *La condition (L) ne dépend pas du choix particulier de la fonction définissante ($C^2$-lisse) et est biholomorphiquement invariante.*

## 4. Encore une fois : bords réguliers

O. Blumenthal, qui, comme je viens de le dire, avait posé la question immédiatement après Levi, y donna, en 1912, la réponse apparemment attendue ; la voici [8] :

**Théorème 5.** *NON.*

Blumenthal montre en effet que le domaine $\mathbb{C}^2 - H$, avec

$$H = \{(z_1, z_2) : x_1 = 0, x_2 \geqslant 0\}, \qquad z_j = x_j + iy_j,$$

n'est pas d'holomorphie, tout en satisfaisant à (L).

Après cela, le problème sembla dépourvu d'intérêt, et il en sera ainsi pour à peu près une bonne douzaine d'années. La situation changea en 1927, avec l'arrivée du jeune Heinrich Behnke à Münster. Behnke avait habilité à Hamburg après d'importants travaux en théorie des nombres, mais se décida, en allant à Münster pour y occuper une chaire de mathématiques, de changer avec son lieu de travail en même temps son domaine de recherche. Suivant le conseil de Constantin Carathéodory il choisit la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes comme nouveau champs de travail. Il se mit donc à étudier les publications pertinentes (de Poincaré, Cousin, Hartogs, Levi, Blumenthal) – et constata immédiatement que le contre-exemple de Blumenthal ne servait à rien. En effet : le bord du domaine ci-dessus construit par Blumenthal n'est pas régulier, et la présence de coins et d'arêtes dans le bord change le problème profondément. C'est pourquoi il faut encore une fois préciser le problème :

**Problème de Levi** : *les domaines* **à bord régulier** *qui satisfont à la condition de Levi, sont-ils d'holomorphie ?*

Et cette question restait toujours sans réponse : j'en ai indiqué la difficulté à la fin de la section précédente. Un deuxième contre-exemple de Blumenthal,

$$G : (|z_1| - 2)^2 + |z_2|^2 < 1,$$

dont le bord est en fait régulier, repose sur une erreur (que Blumenthal lui même avait reconnue peu de temps après sa publication) : c'est en vérité un domaine d'holomorphie. Tout ce que Behnke savait donc donner comme réponse, à ce temps-là, était « peut-être » – ce qu'on peut assurer sans aucune recherche.

## 5. Convexité holomorphe et domaines plus généraux

Les années après 1927 apportèrent des progrès essentiels en analyse complexe, dus en particulier au groupe de recherche de Münster autour de H. Behnke et aux travaux de Henri Cartan à Paris, progrès qui menaient à une compréhension plus profonde du problème de Levi, sans pourtant le résoudre. Plus spécifiquement :

(1) *Le problème de Levi fut résolu pour des classes particulières de domaines.* Il s'agit là en général de domaines dans $\mathbb{C}^2$ hautement symétriques – domaines de Reinhardt, par exemple ... voir [7]. Les contributions essentielles y sont dues à Behnke et ses élèves.

(2) H. Cartan introduisit la notion de *convexité holomorphe* [10] et l'utilisa dans un travail fondamental avec Peter Thullen [11] pour caractériser les domaines d'holomorphie. Je donne la définition sous sa forme la plus simple, mais immédiatement pour les espaces complexes :

**Définition 7.** *Un espace complexe $X$ est holomorphiquement convexe, s'il existe, pour chaque suite de points $x_j \in X$ sans point d'accumulation, une fonction $f$ holomorphe sur $X$ et non-bornée sur la suite $x_j$.*

Cartan et Thullen montrent dans [11] :

**Théorème 6.** *Pour un domaine $G$ dans $\mathbb{C}^n$ les énoncés suivants sont équivalents :*

i) *$G$ est domaine d'existence d'une fonction holomorphe.*
ii) *$G$ est un domaine d'holomorphie.*
iii) *$G$ est holomorphiquement convexe.*

Pour tenir compte du prolongement holomorphe multiforme les auteurs énoncent leur théorème même pour les domaines de Riemann non ramifiés au-dessus de $\mathbb{C}^n$, leur démonstration n'est pourtant valide que pour les domaines à un nombre fini de feuilles. Je reviendrai plus tard à ce problème, mais je donne déjà ici les définitions pertinentes :

**Définition 8.** *Un domaine de Riemann (non ramifié au-dessus de $\mathbb{C}^n$) est une variété complexe connexe $X$, où les fonctions holomorphes séparent les points, avec une application localement biholomorphe*

$$p : X \to \mathbb{C}^n.$$

On peut considérer n'importe quel domaine dans $\mathbb{C}^n$ comme domaine de Riemann en prenant comme $p$ l'inclusion. Les fibres $p^{-1}(z)$ d'un domaine de Riemann sont des ensembles discrets dans $X$, dont le supremum des cardinaux est le *nombre des feuilles* (fini ou dénombrable).

Un domaine de Riemann $(X, p)$ s'appelle *sous-domaine* d'un domaine de Riemann $(X', p')$, si $X \subset X'$ est ouvert et si $p' \mid X = p$. $(X', p')$ est une *extension* de $(X, p)$ si en plus la restriction

$$\mathcal{O}(X') \to \mathcal{O}(X)$$

est bijective. Généralisant de manière sensible la définition 5, nous posons maintenant :

**Définition 9.** *Un domaine d'holomorphie est un domaine de Riemann sans extension non-triviale.*

Avec cela, le théorème 6 peut aussi être formulé pour les domaines de Riemann – tel que Cartan et Thullen l'ont déjà fait. Mais leur preuve contient dans le cas de domaines à nombre de feuilles infini une lacune, qui ne fut comblée que plus tard par Oka – voir ci-dessous.

Pour tout point $x$ d'un domaine de Riemann $(X, p)$, il existe par définition un polydisque fermé $\bar{\Delta}_\varepsilon(p(x))$, de rayon $\varepsilon$ en chaque coordonnée, et un voisinage fermé de $x$, $\bar{\Delta}_\varepsilon(x)$, que $p$ applique biholomorphiquement sur $\bar{\Delta}_\varepsilon(p(x))$. Nous appelons également $\bar{\Delta}_\varepsilon(x)$ un polydisque (fermé) dans $X$ autour de $x$ de rayon $\varepsilon$ et utilisons cette définition pour introduire une notion qui sera importante plus tard :

**Définition 10.** *La fonction $\delta_X(x) = \sup\{\varepsilon :$ il y a un polydisque $\bar{\Delta}_\varepsilon(x) \subset X\}$ s'appelle la distance au bord du point $x$.*

On a donc toujours $0 < \delta_X(x) \leqslant \infty$.

(3) Un autre progrès important fut réalisé par Behnke et Karl Stein en 1939 [5] :

**Théorème 7.** *Soit $G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ \dots \ \subset \mathbb{C}^n$ une suite croissante de domaines d'holomorphie. Alors leur union*

$$G = \bigcup G_j$$

*est également un domaine d'holomorphie.*

Nous verrons que ce résultat simplifie remarquablement l'étude des domaines d'holomorphie.

(4) La condition de Levi était formulée pour les domaines à bord régulier dans $\mathbb{C}^2$. Dans sa thèse de 1933 faite avec Helmut Kneser à Greifswald, Johannes Krzoska généralisa la condition à une dimension quelconque. Je commence ici par une notion plus générale :

**Définition 11.**

i) *Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}$ une fonction réelle 2 fois continuement différentiable sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$. La forme de Levi de $\varphi$ en $z$ est la forme hermitienne*

$$L_\varphi(z; t) = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{i\bar{j}}(z) t_i \bar{t}_j.$$

ii) *$\varphi$ s'appelle plurisousharmonique en $z$, si $L_\varphi(z)$ est semi-définie positive, strictement plurisousharmonique, si $L_\varphi(z)$ est définie positive.*

**Définition 12.** *Soit $G \subset \mathbb{C}^n$ un domaine à bord régulier avec une fonction définissante $r$ lisse de classe $C^2$. On dit que $G$ est pseudoconvexe, si pour tous les points frontière $z \in bG$ la forme de Levi $L_r(z)$ est semi-définie positive sur l'espace holomorphe tangent à $bG$ dans $z$.*

De manière explicite : pour tout $z \in bG$ et pour tout $t \in \mathbb{C}^n$ avec

$$\sum_{i=1}^{n} r_i(z)t_i = 0,$$

on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} r_{i\bar{j}}(z)t_i\overline{t}_j \geqslant 0.$$

C'est la condition de Levi suivant Krzoska. Pour n=2 elle se réduit, comme on voit facilement, à la condition (L) du théorème 3. On a d'ailleurs pour un certain temps parlé de la « condition de Levi/Krzoska », mais cet usage n'a pas persisté. Krzoska montre la généralisation exacte du théorème 3 [21] :

**Théorème 8.** *Tout domaine d'holomorphie à bord $C^2$-régulier est pseudoconvexe.*

Ceci permet de formuler une version plus générale du problème de Levi :

**Problème de Levi** (2ᵉ version) : *Les domaines pseudoconvexes à bord régulier sont-ils des domaines d'holomorphie ?*

Il s'agit bien sûr toujours de sous-domaines (bornés, en général) de $\mathbb{C}^n$.

(5) Ce qui était particulièrement important pour le développement suivant, c'était le résumé structuré des résultats obtenus jusqu'à cette date dans le célèbre *Ergebnisbericht* de 1934 par Behnke et Thullen [7]. Les auteurs y présentent l'état actuel de la recherche en analyse complexe et – ce qui fut encore plus influent ! – ils élaborent soigneusement les problèmes ouverts essentiels. J'ose dire que ce fascicule de résultats était plus important dans son rôle de « fascicule de non-résultats ». Je présenterai les problèmes principaux formulés dans « Behnke/Thullen » un peu plus loin : le problème de Levi, en tout cas, y occupe une position centrale.

Malgré tous ces progrès importants le problème de Levi restait non-résolu. Behnke et Stein le reprennent à nouveau en 1940, dans un article de synthèse « Die Konvexität in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen », comme une des grandes tâches inachevées de l'analyse complexe. Bien qu'ils s'expriment avec beaucoup de prudence, on a l'impression qu'ils ne croient pas, à ce moment, à une réponse positive.

## 6. Kiyoshi Oka

Sans que Behnke et Stein l'eussent réalisé, le fleuve de l'analyse complexe avait trouvé un nouveau lit, sur un autre continent : au lieu de passer par Münster et Paris, il touchait maintenant Hiroshima. Que s'était-il passé ?

En 1929 un jeune mathématicien japonais, Kiyoshi Oka, était venu à Paris avec une bourse de son gouvernement, pour s'y familiariser avec l'état actuel de l'analyse. Il prit contact avec Gaston Julia qui l'enthousiasma apparemment pour l'analyse complexe. De retour au Japon, à Hiroshima, Oka étudia le Ergebnisbericht de Behnke et Thullen – et, ainsi le paraît-il, prit la décision de résoudre tous les problèmes principaux de l'analyse complexe, tels qu'ils étaient explicités chez Behnke/Thullen. Or, qu'un jeune scientifique se pose un but aventureux comme cela, n'est peut-être pas rare : qu'il l'atteigne est exceptionnel.

C'est précisément ce que fit Oka. Dans une série de travaux, qui s'étendent sur deux décennies et qui dans leur ensemble présentent une oeuvre d'art intellectuelle d'une rare beauté, il résolut les problèmes fondamentaux de l'analyse complexe et élargit le domaine de recherche non seulement par ses nouveaux résultats, mais aussi par les questions nouvelles qui se posaient à partir de ces résultats [29]. Un des problèmes résolus, certainement le plus difficile, est le problème de Levi.

## 7. Les problèmes fondamentaux chez Behnke et Thullen

Considérons maintenant les problèmes importants qui se posaient à l'analyse complexe en 1934 et qui étaient élaborés comme fondamentaux par Behnke et Thullen [7]. Les domaines $G, G_0, \ldots$ dont on va parler dans ce qui suit, seront des domaines d'holomorphie.

(1) Le premier problème de Cousin, c.-à-d. *la construction d'une fonction méromorphe à partir de parties principales données*. Plus précisément : soit $\{U_i : i \in I\}$ un recouvrement ouvert de $G$, et supposons donné des fonctions méromorphes $m_i$ sur $U_i$ telles que les $m_{ij} = m_j - m_i$ soient holomorphes sur $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Y a-t-il une fonction méromorphe $m$ sur $G$, telle que $m - m_i$ soit holomorphe sur $U_i$?

(2) Le deuxième problème de Cousin : *tout diviseur sur $G$ est-il principal ?* On le formule comme ci-dessus, tout en remplaçant l'addition par la multiplication et « holomorphe » par « holomorphe sans zéros ».

(3) Théorèmes d'approximation « type Runge » : *soit $G \subset\subset G_0$; sous quelles conditions l'algèbre $\mathcal{O}(G_0)$ est-elle dense dans $\mathcal{O}(G)$*? En d'autres termes : quand peut-on approximer uniformément sur tout compact toute fonction holomorphe sur $G$ par des fonctions holomorphes sur $G_0$?

(4) Problème de Levi : *caractériser les domaines d'holomorphie par des propriétés locales de leur bord.*

Tous ces problèmes sont entrelacés, intimement liés les uns aux autres ; pour l'exprimer (un peu trop) simplement : ou on les résout tous, ou on n'en résout aucun. Oka le sait parfaitement dès le début de sa recherche. Il est remarquable de voir, comment, dans l'introduction à chacune de ses publications, il se rend toujours compte du point qu'il a atteint sur son chemin, chemin dont il ne perd jamais de vue la destination – destination qu'il finit par atteindre – voir [31], [33].

## 8. L'application d'Oka

L'originalité des méthodes d'Oka apparaît déjà au début de son premier travail [30]. Je cite : « *Or, je m'aperçois qu'on peut parfois diminuer la difficulté de ces problèmes, en élevant à dimensions convenables les espaces où l'on s'occupe... un principe qui réduit les domaines du titre aux domaines cylindriques à dimensions plus élevées...* ». (Oka écrivait en français).

Je considère comme exemple le polyèdre analytique

$$P = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1, 2|z_1 z_2| < 1\}$$

dans $\mathbb{C}^2$. L'application régulière

$$\omega(z_1, z_2) = (z_1, z_2, 2z_1 z_2)$$

plonge $P$ bijectivement comme sous-variété sans singularités dans le polydisque unité $D_3 \subset \mathbb{C}^3$. L'étude de $P$, domaine de dimension inférieure mais à bord compliqué, se réduit donc à l'investigation du domaine $D_3$ à dimension plus élevée mais à bord plus simple, et de ses sous-variétés. (Une idée semblable est la transformation bien connue d'une équation différentielle d'ordre $n$ en un système d'équations différentielles de premier ordre.) Une telle *application d'Oka* s'utilise en analyse complexe en beaucoup de variantes ; il n'est pas exagéré de la considérer comme départ d'un développement qui a ouvert des champs de recherche nouveaux à l'analyse complexe.

## 9. La solution d'Oka du problème de Levi

Même pour formuler les résultats d'Oka nous devons généraliser la notion de fonction plurisousharmonique, et, avec cela, la notion de pseudoconvexité. Nous nous débarrassons de l'hypothèse de différentiabilité.

**Définition 13.** *Une fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$, avec $U$ ouvert dans $\mathbb{C}^n$, est plurisousharmonique, si elle est semi-continue supérieurement et si en plus, pour toute droite complexe $L$, $\varphi|L \cap U$ est sousharmonique.*

On admet aussi la fonction $-\infty$ parmi les fonctions sousharmoniques.

Bien que leur définition paraisse dépendre de la structure affine de $\mathbb{C}^n$, la classe des fonctions plurisousharmoniques est biholomorphiquement invariante et peut donc être introduite sur les espaces complexes. Ceci donne un sens à la définition qui suit :

**Définition 14.** *Un domaine de Riemann $X$ est pseudoconvexe si la fonction $-\log \delta_X$, avec $\delta_X$ la distance au bord, est plurisousharmonique.*

Une fonction de classe $C^2$ est plurisousharmonique d'après la définition 13 si et seulement si sa forme de Levi est semi-définie positive – on a donc bien généralisé la notion introduite plus tôt. De même, un domaine à bord régulier est pseudoconvexe d'après notre définition nouvelle si et seulement si il satisfait à la condition de Levi – voir [22],[35].

Les fonctions plurisousharmoniques ont été introduites par Oka [31], encore que les fonctions sousharmoniques apparaissent déjà dans l'analyse complexe chez Hartogs. Oka et en particulier Pierre Lelong [23] ont profondément étudié cette classe de fonctions.

Je peux maintenant reformuler :

**Problème de Levi** (3^e version) : *Est-ce que les domaines de Riemann pseudoconvexes sont holomorphiquement convexes ?*

On extrait en effet des travaux de Cartan et Thullen

**Théorème 9.** *Un domaine de Riemann holomorphiquement convexe est pseudoconvexe.*

Or, Oka réussit à établir l'implication inverse :

**Théorème 10.** *Les énoncés suivants sont équivalents pour un domaine de Riemann $X$ :*

i) *$X$ est holomorphiquement convexe.*
ii) *$X$ est un domaine d'holomorphie.*
iii) *$X$ est pseudoconvexe.*

Joint au théorème 9, ceci comble aussi la lacune mentionnée dans l'argumentation de Cartan et Thullen.

Oka n'avait montré le théorème ci-dessus que pour les sous-domaines de $\mathbb{C}^2$ (en 1942), mais avait déjà indiqué la possibilité de parvenir, par ses méthodes, au résultat général. Dix ans plus tard (1953) il passe finalement au cas général ; des solutions différentes du problème de Levi (pour des sous-domaines de $\mathbb{C}^n$) sont dues à François Norguet [28] et Hans Bremermann [9] en 1954.

J'indique, dans ce qui suit, quelques-uns des arguments d'Oka. Le point de départ est un vieux résultat de Pierre Cousin, le

**Lemme de recollement de Cousin.** *Soit $R \subset \mathbb{C}$ un rectangle parallèle aux axes, $R = \{z_1 = x_1 + iy_1 : a_1' < x_1 < a_1'', b_1' < y_1 < b_1''\}$, $U \subset \mathbb{C}^{n-1}$ un domaine arbitraire, $Q = R \times U \subset \mathbb{C}^n$.*

*Supposons donnés deux nombres réels $c_+$ et $c_-$ avec $a_1' < c_+ < c_- < a_1''$, et posons $R_+ = \{z_1 \in R : c_+ < x_1\}$, $\quad R_- = \{z_1 \in R : x_1 < c_-\}$, donc $R = R_+ \cup R_-$. Soit $R_0 = R_+ \cap R_-$ et enfin $Q_+ = R_+ \times U$, $\quad Q_- = R_- \times U, Q_0 = R_0 \times U$. (On a donc $Q = Q_+ \cup Q_-, Q_0 = Q_+ \cap Q_-$.)*

*Alors il existe une constante $M$, telle qu'on peut trouver pour toute fonction holomorphe et bornée $f_0$ sur $Q_0$ des fonctions holomorphes $f_+$ sur $Q_+$, $f_-$ sur $Q_-$ avec*

i) *$f_0 = f_+ - f_-$ sur $Q_0$,*
ii) *$|f_+|_{Q_+}, |f_-|_{Q_-} \leqslant M|f_0|_{Q_0}$.*

J'ai noté par $|\cdot|$ la norme du supremum. On trouve une preuve par exemple dans [18]. Les estimations – qui ne figurent pas encore chez Cousin – sont particulièrement utiles. Le lemme est un pas essentiel dans la solution du premier problème de Cousin.

La solution d'Oka du problème de Levi repose sur le nouveau

**Lemme de fusion d'Oka.** *Soit $G \subset \mathbb{C}^n$ un domaine, $a_+ < a_-$ des nombres réels, $G_+ = \{z \in G : \Im z_1 > a_+\}$, $\quad G_- = \{z \in G : \Im z_1 < a_-\}$. Si $G_+$ et $G_-$ sont des domaines d'holomorphie, il en est de même de $G$.*

Et ce résultat utilise le lemme technique suivant, qu'on reconnaît facilement comme une généralisation et modification du lemme de recollement de Cousin.

**Lemme de recollement d'Oka.** *Supposons, dans la situation du lemme de fusion, $a_+ < a < a_-$, et posons $S = \{z \in G : \Im z_1 = a\}$.*

*Alors il existe, pour toute fonction $f$ holomorphe sur un voisinage de $S$, des fonctions holomorphes $f_+$ sur $G_+$, $f_-$ sur $G_-$, qui satisfont à $f = f_+ - f_-$ dans un voisinage de $S$.*

Pour la démonstration Oka utilise la plupart de ses résultats antérieurs.

## 10. Variétés et espaces complexes

Les travaux d'Oka sont une fin – et aussi un début. Oka le reconnut clairement. Je le cite encore une fois : « *Or, nous, devant le beau système de problèmes à F. Hartogs et aux successeurs, voulons léguer des nouveaux problèmes à ceux qui nous suivront ; or, comme le champs de fonctions analytiques de plusieurs variables s'étend heureusement aux divers branches de mathématiques, nous serons permis de rêver divers types de nouveaux problèmes préparant.* » [32]

Par les travaux d'Oka lui-même, plus encore par les contributions de Cartan, Behnke, Stein, Jean-Pierre Serre, Hans Grauert et Reinhold Remmert, l'intérêt principal se déplaça des domaines de Riemann aux variétés complexes et aux espaces complexes. Il s'ajouta aux fonctions plurisousharmoniques un outil nouveau et hautement efficace : les faisceaux analytiques. Ces méthodes donnent une solution nouvelle au problème de Levi, et le problème se pose de manière nouvelle dans ce cadre conceptuel. C'est ce que je vais expliquer maintenant.

## 11. Pseudoconvexité stricte

H. Grauert s'aperçut – comme l'avait fait déjà Oka avant lui – que les domaines strictement pseudoconvexes fournissent un outil idéal pour étudier les pseudoconvexes généraux dans $\mathbb{C}^n$ ou même dans un espace complexe.

**Définition 15.** *Un domaine $G \subset\subset X$ (un espace complexe) à bord $C^2$-régulier s'appelle strictement pseudoconvexe si il possède une fonction définissante $r$ qui est strictement plurisousharmonique.*

Tout domaine pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^n$, voire tout domaine de Riemann pseudoconvexe, possède une exhaustion par des sous-domaines strictement pseudoconvexes ; c'est élémentaire pour les domaines « unifeuille (schlicht) », c.-à-d. dans $\mathbb{C}^n$, pour le cas des domaines de Riemann à plusieurs feuilles, l'énoncé fait partie de l'argument d'Oka pour établir le théorème 10. En vue du théorème de Behnke et Stein il suffit donc en beaucoup de cas d'étudier les domaines strictement pseudoconvexes. Ils se distinguent par deux propriétés importantes (pour simplifier la discussion je vais me restreindre aux variétés complexes et ignorer les espaces) :

a) Pour tout point $x_0 \in bG$ du bord de $G$ il existe une fonction $P$ holomorphe dans un voisinage $U$ de $x_0$, telle que l'on a

$$S \cap \bar{G} = \{x_0\},$$

où on a posé

$$S = \{x \in U : \Re P = 0\}.$$

De plus, $S$ touche $bG$ exactement à l'ordre 1 en $x_0$. $S$ est une « surface harmonique locale de support » – j'en parlerai encore plus loin – voir section 12, lemme fondamental iii.

b) Les perturbations « $C^2$-petites » de $G$ sont toujours strictement pseudoconvexes.

Grauert utilise ces deux propriétés avec virtuosité pour établir le théorème de finitude suivant [16] :

**Théorème 11.** *Soit $\mathcal{S}$ un faisceau analytique cohérent sur un domaine strictement pseudoconvexe G dans un espace complexe. Alors les espaces de cohomologie $H^q(G, \mathcal{S})$ sont, pour $q \geq 1$, de dimension finie :*

$$\dim_{\mathbb{C}} H^q(G, \mathcal{S}) < \infty, \qquad q \geq 1.$$

Je donne quelques explications sur la portée de ce théorème. Un *espace complexe* a comme modèles locaux des ensemble analytiques avec les fonctions holomorphes qui y vivent – de la même manière que les variétés analytiques complexes sont modelées sur les ouverts de $\mathbb{C}^n$ et leurs fonctions holomorphes. Les variétés complexes sont donc des espaces complexes particuliers – « sans singularités ». Un *théorème de finitude* pour la cohomologie d'un faisceau analytique est une généralisation profonde d'un théorème d'existence pour le système des équations de Cauchy-Riemann ; il encode à la fois des informations analytiques, géométriques et algébriques. Cela explique la force du résultat ci-dessus. On en obtient comme conséquence presque immédiate le

**Corollaire 11.1** *Les domaines strictement pseudoconvexes sont holomorphiquement convexes.*

Une autre conséquence est le théorème 10, c'est à dire la solution du problème de Levi pour les domaines de Riemann.

Pour montrer son théorème de finitude Grauert construit à partir de $G$ un domaine strictement pseudoconvexe $\widehat{G}$ un peu plus grand, c.-à-d. $\widehat{G} \supset\supset G$, tel que la restriction $H^q(\widehat{G}, \mathcal{S}) \to H^q(G, \mathcal{S}), q \geq 1$, est surjective. (Pour cela il exige provisoirement que $\mathcal{S}$ soit défini sur l'espace ambiant). L'analyse fonctionnelle (théorie de Banach/Schauder/Schwartz) fournit alors la finitude des dimensions. La construction de $\widehat{G}$ se fait pas à pas : on commence par élargir $G$ près d'un point du bord arbitrairement choisi par une petite bosse pour obtenir un $G_0$ strictement pseudoconvexe tel que la restriction de $G_0$ à $G$ soit surjective en cohomologie ; ensuite, on élargit $G_0$, et ainsi de suite, jusqu'à arriver, après un nombre fini d'étapes, à un domaine $\widehat{G}$ avec les propriétés voulues. Cette « technique des petites bosses » de Grauert s'est montrée un outil puissant pour passer du local au global – on l'utilise fréquemment.

## 12. Une solution du problème de Levi

J'interromps pour l'instant la description du développement historique pour donner ici une solution moderne du problème de Levi ; elle repose sur des méthodes et idées dues à Gennadi Henkin, Michael Range, moi-même, et d'autres. Il suffit, d'après Behnke et Stein, de montrer le corollaire 11.1, donc

**Théorème 12.** *Un domaine strictement pseudoconvexe est holomorphiquement convexe.*

Nous supposons d'abord $G \subset\subset \mathbb{C}^n$ et procédons en trois temps.

**Premier temps :**

Soient : $Z^1 = \{f \in L^\infty_{01} : \overline{\partial} f = 0\}$, $B^1 = \{\overline{\partial} u \in Z^1 : u \in L^\infty(G)\}$, $H^1 = Z^1/B^1$.

On a désigné par $L^\infty$ l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur $G$, $L^\infty_{01}$ est l'espace des formes de type $(0,1)$ à coefficients dans $L^\infty$, et l'opérateur $\overline{\partial}$ doit être pris au sens des distributions.

Nous construirons dans le troisième temps de la preuve des opérateurs linéaires continus $P_1$ et $S_0$ avec les propriétés suivantes :

$$P_1 : Z^1 \to Z^1, \qquad S_0 : Z^1 \to L^\infty;$$

$$P_1 \textit{ est compact ;}$$

$$id = P_1 + \overline{\partial} S_0.$$

On en déduit immédiatement $B^1 \supset \mathrm{Im}(id - P_1)$, et les deux espaces sont fermés et de codimension finie d'après Banach/Schauder. Ceci nous donne comme information intermédiaire $\dim_{\mathbb{C}} H^1 < \infty$.

**Deuxième temps :**

Nous allons user de la propriété a) de la pseudoconvexité stricte. Soit $z_0$ un point du bord, et supposons que $\Re P = 0$ donne une surface harmonique de support local en $z_0$; nous posons $F = 1/P$. En prolongeant $F$ à l'aide d'une fonction lisse de recollement, nous arrivons à une fonction $f$ qui jouit des propriétés suivantes :

$$f \in C^\infty(\bar{G} - \{z_0\})$$

$$f \textit{ est holomorphe dans } U(z_0) \cap G, \textit{ où } U \textit{ est un voisinage de } z_0,$$

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty.$$

Les formes $F_k = \overline{\partial} f^k$ appartiennent donc à $Z^1$ et sont par conséquent linéairement dépendantes modulo $B^1$. Il en suit qu'il y a des constantes $c_1, ..., c_m, \quad c_m \neq 0$, et une fonction $u \in L^\infty$, telles que $c_1 F_1 + ... + c_m F_m = \overline{\partial} u$. Quand on pose maintenant $h = c_1 f + c_2 f^2 + ... c_m f^m - u$, $h$ est bien holomorphe sur $G$ et $\lim_{z \to z_0} |h(z)| = \infty$. Ceci montre la convexité holomorphe de $G$.

**Troisième temps :**

Reste à construire $P_1$ et $S_0$. Soit donc $r$ une fonction définissante strictement plurisousharmonique pour $G$. Nous formons son « polynôme de Levi »

$$F(\zeta, z) = \sum_{j=1}^n r_j(\zeta)(\zeta_j - z_j) - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n r_{jk}(\zeta)(\zeta_j - z_j)(\zeta_k - z_k) \overset{def}{=} \sum_{j=1}^n F_j(\zeta)(\zeta_j - z_j),$$

choisissons dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ une fonction lisse de recollement $\varphi(\zeta, z)$ qui est $= 1$ près de la diagonale, $= 0$ pour $\|\zeta - z\|$ grand, et posons

$$\Phi(\zeta, z) = \varphi(\zeta, z)(F(\zeta, z) - r(\zeta)) + (1 - \varphi(\zeta, z))\|\zeta - z\|^2.$$

La fonction $\Phi$ est définie pour $(\zeta, z) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ avec $|r(\zeta)|$ suffisamment petit.

Nous avons encore besoin d'un recollement du polynôme de Levi avec la distance euclidienne :

$$\widetilde{F}(\zeta, z) = \varphi(\zeta, z)F(\zeta, z) + (1 - \varphi(\zeta, z))\|\zeta - z\|^2 = \sum P_j(\zeta, z)(\zeta_j - z_j)$$

et de la forme différentielle

$$k_0(\zeta, z) = \frac{1}{\Phi(\zeta, z)} \sum_{j=1}^{n} P_j(\zeta, z) d\zeta_j.$$

Avec une dernière fonction de recollement $\chi(\zeta)$, qui est $= 1$ près de $bG$, et s'annule à l'intérieur de $G$, nous posons finalement

$$k(\zeta, z) = \chi(\zeta) k_0(\zeta, z).$$

De manière analogue nous introduisons

$$h(\zeta, z) = \frac{1}{\|\zeta - z\|^2 + r(\zeta)r(z)} \sum_{j=1}^{n} (\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j) d\zeta_j.$$

Les opérateurs $P_1$ et $S_0$ sont construits à partir de $h$ et $k$; je donne la définition complète de $P_1$ :

$$P_1 f(z) = \int_G f(\zeta) \wedge \mathcal{P}_1(\zeta, z),$$

$$\mathcal{P}_1(\zeta, z) = -\overline{\partial}_\zeta \Omega_1^k(\zeta, z),$$

où $\Omega_1^k$ a été défini au premier paragraphe – prenant $k$ pour $\alpha$. De manière semblable,

$$S_0 f(z) = \int_G f(\zeta) \wedge \mathcal{S}_0(\zeta, z),$$

le noyau $S_0$ une combinaison algébrique explicite, mais assez compliquée, de $k$, $h$, $\overline{\partial}_\zeta k$, $\overline{\partial}_\zeta h$ et du noyau de Bochner-Martinelli $B_{n0}$. Que les opérateurs ainsi définis aient les propriétés demandées ci-dessus au premier temps de la preuve, se montre à l'aide de la formule de Stokes, de la formule de Bochner-Martinelli et du lemme fondamental qui suit- cf [26], [35]. Ceci termine la démonstration du théorème.

Encore quelques remarques !

(1) Toutes les constructions ci-dessus utilisent les propriétés fondamentales suivantes, qui ont été découvertes par Henkin, Grauert et moi.

**Lemme fondamental.** *Soit $\Phi(\zeta, z)$ la fonction qui figure dans $k$; alors :*

i) $\overline{\partial}_z \Phi(\zeta, z) = 0$, *pour $\|\zeta - z\|$ suffisamment petit ;*
ii) $\Phi(\zeta, \zeta) = 0$ *pour $\zeta \in bG$;*
iii) *il y a une constante positive $\gamma$ avec*

$$|\Phi(\zeta, z)| \geqslant \gamma(-r(\zeta) - r(z) + \|\zeta - z\|^2 + |\Im\Phi(\zeta, z)|);$$

iv) *$\Im\Phi(\zeta, z)$ et $r(\zeta)$ font partie d'un système de coordonnées locales $C^\infty$ dans un voisinage de $z \in bG$.*

(Les propriétés i et ii sont évidentes en vue des définitions ; essentielles et moins évidentes sont iii et iv).

(2) On peut avec un peu d'effort étendre l'argumentation à des sousdomaines strictement pseudoconvexes de variétés complexes, mais pas, du moins avec la technique contemporaine, aux espaces complexes – cf. [26].

(3) J'avais montré dans un premier temps $\dim H^1 < \infty$. En fait : Pour les sousdomaines strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$ ou plus généralement de variétés de Stein, cette dimension est 0 – on peut se référer à [26] où le cas des variétés utilise une variante de l'application d'Oka. Une utilisation semblable d'une application d'Oka se trouve dans ce contexte aussi chez Range [35].

## 13. Formes nouvelles du problème de Levi

Les domaines de Riemann sont des variétés complexes très spéciales ; la solution du problème de Levi caractérise la « complétude holomorphe » dans cette classe. Ce résultat suggère de poser un problème plus général. D'abord les définitions pertinentes :

**Définition 16.** *Un espace complexe $X$ s'appelle espace de Stein ou holomorphiquement complet, si il est holomorphiquement convexe et localement holomorphiquement étalable.*

La dernière notion veut dire : pour tout point $x_0 \in X$ il existe un nombre fini de fonctions holomorphes sur $X$ dont l'ensemble des zéros communs contient $x_0$ comme point isolé.

On a donc vu qu'un domaine de Riemann est de Stein si et seulement si il est pseudoconvexe. Nous posons donc le problème de Levi de manière nouvelle :

**L1. Problème de Levi** pour les espaces complexes : *caractériser « géométriquement » les espaces de Stein.*

Ceci est lié à un deuxième problème :

**L2. Problème de Levi** pour les sous-domaines : *Soit $G$ un sousdomaine relativement compact d'un espace complexe $X$. $G$ soit localement de Stein. $G$ est-il alors holomorphiquement convexe ou même de Stein ?*

**Définition 17.** *$G \subset\subset X$ s'appelle localement de Stein, si il existe pour tout point $x_0 \in bG$ un voisinage $U = U(x_0)$, tel que $U \cap G$ est de Stein.*

Je répète : les deux problèmes sont résolus pour les domaines de Riemann ; la réponse au deuxième est « OUI ».

Une réponse satisfaisante à la première question (L1) fut donnée, avec les méthodes de Grauert, par Raghavan Narasimhan. Narasimhan s'était rendu, au début des années 60 du siècle dernier, à Göttingen, un des centres mondiaux de l'analyse complexe dans cette période, pour y travailler avec Grauert. Un des résultats de cette coopération est le théorème fondamental suivant :

**Théorème 13.** *(Narasimhan [27]) Un espace complexe $X$ est de Stein si et seulement si il possède une fonction d'exhaustion $\varphi$ $C^\infty$ strictement plurisousharmonique.*

On exige donc que les ensembles $X_c = \{x \in X : \varphi(x) < c\}$ soient relativement compacts. Ce théorème fut encore amélioré par Narasimhan dans un travail en commun avec Jon Erik Fornaess : on peut remplacer la différentiabilité de $\varphi$ par la continuité, voire la semicontinuité ; dans ce dernier cas il faut naturellement supposer $\varphi(x) \neq -\infty$ pour tout $x$. Cf [15], aussi pour la définition adéquate de la plurisousharmonicité stricte.

La deuxième variante du problème de Levi (L2) est posée de manière trop naïve : la réponse – presque immédiate – est « NON ». Plus précisément :

*Si X n'est pas de Stein, la réponse est NON.* Des contre-exemples profonds sont dus à Grauert – voir [17].

*Si X est une variété de Stein, la réponse est OUI* [13]

*Si X est un espace de Stein, la réponse est encore OUVERTE.* Des réponses partielles positives sont dues à Aldo Andreotti et Narasimhan [1] (espaces de Stein à singularités isolées) et récemment à Miha Coltoiu et Klas Diederich (espaces de Stein à singularités un peu plus générales [12]).

## 14. Un cercle de problèmes plus généraux

Le problème de Levi s'est posé au cours d'un siècle de manière toujours nouvelle : chaque solution d'une variante a mené à une position nouvelle du problème qui a donné l'occasion de continuer le développement de l'analyse complexe. Le problème même peut être plongé dans un cercle plus étendu de questions, que je veux brièvement décrire :

*Soit G un sous-domaine de $\mathbb{C}^n$ (ou d'un espace complexe). Comment la « géométrie complexe » du bord influence-t-elle la « théorie des fonctions » du domaine ?*

Il faut naturellement développer ce qu'on entend par « géométrie complexe » de $bG$ ; la structure de l'espace ambiant va y jouer un rôle comme nous l'avons déjà vu pour le problème de Levi. En tout cas la forme de Levi d'une fonction définissante fera partie de la géométrie complexe du bord ; appartiendront à la « théorie des fonctions » du domaine pas seulement toutes les fonctions holomorphes, mais aussi l'algèbre des fonctions holomorphes bornées ou à valeurs au bord continues...

Ce « problème de Levi plus général » occupe depuis quatre décennies beaucoup de mathématiciens – je mentionne Joe J. Kohn, G. M. Henkin, K. Diederich, J. E. Fornaess, moi-même... Voici –avec une brève explication – une variante non-résolue du problème :

**Problème.** *Soit $G \subset\subset \mathbb{C}^n$ pseudoconvexe de type fini. Y a-t-il des constantes $\varepsilon > 0, C_k > 0$, telles qu'il existe pour tout $f \in C^k_{0q+1}(\bar{G})$ avec $\overline{\partial} f = 0$ un $u \in C^{k+\varepsilon}_{0q}(\bar{G})$ avec*

$$\overline{\partial} u = f, \quad \|u\|_{C^{k+\varepsilon}} \leqslant C_k \|f\|_{C^k}?$$

Le type d'un domaine pseudoconvexe mesure l'ordre de contact possible entre le bord du domaine et des courbes holomorphes – type 2 correspond à la pseudoconvexité stricte. Le problème a été résolu par Kohn et David Catlin dans le cas des normes de Sobolev au lieu des normes $C^k$-Hölder utilisées ci-dessus, de même dans le cas strictement pseudoconvexe – avec $\varepsilon = 1/2$ – par Range et moi ainsi que par Wolfgang Alt et Yum T. Siu – voir [26].

Pour terminer je veux ajouter quelques notes biographiques sur

# 15. Les « héros » de l'histoire

## 15.1. Fritz Hartogs (20 mai 1874 - 18 août 1943)

© Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach

Friedrich Moritz (Fritz) Hartogs est né à Bruxelles, provenant d'une famille juive-allemande de commerçants. Il étudia à Hanovre, Berlin et Munich, à Munich en particulier auprès de A. Pringsheim, devint maître de recherche (Privatdozent) en 1906, ensuite professeur sans chaire (außerordentlicher Professor) et finalement professeur première classe (persönlicher ordentlicher Professor), tout cela à l'université de Munich. Il fut licencié en 1935, en raison des lois national-socialistes pour le service publique ; en 1939 l'association des mathématiciens allemands (Deutsche Mathematikervereinigung) l'expulsa. Je cite la lettre de son président de l'époque, Wilhelm Süss [36] – dans ma traduction[2] :

*« Monsieur le professeur,*

*vous ne pouvez plus être dans l'avenir membre de l'association des mathématiciens allemands. C'est pourquoi je vous suggère de déclarer votre retrait de notre association. Sinon nous annoncerons l'expiration de votre qualité de membre lors de la prochaine occasion.*

*Avec mon respect distingué,*

*le président »*

[2] Sehr geehrter Herr Professor, Sie können in Zukunft nicht mehr Mitglied der Deutschen Mathematikerverinigung sein. Deshalb lege ich Ihnen nahe, Ihren Austritt aus unserer Vereinigung zu erklären. Andernfalls werden wir das Erlöschen Ihrer Mitgliedschaft bei nächster Gelegenheit bekanntgeben. Mit vorzüglicher Hochachtung, der Vorsitzende.

Hartogs fut par la suite soumis aux persécutions et humiliations de la société allemande national-socialiste ; ses possibilités de contact avec ses collègues à Munich devenaient de plus en plus difficiles, malgré les efforts de plusieurs de ses collègues comme par exemple Carathéodory ; il fut forcé de divorcer ; il finit par esquiver la situation insupportable en choisissant le suicide. Sa femme le soigna – même après son divorce forcé – jusqu'à sa mort. Elle-même mourut en 1957 ; sa pension de veuve ne lui a été accordée par la république fédérale qu'avec beaucoup de retard. Une présentation plus détaillée se trouve dans [2].

## 15.2. Eugenio Elia Levi (18 octobre 1883 - 28 octobre 1917)



E. E. Levi est le frère cadet du mathématicien Beppo Levi, qui est bien connu par exemple dans la théorie de l'intégration. Il naquit à Turin, étudia à la Scuola Normale Superiore di Pisa, où il obtint son doctorat en 1904 et travailla ensuite sur un poste d'assistant (avec Dini, entre autres). À partir de 1909 il occupait la chaire d'analyse de l'université de Gène. Il entra dans l'armée italienne en 1915 et tomba à la guerre en octobre 1917, au cours des luttes acharnées entre les troupes autrichiennes et italiennes à la frontière slovène, près de Gorizia [37].

Levi a fait des contributions importantes dans tous les domaines de l'analyse (équations aux dérivées partielles, calcul des variations, géométrie différentielle, fonctions de plusieurs variables complexes) ; c'était peut-être le mathématicien le plus prometteur de sa génération en Italie.

### 15.3. Otto Blumenthal (20 juillet 1876 - 12 novembre 1944)



La vie de Otto Blumenthal ressemble, côté bonheur et côté tragédie, au destin de Hartogs. Né à Francfort, fils d'un médecin juif, il commença par des études de médecine, mais se tourna bientôt vers les mathématiques qu'il étudiait à Göttingen, en particulier auprès de Arnold Sommerfeld – éminent physicien mathématicien – et David Hilbert. Il fut le premier doctorant de Hilbert (1899). Après un séjour de recherche à Paris il habilita en 1901 et, suivant les recommandations de Hilbert et Sommerfeld, alla en 1905 à l'université technique d'Aix-la-Chapelle (Aachen). À cet endroit il continua à développer la formation mathématique des ingénieurs et y introduisit la formation des professeurs de lycée. Nos collègues d'Aix-la-Chapelle lui ont dédié au bâtiment principal de l'université une plâque commémorative. Il fut licencié en 1933 en raison des nouvelles lois national-socialistes, émigra en 1939 dans les Pays-Bas ou il fut soutenu par des mathématiciens néerlandais (J. Schouten et al.). Au début de la guerre il tomba de nouveau dans les mains de ses persécuteurs national-socialistes ; les époux Blumenthal furent déportés, en 1943, dans le camp de concentration de Westerbork où mourut Madame Blumenthal. O. Blumenthal finit par être emprisonné dans le camp de concentration de Theresienstadt (Tchecoslovaquie) et y succomba aux privations auxquelles il fut soumis. Une biographie plus extensive se trouve dans [14], cf. aussi [34].

Les travaux mathématiques de Blumenthal sont dédiés aux fonctions analytiques de plusieurs variables (fonctions modulaires de plusieurs variables, surfaces de Hilbert-Blumenthal), et, en raison de ses obligations à Aix-la-Chapelle, aux mathématiques appliquées. Il a fait d'importantes contributions dans tous ces domaines. Durant beaucoup d'années il était éditeur en chef des *Mathematische Annalen* ; qu'on éliminât son nom de la liste des éditeurs au cours des persécutions national-socialistes, fut pour lui une mortification particulièrement profonde.

Ses contemporains le décrivent comme un fort gentil personnage d'une culture profonde et étendue – il maîtrisait, par exemple, huit langues...

## 15.4. Heinrich Behnke (9 octobre 1898 - 10 octobre 1979)

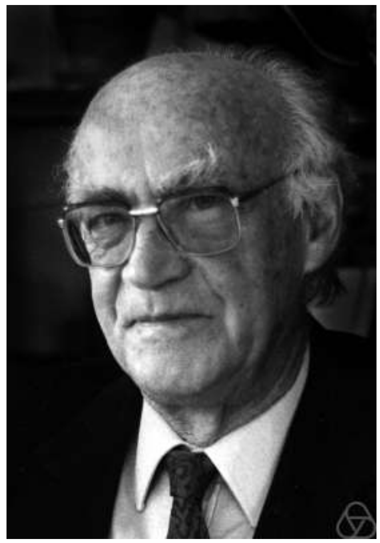


H. Behnke est né à Hambourg. Il fit ses études à Göttingen avec E. Landau et E. Hecke, soutint son doctorat et son habilitation à Hambourg ; en 1927 il alla à Münster ou il établit la plus influente école mathématique en Allemagne, l'école de Münster d'analyse complexe et de géométrie algébrique. En sont provenus Peter Thullen, Karl Stein, Wolfgang Rothstein, Friedrich Hirzebruch, Hans Grauert, Reinhold Remmert et beaucoup d'autres : Behnke a encadré, au fil des années, 50 thèses. Avec son ami et collègue Henri Cartan, il a essentiellement contribué, après la deuxième guerre mondiale, au rapprochement entre les mathématiciens allemands et français. La photo ci-dessous le montre avec H. Cartan à Oberwolfach.

Behnke avait un flair presque magique pour des dons mathématiques exceptionnels, qu'il savait découvrir même auprès des tout jeunes étudiants, et qu'il encourageait vivement. En plus, il regardait comme une tâche principale de chaque institut de mathématiques la formation consciencieuse des professeurs de lycée, tâche ou il s'engagea avec beaucoup de succès. Pendant une certaine période un professeur de lycée sur six dans la Rhénanie-du-Nord/Ouestphalie était élève de Behnke.

J'ai encore fait sa connaissance – quand il était déjà professeur émérite – à Münster dans les années 1970 : aimable personnage d'une grande autorité ; il venait chaque jour à l'institut pour y écrire ses mémoires. Ces « Rapports semestriels » (« Semesterberichte »)[4] dessinent une image très vivante de la vie universitaire en Allemagne entre les deux guerres et de la reconstruction des universités après la deuxième guerre mondiale.

## 15.5. Peter Thullen (24 août 1907 - 24 juin 1996)





P. Thullen est né à Trèves ; il était le premier « élève maître » de Behnke. J'ai déjà parlé de ses importantes contributions à l'analyse complexe. La prise de pouvoir des national-socialistes mit une fin à sa carrière universitaire en Allemagne ; bien qu'il n'appartînt à aucun des groupes directement persécutés, il ne put – catholique pratiquant – s'arranger de la dégradation morale et politique qui se développait dans la société allemande à partir de 1933. À la suite d'un séjour de recherche à Rome (1934), il émigra en Equateur. Il accepta un professorat de mathématiques à Quito, ou il devint un des grands experts mondiaux pour les mathématiques des systèmes de la sécurité sociale. Un grand nombre d'expertises requises par de nombreux gouvernements européens et latino-américains portent sa signature. Son travail le mena dans le cadre de l'ONU finalement à Genève, ou il devint mathématicien en chef du Bureau International du Travail et directeur du département de la sécurité sociale. Après sa retraite il occupait jusqu'en 1977 une chaire de mathématiques appliquées et statistique à l'université de Fribourg (Suisse) et un professorat honoraire pour l'analyse complexe à l'université de Zurich. Même après 1977 il travailla encore comme conseiller de gouvernements, mais s'engagea de nouveau dans l'analyse complexe. Je l'ai encore rencontré lors d'une conférence à Oberwolfach.

Le rapport [38] publié en 2000, que Thullen a écrit pour ses enfants, rapport sur la crise politique et académique autour de la prise de pouvoir des national-socialistes en 1933, touche particulièrement par sa spontanéité et sa subjectivité.

## 15.6. Kiyoshi Oka (19 avril 1901 - er mars 1978)



J'ai déjà parlé de K. Oka dans la partie mathématique de cet article ; voici encore quelques notes biographiques.

Il naquit à Osaka, étudia à Kyoto d'abord la physique, ensuite les mathématiques. Les années de 1929 à 1932 de son séjour en France furent des années décisives pour lui. À partir de 1932 il travailla à l'université de Hiroshima ; son travail fut plusieurs fois interrompu par des maladies. Il changea de poste en 1949 pour aller à l'université pour femmes de Nara ou il resta jusqu'à sa retraite. Il fut distingué pour ses recherches par des prix japonais importants, comme un des grands mathématiciens du 20e siècle et un des grands scientifiques japonais. En complément aux publications accessibles dans ses oeuvres choisies [29], il paraît que son legs est maintenant édité et peut être étudié sur l'internet par des mathématiciens japanophones.

La photo qui suit et qui termine cet exposé a été prise en 1964, lors du départ à la retraite d'Oka.

## 16. Bibliographie

[1] A. Andreotti/R. Narasimhan. *Oka's Heftungslemma and the Levi problem for complex spaces.* Trans. Am. Math. Soc. **111**, 345-360 (1964).
[2] F. L. Bauer. *Fritz Hartogs - Das Schicksal eines jüdischen Matheamtikers in München.* aviso Zs Wiss. Kunst Bayern **1**, 34-41 (2004).
[3] H. Behnke. *Die Kanten singulärer Mannigfaltigkeiten.* Abh. math. Sem. Hamburg **4**, 347-365 (1926).
[4] H. Behnke. Semesterberichte. 302p. Göttingen (1978).
[5] H. Behnke/K. Stein. *Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromorphiekonvexität.* Math. Ann. **116**, 204-216 (1939).
[6] H. Behnke/K. Stein. *Die Konvexität in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen.* Mitt. math. Ges. Hamburg **8**, 34-81 (1940).
[7] H. Behnke/P. Thullen. *Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen.* 115p. Göttingen (1934).
[8] O. Blumenthal. *Bemerkungen über die Singularitäten analytischer Funktionen mehrerer Veränderlicher.* Festschr. H. Weber, 11-22, Berlin (1912).
[9] H. J. Bremermann. *Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen.* Math. Ann. **128**, 63-91 (1954).
[10] H. Cartan. *Sur les domaines d'existence des fonctions de plusieurs variables complexes.* Bull. Soc. math. France **59**, 46-69 (1931).
[11] H. Cartan/P.Thullen. *Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer Veränderlichen.* Math. Ann. **106**, 617-647 (1932).
[12] M. Coltoiu/K. Diederich. *The Levi problem on Riemann domains over Stein spaces with singularities.* 6p. Preprint MPI Bonn (2005).
[13] F. Docquier/H. Grauert. *Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten.* Math. Ann. **140**, 94-123 (1960).
[14] V. Felsch. *Der Aachener Mathematikprofessor Otto Blumenthal.* `http://www.math.rwth-aachen.de/Blumenthal/Vortrag`.
[15] J. E. Fornaess/R. Narasimhan. *The Levi problem on complex spaces with singularities.* Math. Ann. **248**, 47-72 (1980).
[16] H. Grauert. *On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds.* Ann. math. **68**, 460-472 (1958).
[17] H. Grauert. *Bemerkenswerte pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten*. Math. Z. **81**, 377-391 (1963).
[18] H. Grauert/R. Remmert. *Theorie der Steinschen Räume.* 249p. Heidelberg etc. (1977).
[19] F. Hartogs. *Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer komplexer Varänderlicher.* Münchener Berichte **36**, 223-242 (1906).
[20] H. Holmann/H. Huber. *In memoriam Peter Thullen.* (1996) non publié.
[21] J. Krzoska. *Über die natürlichen Grenzen analytischer Funktionen mehrerer Veränderlichen.* Thèse Greifswald (1933).
[22] C. Laurent-Thiébaut. *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables.* Savoirs actuels, Interéditions, 244p. Paris (1997).
[23] P. Lelong. *Les fonctions plurisousharmoniques.* Ann. ENS **62**, 301-388 (1945).
[24] E. E. Levi. *Sulle ipersuperficie delle spazi a 4 dimensioni che possone essere frontiera del campo de esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse.* Ann. Mat. Pura Appl.**18**, 69-79 (1911).
[25] I. Lieb. *Das Levische Problem.* Bonner math. Schr. **387**, 1-34 (2007).
[26] I. Lieb/J. Michel. The Cauchy-Riemann complex. Asp. Math. E **34**, 362p. Braunschweig etc (2002).

[27] R. Narasimhan. *The Levi problem for complex spaces.* I. Math. Ann. **142**, 355-365(1961), II. Math. Ann. **146**, 195-216 (1962).
[28] F. Norguet. *Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes (passage du local au global).* Bull. Soc. Math. France **82**, 137-159 (1954).
[29] K. Oka. *Collected papers* 223p. New York etc. (1984).
[30] K. Oka. *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. I. Domaines convexes par rapport aux fonctions rationelles.* J. Sci. Hiroshima U. **6**, 245-255 (1936).
[31] K. Oka. *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VI. Domaines pseudoconvexes.* Tohoku math. J. **49**, 15-52 (1942).
[32] K. Oka. *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VII. Sur quelques notions arithmétiques.* Bull. Soc. Math. France **78**, 1-27 (1950) ; version « Iwanami » (1948).
[33] K. Oka. *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX. Domaines finis sans point critique intérieur.* Jap. J. Math. **27**, 97-155 (1953).
[34] M. Pinl. *Kollegen in einer dunklen Zeit.* Jber. DMV **71**, 167-228 (1969).
[35] R. M. Range. *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables.* 388p. Berlin etc. (1986) ; 2$^{e}$ éd. corr. (1998).
[36] V. Remmert. *Die deutsche Mathematiker-Vereinigung im dritten Reich.II.* DMV-Mitt. **12**, 223-245 (2004).
[37] C. Roero. *Eugenio Elia Levi.* `http://www.torinoscienza.it/accademia/personaggi`.
[38] P. Thullen. *Erinnerungsbericht für meine Kinder.* Zs. Exil Jg **2000**, 44-58 (2000).

Les photos ont été mises à ma disposition par le Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, par la bibliothèque de l'université de Nara, par le professeur Fujita, par la famille Oka et par la maison photographique Watanabe, par la RWTH Aachen, par le département de mathématiques de l'université de Turin et par le professeur B. Kaup. Je remercie cordialement les professeurs G. M. Greuel, M. Fleckenstein, T. Morimoto, M. Taniguchi, H. Fujita, les autres responsables de l'université de Nara, la maison photo Watanabe, la famille Oka et les collègues à Turin pour la licence de publication. Ma gratitude va également aux professeurs V. Felsch, H. Holmann, R. M. Range et R. Remmert pour leur conseil. Mme H. Lütz a établi le fichier tex de la version allemande de cet article, et Dr. J. Ruppenthal a pris charge des corrections – je les remercie particulièrement. La version originale de cet article est publiée dans Bonner mathematische Schriften [25] ; merci aux éditeurs pour la permission de publier la version française. L'aide de G. Gaudens, C. Laurent-Thiébaut et H. Pajot avec les problèmes de sémantique, de grammaire et de style que me pose une langue qui n'est pas la mienne, a été inestimable. Il est clair que c'est moi qui suis responsable des fautes qui restent.

# MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

## Les mathématiques de la linguistique computationnelle

**Premier volet : la théorie des langages**[1]

Christian Retoré[2]

*1947, un grand millésime : à Jean-Yves Girard, Gérard Huet et Alain Lecomte pour leur soixante ans*

Cet article présente la linguistique computationnelle en mettant l'accent sur les modèles mathématiques et informatiques utilisés ou initiés par la linguistique. Nous avons organisé ces modèles en deux familles, non disjointes : la théorie des langages et la logique. Ce premier volet présente le domaine et son histoire, avant de s'intéresser à la théorie des langages formels. Cette dernière permet de décrire la structure linéaire des mots et la structure arborescente des phrases. Le second volet (à paraître dans la version électronique de la *Gazette* d'avril) portera sur l'utilisation de la logique et de la théorie des types qui permet aussi d'analyser la syntaxe des phrases mais peut en outre calculer le sens qu'elles véhiculent.

### 1. Situation épistémologique de la linguistique computationnelle

#### 1.1. Origines

Les deux volets de cet article correspondent à deux traditions dans la formalisation de phénomènes linguistiques, l'une étant plus développée et suivie que l'autre.

La tradition la plus développée est sans doute la tradition hellénique qui lie logique et grammaire et a ainsi conduit, via la logique à une mathématisation du sens des énoncés et du discours. Cette approche a initialement défini conjointement les concepts logiques de prédicat et d'individu et les notions grammaticales de nom et de verbe. Elle sera en particulier approfondie durant la période scholastique et celle de Port-Royal. Elle s'intéresse principalement à la sémantique du langage naturel mais inclut néanmoins des préoccupations syntaxiques. Cette tradition permet aussi d'établir une filiation entre les catégories artistotelliciennes et celles d'Husserl.

[1] Je remercie de leurs relectures Jean-Xavier Rampon (LINA, université de Nantes) ainsi que Lionel Clément (LaBRI & INRIA, université de Bordeaux), Myriam Quatrini (IML, université d'Aix-Marseille) et Gilles Zémor (IMB, université de Bordeaux ).

[2] LaBRI (CNRS et université de Bordeaux) & INRIA Bordeaux Sud-Ouest

Cette notion de catégorie et la vision fonctionnelle applicative de Frege ont conduit Lesniewski et Ajdukiewicz aux grammaires catégorielles, modèle mathématique de la syntaxe et de la sémantique du langage naturel qui sera au cœur du second volet de notre présentation de la linguistique computationnelle. [7, 4, 5, 16, 34, 17]

La seconde tradition, celle qui fait l'objet de ce premier volet de notre présentation, concerne l'étude des mécanismes calculatoires à l'œuvre dans notre utilisation du langage, que ce soit pour analyser et comprendre ou pour s'exprimer et se faire comprendre. L'étude générale des processus calculatoires a aussi intégré la logique mathématique depuis le début du vingtième siècle et se situe bien évidemment au cœur de l'informatique. Mais c'est bien avant qu'ont été découvertes les structures calculables de la langue, celles qui permettent de décrire par un nombre fini de règles de grammaire l'infinité potentielle des phrases correctes d'une langue. Une telle vision de la langue est déjà présente chez Pāṇini au 5$^{e}$ siècle avant J.C. c'est-à-dire à peu près en même temps que l'apparition déjà mentionnée de la grammaire et de la logique dans la Grèce antique. On notera néanmoins que les voies ouvertes par ce pionnier n'ont pas été explorées avant les débuts de l'informatique, et en particulier les systèmes de Thue et de Post. Ce sont eux qui ont conduit le jeune Noam Chomsky à inventer la notion de grammaire formelle et à en étudier les propriétés mathématiques en particulier avec Marcel-Paul Schützenberger. [18, 52]

La description de la langue comme processus calculatoire ou logique dont nous parlons ici est une modélisation mathématique des processus mentaux liés au langage. Il s'agit donc de sciences cognitives, mais aussi d'informatique au sens courant puisqu'on peut, en s'en inspirant, écrire des programmes opérant sur des données langagières. De fait, le langage naturel est l'un des domaines d'application les plus anciens de l'informatique, apparu à peu près lors de la seconde guerre mondiale : c'est à ce moment qu'apparaissent les premières tentatives de traduction automatique, motivées par le conflit international en cours puis par la guerre froide qui en résulta. C'est ainsi que, curieusement, les connexions entre langue, logique et calcul se sont concrétisées.

Un tel domaine permet des applications dans les deux sens de termes, celui des mathématiciens et celui des informaticiens. D'une part, on peut parler d'application à la linguistique, puisque des modèles mathématiques sont utilisés par une autre science plus empirique et on rejoint ce que les mathématiciens appellent applications des mathématiques, les plus traditionnelles étant les applications à la physique, à l'économie et à la biologie. D'autre part, la linguistique computationnelle permet aussi des applications au sens où les informaticiens entendent ce mot, celui de des réalisation logicielles : il existe effectivement des logiciels qui mettent en œuvre les modèles pour analyser automatiquement la langue écrite ou parlée, ou, en sens inverse, produire automatiquement paroles ou écrits. Une question intéressante est de savoir si les bonnes modélisations de la faculté de langage de l'être humain conduisent à de bons logiciels ou s'il vaut mieux s'écarter des aspects cognitifs pour développer de bons logiciels. Quoi qu'il en soit, dans notre présentation, les réalisations logicielles possibles ou existantes ne retiendront notre attention que pour signaler l'utilisation des modèles mathématiques intéressants par eux-mêmes ou pour la connaissance qu'ils apportent sur notre utilisation de la langue

### 1.2. Un domaine à la croisée de disciplines mieux établies

Dans l'histoire récente, ce domaine entre mathématiques, linguistique et informatique a reçu diverses dénominations révèlent le point de vue de ceux qui s'y rattachent comme le montre un article assez récent [37] .

– MACHINE TRANSLATION C'est ainsi que sont appelé les premiers travaux, très appliqués, réalisés avec des techniques de la famille des automates d'états finis. De tels logiciels aux possibilités limitées survivent dans les outils gratuits de traduction automatique à destination du grand public. On remarquera que leur qualité n'atteint pas celle de logiciels grand public d'autres domaines (lecteurs vidéo, tableurs, ....), ce qui est inévitable vu l'ambition de l'objectif à atteindre.

– COMPUTATIONAL LINGUISTICS Les relatifs échecs des débuts de la traduction automatique ont conduit Bar-Hillel, dont nous reparlerons au sujet des grammaires catégorielles dans le second volet de notre présentation, à un rapport [6] qui suggérait de se restreindre à des objectifs plus modestes que la traduction automatique et d'utiliser des techniques plus performantes et sophistiquées, tant du côté mathématique (logique, algèbre, probabilités) que du côté linguistique (grammaire générative, grammaire de dépendances). C'est dans cette perspective que s'inscrit notre article comme le montre son titre.

– AUTOMATIC LANGUAGE PROCESSING - NATURAL LANGUAGE PROCESSING Cette expression, apparue à la fin des années soixante désigne la partie applicative du précédent domaine. Initialement dédiée aux techniques d'analyse syntaxique (*parsing*) elle s'est ensuite étendue à l'utilisation pour cette tâche et pour d'autres de méthodes statistiques qui ont connu un vif essor dans les années quatre-vingt dix.

– NATURAL LANGUAGE UNDERSTANDING - COGNITIVE SCIENCES Dans les années soixante dix, avec l'apparition de l'intelligence artificielle, la recherche s'est tournée vers la compréhension automatique du langage naturel, en parallèle avec la modélisation du raisonnement. À l'heure où il est de bon ton de critiquer l'intelligence artificielle, remarquons que nombre de formalismes et mêmes de notions utilisés aujourd'hui en linguistique computationnelle sont issus de l'intelligence artificielle et de son langage fétiche, Prolog : les grammaires d'unification (qui sont en fait à l'origine de Prolog), l'analyse syntaxique vue comme une déduction (*parsing as deduction*), la sémantique logique... De nos jours, cette approche intitulée « intelligence artificielle » ou « compréhension automatique du langage naturel » se retrouve dans les laboratoires de sciences cognitives et d'interface homme machine (et bien sûr d'intelligence artificielle).

La dénomination francophone de ce sujet entre linguistique, mathématiques, logique et informatique oscille entre diverses formulations. Dans les années soixante, l'expression *traduction automatique*, inspirée de *machine translation* contentait les acteurs du domaine mais par la suite l'expression *computational linguistics* n'a jamais trouvé une traduction qui s'impose : linguistique mathématique, linguistique informatique, informatique linguistique, linguistique computationnelle — on introduisit même l'expression « linguistique quantitative » pour rassembler linguistes et mathématiciens sans effrayer les premiers. Seule la traduction de *Natural Language Processing* en *Traitement Automatique des Langues* et en sa variante *Traitement*

*Automatique du Langage Naturel* se sont imposées, mais cela confirme notre impression d'une communauté plutôt orientée vers les aspects pratiques — à l'exception de la sémantique formelle, bien représentée, ce qui laisse un grand fossé entre le pragmatisme affiché et l'étude théorique de la pragmatique !

En France, et plus généralement dans la francophonie, ce sujet est bien représenté, principalement grâce à l'association ATALA (Association pour le Traitement Automatique des Langues) qui depuis la fin des années cinquante fédère ce domaine mieux que les organismes de recherche. Elle tient un colloque annuel « Traitement Automatique du Langage Naturel » et édite depuis sa création une revue « Traduction Automatique - Informations » devenue aujourd'hui « Traitement Automatique des Langues ».

Malheureusement, malgré la qualité de l'école française de théorie des langages formels fondé par l'éclectique Marcel-Paul Schützenberger, co-auteur avec le linguiste Noam Chosmky des premiers travaux du domaine, on ne peut pas dire que l'interaction entre, d'une part, les mathématiciens ou informaticiens et, d'autre part, les linguistes ait été très productive à la différence des États-Unis, de l'Allemagne ou des Pays-Bas. Il faut toutefois mentionner certaines exceptions comme les premiers travaux du linguiste Maurice Gross avec le mathématicien André Lentin sur les grammaires formelles pour la linguistique ou ceux plus autodidactes d'Alain Colmerauer sur les grammaires de métamorphoses développées pour le langage naturel avant que Prolog n'en surgisse. On mentionnera aussi l'attrait que la formalisation et la mathématisation ont exercé sur certains linguistes, comme Lucien Tesnières, Bernard Pottier, Jean-Claude Milner ou Antoine Culioli.

Il faut assurément mentionner trois sociétés savantes, *the Association for Computational Linguistics* (1962), les plus récentes, *Mathematics of Language* et *Foundation for Logic, Language and Information* (européenne) ; dans ce domaine mentionnons en particulier les travaux d'Eward Keenan, d'Aravind Joshi, de Bill Rounds de Stuart Shieber qui démontrent l'intérêt de la collaboration entre linguistique, informatique, logique et mathématiques.

## 1.3. Domaines de la linguistique et niveau d'analyse de la langue

L'objectif de notre domaine, la modélisation du langage naturel, peut paraître démesuré si on considère les phénomènes linguistiques comme un tout inorganisé. Fort heureusement, des siècles de grammaire, de grammaire comparée et de linguistique ont défini à l'intérieur de ce vaste champ d'étude qu'est la langue différents domaines, qui, certes, interagissent entre eux, mais peuvent aussi être étudiés indépendamment ; cela divise notre travail de formalisation en un ensemble d'objectifs plus restreints et plus raisonnables, suivant la tradition inaugurée par le structuralisme Saussurien [53]. Avant de décrire ces domaines de la linguistique, mentionnons une notation fort pratique des linguistes, qui consiste à placer une étoile « $*$ » devant les expressions incorrectes, et un ou plusieurs points d'interrogation « ? » devant une expression dont la correction pose question et rien devant une expression correcte — l'adjectif correct employé ici ne renvoie pas à un bon usage tel que la grammaire scolaire en formule mais à ce que disent effectivement les locuteurs.

– La phonétique est l'étude des sons en tant que phénomène acoustique. Elle concerne aussi bien leur production par le système phonatoire que par leur réception par le système auditif.

– La phonologie est l'étude des sons des langues comme système discret. Ce système est acquis par l'enfant dès son sixième mois. La discrétisation, le partage en zones de l'espace des possibilités, qui définit les sons d'une langue, expliquent que Bali et Paris soient indistincts pour un japonais.

– La morphologie est l'étude de la structure des mots. Ceux-ci sont composés de morphèmes, les plus petites unités de sens, d'où le nom de ce domaine. Les opérations à l'œuvre sont en général régulières au sens technique de ce mot, défini au paragraphe 3.1 — bien que certaines langues comme le navajo utilisent des constructions non contextuelles à l'intérieur même des mots ! La morphologie se divise en deux sous-domaines, qui utilisent les mêmes modèles, du moins tant qu'on laisse le sens de coté.

> – La morphologie flexionnelle étudie les phénomènes de conjugaison, de déclinaison et d'adaptation au genre, au nombre, etc. qui généralement ne changent pas la catégorie grammaticale du mot (même si un participe passé, en français, est peu différent d'un adjectif).
>
> (1) arriver $\rightarrow$ arriv[er][ons]
> (2) cheval $\rightarrow$ chevaux
>
> – La morphologie dérivationnelle étudie les règles de formation des mots par combinaison de morphèmes pleins, affixes, préfixes, infixes, suffixes. Ces opérations peuvent changer la catégorie grammaticale. Leur applicabilité suit des règles parfois non évidentes mais sémantiquement motivées.
>
> (1) noble $\rightarrow$ noblesse
> petit $\rightarrow$ petitesse
> (2) maison $\rightarrow$ maisonnette
> camion $\rightarrow$ camionnette
> carpe * $\rightarrow$ carpette
> (3) désirer $\rightarrow$ désirable $\rightarrow$ indésirable
> manger $\rightarrow$ mangeable $\rightarrow$ immangeable

– La syntaxe régule l'agencement des mots dans la phrase. Il s'agit non seulement de reconnaître les suites de mots qui sont des phrases mais aussi de leur assigner une structure, généralement une structure d'arbre, qui permet ensuite d'interpréter la phrase analysée. Dans les exemples qui suivent, nous représenterons cette structure par des crochets, dont le premier porte éventuellement en indice la catégorie de l'expression entre ce premier crochet ouvrant et le crochet fermant qui lui correspond. On notera qu'une phrase structurée peut être incorrecte parce que la structure est incorrecte alors que la succession de mots est possible. Ces structures peuvent aussi être des graphes, qu'il faut souvent voir comme des arbres augmentés de quelques arcs ou arêtes. Nous préciserons cet aspect de la langue au paragraphe 3.1.

(1) Je les fais ouvrir
(2) *Je fais les ouvrir
(3) Je sais les ouvrir
(4) * Je les sais ouvrir

(5) * [[Emilie [mange des]] huîtres]
(6) Emilie [mange [des huîtres]]

– La sémantique étudie le sens des mots, des phrases en dehors du contexte où elles sont utilisées.

– la sémantique lexicale porte sur le sens des mots et les relations qui les unissent

(1) livre, imprimer (objet concret), lire (contenu abstrait)

– la sémantique formelle peut être vue comme une partie de la philosophie du langage, domaine fort ancien intimement lié à la logique. Dans sa longue histoire citons au moins deux auteurs dont les travaux restent d'actualité : Gottlob Frege au début du vingtième siècle et, même si le spectre de ses travaux est plus restreint, Richard Montague dans les années soixante-dix. La sémantique formelle fait souvent appel à deux postulats indépendants bien que souvent confondus :

– la sémantique est véricondititionnelle, c'est-à-dire qu'elle identifie le sens d'un énoncé avec ses conditions de vérité, ce qui est souvent réalisé par l'association de formules logiques ensuite interprétées dans des modèles. Ce domaine n'est pas propre à la linguistique et son étude formelle rejoint souvent l'étude des modèles pour des logiques plus riches que celle des mathématiques usuelles, comme on en trouve dans la logique mathématique ou en informatique théorique (parallélisme, vérification). Nous en reparlerons dans le second volet de notre présentation.

– la sémantique est compositionnelle et son objet est de déterminer les règles qui permettent le calcul du sens d'un constituant à partir du sens de ses parties et de sa structure syntaxique. En général, elle utilise le $\lambda$-calcul pour gérer la composition et les substitutions. Nous en reparlerons aussi dans le second volet de notre présentation.

– La pragmatique et l'énonciation explorent l'utilisation de la langue pour communiquer dans un contexte donné, par exemple à qui renvoie les indexicaux : premières et deuxièmes personnes (je, nous, vous), ici, maintenant, démonstratifs,... et plus généralement étudie le discours.

(1) Allons plutôt dans ce restaurant.

– La prosodie est l'étude de la structure du phrasé : pauses, intonation. Elle est un ingrédient souvent négligé qui participe pourtant à l'interprétation de la phrase. L'oral évite par la prosodie bien des ambiguïtés. Dans l'exemple suivant, il s'agit de l'ambiguïté entre « parler... sur » et « formation initiale... sur » :

(1) « Je serai très heureux de venir parler au LaBRI, laboratoire auquel je dois ma formation initiale en informatique, par exemple sur la lambda-DRT. »

(2) « Je serai très heureux de venir parler au LaBRI — laboratoire auquel je dois ma formation initiale en informatique — par exemple sur la lambda-DRT. »

Nous reviendrons par la suite sur les aspects formels, mais disons d'ores et déjà que les modèles informatiques et mathématiques utilisés en linguistique sont :

– PROBABILITÉS ET STATISTIQUES dont nous parlerons peu car les méthodes utilisées ne sont pas spécifiques aux structures linguistiques manipulées [38]
– GRAMMAIRES FORMELLES auxquelles est consacré ce premier volet
– LOGIQUE MATHÉMATIQUE dont traitera le second volet de notre présentation.

### 1.4. Exemples de traitements automatiques des langues

Pour les raisons que nous expliquerons en conclusion des deux volets, il n'est malheureusement pas clair que les modèles utilisées par les réalisations logicielles qui fonctionnent soient intéressants d'un point de vue mathématique, et, réciproquement, il n'est pas sûr non plus que les modèles mathématiquement intéressants donnent lieu à des réalisations logicielles performantes. Souvent, des modèles simples avec des techniques rudimentaires donnent de bon résultats pour peu qu'on dispose des ressources nécessaires, comme des corpus annotés, et de suffisamment d'huile de coude de programmeur. Mentionnons tout de même les applications dont le lecteur peut avoir fait l'expérience ou connaître l'existence, des plus légères aux plus consommatrices de mathématiques, d'après [32, 3].

– LA RECHERCHE D'INFORMATION ET LA CLASSIFICATION AUTOMATIQUE utilisent en général des probabilités élémentaires, et éventuellement des ensembles de règles.
– L'ALIGNEMENT AUTOMATIQUE DE TEXTES BILINGUES consiste à mettre en rapport phrase à phrase ou constituant par constituant un texte et sa traduction. Ceci ne requiert qu'un simple étiquetage syntaxique, mais est un ingrédient important de la traduction automatique par des méthodes statistiques.
– L'INDEXATION AUTOMATIQUE il fonctionne par extraction de groupe nominaux et peut se contenter d'une analyse syntaxique partielle.
– LA SIMPLIFICATION DE TEXTE procède généralement par suppression de propositions subordonnées, de compléments, etc. ; c'est une étape qui ne demande qu'une analyse syntaxique partielle et qui est utile au résumé de texte.
– L'EXTRACTION DE CONNAISSANCES LINGUISTIQUES À PARTIR DE TEXTES permet entre autres d'étudier les collocations (grosso modo les expressions semi-figées), les restrictions de sélection et d'automatiser la construction de grammaires à partir de corpus ; elle nécessite au moins un étiquetage syntaxique et utilise en général une analyse syntaxique partielle.
– LA CORRECTION ORTHOGRAPHIQUE se contente d'une analyse syntaxique partielle tandis que pour être pleinement correcte, elle devrait utiliser une analyse complète (antécédents de pronoms, dépendances non bornées, etc.) : « Quel**S** sont le**S** livre**S** que mon fils croit que sa sœur a lu**S** . »
– L'INTERROGATION DE BASES DE DONNÉES EN LANGAGE NATUREL nécessite une analyse syntaxique complète de la question afin d'obtenir une représentation du sens comme une formule logique avec souvent de nombreux quantificateurs.
– LA GÉNÉRATION AUTOMATIQUE a non seulement besoin de la structure syntaxique complète mais aussi de la structure discursive qui est en général aussi décrite par une grammaire.

# 2. Machines à états finis et structure linéaire

## 2.1. Monoïdes, semi-groupes, grammaires : définitions élémentaires

Dans un souci de simplicité, nous évoquerons surtout les langages linéaires, les suites de mots ou de morphèmes, bien que la linguistique utilise aussi des arbres, en particulier pour décrire la syntaxe de la phrase.

Un *monoïde* est un ensemble $M$ muni d'une loi de composition associative $\cdot$ qui possède un élément neutre $\varepsilon$. S'il n'y a pas d'élément neutre on parle alors de *semi-groupe*.

Étant donné un ensemble $E$ on note $E^*$ *les suites finies d'éléments de* $E$, dont la suite vide notée $\varepsilon$ et $E^+$ les suites finies non vides d'éléments de $E$. Formellement, une suite finie de longueur $n$ est une application de $[1, n]$ dans $E$ mais on se contente souvent de noter $a_1 \cdots a_n$ une suite de $n$ éléments de $E$.

Une opération naturelle sur $E^*$ est la *concaténation* : opération associative qui à une suite finie $a_1 \cdots a_n$ et une suite $b_1 \cdots b_p$ d'éléments de $E$ associe la suite $a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_p$

Un cas particulier d'usage courant est le *monoïde libre* sur un ensemble $\Sigma$, appelé alphabet ou lexique et dont les éléments sont appelés terminaux (on dit aussi lettres, ou mots, mais dans un contexte linguistique, ces deux derniers termes portent à confusion : une phrase est une suite de mots, un mot est une suite de lettres). Ce monoïde est défini sur $\Sigma^*$ avec pour loi de composition la concaténation (qui est bien associative) et pour élément neutre la suite vide $\varepsilon$ (qui est bien élément neutre).

Un langage sur $\Sigma$ est tout simplement une partie, finie ou infinie, de $\Sigma^*$.

Une grammaire est un procédé mécanique qui définit un langage comme toutes les expressions que l'on obtient à partir d'une ou plusieurs expression initiale par libre application d'un ensemble fini de règles : il s'agit donc d'une description finie d'un ensemble infini d'expressions. On en détaillera le fonctionnement ci-après.

## 2.2. Automates

Un automate est une machine virtuelle comme l'est une machine de Turing, mais aux pouvoirs bien plus limités. Il peut être représenté par un graphe étiqueté dont les sommets sont appelés *états* et les arcs *transitions* ; ces dernières sont étiquetées par des terminaux d'un alphabet $\Sigma$. L'un des états, appelé $S$, est dit initial et un ou plusieurs états sont dits finaux. L'automate produit une suite finie de terminaux de $\Sigma$, aussi appelée expression, ainsi :

– On commence dans l'état $S$ avec l'expression vide comme expression courante.

– Si on est dans l'état $X$ avec l'expression courante $w$ et qu'il y a une transition de $X$ à $Y$ étiquetée par le terminal $x$ de $\Sigma$ alors on peut passer dans l'état $Y$ avec $wx$ comme expression courante.

– On ne peut s'arrêter que dans l'un des état finaux. Le résultat est l'expression courante.

Sans que cela change les langages que l'on peut décrire par un automate, on peut autoriser des transitions vides : c'est une transition étiquetée $\varepsilon$ d'un état $X$ vers un état $Y$, elle permet de passer de $X$ à $Y$ sans produire de nouveau symbole.

La même machine peut être utilisée pour reconnaître les suites de terminaux de $\Sigma$ (l'expression courante est la partie de l'expression qui est déjà reconnue).

Un automate peut par exemple servir à produire toutes les suites de lettres ou de sons possibles en français, mais aussi les noms de nombre (voir la figure 2.2) ou de dates, voire même à décrire les constructions syntaxiques simples. [50] Les automates sont monnaie courante dans l'informatique en général et, ici comme ailleurs des questions essentielles sont la minimisation (construire un automate qui fasse le même travail avec le moins possible d'états) et la déterminisation d'un automate — un automate est dit déterministe lorsqu'il y a, pour chaque état $q$ et pour chaque terminal $x$ de l'alphabet au plus une transition étiquetée $x$ au départ de $q$ : en lisant une expression on n'a jamais aucun choix sur l'état suivant. Les automates sont connus pour engendrer une classe de langages close par

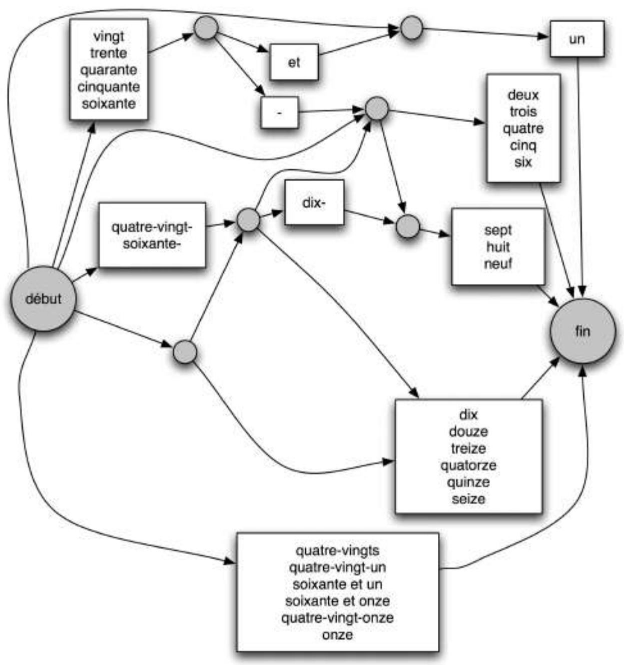



FIG. 1. Un automate qui produit ou reconnaît le nom des nombres entre un et cent.

intersection, réunion, complémentation. La classe de langages engendrés est aussi stable lorsqu'on change légèrement la définition de l'automate : un ou plusieurs états initiaux, un ou plusieurs états finaux, avec transitions vides ou sans, dont les arcs sont étiquetés par des suites finies de terminaux de $\Sigma^*$ ou par un terminal exactement.

## 2.3. Analyse et transformation du mot : transducteurs

Ces machines, les automates, admettent une extension, les transducteurs, aussi appelés fonctions automates ou automates entrée-sortie, qui permettent notamment de modéliser la morphologie [50]. Les transitions d'un transducteur sont étiquetées par des couples de suites de terminaux, donc par des éléments de $\Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$ dont la signification est la suivante : on lit une suite de symboles de $\Sigma_1$ et simultanément on produit une expression de $\Sigma_2$. Si les conditions suivantes sont réunies :

– l'expression produite jusqu'ici est $m$
– ce qu'il reste à lire de l'expression est $w' = \alpha w''$
– l'état courant est $q$
– il existe une transition $t$ étiquetée $\alpha/\beta$ conduisant à l'état $q'$

alors on peut effectuer la transition $t$ et après l'avoir faite, la situation est la suivante :

– l'état courant est $q'$
– l'expression produite est $m\beta$
– ce qu'il reste à lire de l'expression est $w' = w''$

Comme pour les automates, on entre par l'état initial avec le mot à lire (qui va être consommé petit à petit) et on doit terminer sur un état final. On produit un ensemble de couples d'expressions, c'est-à-dire une partie de $\Sigma_1^* \times \Sigma_2^*$,

Ces machines appelées transducteurs sont parfaitement adaptées à décrire la segmentation (qui détecte les séparations entre mots), les règles phonologiques (le son « s » devient « z » entre deux voyelles) et les opérations morphologiques (constitution de mots par concaténation de morphèmes, préfixes radicaux et suffixes). On peut ainsi assez simplement décrire la formation des adverbes en « -ment » du français ou la conjugaison des verbes.

D'un point de vue mathématique, les transducteurs posent le même genre de questions que les automates, plus certaines qui leurs sont propres. Par exemple un automate est toujours équivalent à un automate sans transition vide et dont les transitions sont étiquetées par exactement un terminal. Pour un transducteur, on peut se limiter à des transitions de la forme $x/y$ avec $x$ et $y$ valant soit un terminal soit $\varepsilon$ et n'étant pas tous les deux $\varepsilon$ — mais l'impossibilité en général de n'avoir que des transitions de la forme $x/y$ avec $x$ et $y$ deux terminaux, empêche la classe des relations produites par les transducteurs d'être close par intersection. Lorsqu'on peut se limiter à des transition $a/b$ avec $a \in \Sigma_1$ et $b \in \Sigma_2$ on parle de transducteur lettre-à-lettre, lesquels constituent une classe close par intersection.

La minimisation des transducteurs est possible mais plus complexe que celle des automates : leur déterminisation n'est pas toujours possible et, lorsqu'elle l'est, elle se fait par un algorithme relativement astucieux.

Grosso modo, il existe deux manières de fabriquer un transducteur à partir d'autres transducteurs. On peut les composer « en cascade » ce qui consiste à utiliser en entrée du deuxième transducteur le mot produit par le premier transducteur : cette opération calcule effectivement la composition des relations associées aux transducteurs. On peut aussi, s'ils sont lettre-à-lettre en faire l'intersection, ce qu'on appelle abusivement composition en parallèle. Par exemple, que donnent ces deux méthodes si on souhaite définir un transducteur qui fasse précéder un mot

« m » du préfixe « multi » avec trait d'union si « m » commence par une voyelle et sans si « m » commence par une consonne ?

On peut commencer par insérer le préfixe avec un trait d'union, puis l'effacer lorsqu'il est suivi d'une voyelle, et composer « en cascade » les deux transducteurs : c'est la première méthode.

On peut aussi avec l'aide d'un symbole auxilaire $\varnothing$ qui permet de n'avoir que des transducteurs lettre-à-lettre, fabriquer des transducteurs lettre-à-lettre qui construisent les relations suivantes, où $c$ désigne un mot commençant par une consonne et $v$ un mot commençant par une voyelle :

– $R$ ou tout mot $m$ est en relation avec *multi*$\varnothing$*m* et avec *multi-m*,

– $R_v$ où un mot $c$ commençant par une consonne est en relation avec *multi-c* et avec *multi*$\varnothing$*c* tandis qu'un mot $v$ commençant par une voyelle n'est en relation qu'avec *multi-v*, et

– $R_c$ où un mot $v$ commençant par une voyelle est en relation avec *multi-v* et avec *multi*$\varnothing$*v* tandis qu'un mot $c$ commençant par une consonne n'est en relation qu'avec *multic*.

La relation $R \cap R_v \cap R_c$ est presque la bonne, il suffit d'un post-traitement qui efface les symboles auxiliaires $\varnothing$ fait par composition en cascade avec un transducteur non lettre-à-lettre. Cette dernière méthode qui peut sembler plus compliquée permet de procéder en demandant à ce que des conditions soient simultanément satisfaites, et d'obtenir le résultat par combinaison de ces conditions formulées de manière indépendante : pour la suite de morphèmes *co in culp ation*, de telles règles sur les traits d'union avec voyelles et consonnes donneront *co-inculpation*.

Nous donnons en figure 2 la règle d'accord de l'adverbe de degré *tout*.

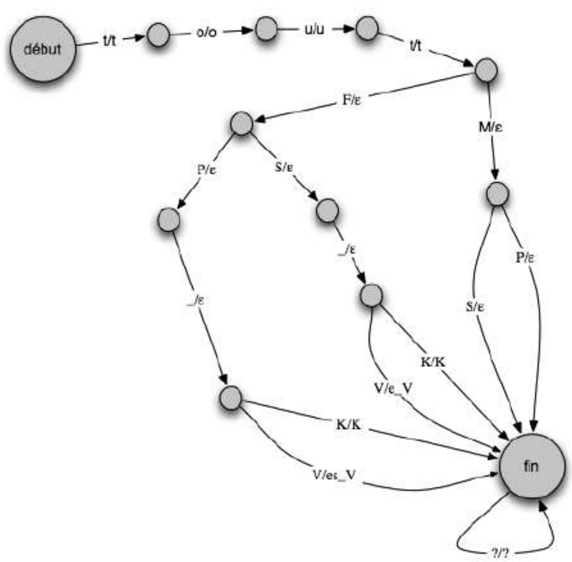



FIG. 2. Un transducteur réalisant l'accord de l'adverbe *tout* exprimant le degré complet.

Le transducteur ci-dessus représente la règle d'accord de *tout* utilisé comme adverbe. F et P désignent respectivement les traits *féminin* et *masculin*, S et P désignent respectivement les traits *singulier* et *pluriel*. Une transition K/K est une abréviation pour les les transitions de mêmes états initial et final $b/b$, $c/c$ ... (pour toute consonne, y compris le *h* aspiré), de même $V/es\_V$ est une abréviations pour les transitions $a/es\_a$, $e/es\_e$ (pour toute voyelle, y compris le *h* non aspiré). La transition $?/?$ récrit n'importe quel caractère en lui même. Le transducteur réalise entre autres *toutFS_entière* $\rightarrow$ *toute entière*.

La règle dit que *tout* est invariable, sauf si l'adjectif qui le suit est au féminin et commence par une voyelle : *les fenêtres tout entières ouvertes* et *les fenêtres toutes grandes ouvertes* — voir [28].

## 2.4. Un pas vers la syntaxe et un zeste de probabilités : modèles de Markov cachés pour l'étiquetage syntaxique

Les Modèles de Markov cachés, *Hidden Markov Models*, désormais HMM, sont des sorte d'automates probabilistes dont l'algorithmique est très efficace. Introduits à la fin des années soixante [8] — on pourra consulter l'excellente synthèse [15] — ils sont fort utiles à la prédiction de ce qui suit dans une chaîne, pour peu qu'il y ait une régularité dans les chaînes considérées : ce genre de modèle n'est en rien particulier à l'étude de la langue : de telles études permettent de prévoir ce qui suit dans une chaîne de signaux, de sons, d'images, de mesures, de tests de circuits, etc. Les HMM ont ainsi été utilisés pour la reconnaissance de la parole, de l'écriture, le diagnostic de systèmes électroniques, l'analyse du génome etc. Les HMM sont une méthode très efficace pour l'étiquetage grammatical d'une phrase dans une langue à ordre des mots très strict, et donc un premier pas vers l'analyse syntaxique profonde ou superficielle de la phrase. [32, 38]

Rapidement, un HMM est une sorte d'automate comme celui représenté en figure 3 :

– Les états correspondent aux catégories grammaticales.

– Chaque transition est munie d'une probabilité de sorte que la somme des probabilités des transitions issues d'un état donné est 1.

– De chaque état ou catégorie grammaticale est émis un mot avec une certaine probabilité et la somme des probabilités d'émission des mots d'une catégorie donnée est 1.

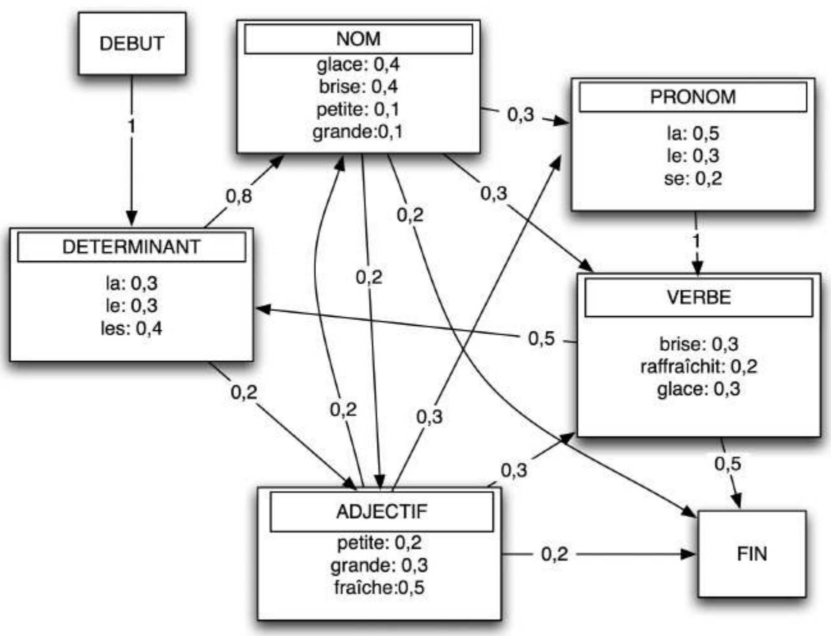
Les hypothèses faites par un tel modèle sont des hypothèses de mémoire bornée et d'indépendance aux niveaux du mot et de la suite de catégories. Au niveau de la suite des catégories, la catégorie d'un mot ne dépend que de celle du mot précédent (ou d'un nombre fixé de mots précédents). Au niveau du mot, la probabilité d'avoir un mot en connaissant sa catégorie grammaticale ne dépend ni de ce qui précède, ni de ce qui suit.

La méthode d'étiquetage fonctionne schématiquement ainsi : étant donnée une phrase, on détermine le chemin de Viterbi, c'est-à-dire le chemin le plus probable qui produise cette séquence de mots. Cette suite d'états est la suite des catégories attribuées à chacun des mots de la phrase. Elle se calcule de manière très efficace, par un algorithme de type programmation dynamique, fonctionnant en au plus $O(TN^2)$ étapes si la phrase comporte $T$ mots. Dans l'exemple bien connu d'André

Martinet reproduit ci-dessous, on trouvera vraisemblablement deux chemins, les deux premiers, franchement plus probables que les autres dont le troisième :

(1) « La(det) petite(n) brise(v) la(det) glace(n) »
(2) « La(det) petite(adj) brise(n) la(pro) glace(v) »
(3) « La(det) petite(n) brise(n) la(det) glace(v) »

Mieux encore, le HMM est améliorable en remplaçant les probabilités par les fréquences pour des exemples obtenus par le HMM ou donnés manuellement (et dont on pense qu'ils sont correctement étiquetés). La méthode de Viterbi consiste à utiliser les chemins de Viterbi obtenus sur des phrases par le HMM ou par une étude directe, et à définir la probabilité d'émettre le mot $m$ dans l'état $s$ comme le nombre de fois où on a émis $s$ depuis $n$ divisé par le nombre de fois où l'on était dans $s$ dans ces chemins, et similairement, à définir la probabilité de passer de l'état $s$ à l'état $s'$ comme le nombre de fois où on est passé de l'état $s$ à l'état $s'$ divisé par le nombre de fois, où, le long de ces chemins, on était dans l'état $s$. Cette méthode peut être itérée jusqu'à ce qu'elle se stabilise, ce qui arrive lorsqu'un extremum local est atteint. On peut même affiner cette méthode, en prenant en compte tous les chemins possibles et non pas les seuls chemins de Viterbi ; on fait alors une




$$p(\text{« La(det) petite(n) brise(v) la(det) glace(n) »}) = 3,45\ 10^{-5}$$
$$p(\text{« La(det) petite(adj) brise(n) la(pro) glace(v) »}) = 3,6\ 10^{-5}$$
$$p(\text{« La(det) petite(n) brise(n) la(det) glace(v) »}) = 1,72\ 10^{-5}$$

FIG. 3. Un modèle de Markov caché

moyenne pondérée par les probabilités de ces divers chemins possibles ; c'est la méthode de Baum-Welsh, qui en général ne se stabilise pas mais se rapproche d'un extremum local.

Maintenant, au delà de l'élégance de ce modèle et de l'efficacité des algorithmes (le chemin de Viterbi se calcule en $N^2 T$ étapes pour une séquence de $T$ mots si le HMM a $N$ états), on peut se demander quel est l'apport pour la linguistique computationnelle d'une telle méthode. Pour le Traitement Automatique des Langues, l'intérêt est clair : c'est un traitement préalable et l'information supplémentaire ainsi acquise augmente l'efficacité algorithmique de l'analyse grammaticale. Encore faut-il disposer, pour la langue étudiée, d'une famille pertinente de catégories grammaticales et que celles-ci satisfassent des régularités d'ordonnancement : les langues à ordre des mots assez libre ne peuvent bénéficier de ces méthodes. Du point de vue de la connaissance linguistique, l'apport de ces méthodes est minime : les seules propriétés ainsi obtenues sont du genre « la est pronom dans 10% des cas », « un verbe est suivi d'un article dans 40% des cas », etc. À y réfléchir davantage, la faiblesse de ce modèle, comme celle de beaucoup de méthodes probabilistes, résulte de son incapacité à prendre en compte la structure de la phrase, qui est tout de même un ingrédient linguistique central : les règles de succession portent non sur les mots mais sur des groupes de mots structurés, les constituants aussi appelés syntagmes.

Les améliorations de ce modèle n'ont rien d'évident. Certes, il est clairement exclu de prendre en compte les dépendances non bornées, mais on pourrait espérer prendre en compte les quelques mots précédents. Cela n'est également pas possible, car certaines données deviennent trop rares. À la différence des séquences d'ADN construites avec quatre symboles, un corpus contient de l'ordre de $2.10^4$ mots différents (en prenant en compte les formes fléchies et les noms propres). La probabilité qu'un triplet de catégories donné se réalise sous la forme d'un triplet de mots devient nulle pour nombre de triplets de mots, car il y a trop de triplets pour qu'il soient tous présents dans le corpus d'apprentissage. Avec les $2.10^4$ mots du corpus, les triplets possibles de mots sont au nombre de $8.10^{12}$ tandis qu'un corpus de $10^6$ mots contient aussi $(10^6 - 2)$ triplets de mots : il est donc quasi certain que des triplets de mots pourtant possibles ne figurent jamais dans le corpus, et encore moins dans le corpus d'apprentissage qui aura été annoté à la main.

Ce paragraphe sur les modèles de Markov cachés permet de conclure que pour une langue à ordre des mots stricts, ce genre de méthode constitue un prétraitement intéressant, avec une algorithmique élégante, mais que cela manque de contenu linguistique tandis que le sujet semble mathématiquement clos.

## 3. Grammaire générative et théorie des langages formels

Nous présentons ici le fleuron de la connexion entre linguistique, mathématiques et informatique : la théorie des langages formels [19, 52]. Cette théorie a connu un vif succès y compris hors de la linguistique dont elle est issue : en informatique pour la compilation ou le parallélisme, en biologie pour l'étude des séquences d'ADN et en mathématiques dans l'étude des groupes, notamment profinis. Bien qu'elle ne soit pas apparue *ex nihilo*, la notion de grammaire formelle ou de langage formel peut être attribuée à Noam Chomsky [20] et les premières propriétés mathématiques de ces objets résulte de sa collaboration avec le scientifique éclectique Marcel-Paul

Schützenberger [18]. Selon Chomsky, la première notion de grammaire formelle et plus précisément hors-contexte est due au grammairien sanskritiste Pāṇini, vers le 5e s. av. J.C. et on peut les rattacher aux systèmes de Post et aux premiers modèles mathématiques du calcul, historiquement plus proches de lui. Ensuite, Noam Chomsky et son école n'ont plus cherché à formaliser eux-mêmes les modèles linguistiques qu'ils développaient, se focalisant sur la description du langage en tant qu'organe biologique soumis à l'évolution [24]. Sur ce sujet on pourra consulter le livre de Jean-Yves Pollock [48] ainsi que l'excellent ouvrage de vulgarisation de Stephen Pinker sur l'instinct de langage [44]. Des chercheurs compétents aussi bien en linguistique théorique qu'en informatique fondamentale, je pense en particulier à Edward Stabler, se sont chargés de formaliser les modèles successifs proposés par Noam Chomsky et son école [56, 55] et notamment le programme minimaliste [24].

Une première considération amène Noam Chomsky à remettre en cause le modèle comportementaliste (*behaviorist*) du langage et de son apprentissage, en vogue dans les années cinquante : une langue ne saurait se réduire à l'ensemble des phrases dites par ses locuteurs jusqu'à ce jour. En effet, on peut toujours produire des phrases nouvelles, qui sont identifiées comme des phrases par les locuteurs. Il suffit de considérer une phrase la plus longue possible dans cette vision finie de la langue et de la faire précéder de « il croit que » pour obtenir une nouvelle phrase, que les locuteurs reconnaîtrons comme correcte. Ainsi c'est la compétence linguistique du locuteur qui est devenu l'objet d'étude et non plus la régularité des distributions dans un corpus comme dans l'ère comportementaliste. .

Noam Chomsky définit plutôt la langue comme un ensemble de règles inconscientes, connu sous le nom de Langage Interne d'un individu X — bien évidemment il y a un rapport entre le langage interne de X et celui de Y s'ils font partie d'une même communauté et se comprennent. Une preuve de l'existence de telles règles et de leur acquisition est la surgénéralisation dont font preuve les enfants. Ceux-ci commencent par dire, comme ils l'entendent autour d'eux, « vous faites » puis ils disent « vous faisez » avant de revenir à la forme « vous faites ». La seule manière d'expliquer la forme non entendue « vous faisez » est de dire qu'une règle de conjugaison a été acquise et qu'elle est abusivement utilisée avant d'être bloquée par une exception. Noam Chomsky va donc proposer une description relativement uniforme de la grammaire vue comme un ensemble de règles.

### 3.1. Une hiérarchie de grammaires formelles

On se donne deux alphabets disjoints : $N$ (dont les éléments sont appelés non terminaux, qui seront pour nous des catégories grammaticales) et $\Sigma$ (les terminaux, qui, pour la syntaxe, seront les mots des phrases), un symbole $S$ de $N$ (symbole de départ, phrase) et des règles de production en nombre fini qui sont des éléments de $[(N\cup\Sigma)^*\times N\times(N\cup\Sigma)^*]\times(N\cup\Sigma)^*$ que l'on note souvent ainsi :

$$\alpha \;\to\; \beta \text{ avec} \left\{ \begin{array}{l} \alpha\in(N\cup\Sigma)^*\times N\times(N\cup\Sigma)^* \\ \beta\in(N\cup\Sigma)^* \end{array}\right.$$

On dit alors que la suite $\alpha$ de terminaux et non terminaux, comportant au moins un non-terminal, se réécrit immédiatement en la suite $\beta$ de terminaux et non-terminaux. Étant donnée une suite finie $\gamma$ de $(N\cup\Sigma)^*$ on dit qu'elle se réécrit immédiatement en $\gamma'$ s'il existe une règle de production $\alpha \;\to\; \beta$ et deux suites finies $\gamma_1$ et $\gamma_2$ telles que $\gamma = \gamma_1\alpha\gamma_2$ et $\gamma' = \gamma_1\beta\gamma_2$. La réécriture entre chaînes est définie comme la clôture transitive $\xrightarrow{*}$ de la réécriture immédiate.

On a alors une définition inductive d'un langage : c'est l'ensemble des suites de *terminaux* que l'on obtient par réécriture à partir du symbole de départ $S$ : $L(G) = \{\alpha \in \Sigma_1^* | S \xrightarrow{*} \alpha\}$.

Sans restriction aucune sur les règles de production, un tel système engendre toutes les parties (ou langages) récursivement énumérables de $\Sigma^*$. On peut distinguer diverses familles de langages (de parties de $\Sigma^*$) produites par divers types de grammaires formelles :

– Les grammaires contextuelles (*context-sensitive*) Dans leurs règles de production, le membre gauche a un nombre de symboles terminaux ou non terminaux plus petit que celui du membre droit, et par conséquent lors d'une réécriture la longueur de la suite produite augmente. De ce fait, l'appartenance d'une suite $m_1 \cdots m_p$ au langage engendré est décidable : il suffit d'avoir énuméré toutes les suites de longueur inférieure à $p$ pour dire si $m_1 \cdots m_p$ fait partie ou non du langage engendré. Un joli résultat justifie le qualificatif « contextuelles » :

**Théorème 3.1.** *Tout langage produit par une grammaire contextuelle peut être produit par une grammaire de cette même classe dont toutes les règles sont de la forme $U_1XU_2 \to U_1WU_2$ avec $X \in N$ et $U_1, U_2, W \in (N \cup \Sigma)^*$ et $W \neq \varepsilon$ ($X$ se réécrit en $W$ dans le contexte $U_1$ à gauche, $U_2$ à droite).*[36, 29]

– Les grammaires non contextuelles aussi appelées hors-contexte ou algébriques (*context-free*) La partie gauche de leurs règles de production, $\alpha$, est réduite à un non terminal. On en trouvera un exemple en figure 4. Comme on peut sans modifier le langage engendré se ramener à des grammaires non contextuelles sans productions vide sauf peut-être $S \to \varepsilon$, les grammaires algébriques sont un cas particulier de grammaires contextuelles. L'appartenance est non seulement décidable, mais elle l'est en $O(n^3)$ où $n$ est le nombre de terminaux.

**Théorème 3.2** (Forme Normale de Chomsky). *Étant donnée une grammaire non contextuelle il en existe une engendrant le même langage dont les règles de production sont de la forme*

$$X \to Y\,Z \text{ ou } X \to a$$

*avec $X, Y, Z \in N$ et $a \in T$.* [21, 29]

**Théorème 3.3** (Forme Normale de Greibach). *Étant donnée une grammaire non contextuelle il en existe engendrant le même langage dont les règles de production sont de la forme*

$$X \to aX_1 \dots X_p$$

*avec $X_1, \dots X_p \in N$ et $a \in T$ et on peut même se ramener à des règles dans lesquelles $p \in \{0, 1, 2\}$.*[27, 29]

– Les grammaires régulières aussi appelées rationnelles (*regular*), qui correspondent aux automates de la partie 2 ont des règles de production de la forme $X \to wY$ ou $X \to w$ avec $X, Y \in N$ et $w \in T^*$. les grammaires régulières sont donc en particulier des grammaires non contextuelles.

Le type d'un langage est le type le plus spécifique d'une grammaire engendrant ce langage — car rien empêche d'écrire une grammaire très compliquée (par exemple de type le plus général) engendrant un langage qui peut aussi être produit avec une grammaire très simple (par exemple régulière).

### 3.2. Compétence et performance

Une distinction fondamentale introduite par Noam Chomsky est celle entre *compétence* et *performance*. En effet, même si nous possédons les règles de notre langue, ce n'est pas pour cela que nous les utilisons autant qu'il est mathématiquement possible. En particulier nous faisons un usage modéré de la récursivité. Cela ne veut pas dire qu'il faille décrire la langue exhaustivement, parce que les phrases ont moins de deux cents mots et qu'il y a moins de cinq cent mille mots. Cela serait aussi stupide que de décrire un ordinateur par un automate sous prétexte que sa mémoire est finie : ce n'est pas ainsi que ça fonctionne. La grammaire décrit donc les règles c'est-à-dire la compétence tandis

*s* → *sn sv*
*sn* → *det n* | *np* | *det n rel_s* | *det n rel_o* | *np rel_s* | *np rel_o*
*rel_s* → *pro_s sv*
*rel_o* → *pro_o sn vt*
*sv* → *vi* | *vt sn*
*pro_o* → *que*
*pro_s* → *qui*
*vt* → *regarde* | *regardent* | *mange* | *mangent*
*vi* → *dort* | *dorment* | *tombe* | *tombent*
*det* → *une* | *un* | *la* | *le* | *des* | *les*
*n* → *pommes* | *pomme* | *femme* | *femmes*
*np* → *pierre* | *marie*

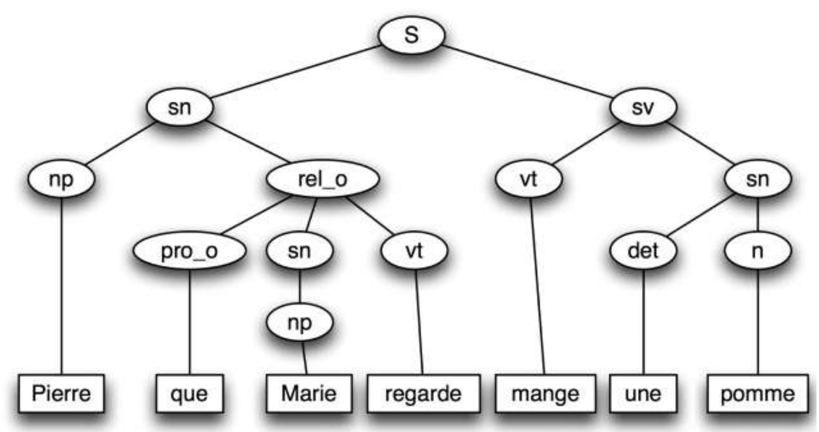



FIG. 4. Un exemple de grammaire non contextuelle et une dérivation

que la performance sera décrite comme une limitation sur l'usage ces règles, et notamment sur le nombre d'éléments en trop ou manquants que notre mémoire à court terme peut gérer. À titre d'exemple, voici des phrases que notre compétence accepte, mais qui mettent à mal notre performance en raison du trop grand nombre de verbes attendus :

(1) Le loup a dévoré la chèvre.

(2) La chèvre que le loup a dévoré avait mangé le chou.

(3) ? Le chou que la chèvre que le loup a dévoré avait mangé appartenait au passeur.

(4) ? ? Le passeur auquel le chou que la chèvre que le loup a dévoré avait mangé appartenait possède plusieurs bateaux.

(5) ? ? ? Les bateaux que le passeur auquel le chou que la chèvre que le loup a dévoré avait mangé appartenait possède sont des barges.

Rapidement les travaux ont plutôt porté sur la compétence que sur la performance, et une question naturelle est la suivante : où se situent les grammaires des langues naturelles dans la hiérarchie abstraite décrite ci dessus, c'est-à-dire quelle est l'allure des règles exprimant la compétence des locuteurs ?

Deux principes empiriques et convaincants guident cette recherche :

(1) Le jugement de grammaticalité et l'analyse, voire la compréhension d'une phrase se fait, comme toute tâche cognitive largement automatisée, « en un temps raisonnable » ce que l'informaticien aura tendance à traduire par « en un temps polynomial en fonction du nombre de mots de la phrase ».

(2) La grammaire d'une langue donnée doit être apprenable à partir d'exemples de phrases de cette langue (et éventuellement d'une grammaire universelle innée factorisant les propriétés communes aux langues humaines). En effet, on sait que pour l'essentiel un enfant acquiert la grammaire de sa langue avant trois ans, avec relativement peu d'exemples au regard de la complexité de la grammaire particulière apprise. On sait aussi que, n'en déplaise aux parents, les exemples négatifs ne servent à rien. Un exemple négatif est une phrase dont on signale à l'enfant qu'elle est incorrecte, en la laissant sans réponse, en la signalant comme incorrecte (*On ne dit pas « Il la te donne. »* ) ou en la corrigeant (*On dit « Il te la donne. »* ). Quelle que soit l'option choisie, on ne lui fera pas acquérir plus vite l'ordre correct des pronoms du français ! Sur ce sujet on consultera avec profit les articles de Stephen Pinker et son ouvrage de vulgarisation sur l'instinct de langage [45, 46, 44]. Cette condition d'apprenabilité à partir d'exemples positifs seulement, clamée haut et fort par la grammaire générative est souvent laissée de coté dans la conception de modèles formels. En effet, il faut pour cela avoir des exemples structurés, et on ne sait pas trop quelle structure est connue ou perçue de l'enfant : l'intonation délimite certains constituants, le sens des mots sert aussi à structurer la phrase (et on sait qu'il doit être connu préalablement), mais comment ? Dans le second volet nous présenterons certains algorithmes d'apprentissage d'une grammaire formelle à partir d'exemples positifs qui convergent vers la grammaire à acquérir. [33, 9].

Revenons maintenant à la place des langues humaines dans la hiérarchie des grammaires formelles, en laissant de côté la condition d'apprenabilité, trop difficile à prendre en compte. D'après les exemples de relatives objets imbriquées (exemples 1 à 5 où notre performance était mise à l'épreuve, on voit que la langue contient des structures comme

(1) $\text{Sujet}_1\ \text{Sujet}_2\ \text{Sujet}_3 \cdots \cdots \text{Verbe}_3\ \text{Verbe}_2\ \text{Verbe}_1$

éventuellement agrémentées de mots entre, ce qui montre que la classe des langages réguliers ne suffit pas à décrire la syntaxe des langues humaines. En effet, en supposant même que l'on ait qu'un seul verbe, *regarde*, et qu'un seul groupe nominal, *Marie*, on aura des phrases du genre

$$\textit{Marie (que Marie)}^n \textit{ regarde}^n \textit{ regarde Marie}$$

ce qui est un exemple de structure que les langages réguliers ne peuvent décrire.

Les grammaires hors-contextes ne suffisent pas non plus. Par exemple, les complétives du néerlandais produisent des structures :

(2) Proposition Principale Sujet$_1$ Sujet$_2$ Sujet$_3$ $\cdots$ Verbe$_1$ Verbe$_2$ Verbe$_3$ $\cdots$

(3) *Ik denk dat ik*$_1$ *haar*$_2$ *de nijlpaarden*$_2$ *zag*$_1$ *voeren*$_2$
Je pense que je elle/la les hippopotames voir nourrir

*Je pense que je l'ai vu nourrir les hippopotames*

(4) *Ik denk dat ik*$_2$ *Henk*$_2$ *haar*$_3$ *de nijlpaarden*$_3$ *zag*$_1$ *helpen*$_2$ *voeren*$_3$
Je pense que je Henk elle/la les hippopotames voir aider nourrir

*Je pense que j'ai vu Henk l'aider à nourrir les hippopotames*

Ces exemples étudiés dans [14] montre que les arbres attendus sur les complétives du néerlandais ci-dessus ne peuvent pas être produits par une grammaire non contextuelle. Un résultat plus fort de Stuart Shieber montre que le suisse-allemand, indépendamment des arbres associés aux phrases, n'est pas un langage algébrique aussi à cause de la construction des complétives. [54].

C'est pour cela que les linguistes s'accordent à dire que la classe de langages formels nécessaire à la description de la syntaxe des langues humaines est, comme on le voit en figure 5, un peu plus que celle des langages hors contexte, qui peuvent néanmoins fournir une assez bonne approximation. On connaît diverses descriptions de familles de langages analysables en temps polynomial et qui couvrent les phénomènes syntaxiques échappant aux grammaires hors-contexte. Sans doute à cause de sa difficulté, le critère d'apprenabilité a disparu des modèles formels en syntaxe : on ne sait pas si ces formalismes sont ou non apprenables à partir d'exemples positifs et encore moins comment ils les sont à de rares exceptions près qui seront développées dans le seconde volet.

## 3.3. Apprenabilité et grammaire universelle

Au vu de la complexité de la grammaire à acquérir et du relativement faible nombre d'exemples entendus par le jeune apprenant, l'apprentissage semble impossible, et pourtant tout enfant y réussit sans problème ! Cela a conduit Noam Chomsky à postuler l'existence d'une grammaire universelle et innée. Celle-ci ne doit pas être vue comme régissant la structure de toutes les phrases de toutes les langues mais plutôt comme une matrice de grammaire, une grammaire paramétrable. Elle est présentée comme un organe issu de l'évolution dont serait doté l'être humain à sa naissance. Ainsi la classe des grammaires humaines se trouve-t-elle considérablement restreinte, et surtout, son apprentissage devient un processus calculatoire raisonnable puisqu'il ne s'agit que de déterminer la valeur des paramètres. Pour prendre un exemple simpliste, si l'enfant sait que le verbe

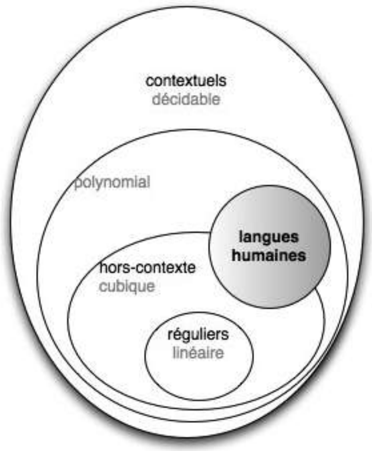



FIG. 5. Place des langages formels correspondant aux langues humaines dans la hiérarchie de Chomsky. En gris, la complexité de l'analyse en fonction du nombre de mots dans la phrase analysée.

*conduit* a un sujet *maman* et un objet *voiture* à partir du seul exemple *maman conduit voiture* il peut en déduire que l'ordre de sa langue est *sujet verbe objet*.

La grammaire générative s'est donc attachée à l'étude de nombreuses langues afin de dégager des principes universels qui seraient communs à toutes les langues. Les quelques principes qui ont été dégagés ne sont hélas pas particulièrement faciles à exprimer dans le cadre des grammaires formelles présentées ci-dessus. Le plus souvent ils concernent le lien entre la structure syntaxique de la phrase et sa structure logique. Afin d'illustrer notre propos sur les universaux, mentionnons-en deux :

– TOUT GROUPE NOMINAL DOIT RECEVOIR UN CAS et seul un verbe *conjugué* donne le cas sujet. Cette formulation présuppose que toutes les langues aient des verbes ainsi que des groupes nominaux, ce qui est assez vrai. Elle suppose aussi que les verbes se conjuguent, et là encore on peut le prétendre, quitte à dire que leur conjugaison n'est pas forcément visible. C'est ainsi qu'on peut parler de cas en français, celui-ci étant invisible, sauf sur les pronoms : « ils », « les » et « leur » sont bien des formes différentes. Une fois ceci admis, on peut effectivement expliquer par ce principe, la grammaticalité et l'agrammaticalité des phrases ci-dessous : lorsque « arriver » est à l'infinitif le mot « été » vient obligatoirement prendre la place de « il » (du reste vide) pour recevoir le cas sujet du verbe conjugué « semble » (on notera que la situation est similaire en anglais)

(1) Il semble que l'été arrive. It seems that summer is arriving.
(2) L'été semble arriver. Summer seems to arrive.
(3) * Il semble que l'été arriver. * It seems that summer to arrive.
(4) * Il semble l'été arriver. * It seems summer to arrive.

– Liage Une expression $\alpha$ en lie une autre $\beta$ si, elle sont coréférentes, et si, dans l'arbre syntaxique, $\alpha$ est le descendant immédiat de l'un des ancêtres de $\beta$. Les principes A, B, et C affirment respectivement qu'un pronom réfléchi doit être lié dans sa clause (A), qu'un pronom non réfléchi ne doit jamais être lié dans sa clause (B), et qu'une expression référentielle (non pronom, identifiable) ne doit jamais être liée.

(1) Le chien de Carlos pense que il ne l'aime pas.
(2) Le chien de Carlos pense que il ne s'aime pas.

Dans le premier cas, on sait que « il$\neq$ l' » sinon le principe (B) serait enfreint, mais toutes les autres égalités et inégalités avec « chien » et « Carlos » à la place de « il » et « l » sont possibles et dans le second cas, on sait d'après le principe (B) que « il $=$ s' » mais toutes les autres égalités et inégalités avec « chien », « Carlos », voire même avec d'autres référents du discours à la place de « il=s » sont possibles.

D'autres principes plus sophistiqués régissent les coréférences possibles et impossibles entre pronoms et groupes nominaux. Ainsi dans l'exemple 1 « il » ne peut être « Chomsky » alors que dans l'exemple 2 « il » peut être « Chomsky » bien que cela ne soit pas obligatoire.

(1) Il a aimé trois livres que Chomsky a écrit.
(2) Combien de livres que Chomsky a écrit a-t-il aimé ?

## 4. Extensions des grammaires formelles classiques

### 4.1. Grammaires d'arbres

Bien évidemment, les arbres sont d'un intérêt tout particulier pour décrire la syntaxe de la phrase, comme en témoignent les arbres que nous avons dessinés à l'école, somme toute peu différents de celui de la figure 4. Leur sommets intermédiaires correspondent aux constituants, aussi appelés syntagmes. Les règles se formulent agréablement en termes de constituants. Par exemple, dans les grammaires transformationnelles, on peut spécifier qu'un groupe nominal interrogatif (un sous arbre) doit se déplacer en tête de phrase. Une grammaire transformationnelle produit d'abord la structure profonde similaire à celle de la phrase affirmative, sorte d'étape intermédiaire incorrecte « *il a aimé combien de livres que Chomsky a écrit* », et l'interrogatif "combien" déclenche alors une transformation qui déplace le constituant « *combien de livres que Chomsky a écrit* » en tête de phrase, produisant la phrase correcte « *combien de livres que Chomsky a écrit a-t-il aimé ?* » – avec en sus une inversion du sujet *il*.

Des arbres sont naturellement produits par les dérivations dans les grammaires non contextuelles. Mais on peut aussi travailler directement sur les arbres. Ainsi Aravind Joshi a-t-il défini des grammaires dites grammaires d'arbres adjoints qui opèrent directement sur les arbres. [30, 1, 31] Une grammaire d'arbres adjoints est définie par la donnée d'arbres élémentaires et d'arbres adjoints. Chaque arbre, adjoint ou élémentaire porte en chaque nœud interne et sur les feuilles des non terminaux (des catégories grammaticales) et l'une au moins des feuilles est un terminal (un mot). Les arbres adjoints satisfont une contrainte supplémentaire : le non terminal de la racine se retrouve sur l'une des feuilles, et pour distinguer cette feuille au cas où ce non terminal figure sur plusieurs feuilles, on inscrit une étoile sur cette feuille que l'on appelle pied de l'arbre adjoint. On trouvera des exemples d'arbres élémentaires et adjoints, une susbstitution et une adjonction en figure 6 ci-après. Les arbres se composent par substitution ou par adjonction. La substitution consiste à mettre à la place d'une feuille d'un arbre déjà construit un arbre élémentaire étiqueté par un non terminal $X$ un arbre de racine $X$. L'adjonction consiste à insérer (adjoindre) sur un nœud $X$ de l'arbre déjà construit un arbre adjoint dont la racine et le pied sont étiquetée $X$ : le nœud de l'arbre principal, disons $X$, est scindé en deux nœuds $X$, celui du haut devient la racine de l'arbre adjoint tandis que celui du bas devient le pied de l'arbre adjoint. On peut aussi insérer des marques sur certains nœuds des arbres de la grammaire qui interdisent l'adjonction.

Les grammaires d'arbres adjoints (TAG) sont un formalisme bien adapté à la syntaxe du langage naturel, car il constituent une classe plus riche que les grammaires non contextuelles (engendrant des langages comme $a^n b^n c^n$) et pourtant analysable en temps polynomial : l'analyse d'une phrase de $n$ mots se fait en temps $O(n^6)$. De plus, d'un point de vue pratique, Aravind Joshi et ces collègues ont constitué la *Penn Tree Bank* qui compte deux cent mille arbres pour décrire l'anglais et Anne Abeillé a développé une grammaire conséquente du français. [2]

## 4.2. Grammaires d'unification

Dans l'exemple de grammaire non contextuelle donné précédemment, rien ne permet d'éviter de dériver *Pierre dorment* ou *Les pommes tombe* ou *La pommes tombe*. Une solution inélégante est d'avoir un non terminal pour les verbes au singulier et un pour les verbes au pluriel ; un non terminal pour les noms masculins singuliers, un pour les noms féminins singuliers, un pour les noms masculins pluriels, un pour les noms féminins pluriel,... On imagine l'allure de la grammaire si on prend en compte toutes les sortes d'accords possibles ! Une solution apparue conjointement avec Prolog est de voir les non terminaux comme des prédicats et d'utiliser des variables qui peuvent prendre les valeurs pour factoriser les règles. Une règle comme $sn[N,G] \rightarrow det[N,G]n[N,G]$, en notant les variables par des majuscules) permet de spécifier que le déterminant et le nom d'un syntagme nominal doivent avoir le même nombre et le même genre qui sont aussi ceux du syntagme nominal tout entier. Une règle comme $sn[sg,f] \rightarrow pomme$ signifie que « pomme » est un nom féminin singulier, $sg$ et $f$ étant des constantes. C'est ainsi qu'on pourra dériver *la pomme* et non *les pomme* car *les* assigne la valeur $pl$ à $N$, tandis que *pomme* lui assigne la valeur singulier. De telles grammaires s'appellent des grammaires de clauses définies (DCG) et ont été particulièrement étudiées par David Warren, Fernando Pereira et Stuart Shieber [42, 43] et on y retrouve les pionnières, les grammaires de métamorphose d'Alain Colmerauer [25]. Si on modifie la grammaire non contextuelle de la figure 4 afin qu'elle gère les phénomènes d'accord, on obtient la DCG donnée en figure 7.

Rapidement, ces techniques ont aussi été utilisées pour traiter simultanément, c'est-à-dire dans la grammaire même, de la structure combinatoire syntaxique mais aussi sémantique et pragmatique. Le principe utilisé, l'unification, est à l'origine même de Prolog. Ce langage de programmation permet, d'unifier non seulement des variables et des constantes comme on l'a vu ci-dessus, mais aussi d'unifier des termes. Unifier deux termes $t_1$ et $t_2$, c'est trouver une substitution $\sigma$, c'est-à-dire une application des variables vers les termes, qui appliquée à $t_1$ et $t_2$ donne le même terme : $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$. L'unification de deux termes $t_1$ et $t_2$ n'est pas toujours possible, mais lorsqu'elle l'est, il existe une substitution unique $\upsilon$, appelé unificateur principal, telle que tout autre unificateur $\tau$ de $t_1$ et $t_2$ s'écrit $\tau = \sigma \circ \upsilon$.

Dans les années quatre-vingts Prolog et l'unification ont donné naissance aux grammaires d'unification. Celle-ci usent du procédé ci-dessus, l'unification, non seulement pour spécifier que certaines valeurs immédiatement accessibles doivent

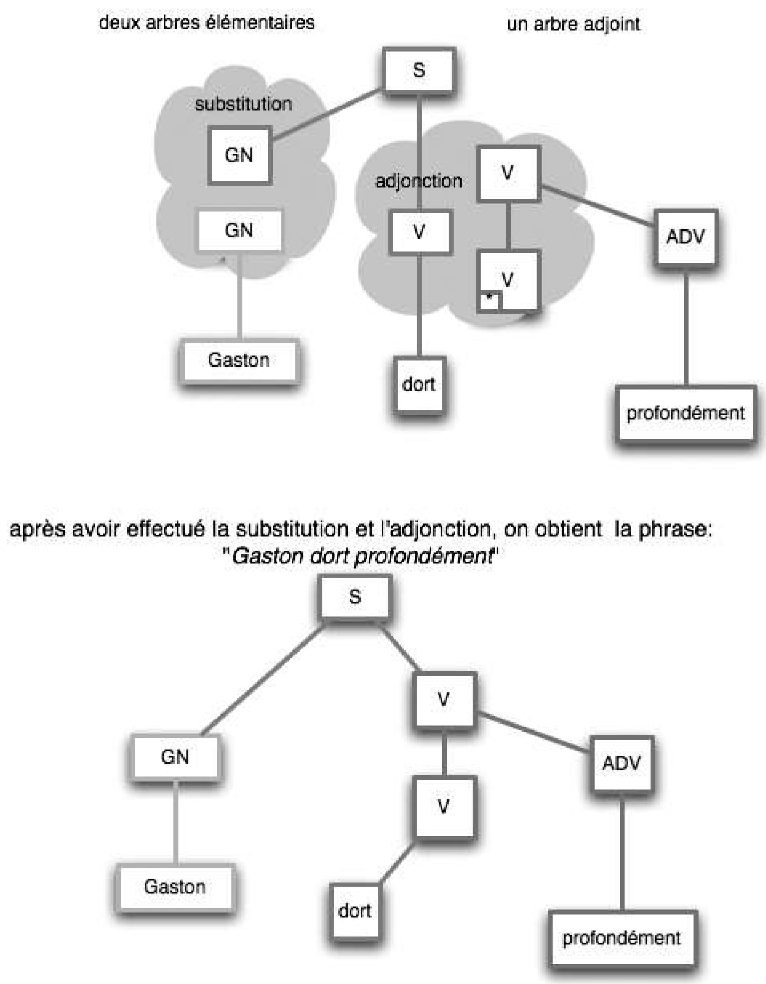



FIG. 6. Une mini grammaire TAG

être partagées, mais aussi que des valeurs enchâssées dans de telles structures doivent être égales. On peut ainsi spécifier que dans une construction comme *Je te permets de venir* le pronom clitique *te* est à la fois l'objet de *permets* et le sujet de *venir*.

## 4.3. Model-theoretic syntax

On pourrait dire que les grammaires d'unification abusent de ce procédé, car en toute généralité, elles décrivent toutes les langages récursivement énumérables : elle caractérisent donc mal les langues humaines parmi tous les langages formels possibles, et du point de vue pratique, la complexité algorithmique de l'analyse est sans borne : indécidable ou exponentielle pour certains fragments. Les grammaires lexicales-fonctionnelles de Joan Bresnan [13] se distinguent dans cette famille de grammaires par leur réalisme cognitif et linguistique ainsi que par l'incorporation de la structure sémantique. Elles engendrent tous les langages contextuels : la correction et l'analyse d'une phrase est donc décidable mais en en temps pas forcément polynomial en fonction du nombre de mots dans la phrase.

Dans l'industrie les DCG sont toujours populaires et les linguistes apprécient, pour décrire la langue, la plasticité des grammaires d'unification et en particulier des populaires *Head-driven Phrase Structure Grammars*, HPSG [47, 1]. Les conditions qu'on peut exprimer par l'unification sont si variées qu'on perd l'intérêt pour les règles, et qu'on débouche alors sur les grammaires de construction fortement liées

$s \rightarrow sn[N, G]\ sv[N]$
$sn[N, G] \rightarrow det[N, G]\ n[N, G] \mid np[N, G] \mid det[N, G]\ n[N, G]\ rel\_s[N] \mid det[N, G]\ n[N, G]\ rel\_o$
$\quad \mid np[N, G]\ rel\_s[N] \mid np[N, G]\ rel\_o$
$rel\_s[N] \rightarrow pro\_s\ sv[N]$
$rel\_o \rightarrow pro\_o\ sn[N, G]\ vt[N]$
$sv[N] \rightarrow vi[N] \mid vt[N]\ sn[N', G']$
$pro\_o \rightarrow que$
$pro\_s \rightarrow qui$
$vt[sg] \rightarrow regarde \mid mange$
$vt[pl] \rightarrow regardent \mid mangent$
$vi[sg] \rightarrow dort \mid tombe$
$vi[pl] \rightarrow dorment \mid tombent$
$det[sg, f] \rightarrow une \mid la$
$det[sg, m] \rightarrow un \mid le$
$det[pl, G] \mid des \mid les$
$n[pl, f] \rightarrow pommes \mid femmes$
$n[sg, f] \rightarrow pomme \mid femme$
$np[m] \rightarrow pierre$
$np[f] \rightarrow marie$
G $\rightarrow$ Pierre que Marie regarde dort.
G $\not\rightarrow$ Pierre que Marie regarde dorment.

FIG. 7. Une grammaire de clauses définies G

à la programmation logique par contraintes et à une vision qui donne son nom au paragraphe suivant.

En liaison avec le paragraphe précédent, et en avance sur le second volet de notre présentation, finissons notre tour d'horizon de la théorie des langages en linguistique computationnelle par une note de théorie des modèles. Depuis les années soixante, on sait décrire un langage régulier comme l'ensemble des modèles finis d'une théorie logique. Plus précisément, on peut dire que les chaînes ou les arbres du langage sont ceux qui satisfont certaines propriétés, généralement exprimées en terme de précédence (pour les suites et les arbres) et de dominance (pour les arbres uniquement). Relativement récemment, des résultats classiques sur la description logique de langages de chaînes ou d'arbres ont trouvé un écho linguistique, à mettre en rapport avec la programmation logique par contraintes.

L'un des pionniers à œuvrer en ce sens a été James Rogers [51]. Il a réussi à donner une description en logique monadique du second ordre — une logique où l'on peut quantifier sur les prédicats à une place, c'est-à-dire les sous ensembles — d'une partie conséquente du modèle proposé par Noam Chomsky dans les années quatre-vingts, *Government and Binding* [22, 23]. Ce travail a été poursuivi par Uwe Mönnich, Jens Michaelis et Frank Morawietz [39, 41] puis étendu et simplifié par nous mêmes dans [35]. En se plaçant dans le cadre du programme de Chomsky [24], on montre que les arbres produits par les grammaires minimalistes d'Edward Stabler [55] comme l'image d'un ensemble d'arbres définissable en logique monadique du second ordre par une relation binaire entre arbres, relation elle-aussi définissable en logique monadique du second ordre. On peut aussi décrire par des contraintes des formalismes issus de HSPG et les grammaires de construction, lignée dans laquelle s'inscrivent les grammaires de propriétés de Philippe Blache. [10]

Cette approche, où les structures ne sont plus vu comme les productions d'un mécanisme génératif mais comme les structures satisfaisant certaines propriétés, ouvre une perspective intéressante. Elle permet d'envisager une caractérisation des langues humaines par les logiques qui peuvent décrire leurs constructions plutôt que par le type de grammaire qui les produit. Comme les langues humaines sont plutôt transverses à la hiérarchie de Chomsky, c'est une piste à explorer. Cette approche permet aussi de traiter plus facilement des énoncés relativement corrects, en posant que certaines contraintes doivent absolument être satisfaites, tandis que d'autres peuvent ne pas l'être donnant alors des énoncés moins corrects, par exemple affectés d'un coefficient de correction moindre. On notera toutefois que du point de vue algorithmique, ces descriptions sont généralement inutilisables que ce soit pour l'analyse automatique ou l'acquisition de la grammaire. Certains formalismes, comme les grammaires non contextuelles ou les grammaires minimalistes admettent les deux types de présentation, dont les avantages et inconvénients comparés sont discutés dans [49].

## 5. Conclusions et perspectives du premier volet

La théorie des langages, issue de préoccupations linguistiques, est devenu un sujet d'intérêt par elle-même. Elle s'applique désormais à bien d'autres domaines comme la bio-informatique ou la théorie des groupes. Pour la linguistique computationnelle, on peut dire qu'on dispose à l'heure actuelle de formalismes morpho-syntaxiques efficaces qui peuvent analyser automatiquement de larges parts des langues humaines : si on dispose de corpus correctement annotés pour construire des grammaires de taille suffisante et si on s'aide de probabilités pour ne retenir que les meilleures analyses, l'analyse morpho-syntaxique à large échelle est un traitement automatique envisageable. [11, 12, 40]

Bien des questions restent ouvertes, telle la question initiale : même si nous connaissons des éléments de réponse, savons nous réellement à quelle classe de langages formels correspondent nos langues humaines ? Du point de vue des phrases conçues comme de simples suites de mots, on sait que ce sont des langages un peu plus riches que ceux qu'engendrent les grammaires non contextuelles, analysables en temps polynomial en fonction du nombre de mots, mais quels sont exactement ces langages ? Surtout, que savons nous des arbres décrivant la structure syntaxique des phrases ? Hormis l'insuffisance des langages réguliers d'arbres, dont les langages de chaînes sont non contextuels, bien peu est connu.

Des deux principes naturels posés par Chomsky, qui contraignent la classe de langages nécessaires, l'analyse rapide (polynomiale), et l'acquisition automatique, le dernier me semble avoir complètement découragé les approches formelles, malgré quelques travaux sur les grammaires catégorielles que nous aborderons dans le second volet. C'est pourtant une question linguistiquement pertinente de modéliser l'acquisition de la syntaxe par le jeune enfant. C'est aussi une question pratique importante de pouvoir acquérir automatiquement une grammaire électronique conséquente d'après des exemples que fournissent les corpus électroniques (Internet, archives des grands quotidiens,...). En effet, les solutions standard basées sur des méthodes statistiques ne donnent pas de bons résultats. Il serait donc temps de se pencher sur les méthodes symboliques proposées par les linguistes pour modéliser l'acquisition de la syntaxe par l'enfant, notamment parce qu'elles possèdent de réels critères de convergence.

Finalement, afin d'ouvrir la voie aux méthodes logiques du second volet, c'est sans doute l'absence de lien vers la sémantique des phrases analysées qui est la plus frustrante dans la théorie des langages classique pour la syntaxe des langues. Pourtant, dans ce que Noam Chomsky appelle syntaxe, y compris dans les deux principes de la grammaire universelle que nous avons donnés, la sémantique joue déjà un rôle : qui fait quoi, quel est le rôle de tel ou tel constituant dans les prédicats de la phrase ? À qui ou à quoi renvoient les pronoms ? Pis encore, quelle est la structure d'un discours ou un dialogue, et quel relation entretient-elle avec les phrases qui le constituent ? D'un point de vue pratique, que faire des milliers d'arbres d'analyse produits par les analyseurs à large couverture ?

C'est à travers le lien entre théorie des langages et logique qu'on peut joindre syntaxe et sémantique. Ce sera le sujet du second volet de notre présentation, avant de conclure par une discussion des mérites et apports des méthodes symboliques, théorie des langages et logique, au traitement automatique des langues, à la linguistique et à l'informatique fondamentale.

## 6. Références

[1] A. Abeillé – *Les nouvelles syntaxes*, Armand Colin, 1993.
[2] ———, *Une grammaire électronique du français*, C.N.R.S. Editions, 2002.
[3] A. Abeillé & P. Blache – « Grammaires et analyseurs syntaxiques », in *Ingénierie des langues* (J.-M. Pierrel, éd.), Hermès Sciences, 2000.

[4] A. Arnauld & C. Lancelot – *Grammaire générale et raisonnée*, Le Petit, 1660, Appelée *Grammaire de Port-Royal*. Rééditée en 1997 par les Éditions Allia.

[5] A. Arnauld & P. Nicole – *La logique ou l'art de penser : contenant outre les règles communes, plusieurs observations nouvelles, propres à former le jugement.*, G. Desprez, 1683, Réédité par Vrin en 2002.

[6] Y. Bar-Hillel – « The present status of automatic translation of languages. », *Advances in Computers* **1** (1960), p. 91–163.

[7] M. Baratin & F. Desbordes – *L'analyse linguistique dans l'antiquité classique – I les théories*, Klincksieck, 1981.

[8] L. E. Baum, T. Petrie, G. Soules & N. Weiss – « A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of markov chains. », *Ann. Math. Stat.* **41** (1970), p. 164–171.

[9] D. Bechet, R. Bonato, A. Dikovsky, A. Foret, Y. Le Nir, E. Moreau, C. Retoré & I. Tellier – « Modèles algorithmiques de l'acquisition de la syntaxe : concepts et méthodes, résultats et problèmes », *Recherches Linguistiques de Vincennes* (2007).

[10] P. Blache – *Les grammaires de propriétés : des contraintes pour le traitement automatique des langues naturelles*, Hermès, 2001.

[11] P. Boullier, L. Clément & B. Sagot – « Chaîne de traitement syntaxique », in *TALN*, 2005, p. 103–112.

[12] ______, « Un analyseur lfg efficace pour le français : Sxlfg », in *TALN*, 2005, p. 403–408.

[13] J. Bresnan (éd.) – *The mental representation of grammatical relations*, MIT Press, Cambridge, MA, 1982.

[14] J. Bresnan, R. M. Kaplan, S. Peters & A. Zaenen – « Cross-serial dependencies in Dutch », *Linguistic Inquiry* **13** (1982), no. 4, p. 613–635.

[15] L. Bréhelin & O. Gascuel – « Modèles de markov cachés et apprentissage de séquences », in *Le Temps, l'Espace, l'Evolutif, dans les sciences du traitement de l'information* (H. Prade, R. Jeansoulin & C. Garbay, éds.), Cepadues, Toulouse, 2000.

[16] J. Busquets – *Logique et langage : apports de la philosophie médiévale*, Presses Universitaires de Bordeaux, 2006.

[17] C. Casadio – « Semantic categories and the development of categorial grammars », in *Categorial Grammars and Natural Language Structures* (R. Oehrle, E. Bach & D. Wheeler, éds.), Reidel, Dordrecht, 1988, p. 95–124.

[18] N. Chomsky & M.-P. Schützenberger – « The algebraic theory of context-free languages », in *Computer Programming and Formal Systems* (P. Braffort & D. Hirschberg, éds.), North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1963, p. 118–161.

[19] N. Chomsky – « The logical structure of linguistic theory », Revised 1956 version published in part by Plenum Press, 1975 ; University of Chicago Press, 1985, 1955.

[20] ______, « Three models for the description of language », *IRE Transactions on Information Theory* **IT2** (1956), p. 113–124.

[21] ______, « On certain formal properties of grammars », *Information and Control* **2** (1959), no. 2, p. 137–167.

[22] ______, *Some concepts and consequences of the theory of government and binding*, MIT Press, Cambridge, MA, 1982.

[23] ______, *La nouvelle syntaxe*, Seuil, Paris, 1987, Traduction de [22].

[24] ______, *The minimalist program*, MIT Press, Cambridge, MA, 1995.

[25] A. Colmerauer – « les grammaires de métamorphose », Tech. report, université d'Aix-Marseille, 1975.

[26] L. Gleitman & M. Liberman (éds.) – *An invitation to cognitive sciences, vol. 1 : Language*, MIT Press, 1995.

[27] S. A. Greibach – « A new normal-form theorem for context-free phrase structure grammars », *Journal of the ACM* **12** (1965), no. 1, p. 42–52.

[28] M. Grevisse – *Le bon usage*, 13$^{e}$ édition par André Goosse éd., Duculot, Paris – Louvain-la-Neuve, 1993.

[29] M. A. Harrison – *Introduction to formal language theory*, Addison Wesley, 1978.

[30] A. Joshi, L. Levy & M. Takahashi – « Tree adjunct grammar », *Journal of Computer and System Sciences* **10** (1975), p. 136–163.

[31] A. Joshi & Y. Schabes – « Tree adjoining grammars », in *Handbook of Formal Languages* [52].

[32] D. Jurafsky & J. H. Martin – *Speech and langage processing : an introduction to natural language processing, computational linguistics and speech recognition*, Prentice Hall, 2000.

[33] M. Kanazawa – *Learnable classes of categorial grammars*, Studies in Logic, Language and Information, FoLLI & CSLI, 1998, distributed by Cambridge University Press.

[34] W. Kneale & M. Kneale – *The development of logic*, 3rd éd., Oxford University Press, 1986.

[35] G. Kobele, C. Retoré & S. Salvati – « An automata-theoretic approach to minimalism », in *Model Theoretic Syntax at 10 -ESSLLI 2007 Workshop* (F. of Logic Language & Information, éds.), 2007.

[36] S.-Y. Kuroda – « Classes of languages and linear-bounded automata », *Information and Control* **7** (1964), no. 2, p. 207–223.

[37] J. Léon & M. Cori – « La constitution du TAL — Étude historique des dénominations et des concepts », *Traitement Automatique des Langues* **43** (2002), no. 3, p. 21–55.

[38] C. Manning & H. Schütze – *Foundations of statistical natural language processing*, MIT Press, 1999.

[39] U. Mönnich, J. Michaelis & F. Morawietz – « On minimalist attribute grammars and macro tree transducers », in *Linguistic Form and its Computation* (C. Rohrer, A. Rossdeutscher & H. Kamp, éds.), CSLI Publications, 2004.

[40] R. Moot – « Automated extraction of type-logical supertags from the spoken dutch corpus », in *The Complexity of Lexical Descriptions and its Relevance to Natural Language Processing : A Supertagging Approach* (S. Bangalore & A. Joshi, éds.), MIT Press, 2007.

[41] F. Morawietz – *Two-step approaches ot natural language formalisms*, Studies in Generative Grammar, Mouton de Gruyter, Berlin · New York, 2003.

[42] F. C. N. Pereira & S. M. Shieber – *Prolog and natural-language analysis*, CSLI Lecture Notes, no. 10, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1987.

[43] F. C. N. Pereira & D. H. D. Warren – « Definite clause grammars for language analysis », in *Readings in Natural Language Processing* (K. S.-J. B. J. Grosz & B. L. Webber, éds.), Morgan Kaufmann, Los Altos, 1980, p. 101–124.

[44] S. Pinker – *The language instinct*, Penguin Science, 1994.

[45] S. Pinker – « Language acquisition », in *An invitation to cognitive sciences – Volume 1 : Language* [26], p. 135–182.

[46] ______, « Why the child holded the baby rabbits », in *An invitation to cognitive sciences – Volume 1 : Language* [26], p. 107–133.

[47] C. Pollard & I. A. Sag – « Head-driven phrase structure grammar », Tech. Report LI221, Linguistic Institute, Stanford, CA, USA, 1987.

[48] J.-Y. Pollock – *Langage et cognition : le programme minimaliste de la grammaire générative*, Presses Universitaires de France, Paris, 1997.

[49] G. K. Pullum & B. C. Scholz – « On the distinction bewteen model-theoretic and generative-enumerative syntax », in *Logical Aspects of Computational Linguistics, LACL'2001* (P. de Groote, G. Morrill & C. Retoré, éds.), LNCS/LNAI, no. 2099, Springer-Verlag, 2001, p. 17–43.

[50] E. Roche & Y. Schabes – *Finite-state language processing*, MIT Press, 1997.

[51] J. Rogers – *A descriptive approach to language-theoretic complexity*, Studies in Logic, Language and Information, CSLI, 1998.

[52] G. Rozenberg & A. Salomaa (éds.) – *Handbook of formal languages*, Springer Verlag, Berlin, 1997.

[53] F. de Saussure – *Cours de linguisitique générale*, seconde éd., Editions Payot, 1981.

[54] S. M. Shieber – « Evidence against the context-freeness of natural language », *Linguistics and Philosophy* **8** (1985), p. 333–343.

[55] E. Stabler – « Derivational minimalism », in *Logical Aspects of Computational Linguistics, LACL'96* (C. Retoré, éd.), LNCS/LNAI, vol. 1328, Springer-Verlag, 1997, p. 68–95.

[56] E. P. Stabler – *The logical approach to syntax : foundations, specifications, and implementations of theories of government and binding*, MIT Press, 1992.

# PRIX ET DISTINCTIONS

## Prix Fermat de recherches en mathématiques 2007

Gérard Laumon

*Le Prix Fermat de Recherches en Mathématiques 2007 a été attribué à Chandrashekhar Khare « pour sa démonstration avec Jean-Pierre Wintenberger de la conjecture de modularité de Serre en théorie des nombres ». Les précédents lauréats du Prix Fermat sont : A. Bahri, K. A. Ribet (1989), J.-L. Colliot-Thelene (1991), J.-M. Coron (1993), A.J. Wiles (1995), M. Talagrand (1997), F. Bethuel, F. Helein (1999), R.L. Taylor, W. Werner (2001), L. Ambrosio (2003), P. Colmez, J.-F. Le Gall (2005). Plus d'informations sur le Prix Fermat sont disponibles sur le site : http://www.math.univ-toulouse.fr/Fermat/*

Chandrashekar Khare est né en 1967 à Mumbai (Inde). Il a obtenu son PhD en 1995 à Caltech (USA) et il est actuellement professeur à l'université de l'Utah (USA).

En collaboration avec Jean-Pierre Wintenberger, Khare a démontré la conjecture de modularité de Serre.

Deligne, Ihara et Shimura ont associé à une forme modulaire $f$ primitive de poids $k \geqslant 2$ et de conducteur $N$, c'est-à-dire nouvelle pour $\Gamma_0(N) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, une représentation $p$-adique $\rho_{p,f} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ pour tout nombre premier $p$, de telle sorte que les fonctions $L$ de $f$ et de $\rho_{f,p}$ coïncident. On peut réduire modulo $p$ cette représentation et obtenir ainsi une représentation $\overline{\rho}_{p,f}$ de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur un corps fini de caractéristique $p$.

Inversement, si $\overline{\rho}$ est une représentation continue, absolument irréductible et de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur un corps fini de caractéristique $p$, dont le déterminant est impair sur la conjugaison complexe, Serre a conjecturé que $\overline{\rho}$ provient d'une forme modulaire $f$ (au sens où $\overline{\rho} = \overline{\rho}_{p,f}$), $f$ étant de poids $k$ et de conducteur $N$ pour des entiers $k \geqslant 2$ et $N \geqslant 1$ naturellement associés à $\overline{\rho}$.

La conjecture de modularité de Serre est proche de la conjecture de modularité des courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$, mise au point par Shimura, Tanniyama et Weil, qui a été prouvée par Wiles avec l'aide de Taylor (et qui implique le théorème de Fermat). Elle est proche aussi de la conjecture de Fontaine-Mazur sur la nature motivique des représentations $p$-adiques de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ qui sont non ramifiées presque partout et potentiellement semi-stables en $p$.

Les travaux de Khare et Wintenberger se situent clairement dans la lignée de ces travaux de Wiles et Taylor, sur lesquels d'ailleurs ils s'appuient. Khare et Wintenberger utilisent aussi des résultats importants de Kisin. Mais leur démonstration de la conjecture de Serre comporte de nombreuses idées nouvelles et est un véritable tour de force.


Séminaires & Congrès 15

**Partial Differential equations and Applications**

X.-P. Wang, C. Zhong, eds

Ce volume comprend des versions élargies des notes de cours de l'école du CIMPA à Lanzhou, juillet 2004. Ces textes donnent un survol, y compris les progrès les plus récents, sur certains thèmes en analyse des équations aux dérivées partielles d'origine physique, mécanique ou géométrique tels que : l'équation de Korteweg-de Vries, les applications harmoniques, la forme normale de Birkhoff et le théorème de KAM pour des systèmes dynamiques de dimension infinie, le tourbillon de l'équation d'Euler, l'analyse semi-classique des équations de Schrödinger et de Dirac, et des situations limites des équations elliptiques semi-linéaires. La plupart des textes pourraient être lus par des étudiants ou des chercheurs débutants qui s'intéressent à ces sujets.

*This volume contains expanded versions of lecture notes of CIMPA's school held in Lanzhou, July 2004. These texts offer a detailed survey, including the most recent advances, of some topics in analysis of partial differential equations arising from physics, mechanics and geometry such as: Korteweg-de Vries equation, harmonic maps, Birkhoff normal form and KAM theorem for infinite dimensional dynamical systems, vorticity of Euler equation, semi-classical analysis of Schrödinger and Dirac equations, and limiting situations of semilinear elliptic equations. They are mainly aimed at students and young researchers interested in these subjects.*

Prix public* : 68 € - prix membre* : 48 €

* frais de port non compris

**Société Mathématique de France**

SMF

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

**http://smf.emath.fr**

# INFORMATIONS

## Composition du CNU

### Liste des membres nommés 2007

**Section 25**

Collège 1 : Pierre Arnoux, Thierry-Pierre Berger, Christian Lemerdy, Hervé Pajot, Angela Pasquale, Bertrand Rémy, Hans-Henrick Rugh, Marcus Van Leeuwen.

Collège 2 : Nalini Anantharaman, François Apéry, Abdelbaki Boutabaa, David Dos Santos Ferreira, Eddy Godelle, Sophie Grivaux, Frédéric Hérau, Nicolas Mainetti.

**Section 26**

Collège 1 : Anne Estrade, Sylvie Gavage, Marie-Jeanne Glorian, Thierry Goudon, Charles Horvath, Michel Nguiffo Boyom, Bernard Saramito, Eric Sonnendrucker.

Collège 2 : Marc Dambrine, Agnès Desolneux, Cécile Durot, Stéphane Genieys, Philippe Jaming, Jean-Sébastien Le Brizaut, Emmanuel Maitre, Charles Torossian.

### Liste des candidats élus avec désignation des listes

**Section 25**

Collège 1 :

*Qualité de la recherche et de l'enseignement (liste soutenue QSF)* : Claude Viterbo, Ariane Mézard, Jean-Marc Schlenker, Benjamin Enriquez, Nicolas Burq, Alexandru Dimca, Marie-Claude Arnaud ép. Delabrière.

*SNESUP-FSU* : Hervé Queffelec, Michèle Audin, Marc Peigné, Frédéric Klopp, Pierre Duclos, Abbas Movahhedi.

*SGEN-CFDT* : Lucy Moser ép. Moser-Jaulin, Jean-Marie Lion.

*Défense des mathématiciens* : Alain Escassut.

Collège 2 :

*SNESUP-FSU* : Nicolas Pouyanne, Etienne Matheron, Stéphane Ballet, Véronique Lizan Esquerretou, Frédéric Menous, Danielle Cozette ép. Gondard, Vincent Blanlœil, Abderrahmane Ouaqqa.

*SGEN-CFDT* : Alessandra Frabetti, Marc Chastan, Rosane Ushirobira, Serge Parmentier.

*Qualité de la recherche et de l'enseignement (liste soutenue QSF)* : Pierre-Vincent Koseleff, Elisabeth Strouse, Lorenzo Brandolese, Anne Queguiner Mathieu.

### Section 26

Collège 1 :
*Merle* : Frank Merle, Fabrice Gamboa, Bijan Mohammadi, Alain Rouault, Fabrice Bethuel.
*SNESUP-FSU* : Charles Suquet, François Alouges, François Coquet, Marie Clerc ép. Bergounioux.
*SGEN-CFDT* : Fatiha Boussouira ép. Alabau, Arnaud Debussche, Rachid Touzani.
*Pour les Applications des Mathématiques : Modélisation Aléatoire & Numérique et Statistique (AMMANS* : Paul Deheuvels, Gilbert Saporta.
*Présentée par Sup'Recherche - UNSA* : Michel Vollé.
*Louis Bachelier* : Youri Kabanov.
Collège 2 :
*SNESUP-FSU* : Alain Huard, Jean-François Petiot, Jean-Baptiste Bardet, Luc Mieussens, Khalid Addi, Michèle Artaud, Cécile Hardouin ép. Ceccantini, Mustapha Rachdi.
*SGEN-CFDT* : Marguerite Zani, Mathieu Colin, Catherine Rainer ép. Laube, Jérôme Le Rousseau.
*Présentée par Sup'Recherche - UNSA* : Olivier Dordan, Didier Aussel.
*Equité et Transparence* : Elias Ould Said, Ahmed Salam.

## Composition des bureaux

### Section 25

Président : Marc Peigné
Vice-président A : Claude Viterbo
Vice-président B : Nicolas Pouyanne
Assesseur : Alessandra Frabetti, épouse Mathieu.

### Section 26

Président : Fabrice Béthuel
Vice-président A : Charles Suquet
Vice-président B : Alain Huard
Assesseur : Didier Aussel.

# Bilan du Comité Scientifique Disciplinaire Mathématiques et Interactions (CSD5) de l'ANR

Pierre Collet, François James, Jean-Claude Saut

## Bilan

Les nouveautés par rapport à 2006[1] sont de deux ordres. Tout d'abord un renouvellement assez important du comité. Ensuite la possibilité d'établir une liste de projets bidisciplinaires qui, examinés par deux CSD, sont financés, s'ils sont sélectionnés, sur une enveloppe budgétaire spécifique. Le financement total pour les projets relevant prioritairement du CSD5 a été de 4308 k€, pour les deux programmes. La composition du CSD5 en 2007 était la suivante : Gilles Aubert, Naoufel Ben Abdallah, Christophe Besse, Christian Blanchet, Patrick Cattiaux, Antoine Chambert-Loir, Pierre Collet (vice-président), Fabienne Comte, Patrick Dehornoy, Jean Esterle, Christiane Frougny, Stéphane Gaubert, Pierre Pansu, Marc Quincampoix, Jean-Claude Saut (président), Rémi Sentis.

François James est Coordinateur Scientifique depuis 2005.

### Programme Jeunes Chercheurs

Nous avions 35 dossiers dont 21 concernaient le seul CSD5. Huit projets ont été financés (soit 28% de projets proposés en CSD5 uniquement ou ayant la CSD5 comme section principale).

Pour les projets financés, le financement attribué varie entre 62 k€ et 135 k€. Les budgets demandés variaient entre 62 et 185 k€ pour les projets acceptés (entre 39 k€ et 270 k€ globalement). Ils ont été selon les cas acceptés en l'état, ou diminués d'environ 30%, ce dernier cas correspondant à un nombre trop élevé de post-docs.

Le budget moyen attribué pour un projet financé est donc de 97 k€ environ (72 k€ en 2006), l'enveloppe globale étant de 775 k€.

Nous avons noté un excellent dossier bidisciplinaire, qui a été retenu d'ailleurs sur l'enveloppe spécifique.

### Programme Blanc

Nous avions 78 dossiers dont plus de la moitié concernait également un autre Comité Scientifique, à des degrés divers, ce qui montre à l'évidence un net intérêt pour l'ouverture vers d'autres disciplines, et cela pour des projets concernant aussi bien les mathématiques « pures » que les mathématiques « appliquées ».

Trois projets ont été financés comme projets bidisciplinaires, avec un budget moyen de 202 k€.

La dotation attribuée aux 16 autres projets retenus varie entre 92 et 310 k€, avec une moyenne de 208 k€ (195 k€ en 2006), soit une enveloppe globale de 3341 k€.

[1] P. Flajolet, F. James. Les Maths à l'ANR en 2006. SMF *Gazette*, **112**, 81-84 (avril 2007), et *MATAPLI*, **83**, 45-48 (juin 2007).

Finalement, 32% des projets relevant de la CSD5 (mono ou principal) ont été financés.

La répartition du budget a été délicate. En cas de diminution du budget, nous avons eu le souci de ne pas dénaturer le projet. Pour les projets retenus, les budgets demandés allaient de 92 k€ à 799 k€.

Comme pour le programme Jeunes Chercheurs, certains budgets ont été maintenus. D'autres ont été drastiquement réduits (en respectant la règle précitée). Ce cas correspondait à des postes de post-docs trop nombreux (par exemple un ou plusieurs post-docs par équipe concernée), alors que le vivier est relativement réduit, et/ou à un budget « missions/conférences » surdimensionné.

A contrario, nous avons rejeté un projet scientifiquement excellent (au sens de la qualité des participants et des thématiques proposées), mais demandant un budget pharaonique. En effet, ce projet (qui ressemblait plus à un projet de GDR avec 64 participants...) aurait été complètement dénaturé par une diminution drastique de son budget.

## Commentaires

Nous avons essayé d'équilibrer les thématiques et tenu compte d'une sensibilité décentralisatrice mais sans qu'elle soit dommageable à la qualité scientifique.

Il est recommandé que le porteur principal soit fortement impliqué tout en respectant bien sûr la règle d'une implication totale inférieure ou égale à 100% dans tous les projets auxquels il participe. L'émiettement de nombreux participants à très faible pourcentage n'est pas non plus un facteur positif pour un projet, sauf cas particulier d'une expertise très pointue à justifier.

La cohérence scientifique du dossier doit bien être mise en valeur. Dans les demandes du programme « Jeunes Chercheurs » l'aspect structurant du projet doit aussi apparaître clairement.

Pour le programme « Jeunes Chercheurs », le critère d'âge n'est pas absolu. Le porteur typique doit être un jeune professeur ou un maître de conférences/chargé de recherches proche de l'habilitation.

Les projets doivent rester de taille raisonnable (voir le budget moyen attribué). L'ANR ne peut pas assurer un financement de type GDR. Il est bien sûr possible de demander des budgets plus importants mais ces demandes doivent être justifiées plus en détails. Pour les demandes de post-docs il faut en particulier s'assurer qu'il existe un vivier suffisant dans le domaine et éventuellement préciser si des candidats sont en vue (contactés). Les budgets de missions et d'organisation de conférences doivent aussi être raisonnables et correspondre à des scénarios réalisables.

## Conclusion

Le comité a été impressionné par la qualité scientifique des dossiers présentés. Les choix ont été difficiles ! Il a regretté par contre que certains dossiers, au demeurant excellents, présentent des budgets surdimensionnés.

À l'évidence un message est à faire passer dans la communauté. Le comité a regretté également une baisse du nombre des dossiers Jeunes Chercheurs, alors que les candidats potentiels sont nombreux. Une certaine auto-censure – qui n'a pas lieu d'être – a sans doute joué.

# CARNET

## Jean-Luc Verley

**(22 mars 1939 – 25 octobre 2007)**

André Deledicq

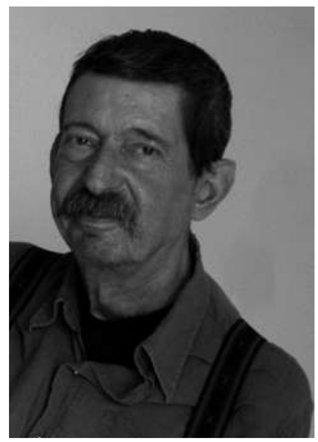


Photo Julien Verley

Tous ceux qui ont approché Jean-Luc Verley savent avec quelle rapidité il reconnaissait le sel des choses et comment il pouvait le faire goûter aux autres avec délectation. Tous ceux qui ont écouté Jean-Luc Verley se souviennent à la fois de l'impression de profondeur qu'il savait transmettre dans son discours et de l'apparente simplicité qu'il savait donner à ces propos. Tous ceux qui ont appris ce qu'ils savent avec Jean-Luc Verley ne peuvent pas oublier la rigueur de son analyse, jointe à la finesse goûteuse de son propos, et la connivence qu'il arrivait à y introduire.

Dès ses débuts universitaires, à sa sortie de l'École Normale, il démontre qu'il sait comprendre en profondeur des sujets difficiles et qu'il a le génie d'en expliquer clairement et simplement les ressorts. Ses premiers exposés, lors des séminaires « Choquet » puis « Lelong », sont des modèles de synthèse et de clarté qui le signalent à tous comme un exceptionnel montreur de chemin. Pour le magnifique cours de Calcul Différentiel[1] d'Henri Cartan, dont il est l'assistant préféré, il trouve et rédige les exercices utiles et nécessaires ; et, en 1967, sa Théorie élémentaire de l'intégration est éditée par « les Cours de Sorbonne » pour le bonheur de générations d'étudiants qui vont y apprendre et s'y exercer avec, à la fois, efficacité et modernisme. Et c'est bien sa compréhension des mathématiques en cours de pensée et de fabrication, comme son efficacité pédagogique pour les rendre intelligibles, qui le caractériseront pendant toute sa carrière.

Dans le monde mathématique, Jean-Luc Verley élève deux monuments « en l'honneur de l'esprit humain » qui resteront visibles et utiles bien longtemps encore :

– un monument scientifique d'abord, avec les articles mathématiques de l'Encyclopædia Universalis pour lesquels il est directeur éditorial. Il accompagne le succès de ces éditions jusque dans les années 90 en les coordonnant depuis la première édition de 1968. Bien évidemment, il écrit lui-même des dizaines d'articles, mais il réussit surtout à y faire collaborer les plus grands mathématiciens français des cinquante dernières années ; grâce à l'amitié qu'il entretient avec eux et à force

[1] Hermann éditeur

de persévérance dans le suivi de leur écriture, il parvient à rendre accessible au plus grand public les mathématiques d'aujourd'hui tout en les reliant à celles qui restent éternelles. Performance assez comparable à celle de d'Alembert deux siècles auparavant avec la Grande Encyclopédie, il peut ainsi réunir l'équivalent de plusieurs milliers de pages, constituant peut-être le dernier cours de mathématiques couvrant la quasi-totalité des connaissances d'un temps.

– un monument humain ensuite, fait d'échanges et de liaisons entre les femmes et les hommes qui l'ont suivi ; il comprend, parmi les premiers dans les années 70, que l'essentiel des mathématiques réside finalement dans leur histoire et dans la reconstitution par chacun de la genèse de leurs découvertes. Auteur d'articles appréciés (dont son analyse bien connue de la correspondance entre Leibniz et Bernoulli, concernant les logarithmes des nombres complexes), il participe très activement au développement du groupe « Histoire des maths » de l'Association des Professeurs de Mathématiques (APMEP) et de la « commission interIREM d'épistémologie ». Dans le même temps, il lance les premiers cours d'Histoire des maths à l'université Paris VII, pour les étudiants certes mais aussi pour les professeurs de mathématiques du secondaire, qui savent apprécier cette ouverture. Avec Jean-Louis Ovaert, il est responsable de l'étonnante collection Leonhard Epistemon, que Jean-Jacques Nathan prend le pari d'éditer dans les années 80 : jamais les étudiants de mathématiques n'auront eu dans les mains une collection de cours, d'exercices et de textes commentés d'une telle richesse et d'une telle profondeur épistémologique. Et il est alors aussi à l'origine du groupe de recherche « M : A.T.H.[2] » et de la revue *Mnémosyne*, édité par l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Paris VII.

Ses conférences et interventions sont toujours attendues par un public nombreux, régulièrement conquis par la justesse de son analyse et la clarté de son exposition. Car il sait montrer le cœur palpitant, profond et secret des mathématiques, et le faire revivre devant nous, avec cet étonnant charisme qui rayonne avec éclat et évidence dès qu'on a le bonheur de l'écouter avec attention ; il est vraiment de ces enseignants merveilleux qui savent nous persuader de notre propre intelligence parce qu'ils nous donnent exactement les outils et les ficelles dont nous avons besoin.

Pour tous ceux qui l'ont connu, Jean-Luc Verley aura été toute sa vie un vrai professionnel de l'intelligence dans les domaines les plus divers : dès qu'un sujet l'intéresse, son insatiable et exigeante curiosité en fait un connaisseur averti. Ainsi des objets qu'il ramène d'Egypte, de la collection de papillons qui concurrence un temps celle de Laurent Schwartz, mais aussi des timbres, des tableaux naïfs depuis le XIX$^{e}$ ou des articles et des livres sur les probabilités, qu'il vend chaque fois dans de mémorables enchères dont se souviennent les commissaires priseurs parisiens. En fait, chaque fois qu'il entreprend une collection, comme pour les concepts mathématiques, les exercices de calcul différentiel ou intégral, ou les gravures de mathématiciens, il arrive à être presque toujours l'un des meilleurs et des plus connus parmi les spécialistes français. Ainsi de l'histoire des mathématiques et des livres mathématiques anciens dont il est, à la fois, acharné collectionneur et expert auprès des grands libraires parisiens et londoniens, pour lesquels il rédige de précieux catalogues. La plupart des livres importants lui sont passés dans les

[2] Mathématiques : Approche par les Textes Historiques

mains. Toujours attentif aux autres et passionné de l'échange humaniste, il aime les montrer et y pointer les passages qui témoignent d'une avancée significative de la pensée et des concepts qui la structure.

Ainsi amoureux des objets et des idées, Jean-Luc Verley savait dénicher les plus beaux et les plus curieux en donnant, à ceux-ci l'âme et la profondeur des secondes et à celles-là l'évidence et l'efficacité des premiers. Il nous faudra maintenant parler de lui au passé et nous en serons, à la fois, plus tristes et moins intelligents.


Panoramas et Synthèses 23

## On Cramér's Theory In Infinite Dimensions

Raphaël Cerf

Ce texte est un exposé autonome de la théorie de Cramér en dimension infinie. Le point de vue est légèrement différent des textes classiques d'Azencott, de Bahadur et Zabell, de Dembo et Zeitouni, et de Deuschel et Stroock. Nous avons essayé de comprendre la pertinence des hypothèses topologiques nécessaires pour faire fonctionner le cœur de la théorie. Nous avons également exploité l'analogie entre les preuves de grandes déviations en mécanique statistique et pour des variables aléatoires i.i.d.

*This text is a self-contained account of Cramér's theory in infinite dimensions. Our point of view is slightly different from the classical texts of Azencott, Bahadur and Zabell, Dembo and Zeitouni, Deuschel and Stroock. We have been trying to understand the relevance of the topological hypotheses necessary to carry out the core of the theory. We have also drawn some inspiration from the analogy between the large deviation proofs in statistical mechanics and for i.i.d. random variables.*

Prix public* : 37 € - prix membre* : 26 €
* frais de port non compris

**Société Mathématique de France**

SMF

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

**http://smf.emath.fr**

# TRIBUNE LIBRE

## Les enjeux de la bibliométrie pour les mathématiques

Jean-Marc Schlenker[1]

### Une brève présentation du suspect

La bibliométrie est l'étude quantitative de la littérature scientifique. Son objectif principal est de construire des indicateurs de la qualité de la recherche par l'analyse des articles publiés et des citations qui s'y rapportent. C'est un domaine en plein développement, qui a maintenant ses équipes de recherche et ses revues à comité de lecture.

Beaucoup de scientifiques peuvent douter qu'il soit possible d'évaluer la qualité d'une recherche simplement en étudiant dans quelles revues ses résultats sont publiés ou quels articles s'y réfèrent. Le succès de la bibliométrie s'explique par sa remarquable adéquation à de nouvelles demandes : elle peut nourrir la prétention de certains décideurs politiques (ou de scientifiques hors de leur domaine de compétence) d'être capables d'évaluer précisément la qualité de recherches sans passer par le truchement d'avis d'experts scientifiques compétents. Dans une société où la culture de l'évaluation s'impose, la bibliométrie donne l'illusion qu'on peut mesurer la productivité d'un laboratoire de recherche comme celle d'une usine de voitures ou de n'importe quelle organisation.

Nombreux parmi nous ont déjà vu des pratiques bibliométriques primaires apparaître aussi localement, au niveau de différents conseils ou commissions des universités. Les dangers de ces utilisations sont particulièrement grands, à cause de l'hétérogénéité considérable qui existe entre disciplines : comparer un dossier de biologiste avec un dossier de mathématicien sur la base d'indices bibliométriques généraux n'a évidemment pas beaucoup de sens, et devrait en tous cas s'accompagner de précautions méthodologiques qui ne sont presque jamais prises. Les principales organisations mathématiques internationales (UMI[2], ICIAM[3], IMS[4]) ont d'ailleurs mis en place récemment un comité pour réfléchir à l'utilisation des données bibliométriques dans les sciences mathématiques[5].

L'importance croissante de la bibliométrie dans l'évaluation scientifique est très probablement irréversible. Les questions les plus intéressantes pour les scientifiques

---

1 Institut de Mathématiques, université Toulouse III.

2 Union Mathématique internationale.

3 International Council for Industrial and Applied Mathematics.

4 Institute of Mathematical Statistics.

5 Voir `http://www.ams.org/news/home-news.html\#impact-07`

– et en particulier pour la communauté mathématique – sont essentiellement de deux ordres :

(1) comment accompagner le développement des outils bibliométriques de manière que les indicateurs utilisés permettent une appréciation utile de l'activité mathématique, et comment délimiter un domaine d'application acceptable, par opposition à des utilisations abusives ;

(2) comment utiliser de manière positive des données bibliométriques pour mettre en avant (au niveau local et national) la qualité scientifique – remarquable – de beaucoup de départements de mathématiques en France.

On se concentrera particulièrement dans ce texte sur le second point. Dans le contexte politique actuel, on voit émerger (ou on devrait voir émerger) une pression de plus en plus grande, dans les universités, pour développer une recherche ayant une véritable visibilité internationale. On voudrait convaincre le lecteur que la définition puis l'utilisation d'outils bibliométriques adaptés peut être un outil irremplaçable pour faire reconnaître que, dans beaucoup d'universités, le département de mathématiques constitue l'un des principaux atouts, voire le principal atout, dans cette compétition.

Les évolutions actuelles pourraient ainsi *in fine* se révéler *bénéfiques* au développement des mathématiques en France, si la nécessité pour les universités de développer une recherche de haut niveau les encourageait à investir des moyens dans notre discipline.

## Les limites de la bibliométrie

L'évaluation bibliométrique pose certains problèmes généraux (on verra plus bas quelques problèmes spécifiques aux mathématiques). Notons déjà qu'il existe deux manières d'utiliser la bibliométrie pour évaluer les recherches : soit en considérant les revues dans lesquelles les travaux sont publiés (et en cherchant à cerner la qualité de ces revues) soit en comptant le nombre de citations recueillies par les articles d'un chercheur ou d'une équipe. Dans le premier cas, la qualité des revues est elle-même en général évaluée par un « indice d'impact », sur lequel nous reviendrons plus loin.

Le premier problème est que la bibliométrie n'est pas bien adaptée aux évaluations individuelles, qui sont justement l'un des domaines où on la voit de plus en plus appliquée. Il y a pour cela de multiples raisons. Par exemple, un chercheur peut faire un travail original et important sans pour autant faire l'effort de communication nécessaire pour arriver à faire publier ses articles dans de très bons journaux, ou il peut même dans certains cas ne pas faire l'effort de soumettre ses articles dans les meilleurs journaux où il pourrait les publier. À l'opposé, des recherches d'intérêt médiocre peuvent parfois être publiées dans d'excellents journaux, soit par l'effet d'une erreur éditoriale, soit à la suite d'effets de mode, soit encore grâce à des efforts efficaces mais non fondés sur la valeur scientifique des auteurs. Le phénomène peut être encore amplifié lorsqu'on s'intéresse seulement au nombre de citations des articles d'un auteur, puisque l'importance de son réseau social peut être plus important que la profondeur de ses travaux.

Les évaluations bibliométriques devraient donc être réservées à des groupes de taille suffisante pour que les différences d'attitudes individuelles soient gommées par la loi des grands nombres. On peut imaginer qu'une taille d'une dizaine de chercheurs (hors doctorants et post-docs) est un minimum, au-dessous duquel des données bibliométriques n'ont pas grand sens.

Un second problème, profond, est que les données bibliométriques évaluent mal les recherches très originales. Par définition, ces travaux, même s'ils sont reconnus comme importants par un petit groupe de chercheurs, recueillent moins de citations (et sont plus difficilement publiés dans de très bons journaux) que ceux qui se contentent d'apporter des progrès incrémentaux dans des domaines classiques ou plus à la mode.

Pour ces raisons, l'utilisation de données bibliométriques ne saurait être un moyen unique, voire même principal, d'évaluation de la recherche. L'essentiel des évaluations devrait relever d'experts scientifiquement compétents, qui pourraient fonder leur jugement en partie sur des données bibliométriques[6]. C'est d'ailleurs un mode d'utilisation de ces données qui est admis dans certains cas chez certains de nos voisins.

## Les spécificités des mathématiques

Les mathématiques présentent une nette spécificité par rapport à d'autres sciences dures : la durée de vie d'une publication, c'est-à-dire le temps pendant laquelle elle peut être citée, peut être très long. Il est fréquent qu'un article de mathématiques soit encore cité fréquemment plusieurs décennies après sa publication ; par comparaison, dans un domaine comme la biologie cellulaire par exemple, un article typique n'est plus cité après une durée qui peut être de l'ordre de 3 ans. De plus les articles les plus influents font souvent partie de ceux pour lesquels la durée nécessaire pour approcher du « plein » de citations est le plus long, ils peuvent dans certains cas être peu cités les premières années après leur publication. Enfin ce délai moyen entre publication et citation varie entre les sous-domaines des mathématiques, il est par exemple plus important en arithmétique qu'en analyse appliquée.

Cette spécificité a au moins deux conséquences notables :

– l'évaluation des individus peut encore moins que dans d'autres domaines se faire sur la base des citations qui sont faites à leurs travaux ; il faudrait en effet pour cela attendre trop longtemps avant de pouvoir avoir des données fiables sur le nombre total de citations reçues par les articles.

– l'évaluation de la « qualité » des journaux, qui se fonde généralement sur le nombre moyen de citations par article, doit s'appuyer sur des mesures de nombre de citations couvrant une période assez longue après la publication.

Pour ces raisons l'indicateur standard d'importance des journaux est mal adapté aux mathématiques. Cet indicateur, nommé « impact factor », est déterminé par une entreprise spécialisée (Thomson Scientific) sur la base des citations dans les deux ans après la publication. Il donne des résultats erratiques pour les journaux de mathématiques, et tend à leur accorder une importance négligeable par rapport aux journaux d'autres disciplines pour lesquels les articles recueillent effectivement au cours de cette période de 2 ans la quasi-totalité de leurs citations[7].

[6] Le travail d'un comité d'évaluation dépasse d'ailleurs largement la seule évaluation et peut aider à dégager des directions d'améliorations des laboratoires concernés.

[7] John Ewing, *Measuring journals*, Notices Amer. Math. Soc. **33** (2006), n° 9, 1049-1053.

Il existe par ailleurs d'autres outils bibliométriques mieux adaptés aux spécificités des mathématiques, en particulier ceux mis au point au cours des dernières années par *Mathematical Reviews*. Parmi eux se trouve un analogue de l'Impact Factor appelé Mathematical Citation Quotient (MCQ), qui présente l'avantage notable d'être mesuré sur une durée de 5 ans (au lieu de 2 ans). Le MCQ a par ailleurs un sens différent de l'Impact Factor puisqu'il mesure l'impact d'un journal (évalué par ses citations) au sein de la littérature mathématique, et non pas dans l'ensemble de la littérature scientifique comme pour l'Impact Factor. Il est donc adapté aux mathématiques « fondamentales » mais moins aux journaux des sous-disciplines véritablement appliquées, qui peuvent recueillir une part importante de leurs citations dans des journaux non mathématiques (et dont la raison d'être est leur utilité pour d'autres disciplines).

La base de donnée *Mathematical Reviews* offre d'ailleurs d'autres opportunités remarquables en termes d'utilisation bibliométrique, puisque, contrairement à la base interdisciplinaire S.C.I. de Thomson, elle identifie de manière non ambiguë les institutions et les auteurs individuels.

## Quelques opportunités remarquables

Grâce à la base de données *MR*, il est possible de disposer facilement d'informations précises sur la place des divers départements de mathématiques, telle qu'elle est mesurée par les publications dans un panier donné de journaux scientifiques. Il semble important à ce stade de se placer d'emblée dans une perspective internationale, mieux adaptée aux enjeux actuels et qui valorise mieux l'activité de la majorité des départements français que des comparaisons nationales.

On présente ci-dessous quelques données permettant de se faire une idée du type de résultats qu'on peut obtenir. Elles sont obtenues à partir d'un certain nombre de choix qui méritent d'être discutés :

– elles reposent sur une liste d'une centaine de journaux, essentiellement ceux ayant un MCQ supérieur à une valeur minimale ; [8]

– à chaque journal est attribué un « poids » égal au *carré* de son MCQ 2005. Ainsi le poids des journaux varie à peu près de 0,1 pour les moins cités à 7,4 pour le plus cité (les Publications de l'I.H.É.S.) et une quinzaine de journaux ont un poids supérieur à 1 ;

– le poids total d'un article est le produit du nombre de pages par le poids du journal ;

– le poids d'un article est divisé entre les affiliations de ses auteurs.

Néanmoins les résultats qu'on obtient sont très stables par rapport aux paramètres, on reviendra sur ce point plus bas. L'utilisation du *carré* du MCQ peut paraître étonnante au premier abord, mais elle conduit à une pondération des journaux plus proche de ce que beaucoup de mathématiciens peuvent considérer comme « réaliste ». Si de telles données étaient utilisées de manière sérieuse, il serait par ailleurs important d'encourager les publications dans les excellentes revues, plutôt qu'un grand nombre de publications dans des revues moyennes, et le carré va dans ce sens.

[8] En l'absence d'une liste de journaux classés par MCQ, on a construit la liste à partir de la liste JCR de Thomson.

On présente (toujours à titre d'exemple) une liste d'institutions classées par leur production, évaluée suivant les critères ci-dessus, pour la période 2001-2006. Ces résultats n'ont évidemment aucune valeur normative et doivent être considérés seulement comme des exemples de ce qu'on peut attendre de comparaisons bibliométriques. Ces données sont extraites d'une liste exhaustive, les 15 premières lignes correspondent aux 15 premières institutions au niveau international, on a conservé aux lignes suivantes seulement les institutions françaises, avec leur rang dans le classement total.

| | Code MR | Institution | Part relative |
|---|---|---|---|
| 1 | 1-PRIN | U. Princeton | 1.705 % |
| 2 | F-PARIS11 | Orsay | 1.517 % |
| 3 | 1-MIT | M.I.T. | 1.294 % |
| 4 | 1-CA | U.C. Berkeley | 1.201 % |
| 5 | F-PARIS6 | U. Paris VI | 1.130 % |
| 6 | 1-CHI | U. Chicago | 1.075 % |
| 7 | 1-HRV | Harvard U. | 0.935 % |
| 8 | 1-NY | N.Y.U. | 0.892 % |
| 9 | 1-MI | U. Michigan | 0.849 % |
| 10 | 1-STF | Stanford U. | 0.840 % |
| 11 | 1-UCLA | U.C.L.A. | 0.786 % |
| 12 | 3-TRNT | U. Toronto | 0.783 % |
| 13 | 1-WI | U. Wisconsin | 0.764 % |
| 14 | 1-MN | U. Minnesota | 0.749 % |
| 15 | F-TOUL3 | U. Toulouse III | 0.727 % |
| 22 | F-PARIS13 | U. Paris XIII | 0.625 % |
| 28 | F-ENS | E.N.S. | 0.534 % |
| 33 | F-BORD | U. Bordeaux I | 0.517 % |
| 39 | F-CEPO | U. Cergy-Pontoise | 0.459 % |
| 41 | F-POLY | Ecole Polytechnique | 0.448 % |
| 44 | F-ENSLY | E.N.S. Lyon | 0.431 % |
| 45 | F-PARIS7 | U. Paris VII | 0.429 % |
| 47 | F-GREN | U. Grenoble I | 0.414 % |
| 67 | F-RENNB | U. Rennes I | 0.298 % |
| 72 | F-PROV | U. Aix-Marseille I | 0.283 % |
| 87 | F-LYON | U. Lyon I | 0.249 % |
| 91 | F-STRAS | U. Strasbourg | 0.242 % |
| 92 | F-LILL | U. Lille | 0.242 % |
| 106 | F-NICE | U. Nice | 0.212 % |
| 112 | F-NANC | U. Nancy | 0.199 % |
| 114 | F-MONT2 | U. Montpellier II | 0.197 % |
| 115 | F-DJON | U. Dijon | 0.196 % |

Part dans la production mondiale de « pages pondérées », 2001-2006[9]

Le point le plus frappant qui apparaît dans ce tableau est la très bonne place de beaucoup de départements français, au niveau international. C'est d'autant plus

[9] Ce tableau reprend les codes institutions de MR, et distingue donc Paris VI de Paris VII malgré l'existence de l'Institut de Mathématiques de Jussieu ou d'autres constructions plus récentes.

remarquable que la méthodologie se fonde entièrement sur des données de *Math Reviews* et peut donc difficilement être accusée de favoriser les mathématiques françaises (au contraire).

On peut noter que les résultats sont remarquablement stables par perturbation des indicateurs. Une pondération très différente des journaux (par exemple se concentrant uniquement sur les journaux de mathématiques appliquées) donne bien sûr des résultats différents, mais d'autres modifications n'ont que des effets marginaux. À titre d'exemple, pondérer chaque journal par son MCQ (et non pas son carré) conduit seulement à améliorer légèrement les performances des « gros » centres (comme Paris VI ou l'université du Michigan) par rapport aux plus petits centres « excellents » (comme Caltech ou Harvard).

Du point de vu des universités françaises, ces performances sont d'autant plus remarquables qu'elles sont dans une large mesure le fait des enseignants-chercheurs, et non pas – comme dans d'autres disciplines – des chercheurs d'organismes comme le C.N.R.S. Beaucoup d'universités ont ainsi la possibilité d'améliorer leur standing international grâce à un soutien à leurs départements de mathématiques et au recrutement d'enseignants-chercheurs. C'est d'autant plus vrai qu'il existe dans beaucoup d'universités des besoins d'enseignements en mathématiques (considérés en un sens large) supérieurs au potentiel d'enseignement des enseignants-chercheurs des 25$^{e}$ et 26$^{e}$ sections, généralement assurés par des collègues d'autres disciplines. Si bien qu'une volonté de l'université, associée à une ouverture et à une bonne volonté suffisante de notre part, permettrait de libérer des heures d'enseignement de mathématiques et de justifier un nombre d'enseignants-chercheurs plus grand.

Il est important de préciser que les performances bibliométriques présentées plus haut ne sont pas des indicateurs de *qualité* scientifique mais bien de *production totale*. La taille des départements joue un rôle évident dans leur classement, et certaines petites institutions absentes du tableau peuvent avoir une « productivité bibliométrique » comparable à certaines grandes universités qui y sont bien placées. Une exploitation plus fine de données bibliométriques semble d'ailleurs indiquer qu'il n'y a *pas* de corrélation significative entre la taille d'un centre et sa « qualité ».

Mais, contrairement à ce qu'on pourrait imaginer, les bons résultats obtenus ne semblent pas découler de la taille des départements français, qui serait généralement supérieure à celle de leurs homologues d'autres pays. Toujours grâce à *Math Reviews*, il est possible de dresser la liste des mathématiciens « actifs » de chaque centre, et de comparer leurs productions moyennes (en termes de nombre de pages pondérées). On obtient des résultats tout à fait différents de ceux présentés dans le tableau précédent – faisant beaucoup plus de place aux petits centres – mais qui restent tout à fait favorables aux mathématiques françaises. On ne présente pas ici de données de ce type – en particulier parce qu'elles sont plus délicates à construire et plus sujettes à cautions – mais ce sont elles, plus que les chiffres de production globale, qui pourraient indiquer un certain type de « productivité » de la recherche (toujours évaluée suivant des critères bibliométriques, contestables).

## Que pouvons-nous faire ?

On a expliqué plus haut en quoi les indicateurs bibliométriques standards sont mal adaptés aux mathématiques. On espère avoir convaincu le lecteur que l'utilisation de meilleurs indicateurs, mieux adaptés aux spécificités de notre discipline, pourraient être d'une grande utilité aussi bien au niveau national qu'au niveau local. Pour que de tels indicateurs soient crédibles, il serait indispensable qu'ils aient été validés par une autorité disposant d'une légitimité scientifique et/ou administrative suffisante.

Il serait certainement très utile aussi de réfléchir à des lignes directrices claires sur quelles pratiques bibliométriques sont acceptables pour les mathématiques, et lesquelles sont déplacées. C'est à cette condition qu'on pourra espérer éviter les pratiques abusives et peut-être bénéficier d'effets positifs associés, au niveau des universités, à la reconnaissance des efforts de recherche des mathématiciens. Il devrait être clair pour tous que, quelle que soit la place prise par les données bibliométriques, l'évaluation par les pairs est et restera primordiale.

**Remerciements**

L'auteur est très reconnaissant aux responsables de *Mathematical Reviews* pour l'aide qu'ils lui ont apportée et pour l'autorisation d'utiliser les données de leur base d'une manière non standard, et à Greg McShane pour une aide précieuse dans la mise au point d'outils informatiques. Il remercie aussi Pierre Dubois et Jean-Charles Rochet pour de très utiles conversations liées au sujet abordé ici, ainsi que Pierre Bérard, Jean-Pierre Bourguignon, François Germinet, Fabrice Planchon, Etienne Ghys et Daniel Massart, pour des remarques (ou critiques) intéressantes sur des versions antérieures du texte.

# Évaluer la recherche en sciences mathématiques

Alan L. Carey[1], Michael G. Cowling[2] et Peter G. Taylor[3]

Dans le cadre du programme sur la qualité de la recherche (en Australie, RQF), nous discutons de l'évaluation de la recherche en mathématiques et statistique. Le but de ce document est double : être une ressource pour les membres du comité du RQF et aider les responsables à préparer des rapports d'opportunité, comme le RQF exigera de le faire. De plus, ce rapport sur l'évaluation peut également servir pour les questions de recrutement et de promotion.

Ce texte a été réalisé pour la société australienne de mathématiques et traduit par Stéphane Cordier[4].

[1] Centre for Mathematics and its Applications, Mathematical Sciences Institute, Australian National University, Canberra ACT 0200, Australia.
[2] School of Mathematics and Statistics, University of NSW, UNSW Sydney NSW 2052, Australia & School of Mathematics, University of Birmingham, Grande-Bretagne.
[3] Department of Mathematics and Statistics, University of Melbourne Vic 3010, Australia.
[4] Fédération Denis Poisson, MAPMO, Orléans, France.

## Introduction

Les procédures recommandées par le « programme sur la qualité de la recherche » (RQF) ont été diffusées en octobre 2006 [5]. Il en ressort que la recherche en Australie sera évaluée par un certain nombre de comités d'évaluation. Même si le comité le plus approprié aux sciences mathématiques est le panel 4 :« mathématiques et technologies de l'information », un certain nombre d'autres comités sont également concernés, en particulier pour les statistiques et les mathématiques appliquées.

Ce document présente les nombreuses manières dont la recherche en mathématique peut être, et est évaluée internationalement. C'est un rapport sur les méthodes de travail dans la communauté des mathématiques et des statistiques. Notre espoir est que cela soit pris en compte par les responsables du RQF sur la façon de juger la qualité de la recherche en mathématiques. Ce document pourra aussi aider les chercheurs à élaborer des rapports, comme détaillé dans la section 4.1.5 de [5].

À première vue, les mathématiques correspondent aux codes de la classification (RFCD) portant les numéros 2301 (mathématiques), 2302 (statistiques), 2399 (autres sciences mathématiques) et 2804 (calcul). Cependant, ces codes ne couvrent pas toute la recherche en mathématiques, qui apparaît également sous les codes RFCD associés à beaucoup d'autres disciplines, notamment divers domaines de technologie et de physique théorique. De plus, la recherche en mathématiques et en statistique est également publiée dans des journaux liés aux sciences biologique, médicale, agronomique, économique et dans beaucoup de domaines des sciences sociales.

Il y a une très grande variété de cultures dans la recherche en mathématiques, ainsi que dans les diverses sous-disciplines mathématique et statistique. Pour donner quelques exemples extrêmes, Andrew Wiles a publié en moyenne un article par an pendant plus de treize ans avant de prouver le dernier théorème de Fermat, qui constitue l'un des résultats mathématiques les plus significatifs de la fin du vingtième siècle. La production scientifique du grand logicien Gödel se compose d'une demi-douzaine d'articles. À l'opposé, Paul Erdös a publié plus de 1500 articles, en grande majorité en collaboration avec des collègues du monde entier, et le grand savant que fut Leonhard Euler a écrit près de mille articles. Cependant, ces extrêmes ne sont pas représentatifs, et dans la plupart des domaines des mathématiques, un taux de publication d'un à cinq articles par an est considéré comme « normal ». Il y a des variations significatives entre les normes des nombreuses sous-disciplines. En raison de cette variabilité, la plupart des mathématiciens et statisticiens pensent qu'il est dangereux d'employer des données bibliométriques sans essayer d'abord de comprendre la culture de la sous-discipline concernée. En effet, comme expliqué dans [4], l'utilisation des mesures brutes de productivité reposant sur les normes des disciplines connexes mais distinctes est susceptible de réduire la qualité à long terme. La plupart des mathématiciens et statisticiens considèrent donc qu'il est indispensable d'utiliser un éventail beaucoup plus large d'indicateurs que les seules publications.

## Publications

La plupart des mathématiciens et statisticiens soutiennent le principe énoncé dans [5] que l'évaluation de la qualité doit être faite par des pairs désintéressés. En particulier, il est communément admis que des publications de qualité sont les indicateurs essentiels de la recherche, que les évaluateurs devraient lire certains des journaux ou des livres qui ont été produits et ne pas compter simplement sur des mesures « scientométriques » telles que les facteurs d'impact d'ISI.

Les mathématiciens et les statisticiens produisent plusieurs types de publications. Les plus courants sont des articles dans des journaux avec comité de lecture à diffusion internationale. Des articles sont également publiés dans des actes (ou proceedings) de conférences. En général, il s'agit de résultats de travaux proches des applications pour lesquels on suit les habitudes de la discipline d'application. Par exemple, un mathématicien qui collabore avec des ingénieurs ou des informaticiens pourra publier dans les actes d'une conférence, publications qui sont souvent parmi les plus prestigieuses du domaine. En revanche, beaucoup de conférences de mathématiques ne publient pas d'actes. En effet, une caractéristique commune des conférences les plus renommées en mathématiques est qu'on s'attend à ce que les conférenciers y présentent leur travail et le publient ensuite dans des revues avec comité de lecture. Les livres sont rarement écrits pour y présenter de nouveaux résultats.

L'ordre des auteurs est fréquemment jugée important par les analyses quantitatives de résultats de recherches. En mathématiques et statistiques, il est très commun, mais pas universel, de mettre les auteurs par ordre alphabétique (ce qui peut désavantager les auteurs dont les noms de famille commencent par les dernières lettres de l'alphabet [1], mais il ne semble pas exister d'analyse complète de cette question). D'autres conventions sont utilisées comme de mettre les auteurs en fonction de leur contribution, en mettant les doctorants en premier. Les résultats publiés dans un article commun sont en général le produit de séances de réflexion auxquelles ont participé tous les auteurs, et, donc, il est couramment admis que le résultat n'aurait pas été obtenu sans la contribution de tous, et, par conséquent, qu'essayer de quantifier les différentes contributions est un exercice stérile.

Il est très rare que les mathématiciens signent des articles auxquels ils n'ont pas apporté de contribution substantielle ; ceci diffère de beaucoup d'autres disciplines, où les noms des chercheurs sont inclus dans la liste des auteurs en fonction de leur position dans le laboratoire. En conséquence, les mathématiciens sont statistiquement auteurs de moins d'articles que leurs collègues en sciences expérimentales. De plus, contrairement à beaucoup d'autres disciplines, les articles de mathématiques ne citent pas systématiquement une bibliographie exhaustive de la question étudiée. Au contraire, un article sera cité parce qu'on en utilise un résultat. Ajouté au fait que, dans beaucoup de sous-disciplines mathématiques, les publications sont peu fréquentes, il en résulte que le nombre de citations d'un article en mathématiques est généralement inférieur à celui d'un article dans beaucoup d'autres sciences. Ceci explique que les indices bibliométriques comme les facteurs d'impact des journaux soient inférieurs en mathématiques à ceux d'autres disciplines scientifiques.

En mathématiques, il peut y avoir un laps de temps considérable, typiquement entre un et deux ans, entre la soumission d'un manuscrit et la publication. Ceci doit être gardé à l'esprit, particulièrement pour les recrutements de chercheurs en début de carrière. Une conséquence importante de ce retard est que le facteur d'impact d'ISI n'est pas une mesure appropriée, puisqu'elle tient compte uniquement du nombre de citations des deux années suivant la publication. De fait, certains des journaux de mathématiques les plus prestigieux ont un facteur d'impact des plus bas selon cette mesure, et de plus, leur rang peut changer considérablement d'année en année : par exemple, dans le classement des 120 premiers journaux de mathématiques par ce critère, les « publications mathématiques de l'IHÉS » étaient 100$^{e}$ en 1989 et premier en 1990. Il y a, néanmoins, un classement des journaux de mathématiques en terme de qualité, qui est relativement corrélé avec le facteur d'impact quand celà est mesuré sur des décennies plutôt que des années. Les spécialistes peuvent faire des recommandations à ce sujet. Pour plus d'informations sur les modes de publication en mathématiques et l'évaluation des journaux, voir [2, 3].

## Contrats

L'utilisation principale de l'argent des contrats en mathématiques est l'emploi des post-doctorants et d'autres personnels. L'existence de tels financements est essentielle pour le développement de la future génération des mathématiciens, et il est donc très important que les mathématiciens s'engagent dans les appels d'offres correspondants. Il est possible, pour quelques mathématiciens, de poursuivre leur recherche sans s'engager dans la recherche de financements. Néanmoins, nous considérons que l'obtention de tels financements devrait être utilisée pour évaluer la productivité de la recherche. C'est un bon indicateur de l'estime portée par les autres chercheurs. De plus, une personne qui a obtenu régulièrement de tels financements est très probablement un leader scientifique dans la mesure où il aura supervisé le travail de nombreux post-doctorants. Les financements classiques en Australie sont les ARC « Discovery Grant Scheme ». Les mathématiciens appliqués et les statisticiens peuvent également répondre à cet appel d'offre. Les financements internationaux deviennent une source de financement recherchée en mathématiques. Une conséquence du fait que les mathématiciens et les statisticiens ont généralement des besoins moindres que leurs collègues de sciences expérimentales est qu'ils demandent des financements moins importants par projet. Il est donc inadéquat de juger en fonction du financement total obtenu (surtout s'il doit être comparé aux autres disciplines nécessitant des équipements coûteux). Il est préférable de considérer le nombre de financements obtenu ou le taux de succès.

## Formation des doctorants

Un rôle important des universitaires dans tous les domaines est leur contribution à la formation doctorale. Une bonne mesure de l'efficacité d'une formation doctorale est la proportion d'étudiants qui reçoivent un diplôme dans les temps et trouvent un emploi dans le champ de leurs études et recherches. Comme pour les autres mesures discutées précédemment, il est important d'évaluer la formation du doctorant en tenant compte des spécificité des disciplines. Typiquement, les rapports directeur-doctorant en mathématiques ou statistiques ressemblent plus à ceux des sciences humaines qu'à ceux des sciences expérimentales. L'encadrement est souvent direct entre l'étudiant et le directeur de thèse. Le co-encadrement est une pratique qui se généralise mais, même dans ce cas, tous les directeurs gardent un contrôle direct du contenu intellectuel.

Il est rare que les doctorants travaillent sur un problème de recherche qui soit une petite partie d'un grand projet sur lequel une équipe, y compris d'autres doctorants, travaille. Au contraire, un directeur de thèse peut s'occuper simultanément de doctorants qui travaillent sur des projets très différents. Ces facteurs (et d'autres) impliquent que le taux de production des doctorants en mathématiques est inférieur à celui de beaucoup d'autres disciplines scientifiques. Au total, il y a eu moins de 1500 PhD en mathématiques dans l'histoire du système universitaire australien. Le nombre de personnes qui ont dirigé plus de dix doctorants est très faible. La contribution à l'encadrement doctoral de telles personnes est très importante. Les chercheurs en milieu de carrière qui ont dirigé entre cinq et dix doctorants qui ont réussi peuvent être reconnus pour leur contribution significative.

## Autres indicateurs de qualité

Il y a un certain nombre d'autres données qui sont de bons indicateurs de recherche en mathématique. Citons :

– Les conférences invitées dans de prestigieux et très sélectifs colloques internationaux. Ceci inclut de grandes conférences comme le congrès international des mathématiciens (ICM), le congrès international de mathématiques industrielles et appliquées (ICIAM), et le congrès international sur la physique mathématique, aussi bien que de plus petits événements focalisés tels que ceux organisés au *Mathematisches Forschungsinstitut* à Oberwolfach en Allemagne.

– Les invitations dans les principaux centres et instituts de recherches tels que les instituts Newton, Erwin Schrödinger et Mittag-Leffler en Europe ou encore le MSRI, le IMA ou le Fields Institute en Amérique du Nord.

– Les prix et récompenses, en particulier internationales.

– La qualité et la variété des collaborations est souvent prise comme une bonne mesure de leur position dans la communauté mathématique. Cela prend fréquemment la forme de relations avec les leaders internationaux de la discipline ou de la sous-discipline. Pour la recherche appliquée, des collaborations industrielles substantielles fournissent un indicateur analogue.

– Membre des comités de rédaction des journaux internationaux.

– Membre des comités d'organisation ou du comité scientifique de conférences internationales prestigieuses.

– Activités de revue ou de referee.

– L'évaluation de doctorats et des participations à des contrats de recherches, particulièrement à l'étranger.

– L'influence sur le travail d'autres chercheurs.

– La production (documentée) de logiciels de qualité, employés couramment.

## Une critique de l'analyse des citations

Dans cette partie, nous ferons quelques remarques au sujet des citations en mathématiques. D'abord, pour faire des évaluations bibliométriques, il est nécessaire de disposer de données venant de différentes sources. En particulier, les données d'ISI manquent des articles qui sont sur le Web. Dans beaucoup de domaines de recherche, l'activité intense de citation se produit avant la publication réelle. D'autres sources, telles que le Scholar Google, `www.arxiv.org` et MathSciNet fournissent des informations différentes. Il convient de noter que les articles pour lesquels Tao et Perelman ont gagné la médaille Fields (l'équivalent mathématique du prix Nobel) en 2006 n'apparaissent pas dans des données d'ISI, car elles étaient encore sous forme électronique à l'heure de la récompense. L'article pour lequel Simon Donaldson a obtenu la médaille Fields avait environ 80 citations d'après ISI à l'heure de la récompense, alors que beaucoup de travaux de prix Nobel ont des milliers de citations.

De plus, l'interprétation des données de citation nécessite de comprendre la culture de la sous-discipline. Il y a de grandes variations de culture à l'intérieur d'un même code à quatre chiffres simple de la RFCD. Les données agrégées de différentes sous-disciplines masqueront des variations importantes entre ces sous-disciplines.

Par ailleurs, idéalement, pour évaluer l'importance d'un article de recherche, son influence sur le long terme devrait être pris en compte. La durée de vie des articles dépend des sous-disciplines en mathématiques, mais on peut considérer que la « demi-vie de citation » d'un article est d'environ dix ans. Il est certainement très difficile d'évaluer correctement la valeur d'un article de mathématiques sans attendre plusieurs années après sa publication. La proposition de RQF de juger la recherche à travers une fenêtre comparativement à court terme est donc problématique pour les mathématiques. Quatrièmement, l'ISI classifie les mathématiques entre fondamentales et appliquées en se basant sur les déclarations des journaux eux-mêmes. Ceci peut être fallacieux ; par exemple, un évaluateur pourrait ne vouloir considérer les citations des articles qui sont véritablement « multidisciplinaire » et où l'impact en mathématiques peut être petit alors que l'impact dans d'autres disciplines peut être grand. Le théorème d'Arrow, prix Nobel en sciences économiques 1972, qui n'a pas conduit à de « nouvelles mathématiques », est un exemple d'un tel phénomène. Enfin, il est essentiel de distinguer les articles originaux de recherche des articles de synthèse ou de « review ». Ceci n'est pas aisé avec les outils d'analyse bibliométrique. L'utilisation de l'analyse bibliométrique pose des problèmes dans beaucoup d'autres disciplines que les mathématiques, et on peut penser que de tels index ont déjà été dévoyés (voir par exemple [6, 7]).

**Remerciements** : les auteurs remercient les nombreux collègues qui ont fait des commentaires, donné des informations ou des références notamment I. Aitchison, N. Boland, P. Cerone, D. Daners, J. Denier, G. Gottwald, J. Gray, K. Landman, M. Murray, P. Pansu, F. Planchon, N. Trudinger, C. Villani and A. Welsh, et les membres du comité de pilotage de l'AMS (Australian Mathematical Society).

## Références

[1] L. Einav and L. Yariv, 'What's in a surname ? The effects of surname initials on academic success', *J. Econ. Persp.* **20 (1)** (2006), 175 ?188.

[2] J. Ewing, 'Measuring Journals', *Notices Amer. Math. Soc.* **53 (9)** (2006)1049 ?1053. Available online at `http://www.ams.org/notices/200609/comm-ewing.pdf`

[3] J.W Grossman, 'Patterns of Research in Mathematics', *Notices Amer. Math. Soc.* **52(1)** (2005), 35 ?41. Available online at `http://www.ams.org/notices/200501/fea-grossman.pdf`

[4] P. Hall, 'Measuring research performance in the mathematical sciences in Australian universities'. To appear in *Gazette Austral. Math. Soc.*

[5] Research Quality Framework : Assessing the Quality and Impact of Research in Australia, Commonwealth of Australia, 2006.

[6] Richard Monastersky, 'The Number That's Devouring Science', *Chron. Higher Ed.*, October 14, 2005.

[7] T. Williams and J. Wilson, 'Second Thoughts on Citation Counts, Impact Factors', *OR/MS Today* August 2005. Available online at `http://www.lionhrtpub.com/orms/orms-8-05/frletters.html`

⋆ ⋆ ⋆

*Rappel : la rubrique « tribune libre » permet à toute personne de notre communauté d'y exprimer une opinion personnelle qui n'engage ni le comité de rédaction, ni la Société Mathématique de France.*
*Les réactions à ces textes (gazette@dma.ens.fr) sont publiées dans le courrier des lecteurs.*

# LIVRES

**Central Simple Algebras and Galois Cohomology**
Philippe Gille and Tamás Szamuely
Cambridge University Press, 2006. 343 p.
ISBN : 978-0-521-86103-8. £47.00

Peu de sujets d'algèbre peuvent se prévaloir d'une histoire aussi longue que la théorie des algèbres simples centrales, puisque son origine remonte à la découverte des quaternions par Hamilton en 1843. Depuis lors, toutes les générations y ont contribué, d'abord en rapport avec les représentations de groupes (Frobenius, Schur, Brauer), avec la théorie générale des algèbres (Dickson, Wedderburn, Noether, Albert) ou même avec la théorie des nombres (Hasse). En effet, les algèbres simples centrales sur un corps donné $k$ – c'est-à-dire les algèbres de dimension finie, sans idéaux bilatères non triviaux, dont le centre est $k$ – révèlent des propriétés de nature arithmétique de $k$. Pour préciser ce point, rappelons que Brauer a défini une relation d'équivalence entre algèbres simples centrales sur un corps donné $k$ : les algèbres $A$ et $B$ sont déclarées équivalentes si l'on peut trouver des algèbres de matrices $M_n(A)$, $M_m(B)$ qui soient isomorphes. Ainsi, toute classe d'équivalence est représentée par un unique corps gauche (algèbre à division) de centre $k$, et le produit tensoriel définit une structure de groupe sur l'ensemble des classes d'équivalence : c'est le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(k)$. La détermination du groupe de Brauer du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels par Brauer-Hasse-Noether et Albert en 1932 est indiscutablement un des résultats les plus remarquables de la théorie, incorporé par la suite dans la théorie du corps de classes : l'extension des scalaires permet d'identifier $\mathrm{Br}(\mathbb{Q})$ à un sous-groupe de la somme directe $\bigoplus_v \mathrm{Br}(\mathbb{Q}_v)$ des groupes de Brauer des complétés de $\mathbb{Q}$ pour ses différentes valeurs absolues.

Mais il y a plus : Brauer-Hasse-Noether et Albert ont aussi donné des informations plus fines sur les corps gauches de centre $\mathbb{Q}$ qui ne se ramènent pas à des propriétés du groupe de Brauer, montrant par exemple que ceux-ci sont des algèbres cycliques, c'est-à-dire qu'ils peuvent être obtenus à partir d'extensions galoisiennes cycliques de $\mathbb{Q}$ par une construction qui généralise celle des quaternions. Ainsi, la théorie des algèbres simples ou des corps gauches comporte deux aspects, selon que l'on s'intéresse à des propriétés de leur classe d'équivalence ou de leur classe d'isomorphisme. Dans les années 70, la théorie des identités polynomiales a permis à Amitsur de montrer que certains corps gauches génériques ne sont pas des produits croisés, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas être construits à partir d'une extension galoisienne de leur centre. La technique d'Amitsur a donné des contre-exemples à plusieurs conjectures sur la structure fine des corps gauches, induisant dans l'esprit des spécialistes une attitude pessimiste vis-à-vis de toutes les questions ouvertes. C'est donc avec stupéfaction qu'ils ont accueilli en 1981 la preuve par Merkurjev du fait que le sous-groupe de 2-torsion du groupe de Brauer d'un corps de caractéristique différente de 2 est engendré par les classes d'équivalence d'algèbres de quaternions. En d'autres termes, Merkurjev a montré que tout corps $D$ tel que $D \otimes D$ est une algèbre de matrices sur le centre est équivalent au sens de Brauer à un produit tensoriel d'algèbres de quaternions, même s'il n'est pas *isomorphe* à un tel produit. Peu de temps après, Merkurjev et Suslin démontraient un résultat analogue pour les éléments de $n$-torsion, pour tout entier $n$ tel que le centre contienne une racine primitive $n$-ième de l'unité.

Le livre de Gille et Szamuely développe la théorie des algèbres simples centrales – c'est-à-dire du groupe de Brauer des corps – avec l'objectif ambitieux de donner une preuve complète du théorème de Merkurjev et Suslin. Comme le titre de l'ouvrage le suggère, le point de vue adopté est fortement influencé par les techniques de cohomologie galoisienne. De ce point de vue, les algèbres simples centrales d'un degré donné $n$ sur un corps $k$ sont les algèbres qui après extension des scalaires à la clôture séparable $k_s$ deviennent isomorphes à l'algèbre $M_n(k_s)$ des matrices d'ordre $n$. Elles sont classifiées à isomorphisme près par un ensemble de cohomologie galoisienne non abélienne $H^1(\Gamma, \mathrm{PGL}_n(k_s))$, où $\Gamma$ est le groupe de Galois de $k_s/k$, car $\mathrm{PGL}_n(k_s)$ est le groupe des automorphismes de $M_n(k_s)$. En utilisant la suite exacte $1 \to k_s^\times \to \mathrm{GL}_n(k_s) \to \mathrm{PGL}_n(k_s) \to 1$, on est naturellement conduit à interpréter le groupe de Brauer comme un groupe de cohomologie : $\mathrm{Br}(k) \simeq H^2(\Gamma, k_s^\times)$. Des éléments de cohomologie galoisienne étaient déjà en germe dans les travaux de Brauer et Noether sur les produits croisés et les «systèmes de facteurs», mais par leur insistance systématique sur la cohomologie Gille et Szamuely tournent résolument le dos aux exposés classiques inspirés par la théorie des anneaux. Une autre particularité de leur travail est le traitement détaillé des variétés de Severi-Brauer, qui sont un pendant géométrique des algèbres simples centrales : ce sont les variétés qui après extension des scalaires deviennent isomorphes à des espaces projectifs. Les coniques sans point rationnel en sont l'exemple non trivial le plus simple ; elles correspondent aux algèbres de quaternions non déployées. Ces variétés ont été étudiées systématiquement par Châtelet dès 1944, mais leur utilisation par Merkurjev et Suslin leur a donné un rôle de premier plan, inaugurant de nouvelles méthodes de nature géométrique dans cette partie de l'algèbre.

Le livre de Gille et Szamuely repose en partie sur un cours et des séries d'exposés donnés par les auteurs, et cela se voit : le texte est nourri d'une solide réflexion pédagogique et émaillé de commentaires destinés à faciliter la compréhension des débutants ou à leur éviter des écueils. Le premier chapitre introduit le sujet par un exposé détaillé sur les algèbres de quaternions et leur conique associée, qui donne un premier exemple caractéristique de la manière dont géométrie et algèbre sont appelées à interagir dans la suite. Les détails de la correspondance entre algèbres de quaternions et coniques supposent d'ailleurs une certaine familiarité avec des notions géométriques de base (fonctions rationnelles, diviseurs). La géométrie est absente des trois chapitres suivants : le deuxième décrit les algèbres simples centrales comme formes tordues (au sens de la cohomologie galoisienne) d'algèbres de matrices et introduit le groupe de Brauer d'un corps ; le troisième donne les rudiments de la cohomologie des groupes, qu'il développe dans une perspective utilitaire, même si c'est en privilégiant les techniques de l'algèbre homologique moderne (notamment les résolutions projectives) plutôt que les calculs explicites sur les cocycles. Le chapitre 4 réalise la synthèse des deux précédents et présente la description cohomologique du groupe de Brauer des corps. La géométrie domine les deux chapitres suivants : le cinquième donne un exposé fort complet des variétés de

Severi-Brauer en les présentant comme des formes tordues des espaces projectifs plutôt que comme variétés d'idéaux à gauche d'une algèbre simple centrale. La correspondance entre variétés de Severi-Brauer et algèbres simples centrales est alors réalisée par l'intermédiaire de $H^1(\Gamma, \mathrm{PGL}_n(k_s))$, tandis que le groupe de Brauer reçoit une interprétation géométrique comme groupe des classes d'équivalence de variétés de Severi-Brauer. Le chapitre 6 est centré sur le calcul du groupe de Brauer de corps de fonctions, qui utilise des applications résidu associées aux valuations discrètes. C'est l'occasion d'évoquer comment le groupe de Brauer peut intervenir dans les problèmes de rationalité : les auteurs donnent une construction détaillée d'actions linéaires de groupes sur des corps de fonctions rationnelles pour lesquelles le corps des invariants n'est pas une extension transcendante pure du corps des constantes, suivant Saltman et Bogomolov.

L'objectif de donner une preuve du théorème de Merkurjev-Suslin est atteint dans les deux chapitres suivants : le septième étudie les groupes de $K$-théorie $K_n^M$ de Milnor, qui sont indispensables pour énoncer le résultat de manière complète : pour tout corps $k$ et tout entier $n$ non divisible par la caractéristique de $k$, la suite «de Kummer»

$$1 \to \mu_n \to k_s^\times \xrightarrow{n} k_s^\times \to 1$$

donne un homomorphisme de connexion $\partial \colon k^\times \to H^1(\Gamma, \mu_n)$, d'où l'on déduit pour tout entier $m$ une application $h_n^m \colon K_m^M(k) \to H^m(\Gamma, \mu_n^{\otimes m})$ en envoyant tout symbole $\{a_1, \ldots, a_m\}$ sur le cup-produit $\partial(a_1) \cup \ldots \cup \partial(a_m)$. L'application $h_n^m$ est connue sous le nom de «symbole galoisien» (*norm residue homomorphism*). Le théorème de Merkurjev et Suslin, dont la démonstration fait l'objet du chapitre 8, établit que $h_n^2$ est surjectif de noyau $nK_2^M(k)$ pour tout corps $k$ et tout entier $n$ premier à la caractéristique. Le lien avec le groupe de Brauer apparaît lorsque $k$ contient une racine primitive $n$-ième de l'unité : le choix d'une telle racine permet d'identifier $H^2(\Gamma, \mu_n^{\otimes 2})$ au sous-groupe de $n$-torsion de $\mathrm{Br}(k)$ de sorte que l'image du symbole galoisien est le sous-groupe engendré par les algèbres cycliques. Même si la démonstration bénéficie de certaines simplifications par rapport à la preuve originale, il faut bien admettre qu'elle reste difficile (alors qu'il existe plusieurs preuves «élémentaires» du cas particulier $n = 2$, qui est le théorème de Merkurjev). Elle repose en définitive sur l'étude du comportement de $K_2^M$ par extension des scalaires au corps de fonctions d'une variété de Severi-Brauer, et les auteurs en viennent à citer le calcul de la $K$-théorie de ces variétés, dû à Quillen, en n'en donnant qu'une esquisse de démonstration.

Le neuvième et dernier chapitre traite du cas de «mauvaise caractéristique». Des méthodes élémentaires (mais calculatoires) permettent de décrire $K_m^M(k)/pK_m^M(k)$ pour $k$ un corps de caractéristique $p$ à l'aide d'un «symbole différentiel» qui envoie tout symbole $\{a_1, \ldots, a_m\}$ sur $(da_1/a_1) \wedge \ldots \wedge (da_m/a_m) \in \Omega_k^m$ : c'est le théorème de Bloch-Gabber-Kato dont Gille et Szamuely donnent une preuve complète. Ils donnent aussi la description des éléments de torsion $p$-primaire de $\mathrm{Br}(k)$, due à Teichmüller, dont il résulte que ces éléments sont engendrés par des classes d'équivalence d'algèbres cycliques. Le livre se termine par un appendice qui commente de manière succincte les notions de géométrie algébrique utilisées dans les chapitres précédents.

À l'exception de certains passages qui demandent quelques connaissances de géométrie algébrique – notamment une certaine familiarité avec les schémas dans le chapitre 8 – les prérequis ne dépassent pas le contenu du programme de la maîtrise, ce qui met l'ouvrage à la portée des doctorants. Ils y trouveront une excellente introduction à des thèmes de recherche à la pointe de l'actualité, puisque les théorèmes de Merkurjev et de Merkurjev-Suslin constituent une première étape importante vers la conjecture de Milnor démontrée par Voevodsky ($h_2^m$ est surjectif de noyau $2K_m^M(k)$ pour tout $m$), et vers celle de Bloch-Kato, dont Rost et Voevodsky ont annoncé une preuve ($h_n^m$ est surjectif de noyau $nK_m^M(k)$ pour tout $n$ et tout $m$). Certes, le point de vue adopté par Gille et Szamuely ne permet pas de retrouver certains résultats plus fins obtenus par des techniques de théorie des anneaux ; leur livre ne remplace donc pas des exposés plus classiques comme ceux de Draxl ou de Jacobson, mais il prendra place à leurs côtés comme une référence très utile pour plusieurs points de la théorie qui sont peu représentés dans d'autres monographies, notamment les variétés de Severi-Brauer et le symbole différentiel.

Jean-Pierre Tignol,
Université catholique de Louvain,
Belgique

---

**Arithmetic Differential Equations**[1]

Alexandru Buium

Mathematical Surveys and Monographs, vol. 118, AMS, 2005. 310 p.
ISBN : 0-8218-3862-8. $ 85

At the beginning of the 90's, the author of this book obtained the first proof of the geometric analogue, in characteristic 0, of the Mordell-Lang conjecture on the intersection of a subvariety of an abelian variety with a subgroup of finite rank. His main tool was the differential algebra of Ritt and Kolchin, where a derivation $\partial$ is added to the usual operations of algebra, and the associated differential algebraic geometry of Kolchin, which he recast in a more familiar-looking, scheme-theoretic presentation through his theory of jet spaces. For an account of these ideas, see [B1], [B-C]. This work, combined with fundamental ideas from model theory, led to Hrushovski's proof of the geometric Mordell-Lang conjecture in all characteristics; cf. [Bo].

A remarkable feature of this "$\partial$-algebraic geometry", made prominent by Buium's work, is that countable unions of discrete objects, which are usually Zariski dense and therefore not easily expressible in the language of algebraic geometry, can be interpreted in terms of differential subschemes. For instance, Manin's theorem of the kernel, which had earlier settled the Mordell conjecture itself, expresses the full torsion of a non isoconstant simple abelian variety $A$ as the rational points of the kernel of a differential homomorphism from $A$ to a vector group. Similarly, the classical theory of the Schwarzian derivative shows that the full isogeny class of a non isoconstant elliptic curve (again a dense object) actually lies in a proper differential subvariety of the moduli space of elliptic curves.

Of necessity, the base field in the above geometry is a differential field, and although diophantine problems have always benefited from the analogies between

[1] Cette recension est parue au *Bulletin of the London Mathematical Society*, vol. 39 (2007), p. 522-524. Les éditeurs de la *Gazette* remercient la LMS de son aimable autorisation à la reproduire ici.

global fields, the topics above may have seemed to the working number theorist to be too specific to function fields.

Not so, I hope (and as its title shows), with the present book, which adds to the usual operations of algebra a "derivation" $\delta$ of a definitely arithmetic nature, as follows. A prime number $p$ is given, the base is the completion $R = R_p$ of the maximal unramified extension of the $p$-adic integers, and $\delta = \delta_p : R \to R$ is the Fermat quotient operator

$$\delta(x) = \frac{\varphi(x) - x^p}{p},$$

where $\varphi$ is the canonical lift to $R$ of the Frobenius on $\overline{\mathbf{F}_p}$. Replacing $\partial$ by $\delta$, Buium built, in a series of works started around 1995, a new "$\delta$-algebraic geometry", where essentially all concepts developed in the context of $\partial$-algebraic geometry have arithmetic versions.

A third of the book under review (Part 2, Chapters 3-5) is dedicated to a presentation of this new geometry. Based on the affine notion of $\delta$-rings, the global theory of $\delta$-schemes and their spaces of $p$-jets forms the content of Chapter 3, showing how to express $\delta$-rational functions in terms of standard functions on $p$-jets, and how to attach a $\delta$-scheme to a standard one, while an interesting $\delta$-Galois theory is developped in Chapter 5, relating the group of $\delta$-automorphisms of a cover over $R_p$ to that of its special fiber, and proving the rationality of some quotients (see below) in the new geometry.

For a reader familiar with $\partial$-algebraic geometry, these constructions are very natural-and easy to follow. But a newcomer may need some motivations. The easiest answer, in my opinion, is given by the initial work of Buium on this topic, which showed that they could be applied to classical problems in number theory. For instance, as an analogue of Manin's theorem, the torsion points of an abelian scheme $A/R$ form the $R$-points of the kernel of a $\delta$-rational homomorphism from $A$ to a vector group, modulo its $p^\infty$-divisible points, and a first success of Buium's geometry was his new proof, based on this analogue, of Raynaud's theorem on the Manin-Mumford conjecture (a special case of the Mordell-Lang conjecture) cf. [B3]. In relation with isogenies, Buium constructed a theory of $\delta$-modular forms, one of whose consequences in classical terms is, for instance, a sharpening of G. Robert's congruence relations on values of modular forms at supersingular points; cf. [Ba].

The underlying tools from $\delta$-geometry on which these applications are based appear in Part 3 of the book : $\delta$-characters on groups schemes over $R$ and the arithmetic version of Manin's theorem will be found in Chapter 7, while Chapter 8 is concerned with modular and Shimura curves, Hecke correspondences, analogues of $q$-expansions and of Serre's $\partial$-operator, which, together with an arithmetic version of the Schwarzian, lead to the construction of "isogeny covariant" $\delta$-modular forms. But the applications themselves have been left aside. This is a debatable choice, since it could have whetted newcomers' appetites, but an understandable one in view of the ambitious and totally new aim which, right from its introduction and in Part I, Buium actually assigns to his book: this is not a survey of his work, but a research monograph on the notion of *quotient spaces* in geometry, for which he convincingly shows that the collection of his $\delta_p$-geometries (for varying prime numbers $p$) plays a central role.

Indeed, the book is motivated by, and centered on, a remarkable conjecture on quotients, which we now sketch in the setting of [B4]. Let $X$ be an algebraic curve over $\mathbf{Q}$, and let $\sigma : \tilde{X} \subset X \times X$ be a correspondence. Usually, the field $\mathbf{Q}(X)^\sigma$ of invariants of $\sigma$ (that is, of those rational functions $f$ on $X$ such that $f \circ pr_1 = f \circ pr_2$ on $\tilde{X}$) will be reduced to the constants, and the categorical quotient $X/\sigma$ is just a point. Now, extend $X$ to a relative curve $X_p$ over $R_p$ for a sufficiently large prime number $p$, and similarly with $\tilde{X}, \sigma$. Just as with the differential algebraic examples we started with, there are so many more $\delta_p$-rational functions that we shall often find non-constant ones which are invariants of the correspondence $\sigma_p$; in this case, say that the quotient $X_p/\sigma_p$ is not trivial. Buium's conjecture asserts that $X_p/\sigma_p$ *is not trivial for almost all prime numbers p if and only if*, after base extension from $\mathbf{Q}$ to $\mathbf{C}$, *the correspondence* $\sigma_{\mathbf{C}}$ *on* $X_{\mathbf{C}}$ *admits an analytic uniformization.*

The latter concept essentially corresponds to the possibility of lifting $\sigma_{\mathbf{C}}$ to the universal cover $\mathbf{S}$ of $X_{\mathbf{C}}$ - or of a curve closely related to $X_{\mathbf{C}}$ - , and is described in detail in the first chapter of the book. There are three cases, depending on whether $\mathbf{S}$ is $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{C}$, or the upper half-plane. Obvious examples of analytic uniformization in the latter (hyperbolic) case are given by Hecke correspondences, and a theorem of Margulis classifies all possibilities in terms of quaternion algebras. The corresponding classification in the flat $\mathbf{C}$ case is related to postcritically finite dynamical systems, as those attached to Chebyshev polynomials or to Lattès functions. The spherical ones involve of course the finite subgroups of $Aut(\mathbf{P}_1)$. Thus, there is a rich list of possibilities, making both implications in the conjecture all the more interesting.

We can now come back to Part 3, whose three chapters reflect the trichotomy above, and which contain proofs of many special cases of the conjecture. As is natural in number theory, most of them concern its "if" side, where the situation at each prime can be studied separately, and where Buium exhibits non constant $\sigma_p$-invariant functions by constructing sufficientlty ample line bundles on $p$-jet spaces. Remarkably, formal analogues of the "only if" side are also obtained. Many techniques are involved - for instance from the theory of quaternion algebras, moduli spaces, crystalline cohomology, $p$-adic modular forms, invariant theory, dynamical systems. But Buium provides a lucid exposition of each of theses topics, so that his book requires only a (good) command of standard algebraic geometry and number theory. Actually, these expositions will be of use to any reader with an interest in "pure" arithmetic algebraic geometry. Differential algebra is definitely not a prerequisite, but it is the pervading source of inspiration of the book, whose title is thereby fully justified.

In conclusion, this book is both a very original addition to the study of quotients and local to global principles in number theory, and an enticing invitation to Buium's geometry. By virtue of the variety of topics introduced and the interrelations that the book reveals, it should belong in all mathematical libraries.

Buium's work on $\partial$-algebraic geometry turned Kolchin's theory into a remarkable tool for diophantine geometry over function fields. I have no doubt that the present book will help $\delta$-algebraic geometry render similar service to its original namesake over number fields.

## References

[Ba] M. Barcau: Isogeny covariant differential modular forms... ; Compo. math., 28, 2002, 1459-1503.
[Bo] E. Bouscaren (Ed.): *Model theory and algebraic geometry*; Springer LN 1696, 1998.
[B1] A. Buium: Intersection of jet spaces and a conjecture of S. Lang; Annals of Maths, 136, 1992, 557-567.
[B2] A. Buium: *Differential algebra and diophantine geometry*; Hermann, 1994.
[B3] A. Buium: Geometry of $p$-jets; Duke Math. J., 82, 1996, 349-367.
[B4] A. Buium: Correspondences, Fermat quotients, and uniformization; in *Groupes de Galois arithmétiques et différentiels*, Séminaires & Congrès, vol. 13, 2006, 78–89.
[BC] A. Buium, P. Cassidy: Differential algebraic gometry and differential algebraic groups...; in *Selected Works of E. Kolchin with Commentary*, AMS, 1999, 567-637.

Daniel Bertrand,
Université Paris VI

---

**Le problème de Nath**
G. Tenenbaum
Belin, 2007. 152 p. ISBN : 978-2701146003. 6,50 €

Un roman dans les notes de lecture de la *Gazette* ? Si le titre peut être une raison indirecte de la publication de cette note ici, l'*incipit* montre que ce livre ne peut nous laisser indifférents : « Nath et maths, comme vous voyez, ça fait deux ! ».

Aucun des lecteurs de cet article ne pense vraisemblablement avoir été victime d'un professeur de mathématiques un peu sadique comme l'est ainsi Nath (ou Nathanaël), le héros de ce livre, dès cette première phrase. *Voire.* Une variante pernicieuse existe sous la forme « C'est trivial ! ». Il me souvient d'une discussion entre deux collègues[2]. Première étape, $\mathcal{X}$ arrive à l'université l'air guilleret et annonce à $\mathcal{Y}$, qui arrive au même moment, avoir démontré l'équivalence de deux propriétés. $\mathcal{Y}$ écoute l'énoncé, puis, avec l'air hautain de la personne qui se croit surdouée en mathématiques, « Pfff, c'est trivial ! ». $\mathcal{X}$ dissimule sa déception et continue à travailler. Lors de la deuxième étape le lendemain matin, $\mathcal{X}$ explique à $\mathcal{Y}$ avoir établi qu'en fait l'une des implications dans l'équivalence affirmée la veille est fausse. $\mathcal{Y}$, avec l'air hautain de la personne qui se croit surdouée en mathématiques, « Pfff, c'est trivial ! ». On aura deviné que la dernière étape est la constatation par $\mathcal{X}$ que *les deux implications de l'équivalence sont fausses*, puis l'établissement et la démonstration d'un énoncé correct. Est-il besoin d'ajouter que $\mathcal{Y}$ (avec son air hautain etc.) ne sut jamais rien de ce dernier résultat...

Mais revenons au roman *Le problème de Nath*. C'est l'un des trois premiers d'une nouvelle collection intitulée *Charivari* (chez *Belin*), qui

> « a pour objectif de faire chavirer certaines idées toutes faites, largement partagées par la communauté des adolescents. Plutôt que de proposer au jeune lecteur un discours didactique, [l'éditeur a] opté pour la fiction qui a la

[2] Le mot "collègue" est à la fois masculin et féminin ; pour respecter l'anonymat de ces collègues je continuerai en les appelant $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ et en évitant d'avoir des participes passés dont l'accord trahirait le genre.

vertu d'amener à la réflexion par le biais de l'imaginaire, dans la lignée des contes ou des fables ».

L'auteur (spécialiste de théorie analytique et probabiliste des nombres) a déjà publié *Trois pièces faciles* (L'Harmattan, 1999), *Rendez-vous au bord d'une ombre* (Le Bord de l'eau, 2002), *Le Geste* (Héloïse d'Ormesson, 2006). Ce nouveau roman de G. Tenenbaum raconte une tranche de la vie de Nath(anël). L'histoire se passe dans les années 2030. Nath, en conversation imaginaire avec son oncle défunt Ethan, est catalogué comme nul en mathématiques. L'événement fondateur est le coma de sa mère. Et l'arrogance du corps médical. Et la tentative de Nath de sauver sa mère clandestinement (et en faisant appel à toutes ses ressources mathématiques), à partir des idées marginales d'un chercheur nommé Benvenida (on aura reconnu sous un nom à peine déguisé Benveniste, dont l'article qu'il cosigna dans *Nature*[3] restera associé pour la postérité à la *mémoire de l'eau*). L'auteur de ces lignes, décidément en phase avec Nath et qui se souvient d'une rencontre *Sciences et Citoyens* où la question de l'existence d'une *mémoire de l'eau* fut réglée d'un méprisant « si ça existait, ça se saurait », (par l'un des "scientifiques" qui vantaient précisément... la curiosité et l'ouverture d'esprit du vrai savant devant tout phénomène nouveau), suggère aux lecteurs[4] d'aller se rendre compte de la haine qui exsude des commentaires sur la plupart des sites Internet qui abordent le sujet. Arrogance, arrogance.

À vrai dire la lecture du *Problème de Nath* soulève une émotion beaucoup plus large. Le lecteur est tour à tour en présence de l'univers d'un enfant qui se heurte au monde des adultes (à la Calvin et Hobbes) ou que certains adultes ne considèrent pas comme un sujet (comme Gaspard dans *Le pays où l'on n'arrive jamais* d'A. Dhôtel), d'un livre de science-fiction (où l'on prend un *autotax* que l'on a commandé par un *visiobile*), de commentaires quasi-talmudiques (l'oncle de Nath s'appelle Ethan, et les lettres des mots Nath, Ethan, Nathanaël ne sont pas là par hasard), de pensées semées dans le texte (« C'est une des qualités de Serge : il sait attendre, surtout quand c'est urgent », ou « La connaissance est si souvent utilisée comme instrument de pouvoir... »), de commentaires sur le vocabulaire mathématique que ne renierait peut-être pas S. Baruk[5] (« Rien que ce mot de puissance l'effraie : en quoi un nombre multiplié par lui-même est-il plus puissant qu'un autre ? »).

Quant aux mathématiciens ils souriront de connivence avec des citations comme « Tu sais, une des choses que j'ai découvertes à cette époque, c'est qu'on comprend beaucoup mieux soi-même quand on apprend pour expliquer à un autre que quand on apprend pour soi. », ou « Juste qu'on n'est pas obligé, enfin pas toujours obligé, de tout comprendre pour s'en servir... », et bien sûr « Ce qu'on ne parvient pas à repousser un peu plus loin, on ne peut pas vraiment le comprendre. ». Ces lecteurs

---

[3] E. Davenas, F. Beauvais, J. Amara, M. Oberbaum, B. Robinzon, A. Miadonnai, A. Tedeschi, B. Pomeranz, P. Fortner, P. Belon, J. Sainte-Laudy, B. Poitevin, J. Benveniste, Human basophil degranulation triggered by very dilute antiserum against IgE, *Nature* **333** (30 Jun 1988) 816–818.

[4] Rappelons qu'en bon français "les lecteurs" ne dit rien sur la couleur de la layette portée dans leur plus jeune âge.

[5] Par exemple A. Hennesy écrit à propos du Dictionnaire des mathématiques élémentaires de S. Baruk, « Racine, cercle, droite, puissance, etc. sont en effet évocateurs de bien d'autres choses que de leurs étroites acceptions mathématiques, ce qui déroute plus d'un amateur, et il importe d'en définir précisément les limites avant de les faire "fonctionner" ».

“spécialisés” liront avec délectation la solution au problème de la bille d'acier dans une carafe, recouverte d'eau jusqu'à affleurement. Mais ils ne pourront pas accuser l'auteur d'être à son tour dogmatique : il suffit de lire à voix haute la dernière phrase (l'*explicit*) de ce roman délicieux : « L'air est vif, vif et léger, avec avril qui s'annonce. Il s'y sent comme un poisson dans l'eau. ».

Jean-Paul Allouche,
CNRS, LRI, Orsay