

SOMMAIRE DU N° 112

SMF

Mot de la Présidente	3
----------------------------	---

MATHÉMATIQUES

Les travaux de Wendelin Werner, <i>J.-F. Le Gall</i>	7
Les travaux d'Andrei Okounkov sur le modèle des dimères, <i>R. Kenyon</i>	18
Terence Tao et les équations aux dérivées partielles : un bref aperçu, <i>N. Tzvetkov</i> ..	23
Long Arithmetic Progressions of Primes, <i>B. Green</i>	26
Traitement du signal, <i>Y. Meyer</i>	28

HOMMAGE À JOSEPH LE POTIER

Joseph Le Potier (10 octobre 1944 - 8 décembre 2005), <i>C. Peskine</i>	33
Autour du théorème d'annulation de Le Potier, <i>C. Voisin</i>	35
Fibrés vectoriels sur le plan projectif (d'après J. Le Potier), <i>C. Sorger</i>	45
Dualité étrange et cohomologie du schéma de Hilbert, <i>L. Scala</i>	53

ENSEIGNEMENT

Débat organisé par la SMF et la SMAI le 13-01-2007

L'exemple de l'université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, <i>S. Derviaux</i>	67
Le programme de mathématiques de début d'année en CPGE, <i>Y. Yebbou</i>	69
Le niveau L en Mathématiques : la situation européenne, <i>M. Bellec</i>	70

INFORMATIONS

Journée d'accueil des nouveaux MCF et CR, <i>S. Cordier, A. Rousseau</i>	75
Annuaire national de la communauté mathématique française, <i>L'équipe Mathrice de gestion de l'annuaire</i>	80
Les Maths à l'ANR en 2006, <i>P. Flajolet, F. James</i>	81
Prix Abel 2007	84
La PEDR, et autres appels d'offres du ministère, <i>A. Bonami, L. Boudin</i>	85

CARNET

Raymond Couty (27 août 1919 - 5 mai 2005), <i>A. Revuz</i>	95
--	----

COURRIER DES LECTEURS

Recrutement et année de qualification : une précision	97
À propos de l'article d'Antoine Ducros	97
Un simple hommage	99

LIVRES	101
--------------	-----



Séminaires et Congrès 13

Groupes de Galois arithmétiques et différentiels D. Bertrand, P. Dèbes, éd.

Ce volume constitue les actes du colloque sur les groupes de Galois arithmétiques et différentiels qui s'est déroulé au CIRM de Luminy (France) du 8 au 13 Mars 2004. Le but était de rendre compte du rapprochement en cours entre les deux théories, et de le développer. Le volume, à l'image du colloque, aborde des thèmes communs aux deux théories : espaces de modules (de courbes, de revêtements, de connexions), questions arithmétiques (corps de définition, théorie de la descente), groupes fondamentaux, problèmes inverses, méthodes de déformation, calculs et réalisations explicites de groupes de Galois, aspects algorithmiques.

On March 8-13, 2004, a meeting was organized at the Luminy CIRM (France) on arithmetic and differential Galois groups, reflecting the growing interactions between the two theories. The present volume collects the proceedings of this conference. It covers the following themes: moduli spaces (of curves, of coverings, of connexions), including the recent developments on modular towers; the arithmetic of coverings and of differential equations (fields of definition, descent theory); fundamental groups; the inverse problems and methods of deformation; and the algorithmic aspects of the theories, with explicit computations or realizations of Galois groups.

prix public* : 76 € - prix membre* : 53 €

* frais de port non compris



Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

<http://smf.emath.fr>

Mot de la Présidente

Les *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, précédemment éditées par Gauthier-Villars puis par Elsevier, seront éditées par la Société Mathématique de France à compter de janvier 2008. L'autonomie scientifique du comité de rédaction de la revue par rapport à la SMF sera totale.

La SMF est donc confirmée dans son rôle de premier éditeur français de mathématiques au niveau de la recherche. C'est une fierté et une responsabilité, dans un contexte exigeant où les habitudes de travail et de communication évoluent très rapidement. Fierté de contribuer à notre niveau au grand mouvement d'auto-organisation de la communauté mathématique pour garantir l'autonomie scientifique et économique de sa production intellectuelle. Responsabilité car nous devons tout à la fois préserver la qualité de notre service aux lecteurs, et aux auteurs, renforcer notre efficacité et notre compétence technique, inventer un modèle économique qui permette au secteur de publication académique de se développer.

N'hésitez pas à diffuser la bonne nouvelle que représente pour la SMF le partenariat avec les *Annales de l'ENS* pour inviter nos collègues, notamment les jeunes, à nous rejoindre.

Le 28 mars 2007
Marie-Françoise Roy

Vie de la Société

Adhésions

La SMF a besoin du soutien de toute la communauté mathématique et nous invitons à parrainer un adhérent comme vous l'y invite le formulaire que vous pouvez télécharger sur le site de la SMF¹. Parrainer un adhérent vous permet de recevoir gratuitement la revue *Panoramas et Synthèses* 2006 ou la *Revue d'histoire des mathématiques* 2006.

La SMF offre une adhésion gratuite 2007 aux docteurs ayant soutenu en 2006². N'hésitez pas à le faire savoir autour de vous.

Par ailleurs le tarif jeune à 25 euros est désormais proposé jusqu'à 35 ans.

¹ http://smf.emath.fr/Adhesions/Form_Adh_SMF_Ind/2007/Parrainage.pdf

² <http://smf.emath.fr/Adhesions/JeunesDocteurs/>

Initiatives en cours

– La Conférence « Convergences Mathématiques Franco-Maghrébines » organisée par l'UNSA, l'INRIA et le CIMPA, à l'initiative de la SMF et de la SMAI, parrainée par l'Académie des Sciences, et soutenu par le MAE, a eu lieu à Nice du 22 au 24 janvier 2007. Ce colloque a réuni plus de 120 participants pour des exposés scientifiques et des table-rondes. Le comité scientifique se réunira les 20 et 21 juin 2007 à Paris à l'invitation de l'Académie des Sciences pour discuter de la suite à donner à cette initiative.

– Le premier congrès Franco-Espagnol³ de Mathématiques se prépare et se tiendra du 9 au 13 juillet 2007 à Saragosse en Espagne. L'affiche, comprenant la liste des conférenciers invités, est disponible sur le site de la SMF⁴.

– La brochure « Zoom sur les métiers des mathématiques » peut être demandée au secrétariat (dans la mesure des stocks disponibles). Le fichier pdf est téléchargeable⁵ librement.

– La SMF a adopté deux motions du collectif *ActionSciences* dont elle est un membre actif. Voir : <http://www.sfc.fr/ActionSciences.htm>

– « Pour une professionnalisation de la formation des enseignants⁶ »

– « Pour un renouveau de la voie générale scientifique au lycée⁷ »

Questionnaire aux candidats et candidates à la présidentielle

La Société Française de Physique, la Société Mathématique de France, et la Société Française de Chimie se sont adressés à l'ensemble des candidats et candidates à l'élection présidentielle :

« Mesdames et Messieurs les candidats à la présidentielle : quelle recherche voulez-vous pour la France ?

Une question de survie.

Dans un monde de plus en plus technologique, où les sciences façonnent notre quotidien, l'exigence d'une recherche de premier plan est une question de survie : survie économique pour notre pays, et survie pure et simple pour l'espèce humaine, qui s'aperçoit, peut-être pour la première fois de son histoire, que sa planète n'est pas si vaste que l'on puisse la dégrader indéfiniment. Plus que jamais auparavant la question de la recherche en France s'invite dans le débat politique. La nécessité de l'innovation et la compétition internationale réclament une recherche efficace à tout pays qui prétend compter, ou même seulement exister, dans le monde de demain. Mesdames et Messieurs les candidats à l'élection présidentielle, nos sociétés savantes de mathématiques, de physique et de chimie, soucieuses du rang de la France quant au développement de la connaissance, et observatrices privilégiées des conditions de production de cette connaissance, vous demandent de prendre clairement position sur un certain nombre d'enjeux d'envergure. Au travers de vos

³ <http://www.unizar.es/ICHFM07/>

⁴ <http://smf.emath.fr/VieSociete/Rencontres/ICHFM07.jpg>

⁵ <http://smf.emath.fr/Publications/ZoomMetiersDesMaths/Presentation/>

⁶ <http://smf.emath.fr/VieSociete/PositionsSMF/professionnalisationActionSciences.pdf>

⁷ http://smf.emath.fr/VieSociete/PositionsSMF/voieS_ActionSciences2007.pdf

réponses nous attendons que se dessine votre vision de l'avenir de la recherche française.

Quelle place géopolitique ?

La recherche est désormais une activité d'échelle planétaire. Il n'y a plus de recherche avancée qui ne soit internationale. L'Europe, et en son sein la France, devra s'imposer sur l'échiquier mondial face aux pays anglo-saxons mais aussi face aux grandes puissances émergentes telles la Chine et l'Inde, dont la poussée en matière de recherche est indéniable. Parallèlement, nous attendons de l'Europe qu'elle contribue efficacement au développement d'une recherche qui bénéficie aux pays en voie de développement, notamment en Afrique, et leur permette de renforcer leur autonomie. Quelle politique étrangère et européenne soutiendrez-vous en matière de recherche ?

Quelle recherche ?

Comment assurer la présence et la compétitivité de la recherche française sur les grands enjeux scientifiques du XXI^e siècle, qu'ils concernent les questions de développement durable, d'environnement, d'énergie, de santé ou encore de société ? La production d'électricité en France repose actuellement à près de 80% sur l'énergie nucléaire, ce qui limite les émissions de gaz à effet de serre mais pose d'autres problèmes. Quelle est votre position vis-à-vis de l'énergie nucléaire, pour la France et dans le monde ? Un rapport récent souligne l'inefficacité relative de la recherche française sur le plan économique. Nos brevets restent mal exploités, les créations de PME sont peu favorisées, les contrats industriels passés avec les universitaires stagnent, les entreprises préfèrent les ingénieurs aux docteurs pour l'embauche. Etes vous d'accord avec cette analyse ? Quelles mesures prendrez-vous pour y remédier ? Si améliorer substantiellement la valorisation de la recherche en France constitue un défi majeur, la tentation pourrait être grande d'en délaisser dans le même temps la recherche amont. Pourtant, alors que les applications technologiques transforment notre monde d'aujourd'hui, la recherche fondamentale prépare déjà celle de demain en ouvrant la voie à de nouveaux concepts, en découvrant de nouvelles lois de la nature que la technologie pourra alors exploiter. Quelle articulation préconisez-vous entre recherche technologique et recherche fondamentale ?

Quels moyens ?

Une recherche compétitive ne se fait pas sans moyens, tant au niveau national qu'au niveau européen. Quel pourcentage du PIB souhaitez-vous consacrer à la recherche et comment comptez-vous œuvrer avec nos partenaires pour mieux structurer la recherche en Europe ? Le gouvernement vient de prendre une série de mesures destinées à soutenir la recherche sur projets (ANR, AII, OSEO-ANVAR). Cependant, la multiplication des strates et sources financières engendre une logique de guichets à répétition qui complexifie et alourdit la gestion des moyens des équipes de recherche. Comment favoriser l'innovation, comment soutenir la recherche tant au niveau national qu'europpéen, sans pour autant tomber dans un émiettement stérile de l'allocation des moyens ? La recherche privée monte en puissance. Une recherche publique forte et indépendante, développant l'amont sans pour autant négliger la valorisation, doit néanmoins être clairement soutenue. Quelle articulation envisagez-vous entre recherche publique et recherche privée dans les années à venir ?

Quelles institutions, quels acteurs ?

Beaucoup de dispositions sont critiquées dans la gouvernance des universités : l'uniformité des obligations de service, la lourdeur des tâches d'enseignement des jeunes enseignants chercheurs, la faible participation de membres extérieurs dans les conseils et les commissions de spécialistes, les modes de désignation des présidents, etc. Pensez-vous utile de revenir sur la loi Savary pour y remédier ? La dichotomie universités-grandes écoles, propre à la France, rend difficile la formation de nos jeunes scientifiques. Les grandes écoles attirent les meilleurs étudiants, qui sont peu orientés vers la recherche, tandis que les universités concentrent les meilleurs laboratoires et les enseignants formés par la recherche. Quelle articulation envisagez-vous entre l'université et les grandes écoles ? Quels moyens consacrerez-vous à l'attractivité des filières scientifiques universitaires, en particulier à la formation des futurs enseignants ? Comment mieux coordonner les efforts de l'université et des grands instituts de recherche (CNRS, Inserm,...) ? Quelle dose d'autonomie préconisez-vous pour ces institutions ? Considérer l'université ne va pas sans considérer les enseignants-chercheurs et chercheurs qui en sont la moelle. Le décalage entre les carrières universitaires en France et aux États-Unis se passe de commentaires. Il en va de même de l'accès aux moyens de la recherche. Une fuite importante des cerveaux français à l'étranger est déjà sensible. Il est urgent de renverser ce mouvement, d'attirer des étrangers vers nos laboratoires et d'enrayer la désaffection croissante des jeunes pour les carrières scientifiques, sous peine de voir des pans entiers de notre recherche s'effondrer. Quelles mesures comptez-vous prendre pour revaloriser les conditions des chercheurs et des enseignants-chercheurs, notamment en termes de salaire, de moyens dédiés à leur recherche et de modulation des charges d'enseignement ? »

MATHÉMATIQUES

La rubrique mathématique de cette Gazette est consacrée aux travaux de Wendelin Werner, Andrei Okounkov et Terence Tao, trois des médaillés Fields du dernier congrès international. Nous avons déjà consacré plusieurs articles⁰ aux travaux de Grigori Perelman, le quatrième d'entre eux ainsi qu'une présentation de ceux de Kiyosi Itô (Prix Gauss).

Les travaux de Wendelin Werner

Jean-François Le Gall¹

Les travaux de Wendelin Werner ont été récompensés par la médaille Fields lors du dernier Congrès International des Mathématiciens de Madrid 2006. C'est la première fois qu'un tel honneur revient à un spécialiste de la théorie des probabilités. Après avoir soutenu en 1993 une thèse de l'Université Paris VI sur les propriétés du mouvement brownien plan, Wendelin Werner est devenu professeur à l'Université Paris-Sud en 1997, et membre de l'Institut universitaire de France en 2001.

Sans négliger les premiers travaux de recherche de Wendelin Werner, parmi lesquels son article important avec Balint Toth sur le « vrai » mouvement auto-répulsif en 1998, on peut estimer que ses contributions les plus marquantes, qui lui ont valu la médaille Fields, sont l'étude des exposants critiques d'intersection du mouvement brownien, le développement de la théorie des processus *SLE*, et les nombreuses applications aux modèles de physique statistique sur réseau qui ont suivi. Nous donnons ci-dessous un aperçu nécessairement incomplet de ces résultats, dont une partie importante a été obtenue en collaboration avec Greg Lawler et Oded Schramm. Nous renvoyons le lecteur intéressé par plus de détails à l'excellent cours [26] de Wendelin Werner à l'École d'été de probabilités de Saint-Flour, dont ce texte est largement inspiré.

⁰ Voir les articles de L. Bessières, *Gazette* 106, octobre 2005, de M.T. Anderson, *Gazette* 103, janvier 2005 et de Marc Yor *Gazette* 111, janvier 2007.

¹ École Normale Supérieure, Paris.

La définition des exposants

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log P(\{S_0, S_1, \dots, S_n\} \cap \{S'_0, S'_1, \dots, S'_n\} = \emptyset)}{\log n} = -\frac{\xi}{2}. \quad (1)$$

Le réel ξ est noté $\xi(1, 1)$ pour rappeler qu'il correspond à la probabilité de non-intersection d'une marche aléatoire avec une autre. Plus généralement, pour tout choix des entiers $p_1 \geq 1, \dots, p_k \geq 1$, on peut définir de manière analogue un exposant $\xi(p_1, \dots, p_k)$, en considérant $p_1 + p_2 + \dots + p_k$ marches aléatoires simples indépendantes sur $\mathbb{Z}^2$ issues de points différents, sur l'intervalle de temps $\{0, 1, \dots, n\}$: on étudie alors la probabilité que le « paquet » formé de la réunion des trajectoires des p_1 premières marches aléatoires, le paquet formé de la réunion des trajectoires des p_2 marches aléatoires suivantes, et ainsi de suite jusqu'au paquet formé par les p_k dernières marches aléatoires, soient disjoints. On montre que cette probabilité se comporte quand $n \rightarrow \infty$ comme $n^{-\xi(p_1, p_2, \dots, p_k)/2}$ avec un exposant $\xi(p_1, p_2, \dots, p_k) > 0$.

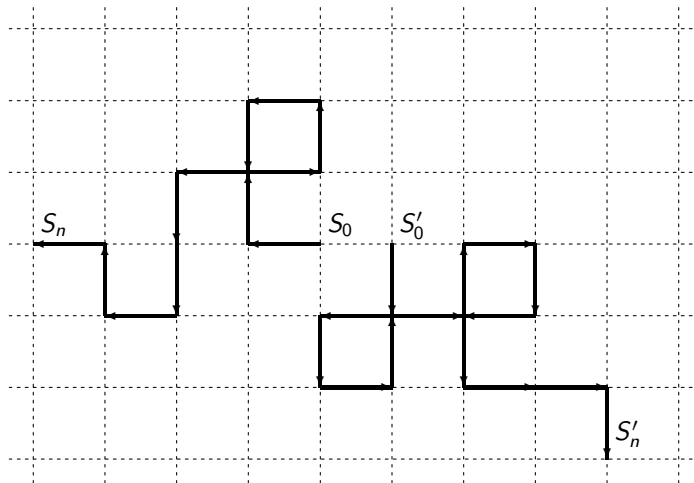


Figure 1 : Illustration de la définition de $\xi(1, 1)$.

Les mêmes exposants d'intersection peuvent être définis en termes de mouvements browniens. Par exemple, dans le cas de $\xi(1, 1)$, on observe que la probabilité de non-intersection de deux trajectoires browniennes planes indépendantes sur l'intervalle de temps $[0, t]$ se comporte comme $t^{-\xi(1,1)/2}$ quand t est grand. Par ailleurs, il est aussi très utile de considérer les exposants dans un demi-espace : on définit l'exposant $\zeta(1, 1)$ de la même manière que $\xi(1, 1)$, mais dans la probabilité considérée dans (1), on ajoute aussi l'événement que les deux trajectoires de marches aléatoires sont restées jusqu'à l'instant n dans le demi-plan supérieur. On procède de même pour définir $\zeta(p_1, \dots, p_k)$.

L'étude des exposants d'intersection a d'abord été motivée par des travaux de physique statistique ou de physique théorique : les modèles de polymères importants en physique statistique impliquent des marches aléatoires conditionnées à ne pas avoir d'auto-intersection, et certains modèles de théorie des champs utilisent des systèmes de trajectoires browniennes qui ne doivent pas se rencontrer. On s'est aperçu ensuite que le calcul exact des exposants était relié à des problèmes d'analyse fine de la trajectoire brownienne, dont la fameuse conjecture de Mandelbrot sur laquelle nous reviendrons.

Le calcul des exposants

Une série de travaux importants de Wendelin Werner, d'abord en collaboration avec Greg Lawler puis aussi avec Oded Schramm, a conduit au calcul explicite de tous les exposants d'intersection. Une première étape cruciale [9] fut l'obtention de relations en cascade reliant les différents exposants, obtenue au moyen de jolis arguments d'invariance conforme. L'écriture de ces relations nécessite d'abord d'étendre la définition des exposants d'intersection à des paramètres réels positifs, et non plus seulement entiers (bien qu'évidemment il n'y ait a priori pas de sens à considérer un paquet formé d'un nombre réel non entier de marches aléatoires...). On autorise aussi la valeur 0 pour les paramètres : par exemple, l'exposant $\xi(p, 0)$ décrit le comportement asymptotique de la probabilité que la réunion de p trajectoires browniennes planes indépendantes sur l'intervalle de temps $[0, t]$, issues du point 1 du plan complexe pour fixer les idées, ne disconnecte pas l'origine de l'infini.

Les relations en cascades montrent par exemple que

$$\xi(1, 1, 1) = \xi(1, \zeta(1, 1))$$

et plus généralement

$$\xi(p_1, \dots, p_k) = \xi(p_1, \dots, p_{j-1}, \zeta(p_j, \dots, p_k))$$

pour tout choix de $j \in \{2, \dots, k-1\}$. Ces relations en cascades conduisent à des conjectures naturelles pour les valeurs des exposants [9].

Dans un article suivant [10], Lawler et Werner utilisent les relations en cascades pour montrer un résultat d'universalité des exposants d'intersection : si l'on considère une mesure μ sur les sous-ensembles du plan, qui vérifie une certaine propriété d'invariance conforme, les exposants d'intersection asymptotiques que l'on peut attacher à cette mesure seront les mêmes que les exposants browniens définis ci-dessus. De manière très informelle, il existe un nombre $\alpha(\mu) > 0$ tel qu'un sous-ensemble du plan distribué selon μ se comporte comme un paquet de α mouvements browniens indépendants.

Ces résultats d'universalité suggèrent que, pour déterminer effectivement les exposants, il suffirait de trouver une « bonne mesure » sous laquelle les évaluations asymptotiques soient plus faciles que pour des trajectoires browniennes ou des marches aléatoires. Cet outil fut fourni par les évolutions stochastiques de Schramm-Loewner ou processus SLE (introduits par Schramm [22] en 2000), et plus précisément par le processus SLE_6 discuté ci-dessous. Une série d'articles de Lawler, Schramm et Werner [12], [13], [14], [15] parvint alors au calcul complet des exposants d'intersection. Les formules explicites sont les suivantes :

$$\zeta(p_1, \dots, p_k) = \frac{(\sqrt{24p_1+1} + \sqrt{24p_2+1} + \dots + \sqrt{24p_k+1} - (k-1))^2 - 1}{24}$$

et

$$\xi(p_1, \dots, p_k) = \frac{(\sqrt{24p_1+1} + \sqrt{24p_2+1} + \dots + \sqrt{24p_k+1} - k)^2 - 4}{48}. \quad (2)$$

En particulier l'exposant $\xi(1, 1)$ introduit ci-dessus vaut $5/4$. Certaines de ces formules avaient été conjecturées par les physiciens théoriciens Duplantier et Kwon [6] sur la base de simulations, et plus tard interprétées par Duplantier [5] dans le cadre de la théorie de la gravité quantique.

La conjecture de Mandelbrot

Une application particulièrement remarquable de ces calculs est la détermination de la dimension de Hausdorff de la frontière extérieure d'une courbe brownienne plane. La frontière extérieure F est simplement la frontière de la composante connexe non bornée du complémentaire de la courbe brownienne (prise sur l'intervalle de temps $[0, 1]$ pour simplifier). Une conjecture de Mandelbrot, basée sur des simulations numériques, affirmait que $\dim(F) = 4/3$. Cette conjecture avait résisté pendant de longues années aux efforts des spécialistes : il avait déjà fallu beaucoup d'efforts [3] pour arriver simplement à montrer que $\dim(F) > 1$.

La preuve par Lawler, Schramm et Werner [15] de la conjecture de Mandelbrot découle des formules ci-dessus et de l'expression $\dim(F) = 2 - \xi(2, 0)$. Cette dernière expression est assez facile à comprendre en observant que, pour un point extérieur à la courbe mais proche de F , il existe localement deux trajectoires browniennes planes indépendantes partant près du point considéré mais qui échouent à le disconnecter de l'infini.

Les évolutions stochastiques de Schramm-Loewner (SLE)

La définition des processus SLE

Notons $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ le demi-plan supérieur dans le plan complexe $\mathbb{C}$. Dans un cadre déterministe, l'équation de Loewner permet de construire des familles croissantes $(K_t)_{t \geq 0}$ de sous-ensembles compacts du demi-plan fermé $\overline{\mathbb{H}}$ telles que $K_0 = \{0\}$, K_t et $\mathbb{H} \setminus K_t$ sont connexes pour tout $t \geq 0$, et à chaque instant t , K_t « croît en un seul point » (pour une forme précise de cette dernière propriété voir la Proposition 2.1 de [26]).

Considérons d'abord une fonction déterministe continue w_t de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $w_0 = 0$. Pour tout $z \in \overline{\mathbb{H}}$, on définit une autre fonction $g_t(z)$ comme la solution de l'équation

$$\partial_t g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - w_t},$$

issue de $g_0(z) = z$. En fait la solution $g_t(z)$ n'est bien définie que pour $0 \leq t < T(z)$, où

$$T(z) = \sup\{t \geq 0 : \min_{s \in [0, t]} |g_s(z) - w_s| > 0\}.$$

On pose ensuite, pour tout $t \geq 0$,

$$K_t := \{z \in \overline{\mathbb{H}} : T(z) \leq t\}.$$

et la famille $(K_t)_{t \geq 0}$ est la chaîne de Loewner associée à la fonction w_t .

Le processus SLE_κ est par définition la chaîne de Loewner (aléatoire) associée à la fonction $w_t = \sqrt{\kappa} B_t$, où B_t désigne un mouvement brownien linéaire issu de 0. Le fait que la constante κ joue un rôle important est a priori surprenant pour un œil probabiliste : habituellement multiplier un mouvement brownien par une constante strictement positive ne conduit qu'à des changements triviaux. Dans la théorie des processus SLE , il en va autrement : selon la valeur de κ , ces processus ont des propriétés très différentes. En particulier, si $\kappa \leq 4$, SLE_κ est engendré par une courbe simple, c'est-à-dire qu'il existe une fonction (aléatoire) continue injective $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{H}}$ telle que $K_t = \{\gamma_s : 0 \leq s \leq t\}$. Ce n'est plus vrai si $\kappa > 4$, mais dans ce cas on peut encore trouver une courbe γ_t (non injective mais « ne se croisant pas ») telle que K_t soit la réunion de $\{\gamma_s : 0 \leq s \leq t\}$ et de l'intérieur des boucles formées par la courbe (de façon plus précise, $\mathbb{H} \setminus K_t$ est l'unique composante connexe non bornée de $\mathbb{H} \setminus \{\gamma_s : 0 \leq s \leq t\}$). Lorsque $\kappa \geq 8$, la courbe en question est une courbe de Peano remplissant l'espace. Ces propriétés sont discutées en détail dans l'article de Rohde et Schramm [21].

Dans la suite nous considérerons surtout le cas de SLE dans le demi-espace, comme présenté ci-dessus. Cependant, on peut aussi définir SLE dans un domaine simplement connexe quelconque D en utilisant l'invariance conforme. Supposons pour simplifier que D a une frontière lipschitzienne et soient a et b deux points distincts de ∂D . Soit Φ la bijection conforme de $\mathbb{H}$ sur D telle que $\Phi(0) = a$ et $\Phi(\infty) = b$ (en fait Φ est seulement définie à une homothétie près sur la variable de $\mathbb{H}$). On définit SLE_κ dans D , partant de a et finissant en b , comme étant le processus $(\Phi(K_t))_{t \geq 0}$, qui est déterminé à un changement de temps linéaire près.

Les définitions précédentes correspondent au SLE « cordal » (allant d'un point de la frontière à un autre) : il existe aussi une notion de SLE radial dont nous ne parlerons pas.

La propriété de localité de SLE_6 et la courbe brownienne

Les processus SLE ont des propriétés d'invariance conforme remarquables que nous allons expliciter dans deux cas particuliers importants du paramètre κ . Appelons coque (hull en anglais) un sous-ensemble compact A de $\mathbb{H}$ tel que $\mathbb{H} \setminus A$ est simplement connexe et A est à distance strictement positive de l'origine. Il existe alors une unique bijection conforme Ψ_A de $\mathbb{H} \setminus A$ sur $\mathbb{H}$ telle que $\Psi_A(z) = z + O(1)$ quand $z \rightarrow \infty$, et $\Psi_A(0) = 0$.

Supposons d'abord que $(K_t)_{t \geq 0}$ est SLE_6 correspondant à $\kappa = 6$. Notons $\tilde{K}_t = \Psi_A(K_t)$ qui est bien défini pour $t < T := \inf\{t \geq 0 : K_t \cap A \neq \emptyset\}$, et posons aussi $\tilde{T} = \inf\{t \geq 0 : K_t \cap \Psi_A(\partial A) \neq \emptyset\}$. La propriété de localité de SLE_6 énonce que, pour tout choix de la coque A , les processus $(\tilde{K}_t, 0 \leq t < T)$ et $(K_t, 0 \leq t < \tilde{T})$ ont même loi à changement de temps près. Cette propriété de localité est bien entendu analogue à la propriété d'invariance conforme démontrée par Paul Lévy pour le mouvement brownien plan (l'image d'une courbe brownienne plane par une transformation conforme est une nouvelle courbe brownienne à changement de temps près). C'est grâce à la propriété de localité, et en utilisant l'universalité des exposants d'intersection, que Lawler, Schramm et Werner ont pu mener à bien le calcul des exposants d'intersection comme cela est expliqué dans la partie précédente (voir en particulier [12] où est énoncée pour la première fois la propriété de localité de SLE_6).

Il existe des relations étroites entre SLE_6 et la courbe brownienne plane. La Figure 2, extraite de [26], illustre une relation particulièrement frappante : le sous-ensemble noir peut être vu alternativement comme la valeur de SLE_6 dans le triangle (partant du sommet inférieur) considéré à l'instant où il touche l'arête supérieure, ou bien comme l'ensemble obtenu en « bouchant les trous » d'une courbe brownienne plane issue du sommet inférieur, réfléchi sur les bords du triangle et arrêtée quand elle touche l'arête supérieure. Le Théorème 5.3 de [26] montre en effet que ces deux ensembles aléatoires ont même loi.

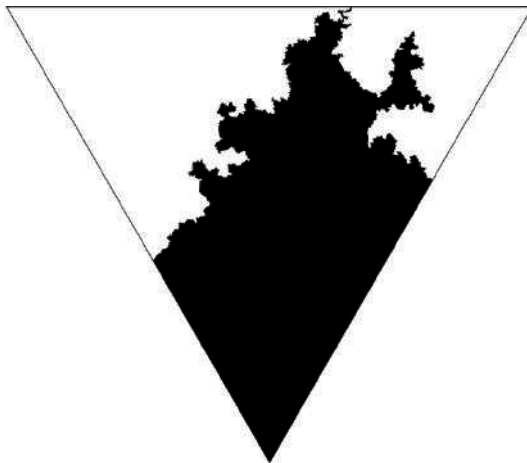


Figure 2 : SLE_6 , ou un mouvement brownien réfléchi dans le triangle.

La propriété de restriction de $SLE_{8/3}$ et la frontière brownienne

Considérons maintenant le cas de $SLE_{8/3}$ et notons

$$K_\infty = \bigcup_{t \geq 0} K_t.$$

La propriété de restriction de $SLE_{8/3}$, discutée dans [17], affirme que, pour toute coque A , la loi conditionnelle de K_∞ sachant que $K_\infty \cap A = \emptyset$ coïncide avec la loi de $\Psi_A^{-1}(K_\infty)$. En fait, on peut même montrer (c'est plus difficile) que la loi de $SLE_{8/3}$ est la seule mesure de probabilité sur les courbes simples continues allant

de 0 vers ∞ dans $\mathbb{H}$ qui satisfait cette propriété. La preuve de la propriété de restriction découle de la formule explicite

$$P[K_t \cap A = \emptyset, \text{ pour tout } t \geq 0] = \Psi'_A(0)^{5/8} \quad (3)$$

qui est elle-même obtenue par des arguments de calcul stochastique à partir de l'équation de Loewner.

L'article [17] donne une description complète de toutes les mesures sur les fermés simplement connexes joignant 0 à l'infini dans $\mathbb{H}$ (pas nécessairement des courbes simples) qui vérifient la propriété de restriction. Ces mesures sont construites à partir de SLE_κ pour les valeurs $\kappa \in]0, 8/3]$ en ajoutant à la courbe de SLE_κ un processus de Poisson de « bulles browniennes » le long de cette courbe (nous verrons plus loin que dans le cas $\kappa = 2$, SLE_κ est la limite continue de marches aléatoires à boucles effacées, et la construction précédente s'interprète en disant que l'on rajoute les boucles d'abord effacées). Dans un article suivant [11], Lawler et Werner ont donné une autre version de cette construction, qui revient à ajouter à une courbe SLE tous les lacets qu'elle rencontre dans une « soupe de lacets browniens ». Ces travaux autour de la propriété de restriction sont liés à la théorie conforme des champs (voir [7], [8]) et ont des interprétations qui font intervenir les représentations de plus haut poids de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs polynomiaux sur le cercle unité. En fait, la caractérisation donnée ci-dessus de la loi de $SLE_{8/3}$ correspond au fait que le plus haut poids de la seule représentation dégénérée au niveau 2 est égal à $5/8$ (cf [7], [8]).

Le processus $SLE_{8/3}$ a beaucoup de propriétés remarquables, dont certaines le relient à la courbe brownienne plane (un peu comme SLE_6 , mais rappelons que $SLE_{8/3}$ est une courbe simple, ce qui n'est pas le cas de SLE_6). Appelons excursion brownienne dans $\mathbb{H}$ un processus issu de l'origine dont la partie réelle est un mouvement brownien linéaire standard et la partie imaginaire un mouvement brownien linéaire conditionné à rester positif (un processus de Bessel de dimension trois pour les spécialistes). On a alors le résultat stupéfiant suivant [17] : le fermé aléatoire obtenu en remplissant les trous de la réunion de 5 excursions browniennes indépendantes a la même loi que l'ensemble analogue déduit de la réunion de 8 processus $SLE_{8/3}$ indépendants. La preuve de ce résultat est encore une conséquence de la formule (3), et de la formule similaire pour l'excursion brownienne (évidemment le choix des entiers 5 et 8 correspond à l'exposant $5/8$ dans (3)). En application de ce résultat on obtient que la frontière extérieure d'une excursion brownienne dans $\mathbb{H}$, ou d'une courbe brownienne plane, est réunion de « petits morceaux » de courbes $SLE_{8/3}$. Modulo le calcul de la dimension de Hausdorff de SLE_κ (Beffara [1] donne ce calcul dans le cas $\kappa = 8/3$, voir aussi [21]) cela fournit une approche de la conjecture de Mandelbrot différente de celle indiquée ci-dessus.

La mesure invariante par transformation conforme sur les lacets simples

Un article récent de Wendelin Werner [27] étudie les mesures sur l'espace des lacets simples du plan complexe (ou plus généralement d'une surface de Riemann) qui possèdent des propriétés d'invariance conforme. On appelle ici lacet simple une injection continue du cercle S^1 dans le plan, considérée à reparamétrisation près. De manière analogue à la caractérisation de $SLE_{8/3}$ donnée ci-dessus, le résultat principal de [27] énonce qu'à un facteur multiplicatif près, il existe une seule mesure

non-triviale μ sur les lacets simples du plan qui satisfait la propriété de restriction suivante : si D et D' sont deux domaines du plan complexe tels qu'il existe une bijection conforme Φ de D sur D' , l'image par Φ de la mesure μ restreinte aux lacets contenus dans D est la mesure μ restreinte aux lacets contenus dans D' . De plus, on peut construire μ à partir de la mesure naturelle M sur les lacets browniens (qui ne sont pas des lacets simples !) étudiée dans [11] : μ est simplement la « loi » sous M du lacet simple obtenu en considérant la frontière extérieure du lacet brownien. On peut aussi interpréter la mesure μ comme la « loi » d'un lacet de processus $SLE_{8/3}$, ce qui donne une version quantitative plus précise des liens entre la frontière extérieure de la courbe brownienne et les processus SLE , évoqués dans le paragraphe précédent.

***SLE* et la physique statistique**

Les processus SLE ont des propriétés probabilistes extraordinaires, qui (entre autres) ont considérablement amélioré notre connaissance du mouvement brownien plan. Ces propriétés à elles seules suffisent à faire de ces processus des objets majeurs des probabilités modernes. Mais, si la théorie des processus SLE est considérée à juste titre comme le progrès le plus important dans le domaine des probabilités depuis longtemps, c'est aussi en raison de ses applications spectaculaires aux modèles de physique statistique sur un réseau.

***SLE* et la percolation**

Considérons d'abord la percolation critique sur le réseau triangulaire (cf Figure 3) : chaque sommet est ouvert ou fermé avec probabilité $p = 1/2$, indépendamment des autres (la valeur $1/2$ est ici la valeur critique au-dessus de laquelle il existe un amas de percolation infini). L'amas contenant un point fixé est l'ensemble des sommets du réseau qui sont reliés à ce point par un chemin ne passant que par des sommets ouverts. Le contour d'un tel amas de percolation peut être représenté par un « processus d'exploration » (voir la Figure 3 ci-dessous, ou la Figure 1.4 de [26]). De manière implicite dans le travail de Smirnov [23] et plus explicite dans l'article récent de Camia et Newman [4], on montre que la limite continue du processus d'exploration d'un grand amas de percolation est donnée par le processus SLE_6 , ou plus précisément par la courbe continue γ_t qui génère SLE_6 , comme cela est expliqué ci-dessus. Cela permet ensuite [16], [25] d'établir de nombreux résultats asymptotiques sur la percolation, qui jusqu'alors étaient considérés comme inaccessibles. Par exemple, la probabilité qu'il existe n amas de percolation disjoints reliant un voisinage de l'origine au complémentaire du disque de rayon R centré en l'origine se comporte quand $R \rightarrow \infty$ comme $R^{-\alpha_n}$, où $\alpha_1 = 5/48$ et $\alpha_n = (4n^2 - 1)/12$. On peut remarquer que pour $n \geq 2$, α_n coïncide avec l'exposant d'intersection $\xi(1, 1, \dots, 1)$ pour n mouvements browniens indépendants (cf la formule (2)). Cela correspond aux relations étroites qui existent entre SLE_6 et la courbe brownienne plane.

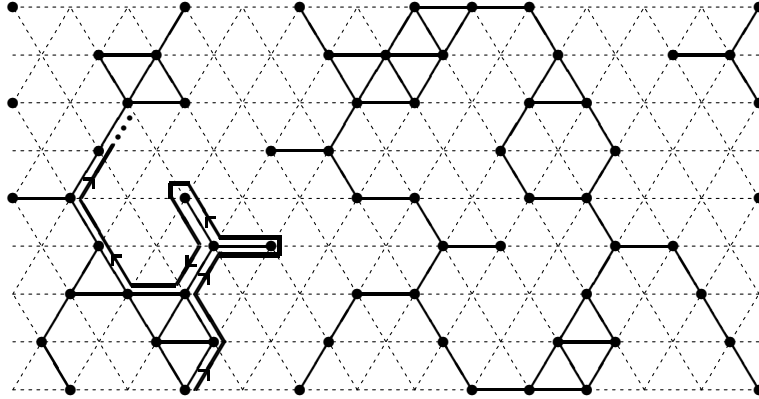


Figure 3 : Illustration de la percolation sur le réseau triangulaire. Les sommets ouverts et les arêtes qui les joignent sont en gras, ce qui permet de visualiser les amas de percolation. On a aussi représenté le début du processus d'exploration qui dessine le contour de l'amas de gauche.

En suivant des idées de Kesten, Smirnov et Werner [25] ont déduit des asymptotiques précédentes d'autres résultats importants concernant la percolation sur le réseau triangulaire. En particulier, pour la percolation de paramètre $p > 1/2$, la probabilité que l'origine appartienne à l'unique amas infini se comporte comme $(p - 1/2)^{5/36 + o(1)}$ quand $p \rightarrow 1/2+$. Pour la percolation de paramètre $p < 1/2$, la longueur de corrélation explose comme $(1/2 - p)^{-4/3 + o(1)}$ quand $p \rightarrow 1/2-$ (de manière informelle la longueur de corrélation mesure la distance ℓ pour laquelle la probabilité que deux points éloignés de ℓ soient dans le même amas devient exponentiellement petite). Les valeurs de ces exposants critiques avaient été prédites par les physiciens théoriciens (voir [26] pour des références détaillées), mais c'est seulement grâce à *SLE* que des preuves mathématiques rigoureuses ont pu être données. Beaucoup cependant reste à faire, à commencer par le cas de réseaux plus généraux tels que le réseau carré $\mathbb{Z}^2$, pour lesquels le principe d'universalité suggère que les exposants critiques sont les mêmes.

Toujours dans le cas de la percolation sur le réseau triangulaire, l'article [27] montre que la frontière extérieure de la limite continue d'un amas de percolation critique est distribuée selon la mesure μ sur les lacets simples introduite ci-dessus.

D'autres modèles où intervient *SLE*

Dans ce paragraphe, nous discutons brièvement deux autres modèles discrets dont la limite continue conduit à des processus SLE_κ pour deux nouvelles valeurs de κ . Ces modèles étaient déjà discutés dans l'article original de Schramm [22] et leur relation conjecturale avec les processus *SLE* y avait fourni la motivation pour l'introduction de ces processus.

Commençons par le modèle des marches aléatoires à boucles effacées (loop-erased random walk). Pour obtenir une marche aléatoire à boucles effacées dans le plan, on part d'une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$ issue de 0, arrêtée quand elle quitte un « grand » disque centré à l'origine, et on modifie cette trajectoire en effaçant les boucles formées par la marche dans l'ordre chronologique, jusqu'à

obtenir une courbe simple (« auto-évitante ») allant de l'origine jusqu'à l'extérieur du disque. Les marches aléatoires à boucles effacées fournissent donc des modèles de chemins auto-évitants et ils ont été introduits par Lawler dans les années 1980 car ils sont a priori moins difficiles à étudier que les « vraies » marches aléatoires auto-évitantes (la vraie marche aléatoire auto-évitante est obtenue en considérant la probabilité uniforme sur tous les chemins auto-évitants de longueur n issus de l'origine). Le résultat frappant de Lawler, Schramm et Werner établi dans [18] énonce qu'une longue marche aléatoire à boucles effacées sur un réseau de petit pas est proche en loi d'un processus SLE_2 . Comme cela est expliqué dans l'introduction de [26], ce résultat permet aussi d'avoir une meilleure compréhension intuitive de la raison profonde pour laquelle l'équation de Loewner intervient dans la définition des processus SLE .

Un résultat lié au précédent, également établi dans [18], est la convergence des arbres aléatoires couvrants uniformes vers SLE_8 . Il est plus facile d'énoncer ce résultat en termes de courbes remplissant l'espace (il existe des correspondances bijectives entre ces courbes sur un réseau et les arbres couvrants). Considérons un domaine D simplement connexe du plan de frontière C^1 , et a et b deux points distincts de ∂D . Pour tout $\delta > 0$ notons $D_\delta = D \cap \delta\mathbb{Z}^2$, et a_δ et b_δ les points de D_δ les plus proches de a et b respectivement. Soit $w_{(\delta)}$ une trajectoire aléatoire choisie uniformément parmi tous les chemins allant de a_δ à b_δ dans D_δ , qui visitent chaque point de D_δ exactement une fois. Alors la loi de $w_{(\delta)}$ (convenablement changé de temps) converge vers la loi du processus SLE_8 dans D partant de a et finissant en b . Rappelons comme cela a été mentionné plus haut que SLE_8 est une courbe de type Peano qui remplit l'espace.

Il est très plausible que dans un avenir proche les processus SLE fournissent des réponses satisfaisantes à de nombreux autres problèmes de physique statistique sur les réseaux plans. Parmi les questions ouvertes, l'une des plus fascinantes est la convergence des vraies marches aléatoires auto-évitantes vers $SLE_{8/3}$: une discussion de cette convergence figure dans l'article [19], qui montre aussi comment la preuve du résultat attendu permettrait de retrouver les conjectures de Nienhuis [20] sur les marches aléatoires auto-évitantes. Dans une autre direction, Smirnov [24] a récemment annoncé de nouveaux résultats reliant les interfaces dans le modèle d'Ising aux processus SLE .

Références

- [1] BEFFARA, V. Hausdorff dimensions for SLE_6 . *Ann. Probab.* **32** (2004), 2606–2629.
- [2] BURDZY, K., LAWLER, G.F. Nonintersection exponents for Brownian paths. I. Existence and an invariance principle. *Probab. Theory Related Fields* **84** (1990), 393–410.
- [3] BURDZY, K., LAWLER, G.F. Nonintersection exponents for Brownian paths. II. Estimates and applications to a random fractal. *Ann. Probab.* **18** (1990), 981–1009.
- [4] CAMIA, F., NEWMAN, C.M. Critical percolation exploration path and $SLE(6)$: a proof of convergence. *Probab. Theory Related Fields*, à paraître. arXiv :math.PR/0604487
- [5] DUPLANTIER, B. Random walks and quantum gravity in two dimensions. *Phys. Rev. Letters* **81**, 5489–5492.
- [6] DUPLANTIER, B., KWON, K.-H. Conformal invariance and intersection of random walks. *Phys. Rev. Letters* **61**, 2514–2517.
- [7] FRIEDRICH, R., WERNER, W. Conformal fields, restriction properties, degenerate representations and SLE . *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **335** (2002), 947–952.

- [8] FRIEDRICH, R., WERNER, W. Conformal restriction, highest-weight representations and *SLE*. *Comm. Math. Phys.* **243** (2003), 105–122.
- [9] LAWLER, G.F., WERNER, W. Intersection exponents for planar Brownian motion. *Ann. Probab.* **27** (1999), 1601–1642.
- [10] LAWLER, G.F., WERNER, W. Universality for conformally invariant intersection exponents. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **2** (2000), 291–328.
- [11] LAWLER, G.F., WERNER, W. The Brownian loop soup. *Probab. Theory Related Fields* **128** (2004), 565–588.
- [12] LAWLER, G.F., SCHRAMM, O., WERNER, W. Values of Brownian intersection exponents. I. Half-plane exponents. *Acta Math.* **187** (2001), 237–273.
- [13] LAWLER, G.F., SCHRAMM, O., WERNER, W. Values of Brownian intersection exponents. II. Plane exponents. *Acta Math.* **187** (2001), no. 2, 275–308.
- [14] LAWLER, G.F., SCHRAMM, O., WERNER, W. Values of Brownian intersection exponents. III. Two-sided exponents. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **38** (2002), 109–123.
- [15] LAWLER, G.F., SCHRAMM, O., WERNER, W. Analyticity of intersection exponents for planar Brownian motion. *Acta Math.* **189** (2002), 179–201.
- [16] LAWLER, G.F., SCHRAMM, O., WERNER, W. One-arm exponent for critical 2D percolation. *Electron. J. Probab.* **7** (2002), no. 2, 13 pp.
- [17] LAWLER, G.F., SCHRAMM, O., WERNER, W. Conformal restriction : the chordal case. *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), no. 4, 917–955.
- [18] LAWLER, G.F., SCHRAMM, O., WERNER, W. Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees. *Ann. Probab.* **32** (2004), 939–995.
- [19] LAWLER, G.F., SCHRAMM, O., WERNER, W. On the scaling limit of planar self-avoiding walk. Fractal geometry and applications : a jubilee of Benoît Mandelbrot, Part 2, 339–364, Proc. Sympos. Pure Math., 72, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [20] NIENHUIS, B. Coulomb gas description of 2-D critical behaviours. *J. Stat. Phys.* **34** (1984), 731–761.
- [21] ROHDE, S., SCHRAMM, O. Basic properties of *SLE*. *Ann. Math. (2)* **161** (2005), 883–924.
- [22] SCHRAMM, O. Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees. *Israel J. Math.* **118** (2000), 221–288.
- [23] SMIRNOV, S. Critical percolation in the plane : conformal invariance, Cardy’s formula, scaling limits. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001), 239–244.
- [24] SMIRNOV, S. Conférence au Congrès International des Mathématiciens de Madrid 2006.
- [25] SMIRNOV, S., WERNER, W. Critical exponents for two-dimensional percolation. *Math. Res. Lett.* **8** (2001), 729–744.
- [26] WERNER, W. Random planar curves and Schramm-Loewner evolutions. In : École d’été de Probabilités de Saint-Flour 2002. *Lecture Notes Math.* **1840**. Springer 2004.
- [27] WERNER, W. The conformally invariant measure on self-avoiding loops. *J. Amer. Math. Soc.*, à paraître. arXiv :math.PR/0511605

Les travaux d'Andrei Okounkov sur le modèle des dimères

Richard Kenyon

Il serait impossible d'essayer de résumer tous les travaux d'Andrei Okounkov en un court article. Il a travaillé dans des domaines très divers : la théorie des représentations, la théorie de Gromov-Witten, les partitions aléatoires et la mécanique statistique. Ses contributions majeures à la théorie de Gromov-Witten, faites en commun avec Rahul Pandharipande et d'autres auteurs, ne seront pas abordées ici. J'essaierai de décrire brièvement nos travaux sur un modèle de surfaces aléatoires, appelé modèle des dimères. Ces travaux se trouvent dans l'article [5], fait en collaboration avec Scott Sheffield, et l'article [4].

Une « partition plane » est la donnée d'une fonction $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ de support fini, décroissant en chaque coordonnée, c'est-à-dire satisfaisant les inégalités $f(x+1, y) \leq f(x, y)$ et $f(x, y+1) \leq f(x, y)$. Cette définition généralise de manière évidente la notion de partition habituelle, que l'on peut définir comme une fonction $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ décroissante et de support fini.

On peut penser au graphe d'une partition plane comme à un empilement de cubes dans un coin, voir la figure 1.

Plus généralement, disons qu'une « surface en escalier » est une surface composée de carrés unité du réseau cubique $\mathbb{Z}^3$, ayant la même propriété de monotonie qu'une partition plane : la projection orthogonale sur le plan $x + y + z = 0$ est injective.

Le lien avec le modèle des dimères se fait de la manière suivante : la projection sur le plan $x + y + z = 0$ d'une surface en escalier est un pavage d'une région plane par des losanges d'angle 60° . Un pavage en losanges d'angle 60° est évidemment dual d'un recouvrement du graphe hexagonal en nid d'abeille par un système de dimères, c'est-à-dire par des arêtes disjointes du graphe (voir la figure 2).

L'un des résultats principaux sur le modèle des dimères est un résultat de Kasteleyn, Temperley et Fisher dans les années 1960 [3, 8], montrant que l'on peut énumérer les recouvrements par dimères d'un graphe planaire (et ainsi les surfaces en escaliers) en utilisant les déterminants. Par exemple, considérons la matrice d'adjacence du morceau du graphe en nid d'abeille de la figure 2 ; c'est une matrice 24 par 24 à coefficients dans $\{0, 1\}$, et dont le déterminant (400) est le carré du nombre de recouvrements par dimères.

Avant ces travaux, les partitions planes ont été énumérées par Percy Macmahon en 1912 [6], qui en a donné la belle fonction génératrice

$$M(q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-n} = 1 + q + 3q^2 + 6q^3 + 13q^4 + \dots$$

dont le coefficient de q^k est le nombre de partitions planes de volume k .

Mis à part ces résultats, ce n'est que dans les années 1990 que les mathématiciens ont commencé à comprendre et à étudier en profondeur le modèle des surfaces en escalier et plus généralement le modèle des dimères sur

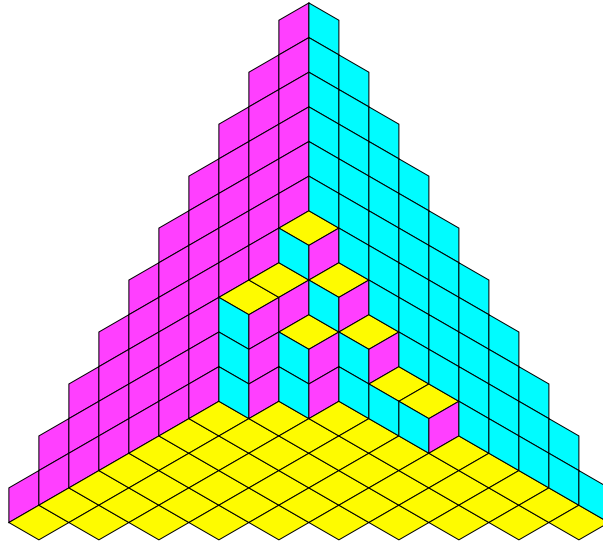


FIG. 1. Le graphe d'une partition plane.

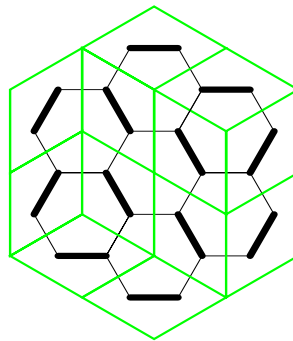


FIG. 2. Relation entre un recouvrement par dimères (arêtes épaisses) et un pavage par losanges.

un graphe planaire. Parmi les noms à citer figurent ceux de Cohn, Elkies, Larsen, Kuperberg, Propp et de beaucoup d'autres.

J'ai rencontré Andrei Okounkov pour la première fois au moment où je venais d'écrire, avec Raphael Cerf, un article sur la forme limite d'une partition plane de volume n pour n grand [1]. Il s'avère que presque toute partition plane de volume n , vue à l'échelle $n^{1/3}$, de probabilité proche de 1, est très proche d'une certaine forme que l'on appelle la forme limite. Okounkov m'a parlé d'un article qu'il avait écrit en commun avec Nicolai Reshetikhin, où ils donnent une formule générale pour les « statistiques locales » d'une partition, c'est-à-dire les probabilités explicites de n'importe quel évènement à l'échelle du réseau [7]. Par exemple, la probabilité que

$f(100, 100) - f(99, 99)$ soit égale à 2, pour une partition plane aléatoire uniforme f de volume 10^6 , est une statistique locale.

Leur méthode utilise le processus de Schur, qui est un processus aléatoire dans un espace de dimension infinie. D'une certaine manière, si on lit une partition plane de gauche à droite, elle peut être réalisée comme l'excursion d'une marche aléatoire dans un certain espace de dimension infinie. C'est cette méthode remarquable que l'on essaie de généraliser pour traiter des cas où les conditions au bord sont plus compliquées.

Plus tard, Andrei m'a dit qu'il avait remarqué que la projection sur le plan $x + y + z = 0$ de la forme limite avait la même forme qu'un objet de la géométrie algébrique : l'« amibe » d'une droite, qui est l'image d'une droite complexe $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z + w + 1 = 0\}$ dans $\mathbb{C}^2$ sous l'application $(z, w) \mapsto (\log |z|, \log |w|)$. En fait, nous avons compris que la forme limite elle-même, et pas seulement sa projection, était décrite par un autre objet de la géométrie algébrique, la fonction de Ronkin de la droite $P(z, w) = z + w + 1$.

La fonction de Ronkin $R(x, y)$ est définie, pour $x, y \in \mathbb{R}$ et pour un polynôme général, par la formule

$$R(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{|z|=|w|=1} \log P(e^{-x}z, e^{-y}w) \frac{dz}{iz} \frac{dw}{iw}.$$

Voir la figure 3.

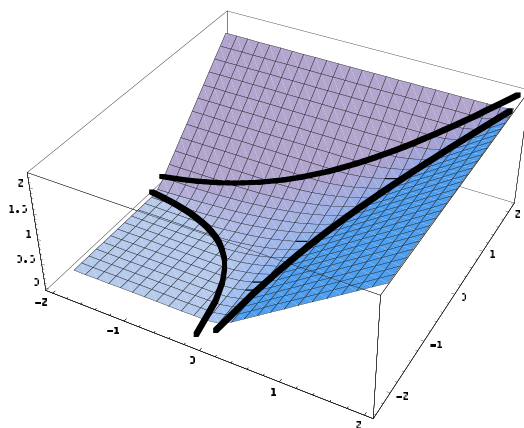


FIG. 3. Le graphe de la fonction de Ronkin de $1 + z + w$, que l'on voit ici, est, après un changement linéaire de coordonnées, la forme limite d'une grande partition plane.

Il s'avère que les graphes des fonctions de Ronkin d'autres polynômes P à deux variables décrivent les formes limites d'autres surfaces aléatoires, toutes reliées au modèle des dimères mais utilisant des mesures de probabilité autres que la mesure uniforme. Ces mesures sont décrites en donnant à chaque cube un poids qui varie périodiquement dans l'espace.

De plus, la fonction de Ronkin, qui détermine la forme limite des partitions planes pondérées, contient l'information nécessaire pour calculer les formes limites dans

un cadre plus large : les formes qui apparaissent en utilisant toujours les surfaces en escalier mais avec d'autres conditions au bord. Voir par exemple la figure 4, qui est un exemple d'une surface en escalier avec bord contraint à suivre les 6 côtés d'un cube $n \times n \times n$. Connaître la forme limite d'une grande partition plane nous permet d'en déduire (en principe) la forme limite de la surface contrainte par n'importe quelle condition au bord. (Dans la terminologie de l'analyse variationnelle, la forme limite de la partition plane est la « forme de Wulff », dont le dual de Legendre est la tension de surface. La forme limite de la surface avec des conditions de Dirichlet au bord est l'unique forme minimisant la tension de surface totale.)

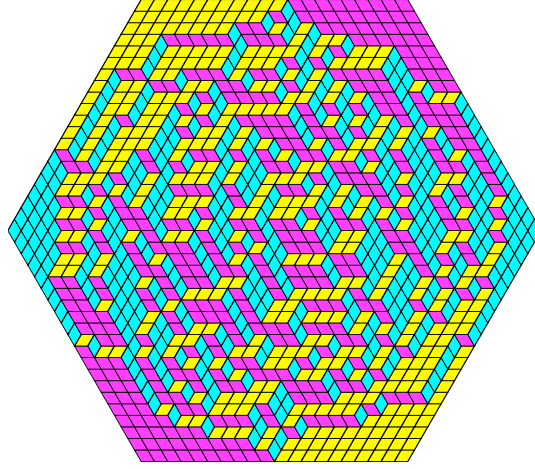


FIG. 4. Surface en escalier dans une boîte. La forme limite dans ce cas a été trouvée par Cohn, Larsen et Propp en utilisant les méthodes propres à ce cas.

En procédant selon cette méthode, on arrive à un résultat d'une simplicité très satisfaisante : si l'on s'intéresse à la forme limite de la surface aléatoire dans une certaine région, par exemple comme en figure 4, elle est décrite par un système :

$$\begin{cases} P(z, w) &= 0 \\ Q(e^{-cx}z, e^{-cy}w) &= 0, \end{cases}$$

où $P(z, w) = z + w + 1$ dans le cas de la mesure uniforme, Q est une fonction analytique à deux variables, et c une constante réelle (multiplicateur de Lagrange contrôlant le volume situé sous la forme limite). Ici $z = z(x, y)$, $w = w(x, y) \in \mathbb{C}$, qui sont déterminés implicitement par ces équations, décrivent la pente de la surface cherchée : les coordonnées de la pente de la surface au-dessus du point (x, y) sont $\arg z$ et $\arg w$ respectivement.

Ce système d'équations donne une paramétrisation simple de toutes les formes limites possibles, en termes d'une fonction analytique Q . Un problème important restant est de déterminer la fonction Q pour laquelle la solution prend bien les valeurs au bord souhaitées. Par exemple, pour la partition plane uniforme il faut prendre $Q(z, w) = 1 + 1/z + 1/w$.

Un aspect remarquable de ces formes limites, que l'on voit sur les figures, est celui de la formation de facettes, c'est-à-dire de régions où la surface est exactement linéaire. Ces facettes sont séparées par les régions où la surface est analytique et courbée. L'un des premiers résultats de ce type, dû à Cohn, Larsen et Propp [2], montre que pour les conditions au bord de la figure 4, la frontière entre les facettes et la partie courbe est le cercle inscrit dans l'hexagone, quand on projette sur le plan $x + y + z = 0$. Leurs méthodes étaient adaptées seulement à ce cas particulier, alors que la méthode variationnelle décrite ci-dessus donne des résultats similaires pour n'importe quelles conditions au bord.

Références

- [1] R. Cerf, R. Kenyon, The low-temperature expansion of the Wulff crystal in the 3D Ising model. *Comm. Math. Phys.* 222 (2001), no. 1, 147–179.
- [2] H. Cohn, M. Larsen, J. Propp, The shape of a typical boxed plane partition, *New York J. Math.* 4 (1998), 137–165
- [3] P. Kasteleyn, Graph theory and crystal physics, 1967 *Graph Theory and Theoretical Physics* pp. 43–110 Academic Press, London
- [4] R. Kenyon, A. Okounkov, Dimers and the complex Burgers equation, à paraître, *Acta Math.*
- [5] R. Kenyon, A. Okounkov, S. Sheffield, Dimers and amoebae. *Ann. of Math.* (2) 163 (2006), no. 3, 1019–1056.
- [6] P. MacMahon, Combinatory analysis. Chelsea Publishing Co., New York 1960.
- [7] A. Okounkov, N. Reshetikhin, Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram. *J. Amer. Math. Soc.* 16 (2003), no. 3, 581–603.
- [8] H. Temperley, M. Fisher, Dimer problem in statistical mechanics—an exact result. *Philos. Mag.* (8) 6 (1961) 1061–1063.

Terence Tao et les équations aux dérivées partielles : un bref aperçu

Nikolay Tzvetkov

Les travaux de T. Tao concernant les équations aux dérivées partielles (EDP) portent sur l'étude du problème de Cauchy pour des EDP d'évolution dispersives non-linéaires telles que l'équation de Korteweg-de Vries

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0,$$

l'équation de Schrödinger non-linéaire

$$(1) \quad iu_t + \Delta u + F(u) = 0,$$

ou encore l'équation des ondes non-linéaire

$$(2) \quad u_{tt} - \Delta u + F(u) = 0.$$

Dans (2), (3) le terme $F(u)$ représente l'interaction non-linéaire, par exemple $F(u) = \pm |u|^2 u$. L'étude de telles équations a pour but de comprendre le lien subtil entre les effets dispersifs (linéaires) et les effets non-linéaires. La compréhension de ce phénomène, après les travaux fondateurs de Ginibre-Velo [6], a connu des avancées importantes pendant les trois dernières décennies. Dans ce qui suit on se propose de présenter quatre des nombreuses contributions de T. Tao dans ce domaine.

La première contribution spectaculaire de T. Tao est sans doute son travail avec M. Keel [8] sur les estimées de Strichartz dans le cas limite. Donnons un exemple de ces estimées. Si on note par Δ le laplacien sur l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$, il est démontré dans [8] qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $v \in L^2(\mathbf{R}^3)$,

$$(3) \quad \|\exp(it\Delta)(v)\|_{L^2(\mathbf{R}; L^6(\mathbf{R}^3))} \leq C \|v\|_{L^2(\mathbf{R}^3)}.$$

Une inégalité de type (3) est fort utile dans la résolution de (2). Avant le travail de Keel-Tao, l'inégalité (3) était connue lorsque dans le membre de gauche de (3) la norme $L^2(\mathbf{R}; L^6(\mathbf{R}^3))$ est remplacée par $L^p(\mathbf{R}; L^q(\mathbf{R}^3))$, $p > 2$ avec $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{3}{2}$ (le cas $q = 2$, $p = \infty$ correspondant à la conservation de l'énergie). Le cas limite était ouvert depuis longtemps car l'inégalité de Hardy-Littlewood, utilisée dans la preuve classique, cesse d'être vraie dans le cas limite. Cependant, M. Keel et T. Tao arrivent à surmonter cette difficulté en utilisant un argument d'interpolation ingénieux, qui met le problème dans une optique multi-linéaire. Ce type d'approche multi-linéaire, même sur des estimées d'opérateurs linéaires, est typique de l'œuvre de T. Tao. L'intérêt d'une telle vision est qu'après des décompositions de l'opérateur étudié on arrive à mieux capter les morceaux de l'opérateur qui posent le plus de problèmes pour être contrôlés.

Le travail de T. Tao [10, 11] sur les « wave maps » dans des espaces critiques a fortement marqué le domaine. Les « wave maps » sont des applications entre l'espace temps de Minkowski (ou plus généralement une variété Lorentzienne, un cas bien moins compris) et une variété Riemannienne. Ces applications sont des points critiques d'un Lagrangien et satisfont à une EDP non-linéaire de type « équation

des ondes ». Le travail de Tao sur les « wave maps » est une des nombreuses suites de la contribution fondamentale de J. Bourgain [1] à l'étude à régularité basse, par l'itération de Picard, des EDP non linéaires dispersives. Dans le cadre des « wave maps » sur-critiques (c'est à dire des données initiales plus régulières que dans le cas critique) l'application de la méthode a été mise en œuvre parallèlement par Klainerman-Machedon [9]. Dans le cas critique l'application de la méthode rencontre des difficultés importantes car une modification non triviale des espaces de résolution doit être faite. Cette modification a été premièrement construite par D. Tataru [12, 13]. Cependant le travail de D. Tataru ne couvrait pas les espaces naturels pour les données initiales. Il se trouve que l'itération de Picard pour des données dans les espaces naturels ne marche plus. La contribution de Tao consiste à définir une transformation de jauge qui transforme le problème qui n'est pas directement traitable par l'itération de Picard en un problème qui peut être traité par cette itération, essentiellement par la méthode de Tataru. La mise en place de cette stratégie est un véritable tour de force.

La contribution fondamentale de J. Bourgain mentionnée ci-dessus donne uniquement l'existence locale (en temps) des solutions. L'existence globale de solutions, dans les cas favorables, peut être obtenue grâce à des lois de conservation (par exemple d'une énergie naturelle pour le problème considéré). L'existence de solutions globales pour des données d'énergie infinie est alors une question naturelle. J. Bourgain [2] a développé une méthode pour arriver à cette fin basée sur l'étude séparée des basses et des hautes fréquences. Dans un travail de T. Tao [4] (en collaboration avec Colliander-Keel-Staffilani-Takaoka) une amélioration significative de la méthode de J. Bourgain a été trouvée. Il s'agit d'étudier l'évolution en temps des énergies modifiées au lieu des équations satisfaites par les basses et les hautes fréquences. Cette vision moins perturbative sur le problème a donné des améliorations significatives des résultats de J. Bourgain et dans certains cas a donné des résultats optimaux.

Terminons en décrivant le résultat de T. Tao [5] (toujours en collaboration avec Colliander-Keel-Staffilani-Takaoka) sur l'existence globale de solutions pour l'équation de Schrödinger non linéaire $H^1(\mathbf{R}^3)$ critique défocalisante. Il s'agit du problème (2), posé sur $\mathbf{R}^3$, avec $F(u) = |u|^4 u$ et donnée initiale dans l'espace de Sobolev $H^1(\mathbf{R}^3)$. La théorie locale pour ce problème a été comprise depuis longtemps. Le problème d'existence globale a été un défi considérable car la seule obstruction pour l'existence globale, un scénario de concentration de l'énergie, restait toujours possible. Dans un travail fondamental, J. Bourgain [3] a développé la méthode de récurrence sur l'énergie qui utilise de fins arguments perturbatifs avec des estimées dans le style des travaux classiques de C. Morawetz, pour invalider le scénario de concentration de l'énergie. Les inégalités de Morawetz sont d'une nature différente des inégalités de Strichartz, comme par exemple (3). Elles sont typiquement obtenues par une méthode de multiplicateur, et sont une manifestation de l'effet dispersif qui prend en compte le terme non-linéaire d'une manière non perturbative. Cependant la stratégie de J. Bourgain ne marchait que dans le cas des données initiales ayant une symétrie radiale. Dans le travail de T. Tao et de ses collaborateurs, cette hypothèse est enlevée. Une des nombreuses nouveautés de ce travail, est l'utilisation d'une nouvelle inégalité de Morawetz dont l'intérêt dépasse le cadre de ce travail. Encore une fois, il s'agit d'un tour de force technique.

Mentionnons finalement que récemment Kenig-Merle [7] ont introduit une nouvelle vision sur les problèmes critiques et, encore une fois, T. Tao et ses collaborateurs ont su intervenir d'une manière spectaculaire, notamment dans le contexte des problèmes L^2 critiques sans hypothèse de petitesse sur les données initiales, un problème qui jusqu'à récemment semblait complètement hors de portée.

Références

- [1] J. Bourgain. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to nonlinear evolution equations. Parts I,II. *Geom. and Funct. Anal.*, 3, 107–156, 209–262, 1993.
- [2] J. Bourgain. Refinements of Strichartz inequality and applications to 2d-NLS with critical nonlinearity. *Internat. Math. Res. Not.*, 253–284, 1998.
- [3] J. Bourgain. Global well-posedness of defocusing 3D critical NLS in the radial case. *J. Amer. Math. Soc.*, 12, 145–171, 1999.
- [4] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao. Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV. *J. Amer. Math. Soc.*, 16, 705–749.
- [5] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, T. Tao. Global well-posedness and scattering in the energy space for the critical nonlinear Schrödinger equation in $\mathbf{R}^3$, Prépublication.
- [6] J. Ginibre, G. Velo. On a class of nonlinear Schrödinger equations. *J. Funct. Analysis*, 32, 1–71, 1979.
- [7] C. Kenig, F. Merle. Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case. *Invent. Math.*, 166, 645–675, 2006.
- [8] M. Keel, T. Tao. Endpoint Strichartz estimates. *Amer. J. Math.*, 120, 955–980, 1998.
- [9] S. Klainerman, M. Machedon. On the regularity properties of a model problem related to wave maps. *Duke Math. J.*, 87, 553–589, 1997.
- [10] T. Tao. Global regularity of the wave maps I. Small critical Sobolev norm in high dimension. *Internat. Math. Res. Not.*, 7, 299–328, 2001.
- [11] T. Tao. Global regularity of the wave maps II. Small energy in two dimensions. *Commun. Math. Phys.*, 224, 443–544, 2001.
- [12] D. Tataru. Local and global results for the wave maps I. *Commun. PDE*, 23, 1781–1793, 1998.
- [13] D. Tataru. On global existence and scattering for the wave maps equation. *Amer. J. Math.*, 123, 37–77, 2001.

Long Arithmetic Progressions of Primes¹

Ben Green²

In Spring 2004, while I was a PIMS postdoc in Vancouver, Terry Tao of UCLA and I published an article about arithmetic progressions of prime numbers. Whilst the article has not yet been accepted for publication by a journal, it does seem appropriate to give a very brief description of the results and methods in this newsletter.

The sequence of prime numbers 2, 3, 5, 7, ... has been studied for over 2000 years. The appeal of prime numbers to mathematicians is perhaps that they are extremely simple and natural to define, but it is often very difficult or impossible to prove facts about them. As an example, consider the 250 year-old conjecture of Goldbach, which suggests that every even number greater than 2 is a sum of two prime numbers. It is easy to verify this for small values (e.g. $50 = 19 + 31$, $100 = 47 + 53$) and to come up with heuristic arguments which suggest that the conjecture is true. So far, however, no-one has been able to supply a proof. The same goes for the Twin Prime Conjecture, which states that there are infinitely many pairs of primes which differ by two, such as (3, 5) and (41, 43).

Our work concerns arithmetic progressions of primes. The sequence 5, 11, 17, 23, 29 is an arithmetic progression of five primes, and the sequence

$$56211383760397 + 44546738095860k, \quad k = 0, 1, \dots, 22,$$

is an arithmetic progression of 23 primes, which is the longest currently known (this latter example was discovered on July 24, 2004, by Frind, Jobling and Underwood).

Our result is that there are arbitrarily long arithmetic progressions of primes. We can actually prove that there is a k -term arithmetic progression of primes, all of which are at most

$$2^{2^{2^{2^{2^{100k}}}}}$$

though this spectacularly large bound (a number with approximately

$\frac{1}{3} 2^{2^{2^{2^{2^{100k}}}}}$ digits) is unlikely to be greeted with much excitement by computational mathematicians!

We have not really found a new way of understanding prime numbers. The main advance in our work is a better understanding of arithmetic progressions. A famous result about arithmetic progressions is the 1975 theorem of Endre Szemerédi. This states that if A is a subset of $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ with positive density (say A contains one percent of all natural numbers) then A contains arbitrarily long arithmetic progressions.

¹ Le texte de Ben Green, « Long arithmetic progressions in primes » est paru auparavant dans le numéro 8.1 de la PIMS *newsletter*. Nous remercions I. Ekeland, directeur du PIMS et l'auteur d'avoir autorisé sa republication.

² Trinity College, Cambridge, Former PIMS Postdoctoral Fellow.

Unfortunately, this result does not apply to the set of primes since they do not form a set of positive density. Indeed, the famous Prime Number Theorem tells us that the number of primes less than N is about $N/\log N$.

Our main result is a version of Szemerédi's Theorem in which the set $\mathbb{N}$ is replaced by a more general type of set. Very roughly speaking, we show that if a set $S \subseteq \mathbb{N}$ is "pseudorandom" then any set containing a positive proportion of S contains arbitrarily long arithmetic progressions. The set S need not have positive density (it can actually be quite sparse).

Once this result is proved, one must construct a set S which is appropriate for the primes. Simplifying matters somewhat for the sake of exposition, we take S to be something like the set of "almost-primes", that is to say numbers n , all of whose prime factors are at least $n^{1/100}$. The primes form a positive density subset of S , but S is a much more tractable object than the primes themselves. Indeed by "massaging" S a little bit one can show using techniques of classical analytic number theory, that S is pseudorandom.

In constructing S the authors enjoyed a rather large slice of luck. In March 2004 I was visiting Andrew Granville in Montréal, and I told him about my work with Terry. At that stage we did not quite understand how to massage the almost-primes in a way that would enable us to prove pseudorandomness. Andrew was able to direct us to some recent (as yet unpublished) work of Dan Goldston and Cem Yıldırım. Although the work of Goldston and Yıldırım concerns a very different problem, it turned out that a certain lemma in their paper constituted a very good definition of S together with a proof that S is pseudorandom.

The most original part of our work is the proof of a version of Szemerédi's Theorem relative to an arbitrary pseudorandom set S . The argument is strongly motivated by a branch of mathematics called ergodic theory, which has proved very useful in the study of arithmetic progressions since groundbreaking work of Furstenberg in the late 1970s.

We prove, then, that any set consisting of a positive proportion of S contains arbitrarily long arithmetic progressions. Subsequently we apply this to the specific set S discussed above, which is related to the almost-primes. A number of mathematicians have remarked to us that this is precisely why we are successful – history indicates that isolating properties of the primes themselves is a very tricky business, but here we have been able to exhibit the primes as a specific instance of a huger class of sets (the positive density subsets of S). For exactly this reason, it would be optimistic to expect our methods to shed any light on the Goldbach or Twin Prime conjectures in the near future.

Traitement du signal

Yves Meyer

Les découvertes faites par Emmanuel Candès et Terence Tao en traitement du signal et de l'image s'inscrivent dans la problématique des problèmes inverses mal posés. Il s'agit de reconstruire un objet inconnu alors qu'on ne dispose à son sujet que de quelques informations fragmentaires. Fournir dans ces conditions un résultat exact, comme si l'on disposait d'une information complète, est impossible et l'on doit pallier l'information manquante par une hypothèse a priori. Pour que la démarche proposée soit intéressante, il convient que cette connaissance a priori soit suffisamment souple et n'exclue aucun des signaux ou des images que l'on cherche à reconstruire.

Désignons par $X \in \mathbb{R}^n$ le signal (ou l'image) inconnu et supposons que l'on n'ait réalisé que quelques mesures $y_j = \langle A_j, X \rangle$, $1 \leq j \leq p$, sur ce vecteur inconnu X . Les vecteurs $A_j \in \mathbb{R}^n$ sont donnés. Dans les applications la dimension n est souvent supérieure à 10^6 (5 mégapixels, par exemple) et p est beaucoup plus petit que n . La connaissance a priori sur la solution X est modélisée par un certain ensemble (en général non convexe) Γ et s'écrit $X \in \Gamma$. Alors on cherche le vecteur inconnu X en essayant de résoudre

$$y_j = \langle A_j, X \rangle, \quad j = 1, \dots, p, \quad X \in \Gamma \quad (1)$$

L'objet des travaux d'Emmanuel Candès et de Terence Tao est double. Pour une classe importante d'ensembles Γ , Candès et Tao démontrent que si (1) a une solution, alors cette solution est unique et, dans un second temps, ils proposent un algorithme pour la déterminer.

La définition de la classe Γ est dictée par les travaux sur les *représentations creuses*. Le point de départ concerne l'analyse par ondelettes des images. Les images que l'on peut modéliser par des fonctions appartenant à l'espace BV des fonctions à variation bornée ont une représentation creuse dans une base d'ondelettes (Albert Cohen) et cette découverte mathématique est en plein accord avec les acquis de la neurophysiologie (travaux de David Hubel et Torsten Wiesel sur la détection des contours par les neurones de l'aire V_1 du cortex visuel primaire). Une représentation creuse signifie que l'ensemble T des indices des coefficients d'ondelettes significatifs a une petite cardinalité $|T|$, compte tenu de la taille du signal. Mais ce résultat ne fournit aucune information sur la localisation de cet ensemble T ; cette localisation est déterminée par les positions des bords de l'image. C'est ce qui amène Candès et Tao à considérer pour tout entier $q \leq n$, l'ensemble Γ_q des signaux $X = (x_1, \dots, x_n)$ tels que $|T| \leq q$ où $|T|$ est le cardinal du support $T = \{j; x_j \neq 0\}$ de X . Cet ensemble Γ_q n'est évidemment pas un espace vectoriel.

Le théorème suivant de Candès et Tao éclairera notre discussion. Soit p un nombre premier et soit $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments. La transformée de Fourier d'une fonction f à valeurs réelles ou complexes, définie sur $\mathbb{F}_p$ est, elle-même, définie sur $\mathbb{F}_p$ et est notée $\hat{f}$.

Théorème 1. Soit Ω une partie de $\mathbb{F}_p$. Alors toute fonction f définie sur $\mathbb{F}_p$ est déterminée de façon unique par la restriction de sa transformée de Fourier à Ω lorsque le cardinal du support T de f vérifie la condition $|T| \leq \frac{1}{2}|\Omega|$. Inversement, si Ω n'est pas $\mathbb{F}_p$ tout entier, il existe deux fonctions différentes f et g telles que (a) le cardinal du support de f ne dépasse pas $\frac{1}{2}|\Omega| + 1$, (b) la même condition soit satisfaite pour g , mais que (c) $\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Ce remarquable énoncé est faux lorsque $\mathbb{F}_p$ est remplacé par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et que n n'est pas un nombre premier. Néanmoins il redevient vrai si Ω est un ensemble ayant des propriétés arithmétiques particulières, comme nous allons le voir dans un instant. Le théorème 1 apparaît aujourd'hui comme le point de départ des travaux ultérieurs de Candès et Tao. Mais l'histoire est différente. Le vrai point de départ fut un problème posé par la tomographie. Il s'agissait de reconstruire une image simple f à partir d'une information partielle sur sa transformée de Fourier. La seule donnée dont on dispose est la connaissance de $c(\omega) = \hat{f}(\omega)$, $\omega \in \Omega$. L'ensemble Ω se compose d'une centaine de lignes passant par l'origine. L'hypothèse a priori est que f est constante par morceaux, c'est-à-dire que f est égale à une constante c_j à l'intérieur d'un domaine D_j et que ces domaines sont en nombre fini. Les D_j ont des bords réguliers et f est discontinue sur ces bords. Alors Candès et Justin Romberg découvrirent expérimentalement que f est la solution du problème

$$\inf \|g\|_{BV}; \hat{g}(\omega) = c(\omega), \omega \in \Omega \quad (2)$$

Le gradient ∇f de f est porté par un ensemble fini de lignes. Il a donc un petit support et nous nous retrouvons dans un cadre qui ressemble à celui du théorème 1. On observera que $\|g\|_{BV} = \|\nabla g\|_1$ et l'on pourra alors considérer (2) comme un cas particulier du théorème 2 ci-dessous. Mais le théorème 1 ne disait rien sur l'algorithme permettant de calculer f et n'explique donc pas ce phénomène. En outre l'hypothèse que p est premier n'est pas satisfaite dans la version discrétisée du problème de tomographie. Voici un théorème plus général obtenu par Candès et Tao. Commençons par une définition. Considérons $q \leq p$ vecteurs Z_j , $1 \leq j \leq q$, appartenant à l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$. Pour un $0 < \varepsilon < 1$, on dira que ces vecteurs sont ε -orthogonaux si, pour tout choix des coefficients c_j , on a

$$(1 - \varepsilon) \sum_{j=1}^q |c_j|^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^q c_j Z_j \right\|^2 \leq (1 + \varepsilon) \sum_{j=1}^q |c_j|^2 \quad (3)$$

Une matrice A est dite (q, ε) incohérente si la condition (3) est vérifiée pour tout ensemble de q vecteurs distincts pris parmi les vecteurs colonnes de A . Pour A et q fixés, on désigne par ε_q la borne inférieure de ces valeurs de ε . On revient alors à (1) où $\Gamma = \Gamma_q$ est défini comme ci-dessus (le cardinal du support de $X \in \Gamma_q$ ne dépasse pas q) et où A est la matrice dont les lignes sont les vecteurs A_j , $1 \leq j \leq p$. On pose enfin $\|X\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$, $X \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 2. Avec les notations précédentes, on suppose que

$$\varepsilon_q + \varepsilon_{2q} + \varepsilon_{3q} < 1 \quad (4)$$

Alors le système (1) où $\Gamma = \Gamma_q$ a, au plus, une solution. Si elle existe, cette solution s'obtient en résolvant le problème d'optimisation convexe

$$\inf \|X\|_1; \quad y_j = \langle A_j, X \rangle, \quad j = 1, \dots, p \quad (5)$$

On notera que la contrainte $X \in \Gamma_q$ n'apparaît plus dans (5). La solution de (5) vérifie automatiquement cette condition lorsqu'elle existe, c'est-à-dire lorsque $y_j = \langle A_j, Y \rangle$ pour $1 \leq j \leq p$ et pour un certain $Y \in \Gamma_q$. On pourrait penser que l'algorithme fourni par le théorème est instable. Il n'en est rien. Candès et Tao démontrent un remarquable théorème de robustesse en prouvant que le théorème 2 s'applique à des signaux bruités et fournit alors un algorithme de débruitage.

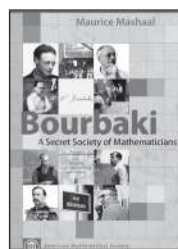
La principale difficulté est de construire des matrices A d'usage commode vérifiant (4). Les valeurs de q et de n nous sont imposées et l'on souhaite que p soit, à un terme logarithmique près, du même ordre de grandeur que q . Candès et Tao, d'une part, Alain Pajor d'autre part, montrent que des matrices aléatoires (dont les coefficients sont des gaussiennes indépendantes, centrées et de même loi) conviennent. Il est indispensable d'en savoir plus et ce domaine de recherche touche à la physique statistique et à la théorie des nombres. David Donoho et Alain Pajor ont relié les travaux de Candès et Tao à la géométrie des ensembles convexes en grande dimension. Le site web de Candès est <http://www.acm.caltech.edu/~emmanuel/>, celui de David Donoho est <http://www-stat.stanford.edu/~donoho/> et celui d'Alain Pajor est <http://perso-math.univ-mlv.fr/users/pajor.alain/>.

Références

- [1] E.J. Candès, J. Romberg and T. Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Comm. Pure Appl. Math.*, 59, (2005) 1207-1223.
- [2] E.J. Candès and T. Tao. Decoding by linear programming. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 51, (2004) 4203-4215.
- [3] E.J. Candès and T. Tao. Near-optimal signal recovery from random projections : universal encoding strategies. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 52, (2004) 5406-5425.
- [4] E.J. Candès, J. Romberg and T. Tao. Robust uncertainty principles : exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 52, (2004) 489-509.

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

Figures in History



Bourbaki

A Secret Society of Mathematicians

Maurice Mashaal, *Pour la Science, Paris, France*

There are marvelous biographical essays; a fine account of the actual historical figure, Nicholas Bourbaki ... highly appealing stuff ... fantastic pictures ... It's great fun.

—MAA Reviews

The author, Maurice Mashaal, portrays the protagonists of the secret society and describes their aims, successes, and failures in an entertaining and refreshingly readable style.

—translated from *Neue Zürcher Zeitung*

This book lifts the veil from a secret society in which spirited debate, good humor, and a unified purpose helped generate the most influential mathematical treatise of the 20th century. It chronicles how the Bourbaki group saw its mission grow into creation of a universal collection of mathematical tools, shaping thought on mathematics from 1950 to the 1970s. Remarkable photographs and rich anecdotes enliven the text.

2006; 168 pages; Softcover; ISBN: 978-0-8218-3967-6; List US\$29; All AMS members US\$23; Order code BOURBAKI

Exposition by Emil Artin: A Selection

Michael Rosen, *Brown University, Providence, RI*, Editor

History of Mathematics, Volume 30; 2006; approximately 343 pages; Softcover; ISBN: 978-0-8218-4172-3; List US\$59; All AMS members US\$47; Order code HMATH/30[†]

The Volterra Chronicles

The Life and Times of an Extraordinary Mathematician 1860–1940

Judith R. Goodstein, *California Institute of Technology, Pasadena, CA*

History of Mathematics, Volume 31; 2007; approximately 315 pages; Hardcover; ISBN: 978-0-8218-3969-0; List US\$59; All AMS members US\$47; Order code HMATH/31[†]

[†]Co-published with the London Mathematical Society beginning with Volume 4. Members of the LMS may order directly from the AMS at the AMS member price. The LMS is registered with the Charity Commissioners.



For more information on these new books and others, visit the AMS Bookstore at www.ams.org/bookstore

Contact the AMS: 1-800-321-4AMS (4267), in the U. S. and Canada, or 1-401-455-4000 (worldwide); fax: 1-401-455-4046; email: cust-serv@ams.org.
American Mathematical Society, 201 Charles Street, Providence, RI 02904-2294 USA





© Archives privées de la famille Le Potier

Joseph Le Potier (9 janvier 2004)

HOMMAGE À JOSEPH LE POTIER

Joseph Le Potier

(10 octobre 1944 - 8 décembre 2005)

Christian Peskine

Tôt le 8 décembre 2005, Joseph Le Potier s'éteint dans son sommeil à 61 ans, chez lui à Plozévet, après une journée ordinaire. Le même jour, à Chevaleret à 14h, se tient le séminaire de géométrie algébrique du jeudi, que tout le monde appelle depuis 20 ans « séminaire Le Potier ». Joseph était parmi nous quelques jours plus tôt, pour la soutenance de thèse de Luca Scala, souriant, gai, tout au plaisir de parler des mathématiques sur lesquelles il travaillait chaque matin, avec un enthousiasme communicatif. Aujourd'hui, 15 mois plus tard, nous restons partagés entre l'émotion et le plaisir d'évoquer la personnalité extraordinaire de Joseph et la douleur d'une cicatrice qui ne se referme pas. Est-il possible qu'un homme, qu'un mathématicien, après une trajectoire si simple et si claire, laisse une impression si riche et si profonde dans les esprits et les cœurs ?

Joseph Le Potier est né à Saint-Gelven dans une famille d'agriculteurs. Après le collège, il entre comme interne au lycée Anatole Lebraz de Saint-Brieuc, puis au lycée Chateaubriand de Rennes après le Bac. Soucieux de son indépendance, il passe avec succès le concours des IPES à la fin de l'année de math-sup et devient alors étudiant à l'Université de Rennes où il réussit successivement le CAPES et l'agrégation. Paulette Libermann, professeur à Rennes, le présente à Pierre Dolbeaut, professeur à Poitiers, qui deviendra son directeur de thèse. À partir de 1968, il est successivement assistant, puis maître-assistant à Rennes puis à Poitiers. C'est en 1972, durant son service militaire à Saint-Maixent, qu'il démontre son célèbre théorème d'annulation (voir le texte de Claire Voisin ci-dessous). Il est maître de conférence à Orsay en 1973/74 et revient à Poitiers l'année suivante pour soutenir sa thèse d'état (déc. 74). En 1976, Jean-Louis Verdier le fait venir à Paris VII, où il est définitivement recruté comme maître de conférence puis professeur. Toute sa carrière, durant laquelle il assume de nombreuses responsabilités collectives, s'y déroule harmonieusement, jusqu'à son départ à la retraite en 2004.

Le 7 décembre 2006, le séminaire de géométrie algébrique du jeudi a consacré une journée d'hommage aux travaux de Joseph Le Potier. Trois périodes se dessinent nettement dans l'œuvre de Joseph. Chacune a donné lieu à un exposé, dont la version rédigée est publiée ici.

– La première est celle de l'extension aux fibrés amples de rang supérieur du théorème d'annulation de Kodaira. Après l'interprétation donnée par Hartshorne, des idées de Grothendieck sur l'amplitude, les années 70 et 80 foisonnent de contributions à cette question. Les résultats de Joseph Le Potier s'en détachent par leur

acuité lumineuse et par l'analyse complète des cas limites. Ils débutent avec sa thèse et se terminent avec le célèbre contre-exemple auquel Peternell et Schneider sont associés (voir l'exposé de Claire Voisin).

– La seconde est consacrée à l'étude du module des fibrés vectoriels sur le plan projectif. Joseph Le Potier est ici plus fortement initiateur de la théorie dès 1979, après l'article fondateur de Barth. Son travail se développe sur plus de 10 ans et s'achève avec le volume d'Astérisque (Systèmes cohérents et structures de niveau) d'une part, et la superbe preuve (avec Tikhomirov) de l'injectivité générique du morphisme de Barth, qui associe à un fibré de rang 2 sur le plan, la courbe de ses droites de saut dans le plan dual (voir l'exposé de Christoph Sorger).

– La troisième période est marquée par sa découverte du principe de dualité étrange sur les surfaces projectives lisses. Joseph Le Potier a conjecturé l'existence d'une dualité naturelle entre espaces de sections de fibrés inversibles sur des espaces de modules différents, sur une même surface. Plus précisément, il a construit cette dualité, sous certaines conditions numériques dont dépendent les espaces de modules en question, et a conjecturé que cette dualité est parfaite. Il a lui-même contribué amplement à l'étude de cette conjecture. Joseph a eu aussi la joie de voir certains de ses élèves ainsi que plusieurs jeunes mathématiciens proches de lui, contribuer essentiellement au développement de ses idées (voir l'exposé de Luca Scala)

Ainsi s'achèvent trop tôt l'œuvre et la vie d'un homme qui a suscité chez tous ceux qui l'ont approché, respect et tendresse. Respect pour l'exigence envers lui-même et envers les autres, pour la clarté qui émanait de lui et pour la force et l'ampleur du mouvement qu'il donnait aux idées. Les auditeurs de ses cours, qui ont donné le meilleur d'eux-mêmes pour le suivre dans cette poursuite inlassable des connaissances, en témoignent encore aujourd'hui. Tendresse pour un homme pudique, dont la timidité cachait mal l'humour et qui savait si bien se moquer de lui-même. Tendresse aussi pour un savant qui s'effaçait devant la science et qui savait associer encouragements et exigences. Si Joseph Le Potier aimait enseigner, il adorait apprendre. Ayant dû se battre plus que d'autres pour avoir le droit d'apprendre, il lui restait un appétit insatiable pour l'étude. Il s'émerveillait de toutes les idées qu'il découvrait chez les autres. Il a commencé à étudier le violon avec enthousiasme à plus de 30 ans, avec ses fils, Christophe d'abord et Serge ensuite ! Ses amis se souviennent avec émotion de ses premiers exposés en anglais, à près de 50 ans, avec ses deux manuscrits prêts avant chaque exposé : version française, version anglaise !

Joseph laisse derrière lui son épouse Marie-Thérèse, ses deux fils Christophe et Serge et leurs familles, mais aussi une communauté scientifique, avec laquelle il a su partager son travail sans jamais rien réclamer en retour. Quel vide !

Autour du théorème d'annulation de Le Potier

Claire Voisin¹

Introduction

Ce texte est essentiellement la version écrite d'un exposé donné lors de la journée du séminaire de géométrie algébrique Nantes-Paris consacrée à un hommage à Joseph Le Potier, décédé un an auparavant.

On se propose ici d'expliquer les théorèmes d'annulation de Le Potier [6], ainsi que diverses applications, en particulier aux théorèmes de connexité pour les sous-variétés à fibré normal ample (Sommese, Debarre). Comme application à la géométrie projective, l'article [8], qui corrige l'article de Faltings, donne suivant la ligne proposée par Faltings, une preuve alternative du théorème de normalité linéaire de Zak, qui est une étape en direction de la conjecture de Hartshorne.

Dans une autre direction, on expliquera les contre-exemples donnés dans [8] et [4] aux généralisations de ce théorème conjecturées par Sommese et annoncées par Faltings. Enfin, on expliquera les résultats de [4] et [9] qui fournissent d'autres théorèmes d'annulation, malheureusement insuffisants pour les applications aux sous-variétés à fibré normal ample mais non nécessairement engendré.

C'est avec émotion que je dédie à la mémoire de Joseph Le Potier cet article consacré à un aspect de ses travaux. Au cours de relations soutenues qui ont débuté il y a vingt et quelques années lorsque j'ai suivi son magnifique cours de topologie algébrique, j'ai conçu énormément d'estime et d'amitié pour lui. Son enthousiasme intellectuel, son indépendance d'esprit, son énergie et sa rigueur, ainsi que sa gentillesse et son humanité m'ont beaucoup apporté.

Je remercie Laurent Manivel pour ses corrections et commentaires sur la version originale de ce texte.

1. Théorèmes d'annulation

1.1. Fibrés amples

La notion de fibré vectoriel ample dégagée par Hartshorne est la généralisation en rang supérieur de la notion de fibré en droites ample. Un fibré en droites holomorphe L sur une variété complexe ou algébrique X est dit ample si pour un $N > 0$ adéquat, les sections globales (holomorphes ou algébriques selon le contexte) de $L^{\otimes N}$ fournissent un plongement de X dans un espace projectif.

Si E est un fibré holomorphe de rang r sur X , on construit le fibré projectif $\mathbb{P}(E) \xrightarrow{\pi} X$ muni canoniquement d'un fibré en droites holomorphe $\mathcal{O}(1)$ tel que

$$\pi_* \mathcal{O}(1) = E.$$

¹ Institut de mathématiques de Jussieu, CNRS, UMR 7586.

Ensemblistement, $\mathbb{P}(E)$ est le fibré projectif dont la fibre au-dessus de $x \in X$ est l'ensemble des *hyperplans* dans la fibre E_x .

Définition 1.1. E est dit *ample* si $\mathcal{O}(1)$ est ample sur $\mathbb{P}(E)$.

1.2. Le théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano

On suppose seulement a priori que X est compacte complexe. Soit L un fibré inversible holomorphe positif sur X . Ceci signifie qu'il existe une métrique hermitienne sur L à forme de Chern positive. A posteriori, par le théorème de plongement de Kodaira, L est en fait ample et X est projective, mais le théorème de plongement est en fait une conséquence du théorème d'annulation de Kodaira, qui est le cas $p = n$ de l'énoncé suivant :

Théorème 1.2. (Akizuki-Nakano) Si $n = \dim X$, et L est positif sur X , on a

$$(1) \quad H^q(X, \Omega_X^p(L)) = 0, \quad p + q > n.$$

Ce théorème d'analyse complexe entraîne par le principe GAGA de Serre l'annulation de la cohomologie $H^q(X, \Omega_{X/k}^p(L)) = 0, \quad p + q > \dim X$ pour toute variété projective lisse définie sur un corps k de caractéristique 0 et tout fibré en droites L ample sur X . Une preuve algébrique a été fournie par Deligne et Illusie [3].

1.3. Théorèmes d'annulation de Le Potier

Le Potier [6] montre deux généralisations du théorème 1.2.

Théorème 1.3. Soit E un fibré ample de rang e sur une variété projective lisse X complexe. Alors

$$(2) \quad H^q(X, E \otimes \Omega_X^p) = 0, \quad p + q \geq \dim X + e.$$

$$(3) \quad H^q(X, K_X \otimes \bigwedge^a E) = 0, \quad q \geq e - a + 1.$$

Il est utile d'avoir la version duale par la dualité de Serre : on notera E^* le dual de E . La dualité de Serre

$$H^q(X, F) \cong H^{n-q}(X, F^* \otimes K_X)^*$$

fournit :

Corollaire 1.4. Si E est ample, on a :

- (1) $H^q(X, E^* \otimes \Omega_X^p) = 0, \quad p + q \leq \dim X - e.$
- (2) $H^q(X, \bigwedge^a E^*) = 0, \quad q \leq n - e + a - 1.$

En particulier, pour $q = 0$, on trouve l'annulation suivante :

$$(4) \quad H^0(X, E^* \otimes \Omega_X^p) = 0, \quad p \leq \dim X - e$$

pour E ample sur X .

Corollaire 1.5. *Si X est projective et E est ample de rang e et engendré par ses sections sur X , on a :*

$$(5) \quad H^0(X, S^k E^* \otimes \bigwedge^l E^* \otimes \Omega_X^p) = 0, \quad p \leq \dim X - e, \quad k \geq 0, \quad l \geq 0, \quad k + l > 0.$$

En effet, supposant par exemple $k > 0$, on a alors une injection

$$S^k E^* \otimes \bigwedge^l E^* \subset W^* \otimes E^*,$$

où W est l'espace vectoriel $H^0(X, S^{k-1} E \otimes \bigwedge^l E)$, et donc l'annulation (4) entraîne l'annulation (5). ■

2. Preuve du théorème

Preuve du théorème 1.3. Par hypothèse, $\mathcal{O}(1)$ est ample sur $\mathbb{P}(E)$ qui est de dimension $n + e - 1$.

On a donc par le théorème 1.2 :

$$(6) \quad H^q(\mathbb{P}(E), \Omega_{\mathbb{P}(E)}^p \otimes \mathcal{O}(1)) = 0, \quad p + q \geq n + e.$$

On observe maintenant que le faisceau $\Omega_{\mathbb{P}(E)}$ contient le sous-faisceau $\pi^* \Omega_X$, ce qui induit une filtration décroissante L sur $\Omega_{\mathbb{P}(E)}^p$ donnée par

$$L^k \Omega_{\mathbb{P}(E)}^p = \pi^* \Omega_X^k \wedge \Omega_{\mathbb{P}(E)}^{p-k}.$$

Il est clair que les gradués pour cette filtration sont donnés par

$$Gr_L^k \Omega_{\mathbb{P}(E)}^p = \pi^* \Omega_X^k \otimes \Omega_{\mathbb{P}(E)/X}^{p-k}.$$

On utilise maintenant les théorèmes d'annulation de Bott (ou leur version relative) qui fournissent

$$R^i \pi_* (\Omega_{\mathbb{P}(E)/X}^{p-k} \otimes \mathcal{O}(1)) = 0$$

pour $i \geq 0$, $p - k > 0$, ou $p - k = 0$, $i > 0$. Par ailleurs, pour $p - k = 0$, $i = 0$, on a

$$\pi_* (\pi^* \Omega_X^p \otimes \mathcal{O}(1)) = \Omega_X^p \otimes \pi_* \mathcal{O}(1) = \Omega_X^p \otimes E.$$

Un argument de suite spectrale montre alors que

$$H^q(\mathbb{P}(E), \Omega_{\mathbb{P}(E)}^p \otimes \mathcal{O}(1)) = H^q(X, \Omega_X^p(E)),$$

et donc que $H^q(X, \Omega_X^p(E)) = 0$, $p + q \geq n + e$, d'après (6).

Ceci montre le (2) du théorème, et le (3) se montre par des arguments semblables. ■

2.1. Un argument de Bogomolov

Considérons la version duale (Corollaire 1.4, 1), dans le cas où $q = 0$, $p = 1$. Cela nous donne :

$$H^0(X, \Omega_X \otimes E^*) = 0, 1 \leq \dim X - e,$$

On a donc le résultat suivant, qui est un cas très particulier du théorème d'annulation de Le Potier :

Théorème 2.1. *Soit X une variété projective et E un fibré ample de rang $e < \dim X$ sur X . Alors $H^0(X, \Omega_X \otimes E^*) = 0$.*

Bogomolov donne une démonstration différente de ce résultat dans [1]. L'argument est le suivant : supposons par l'absurde qu'on ait une section holomorphe non nulle $\sigma \in \text{Hom}(E, \Omega_X)$ avec $e = \text{rang } E < \dim X$. Soit k le rang générique de σ . Alors on a aussi une application non nulle

$$\wedge^k \sigma : \bigwedge^k E \rightarrow \Omega_X^k$$

qui est de rang 1. Le faisceau réflexif $L := (\text{Im } \wedge^k \sigma)^{**} \subset \Omega_X^k$ est un fibré en droites qui n'est peut-être pas ample, mais est « gros », c'est-à-dire que pour N assez grand, les sections holomorphes de $L^{\otimes N}$ fournissent une application rationnelle $X \dashrightarrow \mathbb{P}^M$ qui est de degré 1 sur son image.

À l'aide d'un argument de revêtement ramifié, on se ramène au cas où $N = 1$ et donc où les sections de L fournissent une application rationnelle $\Phi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^M$ qui est de degré 1 sur son image. Soit s une section de $L \subset \Omega_X^k$. Alors s fournit une k -forme holomorphe sur X . Une telle k -forme est toujours fermée. Si s' est une autre section holomorphe de L , on a $s' = \varphi s$, où φ est une fonction rationnelle sur X , et par ailleurs s' est également fermée. Donc

$$ds' = 0 = d\varphi \wedge s.$$

Mais les fonctions rationnelles φ ont des différentielles indépendantes au point générique de X car l'application Φ est génériquement de rang maximal. Donc, comme $s \neq 0$ et est de degré $k \leq e < \dim X$, l'annulation $ds' = d\varphi \wedge s = 0$ pour toute s' est absurde. ■

3. Applications aux théorèmes de connexité

3.1. Un résultat de Sommese

Une application géométrique du théorème d'annulation de Le Potier, ou plutôt de sa conséquence (5) est le résultat suivant, dû à Sommese [11] :

Proposition 3.1. *Considérons une inclusion $X \subset Y$ où X est une variété compacte complexe connexe et Y une variété complexe connexe, telle que le fibré normal $N_{X/Y}$ soit ample et engendré par ses sections. Soit $n := \dim X$ et $e := \operatorname{codim} X$. Alors l'application de restriction*

$$H^0(Y, \Omega_Y^q) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^q)$$

est injective pour $q \leq n - e$.

Lorsqu'on considère la restriction des formes holomorphes fermées (ce qui est naturel car si Y est projective, toutes les formes holomorphes sur Y sont fermées), ce résultat a été amélioré par Jiang Zhi [13], qui montre que sous les mêmes hypothèses, l'application de restriction

$$H^0(Y, \Omega_Y^q) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^q)$$

est injective sur l'espace des formes holomorphes *fermées* pour $q \leq n - e + 1$. Ce résultat est essentiellement optimal.

La preuve de la proposition 3.1 consiste à montrer l'injectivité des deux applications de restriction :

$$H^0(Y, \Omega_Y^q) \rightarrow H^0(X, \Omega_{Y|X}^q),$$

$$H^0(X, \Omega_{Y|X}^q) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^q).$$

Pour l'injectivité de la première flèche, il suffit de montrer que $H^0(Y, \Omega_Y^q \otimes \mathcal{I}_X^l / \mathcal{I}_X^{l+1}) = 0$, $\forall l > 0$, car cela montre qu'une forme s'annulant le long de X doit s'annuler à un ordre arbitrairement grand le long de X . Or le faisceau $\mathcal{I}_X^l / \mathcal{I}_X^{l+1}$ est isomorphe à $S^l N_{X/Y}^*$. D'autre part, la suite exacte conormale

$$0 \rightarrow N_{X/Y}^* \rightarrow \Omega_{Y|X} \rightarrow \Omega_X \rightarrow 0$$

permet de filtrer le fibré $\Omega_{Y|X}^q$ par des sous-fibrés $\bigwedge^k N_{X/Y}^* \wedge \Omega_{Y|X}^{q-k}$, les gradués successifs étant isomorphes à $\bigwedge^k N_{X/Y}^* \otimes \Omega_X^{q-k}$. En conclusion, le fibré $\Omega_Y^q \otimes \mathcal{I}_X^l / \mathcal{I}_X^{l+1}$ admet une filtration dont les morceaux gradués sont de la forme $S^l N_{X/Y}^* \otimes \bigwedge^k N_{X/Y}^* \otimes \Omega_X^{q-k}$, et le fait que $H^0(\Omega_Y^q \otimes \mathcal{I}_X^l / \mathcal{I}_X^{l+1}) = 0$, $l > 0$ résulte des annulations (5).

La preuve de l'injectivité de la seconde flèche se fait de même, en considérant la filtration ci-dessus sur $\operatorname{Ker}(\Omega_{Y|X}^q \rightarrow \Omega_X^q)$, dont les morceaux gradués sont de la forme $\Omega_X^{q-l} \otimes \bigwedge^l N_{X/Y}^*$, $l > 0$. ■

3.2. Théorèmes de connexité de Debarre-Sommese

Il est clair que si on a une inclusion $X \subset Y$ comme ci-dessus, avec la condition que $N_{X/Y}$ est ample et engendré par ses sections, on ne peut pas, même en supposant Y projective, en déduire un théorème de connexité concernant l'injectivité des flèches de restriction

$$H^q(Y, \Omega_Y^p) \rightarrow H^q(X, \Omega_X^p), \quad p + q \leq n - e + 1.$$

En effet, l'hypothèse est locale le long de X , et en éclatant un point de Y non situé sur X , l'hypothèse est toujours satisfaite, et cependant la classe $[E] \in H^1(Y, \Omega_Y)$ du diviseur exceptionnel s'annule sur X . Il se trouve que lorsque Y est une variété abélienne, son fibré tangent est trivial, et l'on peut montrer ce type de résultat lorsque $N_{X/Y}$ est ample (c'est toujours le cas si Y est simple par exemple, cf [11]).

Théorème 3.2. (*Debarre, Sommese*) *Si Y est une variété abélienne et $X \subset Y$ est à fibré normal ample, $\dim X = n$, $\text{codim } X = e$, alors la flèche de restriction*

$$H^k(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^k(X, \mathbb{Z})$$

est injective pour $k \leq n - e + 1$.

La preuve de Sommese s'inspire des idées de Barth. La preuve donnée par Debarre dans [2] utilise le théorème d'annulation de Le Potier et une résolution plus précise du fibré $\text{Ker}(\Omega_{Y|X}^q \rightarrow \Omega_X^q)$. Un point important ici, déjà noté par Sommese, est le fait que Ω_Y^p étant trivial, l'étape d'injectivité de la flèche de restriction

$$H^q(Y, \Omega_Y^p) \rightarrow H^q(X, \Omega_{Y|X}^p), \quad p + q \leq n - e + 1$$

se ramène à l'injectivité de la flèche

$$H^q(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow H^q(X, \mathcal{O}_X)$$

ou par symétrie de Hodge, à l'injectivité de la flèche

$$H^0(Y, \Omega_Y^q) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^q)$$

qu'on a déjà vue plus haut (version améliorée de la proposition 3.1).

4. Généralisations ?

Le théorème d'Akizuki-Nakano concerne les fibrés en droite positifs, c'est-à-dire amples, et on peut donc remplacer dans l'annulation (1) L par n'importe quelle puissance $L^{\otimes N}$, $N > 0$.

Quand on examine les théorèmes d'annulations de Le Potier, il est donc tentant de penser qu'on peut dans (2) remplacer E par n'importe quelle puissance symétrique positive non nulle, et dans (3) remplacer K_X par Ω_X^p , $0 \leq p \leq n = \dim X$.

Au vu du théorème 1.2, on s'attendrait à ce que

$$(7) \quad H^q(X, S^\nu E \otimes \Omega_X^p) = 0, \quad \nu > 0, \quad p + q \geq \dim X + e,$$

$$(8) \quad H^q(X, \Omega_X^p \otimes \bigwedge^a E) = 0, \quad p + q \geq n + e - a + 1.$$

Ceci a été conjecturé par Sommese [11], mais est essentiellement faux, comme on le verra au 4.2. Dans le cas des fibrés amples engendrés par leurs sections, il reste cependant quelques énoncés d'annulation qui s'avèrent utiles géométriquement.

Théorème 4.1. (*Debarre*) Soit X une sous-variété lisse de dimension n d'une sous-variété abélienne Y , dont le fibré normal $N_{X/Y}$ est un fibré ample de rang e , (engendré bien sûr par ses sections). Alors pour $\nu > 0$

$$H^q(X, S^\nu N_{X/Y} \otimes K_X) = 0, q \geq e.$$

De façon équivalente par la dualité de Serre :

$$H^q(X, S^\nu N_{X/Y}^*) = 0, q \leq n - e.$$

Théorème 4.2. (*Le Potier-Peternell-Schneider* [8]) Soit X une variété projective de dimension n , et E un fibré ample sur X de rang e , engendré par ses sections. Alors pour $q = n$ ou $q = n - 1$, on a :

$$H^q(X, S^\nu E \otimes \Omega_X^p) = 0, p + q \geq n + e, \nu > 0.$$

De façon équivalente par dualité de Serre, on a pour $q = 0$ ou $q = 1$:

$$H^q(X, S^\nu E^* \otimes \Omega_X^p) = 0, p + q \leq n - e, \nu > 0.$$

Le cas $q = 0$ a déjà été vu comme conséquence immédiate du théorème 1.3, 2 et du fait que E est engendré par ses sections.

Les preuves de ces énoncés utilisent comme ingrédients essentiels le théorème d'annulation de Le Potier et le fait suivant : si F est un fibré engendré par ses sections, on a une application surjective d'évaluation

$$W \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow F \rightarrow 0.$$

Notant K le noyau, ceci fournit une résolution à gauche de $\bigwedge^k F$ pour chaque k :

$$0 \rightarrow S^k K \rightarrow S^{k-1} K \otimes W \rightarrow \dots \rightarrow K \otimes \bigwedge^{k-1} W \rightarrow \bigwedge^k W \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \bigwedge^k F \rightarrow 0.$$

Les preuves se font en utilisant ce type de résolution et une récurrence sur ν .

4.1. Application au théorème de normalité de Zak

Le théorème 4.2 a permis à Le Potier-Peternell-Schneider de corriger la preuve due à Faltings du théorème de normalité linéaire de Zak [12].

Rappelons la conjecture fameuse de Hartshorne :

Conjecture 4.3. Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ une sous-variété lisse de dimension d . Alors si $d \geq \frac{2}{3}n$, X est une intersection complète.

Une condition nécessaire pour qu'une sous-variété soit une intersection complète est qu'elle soit projectivement normale, et a fortiori linéairement normale, c'est-à-dire que la flèche de restriction $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ soit surjective. Zak montre ce dernier énoncé en prouvant que X ne peut pas être obtenue comme une projection linéaire d'un $X' \subset \mathbb{P}^{n+1}$ non contenu dans un hyperplan.

La démarche adoptée par Faltings était cohomologique : il s'agissait d'étendre les sections de $H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ à $\mathbb{P}^n$. Il se trouve que par des arguments généraux,

il suffit d'être capable de pratiquer ces extensions à l'ordre fini, c'est-à-dire de montrer que si X_k est le k -ième voisinage infinitésimal de X dans $\mathbb{P}^n$, on a

$$H^0(X_{k+1}, \mathcal{O}_{X_{k+1}}(1)) \twoheadrightarrow H^0(X_k, \mathcal{O}_{X_k}(1)).$$

Mais du fait que $\mathcal{I}_X^{k+1}/\mathcal{I}_X^{k+2} \cong S^{k+1}N_{X/\mathbb{P}^n}^*$, le conoyau de cette flèche est contenu dans

$$H^1(X, S^{k+1}N_{X/\mathbb{P}^n}^* \otimes \mathcal{O}_X(1)).$$

Pour $k > 0$, l'annulation de cet espace est une conséquence du théorème 4.2. Pour $k = 0$, on ne peut pas appliquer le théorème 4.2, car $N_{X/\mathbb{P}^n}(-1)$ n'est pas ample, mais il est engendré par ses sections et il est $n - d - 1$ -ample (cf [11] pour cette notion), de sorte qu'il suffit d'appliquer la version adéquate du théorème 4.2, où « ample » (c'est-à-dire 0-ample) est remplacé par $n - d - 1$ -ample.

4.2. Les contre-exemples de Le Potier-Peternell-Schneider et Demailly

Dans l'article [8], l'exemple suivant est considéré : X est la grassmannienne $G(2, r+2)$, de dimension $n = 2r$, $r \geq 2$. E est le fibré quotient tautologique de rang r , qui n'est pas ample mais qui est engendré par ses sections et dont le déterminant $\det E$ est ample (c'est le fibré en droites qui donne le plongement de Plücker de la grassmannienne). Les auteurs montrent la non-annulation suivante :

Théorème 4.4. *Pour tout $l > 1$, $H^{n-2}(X, S^l E \otimes \det E \otimes K_X) \neq 0$.*

Il est facile de construire un morphisme fini $\varphi : Y \rightarrow X$ tel que $\varphi^* \det E = L^{\otimes l}$, où L est nécessairement ample sur Y . Le fibré $\varphi^*(S^l E \otimes \det E)$ est alors isomorphe à $S^l(\varphi^* E \otimes L)$, où $\varphi^* E \otimes L$ est ample sur Y . Comme $2n - 2 = 4r - 2 \geq n + r = 3r$, la non-annulation

$$H^{n-2}(Y, S^l(\varphi^* E \otimes L) \otimes K_Y) \neq 0$$

donne donc un premier contre-exemple à (7). Notons ici le degré $n - 2$ qui apparaît : d'après le théorème 4.2, où on espère pouvoir supprimer l'hypothèse que le fibré est engendré par ses sections, un tel contre-exemple ne devrait pas exister pour la cohomologie de degré $n - 1$ ou n .

Demailly [4] a montré comment déduire de l'exemple ci-dessus un contre-exemple à (8).

4.3. Autres théorèmes d'annulation

Les autres théorèmes d'annulation connus sont de deux types ; il y a une série d'énoncés faisant intervenir les groupes de cohomologie

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes \Gamma(E) \otimes \det E^{\otimes h})$$

où $\Gamma(E)$ est un facteur direct dans une puissance tensorielle de E , et où l'exposant h est positif et dépend de Γ . Le prototype de ces énoncés a été donné par Griffiths :

Théorème 4.5. *Soit E un fibré ample sur X . Alors*

$$H^q(X, K_X \otimes S^l E \otimes \det E) = 0, \forall l \geq 0.$$

La preuve de cet énoncé est obtenue en appliquant le théorème de Kodaira à $\mathcal{O}(l + e)$ sur $\mathbb{P}(E)$. Demailly [4] et Manivel [9] ont obtenu des énoncés semblables faisant intervenir des puissances de E plus compliquées, ainsi que tous les groupes de cohomologie de Dolbeault. Néanmoins, la puissance h qui apparaît dans ces énoncés est positive.

Dans une autre direction, Le Potier [7] montre l'énoncé suivant, généralisant le théorème 1.3, (3) et ayant une structure différente, plus proche de ce qu'on aurait aimé avoir dans (7), (8) :

Théorème 4.6. *Soit E ample de rang e sur une variété complexe X projective lisse de dimension n . Alors*

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes \bigwedge^k E) = 0, p + q > n + k(e - k).$$

Ce résultat a été généralisé par Laytimi et Nahm [5] :

Théorème 4.7. *Soit E un fibré de rang e sur X , $\dim X = n$. On suppose que $S^s E \otimes \bigwedge^k E$ est ample. Alors*

$$H^q(X, \Omega_X^p \otimes S^s E \otimes \bigwedge^k E) = 0, p + q - n > k(e - k) + s(e - 1).$$

Remarque 4.8. *$S^s E$ est ample si et seulement si E l'est, et donc si $k = 0$, les hypothèses sont les mêmes que celles de Le Potier. Pour $k > 0$, l'hypothèse de Laytimi-Nahm est plus faible que l'amplitude de E .*

5. Questions

Du point de vue géométrique, il serait naturel de supprimer l'hypothèse « engendré par ses sections » dans le corollaire 1.5. Notons que les contre-exemples de Le Potier-Peternell-Schneider et de Demailly concernent des faisceaux engendrés par leurs sections mais ne concernent que la cohomologie de degré > 0 des puissances de E^* . La question (qui est d'ailleurs posée dans [8]) est donc :

Question 5.1. *Si X est projective et E est ample de rang e sur X , est-il vrai que*

$$(9) H^0(X, S^k E^* \otimes \bigwedge^l E^* \otimes \Omega_X^p) = 0, p + l \leq \dim X - e + 1, k \geq 0, l > 0.$$

L'intérêt de cette question (que je me garderais bien de formuler comme une conjecture) réside principalement dans ses applications géométriques : Une réponse positive entraînerait en effet par les arguments donnés dans [13] une réponse positive à la question suivante :

Question 5.2. *Soit Y une variété complexe connexe et $X \subset Y$ l'inclusion d'une sous-variété complexe compacte telle que $N_{X/Y}$ soit ample. Est-il vrai que l'application de restriction :*

$$H^0(Y, \Omega_Y^k) \rightarrow H^0(X, \Omega_X^k)$$

est injective sur les formes holomorphes fermées pour $k \leq \dim X - e + 1$?

6. Références

- [1] F. Bogomolov. Holomorphic tensors and vector bundles on projective manifolds, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 42 (1978), 1227–1287.
- [2] O. Debarre. Fulton-Hansen and Barth-Lefschetz theorems for subvarieties of abelian varieties. *J. Reine Angew. Math.* 467 (1995), 187–197.
- [3] P. Deligne, L. Illusie. Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham. *Invent. Math.* 89 (1987), n° 2, 247–270.
- [4] J.-P. Demailly. Vanishing theorems for tensor powers of an ample vector bundle, *Invent. Math.* 91 (1988), 203–220.
- [5] F. Laytimi, W. Nahm. A generalization of Le Potier’s vanishing theorem. *Manuscripta Math.* 113 (2004), n° 2, 165–189.
- [6] J. Le Potier. Annulation de la cohomologie à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe positif de rang quelconque, *Math. Ann.* 218 (1975), 35–53.
- [7] J. Le Potier. Cohomologie de la grassmannienne à valeurs dans les puissances extérieures et symétriques du fibré universel. *Math. Ann.* 226 (1977), n° 3, 257–270.
- [8] J. Le Potier, T. Peternell, M. Schneider. Vanishing theorems, linear and quadratic normality. *Invent. Math.* 87 (1987), n° 3, 573–586.
- [9] L. Manivel. Vanishing theorems for ample vector bundles, *Inventiones Math.* 127 (1997), 401–416.
- [10] M. Schneider, J. Zintl. The Barth-Lefschetz theorem as a consequence of Le Potier’s vanishing theorem, *Manuscr. Math.* 80 (1993), 259–263.
- [11] A. J. Sommese. Submanifolds of abelian varieties, *Math. Ann.* 233 (1978), 229–256.
- [12] F. Zak. Projections of algebraic varieties, (Russian) *Mat. Sb. (N.S.)* 116(158) (1981), n° 4, 593–602, 608.
- [13] Jiang Zhi. On the restriction of holomorphic forms, preprint 2006.

Fibrés vectoriels sur le plan projectif (d'après J. Le Potier)

Christoph Sorger¹

1. Introduction

Dans le texte qui suit, je voudrais expliquer certains résultats de Joseph Le Potier sur les fibrés vectoriels et leurs espaces de modules sur le plan projectif.

L'étude des fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}_2$ était pour lui une très grande source d'inspiration. Elle est à l'origine de nombreuses contributions de Joseph, dépassant très largement ce cadre, parmi lesquelles figurent ses travaux sur les espaces de modules de faisceaux semi-stables sur d'autres surfaces ou sur les courbes ainsi que l'introduction d'objets nouveaux comme les faisceaux semi-stables de torsion ou les systèmes cohérents.

Bien entendu, il est hors de mon propos d'être exhaustif ici. Je voudrais plutôt me concentrer, après quelques rappels sur les espaces de modules, sur deux types de résultats. Il s'agit d'une part de théorèmes généraux comme les théorèmes d'existence de fibrés stables et d'autre part de théorèmes sur la géométrie des espaces de modules en rang 2, essentiellement centrés autour du morphisme de Barth. En particulier, je montrerai son calcul, non publié, de l'invariant de Lüroth, autrement dit de l'invariant de Donaldson en degré 4.

J'ai débuté en géométrie algébrique avec un cours de Maîtrise de Joseph, suivi d'un cours de DEA, d'un mémoire de DEA puis d'une thèse sous sa direction. Entré ensuite au CNRS, j'ai été affecté à son laboratoire puis installé dans son bureau à Jussieu, pratiques d'un autre temps. Ces conditions de recherches ont été une chance merveilleuse et j'ai énormément profité pendant toutes ces années de l'aide de Joseph et de son soutien, tout comme de son enthousiasme, de sa rigueur et surtout de son amitié infaillible.

Je voudrais remercier Jean-Marc Drézet pour sa relecture détaillée de ce texte.

2. L'espace de modules

Si X est une variété algébrique on cherche à classifier les fibrés vectoriels algébriques de type topologique fixé sur X , autrement dit on cherche une variété algébrique dont les points correspondent aux classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels algébriques, avec rang et classes de Chern fixés. Classiquement, le premier exemple est la jacobienne sur une courbe projective lisse C qui s'identifie aux classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels de rang 1 et de degré 0. En rang supérieur, on ne peut pas s'attendre à trouver de telles variétés algébriques mais on peut s'en rapprocher en considérant un certain type de fibrés vectoriels : ceux qui sont *stables*. Cette observation fondamentale est due à D. Mumford, à qui on doit la définition suivante : un fibré vectoriel sur une courbe est stable si pour tout sous-fibré vectoriel $0 \neq F' \subsetneq F$, la pente de F' , à savoir le rapport $\deg(F')/r(F')$ est strictement

¹ Institut Universitaire de France & Université de Nantes

inférieure à la pente de F . L'importance de cette notion a été immédiatement comprise par Narasimhan et Seshadri qui ont montré alors que les fibrés vectoriels stables sur C correspondent de manière biunivoque aux représentations unitaires du groupe fondamental de C . Sur une courbe, on peut effectivement mettre une structure de variété algébrique sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés stables de rang et de degré fixés mais la variété obtenue n'est projective que si le degré et le rang sont premiers entre eux. Pour pallier ce problème, on considère des fibrés semi-stables en remplaçant l'inégalité stricte ci-dessus par une inégalité large et on s'autorise à regarder l'ensemble des classes de S -équivalence : tout fibré semi-stable admet une filtration $0 = E_0 \subset E_1 \cdots \subset E_m = E$ avec E_i/E_{i-1} stable de même pente que E . La filtration n'est pas unique mais le gradué l'est à isomorphisme près. Deux fibrés semi-stables sont alors dit S -équivalents si leur gradués respectifs sont isomorphes. Bien entendu, pour les fibrés stables, la relation d'équivalence se réduit à celle d'isomorphisme.

En dimension supérieure, pour obtenir des espaces de modules projectifs, on doit considérer non seulement des fibrés vectoriels mais aussi des faisceaux sans torsion. La notion de semi-stabilité doit donc être adaptée : non seulement elle devra faire intervenir les autres classes de Chern mais aussi une polarisation de X , c'est-à-dire un plongement de X dans un espace projectif (déjà pour pouvoir définir le degré d'un faisceau cohérent). Dans le cas du plan projectif, cela se simplifie et il s'avère utile de considérer deux rationnels naturellement associés à un faisceau cohérent : la pente et le discriminant.

Soit E un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2$ de rang $r > 0$ et de classes de Chern c_1 et c_2 . On définit respectivement la pente

$$\mu(E) = \frac{c_1}{r}$$

et le discriminant de E

$$\Delta(E) = \frac{1}{r} \left(c_1 - \frac{r-1}{2r} c_1^2 \right).$$

Le faisceau E est dit *semi-stable* (resp. *stable*) s'il est sans torsion et si pour tout sous-faisceau non trivial et strict $E' \subset E$ on a $\mu(E') \leq \mu(E)$ et, en cas d'égalité, $\Delta(E') \geq \Delta(E)$ (resp. $>$).

On note $M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2)$ l'espace de modules grossier des faisceaux semi-stables de rang r et de classes de Chern c_1 et c_2 . C'est une variété projective dont les points fermés sont les classes de S -équivalence.

Il y a des ouverts naturels $M_{\mathbb{P}_2}^s(r, c_1, c_2) \subset M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2)$ correspondant aux faisceaux stables et $M_{\mathbb{P}_2}^o(r, c_1, c_2) \subset M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2)$ correspondant aux fibrés vectoriels.

L'espace $M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2)$ est un espace de modules *grossier*. Ceci signifie essentiellement que si $\mathcal{E}$ est une famille de faisceaux semi-stables de rang r et de classes de Chern c_1 et c_2 paramétrée par la variété S , il existe un morphisme dit *modulaire* $f_{\mathcal{E}} : S \rightarrow M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2)$ associant à $\mathcal{E}_s$ la classe $[\mathcal{E}_s] \in M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2)$.

On peut se demander s'il existe une famille universelle disons au moins sur l'ouvert des fibrés vectoriels stables $M_{\mathbb{P}_2}^{os}(r, c_1, c_2)$, c'est-à-dire un fibré vectoriel $\mathcal{U}$ sur $M_{\mathbb{P}_2}^{os}(r, c_1, c_2) \times \mathbb{P}_2$ tel que pour tout $[s] \in M_{\mathbb{P}_2}^{os}(r, c_1, c_2)$ la classe d'isomorphisme de $\mathcal{U}_s$ soit $[s]$ (on dit aussi fibré de Poincaré). Il n'en est rien en général comme le montre Joseph Le Potier en 1979 dans son premier article sur les fibrés vectoriels

sur le plan projectif [10] : par exemple si $r = 2$ et $c_1 = 0$ alors pour c_2 pair il n'existe pas de telle famille.

Soit E un faisceau stable. Les déformations infinitésimales de E sont gouvernées par le groupe $\text{Ext}^1(E, E)$. Par ailleurs, on a $\text{Hom}(E, E) = \mathbb{C}$ par stabilité; pour le groupe d'obstructions on a $\text{Ext}^2(E, E) \simeq \text{Hom}(E, E(-3))^* = 0$ d'abord par dualité de Serre puis par stabilité de E . Ainsi, $[E]$ définit un point lisse de $M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2)$ d'espace tangent $\text{Ext}^1(E, E)$.

Les espaces de modules $M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2)$ sont de très belles variétés naturellement associées au plan projectif. Par exemple, si $r = 1$, $c_1 = 0$ et $c_2 = n$, on obtient le schéma de Hilbert $\text{Hilb}_{\mathbb{P}_2}^n$ de n points sur $\mathbb{P}_2$. En effet, soit E un faisceau semi-stable de rang 1. Comme il est sans torsion, il se plonge dans son bidual E^{**} . Celui-ci est réflexif donc localement libre de classe de Chern $c_1 = 0$. C'est donc $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ et E est ainsi un faisceau d'idéaux de colongueur n .

3. Théorèmes fondamentaux

3.1. Théorèmes d'existence

On cherche des conditions nécessaires et suffisantes à imposer sur r, c_1 et c_2 pour qu'il existe au moins un fibré vectoriel stable de rang r et de classes de Chern c_1 et c_2 . Pour $r = 2$, le résultat était connu de Schwarzenberger. La condition est

$$c_2 - \frac{c_1^2}{4} \geq \begin{cases} 2 & \text{si } c_1 \text{ est pair} \\ \frac{3}{4} & \text{si } c_1 \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour répondre à la question, Joseph Le Potier et Jean-Marc Drézet introduisent la notion fondamentale de fibré *exceptionnel*. Par définition, c'est un fibré stable E tel que $\text{Ext}^1(E, E) = 0$, autrement dit un fibré stable rigide. Si E est un tel fibré, l'espace de modules est alors réduit au point défini par $[E]$. En fait, il est même défini par sa pente : son rang r_μ est le plus petit dénominateur positif de μ et son discriminant est donné par

$$\Delta_\mu = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r_\mu^2} \right).$$

Ceci résulte de la formule de Riemann-Roch :

$$\chi(E, E) = \sum (-1)^i \dim \text{Ext}^i(E, E) = r^2(1 - 2\Delta)$$

Soit donc $\mathbb{E} \subset \mathbb{Q}$ l'ensemble des pentes des fibrés exceptionnels. Il est tout à fait remarquable que Le Potier et Drézet aient réussi à déterminer complètement cet ensemble. Pour cela, si $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ sont tels que $3 + \alpha - \beta \neq 0$, on pose

$$\alpha, \beta = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\Delta_\beta - \Delta_\alpha}{3 + \alpha - \beta}.$$

Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels de la forme $\frac{p}{2q}$ pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. On définit par récurrence l'application $\varepsilon : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{Q}$ en demandant qu'elle soit l'identité sur $\mathbb{Z}$ et satisfasse à

$$\varepsilon \left(\frac{2p+1}{2q+1} \right) = \varepsilon \left(\frac{p}{2q} \right) \cdot \varepsilon \left(\frac{p+1}{2q} \right).$$

L'application ε permet de calculer l'ensemble $\mathbb{E}$:

Théorème 1 ([3], théorème A). *On a $\mathbb{E} = \varepsilon(\mathbb{D})$.*

Pour donner les conditions d'existence de fibrés stables il est utile de considérer la fonction

$$\delta(\mu) = \sup_{\alpha \in \mathbb{E}, |\mu - \alpha| < 3} P(-|\mu - \alpha|) - \Delta_\alpha,$$

où, $P(X) = 1 + \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X^2$ (c'est aussi le polynôme de Hilbert du fibré trivial).

Théorème 2 ([3], théorèmes C, D). *Les entiers r, c_1 et c_2 étant donnés*

$$M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2) \neq \emptyset \iff \Delta \geq \delta(\mu).$$

Dans ce cas, $M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2)$ est irréductible de dimension $r^2(2\Delta - 1) + 1$.

Il est hors de mon propos ici d'entrer dans la démonstration des théorèmes ci-dessus. Remarquons cependant que le fait que ces conditions soient nécessaires résulte de la formule de Riemann-Roch. La démonstration d'existence repose sur la construction d'une très grande famille de fibrés vectoriels à laquelle on enlève le fermé correspondant aux fibrés non stables et dont on montre ensuite que l'ouvert qui reste est toujours non vide. Ceci est fait en minorant la codimension grâce à une version raffinée de la stratification de Shatz. Cette construction est d'ailleurs déjà présente dans le cas du rang 2 dans l'article de Joseph Le Potier en 1979 sur la stabilité et l'amplitude [11].

3.2. Groupe de Picard

Le groupe de Picard de $M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2)$ a été calculé par J.-M. Drézet dans [5] à la suite de l'article sur l'existence. Joseph Le Potier en a donné une démonstration simplifiée en 1993 [16]. La description précise des générateurs figurant dans [5] fait intervenir une forme quadratique sur $K(\mathbb{P}_2)$ – suggéré par le referee de cet article et qui remonte aux constructions « Det » et « Div » de Mumford – que Joseph Le Potier a par la suite (en 1989 [13]) généralisées aux autres surfaces projectives. Il y met notamment en évidence les fibrés déterminants qui sont liés à d'autres recherches ultérieures comme la dualité étrange (voir le texte de Luca Scala et les travaux de G. Danila)

Soit $K(\mathbb{P}_2)$ l'algèbre de Grothendieck des classes des fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}_2$, ou ce qui revient au même l'algèbre des classes des faisceaux algébriques cohérents sur $\mathbb{P}_2$. C'est un groupe abélien libre de rang 3 : on peut par exemple associer à la classe u son rang, la classe de Chern c_1 et la caractéristique d'Euler Poincaré χ . Sur $K(\mathbb{P}_2)$ on a une forme quadratique entière définie par

$$u \mapsto \chi(u^2) = 2r\chi + c_1^2 - r^2$$

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme polaire associée. Par construction, on a

$$\dim M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2) = 1 - \langle c^*, c \rangle$$

où c^* désigne la classe obtenue par l'involution sur $K(\mathbb{P}_2)$ définie par passage au dual d'un fibré vectoriel. Ainsi, les fibrés exceptionnels sont les fibrés stables dont la classe satisfait à $\langle c^*, c \rangle = 1$.

Soit $c^\perp$ l'orthogonal de c par rapport à la forme quadratique. L'idée consiste à définir un morphisme $\lambda_M : c^\perp \rightarrow \text{Pic}(M)$.

Pour cela on a besoin de revenir à la construction de l'espace de modules $M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2)$ qui peut se faire comme suit, d'après C. Simpson [19]. Notons $H(m) = r(P(\mu + m) - \Delta)$ le polynôme de Hilbert. On sait par Maruyama que la famille des faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert fixé est limitée au sens de Grothendieck. Il existe ainsi un entier $N \gg 0$ tel que tout faisceau semi-stable E de polynôme de Hilbert H apparait comme quotient du fibré $P = \mathbb{C}^{H(N)} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-N)$. Soit $R = \text{Quot}(P, H)$ le schéma de Grothendieck des quotients de P de polynômes de Hilbert H . On sait, quitte à éventuellement encore augmenter N , que l'ouvert $R^{ss} \subset R$ des quotients $[q : G \rightarrow E]$ avec E semi-stable et tels que q induit un isomorphisme $\mathbb{C}^{H(N)} \xrightarrow{\sim} E(N)$ correspond exactement à l'ouvert de points semi-stables au sens de Mumford sous l'action de $G = \text{SL}(H(N))$. D'après Mumford, il existe un bon quotient de R^{ss} par G qui n'est autre que $M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2)$. Considérons alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R^{ss} \times \mathbb{P}_2 & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}_2 \\ p \downarrow & & \\ R^{ss} & & \end{array}$$

On définit alors le morphisme $\lambda_Q : K(\mathbb{P}_2) \longrightarrow \text{Pic}^G(R^{ss})$ par la formule

$$\lambda_Q(u) := \det p_!(\mathcal{Q}.q^*(u))$$

où $\mathcal{Q}$ désigne le quotient universel sur R^{ss} . Soit $\pi : R^{ss} \longrightarrow M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2)$ le bon quotient. La question qui se pose alors est de déterminer sous quelles conditions sur u , le fibré en droites $\lambda_Q(u)$ descend à $M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2)$. La réponse est très jolie :

Proposition 1. *Si $\langle c, u \rangle = 0$ alors le fibré inversible $\lambda_Q(u)$ provient d'un élément bien déterminé dans $\text{Pic}(M)$, noté $\lambda_M(u)$, caractérisé par la propriété universelle suivante : Pour toute famille $\mathcal{E}$ de faisceaux semi-stables de rang r et de classes de Chern c_1 et c_2 , paramétrée par la variété algébrique lisse S on a, si $f_{\mathcal{E}} : S \longrightarrow M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2)$ désigne le morphisme modulaire, $f_{\mathcal{E}}^*(\lambda_M(u)) = \lambda_{\mathcal{E}}(u)$.*

La proposition se démontre en utilisant le lemme de Drézet-Narasimhan-Kempf [4], d'après lequel il suffit de vérifier que pour tout point $[q]$ d'orbite fermée, le stabilisateur agit trivialement sur la fibre de $\lambda_Q(u)$ en $[q]$. Pour cela, on remarque que les orbites fermées correspondent aux quotients poly-stables, i.e. de la forme

$$E = E_1^{k_1} \oplus \cdots \oplus E_{\ell}^{k_{\ell}}.$$

Le stabilisateur d'un tel point est $\text{Aut}(E)$, c'est à dire $\text{GL}(k_1) \times \cdots \times \text{GL}(k_{\ell})$. On constate alors que l'action du stabilisateur sur la fibre est donnée par

$$(g_1, \dots, g_{\ell}) \mapsto \prod_{i=1}^{\ell} \det(g_i)^{\langle c(E_i), u \rangle}.$$

Or, dans $K(\mathbb{P}_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ on a $\frac{c}{r} = \frac{c(E_i)}{r(E_i)}$. L'hypothèse $\langle c, u \rangle = 0$ dit alors précisément que l'action est triviale.

Théorème 3 (Drézet [5]). *Soit c la classe dans $K(\mathbb{P}_2)$ des faisceaux cohérents de rang $r > 0$ et de classes de Chern c_1 et c_2 . Soit $\lambda_M : c^{\perp} \longrightarrow \text{Pic}(M)$ le morphisme ci-dessus.*

- (a) Si $\Delta > \delta(\mu)$ alors λ_M est un isomorphisme.
 (b) Si $\Delta = \delta(\mu)$ alors λ_M est un epimorphisme, de noyau engendré par la classe e du fibré exceptionnel associé c .

La variété $M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2)$ est localement factorielle.

Joseph Le Potier démontre le théorème ci-dessus dans [16] en utilisant un théorème type Brill-Noether démontré "sur commande" par L. Göttsche et A. Hirschowitz [8]. La factorialité locale signifie que tout diviseur de Weil est de Cartier. La question de savoir si une variété de modules est localement factorielle a été soulevée par Drézet qui a montré, avec M.S. Narasimhan que c'est aussi le cas pour l'espace de modules des fibrés semi-stables à déterminant trivial de rang r et de degré d sur une courbe algébrique [4]. Ce résultat est faux en général pour d'autres surfaces comme l'a observé Joseph Le Potier : par exemple $M_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(2, 0, 2)$ n'est pas localement factorielle au point $\mathcal{O}(1, -1) \oplus \mathcal{O}(-1, 1)$. Récemment, D. Kaledin, M. Lehn et moi avons montré que pour les surfaces $K3$, les espaces de modules associés sont également localement factoriels (sauf dans le cas de dimension 10 considéré par K. O'Grady), ce qui nous a permis de montrer qu'il n'existe pas de résolution de singularités symplectiques de ces espaces de modules (sauf dans le cas de O'Grady) [9].

4. Géométrie des variétés de modules pour $r = 2$

Considérons le cas $r = 2$, $c_1 = 0$ et $c_2 = n$ avec n un entier ≥ 2 . La cohomologie $H^q(E(i))$ d'un faisceau semi-stable ayant ces classes de Chern est obligatoirement nulle pour $q = 0$ et $i \leq 0$ ou pour $q = 2$ et $i \geq -2$. Par Riemann-Roch, on a $\dim H^1(E(-1)) = \dim H^1(E(-2)) = n$ et $\dim H^1(E) = n - 2$.

W. Barth a introduit dans [1] en 1977 la notion de *droite de saut* : il s'agit d'une droite $\ell \subset \mathbb{P}_2$ telle que la restriction $E|_\ell$ de E à ℓ soit différente du fibré trivial de rang 2 sur ℓ . Cohomologiquement cela signifie que $H^1(E(-1)|_\ell) \neq 0$. L'ensemble des droites de saut est alors le support du conoyau du morphisme canonique de faisceau localement libres de rang n sur le plan projectif dual $\mathbb{P}_2^*$:

$$H^1(E(-2)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-1) \xrightarrow{\sigma} H^1(E(-1)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}$$

D'après le théorème de Grauert-Mulich, ce support est de dimension 1 et est appelé courbe des droites de saut. Soit $M_n = M_{\mathbb{P}_2}(2, 0, n)$. On obtient un morphisme

$$\gamma : M_n \longrightarrow |\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(n)|.$$

Dans son premier papier en 1981 sur ce morphisme [16], Joseph Le Potier montre que le groupe de Picard de M_n^{os} s'identifie à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ si $n = 2$ et à $\mathbb{Z}$ si $n \geq 3$, engendré par $\gamma^*(\mathcal{O}(1))$ si c_1 est impair et par une racine de $\gamma^*(\mathcal{O}(1))$ si c_1 est pair (comparé au résultat sur le groupe de Picard plus haut, le cas $n = 2$ correspond à $\Delta = \delta(\mu)$ et $n \geq 3$ à $\Delta > \delta(\mu)$; dans ce dernier cas, la deuxième composante de $\text{Pic}(M_n)$ provient du fibré en droites associé à $M_n - M_n^o$ qui est un diviseur).

Barth avait observé dans [2] que pour $n = 2$, γ est un isomorphisme, que pour $n = 3$, l'image est l'espace des cubiques et le degré de γ est égal à 3, puis montré que γ est génériquement fini pour $n \geq 4$. En particulier, dans ce cas son image est une sous-variété fermée de dimension $4n - 3$ de $P_n = \mathbb{P}^{n(n+3)/2} = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(n)|$.

Deux questions se posent alors pour $n \geq 4$:

- (a) Quel est le degré de $\gamma : M_n \longrightarrow \text{Im}(\Gamma)$?
- (b) Déterminer le degré de $\text{Im}(\Gamma) \subset P_n$.

Ceci est lié aux invariants de Donaldson sur $\mathbb{P}_2$: Soit H une section hyperplane de P_n et $\alpha = \gamma^*H$. Alors l'invariant de Donaldson s'interprète par

$$q_{4n-3} = \int_{M_n} \alpha^{4n-3}$$

Ainsi q_{4n-3} n'est autre que le degré de γ multiplié par le degré de son image. Le calcul du degré de γ s'est avéré être très difficile. Joseph Le Potier l'a finalement calculé en 2000 en collaboration avec Alexandre Tikhomirov dans [18].

Théorème 4. *Le morphisme γ est génériquement injectif pour $n \geq 4$.*

Corollaire 1. *Pour $n \geq 4$, l'image du morphisme de Barth est une sous-variété fermée de P_n de dimension $4n - 3$ et de degré q_{4n-3} .*

On connaît les premiers invariants [7] : $q_{13} = 54$, $q_{17} = 2540$ et $q_{21} = 233208$. Je voudrais expliquer ici comment Joseph Le Potier a calculé q_{13} dans [14] : c'était le premier exposé de séminaire que j'ai suivi. Dans ce cas, l'image de γ est une hypersurface $\mathfrak{L}$. Elle contient les quartiques dites de Lüroth, à savoir celles ayant un pentagone complet inscrit. Le nombre 54 pour $\deg(\mathfrak{L})$ avait d'ailleurs été suggéré à Joseph Le Potier par Laurent Gruson, qui faisait référence à un article de Frank Morley qui signalait déjà en 1918 que l'invariant de Lüroth est 54.

Soit θ le conoyau du morphisme $\sigma(-1)$ ci-dessus. C'est un faisceau de torsion sur $\mathbb{P}_2$ de dimension 1. Il en est de même pour $\theta^\vee := \underline{\text{Ext}}^1(\theta, \omega_{\mathbb{P}_2})$. Barth avait montré que θ était muni d'un isomorphisme symétrique $\theta \xrightarrow{\sim} \theta^\vee$. Si le support C de θ est une courbe lisse, θ s'identifie à un fibré en droites sur C et $\theta^\vee$ à $\theta^* \otimes \omega_C$ de sorte que θ n'est autre qu'une thêta-caractéristique sur C .

L'observation fondamentale de Joseph Le Potier en 1989 a été qu'on pouvait également définir une notion de semi-stabilité pour de tels faisceaux de torsion, puis construire les espaces de modules correspondants. Cette observation a été faite au même temps par Carlos Simpson et a donné lieu aux espaces de modules des faisceaux semi-stables de support de dimension d sur une variété de dimension n . D'ailleurs, dans le cas des faisceaux semi-stables de support de dimension 1 sur $\mathbb{P}_2$, Joseph Le Potier a montré les résultats d'irréductibilité, d'existence et de calcul de groupe de Picard analogues aux théorèmes fondamentaux ci-dessus pour $r \geq 1$ dans [15].

Dans le cas des thêta-caractéristiques généralisées, on obtient également un espace de modules noté $\Theta_{\mathbb{P}_2}(n)$. C'est une variété équidimensionnelle de dimension $n(n+3)/2$, lisse en toute thêta-caractéristique stable. Elle a deux composantes irréductibles, distinguées par la parité de $h^0(\mathbb{P}_2, \theta)$. Le morphisme $\rho : \Theta_{\mathbb{P}_2}(n) \rightarrow P_n$ définie en associant à θ son support schématique est fini de degré 2^{2g} (avec $g = n(n-3)/2 + 1$) au-dessus de l'ouvert des courbes lisses.

Pour $n = 4$, la composante paire $\Theta_{\mathbb{P}_2}^0(4)$ a une description simple : elle est isomorphe au quotient de Mumford $\mathbb{P}(L(V^*, S^2H)^{\text{ss}})/\text{SL}(H)$ où V^* est l'espace des sections de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$ et H un espace vectoriel de dimension 4. La correspondance est obtenue en associant à $s \in L(V^*, S^2H)$ un morphisme

$$H^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-2) \xrightarrow{\sigma} H \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-1)$$

dont on montre qu'il est génériquement injectif si s est stable sous l'action de $SL(H)$. La thêta-caractéristique associée est alors le co-noyau de σ .

Cette description permet de calculer le groupe de Picard. Sur l'ouvert des thêta-caractéristiques stables, il est engendré par la représentation $\det(H)$. Ce fibré ne s'étend pas à $\Theta_{\mathbb{P}_2}^0(4)$ entier mais uniquement son carré de sorte que $\text{Pic}(\Theta_{\mathbb{P}_2}^0(4))$ est engendré par le fibré inversible associé à $\det(H)^2$ et que $\Theta_{\mathbb{P}_2}^0(4)$ n'est pas localement factoriel : le groupe $\text{Pic}(\Theta_{\mathbb{P}_2}^0(4))$ est d'indice deux dans le groupe $\text{Cl}(\Theta_{\mathbb{P}_2}^0(4))$ des diviseurs de Weil. Le générateur du groupe de Picard n'est d'ailleurs autre que l'image réciproque du $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(1)$ par le morphisme ρ (qui est d'ailleurs d'indice 36 correspondant aux thêta-caractéristiques ineffectives sur une quartique lisse).

On peut alors calculer l'invariant de Lüroth. Pour cela on observe qu'on a une factorisation

$$\begin{array}{ccccc} M_4 & \xrightarrow{\varphi} & Z & \subset & \Theta_{\mathbb{P}_2}^0(4) \\ & \searrow \gamma & \downarrow \rho|_Z & & \downarrow \rho \\ & & \mathcal{L} & \subset & \mathbb{P}_n \end{array}$$

La formule $\langle Z, c_1(\mathcal{O}(1))^{13} \rangle = \deg(\rho|_Z) \deg(\mathcal{L})$ montre ensuite qu'il suffit de calculer $\langle Z, c_1(\mathcal{O}(1))^{13} \rangle$ étant donné que dans le diagramme ci-dessus toutes les flèches γ, φ et $\rho|_Z$ sont de degré 1. Pour cela, on observe

$$\langle 2Z, c_1(\mathcal{O}(1))^{13} \rangle = \langle 3Y, c_1(\mathcal{O}(1))^{13} \rangle = 3 \langle \Theta_{\mathbb{P}_2}^0(4), c_1(\mathcal{O}(1))^{14} \rangle = 3 * 36$$

Ici, Y désigne une section hyperplane de $\Theta_{\mathbb{P}_2}^0(4)$. La première égalité s'obtient on observant que dans $\text{Cl}(\Theta_{\mathbb{P}_2}^0(4))$ on a $2Z = 3Y$, égalité qui découle d'une description explicite du diviseur Z en tant que lieu de zéros d'un pfaffien.

Le degré de $\mathcal{L}$ s'obtient donc par $3 * 36/2 = 54$.

5. Références

- [1] Barth, W. *Some properties of stable rank-2 vector bundles on $\mathbb{P}_2$* . Math. Ann. 226 (1977), n° 2, 125–150.
- [2] Barth, W. *Moduli of vector bundles on the projective plane*. Invent. Math. 42 (1977), 63–91.
- [3] Drézet, J.-M.; Le Potier, J. *Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur $\mathbb{P}_2$* . Ann. Sci. école Norm. Sup. (4) 18 (1985), n° 2, 193–243.
- [4] Drézet, J.-M.; Narasimhan, M. S. *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques*. Invent. Math. 97 (1989), n° 1, 53–94.
- [5] Drézet, J.-M. *Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$* . Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 38 (1988), n° 3, 105–168.
- [6] Ellingsrud, G. *Sur l'irréductibilité du module des fibrés stables sur $\mathbb{P}_2$* . Math. Z. 182 (1983), n° 2, 189–192.
- [7] Ellingsrud, G.; Le Potier, J.; Strømme, S. A. *Some Donaldson invariants of $\mathbb{P}_2$* . Moduli of vector bundles (Sanda, 1994; Kyoto, 1994), 33–38, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 179, Dekker, New York, 1996.
- [8] Göttsche, L.; Hirschowitz, A. *Weak Brill-Noether for vector bundles on the projective plane*. Algebraic geometry (Catania, 1993/Barcelona, 1994), 63–74, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 200, Dekker, New York, 1998.
- [9] Kaledin, D.; Lehn, M.; Sorger, Ch. *Singular symplectic moduli spaces*. Invent. Math. 164 (2006), n° 3, 591–614.
- [10] Le Potier, J. *Fibrés stables de rang 2 sur $\mathbb{P}_2$* . Math. Ann. 241 (1979), n° 3, 217–256.
- [11] Le Potier, J. *Stabilité et amplitude sur $\mathbb{P}_2$* . Vector bundles and differential equations (Proc. Conf., Nice, 1979), pp. 145–182, Progr. Math., 7, Birkhäuser, Boston, Mass., 1980.

- [12] Le Potier, J. *Sur le groupe de Picard de l'espace de modules des fibrés stables sur $\mathbb{P}_2$* . Ann. Sci. école Norm. Sup. (4) 14 (1981), n° 2, 141–155.
- [13] Le Potier, J. *Fibré déterminant et courbes de saut sur les surfaces algébriques*. Complex projective geometry (Trieste, 1989/Bergen, 1989), 213–240, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 179, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [14] Le Potier, J. *Fibrés stables sur le plan projectif et quartiques de Lüroth*. Exposé donné à Jussieu le 30 novembre 1989.
- [15] Le Potier, J. *Faisceaux semi-stables de dimension 1 sur le plan projectif*. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 38 (1993), n° 7-8, 635–678.
- [16] Le Potier, J. *Problème de Brill-Noether et groupe de Picard de l'espace de modules des faisceaux semi-stables sur le plan projectif*. Algebraic geometry (Catania, 1993/Barcelona, 1994), 75–90, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 200, Dekker, New York, 1998.
- [17] Le Potier, J. *Systèmes cohérents et structures de niveau*. Astérisque N° 214 (1993), 143 pp.
- [18] Le Potier, J. ; Tikhomirov, A. *Sur le morphisme de Barth*. Ann. Sci. école Norm. Sup. (4) 34 (2001), n° 4, 573–629.
- [19] Simpson, C. T. *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. I*. Inst. Hautes études Sci. Publ. Math. N° 79 (1994), 47–129.

Dualité étrange de Le Potier et cohomologie du schéma de Hilbert ponctuel d'une surface

Luca Scala¹

7 Décembre 2006

Journée à la mémoire de Joseph Le Potier

1. Introduction

Le but de cet exposé est d'expliquer la conjecture de la dualité étrange de Le Potier sur les surfaces algébriques projectives lisses et en particulier le cas du plan projectif, abordé par G. Danila dans sa thèse [3]. Dans ce cas le problème se ramène à un calcul de cohomologie d'un schéma de Hilbert ponctuel sur le plan projectif. La maîtrise de ces groupes de cohomologie s'avère très utile aussi dans d'autres exemples de dualité étrange. On présente ensuite une méthode puissante, liée aux récents développements de la correspondance de McKay, pour effectuer des calculs de cohomologie du schéma de Hilbert et on indique les progrès obtenus dans cette direction.

J'ai obtenu la plupart des résultats sur le schéma de Hilbert présentés ici avec Joseph Le Potier pendant ma thèse. Les meilleures idées expliquées ici lui appartiennent : il les partageait avec moi, comme, je crois, avec tous ses étudiants, avec une générosité, une honnêteté et un sérieux incomparables. Il arrivait toujours à faire comprendre avec la plus grande simplicité la vérité qu'il avait apprise et découverte ; apprendre avec lui était, simplement et sans effort, se nourrir de son savoir, qui, comme nous tous qui l'avons connu le savons bien, allait bien au delà des mathématiques.

¹ Max-Planck-Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn Allemagne

Je remercie vivement Gentiana Danila, Laurent Koelblen, Christoph Sorger et Claire Voisin, pour leur aide précieuse pendant la rédaction de cet exposé.

2. La dualité étrange de Le Potier

La dualité étrange de Le Potier est une relation conjecturale de dualité entre les espaces des sections de deux fibrés déterminants sur deux espaces de modules différents. On introduira d'abord les notations et les notions nécessaires pour énoncer la conjecture; on développera ensuite un exemple important de dualité étrange sur le plan projectif.

2.1. La conjecture de la dualité étrange

Soit X une surface projective lisse polarisée. On désigne par $K(X)$ le groupe de Grothendieck des faisceaux cohérents sur X . Soit q la forme quadratique entière sur $K(X)$ définie par $q(u) := \chi(u^2)$; on désigne par $\langle -, - \rangle$ la forme bilinéaire entière associée. Le groupe de Grothendieck numérique $K_{\text{num}}(X)$ est le quotient $K_{\text{num}}(X) := K(X) / \ker q$ de $K(X)$ par le noyau de q ; il est isomorphe à :

$$K_{\text{num}}(X) \simeq \mathbb{Z} \times NS(X) \times \mathbb{Z},$$

(où $NS(X)$ est le groupe de Néron-Severi de la surface X) via l'application qui associe à une classe u son rang, sa première classe de Chern, et sa caractéristique d'Euler-Poincaré. Si c est une classe de Grothendieck numérique, on note M_c l'espace de modules des faisceaux semi-stables sur X de classe de Grothendieck c .

2.1.1. Fibrés déterminants sur les espaces de modules

Soit S une variété algébrique, pas nécessairement lisse. On désigne par p et q les projections de $S \times X$ sur S et X , respectivement. Une *famille plate* de faisceaux cohérents sur X paramétrée par S est un faisceau cohérent $F \in \text{Coh}(S \times X)$ sur le produit $S \times X$, plat sur S . On désigne par $K^0(S)$ et $K^0(S \times X)$ les groupes de Grothendieck des fibrés vectoriels sur S et $S \times X$, respectivement.

Soit maintenant F une famille plate, paramétrée par S , de faisceaux cohérents F_s sur X . D'après [18] ou [13], Prop. 2.1.10, F peut être résolu par un complexe fini de faisceaux localement libres, de longueur au plus égale à la dimension de X ; donc $F \in K^0(S \times X)$, même si S est singulière. Cette remarque entraîne que la transformée de Fourier-Mukai K -théorique suivante prend ses valeurs dans $K^0(S)$:

$$\Phi_F^K := K(X) \xrightarrow{q^*} K^0(S \times X) \xrightarrow{\cdot F} K^0(S \times X) \xrightarrow{p_!} K^0(S)$$

et permet de donner un sens au déterminant :

$$\lambda_F(u) := \det \Phi_F^K(u) := \det p_!(q^* u \cdot F).$$

Si, pour tout $s \in S$, F_s est semi-stable de classe de Grothendieck $c(F_s) = c$, on désigne encore par f_F le morphisme modulaire $f_F : S \longrightarrow M_c$ induit par la famille F . Le théorème suivant ([16], [17], [18]) donne l'existence des fibrés déterminants sur les espaces de modules.

Théorème 2.1. Soit $u \in K_{\text{num}}(X)$ une classe de Grothendieck numérique telle que $\langle u, c \rangle = 0$, ou, en d'autres termes, orthogonale à c pour la forme $\langle -, - \rangle$. Si la polarisation choisie sur X est c -générique², alors il existe un unique fibré en droites $\mathcal{D}_{c,u} \in \text{Pic}(M_c)$ tel que pour toute famille plate F de faisceaux semi-stables de classe de Grothendieck c on ait :

$$f_F^*(\mathcal{D}_{c,u}) = \lambda_F(-u).$$

Le fibré en droites $\mathcal{D}_{c,u}$ s'appelle fibré déterminant sur l'espace de modules M_c associé à la classe de Grothendieck u .

Remarque 2.2. Si l'espace de modules M_c admet une famille universelle $\mathcal{E} \in \text{Coh}(M_c \times X)$, et si la classe u peut être représentée par un complexe G dans la catégorie dérivée $\mathbf{D}^b(X)$, le déterminant $\mathcal{D}_{c,u}$ est défini par :

$$\mathcal{D}_{c,u} = \lambda_{\mathcal{E}}(-u) = \det \mathbf{R}p_*(\mathcal{E} \otimes^L q^* G)^*.$$

Si, au contraire, l'espace de modules M_c n'est pas fini, il faut considérer le schéma des quotients $\text{Quot}(W, c)$ (pour un certain fibré vectoriel polystable W) dont les points sont les faisceaux cohérents quotients de W de classe de Grothendieck c . Sur $\text{Quot}(W, c)$ on dispose de l'action naturelle du groupe réductif $\text{Aut}(W)$; de plus le schéma $\text{Quot}(W, c)$ est muni d'une famille universelle $\tilde{\mathcal{E}}$, qui est $\text{Aut}(W)$ -équivariante. L'espace des modules M_c est alors un bon quotient de l'ouvert $\text{Quot}^{ss}(W, c)$ des points semi-stables. Afin de construire le fibré déterminant $\mathcal{D}_{c,u}$ sur M_c , on commence par définir un fibré en droites $\text{Aut}(W)$ -équivariant $\tilde{\mathcal{D}}_{c,u}$ sur le schéma des quotients via la famille universelle $\tilde{\mathcal{E}}$, au moyen de la transformation expliquée ci-dessus : $\tilde{\mathcal{D}}_{c,u} := \lambda_{\tilde{\mathcal{E}}}(-u)$. Ensuite, afin de pouvoir descendre sur M_c , il faut garantir, d'après le lemme de Drézet-Kempf-Narasimhan [8], que le stabilisateur d'un point opère trivialement sur le fibré $\tilde{\mathcal{D}}_{c,u}$: pour u orthogonale à c et pour une polarisation c -générique, ceci est vrai et on peut construire le déterminant $\mathcal{D}_{c,u}$ sur M_c .

2.1.2. Le morphisme étrange

On définit ici le morphisme étrange et on énonce la conjecture.

Théorème 2.3 (Le Potier). Soient u et v deux classes de Grothendieck numériques sur X , orthogonales pour la forme quadratique $\langle -, - \rangle$. Supposons que pour tout faisceau semi-stable F de classe de Grothendieck u et pour tout faisceau semi-stable G de classe de Grothendieck v sur X on ait :

- 1) $\text{Tor}_i^{\mathcal{O}_X}(F, G) = 0$ pour tout $i > 0$;
- 2) $H^2(X, F \otimes G) = 0$.

² Une polarisation sur X est dite c -générique si tout sous-faisceau F' déstabilisant d'un faisceau strictement semi-stable F , satisfait à la condition : $c(F')/r(F') = c(F)/r(F)$, où $r(F')$ et $r(F)$ sont les multiplicités de F' et F , respectivement. Une telle polarisation existe toujours si le rang de c est positif (cf. [21]), ou si c est de dimension 1 et $\chi(c) \neq 0$. Encore, sur le plan projectif toutes les polarisations sont c -génériques.

Supposons de plus que la polarisation sur X soit à la fois u et v -générique. Considérons les espaces de modules de faisceaux semi-stables M_u et M_v et les fibrés déterminants $\mathcal{D}_{u,v}$ et $\mathcal{D}_{v,u}$ sur M_u et M_v , respectivement. Alors il existe une section canonique (à un coefficient multiplicatif près)

$$\sigma_{u,v} \in H^0(M_u \times M_v, \mathcal{D}_{u,v} \boxtimes \mathcal{D}_{v,u}) \simeq H^0(M_u, \mathcal{D}_{u,v}) \otimes H^0(M_v, \mathcal{D}_{v,u}).$$

Une telle section induit un morphisme canonique $D_{u,v}$, dit morphisme étrange :

$$D_{u,v} : H^0(M_v, \mathcal{D}_{v,u})^* \longrightarrow H^0(M_u, \mathcal{D}_{u,v}).$$

Remarque 2.4. On remarque que le schéma des zéros de la section canonique $\sigma_{u,v}$ est porté par le fermé :

$$Z(\sigma_{u,v}) = \{([E], [F]) \in M_u \times M_v \mid H^0(X, E \otimes F) = H^1(X, E \otimes F) \neq 0\}.$$

On esquisse brièvement la construction de la section canonique $\sigma_{u,v}$ [18]. Par simplicité, on supposera que les espaces de modules M_u et M_v admettent des familles universelles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. D'une façon analogue à la remarque 2.2 on peut montrer, grâce à la première hypothèse, que le produit tensoriel extérieur $\mathcal{D}_{u,v} \boxtimes \mathcal{D}_{v,u}$ est quasi-isomorphe à

$$\mathcal{D}_{u,v} \boxtimes \mathcal{D}_{v,u} \simeq \det \mathbf{R}p_{M_u \times M_v*} (p_{M_u}^* \mathcal{F} \otimes p_{M_v}^* \mathcal{G})^*.$$

La deuxième hypothèse entraîne maintenant que le complexe $\mathbf{R}p_{M_u \times M_v*} (p_{M_u}^* \mathcal{F} \otimes p_{M_v}^* \mathcal{G})$ est quasi-isomorphe à un complexe à deux termes, localement libres :

$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_0 \xrightarrow{f} \mathcal{V}_1 \longrightarrow 0. \text{ Le déterminant de } f \text{ fournit la section voulue :}$$

$$\sigma_{u,v} := \det f \in \Gamma(\det \mathcal{V}_0^* \otimes \det \mathcal{V}_1) \simeq H^0(M_u \times M_v, \mathcal{D}_{u,v} \boxtimes \mathcal{D}_{v,u}).$$

Sous les hypothèses du théorème précédent, on peut énoncer la conjecture de la dualité étrange de Le Potier.

Conjecture 2.5 (Dualité étrange). *Si les espaces de modules M_u et M_v sont non vides, le morphisme étrange $D_{u,v}$ est un isomorphisme.*

2.2. La dualité étrange sur le plan projectif

On développe maintenant un exemple important de dualité étrange sur le plan projectif. Sur $\mathbb{P}_2$ on prend $u = (2, 0, 2 - n)$ et $v = (0, 1, 0)$. Les faisceaux de classe u ont rang 2, première classe de Chern nulle et deuxième classe de Chern n ; l'espace de modules M_u fournit donc une compactification de l'espace de modules des instantons de Donaldson. Les faisceaux de classe v ont rang 0, première classe de Chern 1, et deuxième classe de Chern nulle : ils sont tous isomorphes à des faisceaux structuraux $\mathcal{O}_\ell$ des droites de $\mathbb{P}_2$: l'espace de modules M_v s'identifie donc au plan projectif dual et le déterminant $\mathcal{D}_{v,u}$ à $\mathcal{O}(n)$. Le morphisme étrange devient :

$$(1) \quad D_{u,v} : H^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(n))^* \longrightarrow H^0(M_u, \mathcal{D}_{u,v}).$$

Une des raisons de l'intérêt du morphisme étrange dans ce cas particulier est son lien étroit avec le morphisme de Barth ([1]) :

$$\gamma : M_u \longrightarrow |\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(n)| = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(n)))$$

qui associe à la classe d'un faisceau cohérent F la courbe $\gamma(F)$ de degré $n = c_2(u)$ de ses droites de saut, c'est-à-dire des droites l tels que $F|_l$ ne soit pas trivial (voir [16], [4]). Si on considère le fibré $\mathcal{O}(1)$ sur l'espace projectif $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(n)|$ on a $\gamma^*\mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{D}_{u,v}$; le morphisme de Barth induit alors un morphisme $H^0(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(n))^* \longrightarrow H^0(M_u, \mathcal{D}_{u,v})$ entre les sections de $\mathcal{D}_{u,v}$ et $\mathcal{O}(1)$ qui est exactement le morphisme étrange $D_{u,v}$. On montre facilement que le morphisme étrange (1) est injectif, car c'est un morphisme non nul de $SL(3)$ -représentations. Il ne reste donc qu'à calculer la dimension de l'espace des sections $H^0(M_u, \mathcal{D}_{u,v})$. Ce cas particulier de dualité étrange a été considéré par G. Danila dans [3], [4] et [6]; elle montre le résultat suivant :

Théorème 2.6 (G. Danila). *Le morphisme étrange $D_{u,v}$ est un isomorphisme si $n \leq 19$.*

La stratégie suivie consiste à introduire des espaces de modules de systèmes cohérents qui relient l'espace de modules des instantons M_u et un schéma de Hilbert ponctuel sur $\mathbb{P}_2$. Cette technique avait été utilisée par Le Potier et Min-He [20], [12] afin de calculer des nombres de Donaldson de $\mathbb{P}_2$. Les systèmes cohérents avaient été originairement introduits par Le Potier afin d'étudier le morphisme de Barth [19].

2.2.1. Systèmes cohérents.

Définition 2.7. *Un système cohérent Λ sur une variété algébrique X est un couple $\Lambda = (\Gamma, F)$, où F est un faisceau cohérent sur X et $\Gamma \subseteq H^0(F)$ un sous-espace de l'espace des sections globales de F . Le rang de F est appelé le rang du système cohérent, la dimension de Γ son ordre. La classe de Grothendieck du système cohérent Λ est la classe du faisceau cohérent sous-jacent F .*

Soit maintenant $\alpha \in \mathbb{Q}[x]$ un polynôme rationnel strictement positif. Le α -polynôme de Hilbert d'un système cohérent $\Lambda = (\Gamma, F)$, relatif à une polarisation de X , est :

$$P_\Lambda = \alpha \dim \Gamma + P_F$$

où P_F est le polynôme de Hilbert de F . Grâce à cette définition, on peut donner un sens à la notion de α -(semi-)stabilité pour les systèmes cohérents. Il s'avère qu'il existe un espace de modules grossier de systèmes cohérents α -semi-stables et que c'est une variété projective; on désigne par $S_\alpha(c, k)$ l'espace de modules des systèmes cohérents α -semi-stables d'ordre k et de classe de Grothendieck c . On s'intéresse ici aux systèmes cohérents sur le plan projectif $\mathbb{P}_2$ d'ordre 1. Si l'espace de module $S_\alpha(c, 1)$ est non-vide, l'existence d'un système cohérent (Γ, F) α -semi-stable entraîne, d'après la condition de semi-stabilité, que $0 < \alpha \leq P_F - 2P_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}}$, qui sera appelé $\alpha_{\max}$. On désigne maintenant par $c(l)$ le produit dans $K(\mathbb{P}_2)$ de la classe c avec la classe de $\mathcal{O}(l)$. Pour $n \geq l(l-1)$ les espaces de modules $S_\alpha(u(l), 1)$ sont des variétés irréductibles et normales. La structure de S_α ne change qu'au passage de certaines *valeurs critiques*, un nombre fini de valeurs de α pour lesquelles il existe des systèmes cohérents strictement semi-stables. En dehors de ces valeurs critiques les espaces de modules sont lisses.

La stratégie suivie est la suivante. Dans le cas $n \geq l(l-1)$, pour un polynôme positif $\varepsilon \in \mathbb{Q}[x]$, suffisamment petit, on a des morphismes :

$$M_u \xleftarrow{f} S_\varepsilon(u(l), 1) \xrightarrow{g} \mathbb{P}_2^{[n+l^2]} = S_{\alpha_{\max}}(u(l), 1)$$

où $f(\Gamma, F) = F(-l)$ et l'application rationnelle g est définie comme la classe de S -équivalence de $Q(-2l)$, où Q est le conoyau du morphisme d'évaluation $\Gamma \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2} \longrightarrow F$. En effet, pour Λ générique, un tel Q est sans torsion et doit être de la forme $\mathcal{I}_Z(2l)$, où Z est un sous-schéma de $\mathbb{P}_2$ de longueur $n + l^2$. L'application rationnelle g se factorise en une suite d'éclatements et contractions (flips) correspondant aux valeurs critiques $\tilde{\alpha}$:

$$S_\varepsilon \longrightarrow \cdots \longleftarrow S_{\tilde{\alpha}_+} \longrightarrow S_{\tilde{\alpha}} \longleftarrow S_{\tilde{\alpha}_+} \longrightarrow \cdots \longleftarrow S_{\alpha_{\max}^-},$$

où on a désigné par $\tilde{\alpha}_\mp$ les valeurs immédiatement à gauche et à droite de la valeur critique $\tilde{\alpha}$, suivie de la projection π :

$$\mathbb{P}(\mathcal{R}) = S_{\alpha_{\max}^-} \xrightarrow{\pi} S_{\alpha_{\max}} = \mathbb{P}_2^{[n+l^2]}.$$

Ici $\mathcal{R}$ est un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}_2^{[n+l^2]}$, localement libre sur un ouvert U dont le complémentaire est de codimension ≥ 2 . Pour $n \leq (l+1)(l+2)$ l'application f est surjective et de plus on a $f_*\mathcal{O}_{S_\varepsilon} = \mathcal{O}_{M_u}$. Par conséquent, on peut transporter le fibré déterminant de M_u sur le schéma de Hilbert $\mathbb{P}_2^{[n+l^2]}$ en utilisant les flips ; on obtient un isomorphisme :

$$H^0(M_u, \mathcal{D}_{u,v}) \simeq H^0(U, S^l \mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}_v)$$

où $\mathfrak{d}_v$ est le déterminant sur le schéma de Hilbert associé à la classe v . Soit L le fibré en droites $\mathcal{O}(2l-3)$. Danila montre que le faisceau $S^l \mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}_v$ admet sur U une résolution $K^\bullet$ où les termes K^i sont des sommes directes de puissances symétriques $S^{l-i} L^{[n+l^2]} \otimes \mathfrak{d}_v$ du fibré tautologique associé à L sur le schéma de Hilbert, tordues par le déterminant. La suite spectrale d'hypercohomologie permet donc de ramener le calcul de l'espace des sections $H^0(M_u, \mathcal{D}_{u,v})$ au calcul des groupes de cohomologie $H^q(\mathbb{P}_2^{[n+l^2]}, S^p L^{[n+l^2]} \otimes \mathfrak{d}_v)$. Danila montre dans [4] et [5] l'annulation de ces groupes pour $q > 0, p = 1$ et $q = 1, p = 2$ et elle calcule explicitement l'espace des sections de $S^p L^{[n+l^2]} \otimes \mathfrak{d}_v$ pour $p = 2, 3$. Par conséquent la suite spectrale d'hypercohomologie dégénère au niveau E_2 et permet aisément le calcul des sections du fibré déterminant sur l'espace de module M_u . Les difficultés techniques rencontrées pour montrer les annulations précédentes limitent la vérification de la dualité étrange à $n \leq 19$.

Remarque 2.8. *On voit bien comment dans ce cas la dualité étrange est une conséquence d'un résultat d'annulation de la cohomologie du schéma de Hilbert. Plus généralement on peut poser la question de l'annulation des groupes de cohomologie :*

$$(2) \quad H^q(X^{[n]}, S^k L^{[n]} \otimes \mathfrak{d}_A) = 0, \quad \forall q > 0$$

pour une surface projective lisse X , et A et L deux fibrés en droites sur X avec certaines hypothèses de positivité. Ici $\mathfrak{d}_A$ désigne le fibré déterminant sur le schéma de Hilbert associé au fibré en droites A . Ce fibré déterminant $\mathfrak{d}_A$ n'apporte pas de

complications au problème d'annulation : la difficulté principale du problème est liée à la compréhension de la cohomologie $H^*(X^{[n]}, S^k L^{[n]})$ de la puissance symétrique d'un fibré tautologique sur le schéma de Hilbert.

Remarque 2.9. Il s'avère aussi que la connaissance de la cohomologie du schéma de Hilbert à valeurs dans la puissance extérieure d'un fibré tautologique est utile pour d'autres exemples de dualité étrange. Prenons par exemple ([18]) une surface projective lisse et un fibré en droites L tel que $L \otimes \omega_X^{-1}$ soit ample; alors $\chi(L) = h^0(L)$. Prenons maintenant deux classes de Grothendieck c de rang 1, de première classe de Chern 0 et deuxième classe de Chern n , et v de rang 1 de première classe de Chern $c_1(L)$ et deuxième classe de Chern m , avec n et m tels que $n + m = \chi(L) = h^0(L)$. Alors $M_c \simeq X^{[n]}$, $M_v = X^{[m]}$, $\mathcal{D}_{c,v} \simeq \det L^{[n]}$, $\mathcal{D}_{v,c} \simeq \det L^{[m]}$. Le Potier montre dans [18] que $H^0(X^{[l]}, \det L^{[l]}) \simeq \Lambda^l H^0(X, L)$ pour tout l ; il en suit que la dualité étrange s'interprète via la dualité canonique :

$$\Lambda^n H^0(X, L) \otimes \Lambda^m H^0(X, L) \longrightarrow \Lambda^{n+m} H^0(X, L) \simeq \mathbb{C}.$$

Gardons les notations de l'exemple précédent. Considérons maintenant des classes de Grothendieck $u = 2c$ et v ([18]). Dans ce cas, $\mathcal{D}_{v,2c} \simeq (\det L^{[m]})^{\otimes 2}$. La connaissance de la cohomologie $H^i(X^{[n]}, \Lambda^k L^{[n]})$ des puissances extérieures $\Lambda^k L^{[n]}$ est utile pour le problème de dualité étrange; elle est utilisée pour comprendre l'espace des sections $H^0(M_v, \mathcal{D}_{v,2c}) \simeq H^0(X^{[m]}, (\det L^{[m]})^{\otimes 2})$. Une conséquence du théorème 4.3 est l'annulation des groupes $H^i(X^{[n]}, \Lambda^k L^{[n]})$, $i > 0$ sous ces hypothèses.

Remarque 2.10. La technique de Le Potier et He, utilisée par Danila sur $\mathbb{P}_2$ afin de ramener le calcul des sections du déterminant sur l'espace de modules à un calcul de cohomologie sur le schéma de Hilbert, pourrait être utilisée pour d'autres surfaces. Sur les surfaces K3, par exemple, l'espace de modules des faisceaux semi-stables est même dans certains cas birationnel à un schéma de Hilbert, et l'indétermination peut être encore résolue à l'aide d'un espace des modules de systèmes cohérents (voir [9]).

Remarque 2.11. Les remarques 2.8, 2.9 et 2.10 rendent intéressante l'étude en toute généralité de la cohomologie du schéma de Hilbert $H^*(X^{[n]}, L^{[n]} \otimes \cdots \otimes L^{[n]})$ d'une surface projective lisse à valeurs dans la puissance tensorielle k -ième d'un fibré tautologique, en la regardant comme représentation du groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$, qui opère sur le produit tensoriel $L^{[n]} \otimes \cdots \otimes L^{[n]}$ en permutant les facteurs.

3. Le travail de Haiman sur le schéma de Hilbert isospectral

Une méthode puissante pour aborder les calculs de cohomologie sur le schéma de Hilbert de la section précédente est fournie par les développements récents de la correspondance de McKay par Bridgeland, King et Reid [2] et ses applications au schéma de Hilbert ponctuel d'une surface dues à Haiman [10], [11].

Définition 3.1. Soit X une surface quasi-projective lisse. Le schéma de Hilbert isospectral B^n pour la surface X est l'éclatement de X^n le long de la réunion schématique de ses diagonales :

$$B^n := \text{Bl}_{\cup_{i < j} \Delta_{ij}} X^n.$$

Haiman montre que le schéma de Hilbert isospectral est naturellement un sous-schéma de $X^{[n]} \times X$; de plus, il coïncide avec le produit fibré réduit $(X^{[n]} \times_{S^n X} X^n)_{\text{red}}$ de $X^{[n]}$ et X^n sur la variété symétrique $S^n X$. On a donc le diagramme commutatif (mais pas cartésien) suivant :

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} B^n & \xrightarrow{p} & X^n \\ q \downarrow & & \downarrow \pi \\ X^{[n]} & \xrightarrow{\mu} & S^n X \end{array}$$

où μ est le morphisme de Hilbert-Chow et π est le passage au quotient. On remarque qu'on est précisément dans le cadre de la correspondance de McKay : $S^n X$ est le quotient $X^n / \mathfrak{S}_n$ de la variété produit X^n par l'action du groupe fini $\mathfrak{S}_n$ et $X^{[n]}$ est une résolution crépante des singularités de $S^n X$. Un des résultats fondamentaux de Haiman est le fait que B^n est de Cohen-Macaulay (et en fait Gorenstein), ou, d'une façon équivalente, la platitude du morphisme q . Par conséquent, B^n constitue une famille plate de $\mathfrak{S}_n$ -clusters (ou $\mathfrak{S}_n$ -grappes) de X^n , ou, en d'autres termes, des sous-schémas Z de X^n , $\mathfrak{S}_n$ -invariants, tels que $H^0(X^n, \mathcal{O}_Z) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$. Ces sous-schémas sont paramétrés par le schéma de Hilbert $\mathfrak{S}_n \text{Hilb}(X^n)$ des $\mathfrak{S}_n$ -orbites, dont la composante irréductible³ qui contient les orbites libres est désignée par $\text{Hilb}^{\mathfrak{S}_n}(X^n)$ et est appelée $\mathfrak{S}_n$ -schéma de Hilbert au sens de Nakamura (voir [15], [14]). Le schéma $\text{Hilb}^{\mathfrak{S}_n}(X^n)$ est un espace de modules fin pour les $\mathfrak{S}_n$ -clusters; on désignera par $\mathcal{Z}$ sa famille universelle. Par conséquent, la platitude du morphisme q induit, par la propriété universelle de $\text{Hilb}^{\mathfrak{S}_n}(X^n)$, un morphisme : $X^{[n]} \longrightarrow \text{Hilb}^{\mathfrak{S}_n}(X^n)$ qui permet de comparer les deux schémas.

En toute généralité, pour un groupe fini G d'automorphismes d'une variété quasi-projective lisse M , Bridgeland, King et Reid ont montré [2], sous certaines hypothèses techniques⁴, que $\text{Hilb}^G(M)$ est lisse et fournit une résolution crépante de M/G ; sous les mêmes hypothèses la correspondance de McKay s'exprime comme équivalence de catégories dérivées :

$$(4) \quad \Phi_{\text{Hilb}^G(M) \rightarrow M}^{\mathcal{Z}} : \mathbf{D}^b(\text{Hilb}^G(M)) \longrightarrow \mathbf{D}_G^b(M)$$

entre la catégorie dérivée bornée des faisceaux cohérents sur $\text{Hilb}^G(M)$ et la catégorie dérivée bornée des faisceaux cohérents G -équivalents sur M , donnée par la transformée de Fourier-Mukai de noyau la famille universelle $\mathcal{Z}$ sur $\text{Hilb}^G(M)$. Haiman montre que le résultat de Bridgeland, King et Reid peut être appliqué au diagramme (3).

Théorème 3.2 (Haiman). *Soit X une surface quasi-projective lisse. Le schéma de Hilbert ponctuel $X^{[n]}$ s'identifie au $\mathfrak{S}_n$ -schéma de Hilbert $\text{Hilb}^{\mathfrak{S}_n}(X^n)$ au sens de*

³ On prend la composante irréductible $\text{Hilb}^{\mathfrak{S}_n}(X^n)$ car le schéma $\mathfrak{S}_n \text{Hilb}(X^n)$ n'est pas en général irréductible.

⁴ Plus précisément, si M/G est Gorenstein et $\dim \text{Hilb}^G(M) \times_{M/G} \text{Hilb}^G(M) \leq \dim M + 1$.

Nakamura. Sous cette identification B^n correspond à la famille universelle $\mathcal{Z}$ sur $\text{Hilb}^{\mathfrak{S}_n}(X^n)$. La transformée de Fourier-Mukai de noyau B^n :

$$\Phi := \Phi_{X^{[n]} \rightarrow X^n}^{B^n} : \mathbf{D}^b(X^{[n]}) \longrightarrow \mathbf{D}_{\mathfrak{S}_n}^b(X^n)$$

est une équivalence.

Le théorème précédent donne une méthode pour calculer la cohomologie de n'importe quel faisceau cohérent sur le schéma de Hilbert $X^{[n]}$ comme hypercohomologie $\mathfrak{S}_n$ -équivariante de X^n à valeurs dans l'image $\Phi(F)$:

$$(5) \quad H^*(X^{[n]}, F) \simeq \mathbb{H}_{\mathfrak{S}_n}^*(X^n, \Phi(F)) = \mathbb{H}^*(S^n X, \Phi(F)^{\mathfrak{S}_n})$$

ou l'hypercohomologie de $S^n X$ à valeurs dans les invariants de $\Phi(F)$.

4. Cohomologie du schéma de Hilbert à valeurs dans les puissances tensorielles d'un fibré tautologique

D'après le corollaire (5) des résultats de Haiman, afin de calculer la cohomologie du schéma de Hilbert à valeurs dans la puissance tensorielle d'un fibré tautologique $L^{[n]}$, il est suffisant de calculer l'hypercohomologie $\mathfrak{S}_n$ -équivariante $\mathbb{H}_{\mathfrak{S}_n}^*(X^n, \Phi(L^{[n]} \otimes \dots \otimes L^{[n]}))$ à valeurs dans l'image $\Phi(L^{[n]} \otimes \dots \otimes L^{[n]})$ du produit tensoriel $(L^{[n]})^{\otimes k}$ par la transformée de Bridgeland-King-Reid. On va montrer ici comment décrire cette image. Pour simplifier on expliquera l'idée dans le cas $k = 1$.

Si $\Xi \subseteq X^{[n]} \times X$ indique la famille universelle sur le schéma de Hilbert, on désigne par $Z \subseteq B^n \times X$ son image réciproque par $q \times \text{id}$, ou, en d'autres termes, le produit fibré $Z := B^n \times_{X^{[n]}} \Xi$. Le schéma Z est la famille universelle pour le schéma de Hilbert isospectral. On rappelle que le fibré tautologique $L^{[n]}$ est construit comme l'image de L par le foncteur de Fourier-Mukai

$$L^{[n]} := p_{X^{[n]}}^*(\mathcal{O}_{\Xi} \otimes_{\mathcal{O}_X} L) = \Phi_{X \rightarrow X^{[n]}}^{\Xi}(L)$$

de X à $X^{[n]}$, de noyau Ξ . Son image $\Phi(L^{[n]})$ par la transformée de Bridgeland-King-Reid est alors donnée par la composition de foncteurs de Fourier-Mukai :

$$\Phi(L^{[n]}) = \Phi \circ \Phi_{X \rightarrow X^{[n]}}^{\Xi}(L) = \Phi_{X^{[n]} \rightarrow X^n}^{B^n} \circ \Phi_{X \rightarrow X^{[n]}}^{\Xi}(L)$$

appliqué à L . Il est bien connu que la composition de deux foncteurs Fourier-Mukai est un troisième foncteur de Fourier-Mukai. Le noyau de la composition est dans ce cas :

$$\mathbf{R}(p \times \text{id}_X)_*(\mathcal{O}_{B^n} \otimes_{\mathcal{O}_{X^{[n]}}} \mathcal{O}_{\Xi}) \simeq \mathbf{R}(p \times \text{id}_X)_*(\mathcal{O}_Z).$$

Considérons maintenant le sous-schéma D de $X^n \times X$, défini comme réunion schématique $D := \cup_{i=1}^n \Delta_{i,n+1}$ des diagonales $\Delta_{i,n+1}$, qu'on désignera dans la suite par D_i . On a montré dans [23] que le noyau de la composition précédente peut être identifié avec le faisceau $\mathcal{O}_D$:

$$(6) \quad \mathbf{R}(p \times \text{id}_X)_*(\mathcal{O}_Z) \simeq \mathcal{O}_D.$$

Le schéma D est réunion des composantes $D_i = \Delta_{i,n+1}$ lisses et transverses, dans le sens que $\text{codim} \cap_{i=1}^n D_i = \sum_i \text{codim} D_i$. Ces deux propriétés entraînent qu'on

peut résoudre le faisceau $\mathcal{O}_D$ avec une résolution de Čech $\check{\mathcal{C}}^\bullet$ pour les fermés, en termes de faisceaux structuraux de ses composantes et de leurs intersections :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{D_i} \longrightarrow \bigoplus_{i < j} \mathcal{O}_{D_i \cap D_j} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{O}_{D_1 \cap \cdots \cap D_n} \longrightarrow 0.$$

En poussant sur X^n le complexe $\check{\mathcal{C}}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{X^k}} L^{\boxtimes k}$ on obtient l'image $\Phi(L^{[n]})$ en termes du complexe $\mathfrak{S}_n$ -équivariant $\mathcal{C}_L^\bullet$ suivant :

$$\Phi(L^{[n]}) \simeq \mathcal{C}_L^\bullet \simeq 0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n L_i \longrightarrow \bigoplus_{i < j} L_{ij} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_\Delta \longrightarrow 0$$

où, pour un multi-index I , L_I est le faisceau sur la diagonale $\Delta_I \simeq \Delta \times X^{n-|I|}$ construit par image réciproque du fibré en droites L par la projection :

$$\Delta_I \simeq \Delta \times X^{n-|I|} \longrightarrow \Delta \simeq X.$$

L'expression de l'image $\Phi(L^{[n]})$ en termes du complexe $\mathcal{C}_L^\bullet$ entraîne tout de suite la formule de Brion-Danila ([5]) :

$$(7) \quad \mathbf{R}\mu_* L^{[n]} \simeq (\mathcal{C}_L^\bullet)^{\mathfrak{S}_n} \simeq (\bigoplus_i L_i)^{\mathfrak{S}_n}$$

qui donne comme corollaire la cohomologie du fibré tautologique.

En général, pour $k > 1$ on arrive à comparer l'image $\Phi(L^{[n]} \otimes \cdots \otimes L^{[n]})$ et le produit tensoriel dérivé $\mathcal{C}_L^\bullet \otimes^L \cdots \otimes^L \mathcal{C}_L^\bullet$ via un morphisme naturel dans la catégorie dérivée $\mathbf{D}_{\mathfrak{S}_n}^b(X^n)$:

$$(8) \quad \mathcal{C}_L^\bullet \otimes^L \cdots \otimes^L \mathcal{C}_L^\bullet \xrightarrow{\alpha} \Phi(L^{[n]} \otimes \cdots \otimes L^{[n]}).$$

Le point essentiel est encore le calcul du noyau d'une composition de foncteurs de Fourier-Mukai, qui peut être exprimé, grâce à un théorème difficile d'annulation de Haiman [11], en termes du faisceau structural du polygraphe⁵ $D(n, k)$, généralisant D .

Théorème 4.1. *Le morphisme α est un quasi-isomorphisme en degré positif. Il en résulte l'annulation de la cohomologie supérieure de l'image voulue :*

$$H^i(\Phi(L^{[n]} \otimes \cdots \otimes L^{[n]})) = R^i p_* q^*(L^{[n]} \otimes \cdots \otimes L^{[n]}) = 0, \quad \forall i > 0,$$

ou, de manière équivalente, que $\Phi(L^{[n]} \otimes \cdots \otimes L^{[n]})$ est un faisceau. En degré 0 on a une surjection :

$$p_* q^*(L^{[n]}) \otimes \cdots \otimes p_* q^*(L^{[n]}) \longrightarrow p_* q^*(L^{[n]} \otimes \cdots \otimes L^{[n]})$$

dont le noyau est le sous-faisceau de torsion.

La comparaison explicite des deux termes dans (8) s'effectue au moyen de la suite spectrale hyperdérivée associée au produit tensoriel dérivé $\mathcal{C}_L^\bullet \otimes^L \cdots \otimes^L \mathcal{C}_L^\bullet$. Les difficultés techniques liées à la compréhension de cette suite spectrale rendent compliquée en pratique l'extraction de l'information sur l'image $\Phi(L^{[n]} \otimes \cdots \otimes L^{[n]})$ à partir de celle sur le produit tensoriel dérivé $\mathcal{C}_L^\bullet \otimes^L \cdots \otimes^L \mathcal{C}_L^\bullet$.

⁵ Le polygraphe $D(n, k)$ est défini comme le produit fibré réduit k -ième de D sur X^n .

4.1. Les invariants

D'après (5), afin de calculer la cohomologie $H^*(X^{[n]}, L^{[n]} \otimes \dots \otimes L^{[n]})$, on n'a besoin que de l'information donnée par les invariants $\Phi(L^{[n]} \otimes \dots \otimes L^{[n]})^{\mathfrak{S}_n}$ de l'image, ou, de manière équivalente, par l'image directe dérivée $\mathbf{R}\mu_*(L^{[n]} \otimes \dots \otimes L^{[n]})$ du produit tensoriel $L^{[n]} \otimes \dots \otimes L^{[n]}$ par le morphisme de Hilbert-Chow. On est donc ramené à regarder ce qui se passe au niveau des invariants sur $S^n X$. En appliquant l'image directe invariante $\pi_*^{\mathfrak{S}_n}$ on obtient un morphisme en catégorie dérivée $\mathbf{D}^b(S^n X)$:

$$(9) \quad (\mathcal{C}_L^\bullet \otimes^L \dots \otimes^L \mathcal{C}_L^\bullet)^{\mathfrak{S}_n} \xrightarrow{\alpha^{\mathfrak{S}_n}} \Phi(L^{[n]} \otimes \dots \otimes L^{[n]})^{\mathfrak{S}_n} = \mathbf{R}\mu_*(L^{[n]} \otimes \dots \otimes L^{[n]})$$

Ce morphisme est plus facile à comprendre que le morphisme α (plus riche en information). Pour $k = 2$ on comprend complètement le morphisme $\alpha^{\mathfrak{S}_n}$ et la suite spectrale (des invariants, cette fois-ci) qui permet la comparaison effective entre les deux termes de (9). Une fois qu'on tient compte de la torsion, il en résulte l'isomorphisme :

$$\mathbf{R}\mu_*(L^{[n]} \otimes L^{[n]}) \xrightarrow{\simeq} (\mathcal{C}_L^\bullet \otimes \mathcal{C}_L^\bullet)^{\mathfrak{S}_n}.$$

Ceci généralise au cas $k = 2$ la formule de Brion-Danila (7). De plus, le fait que le complexe $(\mathcal{C}_L^\bullet \otimes \mathcal{C}_L^\bullet)^{\mathfrak{S}_n}$ soit isomorphe au complexe tronqué à deux termes $\tau_{\leq 1}(\mathcal{C}_L^\bullet \otimes \mathcal{C}_L^\bullet)^{\mathfrak{S}_n}$, entraîne l'exactitude de la suite :

$$(10) \quad 0 \longrightarrow \mu_*(L^{[n]} \otimes L^{[n]}) \longrightarrow (\mathcal{C}_L^0 \otimes \mathcal{C}_L^0)^{\mathfrak{S}_n} \longrightarrow (\mathcal{C}_L^0 \otimes \mathcal{C}_L^1)^{\mathfrak{S}_n} \longrightarrow 0$$

d'où on calcule facilement la cohomologie. On obtient le résultat suivant [23], [24] :

Théorème 4.2. *Soit X une surface projective lisse, et soit L un fibré en droites sur X . Alors la cohomologie du schéma de Hilbert à valeurs dans la puissance tensorielle $L^{[n]} \otimes L^{[n]}$ est donnée par l'isomorphisme de modules gradués et de $\mathfrak{S}_2$ -représentations :*

$$H^*(X^{[n]}, L^{[n]} \otimes L^{[n]}) \simeq H^*(X, L)^{\otimes 2} \otimes S^{n-2} H^*(X, \mathcal{O}_X) \bigoplus H^*(X, L^{\otimes 2}) \otimes \mathcal{I}$$

où $\mathcal{I}$ est l'idéal des classes dans $S^{n-1} H^*(\mathcal{O}_X)$ qui s'annulent sur le schéma $\{x\} \times S^{n-2} X$, pour x un point fixé de X .

En prenant les invariants ou les anti-invariants par $\mathfrak{S}_2$, on obtient la cohomologie de la puissance symétrique $S^2 L^{[n]}$ et de la puissance extérieure $\Lambda^2 L^{[n]}$, pour tout n ; ceci généralise les résultats de Danila sur la puissance symétrique [7]. De plus, si A est un deuxième fibré en droite sur X , en tensorisant la suite (10) par $\mu_*(\mathfrak{d}_A) \simeq A^{\boxtimes n} / \mathfrak{S}_n$ on arrive à placer la cohomologie $H^q(X^{[n]}, L^{[n]} \otimes L^{[n]} \otimes \mathfrak{d}_A)$ dans une suite exacte longue d'où, dans le cas où $A \otimes \omega_X^{-1}$ et $L^{h_1} \otimes A^{h_2} \otimes \omega_X^{-1}$ sont amples, $1 \leq h_2 \leq h_1 \leq 2$, on peut facilement déduire l'annulation des groupes de cohomologie supérieure⁶ ; ceci résout le problème d'annulation (2) pour $k = 2$.

Pour $k \geq 3$ on ne peut pas espérer obtenir une formule de type Brion-Danila comme celles pour $k = 1, 2$. Déjà pour $k = 3$ la formule pour $\mathbf{R}\mu_*(L^{[n]})^{\otimes k}$ est forcément plus compliquée.

⁶ Au moins pour $q \geq 2$; pour $q = 1$ ceci suit des résultats de Danila [4].

4.2. Les puissances extérieures

Si, plutôt que de considérer toute la puissance tensorielle, on ne regarde que les puissances symétriques ou extérieures, la question se simplifie encore. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$ opère sur le produit tensoriel k -ième $L^{[n]} \otimes \dots \otimes L^{[n]}$ par permutation des facteurs; on peut alors définir naturellement une telle action sur le produit tensoriel dérivé $\mathcal{C}_L^\bullet \otimes^L \dots \otimes^L \mathcal{C}_L^\bullet$ d'une façon que le morphisme α devienne alors $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_n$ -équivariant. En regardant les puissances symétriques ou extérieures k -ièmes comme $\mathfrak{S}_k$ -invariants et $\mathfrak{S}_k$ -anti-invariants de la puissance tensorielle k -ième, respectivement, on obtient les morphismes :

$$(S^k \mathcal{C}_L^\bullet)^{\mathfrak{S}_n} \xrightarrow{\alpha^{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_n}} \mathbf{R}\mu_*(S^k L^{[n]}) \quad ; \quad (\Lambda^k \mathcal{C}_L^\bullet)^{\mathfrak{S}_n} \xrightarrow{(\alpha \otimes \varepsilon_k)^{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_n}} \mathbf{R}\mu_*(\Lambda^k L^{[n]}) ,$$

où ε_k désigne la représentation alternée du groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$ et $S^k \mathcal{C}_L^\bullet$ et $\Lambda^k \mathcal{C}_L^\bullet$ désignent les puissances symétriques et extérieures dérivées k -ièmes du complexe $\mathcal{C}_L^\bullet$, respectivement. Il s'avère que l'analyse de la puissance extérieure dérivée est bien plus simple que l'analogue symétrique. La comparaison entre les deux termes se fait maintenant par le biais d'une suite spectrale dont les termes sont les $\mathfrak{S}_n$ -invariants et les $\mathfrak{S}_k$ -anti-invariants de la suite spectrale hyperdérivée originaire, celle associée au produit tensoriel dérivé $\mathcal{C}_L^\bullet \otimes^L \dots \otimes^L \mathcal{C}_L^\bullet$. On se place d'abord sur l'ouvert $S_{**}^n X$ (ouvert de Danila⁷) des cycles ayant au plus un point multiple de multiplicité au plus 2; on indiquera par j son immersion dans $S^n X$. La suite spectrale qu'on doit analyser devient ici très simple et elle dégénère au niveau E_2 . Sur l'ouvert de Danila on obtient la formule : $j^* \mu_*(\Lambda^k L^{[n]}) \simeq j^*(\Lambda^k \mathcal{C}_L^\bullet)^{\mathfrak{S}_n}$; ensuite, puisque le complexe $(\Lambda^k \mathcal{C}_L^\bullet)^{\mathfrak{S}_n}$ est quasi-isomorphe au faisceau $(\Lambda^k \mathcal{C}_L^0)^{\mathfrak{S}_n}$, et $\Lambda^k L^{[n]}$ et $\Lambda^k \mathcal{C}_L^0$ sont localement libres, on peut étendre le résultat à toute la variété symétrique. On obtient encore une formule de Brion : $\mathbf{R}\mu_*(\Lambda^k L^{[n]}) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda^k \mathcal{C}_L^0)^{\mathfrak{S}_n}$ qui se simplifie en :

$$\mathbf{R}\mu_*(\Lambda^k L^{[n]}) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda^k \mathcal{C}_L^0)^{\mathfrak{S}_n}$$

et permet tout de suite de calculer la cohomologie [22].

Théorème 4.3. *Soit X une surface projective lisse, et soit L un fibré en droites sur X . Alors la cohomologie du schéma de Hilbert $X^{[n]}$ à valeurs dans la puissance extérieure $\Lambda^k L^{[n]}$ d'un fibré tautologique est donnée par l'isomorphisme des modules gradués :*

$$H^*(X^{[n]}, \Lambda^k L^{[n]}) \simeq \Lambda^k H^*(X, L) \otimes S^{n-k} H^*(X, \mathcal{O}_X)$$

5. Références

- [1] W. BARTH – « Moduli of vector bundles on the projective plane », *Invent. Math.* **42** (1977), p. 63–91.
- [2] T. BRIDGELAND, A. KING & M. REID – « The McKay correspondence as an equivalence of derived categories », *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), n° 3, p. 535–554 (electronic).
- [3] G. DANILA – « Formule de Verlinde et dualité étrange sur le plan projectif », Thèse, Université Paris 7, 1999.
- [4] ———, « Sections du fibré déterminant sur l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 2 sur le plan projectif », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **50** (2000), n° 5, p. 1323–1374.

⁷ C'est ainsi que J. Le Potier aimait l'appeler

- [5] ———, « Sur la cohomologie d'un fibré tautologique sur le schéma de Hilbert d'une surface », *J. Algebraic Geom.* **10** (2001), n° 2, p. 247–280.
- [6] ———, « Résultats sur la conjecture de dualité étrange sur le plan projectif », *Bull. Soc. Math. France* **130** (2002), n° 1, p. 1–33.
- [7] ———, « Sur la cohomologie de la puissance symétrique du fibré tautologique sur le schéma de Hilbert ponctuel d'une surface », *J. Algebraic Geom.* **13** (2004), n° 1, p. 81–113.
- [8] J.-M. DREZET & M. S. NARASIMHAN – « Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques », *Invent. Math.* **97** (1989), n° 1, p. 53–94.
- [9] L. GÖTTSCHE & D. HUYBRECHTS – « Hodge numbers of moduli spaces of stable bundles on K3 surfaces », *Internat. J. Math.* **7** (1996), n° 3, p. 359–372.
- [10] M. HAIMAN – « Hilbert schemes, polygraphs and the Macdonald positivity conjecture », *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), n° 4, p. 941–1006 (electronic).
- [11] ———, « Vanishing theorems and character formulas for the Hilbert scheme of points in the plane », *Invent. Math.* **149** (2002), n° 2, p. 371–407.
- [12] M. HE – « Espaces de modules de systèmes cohérents », *Internat. J. Math.* **9** (1998), n° 5, p. 545–598.
- [13] D. HUYBRECHTS & M. LEHN – *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Aspects of Mathematics, E31, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.
- [14] Y. ITO & I. NAKAMURA – « Hilbert schemes and simple singularities », in *New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 264, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, p. 151–233.
- [15] Y. ITO & I. NAKAMURA – « McKay correspondence and Hilbert schemes », *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **72** (1996), n° 7, p. 135–138.
- [16] J. LE POTIER – « Fibré déterminant et courbes de saut sur les surfaces algébriques », in *Complex projective geometry (Trieste, 1989/Bergen, 1989)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 179, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992, p. 213–240.
- [17] ———, « Faisceaux semi-stables et systèmes cohérents », in *Vector bundles in algebraic geometry (Durham, 1993)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 208, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, p. 179–239.
- [18] ———, « Dualité étrange sur les surfaces », non publié.
- [19] ———, « Systèmes cohérents et structures de niveau », *Astérisque* (1993), n° 214, p. 143.
- [20] ———, « Systèmes cohérents et polynômes de Donaldson », in *Moduli of vector bundles (Sanda, 1994; Kyoto, 1994)*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 179, Dekker, New York, 1996, p. 103–128.
- [21] K. G. O'GRADY – « Moduli of vector bundles on surfaces », in *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995, 101–126*, Proc. Sympos. Pure Math., 62, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [22] L. SCALA – « Cohomology of Hilbert schemes of points on a surface with values in representations of tautological bundles », *en preparation*.
- [23] ———, « Cohomology of the Hilbert scheme of points on a surface with values in representations of tautological bundles. Perturbations of the metric in Seiberg-Witten equations », Thèse, Université Paris 7, 2005.
- [24] ———, « Cohomology of Hilbert schemes of points on a surface with values in the double tensor power of tautological bundles », *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **343** (2006), n° 11–12, p. 741–746.

ENSEIGNEMENT

DÉBAT ORGANISÉ PAR LA SMF ET LA SMAI LE 13-01-2007

La licence de mathématique existe-t-elle encore ?

Le 13 janvier dernier, la SMF et la SMAI organisaient un débat à propos de la licence de mathématiques au sein des nouveaux cursus LMD (voir le programme à l'adresse : <http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionSMF/LeniveauL-13-01-2006.html>).

Vous trouverez ci-dessous les contributions de certains intervenants. Nous renvoyons au numéro 111 de la Gazette pour les interventions de Pierre Arnoux, de Marc Peigné et de Jean-Pierre Borel.

L'exemple de l'université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis

Sylvie Derviaux

L'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis fut l'une des universités pionnières pour son passage au LMD en 2002/2003 sous l'impulsion de son Président de l'époque Pascal Level. La licence « Sciences et Technologies » est née, sans cadrage défini par le Ministère en termes de volumes horaires et de modules obligatoires, avec comme seul mot d'ordre

« Allez-y, les textes suivront »

Afin d'éviter la fuite de nos primo-entrants, le tronc commun pour le premier semestre (S1) a été mis en place laissant le temps aux étudiants de conforter leur choix de mention ou de se réorienter, sauf pour les « ex-MASS » pour qui un parcours spécifique était proposé reprenant le contenu de DEUG MASS.

L'absence de cadrage a entraîné des dérives dans certaines filières ; « chaque discipline s'est servie au passage » voulant sa propre mention ; d'où des parcours trop tubulaires dès le semestre 2 (9 mentions : Mathématiques, Informatique, Audio-visuelle, Sciences Physiques, Mécanique, Matériaux, Agro-alimentaire, Construction).

Pour la mention Mathématiques, nous avons instauré pour les semestres 2 à 4 un système de mineures permettant de guider les étudiants dans leur choix de parcours et de garder une certaine cohérence facilitant une éventuelle réorientation (3 Mineures : Physique/mécanique, Informatique, Economie). En licence 3, existaient 3 parcours : Mathématiques fondamentales, appliquées, métiers de l'enseignement.

Après une transition laborieuse entre l'ancien système et cette première version du LMD, nos critiques portaient sur la diminution du présentiel, le manque de suivi ou tutorat, le morcellement de nos modules avec son organisation matérielle, les

contraintes semestrielles avec les sessions d'examens à répétition, la difficulté de gestion des emplois du temps à cause des mutualisations entre mentions et/ou instituts...

En 2006, les volontés ministérielles et locales pour notre réhabilitation étaient avant tout de réduire notre nombre de mentions c'est-à-dire de resserrer notre offre de formation en prenant en compte la réorientation de l'étudiant. Une première proposition est remontée dans ce sens proposant 3 mentions : Sciences fondamentales (SF), Sciences pour l'ingénieur (SPI) et Audiovisuel et Multimédia.

La première (SF) comportait 4 Parcours (mathématiques, mathématiques/professorat des écoles, Physique/mathématiques, Informatique/mathématiques). L'intitulé Sciences fondamentales a été jugé excessif car, même si les mathématiques, l'informatique, et la physique sont des disciplines fondamentales, ce ne sont pas les seules; l'intitulé proposé rendant ambigu, donc opaque le contenu de cette mention. Nous avons choisi de remplacer Sciences fondamentales par Mathématiques proposant seulement deux parcours : mathématiques et mathématiques/professorat des écoles (Maths PE). Les autres parcours disparaissent, n'ayant pas toujours l'encadrement et l'effectif étudiant suffisant pour maintenir un parcours jusqu'au semestre 6. C'est cette version qui a été habilitée.

Une autre remarque suite à la navette UVHC-Ministère concernait le chemin « maths-économie ». Nous proposons aux étudiants intéressés de remplacer le bloc physique-mécanique-chimie par de l'économie et des matières connexes. On nous a dit que cela impliquait un choix avec très peu de recul pour l'étudiant (semestre 1), ce qui pourrait être une cause principale d'échecs pour les néo-bacheliers.

Une dernière remarque concernait le parcours mathématiques/professorat des écoles, avec certaines UE d'un niveau scientifique élémentaire. Il nous a été demandé de détailler le devenir des étudiants. Or depuis le début du LMD, ce parcours existe et aucune dérive n'a été constatée, il n'a jamais été utilisé comme une voie de contournement pour l'accès au Master. La nouvelle version restreint le choix de modules non scientifiques (modules essentiellement inscrits dans des parcours littéraires) et un dispositif d'enseignant-référent est prévu en M1 maths pour les étudiants qui voudraient s'inscrire après la licence parcours Maths PE leur permettant de rattraper les pré-requis indispensables.

De façon générale, dans les 3 mentions habilitées de licence (Mathématiques, Sciences pour l'ingénieur (SPI) et Audiovisuel et Multimédia), les modules spécifiques dans les différents parcours apparaissent au plus tôt en semestre 4, ce qui permet d'envisager toute réorientation.

En résumé, pour la mention Mathématiques, le semestre 1 est commun à toutes les mentions; puis du semestre 2 au semestre 4 s'ajoutent aux modules obligatoires (mathématiques et anglais) des modules SPI à choix; les deux parcours (Mathématiques et Mathématiques/professorat des écoles) ne se différencient qu'en semestres 5 et 6.

Dans ce début de seconde phase, nous expérimentons un tutorat hebdomadaire en licence 1 (par des enseignants) et un contrôle continu plus soutenu (2 devoirs surveillés et 3 interrogations écrites en travaux dirigés au minimum

par module et par semestre). Enfin, une spécificité naissante à Valenciennes est l'élaboration d'un cursus intégré pour notre école d'ingénieurs « ENSIAME ». Il s'appuie sur les licences 1 et 2 mention Mathématiques, et nous avons une dizaine d'étudiants cette année. Ce parcours n'apparaît pas encore dans nos maquettes.

Les classes préparatoires et le programme de mathématiques de début d'année

Johan Yebbou¹

Les classes préparatoires fonctionnent aujourd'hui sous le régime de la réforme de 1995. Dans le domaine des classes préparatoires scientifiques, cette réforme a remplacé la classe de Mathématiques supérieures par le système des deux voies de première année MPSI (mathématiques, physique et sciences de l'ingénieur) et PCSI (physique, chimie et sciences de l'ingénieur) aboutissant en deuxième année aux trois classes MP (mathématiques et physique), PC (physique et chimie) et PSI (physique et sciences de l'ingénieur); parallèlement, la classe de Mathématiques supérieures technologiques T a été remplacée par la classe de PTSI (physique, technologie et sciences de l'ingénieur) suivie en deuxième année de la classe de PT (physique et technologie); enfin, certaines classes préparatoires sont destinées aux bacheliers technologiques (TSI, TPC) ou titulaire d'un BTS (classes ATS).

Les programmes de mathématiques des classes préparatoires sont consistants; il n'est pas utile de les détailler ici (on peut les consulter à l'adresse <http://prepas.org/ProgrammesCPGE>). Ces dernières années, on a constaté que l'écart entre les exigences du baccalauréat et celles des concours, qui était déjà grand en 1995, a encore augmenté après la « Réforme des lycées » des années 1998-2002.

C'est pourquoi il a été décidé que de nouveaux programmes s'appliqueraient à partir de la rentrée 2003 pour les classes de première année. Un aspect important de ces nouveaux programmes a été l'introduction d'un programme de début d'année; sa durée est approximativement de sept semaines, ce qui correspond aux mois de septembre et d'octobre. Il s'agit de partir du programme de la classe de Terminale S et d'introduire des notions de base nécessaires tant en mathématiques que dans les autres disciplines scientifiques.

Le programme de début d'année comprend :

- les nombres complexes;
- la géométrie élémentaire du plan et de l'espace présentée dans le prolongement du cours de Terminale, sans théorie générale des espaces euclidiens; on étudie droites, plans, produit scalaire et vectoriel, cercles, sphères, coordonnées polaires et sphériques, coniques;
- les fonctions usuelles (les propriétés élémentaires liées à la continuité et à la dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle sont supposées connues) : exponentielles, logarithmes, puissances; fonctions trigonométriques et hyperboliques, directes et réciproques;

¹ Lycée Charlemagne, Paris.

- les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients quelconques, du second ordre à coefficients constants;
- les courbes paramétrées.

Depuis sa mise en place, les observations suivantes ont pu être faites. Le programme de début d'année a facilité la transition de la classe de terminale à la classe préparatoire; les étudiants se sentent certainement plus en confiance. Mais la médaille a son revers : dans certains cas, les étudiants sont surpris de l'augmentation de la difficulté qu'ils rencontrent après la période de début d'année et ont alors du mal à se mobiliser.

Certains professeurs, tout en acceptant l'idée d'un programme de début d'année, ont émis des critiques sur son contenu. Si les nombres complexes ou les fonctions usuelles semblent à leur place, certains pensent que la partie « Géométrie » du programme de début d'année n'est pas très efficace dans la mesure où il est nécessaire de faire plus tard le cours sur les espaces euclidiens.

Lorsqu'un bilan des programmes sera fait, il faudra certainement réfléchir à l'introduction d'autres éléments dans les chapitres de début d'année, afin de le rendre à la fois plus efficace et plus stimulant : l'analyse réelle et l'arithmétique ont par exemple été suggérées.

Quoi qu'il en soit, la création de ce programme de début d'année a été une façon de faire face aux difficultés de la transition du secondaire au supérieur, et il m'a semblé utile de le présenter à l'occasion de ce débat.

Le niveau L en Mathématiques, état des lieux et perspectives : la situation européenne

Martine Bellec¹

La déclaration de Bologne en juin 1999, après la commémoration du huitième centenaire de la Sorbonne en mai 1998, a marqué le début de toute une série d'adaptations et de réformes dans les universités européennes.

L'objectif poursuivi est celui de la mise en place d'ici 2010 d'un espace européen de l'enseignement supérieur plus cohérent, compréhensible, comparable et attractif. L'engagement des gouvernements ne se dément pas. Les Ministres concernés se réunissent régulièrement pour suivre l'avancement des réformes et maintenir l'impulsion initiale : Bologne 1999, Prague 2001, Berlin 03, Bergen 05, Londres 07.

Parmi les actions à mener en priorité figurent l'adoption d'un système facilitant la lisibilité et la comparabilité des diplômes, essentiellement basé sur deux cycles, ainsi que l'établissement d'un système de crédits.

Où en sommes nous en janvier 2007 ? Les quelques éléments qui suivent s'appuient sur des échanges entre mathématiciens dans le cadre du projet européen « Tuning Educational structures in Europe ».

¹ Université Paris-Dauphine.

Structure et durée des études de mathématiques en Europe : un premier cycle en 3 ans qui se généralise

La plupart des pays européens ont déjà adopté ou vont le faire très prochainement un premier cycle en trois ans. C'est le cas de l'Italie depuis 2003, de la Belgique depuis 2004, ce sera le cas du Portugal à la rentrée 2008. C'est le cas de l'Autriche à TUG (Graz University of Technology) depuis 2003, de l'Allemagne à la Technische Universität de Braunschweig et dans près de 70% des universités dès cette année. C'est vrai en Suède (Université de Lund), en Finlande, au Danemark (DTU, Denmark Technical University).

En Espagne la durée du premier cycle varie de trois ans (Universidad de Cantabria) à quatre ans (Universidad Autónoma de Madrid), la durée la plus longue correspondant à une formation plus théorique. De même, en Irlande, on trouve des premiers cycles de quatre ans dans les universités « nouvelles » comme Limerick ou Dublin City University ou encore à Trinity college de Dublin. A Galway, en cas d'abandon à l'issue de la troisième année, les étudiants peuvent obtenir un Bachelor « general ».

En Grande Bretagne, la durée habituelle du BSc est de trois ans, complétés par une année de stage pour les étudiants s'arrêtant à l'issue du premier cycle, mais cela peut être quatre ans (Oxford, Bath, Imperial college) avec une partie pouvant être validée dans un Master en cas de poursuite d'études. Cambridge annonce trois ans pour le BA, la possibilité d'une quatrième année pour le Certificat of « advanced studies in mathematics ».

En bref, le premier cycle en trois ans se généralise, complété par une année de stage lorsqu'il s'agit d'un diplôme final (Irlande, Grande Bretagne) ou par une année complémentaire d'approfondissement théorique (Grande Bretagne, Espagne) intégrée ou intégrable au master.

Proportion d'enseignements de mathématiques dans les premiers cycles de mathématiques : de l'ordre de 2/3 le plus souvent

Le système de crédits ECTS est déjà adopté dans la très grande majorité des pays européens (sauf encore dans quelques universités britanniques qui possèdent leur propre système).

Un premier cycle en trois ans correspond à 180 ECTS. Ce système de crédits permet de mesurer la part d'enseignements de mathématiques dans les premiers cycles de mathématiques. La situation est très variable en France d'une université à l'autre depuis la mise en application du LMD, chez nos partenaires européens aussi. Le cas le plus fréquent est celui de 120 ECTS (de 110 à 125) soit une proportion de 2/3, comme en Espagne, en Italie, en Allemagne, au Danemark. En Irlande la proportion est plutôt de 3/4. En Belgique, on peut rencontrer jusqu'à 150 ECTS (plus de 80%). C'est le minimum en Grande Bretagne où la totalité des ECTS peut être consacrée aux mathématiques. Enfin en Suède les mathématiques représentent seulement la moitié des enseignements, en Finlande la proportion va de 60 ECTS (1/3) à 120 ECTS (2/3).

Le Projet « Tuning » et la réforme en Espagne

Dans le cadre du projet « Tuning Educational structures in Europe » a été développée une approche des cursus universitaires dépassant la stricte analyse des contenus et y associant une réflexion sur les compétences attendues au terme des formations, sur les modes d'enseignement et d'apprentissage ainsi que sur les procédures de qualifications (habilitations, accréditations).

La réforme des études de mathématiques menée en Espagne au niveau national à partir de 2003 s'est inspirée de ces réflexions. Les travaux très complets, préalables à cette réforme sont accessibles dans livre blanc édité en mai 2004 par l'« Agencia nacional de evaluacion de la calidad y acreditacion ». (cf lien ci-dessous)

<http://tuning.unideusto.org/tuningeu>

http://ec.europa.eu/education/policies/educ/tuning/tuning_fr.html

http://www.aneca.es/modal_eval/docs/libroblanco_jun05_matematicas.pdf

New Mathematics Journals from Springer in 2007



Mathematics and Financial Economics

Editor-in-Chief: Elyès Jouini,
Paris, France

2007, 4 issues
ISSN 1862-9679 (print version)
ISSN 1862-9660 (electronic version)



Journal d'Analyse Mathématique

Editor-in-Chief: Lawrence
Zalcman, Bar-Ilan, Israel

Owned by the Hebrew University of Jerusalem

2007, 3 issues
ISSN 0021-7670 (print version)
ISSN pending (electronic version)



Israel Journal of Mathematics

Editor-in-Chief: A. Mann,
Jerusalem, Israel
Owned by the Hebrew University of Jerusalem

2007, 6 issues
ISSN 0021-2172 (print version)
ISSN pending (electronic version)



ZDM

The International Journal
on Mathematics Education

Editor-in-Chief: Gabriele Kaiser,
Hamburg, Germany

2007, 6 issues
ISSN 1863-9690 (print version)
ISSN 1863-9704 (electronic version)

Blätter der DGVFM

Editor-in-Chief: Christian Hipp, Karlsruhe, Germany

2007, 2 issues
ISSN 1864-0281 (print version)
ISSN 1864-0303 (electronic version)

Logic and Analysis

Editor-in-Chief: N. J. Cutland, York, UK

2007, 4 issues
ISSN 1863-3617 (print version)
ISSN 1863-3625 (electronic version)

Indian Academy of Sciences

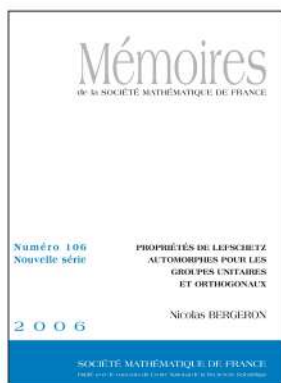
Proceedings Mathematical Sciences

Main Editor: G. Misra, Bangalore, India
Co-publication with Indian Academy of Sciences

2007, 4 issues
ISSN 0253-4142 (print version)
ISSN pending (electronic version)

Easy Ways to Order for the Americas ► **Write:** Springer Order Department, PO Box 2485, Secaucus, NJ 07096-2485, USA
► **Call: (toll free)** 1-800-SPRINGER ► **Fax:** +1(201)348-4505 ► **Email:** journals-ny@springer.com or **for outside the Americas**
► **Write:** Springer Distribution Center GmbH, Haberstrasse 7, 69126 Heidelberg, Germany ► **Call:** +49 (0) 6221-345-4303
► **Fax:** +49 (0) 6221-345-4229 ► **Email:** subscriptions@springer.com

012983x



Mémoire 106

Propriétés de Lefschetz automorphes pour les groupes unitaires et orthogonaux N. Bergeron

Dans ce Mémoire, nous démontrons et conjecturons un certain nombre de résultats reliant la cohomologie d'une variété arithmétique à la cohomologie de certaines de ses sous-variétés totalement géodésiques. Ces résultats font écho aux Théorèmes de Lefschetz qui, en dehors du degré médian, permettent de réduire l'étude de la cohomologie d'une variété projective complexe à l'étude de la cohomologie d'une section hyperplane générique. Il est peut-être un peu surprenant qu'une telle analogie subsiste dans le cas des variétés arithmétiques réelles.

This Mémoire is concerned with a number of results and conjectures relating the cohomology of an arithmetic manifold with the cohomology of a totally geodesic submanifold. This echoes the Lefschetz Theorem, which states that appropriate cohomology groups of a generic hyperplane section of a projective manifold inject into the corresponding cohomology groups of that manifold. This may sound quite surprising that such an analogy still exists in the case of real arithmetic manifolds.

prix public* : 26 € - prix membre* : 18 €

* frais de port non compris



Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

<http://smf.emath.fr>

INFORMATIONS

Retour sur la deuxième journée d'accueil des nouveaux maîtres de conférences et chargés de recherche en mathématiques

(26 janvier 2007, Institut Henri Poincaré)

Stéphane Cordier, Antoine Rousseau

Le but de cette journée, la deuxième du genre après celle de 2005, était d'apporter quelques informations utiles pour mieux comprendre et se mouvoir dans notre système d'enseignement supérieur et de recherche, système actuellement en évolution. Il s'agissait également de souhaiter la bienvenue dans la communauté mathématique française aux jeunes recruté(e)s.

Les remerciements des organisateurs vont à l'IHP pour son accueil, au ministère, au CNRS, au RTRA en sciences mathématiques et aux sociétés savantes qui les ont soutenus (financièrement ou pour la logistique) pour monter cette opération, ainsi qu'à l'ensemble des intervenants.

Agrémentée de quelques pauses-café et d'un buffet de midi, la journée était constituée d'interventions portant sur des points précis, tels que l'ANR, les bases de données en ligne, le fonctionnement de nos organismes de tutelle, etc. Le programme précis de la journée figure à l'adresse suivante : <http://postes.smai.emath.fr/accueil>.

En fin de journée a eu lieu un débat sur l'avenir de la recherche en mathématiques.

Une pochette contenant un grand nombre d'informations a été distribuée aux participants, informations que l'on pourra prochainement retrouver sur le site de l'Opération Postes.

Compte-rendu du débat du 26 janvier 2007

INTERVENANTS : P. Auscher, G. Barles, A. Bar-Hen, J.-P. Bourguignon, F. Comets, S. Cordier, L. Di Vizio, F. Golse, S. Jaffard, F. James, Y. Maday, B. Schapira, W. Werner.

Les grands thèmes abordés ont été :

- des points spécifiques aux jeunes recrutés ;
- des informations plus générales ;
- les revues et les bases de données en ligne ;
- l'ANR.

Informations spécifiques aux jeunes recrutés

Question : Comment est officiellement réparti le temps de travail des maîtres de conférences ? Comment poser des congés ?

Réponse : Un statut régit le corps des maîtres de conférences dans le code du travail. Concernant les congés, le Conseil d'état précise les dates officielles et théoriques des congés des enseignants-chercheurs. Cependant peu d'entre nous les connaissent et savent comment poser des congés.

De façon générale, le travail d'un maître de conférences est réparti entre son enseignement (cours, TD, préparation, corrections), et la recherche (temps de présence mais aussi missions). Même si seuls les enseignements exigent une présence effective à l'université, on encourage la présence au sein du laboratoire d'accueil au maximum. Cela facilite l'intégration du chercheur et la vie collective du laboratoire.

Question : Quelle est la visibilité que les jeunes ou futurs enseignants-chercheurs peuvent avoir concernant les décharges de services ?

Réponse : Il est difficile d'en parler et d'en faire la publicité dans la mesure où c'est contraire au statut, qui précise que la charge d'un enseignant-chercheur est de 192 heures. Toutefois ces questions sont évoquées dans la loi sur la recherche, notamment concernant les jeunes en début de carrière. Quelques exemples sont de plus recensés sur la page suivante.

http://postes.smai.emath.fr/apres/service_reduit.php

Question : Pourquoi les contrats de post-doc à l'étranger ne sont-ils pas valorisés dans le calcul de l'ancienneté (6 ans de recherche à l'étranger correspondant à 2 ans d'ancienneté d'enseignant-chercheur) ?

Réponse : Des directives européennes existent pour éviter ce genre de dysfonctionnement. Les pays signent des engagements de principe à respecter ces directives, mais en pratique... (pour la charte européenne, voir

http://ec.europa.eu/eracareers/pdf/eur_21620_en-fr.pdf)

Question : Quelles règles pour le congé de maternité ?

Réponse : Il n'y a pas de texte précis en ce qui concerne le congés maternité, seule une circulaire¹ définit des règles (voir le livret) qui doivent être appliquées en théorie. Cette circulaire dit que si la naissance a lieu dans l'année universitaire, vous devez bénéficier d'une décharge d'un demi-service, et que si le congé tombe en partie pendant des vacances, alors le calcul se fait au prorata.

Question : Quelle est l'évolution des salaires sur les dernières années, et que peut-on espérer pour les années à venir ?

Réponse : Il s'agit bien entendu d'un travail complexe. On peut citer une étude de sociologues lillois, basée sur le coût de la vie évalué par l'INSEE. Cette étude montre que le pouvoir d'achat des maîtres de conférences a augmenté entre 1968 et 1980, pour se stabiliser depuis 1980.

Si on compare le SIMC (salaire initial d'un McF) au SMIC, le SIMC a perdu 20% depuis 1990.

¹ Circulaire DPE A2/FD n° 892 du 7 novembre 2001 accessible sur la page http://www.snesup.fr/docs/memo/textescirculaire_dpe_a2_fd_892.html

Précisons que si l'on se compare à l'étranger, la France n'est pas bien située en terme de salaires en Europe. Ce constat est un peu adouci par le fait que c'est le pays pour lequel l'âge moyen d'obtention d'un CDI d'enseignant-chercheur est le plus petit...

Voir pour cela l'étude du CLORA : <http://www.clora.net/php-prive/affiche-note.php?2007/8>
(nécessite une inscription, gratuite, sur le site du CLORA).

Informations plus générales

Question : Plus généralement, comment voyez-vous l'avenir de la recherche en mathématiques, en particulier en France ?

Réponse : Les moyens existent, il faut savoir saisir les opportunités quand elles se présentent. L'ANR, malgré son fonctionnement particulier et inhabituel, peut être, au-delà d'une simple source de financements, un excellent moyen de motiver un ou plusieurs membres d'une ou plusieurs équipes de recherche à mieux travailler ensemble...

La tendance est aux projets et aux financements ponctuels plutôt que récurrents, privilégiant les mathématiques aux interfaces, ouvertes vers les autres disciplines.

Du point de vue de la vie administrative des laboratoires, la tendance actuelle est plutôt aux regroupements et autres fusions, qui doivent permettre une simplification de gestion administrative, et donnent également plus de poids, et de visibilité internationale à nos laboratoires et nos universités. La granularité a beaucoup augmenté : chaire individuelle, équipe, laboratoire, fédération, RTRA... Et cela peut s'inverser.

Question : Comment le ministère peut-il affirmer que 75% des enseignants-chercheurs sont actifs, contre 25% d'inactifs ? Quels sont les critères ?

Réponse : La définition d'un mathématicien actif se trouve sur le site du ministère <http://www.recherche.gouv.fr/mstp/pub101.htm> basée sur celle de l'IMU (International Mathematic Union) : un chercheur est considéré comme étant actif s'il publie 2 articles ou plus en 4 ans.

Cela dit, il convient de préciser que c'est plus l'activité du laboratoire (évaluée tous les 4 ans) qui compte, et celle-ci est mesurée en comptant les personnes qui publient. Les risques et les bénéfices de l'évaluation sont donc à considérer de manière collective, et non individuelle.

Question (suite de la précédente) : Et si les enseignants étaient évalués par leurs étudiants ?

Réponse : Ce n'est pas aussi simple. Les étudiants (en particulier dans les premiers cycles) n'attachent pas grande importance à l'évaluation de leurs enseignants. Ils peuvent aussi profiter de l'occasion de régler des comptes (anonymement).

Question : Comment se fait-il que le CNRS continue à faire déplacer plusieurs centaines de candidats pour les auditions ?

Réponse : C'est *a priori* inévitable. Ce n'est bien entendu pas la volonté du Comité National, mais il s'agit d'une contrainte administrative qui pénalise les candidats, bien sûr, mais également le jury. Pourtant, l'INRIA, qui est soumis aux

mêmes contraintes que le CNRS, a réussi depuis le concours 2006 à obtenir une dérogation lui permettant de présélectionner une *short list*.

Question : Comment pourrait-on valoriser les enseignants-chercheurs qui aiment l'enseignement et qui aimeraient, au cours de leur carrière, en faire un peu plus ?

Réponse : Les maîtres de conférence sont des enseignants-chercheurs, et il n'est pas possible de les considérer comme des PRAG ou des professeurs de classes préparatoires.

Ensuite, il faut dire que dans l'évaluation des enseignants-chercheurs, l'aspect enseignement ne compte pas en priorité. Parce qu'il est difficile d'évaluer un enseignant, et aussi parce que cette composante du métier est difficilement reconnue dans le milieu.

Pour les CR qui voudraient enseigner beaucoup, il existe quelques accords ponctuels entre le CNRS et les universités pour des échanges de postes.

Bibliographie en ligne : bases de données et éditeurs

Question : Comment se passe l'abonnement à Zentralblatt-MATH (Z-MATH) pour une université ? Quel est le coût de l'abonnement ?

Réponse : Les prix sont le plus souvent fixés pays par pays, au travers d'un consortium. Il est donc difficile de dire exactement comment sont définis les tarifs. Cependant on peut dire que certains pays ont choisi de fixer le coût de façon proportionnelle au nombre d'utilisateurs potentiels. Cela ne semble pas être le cas de la France².

Le coût annuel de Z-MATH est globalement d'environ 3M€. Il faut noter que si l'Allemagne subventionne Z-MATH à hauteur d'1M€, au travers du FachInformationZentrum, la Commission Européenne a financé il y a quelques années deux projets qui ont permis l'amélioration de l'interface de consultation et l'élargissement du réseau de collecte des articles mais ne subventionne pas la base de données de façon récurrente. Il faut donc compter sur les abonnements.

À titre de comparaison, MathSciNet (MSN) est annuellement bénéficiaire d'un peu moins de 2M€. Cela est dû, en particulier, au fait que le marché captif est plus grand et que les sommes disponibles dans les laboratoires sont plus élevées.

Remarque : On peut accéder à MSN et Z-MATH via la plateforme Matrice.
<http://math.cnrs.fr/plm>

Question : Comment évoluent les prix des journaux ? De quels moyens dispose-t-on pour faire pression ?

Réponse : Certains comités de rédaction ont collectivement démissionné pour dénoncer le fonctionnement des éditeurs (en particulier Elsevier, et Springer dans une moindre mesure), qui se concentrent quasi-exclusivement sur leurs missions commerciales, laissant le travail éditorial aux scientifiques, tout en pratiquant une politique tarifaire très dure pour les laboratoires.

² C'est en fait le cas ; l'abonnement négocié par le RNBm est de 5236 € TTC par laboratoire et les petites équipes ont accès à la base de données pour un engagement financier modique. NdIR.

Le problème est certes préoccupant, mais complexe. Il faut aussi prendre en compte le fait que les revues européennes sont éditées par des sociétés commerciales³, quand les principales revues américaines sont publiées par les sociétés savantes, et proposent donc des prix raisonnables. Ainsi, il faut prendre garde à ne pas fragiliser nos revues...

ANR et autres

Question : Quels sont les critères qui font qu'un projet ANR est retenu ?

Réponse : Pour ce qui concerne le contenu scientifique, il n'y a pas de critère absolu. Il est recommandé d'aller voir vos collègues plus expérimentés, en particulier le directeur de laboratoire, qui saura vous conseiller, et qui doit d'ailleurs signer votre projet. En ce qui concerne le volet administratif (qui est énorme), il y a normalement une personne compétente dans l'équipe administrative de votre établissement qui saura vous épauler. Ne sous-estimez pas cette partie, qui est essentielle à la réussite de votre projet.

Enfin, n'oubliez pas qu'un projet rejeté n'est bien souvent pas mauvais, et que cet appel d'offre est récurrent et aura lieu chaque année ! Voir

<http://www.agence-nationale-recherche.fr:80/appe1-a-projet/17?NodId=17&lngAAPId=98>

pour plus de renseignements.

Question : Que sont les *Starting Grants* donnés dans le cadre du nouveau programme européen sous l'égide du Conseil Européen de la Recherche et sont-ils réservés à des projets internationaux ?

Réponse : Les *Starting Grants* http://cordis.europa.eu/fp7/dc/index.cfm?fuseaction=UserSite.IdeasDetailsCallPage&call_id=3

sont des projets européens d'un nouveau format : c'est la première activité proposée par le nouvellement établi Conseil Européen de la Recherche (son acronyme le plus courant est ERC de son nom anglais "European Research Council") dans le cadre du 7^{ème} Programme-Cadre pour la Recherche et la Technologie. Ces projets ont pour ambition de permettre à des chercheurs entre 2 ans et 9 ans après leur soutenance de thèse d'acquérir leur autonomie financière pour développer leur programme de recherche. Ils sont donc centrés sur une personne et l'équipe qu'il veut former autour de lui. Il n'y a donc pas d'obligation de constituer un réseau transnational pour déposer une demande.

³ Rappelons le travail éditorial de la LMS, la SME, la SMF, Mathdoc et Cédram ... NdIR.

Annuaire national de la communauté mathématique française

un service informatique pour tous les mathématiciens

L'équipe Mathrice de gestion de l'annuaire¹

L'Annuaire de la Communauté Mathématique Française <http://annuaire.emath.fr/> regroupe des mathématicien(ne)s, membres des laboratoires de recherche, des départements d'enseignement supérieur, des sociétés savantes, et au-delà de tout groupement de mathématicien(ne)s en France. Il a été créé en mars 2001.

Son but est de permettre la recherche, depuis un serveur unique, de tout(e) mathématicien(ne) travaillant dans une structure française, via une interrogation donnant le nom, le prénom, le téléphone, la télécopie, l'adresse électronique et l'URL de la page Web personnelle de ces personnes.

Le réseau Mathrice (<http://www.mathrice.org/>), Groupement De Service (GDS) du CNRS, a conçu et gère cet annuaire qui est la concaténation de multiples annuaires :

- ceux des laboratoires de recherche et départements de mathématiques (83 structures),
- ceux des sociétés savantes de mathématiques SMF et SMAI, et bientôt de la SFDS,
- les utilisateurs de MATEXO (portail pédagogique du domaine emath.fr) et les inscrits sur MARS (Opération Postes).

Ainsi, l'annuaire de la SMF, consultable sur le site de la SMF, est inclus dans cet annuaire et est donc accessible à la fois sur <http://smf.emath.fr/Adherents/Annuaire/> et d'une façon plus générale sur <http://annuaire.emath.fr/>.

Cet annuaire regroupe près de 7500 personnes et plusieurs milliers de consultations par mois sont enregistrées, ce qui montre l'intérêt porté à cette centralisation des informations. Cet annuaire recouvre désormais la quasi totalité des laboratoires associés au CNRS, et nombre d'équipes d'accueil du Ministère. Cet annuaire peut également être utilisé pour la recherche et la complétion des adresses électroniques depuis votre outil de messagerie (Thunderbird, pine, Outlook ...). Cela est expliqué en : <http://annuaire.emath.fr/informations.php>.

L'objectif est de rassembler dans cette base l'ensemble de la communauté mathématique française. Si votre équipe n'est pas encore intégrée, n'hésitez pas à prendre contact avec les gestionnaires de l'annuaire : ldap@math.cnrs.fr. Si vos données sont erronées ou incomplètes, prenez contact avec l'interlocuteur annuaire de votre structure dont les coordonnées sont répertoriées sur <http://annuaire.emath.fr/organismes.php>.

¹ G. Grancher (Université de Rouen), V. Louvet (Université Lyon I), H. Massias (Université de Limoges)

Les Maths à l'ANR en 2006

Philippe Flajolet, François James

En 2006, pour la deuxième année consécutive, le programme dit « non thématique » de l'ANR a soutenu une quarantaine de projets issus d'équipes françaises de mathématicien(ne)s. On présente ici un bref bilan de la campagne d'appel à projets correspondante.

Généralités

L'*Agence Nationale de la Recherche* (ANR) gère annuellement un programme dit « non thématique » et destiné à soutenir des projets de recherche « de nature non finalisée » selon des critères d'excellence scientifique. Neuf comités, appelés « Comités Scientifiques Disciplinaires », ou *CSD*, couvrent l'ensemble des disciplines. Le comité des mathématiques est ainsi le *CSD5*. Les auteurs de ce texte ont été respectivement président en 2005–2006 (PF) et coordinateur scientifique depuis 2005 (FJ) de ce comité. Notre objectif est ici d'offrir un court bilan du programme de 2006 pour ce qui concerne les mathématiques.

Rappelons brièvement que les projets sont soumis le mois X (par exemple $X = \text{mars } 2006$). Peu après la clôture de l'appel à projet le *CSD* effectue un premier examen rapide du contenu des projets afin, pour chacun, de choisir des experts extérieurs, français ou étrangers, et désigner un rapporteur interne au *CSD* ainsi qu'un second lecteur¹, lui aussi membre du *CSD*. Environ deux mois sont laissés aux experts extérieurs pour lire les projets et les évaluer (par l'intermédiaire d'un site ouëbe). Au mois $X + 3$ (e.g., $X + 3 = \text{juin } 2006$), se tient une session du *CSD* qui dure trois jours pleins : les projets y sont évalués, à partir du retour des experts extérieurs, de l'examen détaillé des rapporteurs, et des discussions au sein du comité. Finalement, le comité sélectionne les projets qu'il propose de retenir compte tenu des enveloppes financières disponibles, d'un objectif d'équité entre sous-disciplines des mathématiques, et de contrainte d'équilibre global entre disciplines différentes (imposant par exemple un taux de sélectivité entre 20% et 30%). L'ensemble du programme, toutes disciplines confondues, est finalisé par un comité de pilotage (aux environs du mois $X + 4$), où sont représentés les organismes (CNRS, INRA, INRIA, INSERM, CEA,...) et la direction de l'enseignement supérieur du ministère. Les résultats sont alors communiqués aux intéressés.

Rappelons également que les propositions « non thématiques » ressortissent à deux catégories distinctes : le programme *Jeunes Chercheurs et Jeunes Chercheuses* (JCJC) et le programme dit *Blanc* (BLANC), constitué des projets de recherches de toutes origines. Le programme JCJC est traditionnellement le plus sélectif, son volume de financement se situant à environ un septième du budget total du programme. Enfin, un projet peut concourir soit comme projet mono-disciplinaire soit comme bi-disciplinaire. Dans ce dernier cas, deux disciplines, l'une principale, l'autre secondaire, sont indiquées par le porteur du projet.

¹ L'introduction d'un lecteur est une innovation en 2006. Bien qu'alourdissant un peu la charge de travail des membres, cette initiative s'est avérée une amélioration utile.

Pour 2006, le comité CSD5 était issu de celui de 2005, avec un renouvellement partiel (3 départs) et un élargissement destiné tant à couvrir mieux la discipline qu'à anticiper un accroissement des soumissions, après l'année de démarrage de 2005. Cet ajustement a, en 2006, été effectué à la suite de consultations multipartites mettant en jeu la direction scientifique des mathématiques au CNRS, le ministère, les organismes, le président sortant (PF), le coordinateur scientifique (FJ), l'ANR, et le comité de pilotage. Voici quelle était la composition du CSD5 en 2006 :

Pierre Arnoux, Naoufel Ben Abdallah, Yann Brenier, Antoine Chambert-Loir, Patrick Dehornoy, Philippe Flajolet (Président), Vincent Franjou, Christiane Frougny, Jean-Marc Gambaudo, Alice Guionnet, Christian Kassel, Bertrand Maury, Pierre Pansu, Rémi Sentis, Jean-Philippe Vert, Andre Voros, Bernard Ycart.

Les projets de mathématiques

Nous avons reçu en 2006 un total de 154 propositions de projet, 47 en JCJC et 107 en BLANC. Les projets pouvaient avoir les mathématiques comme discipline de rattachement, soit principale, le cas de 108 projets, soit secondaire, dans le cas des 46 autres projets. En 2006, le comité secondaire émettait une recommandation, la sélection finale étant effectuée par le comité principal.

Les projets bi-disciplinaires dressent un tableau assez net de l'intersection des mathématiques avec d'autres disciplines scientifiques. Le gros des interactions se situe entre mathématiques et informatique au sens large (avec STIC : 36 projets sur 154 présentés), suivi, à parts à peu près égales mais moindres, des interactions avec la physique et la biologie (11 et 12 projets, respectivement). Les autres secteurs sont présents, mais bien plus faiblement (6 projets d'interaction avec les sciences humaines et sociales ou avec les sciences de l'ingénieur).

Dans ce qui suit, nous analysons les 108 propositions reçues au titre des mathématiques comme discipline de rattachement principal (ou unique), celles dont nous avons la responsabilité de décision. Voici quelques statistiques commentées.

Les 108 propositions reçues se répartissaient en

35 JCJC et 73 BLANC.

La somme des demandes initiales était d'environ 25 Meuros. Parmi celles-ci, ont été retenues pour financement

10 JCJC et 22 BLANC.

(De surcroît, une petite dizaine de projets ont été acceptés au titre des mathématiques comme discipline secondaire.) Le taux de succès se situe ainsi aux environs de 30%. Le montant final attribué à l'ensemble des projets en mathématiques à titre principal en 2006 a été voisin de 5 MEuros, correspondant à un financement moyen de

72 kEuros pour JCJC et 195 kEuros pour BLANC.

Par rapport à l'ensemble du programme non thématique de l'ANR, les mathématiques « pèsent »² environ 2.5% du total. En résumé : *environ 20% des sommes initialement demandées ont été attribuées, et environ 30% des projets ont été financés, ce après réduction éventuelle de leur budget.*

Un projet BLANC typiquement met en jeu entre deux et quatre équipes constitutives (auxquelles peuvent être rattachés un petit nombre d'extérieurs), un peu moins pour les projets JCJC qui sont par nature plus ciblés sur les jeunes porteurs. Du point de vue thématiques, et bien que les frontières soient floues, nous avons reçu pour évaluation environ 40% de propositions en mathématiques appliquées (équations aux dérivées partielles, calcul scientifique, analyse numérique), 30% en mathématiques pures (géométrie, analyse, algèbre), et 30% en mathématiques d'interfaces (mathématiques de l'informatique, probabilités, statistiques). Quant au fonctionnement du comité, nous avons opéré en alternance entre sessions en sous-comités (correspondant aux catégories ci-dessus) et sessions plénières. Ceci a permis un examen plus approfondi et des discussions plus fouillées du contenu de chaque projet.

L'analyse a posteriori montre que le CSD5 a (compte tenu de la granularité) retenu en proportions quasi-égales des projets mono-disciplinaires et des projets bi-disciplinaires. Pour les porteurs de projet, le meilleur guide doit ainsi être la logique scientifique du projet ! Si l'on rapporte les décisions finales aux taux d'acceptation recommandés par l'ANR, on constate que nos taux d'acceptation sont plus élevés que dans les autres disciplines (proches de 30% en mathématiques, plutôt que des 20% préconisés par l'ANR). Le CSD5 a tenu compte de la qualité excellente des projets soumis et à préféré accepter un plus grand nombre de projets, quitte à réduire, parfois au delà de ce que nous aurions souhaité, les financements attribués.

La comparaison entre 2005 et 2006 est aussi instructive. Il y a eu globalement une augmentation de 10% du nombre de projets soumis (près de 2500 soumissions JCJC et BLANC en 2006, toutes disciplines confondues). Sur la période, le nombre de projets évalués principalement en mathématiques a crû de plus de 20% (passant de 87 en 2005 à 108 en 2006), correspondant à une croissance forte des soumissions BLANC (de 43 à 73) et à une certaine baisse des demandes JCJC (de 44 à 35).

Conclusions

Il peut être important de redire que le CSD5 a visé à travailler au mieux de ses possibilités, de manière non partisane, selon des critères purement scientifiques, bien plus qu'administratifs. Le choix était particulièrement difficile en 2006, compte tenu de la très haute qualité des projets soumis et nous aurions souhaité retenir plus de projets et devoir moins réduire les financements de ceux qui ont été acceptés. C'est l'occasion de remercier ici tous les participants à des propositions, retenues ou non, pour le travail important mis dans la préparation de leurs dossiers. Insistons enfin sur le fait que l'appel à projets « non thématique » est récurrent d'une année

² À l'ANR, le montant attribué à chaque discipline, en 2005 comme en 2006, a été déterminé à la proportionnelle des sommes demandées par les projets de la discipline. À titre indicatif, dans l'Enseignement supérieur, le poids des mathématiques par rapport aux autres disciplines est d'environ 6% en personnel, et 5% en financement (le plus clair provenant des dotations ministérielles).

sur l'autre, ce qui doit permettre de parer à la relative brièveté des délais entre la parution de l'appel et la soumission des projets.

Le financement par projet est actuellement, dans le paysage académique français, une composante du système de financement de la recherche, ce avec des volumes de financement se situant semble-t-il à un niveau intermédiaire entre ceux du CNRS et ceux du ministère (ces derniers étant les plus élevés). Quant à l'équilibre entre les différentes composantes du système de recherche français, une recommandation de l'Académie des sciences en date du 15 février 2007 nous paraît mériter d'être notée :

« Une marge de manœuvre importante a été introduite par la création de l'Agence Nationale de la Recherche qui finance des projets d'équipes sur la base de l'excellence, particulièrement des projets « blancs » non finalisés qui garantissent la liberté et l'originalité de la recherche. Cela ne doit cependant pas aller à l'encontre des politiques scientifiques des grands organismes de recherche. »

Il nous semble aussi que ce programme non thématique est pour les mathématiques un espace de liberté pour la recherche, qu'elle soit fondamentale ou appliquée, ainsi que l'une des rares sources de financement spécifique pour les recherches en mathématiques pures. À cet égard, le budget de ce programme a été en valeur absolue stagnant entre 2005 et 2007 (à environ 200 MEuros), et en décroissance en valeur relative (de 2/7 en 2005 à 2/8 en 2006) par rapport au budget total de l'ANR, dont les missions semblent avoir une certaine tendance à se diversifier...

Prix Abel 2007

L'Académie Norvégienne des Sciences et Lettres a décidé de décerner le Prix Abel pour l'année 2007 à Srinivasa S. R. Varadhan du Courant Institute of Mathematical Sciences, New York « pour ses contributions fondamentales à la théorie des probabilités et en particulier pour la création d'une théorie unifiée des grandes déviations ».

Srinivasa S. R. Varadhan est né le 2 Janvier 1940 à Madras (Chennai), en Inde. Il passa son « B.Sc. honours degree » en 1959 et son M.A. l'année suivante tous les deux à L'Université de Madras. Il soutint sa thèse en 1963 à l'Indian Statistical Institute. Il est actuellement professeur de mathématiques et titulaire de la chaire « Frank J. Gould Professor of Science » au Courant Institute.

Le Prix Abel est un prix international pour un travail scientifique remarquable dans le champ des mathématiques. Le prix a pour vocation de reconnaître des contributions d'une profondeur et d'une influence extraordinaires pour les sciences mathématiques.

Le prix Abel est décerné annuellement par l'Académie Norvégienne des Sciences et Lettres. D'un montant de 6 millions de NOK (approximativement 1 million de USD) le Prix Abel 2007 sera remis à Srinivasa S. R. Varadhan par sa majesté le Roi Harald lors de la cérémonie du 22 Mai à Oslo.

La PEDR, et autres appels d'offres du ministère

Aline Bonami¹, Laurent Boudin²

Ces quelques pages décrivent les différents appels d'offres du ministère de l'Éducation Nationale ou du ministère délégué à l'Enseignement Supérieur et à la Recherche pour lesquels nous avons été amenés à faire des propositions de classement après évaluation au titre de la MSTP (Mission scientifique, technique et pédagogique) entre 2003 et 2006. Elles donnent également des informations sur les résultats pour les mathématiques.

Il n'est pas sûr que le fonctionnement reste le même dans les années à venir. La création de l'AERES (Agence d'évaluation de la recherche et l'enseignement supérieur) en remplacement de la MSTP, doublée de la réorganisation des directions du ministère délégué, ainsi que la contractualisation de certains appels d'offres au sein des universités, risquent en effet d'amener de profondes modifications. La MSTP ne prenait pas de décision, à l'image de l'AERES, et contrairement à la MSU (Mission scientifique universitaire) qui l'avait précédée. Elle était néanmoins étroitement liée aux directions opérationnelles (direction de la recherche et direction de l'enseignement supérieur, maintenant DGRI et DGES).

La Prime d'encadrement doctoral et de recherche

C'est sûrement l'appel d'offres qui attire le plus d'attention de la part des enseignants-chercheurs, et le plus de frustrations pour les candidats malheureux.

Rappelons d'abord qu'il s'agit d'un concours fortement contingenté budgétairement. Après réception de l'ensemble des demandes, chaque département de la MSTP soumettait les candidatures à évaluation scientifique à un ou plusieurs groupes d'experts, qui proposaient un classement des demandes. En mathématiques, il y a toujours eu un seul groupe d'experts, examinant les demandes issues des 25^e et 26^e sections du CNU. Le nombre de ses membres a été fonction du nombre de dossiers à traiter (19 à 21 les dernières années). Les experts étaient choisis dans la liste qu'on peut trouver sur le site web de la MSTP³, www.recherche.gouv.fr/mstp/1stExperts.htm.

Le tableau 1 donne l'équilibre entre disciplines suivant les années. Les mathématiciens représentent à peu près 6 % du total de la communauté scientifique, toutes disciplines confondues.

Le pourcentage des bénéficiaires est le même dans chaque département. Le nombre de PEDR accordées dans chaque département scientifique est donc proportionnel au nombre des demandes déposées.

¹ Directrice scientifique du département *Mathématiques et leurs interactions* à la MSTP, du 1^{er} janvier 2003 au 31 août 2006

² Coordinateur scientifique du département *Mathématiques et leurs interactions* à la MSTP, du 1^{er} juin 2003 au 31 août 2006

³ Le fonctionnement de la MSU était légèrement différent puisqu'il y avait officiellement un jury PEDR, nommé par la directrice de la recherche, voir, par exemple, la section PEDR sur smf.emath.fr/PostesCredits/UniversiteCNU/ ou consulter les articles de la *Gazette* et *Matapli* de cette période.

	2003	2004	2005	2006
Candidatures toutes disc. confondues	4849	5236	5376	5669
Candidatures en mathématiques	502	541	566	556
Poids des mathématiques	10,3 %	10,3 %	10,5 %	9,8 %

TAB. 1. Candidatures PEDR en mathématiques et toutes disciplines confondues.

Si le mode de fonctionnement du groupe d'experts a peu changé en quatre ans, on voit que l'offre et la demande ont subi d'importantes modifications. Le nombre de demandes de PEDR a augmenté en mathématiques, ce qui a permis de combler le retard de la discipline par rapport aux autres disciplines scientifiques (chimie, physique par exemple).

Par contre, comme dans toutes les disciplines, le pourcentage de dossiers retenus a diminué. Il est de 47 % pour 2006 (avant la procédure de recours), alors qu'il était de 53 % en 2002. On comprend que ce soit mal vécu. Mais un découragement au niveau des demandes aurait un effet négatif sur le pourcentage du nombre de PEDR dans l'ensemble de la communauté mathématique.

Les tableaux 2 et 3 décrivent l'évolution du nombre de candidatures et de bénéficiaires entre 2003 et 2006, par statut et par civilité. On peut remarquer qu'il n'y a plus d'augmentation du nombre de candidatures une année sur quatre, l'année où les premiers bénéficiaires candidatent à nouveau, comme c'était le cas auparavant.

	Total	MCF	PR2	PR1/0
Candidatures 2003	502	259	127	116
Bénéficiaires 2003	254 (50 %)	103 (40 %)	63 (50 %)	88 (76 %)
Candidatures 2004	541	310	129	102
Bénéficiaires 2004	261 (48 %)	127 (41 %)	69 (53 %)	65 (64 %)
Candidatures 2005	566	288	124	154
Bénéficiaires 2005	274 (48 %)	121 (42 %)	58 (46 %)	95 (62 %)
Candidatures 2006	556	283	126	147
Bénéficiaires 2006 avant recours	259 (47 %)	129 (46 %)	58 (47 %)	72 (49 %)

TAB. 2. Résultats des campagnes PEDR 2003–2006 en mathématiques par statut.

En cas de non-obtention de la PEDR, il est possible de déposer un recours. Le nombre de PEDR obtenues par recours est à nouveau proportionnel au nombre de recours déposés dans chaque département. Si on estime mériter légitimement la PEDR, il ne faut donc pas hésiter à déposer un recours.

L'enveloppe financière globale consacrée à la PEDR vient d'être légèrement augmentée, après des années de stagnation. Il n'est pas sûr, toutefois, que la situation s'améliore. En effet, les praticiens hospitaliers (PUPH et MCUPH) sont éligibles depuis cette année à la PEDR. Le nombre de bénéficiaires potentiels a donc encore

crû de ce fait, qui s'ajoute aux augmentations des effectifs d'enseignants-chercheurs et au rajeunissement de la population. D'autre part, les primes ont récemment été légèrement réévaluées⁴.

	Total	Femmes	Hommes
Candidatures 2003	502	77	425
Bénéficiaires 2003	254 (50 %)	32 (42 %)	222 (52 %)
Candidatures 2004	541	88	453
Bénéficiaires 2004	261 (48 %)	33 (38 %)	228 (50 %)
Candidatures 2005	566	86	480
Bénéficiaires 2005	274 (48 %)	38 (44 %)	236 (49 %)
Candidatures 2006	556	80	477
Bénéficiaires 2006 avant recours	259 (47 %)	33 (41 %)	227 (48 %)

TAB. 3. Résultats des campagnes PEDR 2003–2006 en mathématiques par civilité.

Entre 2003 et 2006, le groupe d'experts a siégé pendant un jour et demi à deux jours. Chaque expert a reçu plus de cinquante dossiers. Chaque dossier a été examiné par deux rapporteurs. L'un d'eux était l'« expert thématique », choisi en fonction du domaine de recherche concerné. Une toute petite minorité de dossiers ont été envoyés à des experts ne participant pas à la réunion (histoire des mathématiques, didactique...). L'autre était l'« expert géographique », rapportant sur l'ensemble des dossiers d'un même établissement.

La barre n'étant pas connue au moment de la réunion, le groupe d'experts a été amené à interclasser de 40 % (hypothèse basse) à 55 % (hypothèse haute). Des préclassements ont été faits dans chaque catégorie (MCF, PR2⁵, PR1/0)⁶. Puis le groupe a procédé à un interclassement suivant une règle automatique.

Les critères d'attribution suivis ont été essentiellement les mêmes que ceux de la période précédente, auxquels les experts se sont référés, en lisant les critères donnés dans la *Gazette* et *Matapli* par nos prédécesseurs⁷. On peut signaler les points suivants : pour les jeunes MCF, la vérification que leurs travaux ne se situent pas directement dans le prolongement de leur thèse ; la prise en compte des publications faites par les étudiants et leur devenir dans l'évaluation de l'activité d'encadrement ; le fait que la PEDR n'a pas été considérée comme un signe de reconnaissance pour l'ensemble d'une carrière mais comme un contrat portant sur les quatre prochaines années, au vu de l'activité des quatre précédentes. Il est donc recommandé de faire figurer dans le CV détaillé requis par le dossier un programme scientifique pour les quatre années suivantes.

⁴ MCF : 3454 €, PR2 : 4990 €, PR1/0 : 6525 €.

⁵ Ceci à compter de 2005, la proportion de PR2 bénéficiaires de la PEDR étant inférieure à celle des autres catégories, en particulier parmi les jeunes PR2, si les mêmes critères que ceux des PR1 et PRCE leur étaient appliqués.

⁶ Les différences entre les montants des primes justifient d'avoir des critères d'attribution modulés suivant les grades. La MSTP est d'ailleurs encouragée dans son ensemble à procéder ainsi.

⁷ On peut également consulter les critères donnés sur le site de la MSTP, valables toutes disciplines confondues.

Un point sensible concerne le « renouvellement » de la PEDR, le non-renouvellement étant toujours mal vécu. Il n'y a malheureusement pas de bonne solution. En 2006 par exemple, le nombre de postulants parmi les sortants 2006 ou 2005 était supérieur au nombre de primes accordées (avec un contingent important de PR1/0). Le pourcentage de sortants 2006 qui se sont vus attribuer la PEDR en 2006 est de 64 %. En 2006 encore, pour les sortants 2005, celui-ci est de 42 %. Ce dernier chiffre montre qu'il ne faut pas hésiter à candidater à nouveau. Ces dernières années, le fait qu'il s'agissait d'un renouvellement ou non n'entraîne pas dans les critères d'attribution proprement dits, et le groupe d'experts considérait à égalité toutes les candidatures. Cette manière de fonctionner peut paraître dure aux sortants de l'année, mais elle garantit aussi qu'aucune porte ne leur est fermée en cas de non obtention.

En résumé, en quatre ans nous avons vu un durcissement du concours, lié à la diminution du pourcentage de PEDR attribuées et au nombre croissant de dossiers de qualité. Nos prédécesseurs ont été entendus lorsqu'ils ont conseillé aux mathématiciens de ne pas se censurer dans leurs candidatures. Malgré ce durcissement, nous souhaitons adresser le même message.

Les PAI

Ces programmes d'actions intégrées ont reçu depuis cette année la dénomination de Partenariats Hubert Curien. Il s'agit de programmes de coopération bilatérale entre une équipe française et une équipe du pays partenaire. Ils sont gérés, pour le ministère des Affaires étrangères, par l'opérateur Égide. Les appels d'offres se trouvent sur leur site⁸.

Avertissement : seuls figurent dans les listes jointes les programmes pour l'expertise desquels la MSTP a été sollicitée. Ne figurent donc pas ici, entre autres, les PICS du CNRS ou les programmes ECOS.

On trouvera le détail des résultats toutes disciplines confondues d'une part, pour les mathématiques d'autre part, dans les tableaux mis en annexe. Il faut rappeler que, pour les PAI aussi, le nombre de demandes satisfaites dans chaque champ disciplinaire dépend du nombre total de demandes. Il ne faut donc pas non plus se censurer dans ces demandes, même si les mathématiques ont été relativement bien traitées dans un passé proche. En effet, les mathématiques représentent environ 4 % des dossiers internationaux examinés par la MSTP ces dernières années. En 2006, 35 % des demandes déposées ont été satisfaites, contre 28 % toutes disciplines confondues.

Les décisions sont prises dans des réunions bilatérales avec les pays concernés, qui font également appel à des experts. Ces réunions sont organisées par les services de coopération scientifique des ministères des affaires étrangères. Divers critères peuvent entrer en jeu. Signalons toutefois le fait qu'il est très généralement demandé que le programme participe à la formation de jeunes chercheurs (niveau doctorat).

⁸ <http://www.egide.asso.fr/>.

Autres appels d'offres, colloques

D'autres appels d'offres sont disponibles sur le site du ministère délégué à l'Enseignement Supérieur et à la Recherche, ou du ministère des affaires étrangères. Signalons en particulier Initiative Post-doc⁹, les cotutelles de thèses, les bourses Eiffel, les bourses Lavoisier¹⁰, les post-doctorants du ministère. Certains de ces appels d'offres seront maintenant contractualisés au sein des établissements. D'autres sont maintenant à l'ANR, comme les chaires d'excellence. Au cours de nos quatre années passées à la MSTP, nous avons été témoins du fait que le nombre de demandes déposées par les mathématiciens (hors PEDR) était souvent largement inférieur au poids des mathématiques dans la communauté scientifique. Or les résultats sont toujours fonction du nombre de demandes.

Il est aussi possible de demander au ministère une subvention pour colloque¹¹. Les demandes sont examinées toutes disciplines confondues depuis 2003, au vu du dossier et d'une expertise de la MSTP. Il est important que le dossier comporte une justification scientifique, un programme, et un budget.

Pour pouvoir être retenues, les demandes de subvention de colloques devaient, entre 2003 et 2006, répondre à certains critères : le ministère favorisait les manifestations d'amplitude nationale ou internationale, fortement dédiées à la recherche, et non à la formation. En suivant ces critères, le ministère délégué à la recherche a ainsi soutenu financièrement 22 colloques en mathématiques en 2006 sur 27 demandes, ceci à hauteur de 53 k€. En 2005, il a soutenu 21 colloques sur 35 demandes, à hauteur de 47 k€. Il est difficile de comparer ce budget avec le budget réservé aux colloques par la MSU. En effet, chaque direction scientifique disposait alors d'une dotation pour actions spécifiques, utilisée pour les colloques. Toutefois, si on se limite aux dossiers comparables (la MSU ayant eu aussi la possibilité de financer des semestres thématiques par exemple), on voit dans les archives que 24 colloques avaient été financés en 2002, à hauteur de 49 k€.

Malheureusement les décisions de financement de colloques étaient prises tardivement entre 2003 et 2006, peu avant la tenue du colloque. Ce retard est en train de diminuer.

Signalons que le ministre, sensible aux problèmes de parité, demande aux organisateurs de colloques que la composition des comités scientifiques et la liste des intervenants soit le reflet de la proportion hommes/femmes de la communauté scientifique concernée¹².

Quelques statistiques sur les PAI en 2005 et 2006

Dans les tableaux 4 à 8, les années spécifiées sont les années n de financement éventuel pour une candidature à l'année n ou $n - 1$ suivant les programmes. Les statistiques pour les projets financés en 2006 sont incomplètes, car elles ne prennent

⁹ <http://www.recherche.gouv.fr/appe/2007/proginipostdoc.htm>.

¹⁰ Consulter *Étudier à l'Étranger* sur le site du ministère des Affaires étrangères <http://www.diplomatie.gouv.fr/>.

¹¹ Pour le remboursement des participants à un colloque venus d'Europe centrale et orientale, on peut faire appel au programme ACCES. <http://www.education.gouv.fr/cid1020/appe-d-offres-du-programme-acces.html>.

¹² Information communiquée par Mireille Martin-Deschamps, Chargée de mission *Mathématiques et modélisation*, à la Direction générale de la recherche et de l'innovation.

pas en compte certains programmes qui n'avaient pas encore traités au moment où nous avons récupéré les chiffres.

Pour l'Europe¹³, nous donnons les résultats pour 2005 et 2006. Nous n'avons pas les résultats sur les programmes Jules Verne (Islande), Pavle Savic (Serbie) et Pelikan (Monténégro). Les programmes figurant dans les tableaux suivants peuvent être bisannuels (à l'instar des trois cités ci-dessus), c'est pourquoi il n'y a des données que pour une seule des deux années.

En moyenne, le responsable côté français d'un PAI européen a reçu en 2005 une enveloppe d'environ 2300 € par an.

Pays	Prog.	Année	Disc.	Candidats	Bénéficiaires	Succès
Tous	Tous	2005	Ttes	1548	548	35 %
			Math.	72	33	46 %
Tous	Tous	2006	Ttes	1352	457	34 %
			Math.	49	17	35 %
Allemagne	Procope	2005	Ttes	140	58	41 %
			Math.	11	4	36 %
Allemagne	Procope	2006	Ttes	133	46	35 %
			Math.	5	3	60 %
Autriche	Amadeus	2005	Ttes	35	19	54 %
			Math.	1	1	100 %
Autriche	Amadeus	2006	Ttes	35	16	46 %
			Math.	2	1	50 %
Belgique	Tournesol FL	2005	Ttes	26	11	42 %
			Math.	2	1	50 %
Belgique	Tournesol FL	2006	Ttes	32	19	59 %
			Math.	0	X	X
Belgique	Tournesol FR	2005	Ttes	81	22	27 %
			Math.	1	1	100 %
Belgique	Tournesol FR	2006	Ttes	61	15	25 %
			Math.	5	1	20 %
Bulgarie	Rila	2005	Ttes	48	16	33 %
			Math.	2	1	50 %
Bulgarie	Rila	2006	-	-	-	-
Chypre	Zénon	2005	Ttes	11	6	55 %
			Math.	1	1	100 %
Chypre	Zénon	2006	Ttes	9	5	56 %
			Math.	2	2	100 %
Croatie	Cogito	2005	Ttes	29	10	34 %
			Math.	1	1	100 %
Croatie	Cogito	2006	-	-	-	-
Espagne	Picasso	2005	Ttes	273	55	20 %
			Math.	12	2	17 %
Espagne	Picasso	2006	Ttes	254	52	20 %
			Math.	10	3	30 %

TAB. 4. Statistiques des PAI Europe en 2005 et 2006 (1/3).

¹³ Voir aussi la note 11.

Pays	Prog.	Année	Disc.	Candidats	Bénéficiaires	Succès
Estonie	Parrot	2005	Ttes	13	8	62 %
			Math.	0	X	X
Estonie	Parrot	2006	-	-	-	-
Grande-Bretagne	Alliance	2005	Ttes	93	39	42 %
			Math.	4	3	75 %
Grande-Bretagne	Alliance	2006	Ttes	114	35	31 %
			Math.	3	2	67 %
Grèce	Platon	2005	Ttes	36	16	44 %
			Math.	1	1	100 %
Grèce	Platon	2006	Ttes	55	19	35 %
			Math.	0	X	X
Hongrie	Balaton	2005	Ttes	42	22	52 %
			Math.	3	2	67 %
Hongrie	Balaton	2006	Ttes	46	23	50 %
			Math.	1	1	100 %
Irlande	Ulysses	2005	Ttes	50	17	34 %
			Math.	4	2	50 %
Irlande	Ulysses	2006	Ttes	35	20	57 %
			Math.	1	0	0 %
Italie	Galilée	2005	Ttes	151	32	21 %
			Math.	9	2	22 %
Italie	Galilée	2006	Ttes	176	32	18 %
			Math.	6	0	0 %
Lettonie	Osmose	2005	-	-	-	-
Lettonie	Osmose	2006	Ttes	7	4	57 %
			Math.	0	X	X
Lituanie	Gilibert	2005	Ttes	16	10	62 %
			Math.	1	1	100 %
Lituanie	Gilibert	2006	-	-	-	-
Macédoine	Integrafm	2005	-	-	-	-
Macédoine	Integrafm	2006	Ttes	6	3	50 %
			Math.	0	X	X
Norvège	Aurora	2005	Ttes	27	10	37 %
			Math.	1	0	0 %
Norvège	Aurora	2006	Ttes	36	13	17 %
			Math.	4	1	25 %
Pays-Bas	Van Gogh	2005	Ttes	26	11	42 %
			Math.	1	1	100 %
Pays-Bas	Van Gogh	2006	Ttes	24	12	50 %
			Math.	1	0	0 %
Pologne	Polonium	2005	Ttes	81	47	58 %
			Math.	3	2	67 %
Pologne	Polonium	2006	Ttes	75	37	49 %
			Math.	2	1	50 %

TAB. 5. Statistiques des PAI Europe en 2005 et 2006 (2/3).

Pays	Prog.	Année	Disc.	Candidats	Bénéficiaires	Succès
Portugal	Pessoa	2005	Ttes	54	29	54 %
			Math.	1	1	100 %
Portugal	Pessoa	2006	Ttes	62	24	39 %
			Math.	1	1	100 %
Rép. Tchèque	Barrande	2005	Ttes	65	26	40 %
			Math.	1	0	0 %
Rép. Tchèque	Barrande	2006	Ttes	63	26	41 %
			Math.	4	1	25 %
Roumanie	Brancusi	2005	Ttes	104	30	29 %
			Math.	4	2	50 %
Roumanie	Brancusi	2006	-	-	-	-
Slovaquie	Stefanik	2005	-	-	-	-
Slovaquie	Stefanik	2006	Ttes	22	12	55 %
			Math.	0	X	X
Slovénie	Proteus	2005	Ttes	26	17	65 %
			Math.	2	2	100 %
Slovénie	Proteus	2006	Ttes	29	15	52 %
			Math.	0	X	X
Suisse	de Staël	2005	Ttes	47	17	41 %
			Math.	1	1	100 %
Suisse	de Staël	2006	Ttes	51	13	25 %
			Math.	2	0	0 %
Turquie	Bosphore	2005	-	-	-	-
Turquie	Bosphore	2006	Ttes	27	16	59 %
			Math.	0	X	X
Ukraine	Dnipro	2005	Ttes	74	20	27 %
			Math.	5	1	20 %
Ukraine	Dnipro	2006	-	-	-	-

TAB. 6. Statistiques des PAI Europe en 2005 et 2006 (3/3).

Pour les autres pays nous donnons seulement les résultats 2006.

Pays	Prog.	Disc.	Candidats	Bénéficiaires	Succès
Tous	Tous	Ttes	417	99	24 %
		Math.	24	5	22 %
Afrique du Sud	Protéa	Ttes	24	11	46 %
		Math.	0	X	X
Algérie	Tassili	Ttes	135	26	19 %
		Math.	11	2	18 %
Egypte	Imhotep	Ttes	24	11	46 %
		Math.	0	X	X
Maroc	Volubilis	Ttes	97	21	22 %
		Math.	3	1	33 %
Tunisie	Utique	Ttes	137	30	22 %
		Math.	10	2	20 %

TAB. 7. Statistiques des PAI Afrique en 2006.

Pays	Prog.	Disc.	Candidats	Bénéficiaires	Succès
Tous	Tous	Ttes	524	101	19 %
		Math.	15	4	27 %
Australie	Fast	Ttes	160	12	7 %
		Math.	2	1	50 %
Chine	PRA	Ttes	170	32	19 %
		Math.	2	1	50 %
Corée du sud	Star	Ttes	55	10	18 %
		Math.	2	1	50 %
Hong Kong	Procore	Ttes	31	13	42 %
		Math.	3	0	0 %
Japon	Sakura	Ttes	108	16	15 %
		Math.	6	1	17 %

TAB. 8. Statistiques des PAI Asie-Océanie en 2006.



Astérisque 307
Séminaire Bourbaki
Volume 2004/2005
Exposés 938-951

Comme les précédents volumes de ce séminaire, celui-ci contient quatorze exposés de synthèse sur des sujets d'actualité : trois exposés de géométrie algébrique, deux de géométrie différentielle, un autour de la conjecture de Poincaré, un sur les systèmes dynamiques, un de théorie des nombres, un sur le lemme fondamental, un au sujet de la conjecture d'André-Oort, un concernant les formes quadratiques, un de topologie algébrique, un de physique mathématique et un de probabilité.

As in the preceding volumes of this seminar, one finds here fourteen survey lectures on topics of current interest: three on algebraic geometry, two on differential geometry, one about the Poincaré conjecture, one on dynamic systems, one on number theory, one on the fundamental lemma, one about the André-Oort conjecture, one about quadratic forms, one on algebraic topology, one on mathematical physics, and one on probabilities.

Prix public* : 86 € - prix membre* : 60 €

* frais de port non compris



Institut Henri Poincaré
 11 rue Pierre et Marie Curie
 F - 75231 PARIS CEDEX 05

<http://smf.emath.fr>

CARNET

Raymond Couty

(27 août 1919 - 5 mai 2005)

André Revuz

Je suis heureux de pouvoir apporter un ultime et fraternel hommage à mon ami et ancien collègue Raymond Couty, dont la carrière a été exemplaire.

Il est né le 27 Août 1919 à La Barre, commune de Veyrac (Haute-Vienne). Ses ascendants étaient des paysans limousins, son père ayant dû toutefois à cause de l'exiguïté de la propriété familiale la laisser à son frère aîné et s'enrôler dans les « Hussards de la République ». Sa mère, également institutrice, était la fille d'un charron qui ne disposait que d'un petit lopin de terre. C'est ainsi que d'une lignée de paysans limousins naquit une lignée d'enseignants limousins.



© Archives privées de la famille Couty

Raymond Couty fit ses études secondaires au lycée Gay-Lussac de Limoges, puis dans une classe préparatoire au lycée de Poitiers. Mais en 39-40, la France connut un certain nombre de « perturbations ». Parmi elles, la création de la fameuse ligne de démarcation qui séparait la zone occupée de la zone dite libre, et qui mit Poitiers et Limoges dans deux mondes ne communiquant pas facilement. Couty dut donc en 40 poursuivre ses études à l'Université de Clermont, où une autre perturbation avait eu, elle, des conséquences heureuses : l'université de Strasbourg avait été dès le début de la guerre repliée sur celle de Clermont dont elle avait quadruplé le potentiel. Avec ses condisciples Georges Reeb, l'alsacien, et Charles Pérol l'auvergnat ils eurent la chance d'être en contact avec Ehresmann, Dieudonné, Lichnérowicz, Schwartz, jeunes et très brillants mathématiciens et de deux moins jeunes, de Possel et Chabauty, qui lui firent connaître ce qu'il appela lui-même la « mathématique vivante », et eurent une influence décisive sur sa carrière.

Mais après l'invasion de la zone Sud, les allemands qui appréciaient peu qu'une Université française se dise de Strasbourg, effectuèrent plusieurs rafles, une en Juin 43 et une en Novembre 43 au cours de laquelle Couty fut arrêté. Il fut interné jusqu'au 3 Janvier 44, sans comprendre pourquoi il avait été arrêté, ni pourquoi il avait été libéré. Il passa la fin de la guerre caché à La Barre.

En 45, Strasbourg revint à Strasbourg et plusieurs étudiants de Clermont partirent en Alsace. Raymond Couty et sa femme, Marguerite, tous deux licenciés

allèrent enseigner à Barr, en allant toutes les semaines à Strasbourg préparer l'Agrégation qu'ils obtinrent. Après quoi ils retournèrent dans leur Limousin natal.

De 1950 à 1954, Couty enseigne au lycée Gay-Lussac de Limoges. En 1954, il est recruté comme assistant à la Faculté des Sciences de Poitiers, il est Chef de travaux en 1955.

En 1958, constatant que le territoire de l'Académie de Poitiers était trop grand pour n'avoir qu'une seule université, le Ministère crée deux C.S.U, un à Tours, l'autre à Limoges, avec du personnel de la Faculté de Poitiers. Pour Limoges, le choix de Couty s'impose évidemment. Et il y part avec le titre de Maître de Conférences délégué.

En 1960, il soutient la thèse « Sur les transformations des variétés riemaniennes et kähleriennes » qu'il avait élaborée sous la direction de Lichnérowicz qui m'a dit plusieurs fois combien il était sensible à la qualité du travail de Couty, à son sérieux et à sa modestie. La soutenance, à laquelle j'ai assisté en a bien montré la solidité. La deuxième thèse proposée par Ehresmann (Couty a retrouvé dans son jury deux de ses chers professeurs de Clermont) « Sur les structures feuilletées analytiques » a donné lieu à un remarquable exposé, plus approfondi que ce n'est souvent le cas pour une deuxième thèse.

Il est alors nommé Maître de Conférences titulaire en 1960, et professeur en 1962. Entre temps le C.S.U est devenu Faculté. On peut considérer Couty comme un de ses pères fondateurs : il en sera Doyen en 1971. Il dirigea pendant plus de 20 ans le département de mathématiques. Couty n'était nullement autoritaire, mais son autorité n'a jamais été contestée, car c'était toujours l'intérêt général qu'il défendait. Il n'a jamais été de ceux pour qui l'enseignement est une corvée, et il s'est toujours impliqué dans les efforts d'innovation pédagogique. Il a été le directeur de l'IPES, le fondateur et premier directeur du CPR et de l'IREM. La bibliothèque du département de mathématiques n'a cessé d'être l'objet de ses soins. Ses qualités ont été officiellement reconnues : ordre du mérite en 1972, commandeur des palmes académiques en 1978, Légion d'honneur en 1982. Mais plus que ces hochets, je crois que le plaisir qu'il prenait à remplir consciencieusement toutes ses fonctions a été sa plus belle récompense. Il a accepté d'écrire en collaboration avec un collègue de Poitiers, Jacques Ezra, un traité d'Analyse pour MGP et les classes de Spéciales dans la collection que je dirigeais aux éditions Armand Colin . Ce fut un gros travail qu'il fit avec son sérieux habituel , et le Couty-Ezra connut un incontestable succès.

Sa fille, Danielle Couty, Maître de Conférences à l'IUT de Tarbes (la lignée se poursuit !) m'a rapporté un jugement de Jean-Louis Nicolas qui fut collègue de Couty à Limoges et qui me fournit la meilleure des conclusions : « *Je pense réellement que les mathématiques universitaires manquent cruellement de "hus-sards noirs" comme le fut votre père.* »

COURRIER DES LECTEURS

Recrutement et année de qualification : une précision

Je viens de recevoir la *Gazette* de janvier. Je vous transmets une réaction sur un détail, dans l'article de L. Busé sur les recrutements 2006.

Page 73 en haut, un tableau indique l'année de qualification des candidats recrutés. Certaines qualifications sont des requalifications. C'est mon cas. J'ai été recruté MCF (25) en juin 2006. J'avais obtenu une première qualification en 2001, puis son renouvellement après son

expiration, en 2005. Je sais ne pas être le seul recruté dans ce cas.

Chez les recrutés, la proportion de requalifications parmi les qualifications est sans doute difficile à connaître. Peut-être peut-on cependant rappeler que le phénomène existe.

Charles Boubel
IUT R. Schuman, Strasbourg

À propos de l'article d'Antoine Ducros

L'idée de considérer l'ensemble $M_{ult}(A, \|\cdot\|)$ des semi-normes multiplicatives continues d'une algèbre normée ultramétrique, muni de la topologie de la convergence simple (pour laquelle cet ensemble est compact), est due, comme on le sait, à Bernard Guennebaud dont la thèse d'Etat (intitulée *Sur une notion de spectre en analyse ultramétrique*) soutenue à Poitiers en 1973 est consacrée à ce sujet. La caractérisation des semi-normes multiplicatives sur l'anneau des polynômes sur un corps K valué ultramétrique complet et algébriquement clos a été faite par Guennebaud sous une

certaine forme, en considérant des suites décroissantes de disques, puis par Garandel et moi par l'introduction des filtres circulaires [8], [15], [12], [13] qui sont les filtres les moins fins suivant lesquels la valeur absolue de tout polynôme (et de toute fonction méromorphe) admet une limite. Cet ensemble de filtres a une structure arborescente remarquable qui a attiré l'attention de beaucoup d'entre nous [1], [2], [3], [12], [13], [17], [18], et possède 2 topologies non équivalentes : c'est cet ensemble qui est aujourd'hui appelé Droite de Berkovich. Certaines propriétés remarquables des algèbres

de Banach ultramétriques sont obtenues à l'aide d'un calcul fonctionnel holomorphe [10], [13] défini, pour faire simple, sur des éléments analytiques au sens de Krasner [16]. Les propriétés de ce calcul fonctionnel holomorphe sont dues au fait que si on considère un trou dans le spectre « naïf » d'un élément x de notre algèbre, alors $\|(x - a)^{-1}\|$ est constant dans un disque « ouvert » de centre a et de rayon $(\|(x - a)^{-1}\|)^{-1}$ [11], [13].

On peut citer plusieurs applications : si une K -algèbre de Banach est complète pour sa norme spectrale, ou bien si K est fortement valué (c'est-à-dire si le groupe des valeurs ou bien le corps résiduel n'est pas dénombrable) alors cette norme (ou semi-norme spectrale dans la seconde hypothèse) est l'enveloppe supérieure des semi-normes multiplicatives continues dont le noyau est un idéal maximal [11], [13]. De plus, si K est fortement valué, un idéal maximal est le noyau d'une seule semi-norme multiplicative continue et le radical de Jacobson est le noyau de la semi-norme spectrale. Des contre-exemples existent si le corps n'est pas fortement valué [9], [10], [13]. (Le problème de la couronne vient de trouver quelques éléments nouveaux grâce à ces résultats antérieurs).

Concernant la Théorie de Nevanlinna p -adique (mentionnée par Antoine Ducros page 23), il est bien connu qu'elle est due à Abdelbaki Boutabaa en 1988 dans sa version initiale appliquée aux fonctions méromorphes dans le corps K de caractéristique nulle [4], [5]. Lui et moi l'avons étendue aux fonctions méromorphes dans un disque ouvert [6] (en tenant compte du problème des diviseurs d'une fonction analytique résolu par Lazard [17], dans un corps non sphériquement complet), puis nous l'avons généralisée en caractéristique $p \neq 0$ [7]. La Théorie de

Berkovich et la Théorie de Nevanlinna p -adique sont disjointes mais peuvent avoir quelques applications analogues. Toutefois, dans $\mathbb{C}$ aussi bien que dans un corps K de caractéristique nulle, c'est principalement la Théorie de Nevanlinna qui a permis d'obtenir une floraison de résultats d'unicité (avec ou sans multiplicité) et plus généralement a eu pour conséquence l'essor que l'on connaît en distribution des valeurs.

[1] Boussaf, K., Hemdahoui, M., and Mainetti, N. - Tree structure on the set of multiplicative semi-norms of Krasner algebras $H(D)$. *Revista Matematica Complutense*, vol. XIII, N. 1, pp. 85-109 (2000).

[2] Boussaf, K. - Image of circular filters, *International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra*, Volume 10, N. 5, p. 365-372.

[3] Boussaf, K., Escassut, A. and Mainetti, N. - Mappings in the tree $Mult(K[x])$. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin* 9 (2002) suppl. 11-23..

[4] Boutabaa, A. - Théorie de Nevanlinna p -adique. *Manuscripta Mathematica* 67, p. 251-269, (1990).

[5] Boutabaa, A. - Applications de la théorie de Nevanlinna p -adique, *Collectanea Mathematica* 42, 1 p. 75-93, (1991).

[6] Boutabaa, A. and Escassut, A. - Urs and Ursim for P -adic Meromorphic Functions inside a p -adic disk *Proceeding of the Edinburgh Mathematical Society*, 44, 485-504 (2001).

[7] Boutabaa, A. and Escassut, A. - *Nevanlinna Theory in positive characteristic and applications* Analysis and Applications, p. 97-107, Kluwer Academic Publishers 2003.

[8] Escassut A. - *Éléments analytiques et filtres percés sur un ensemble infraconnexe*, *Ann. Mat. Pura Appl.* t. 110, p. 335-352 (1976).

[9] Escassut, A. - Spectre maximal d'une algèbre de Krasner, *Colloquium Mathematicum*, XXXVIII, fasc. 2, p. 339-357, (1978).

[10] Escassut, A. - The ultrametric spectral theory, *Periodica Mathematica Hungarica*, Vol. 11, (1), p. 7-60, (1980).

[11] Escassut, A. and Mainetti, N. - Spectral semi-norm of a p -adic Banach algebra, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin*, vol. 8, p. 79-61, (1998).

[12] Escassut, A. - *Analytic Elements in p -adic Analysis*, *World Scientific Publishing Inc.*, Singapore (1995).

[13] Escassut, A. - Ultrametric Banach Algebras WSCP 2003.

[14] Garandel, G. - Les semi-normes multiplicatives sur les algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner, *Indag. Math.*, 37, n 4, p. 327-341, (1975).

[15] Gunnebaud, B. - Sur une notion de spectre pour les algèbres normées ultramétriques, thèse Université de Poitiers, (1973).

[16] Krasner, M. - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets. Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres, Clermont-Ferrand, p. 94-141 (1964). Centre National de

la Recherche Scientifique (1966), (Colloques internationaux de CNRS Paris, n. 143).

[17] Lazard, M. - Les zéros des fonctions analytiques sur un corps valué complet, IHÉS, *Publications Mathématiques* n14, p. 47-75 (1962).

[18] Mainetti, N. - Metrizability of some analytic affine spaces *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, Marcel Dekker, (2001).

[19] Rivera-Letelier, J. - Uniform structures and Berkovich space, preprint.

Alain Escassut
Université Blaise Pascal,
Clermont-Ferrand

Un simple hommage

Comme les cristaux, Gustave Choquet avait de nombreuses facettes. Mis à part ses proches, sans doute, ceux qui l'ont connu n'ont pu en admirer qu'une ou deux, la plupart du temps, et en deviner les autres, parfois.

L'un des esprits les plus fins et aguissés qu'il m'ait jamais été donné de rencontrer ; capable, tout aussi bien, de trancher les nœuds que de les délier. Une grande bienveillance teintée d'ironie, celle des grands maîtres. Dans l'immensité du champ mathématique, il a su dégager quelques belles gemmes, rares, pour son plaisir, et pour celui des autres. Son langage avait la clarté de l'eau de source, son style la limpidité. A l'instar des poètes, et de son grand inspirateur, Arnaud Denjoy, il usait d'images fortes pour se bien faire comprendre :

« Le théorème du voyageur spatial ». Le contraste entre « le monde minéral » de l'Algèbre et l'Analyse « peuplée d'êtres aux contours parfois imprécis,

algues marines, hydres ou éponges ». Deux de ses plus belles métaphores.

Il avait l'art d'aller droit à l'essentiel en expliquant les choses les plus compliquées simplement. A l'écouter, ou le lire, on comprenait si bien que l'on se croyait intelligent.

Bien que l'expression ne fut pas de lui, il aimait, en tout, se tenir à « la bonne distance », ni trop près, ni très loin. L'examen d'un exemple particulier bien choisi le conduisait, naturellement, à la véritable généralisation, celle qui permet d'embrasser tout l'horizon des cas singuliers. Il se méfiait du pas de plus, du pas de trop, qui ferait plonger dans l'océan sans fond de l'extension outrancière qui, pour signifier le tout, ne signifie plus grand chose.

Avec ceux des autres, il a souvent fabriqué ses propres outils, comme l'ébéniste, et les avait ainsi « à sa main ». Plutôt que d'aller en bibliothèque, les rechercher, il préférait ses propres démonstrations, de résultats

connus, à celles que l'on trouve dans les journaux savants et les manuels. Il lui est arrivé l'aventure suivante. En voyage, un peu désœuvré, il s'est mis en devoir, un jour, d'explorer de nouveau l'univers des continus du plan qui le fascinait. Les résultats lui venaient, aisément, l'un après l'autre; jusqu'au moment où il s'aperçut qu'il avait déjà, il y a bien longtemps, parcouru ce même chemin et en avait recueilli les fleurs et les fruits, sur les branches.

La foi, comme les roches, subit le métamorphisme de l'âge. Celle des débuts n'est pas toujours celle de la fin. Sa croyance, ses convictions finales, il les

a exprimées, avec beaucoup de sérénité, dans ses derniers écrits connus.

« Il faut parfois déboulonner les statues trop imposantes, y compris notre statue intérieure. On peut s'aider, un temps, des épaules des plus grands, mais il faut être soi-même dès qu'on se sent assez fort...C'est dire qu'il n'y a pas de vérité; c'est sa recherche qui importe. L'architecte et le maçon sont plus précieux que le monument qu'ils ont édifié! »

Où que vous soyez, à présent, Monsieur Choquet : au revoir.

Labib Haddad

LIVRES

Introduction à l'étude des espaces de Banach

D. LI ET H. QUEFFÉLEC

Société Mathématique de France, Cours spécialisés 2004. 627 p.

ISBN : 2-85629-155-4. 72 €

Le livre écrit par Daniel Li et Hervé Queffélec est un ouvrage bien plus ambitieux qu'une simple introduction. En effet, le lecteur y trouvera une grande partie de l'évolution de l'étude des espaces de Banach des années 50 jusqu'au début des années 2000. Les prérequis à la lecture de cet ouvrage se limitent cependant à un bon cours d'analyse fonctionnelle de M1 complété par une certaine culture générale en analyse harmonique qui permettra de mieux appréhender les questions étudiées.

Ainsi, ce livre s'adresse aussi bien à des étudiants de troisième cycle qu'à des chercheurs confirmés. Les auteurs insistent tout au long de cet ouvrage sur les interactions entre l'analyse classique et l'étude des espaces de Banach et présentent en détail l'application aux ensembles minces en analyse harmonique. Un autre objectif consiste à présenter la très forte influence de l'utilisation de méthodes probabilistes variées dans l'étude des espaces de Banach, aussi bien dans les résultats de structure que dans la théorie locale des espaces de Banach (c'est à dire l'étude des sous-espaces de dimension finie).

De par la grande variété des thèmes abordés, il s'agit d'un livre d'érudit indispensable à toute bibliothèque d'analyste ou de probabiliste. Je vais essayer de motiver sa lecture en présentant quelques fils conducteurs de cet ouvrage. Dès l'apparition des espaces de Banach (dans le livre de Banach lui-même en 1932), la question de l'existence d'une base (dite de Schauder) dans un espace de Banach séparable est posée. Evidemment, il ne s'agit pas seulement d'une base au sens algébrique du terme mais on dit que $(e_n)_{n \geq 1}$ est une *base* de l'espace de Banach X lorsque pour tout élément x de X , il existe une unique suite de scalaires $(a_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n.$$

Cette égalité veut dire que la convergence de la série a lieu au sens de la norme et c'est ici qu'apparaît l'aspect analytique de la question. L'existence de bases apporte des techniques pour étudier la structure des espaces de Banach. Les chapitres 1, 2 et 9 exposent des résultats essentiels sur ce sujet. Il était bien connu que tout espace de Banach contient un sous-espace possédant une base. Cependant, la question de l'existence d'une base dans un espace séparable est restée ouverte très longtemps. Elle a été résolue par la négative par Enflo (1972) puis par Davie (1973).

En fait, cette question est liée au problème de l'approximation, moins exigeant a priori, et présenté en détail au chapitre 9. On y trouvera alors la preuve du théorème de Davie disant que pour tout $p > 2$, ℓ_p contient un sous-espace fermé

sans la propriété d'approximation. Ce résultat est très surprenant puisqu'il prouve qu'il existe des espaces de Banach séparables avec de fortes propriétés de structure (uniformément convexes, uniformément lisses) qui n'ont pas la propriété d'approximation et en particulier pas de base ! Le chapitre 2 traite des séries inconditionnellement convergentes. Une série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ dans un espace de Banach est dite *inconditionnellement convergente* si pour toute permutation π des entiers la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{\pi(n)}$ converge. Pour expliquer un peu le point de départ, il est bon de rappeler qu'en dimension finie, la convergence inconditionnelle de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ équivaut à la convergence absolue, c'est à dire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty$. Ce n'est plus le cas en dimension infinie puisqu'en 1950, Dvoretzky et Rogers ont montré que pour toute suite $(\lambda_n)_{n \geq 1} \in \ell_2$, il existe une série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ inconditionnellement convergente dans X telle que pour tout $n \geq 1$, $\|x_n\| = |\lambda_n|$. Il est alors naturel de parler de *base inconditionnelle* lorsque $(e_n)_{n \geq 1}$ est une *base* de l'espace de Banach X et pour tout $x \in X$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} e_n^*(x)e_n$ converge inconditionnellement. L'intérêt des espaces ayant une base inconditionnelle est qu'ils vérifient de bons théorèmes de structure. Par exemple, un des théorèmes de James (1950) dit que lorsque l'espace de Banach X possède une base inconditionnelle alors il est réflexif si et seulement s'il ne contient ni c_0 ni ℓ_1 . On pouvait alors se demander si un espace de Banach X contenait un sous-espace avec une base inconditionnelle ou encore si tout espace de Banach contenait un sous-espace réflexif ou ℓ_1 ou c_0 . Ces deux questions ont été résolues négativement par Gowers et Maurey (1991) et par Gowers (1994). La preuve de ces résultats conclut le chapitre 2.

Un second fil conducteur de ce livre consiste à présenter la pertinence de l'introduction des méthodes probabilistes dans l'étude des espaces de Banach et en particulier le lien entre les propriétés des séries de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans un espace de Banach X et la géométrie de cet espace. Cette étude commence au chapitre 3. On y trouvera par exemple les inégalités de Kahane, généralisant au cadre vectoriel les inégalités de Khintchine (bien connues en analyse classique) et qui permettent de voir que lorsque $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ sont des variables aléatoires de Bernoulli et $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteurs de X , on a équivalence entre le fait que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega)x_n$ converge presque sûrement, la série converge dans L_p pour un $p \in]0, +\infty[$, la série converge dans L_p pour tout $p \in]0, +\infty[$. L'un des points d'orgue de ce thème est l'introduction au chapitre 4 de la notion de type et de cotype des espaces de Banach présentée sous sa forme la plus fructueuse par Maurey et Pisier en 1974. On dit que X est de *type* p (avec $1 \leq p \leq 2$) s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que

$$\left(\int \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right\|^2 d\omega \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}$$

pour tous $x_1, \dots, x_n \in X$, $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ étant une suite de Bernoulli. On dit que X est de *cotype* q (avec $2 \leq q \leq +\infty$) s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que

$$\left(\int \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right\|^2 d\omega \right)^{1/2} \geq \frac{1}{C} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q}.$$

Tout espace de Banach est de type 1 (par l'inégalité triangulaire) et de cotype $+\infty$ (à cause de la symétrie des variables de Bernoulli). Il est important d'observer que ces notions ne dépendent que des sous-espaces de dimension finie de X . Ce sont donc des notions *locales*. Il résulte des inégalités de Kahane que X est de type p si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de X telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^p < +\infty$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega) x_n$ converge presque sûrement. Grâce à l'identité du parallélogramme, il est clair que tout espace de Hilbert est à la fois de type 2 et de cotype 2. Un objectif essentiel du chapitre 4 est de démontrer une réciproque de cette observation. Il s'agit d'un théorème de Kwapien qui assure que si X est un espace de Banach de type 2 et de cotype 2 alors il est isomorphe à un espace de Hilbert. Ce résultat s'appuie sur des théorèmes de factorisation par un espace de Hilbert.

Signalons en marge de ce livre que la notion de cotype a été très récemment généralisée au cadre des espaces métriques par Mendel et Naor (« Metric cotype ») et que cela permet d'étendre ces théorèmes de factorisation à un cadre non-linéaire. De nombreux autres résultats sur les propriétés de type et de cotype sont présentés au chapitre 4. Ces notions apparaîtront régulièrement durant la lecture de cet ouvrage. Par exemple, au chapitre 11, les auteurs étudient les sous-espaces réflexifs de L_1 et montrent qu'ils ne contiennent pas les ℓ_1^n uniformément. Mais un théorème de Pisier établit un résultat de structure pour les espaces de Banach : les espaces de Banach ne contenant pas les ℓ_1^n uniformément sont exactement ceux possédant un type $p > 1$. Ainsi les sous-espaces réflexifs de L_1 possèdent un type non trivial !

Au chapitre 5, les auteurs s'intéressent à la théorie des opérateurs p -sommants, $T : X \rightarrow Y$ où X et Y sont des espaces de Banach, généralisation des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur un espace de Hilbert. En particulier, l'inégalité de Grothendieck se reformule en termes d'opérateurs p -sommants : tout opérateur $u : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ est 1-sommant. A la fin de ce chapitre, les auteurs définissent les *ensembles de Sidon*. Cette importante notion en analyse harmonique va leur permettre d'illustrer les résultats présentés dans cet ouvrage. Une façon d'exprimer que $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ est un *ensemble de Sidon* est de dire que la transformation de Fourier $\mathcal{F} : f \mapsto (\hat{f}(\gamma))_{\gamma \in \Lambda}$ réalise un isomorphisme entre $\mathcal{C}_\Lambda$, l'espace des fonctions continues à spectre dans Λ , et $\ell_1(\Lambda)$. Un résultat essentiel montré indépendamment par Pisier, et Kwapien et Pełczyński est que Λ est un ensemble de Sidon si et seulement si $\mathcal{C}_\Lambda$ est de cotype 2. En fait, Bourgain et Milman en 1985 ont montré qu'il suffisait que $\mathcal{C}_\Lambda$ soit de cotype fini comme ce sera démontré au chapitre 13.

Le chapitre 6 est consacré à une étude très détaillée de l'analyse classique des espaces L_p . On y verra en particulier que le système trigonométrique forme une base de $L_p(0, 1)$ pour $p > 1$ non inconditionnelle pour $p \neq 2$, tandis que le système de Haar forme une base inconditionnelle de $L_p(0, 1)$, le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz, ainsi qu'une autre preuve du théorème de Grothendieck. L'objet du chapitre 7 est d'étudier l'espace ℓ_1 . Son absence dans un espace de Banach X entraîne de bonnes propriétés de convergence faible pour les suites bornées. C'est l'occasion de découvrir des résultats dont la démonstration dans le cas réel ne s'étend pas de façon évidente au cas complexe et nécessite l'utilisation d'outils combinatoires (que l'on reverra au chapitre 10).

Les chapitres 8, 10 et 11 sont plus orientés vers l'étude de la théorie locale des espaces de Banach, c'est à dire l'étude des sous-espaces de dimension finie d'un espace de Banach X . C'est l'occasion d'insister à nouveau sur la pertinence de l'utilisation de méthodes probabilistes en analyse. Un théorème de structure des espaces de Banach est le théorème de Dvoretzky qui établit que pour tout espace de Banach X , pour tous $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$, il existe un sous-espace de X de dimension n proche à ε près de l'espace hilbertien ℓ_2^n . C'est en fait un résultat de nature locale puisque tout espace E de dimension N contient de grands sous-espaces F de dimension de l'ordre de $\log N$ qui sont presque hilbertiens. Les auteurs présentent deux preuves distinctes basées sur des méthodes probabilistes : la preuve originale de Milman (1971) reposant sur le *phénomène de concentration de la mesure* ainsi qu'une seconde preuve reposant sur des théorèmes de comparaison de vecteurs gaussiens dus à Slepian (1962) et Gordon (1985). Le chapitre 10 établit quelques résultats essentiels sur les processus gaussiens et se conclut par le théorème d'Elton-Pajor (1983) qui assure que si $x_1, \dots, x_N$ sont des vecteurs de la boule unité d'un espace de Banach X tels que

$$\int \left\| \sum_{i=1}^N \varepsilon_i(\omega) x_i \right\| d\omega \geq \delta N$$

alors on peut extraire de ces vecteurs une sous-suite équivalente à la base canonique de $\ell_1^{C(\delta)N}$ (où $C(\delta)$ est une fonction ne dépendant que de δ). Le passage du cas réel au cas complexe est délicat et nécessite ici aussi l'utilisation d'outils combinatoires. Dans le chapitre 11, on trouvera aussi bien des résultats de structure sur les sous-espaces réflexifs de L_1 avec par exemple le théorème de Rosenthal montrant que les sous-espaces réflexifs de L_1 se plongent dans L_p pour un $p > 1$, que des résultats de nature locale concernant les sous-espaces de dimension finie de L_1 .

Pour conclure, le chapitre 12 présente de nouveaux exemples d'utilisation de la méthode des sélecteurs qui consiste, à partir d'une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ prenant les valeurs 0 et 1, à introduire l'ensemble aléatoire $I_\omega = \{n \geq 1, \varepsilon_n(\omega) = 1\}$. En particulier, ils montreront comment caractériser les ensembles de Sidon à partir d'extraction de sous-ensembles particuliers, ainsi qu'un résultat de majoration d'une somme de sinus dû à Bourgain établissant qu'il existe $C \geq 1$ tel que pour tout entier $N \geq 1$, il existe une partie $\Lambda \subset \mathbb{N}^*$ de cardinal N telle que

$$\left\| \sum_{k \in \Lambda} \sin kx \right\|_\infty \leq C N^{2/3}.$$

Le chapitre 13 est l'occasion pour les auteurs d'illustrer une grande partie des méthodes décrites dans ce livre par l'étude d'un exemple d'espace de Banach très important en analyse harmonique, l'espace de Pisier des fonctions presque sûrement continues. Ils établissent par exemple la dualité entre cet espace et l'espace des multiplicateurs $M_{2,\psi 2}$ (résultat aussi difficile que la dualité H_1 -BMO de Fefferman et Stein) ainsi qu'une nouvelle caractérisation des ensembles de Sidon.

Je n'ai fait qu'effleurer le contenu de chacun des chapitres de ce livre pour en motiver sa lecture. En fait, ces chapitres sont très détaillés et se finissent toujours par des commentaires précisant les références et présentant les recherches récentes sur le sujet ainsi que des exercices bien développés permettant de mieux comprendre ou d'approfondir les notions abordées. Je dirais qu'il s'agit d'un ouvrage de référence

en analyse, très agréable à lire et très riche. Un dernier conseil, n'hésitez pas à vagabonder à votre gré dans cet imposant livre. Un lecteur non initié au sujet pourrait commencer par les chapitres 1, 6 et 8 puis affiner ses connaissances en lisant les chapitres 3, 4 et 5 ou bien 2, 9 et 11. D'autres peuvent aller lire un chapitre dont le thème les intéresse, puis se laisser guider par les indications très claires des auteurs pour apprendre les notions nécessaires à la lecture de ce chapitre.

Olivier Guédon,
Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris

Analyse sur les groupes de Lie, une introduction

JACQUES FARAUT

Calvage & Mounet, 2006. 314 p. ISBN : 2-916352-00-72-916352-00-7. 33 €

La jeune maison d'édition **Calvage & Mounet**, née de la volonté de quelques collègues mathématiciens, publie dans la collection *Mathématiques en devenir*, le livre de J. Faraut : *Analyse sur les groupes de Lie*. C'est le premier livre de cette collection, qui en comporte déjà trois, et qui vise un public situé entre le L3 et le M2.

Le livre de J. Faraut s'adresse aux étudiants de M1 (voire de M2), mais pas seulement, et est issu d'un cours donné par l'auteur à l'Université Pierre-et-Marie Curie (anciennement Paris VI). Si l'on en croit la quatrième de couverture, l'objectif affiché est d'initier les étudiants aux méthodes et outils de l'analyse harmonique non commutative. Disons le tout de suite : l'objectif est largement atteint. La tâche n'était pas aisée, car l'analyse harmonique sur les groupes présuppose une certaine connaissance des objets manipulés, à savoir les groupes de Lie et leurs représentations.

En général, un livre d'introduction sur les groupes et algèbres de Lie comporte déjà 300 pages. Il existe peu de livres analogues, citons l'ouvrage de Mneimné & Testard *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques* et bien sûr *La Référence*, je veux parler du triptyque de S. Helgason sur les espaces symétriques ; mais cet ouvrage n'est pas destiné au même public. Il est donc utile d'expliquer ici, comment J. Faraut réussit en un seul ouvrage, d'une part l'introduction des groupes de Lie et leurs représentations et d'autre part l'introduction de l'analyse harmonique invariante sur le groupe $SU(2)$, le groupe unitaire $U(n)$, sur la sphère S^n vue comme un espace homogène et sur les espaces de matrices symétriques (c'est le cas dégénéré des espaces riemanniens symétriques).

Avant de commenter en détail le livre de J. Faraut faisons quelques remarques générales sur la présentation et le contenu. La présentation est soignée et chacun des douze chapitres est introduit avec précision et complété par de nombreux exercices. Ces derniers seront d'une grande utilité pour les étudiants, car ils traitent de compléments fort utiles. On peut regretter l'absence de correction, mais le livre aurait alors comporté cent pages de plus. Le tout est complété par un index fourni qui se révèle pratique et utile. La rédaction est dans l'ensemble très précise, notamment dans les premiers chapitres ; les calculs sont détaillés, sans équivoques ni longueurs excessives. L'étudiant pourra suivre les raisonnements sans difficultés.

On regrettera peut-être le manque de commentaires (il y a très peu de notes de pages par exemple) ou si l'on veut d'enrobage littéraire. Clairement le parti pris est celui du résultat ; je dirai celui des mathématiques concrètes, celles-là mêmes qui nécessitent l'usage d'un crayon. Celui qui se dit allergique au calcul et prétend comprendre sans pouvoir aligner trois lignes explicites découvrira via cet ouvrage qu'il faisait fausse route.

Abordons maintenant le contenu du livre en détail.

Les cinq premiers chapitres, représentant une centaine de pages, portent sur les groupes et algèbres de Lie. L'écueil étant clairement dans ce domaine le bourbakisme pédant, ce qui au passage n'est pas le cas des livres de Bourbaki sur le sujet. L'auteur adopte le point de vue de C. Chevalley ; les groupes de Lie seront des sous-groupes fermés du groupe linéaire $GL(n, \mathbb{R})$. Cette restriction n'est pas absurde, compte tenu de l'objectif. Elle a l'avantage d'aller à l'essentiel.

Le premier chapitre aborde les groupes topologiques, puis les exemples fondamentaux des sous-groupes classiques de $GL(n, \mathbb{R})$, à savoir les groupes orthogonaux et symplectiques. Les différentes décompositions sont abordées en précisant les équivalences de langage ; Cartan = polaire, Iwasawa = LU . L'introduction de l'application exponentielle au second chapitre prend alors un sens clair pour le lecteur compte tenu du fait que l'on manipule des groupes de matrices. La différentielle y est calculée avec quelques longueurs peut-être, mais cela ne sera pas inutile pour l'étudiant-lecteur. On conseillera les exercices de ce chapitre que nous avons trouvés particulièrement bien choisis.

Le troisième chapitre introduit l'algèbre de Lie d'un groupe linéaire, via les sous-groupes à 1-paramètre et l'application exponentielle. La formule de Campbell-Hausdorff est présentée par le calcul classique de la dérivée de

$$F(t) = \ln(\exp(X) \exp(tY)).$$

Le quatrième chapitre porte sur les algèbres de Lie et sur la notion de différentielle d'une représentation (de dimension finie). Les algèbres de Lie résolubles, nilpotentes et semi-simples sont traitées rapidement et le théorème de Lévi-Malcev est présenté sans démonstration. Les exercices de cette partie devront être faits par les étudiants.

Le chapitre suivant est assez original dans sa forme, car il traite de la mesure de Haar par l'exemple. Le cas des groupes topologiques compacts est admis, mais celui des groupes de Lie est traité via la géométrie différentielle. D'une certaine manière cela suffit. L'originalité réside dans les exemples ; cas d'un groupe ouvert d'un espace affine, produit de deux groupes, cas du groupe de matrices triangulaires, du groupe $SO(n)$ via la transformée de Cayley.

Le chapitre 6 est à mon sens le chapitre théorique le plus important. Il donne en moins de trente pages, l'essentiel de la théorie spectrale pour les groupes compacts, c'est-à-dire la décomposition des fonctions définies sur le groupe en utilisant l'ensemble des représentations unitaires irréductibles. La théorie spectrale des opérateurs autoadjoints compacts est utilement rappelée, ce qui permet à l'auteur

d'aborder le théorème de Peter-Weyl (décomposition de $L^2(G)$, théorème 4.1), l'orthogonalité des coefficients (théorème 3.3), les fonctions centrales, le théorème de Plancherel L^2 (théorème 4.2)

$$f(g) = \sum_{\pi \in \hat{G}} d_{\pi} \operatorname{tr}(\hat{f}(\pi) \pi(g))$$

et la convergence uniforme des séries de Fourier pour les fonctions $\mathcal{C}^k$ pour $k > \frac{1}{2} \dim G$; plus de détails sur le théorème de Plancherel n'auraient pas été inutiles. L'opérateur de Casimir outil central pour la suite apparaît pour la première fois dans ce chapitre; c'est essentiellement le Laplacien.

Les deux chapitres suivants sont une mise en pratique exhaustive des théories abordées précédemment dans le cas des groupes $SU(2)$ et $SO(3)$. On y démontre notamment la convergence des séries de Fourier pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $SU(2)$, et on y résout l'équation de la chaleur. Le noyau de la chaleur s'exprime comme série faisant intervenir les caractères centraux χ_n des représentations irréductibles de $SU(2)$

$$p_t(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e^{-n(n+2)t} \chi_n(xy^{-1}).$$

Le chapitre sur l'analyse harmonique sur la sphère $\mathbb{S}^n$ est un chapitre important. Il montre en effet comment l'introduction de l'espace homogène

$$SO(n)/SO(n-1)$$

est la clé géométrique de l'analyse sur la sphère. C'est le cœur du sujet. Dans notre cas, les harmoniques sphériques apparaissent comme des coefficients de représentations sphériques, c'est-à-dire admettant un vecteur invariant par $SO(n-1)$ et les harmoniques zonales (le coefficient associé au vecteur "pôle nord") sont liées aux polynômes de Gegenbauer. On peut regretter ici le manque d'une note concernant les polynômes classiques. Tout ceci permet de revisiter le problème de Dirichlet et de Poisson dans $\mathbb{R}^n$ et de traiter complètement le noyau de la chaleur sur la sphère.

Le chapitre 10 porte sur l'introduction de l'analyse sur les espaces de déplacements de Cartan. Ici, on traite le cas des matrices symétriques ou hermitiennes. C'est l'occasion d'introduire la formule d'intégration de Weyl. L'équation de la chaleur sur l'espace vectoriel de matrices symétriques conduit à l'évaluation des intégrales orbitales plates. Le lien avec le déterminant de Vandermonde est clairement expliqué. On trouvera dans les exercices des résultats complémentaires autour de l'intégrale de Metha.

Les deux derniers chapitres sont consacrés au groupe unitaire $U(n)$. Les représentations sont paramétrées par un plus haut poids entier $\lambda \in P^+$. On calcule la dimension d_{λ} par la formule de Weyl et on fait le lien avec les représentations holomorphes de $GL(n, \mathbb{C})$. C'est l'occasion d'introduire les fonctions de Schur, ce qui n'est pas banal à ce niveau. Elles seront utiles pour calculer les intégrales

orbitales. On termine avec la convergence uniforme des séries de Fourier sur $U(n)$, le noyau de la chaleur sur $U(n)$

$$p_t(x, y) = \sum_{\lambda \in P^+} d_\lambda e^{\kappa_\lambda t} \chi_\lambda(xy^{-1})$$

et le développement en série des fonctions centrales via les caractères (ici interviennent les fonctions de Schur). La trame de cette partie suit la présentation de $SU(2)$, ce qui en rend la lecture aisée.

En conclusion, le livre de J. Faraut est à conseiller à tous ceux qui veulent découvrir (ou redécouvrir) l'utilisation des groupes de Lie dans les problèmes d'analyse classique. C'est l'occasion d'apprendre les idées essentielles d'un sujet mathématique très dynamique jetant un pont entre la géométrie, l'analyse et la théorie des groupes.

*Charles Torossian,
Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris*

Lie algebras and algebraic groups

P. TAUVEL ET R.W.T. YU

Springer, 2005. 653 p. ISBN : 978-3-540-24170-6. \$89,95

La théorie des groupes algébriques et des algèbres de Lie est une théorie centrale en mathématiques. Pour cause, son omniprésence dans des domaines aussi variés que la théorie des invariants, l'analyse harmonique, la physique mathématique, la combinatoire algébrique. Pour certains, elle est aussi l'occasion de voir l'algèbre en action, dans son efficacité, sa richesse et son esthétique ; ainsi on peut constater d'année en année son pouvoir de séduction sur bon nombre d'étudiants de troisième cycle. Justement, ces étudiants qui veulent aborder la thématique des groupes algébriques se doivent de parcourir une vaste littérature ; d'expérience, les livres de Dixmier, [2], Humphreys, [3], [4], Springer, [5], peut-être aussi Borel, [1], quelques articles de Kostant et j'en passe. Le plus souvent, les ouvrages sur la question divisent les sujets, pourtant très liés, « algèbres de Lie » d'une part et ses développements vers l'algèbre enveloppante, et « groupes algébriques » d'autre part et leurs pré-requis de géométrie algébrique. La prouesse du livre de Patrick Tauvel et Rupert Yu est de regrouper en un seul volume les deux sujets, leur interaction, ainsi que tout le matériel nécessaire pour les traiter.

Pour résumer en une phrase précise qui évitera toute équivoque, l'objet du livre est l'étude des algèbres de Lie de dimension finie et des groupes algébriques sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Les résultats sont exhaustifs, les preuves sont complètes, bien écrites et tout le matériel nécessaire pour ces preuves est réuni dans l'ouvrage, à l'exception peut-être du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt pour les algèbres enveloppantes, ce qui est plutôt une bonne chose. Entre autres et c'est ce qui fait la particularité du livre, on y décrit les relations entre les groupes algébriques et leurs algèbres de Lie, trop souvent laissées au folklore. Ceci résulte bien sûr du point de vue des auteurs : rassembler algèbres et groupes de Lie sous l'égide de la caractéristique zéro.

Le choix de réunir tous les pré-requis à la théorie est un choix ambitieux et courageux. Le livre est composé de quarante chapitres, introduisant pour commencer des résultats sur les espaces topologiques, puis quelques chapitres d'algèbre commutative. Vient ensuite une introduction à la géométrie algébrique qui expose des résultats utiles par la suite. Le thème évoqué par le titre du livre n'est abordé qu'au milieu, par exemple les algèbres de Lie ne sont définies qu'au chapitre 19 et les groupes algébriques au chapitre 21.

On l'aura compris, on ne parcourt pas ce livre de la première à la dernière page.

Après ces généralités, détaillons un peu le plan du livre. La première partie (chapitres 1 à 9) traite principalement d'algèbre commutative. On y trouve le matériel classique sur les anneaux et modules, anneaux factoriels et les fameux théorèmes « going up » et « going down ». Il est plaisant de voir qu'un chapitre est consacré aux filtrations, outil essentiel en algèbre non commutative, inscrit, on le devine, en prévision de l'étude des algèbres enveloppantes. On a ensuite le théorème de normalisation de Noether, le théorème de l'idéal principal de Krull et le célèbre Nullstellensatz. Plus loin, un chapitre fournit quelques rudiments de théorie des faisceaux et on termine cette première partie avec la décomposition de Jordan.

La géométrie algébrique fait l'objet de la seconde partie (chapitres 10 à 17). On y introduit les notions de variété algébrique, variété projective, morphisme de variétés, dimension, espace tangent. Enfin, on s'attarde sur la notion importante de normalité, et en particulier sur l'existence de la normalisation d'une variété algébrique et sur le théorème de Zariski.

Les algèbres de Lie sont étudiées aux chapitres 18 à 20, en commençant par un préliminaire sur un objet combinatoire bien connu lié aux algèbres de Lie semi-simples : le système de racines et leur groupes de Weyl associés. Les auteurs définissent ensuite les algèbres de Lie et on retrouve les grands classiques du domaine : théorèmes d'Engel, Lie, Cartan et leurs incidences sur les algèbres de Lie nilpotentes et résolubles. Il est alors temps de définir les algèbres de Lie semi-simples, d'introduire le théorème de Weyl, de Levi-Malcev, et de classer ces algèbres à l'aide des systèmes de racines vus précédemment. Notons que les auteurs ont jugé bon de joindre des tables pour chaque système de racines. Cela n'ajoute bien sûr rien aux tables bien connues de Bourbaki, mais cela possède l'avantage de les avoir à disposition pendant la lecture du livre.

Les chapitres 21-22 présentent des généralités sur les groupes algébriques et on trouve la description des liens entre groupes algébriques et algèbres de Lie dans les chapitres 23-24. Plus précisément, le chapitre 23 traite de l'association d'une algèbre de Lie à un groupe de Lie et inversement le chapitre 24 s'applique à trouver les groupes ayant une algèbre de Lie fixée. C'est, je le rappelle, une des parties pour laquelle le livre constituera certainement une précieuse référence.

On peut maintenant attaquer les espaces homogènes et les orbites de groupes algébriques. Enfin de « l'action » se dit le lecteur impatient. Le chapitre 26 considère les groupes résolubles avec le théorème de Lie-Kolchin, le théorème du point fixe de Borel et le théorème de conjugaison des tores maximaux. Puis, dans le chapitre 27, il est question de groupes réductifs, avec le théorème de Hilbert-Nagata sur les invariants de groupes réductifs agissant rationnellement ainsi que le théorème de Peter-Weyl et ses raffinements. On étudie ensuite les sous-groupes de Borel et les paraboliques, avec le théorème de conjugaison des sous-groupes de Borel.

Les outils importants pour la théorie des représentations des algèbres de Lie semi-simples sont introduits dans le chapitre 30. On y trouve les algèbres enveloppantes, qui d'ailleurs auraient pu être placées un peu plus tôt, le théorème PBW et les modules de Verma qui fournissent un accès facile (et standard) à la classification des modules simples de dimension finie. On s'intéresse ensuite à un peu de théorie des invariants en étudiant les algèbres d'invariants pour un sous-groupe engendré par des réflexions (théorème de Chevalley). On voit l'important théorème de Kostant qui peut s'énoncer ainsi : une algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple est libre sur son centre. Les auteurs fournissent la preuve de Bernstein et Lunts, infiniment plus simple que la preuve originale.

Le chapitre 32 ouvre la voie à la dernière partie du livre, certainement la plus spécifique. On démontre ici le théorème de Jacobson-Morozov sur les S -triplets et son application aux éléments nilpotents dans les algèbres de Lie semi-simples. Ces résultats sont essentiels pour l'étude des orbites nilpotentes. On fournit aussi des résultats importants de Kostant sur les éléments principaux et les éléments nilpotents dits réguliers.

Le chapitre 33 se consacre au théorème de Richardson qui associe une orbite nilpotente à une sous-algèbre parabolique d'une algèbre de Lie semi-simple. Il s'agit d'un théorème fondamental pour l'étude des algèbres de Lie semi-simples. Pour cela, les auteurs introduisent la notion de polarisation, notion qui, en un sens, généralise la notion de sous-algèbre de Cartan.

Le chapitre 35 étudie le problème naturel du centralisateur d'un élément dans une algèbre de Lie semi-simple. Il y est question d'éléments distingués, du théorème de Bala-Carter et de sous-algèbres paraboliques distinguées. On trouvera ensuite la notion de classes de Jordan (liée aux centralisateurs), de feuillets de Dixmier. Notons aussi que de nombreux résultats évoqués trouvent dans ce livre leur généralisation au cas symétrique. L'outil de base présenté étant la décomposition d'Iwasawa.

Dans les derniers chapitres du livre, les auteurs retrouvent un de leurs sujets de prédilection : le problème de l'indice d'une sous-algèbre de Borel dans une algèbre de Lie semi-simple. Notons enfin le dernier chapitre sur les représentations coadjointes et l'indice d'une représentation qui clôt cet excellent ouvrage.

Si je devais émettre une petite critique, je dirais que les chapitres finissent de façon un peu abrupte. Le sujet, et surtout l'exercice de style qui consiste à tout démontrer, se prête particulièrement à des discussions ouvertes de fin de chapitre, tel que cela est fait par exemple dans le livre de Dixmier, [2]. Ce serait l'occasion de parler sans preuves de sujets liés et de développements récents, comme par exemple la méthode des orbites et pourquoi pas, la base canonique. De même, les introductions de chapitres pourraient être plus fournies et ainsi guider le lecteur tout au long du livre.

En conclusion, c'est un travail énorme que les auteurs ont accompli. P. Tauvel et R. Yu ont su regrouper dans un seul volume tout le matériel nécessaire en théorie de Lie. Il s'agit d'un livre particulièrement recommandé à tous ceux qui veulent aborder la théorie des algèbres de Lie, et les spécialistes, quant à eux, trouveront dans la dernière partie des informations nouvelles et intéressantes. Il va sans dire que cet ouvrage s'insérera avec profit dans toutes les bibliothèques.

Références

- [1] Borel, Armand. Linear algebraic groups. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 126. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [2] Dixmier, Jacques. Algèbre enveloppantes. Reprint of the 1974 original. Les Grands Classiques Gauthier-Villars.[Gauthier-Villars Great Classics] Édition Jacques Gabay, Paris, 1996.
- [3] Humphreys, James E. Introduction to Lie algebras and representation theory. Second printing, revised. Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.
- [4] Humphreys, James E. Linear algebraic groups. Graduate Texts in Mathematics, N° . 21. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.
- [5] Springer, T. A. Linear algebraic groups. Second edition. Progress in Mathematics, 9. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1998.

*Philippe Caldero,
Université Claude Bernard, Lyon*