SOMMAIRE DU N^o 110

Éditorial

« Everybody understood that if the proof is correct then no other recognition is needed », c'est par ces mots que Grigory Perelman a expliqué aux journalistes du NewYorker son absence à Madrid où, lors de la remise des médailles Fields, l'IUM a une fois encore fait honneur aux mathématiciens français en la personne de Wendelin Werner.

La Gazette reviendra bien entendu plus profondément sur ces célébrations au courant de l'année.

Bonne rentrée

— Colette Anné

Mot de la Présidente

Le grand événement de l'été 2006 a naturellement été le Congrès International des Mathématiciens de Madrid, marqué par de très nombreuses conférences invitées françaises et surtout la médaille Fields de Wendelin Werner. Vous trouverez ci-dessous les discours prononcés à cette occasion par Jean-Michel Bismut d'une part, par Yvon Maday et moi même.

Le 2 octobre 2006
Marie-Françoise Roy

Discours prononcé par Jean-Michel Bismut[1] le 22 août 2006 à l'Ambassade de France à Madrid à l'occasion de la tenue du Congrès International de Mathématiques ICM-2006

« Monsieur l'Ambassadeur de France en Espagne, Monsieur le Directeur Général de la Coopération et du développement, Monsieur le Ministre-Conseiller, Mesdames et Messieurs les membres du corps diplomatique, Mesdames, Messieurs, Chers amis,

Le 22 août 2002, soit il y a quatre ans jour pour jour, en présence de Monsieur le Ministre-Conseiller et de bien d'autres personnes se trouvant ici, une réception réunissait les participants français et leurs invités à l'Ambassade de France à Pékin, dans des circonstances qui seraient à s'y méprendre celles que nous connaissons aujourd'hui. C'est rappeler que le Congrès International de Mathématiques se tient avec une régularité métronomique tous les quatre ans, organisé sous l'égide de l'Union Mathématique Internationale. Qu'il me soit permis d'abord de me tourner vers nos hôtes espagnols, en la personne des membres du Comité d'organisation du Congrès, et des présidents des sociétés savantes d'Espagne, pour les remercier en notre nom à tous pour le travail immense qu'ils ont accompli en vue de l'organisation de ce magnifique congrès. Je salue également l'ensemble des mathématiciens espagnols, dont les liens avec leurs partenaires du monde entier, et singulièrement avec les mathématiciens français, n'ont cessé de se développer, de la géométrie différentielle aux équations aux dérivées partielles, aux systèmes dynamiques, de la géométrie algébrique à la théorie du contrôle... Saluons également la présence de membres du comité de programme du congrès. C'est à eux que revient la tâche écrasante de sélection des conférenciers s'exprimant au congrès.

Le Congrès International de Mathématiques s'était tenu en 1998 en Allemagne, en 2002 en Chine, il se tient aujourd'hui en Espagne et se tiendra en Inde en 2010.

[1] Vice-Président de l'Union Mathématique Internationale.

Dans ce parcours, ne peut-on lire aussi les brisures de notre histoire récente, et le souci d'anciennes nations d'inscrire ou de réinscrire leur évolution intellectuelle et scientifique dans le mouvement général du monde ? Le poète espagnol[2] ne faisait-il pas dire au roi astrologue : *"Ya sabéis que son las ciencias que más curso y más estimo, matemáticas sutiles..." "Vous savez que les sciences que je cultive et estime le plus sont les mathématiques subtiles..."*

Des mathématiques de l'astrologue à celles d'aujourd'hui, que de différences, même si la fascination qu'éprouvent les mathématiciens pour la mécanique céleste n'est en vérité que la suite naturelle des préoccupations de leurs ancêtres. Ne prétendant plus, au moins publiquement, au titre de 'reine des sciences', la mathématique entretient un dialogue serré, souvent passionné, et non dépourvu d'ambiguïté, avec la physique, elle s'enrichit des développements récents de l'informatique et de la biologie, tout en persistant dans les voies déjà tracées par une tradition multiséculaire... De la théorie des nombres aux théories conformes, de la géométrie différentielle à la théorie des probabilités ou au traitement d'images, que de voies ainsi ouvertes, qui partant dans des directions apparemment distinctes, se croisent et se rejoignent. Mais contrairement à d'autres sciences, la mathématique est douée d'une infinie mémoire, elle accumule, pierre à pierre, les éléments de son savoir, qui pourrait finir par l'écraser, si elle ne savait aussi jeter sur le bord de la route les théories épuisées comme d'inutiles fardeaux, et reconnaître aux jeunes mathématiciens la place qu'ils méritent. Inspirée par les figures romantiques de Galois et d'Abel, la mathématique n'est pas une science chenue. Le fait que les médailles Fields soient attribuées à des mathématiciens de moins de quarante ans manifeste la conviction qu'en mathématiques du moins, 'la valeur n'attend point le nombre des années'. Avec les injustices que peut apporter l'application d'une règle draconienne, cette règle garantit que soient mis en avant les travaux des jeunes mathématiciens les plus actifs, déjà illustres auprès de leurs pairs, livrés ainsi à une opinion publique parfois décontenancée par le fait qu'on puisse être si savant avec, pour certains, si peu de barbe au menton. Que l'on ne s'y trompe pas : la mathématique, et sa pratique au plus haut niveau, requiert énergie, fermeté d'âme, discipline, résistance physique et nerveuse. L'expression commune de 'tour de force' appliquée aux preuves les plus spectaculaires l'indique parfaitement. Les médailles Fields de 2002 récompensaient l'algèbre en Lafforgue et Voevodsky, celles de 2006 l'analyse, la théorie des probabilités et la géométrie. Terence Tao, récipiendaire de la médaille Fields, pour ses travaux d'analyse et de théorie analytique des nombres, présent à Paris tout le mois de juin 2006, Grigory Perelman, récompensé pour ses travaux sur le flot de Ricci, qui doivent conduire à la preuve de la conjecture de Poincaré... Andrei Okounkov pour une œuvre où se rejoignent probabilités, théorie des représentations et géométrie algébrique. Enfin Wendelin Werner, dont les recherches menées avec Gregory Lawler et Oded Schramm sur les exposants critiques et l'invariance conforme sont l'une des manifestations renouvelées du marivaudage entre mathématiques et physique, avec cette remarquable nouveauté que la construction du modèle physique effectif revient aux mathématiciens. Je salue la présence parmi nous de Wendelin Werner, professeur à l'Université Paris-Sud dans le département de mathématiques d'Orsay, professeur à l'Institut universitaire de France.

[2] Calderón de la Barca, « La vida es sueño ».

Le prix Nevanlinna est attribué à Jon Kleinberg, professeur à Cornell pour ses travaux sur l'algorithmique des engins de recherche sur la toile... La médaille Gauss récompense l'une des figures légendaires de la théorie des probabilités, le professeur Kyoshi Itô, grand ami de la France, dont l'œuvre polymorphe qu'il a inscrite lui-même dans le prolongement de l'œuvre de Paul Lévy a bouleversé la théorie des probabilités et trouve des applications multiples autant qu'inattendues.

Laissez-moi revenir brièvement sur le rôle de l'Union Mathématique Internationale. Vous savez qu'elle se consacre à l'organisation du Congrès International, et à l'attribution de prix. Une troisième préoccupation de l'Union : le développement des mathématiques dans les pays du tiers monde. La tenue des Congrès Mondiaux en Chine en 2002 et bientôt en Inde, est l'une des manifestations de notre volonté de soutenir les mathématiciens de ces pays... Enfin l'enseignement des mathématiques, sujet ô combien délicat, l'histoire des mathématiques et les questions liées à l'accès à l'information scientifique complètent le champ d'intervention de l'U.M.I.. Sans vouloir tresser à l'U.M.I. des couronnes indues, il est un fait que tout mathématicien connaît au moins deux de ces fonctions de l'U.M.I., l'organisation du Congrès International, et l'attribution de ses prix. L'U.M.I. est conduite à faire croître un budget qui reste modeste. Nul doute que les pays les plus développés et la France en particulier sauront y contribuer sans rechigner.

Une remarque encore sur les mathématiques. Les mathématiques d'aujourd'hui sont les mathématiques du monde... Et surtout en ce lieu, à l'Ambassade de France, c'est bien d'elles dont il s'agit. Ainsi l'histoire de la redécouverte par les mathématiciens de tout un pan de l'œuvre de Poincaré, à travers Moscou, Rio de Janeiro, témoigne du caractère universel de notre héritage... La conjecture de Poincaré est elle-même l'objet des attentions du monde entier... Je pourrais évoquer Wendelin Werner et ses collaborations transatlantiques avec Gregory Lawler et Oded Schramm. Les travaux de Tao sur l'équation de Schrödinger non linéaire ou l'équation des ondes sont étudiés avec la même intensité à Marne-la-Vallée, Rennes ou Nantes qu'à Cambridge ou Berkeley... La démonstration de la conjecture de Sato-Tate fait, elle, apparaître un triangle Harvard-Paris-Orsay... Laisser souffler l'air du large... Mais sans doute aussi noter que s'il n'y a pas à proprement parler de mathématiques françaises, il y a sans doute une manière particulière de faire des mathématiques en France, qui sont enracinées dans son histoire voire dans sa langue.

Pour conclure brièvement, et au nom du Comité National Français des Mathématiciens, qui regroupe l'ensemble des acteurs qui participent à la vie mathématique de la France, l'Académie des Sciences et les sociétés savantes, ici représentées, je voudrais particulièrement remercier les administrations qui nous ont permis de financer le voyage des conférenciers français, mais aussi des jeunes participants au Congrès qui travaillent en France, et singulièrement le Ministère des Affaires Etrangères, et sa Direction Générale de la Coopération Internationale et du Développement. Votre présence ici, Monsieur le Directeur Général, dans ces circonstances, est une manifestation supplémentaire de l'intérêt de votre direction pour notre discipline. Je me dois également de vous remercier très vivement, Monsieur l'Ambassadeur, pour le soutien que vous-même et le Service Scientifique de l'Ambassade avez bien voulu nous donner en organisant cette réception. Dans huit jours, le Congrès International de Madrid sera terminé, et l'Union Mathématique

Internationale repliera ses tréteaux. Il me reste à nous donner rendez-vous, monsieur l'Ambassadeur de France en Espagne, Monsieur le Directeur Général de la Coopération et du Développement, Monsieur le Ministre-Conseiller, Mesdames et Messieurs les membres du corps diplomatique, Mesdames, Messieurs, le 22 août 2010, en Inde, à Hyderabad.

Je vous remercie. »

Discours prononcé par Marie-Françoise Roy et Yvon Maday[3] le 22 août 2006 à l'Ambassade de France à Madrid à l'occasion de la tenue du Congrès International de Mathématiques ICM-2006

« Monsieur l'Ambassadeur de France en Espagne, Monsieur le Directeur Général de la Coopération et du développement, Monsieur le Ministre-Conseiller, Chers et chères collègues Mathématiciens et Mathématiciennes, Mesdames, Messieurs,

Le Congrès International des Mathématiciens est, depuis plus d'un siècle un moment attendu par la communauté mathématique internationale. Tout d'abord il y a l'échange d'idées et le brassage des cultures développées par des Ecoles différentes. Les conférenciers invités par les différents conseils mis en place par l'Union Mathématique Internationale sont les premiers acteurs de cet échange.

Nos sociétés savantes, la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, et la Société Mathématique de France, remercient chaleureusement l'Ambassade de France pour avoir, cette année encore, après les Congrès Internationaux des Mathématiciens de Zurich, Berlin et Bejing compris l'importance de cette manifestation et l'opportunité de se réjouir de la place de l'école mathématique française dans ce concert d'idées.

Tout le monde s'accorde à reconnaître en effet que la France est la seconde puissance mathématique du monde, quels que soient les indicateurs choisis : nombre des médailles Fields, nombre et influence des publications, conférenciers invités au congrès international qui ont été formés en France ou qui y vivent. Ces conférenciers invités sont cette année à Madrid une trentaine, un nouveau record, et, au nom des mathématiciens français que nos deux sociétés représentent, nous voulons les féliciter pour cette reconnaissance de leurs travaux.

Il y a de quoi faire briller les yeux des écoliers et lycéens ! ! Cette qualité de nos mathématiques n'est pourtant pas un acquis et nous devons rester vigilants, chacun à son niveau de responsabilité. Aurons-nous en effet demain encore les moyens de former dans nos lycées les conférenciers des futurs congrès internationaux ? Les questions d'enseignement sont complexes et assurer à tous et toutes une formation de base en mathématiques, digne d'une grande démocratie développée, sans sacrifier la formation des élites est un des défis qu'il nous faut relever.

Les services scientifiques de l'ambassade ont donc compris l'importance de ce congrès avant même que nous sachions que parmi les lauréats de la médaille Fields, il y avait, cette année encore, un français : Wendelin Werner, qu'il nous est ainsi permis d'honorer le jour même de la proclamation de son prix. Le congrès est en effet le moment choisi pour révéler les noms des lauréats de la plus haute distinction dans le domaine des mathématiques, qui est à comparer au prix Nobel, même si les

[3] Président de la SMAI.

lauréats doivent être âgés de moins de 40 ans. Cette année, les lauréats sont Andrei Okounkov, Grigori Perelman,Terence Tao et Wendelin Werner. Nous tenons à les féliciter tous les quatre, ainsi que le récipiendaire du prix Nevanlinna Jon Kleinberg, et également du Prix Gauss, Kiyoshi Itô.

Wendelin Werner, né en 1968, spécialiste de la théorie des probabilités, est professeur à l'université de Paris XI (Orsay) et membre de l'Institut universitaire de France. Il a obtenu la médaille Fields pour ses contributions au développement de l'évolution stochastique de Loewner, la géométrie du mouvement brownien en dimension deux et la théorie conforme des champs. Ses travaux illustrent d'une manière remarquable l'unité des mathématiques et leurs liens toujours renouvelés avec la physique. La physique théorique a mis en évidence deux phénomènes fondamentaux en dimension deux : l'invariance conforme en théorie des champs d'une part et la percolation sur les réseaux d'autre part, à savoir l'existence de changements de phase. Wendelin Werner et ses collaborateurs ont dégagé des liens profonds entre ces deux domaines. L'avancée conceptuelle ainsi réalisée conduit aussi bien à la découverte de probabilités sur des espaces de courbes qu'au calcul exact de tous les exposants critiques de percolation, démontrant ainsi les prédictions des physiciens.

À cette occasion, l'école probabiliste française est à l'honneur et les liens de notre discipline avec d'autres sciences, ici la physique, sont mis en avant. Les travaux exposés dans ce congrès montrent l'unité des mathématiques, l'importance de leurs applications et confirment que les mathématiques dans leur ensemble constituent l'un des fondements d'une société de technologie avancée. Souhaitons que la France, consciente de ses atouts dans le domaine, s'attache à les développer en continuant à favoriser une école fondamentale innovante et en sachant donner les moyens à ceux qui vont vers les applications et l'industrie. Nous insistons sur l'attention à apporter aux applications en médecine et en sciences du vivant où des outils mathématiques encore inexistants sont à inventer et à développer.

Chaque Congrès International des Mathématiciens a ses connotations internationales spécifiques. Le congrès de Berlin en 1998 a rendu hommage aux victimes de l'Holocauste, celui de Beijing en 2002 a mis l'accent sur le respect des droits de l'homme. Le congrès de Madrid a défini trois axes prioritaires, liés à la situation géopolitique de l'Espagne : l'axe latino-américain qui cherche à encourager la participation au congrès des mathématiciens de cette région, l'axe méditerranéen, symbolisé par la tenue à Cordoue d'une rencontre "Mathématiques pour la paix et le développement", l'axe européen, marqué par la tenue de l'Assemblée Générale de l'UMI à Saint Jacques de Compostelle.

La communauté mathématique française est totalement en phase avec ces différents axes. Au moment où la Movida a transformé profondément la société espagnole, les mathématiciens espagnols se sont tournés vers leurs homologues français et des collaborations se sont nouées. Dans les dernières années, on a assisté a un développement remarquable de l'École mathématique espagnole et c'est un honneur pour nous de compter parmi eux de nombreux collaborateurs. Les relations privilégiées qui se sont ainsi tissées se traduisent par de nombreuses actions communes parmi lesquelles citons à l'automne prochain la XII^{e} École d'Automne de Mathématiques "Jacques-Louis Lions" ainsi que la tenue en juillet 2007 à Saragosse du premier congrès franco-espagnol de mathématiques. Signalons que

Wendelin Werner a accepté il y a plusieurs mois de participer au comité scientifique de ce congrès attestant de sa disponibilité pour des tâches d'intérêt collectif.

Français et espagnols collaborent aussi au développement des mathématiques dans le monde. Le CIMPA (Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées) organise deux écoles en Espagne cet été, comme conférences satellites du congrès ICM, ce qui permet à de nombreux mathématiciens du tiers-monde de participer à ICM Madrid et de bénéficier d'une de ces formations. Le CIMPA a une action suivie en Amérique Latine : organisation d'écoles de formation à la recherche (13 écoles entre 2003 et 2007), soutien à de nombreuses manifestations organisées localement, notamment les écoles EMALCA, collaboration pour des initiatives de formation doctorale.

Ce congrès est déjà à l'évidence un succès et nous remercions et félicitons nos collègues espagnols pour cette réussite. Nous vous souhaitons une bonne fin de congrès et vous donnons rendez-vous dans quatre ans à Hyderabad, en Inde. »

MATHÉMATIQUES

Le problème des nombres congruents

Pierre Colmez

Résumé.— Ce texte est une introduction à la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, à travers le problème des nombres congruents (à quelle condition un entier donné est-il l'aire d'un triangle rectangle à côtés rationnels ?) qui est probablement le plus vieux problème non résolu à ce jour. C'est une version commentée d'un exposé donné, en mai 2005, au séminaire des élèves de l'École Polytechnique.

Introduction

Définition 1. *Un entier D, sans facteur carré* (divisible par le carré d'aucun nombre premier)*, est congruent, s'il existe un triangle rectangle de cotés rationnels dont l'aire est D ; autrement dit, si et seulement s'il existe $a, b, c \in \mathbf{Q}$ avec $a^2 + b^2 = c^2$ et $D = \frac{ab}{2}$.*

Pour étudier les nombres congruents, on peut commencer par étudier l'ensemble des triangles rectangles à côtés rationnels, c'est-à-dire résoudre l'équation $a^2+b^2 = c^2$ en nombres rationnels. On pose $u = \frac{a}{c}$ et $v = \frac{b}{c}$, et on est ramené à trouver les points rationnels sur le cercle $u^2 + v^2 = 1$ avec $u > 0$ et $v > 0$. Pour cela, on note t la pente de la droite joignant (u, v) à $(-1, 0)$, dont l'équation est donc $v = t(u + 1)$; on a $t \in \mathbf{Q}$ et $(u, v) = (\frac{1-t^2}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1})$. En conclusion, $a, b, c \in \mathbf{Q}$ sont les côtés d'un triangle rectangle si et seulement s'il existe $t \in \mathbf{Q}$, $0 < t < 1$, tel que $a = \frac{1-t^2}{t^2+1}c$ et $b = \frac{2t}{t^2+1}c$. En posant $x = -t$ et $y = \frac{t^2+1}{c}$, ce qui précède permet presque[1] de démontrer le résultat suivant.

Proposition 2. *Si D est un entier positif sans facteur carré, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *D est congruent*

(ii) *L'équation $Dy^2 = x^3 - x$ a une solution dans $\mathbf{Q}^2$ avec $y \neq 0$.*

Déterminer si un entier est congruent ou pas, est un problème très ancien et très difficile. On a par exemple le résultat suivant « conjecturé » par Fibonacci (1175-1240).

Théorème 3 (Fermat (1601-1665))**.** *1 n'est pas un nombre congruent.*

C'est une des nombreuses utilisations que Fermat a trouvées pour sa méthode[2] de « la descente infinie ». Remarquons que si a, b, c sont des entiers non nuls vérifiant $a^4 - b^4 = c^4$, et si $x = \frac{a^2}{b^2}$, $y = \frac{ac^2}{b^3}$, alors $y = x^3 - x$. Le fait que 1 n'est pas congruent implique donc le théorème de Fermat[3] pour l'exposant 4.

Exemple 4 (Zagier). L'entier 157 est congruent, mais le triangle (a, b, c) le plus simple d'aire 157 est

$$a = \frac{6803298487826435051217540}{411340519227716149383203}, \qquad b = \frac{411340519227716149383203}{21666555693714761309610},$$
$$c = \frac{224403517704336969924557513090674863160948472041}{8912332268928859588025535178967163570016480830}.$$

Cet exemple montre que la chasse aux triangles rectangles à côtés rationnels d'aire D risque d'être un peu acrobatique... Le résultat suivant de Tunnell (1983) n'en est que plus remarquable.

Théorème 5. *Soit D un entier impair sans facteur carré. Si D est congruent, alors*

$$|\{x, y, z \in \mathbf{Z},\ 2x^2+y^2+8z^2 = D\}| = 2\cdot|\{x, y, z \in \mathbf{Z},\ 2x^2+y^2+32z^2 = D\}|. \quad (*)$$

Réciproquement, si D vérifie $(*)$, et si (une forme faible de) *la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer est vraie, alors D est congruent.*

Il y a un résultat similaire pour D pair. Comme il est très facile de décider si D vérifie ou non $(*)$, cela fournit un critère effectif permettant de décider qu'un nombre donné est non congruent, ou (sous Birch et Swinnerton-Dyer) congruent, et ce, sans exhiber de triangle rectangle d'aire D. Un entier congru à 5 ou 7 modulo 8 vérifie $(*)$ car les deux ensembles sont vides, mais on ne sait pas montrer que cela implique que D est congruent...

Comme le lecteur le constatera, la démonstration de ce théorème emprunte des chemins très détournés (ce qui en fait le charme) ; on peut légitimement se demander si une preuve plus directe ne serait pas possible, maintenant qu'on connaît la réponse.

1. Arithmétique des courbes elliptiques

Si C est une conique, on peut étudier l'ensemble $C(\mathbf{Q})$ des points à coordonnées rationnelles de C comme on l'a fait pour le cercle. On trouve un point $P \in C(\mathbf{Q})$ sur la conique et on paramètre les points de la conique par la pente d'une droite variable passant par P. Cette stratégie ne marche plus pour une courbe C donnée par une équation de degré 3 (comme la courbe C_D d'équation $Dy^2 = x^3 - x$) car, si on coupe par une droite passant par un point de $C(\mathbf{Q})$, et qu'on élimine y entre les deux équations, on obtient une équation de degré 3 en x dont on sait seulement qu'une des solutions est rationnelle ; les deux autres vivent donc, en général, dans une extension quadratique de $\mathbf{Q}$, mais pas dans $\mathbf{Q}$. Par contre, si on prend une droite passant par deux points rationnels de C ou tangente à un point rationnel de C, alors on obtient une équation dont deux des solutions (ou une solution double) sont rationnelles ; comme la somme des racines est aussi rationnelle, cela montre que cette droite recoupe C en un point rationnel.

Une *courbe elliptique* E sur un corps K est une courbe d'équation $y^2 = P(x)$, avec $P \in K[X]$, de degré 3, sans racine double[4]. On note $E(K)$ l'ensemble des solutions dans K^2 de $y^2 = P(x)$, et $\overline{E}(K) = E(K) \cup \{\infty\}$, avec la convention qu'une droite passe par ∞ si et seulement si elle est verticale[5]. On munit $\overline{E}(K)$ d'une loi de composition $+$ qui en fait un groupe commutatif[6] avec ∞ comme élément neutre et $P + Q + R = \infty$ si et seulement si (P, Q, R) sont alignés (avec les conventions évidentes si deux ou trois des points sont confondus ; en particulier, P est d'ordre 2 si et seulement si ∞ appartient à la tangente à E en P, c'est-à-dire si et seulement si $y = 0$; de même, P est d'ordre 3 si et seulement si la tangente en P à E a un contact d'ordre 3).

Théorème 6. *Si E est une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$, le groupe $\overline{E}(\mathbf{Q})$ est engendré par un nombre fini d'éléments ; il est donc isomorphe à $\overline{E}(\mathbf{Q})_{\text{tors}} \oplus \mathbf{Z}^{r(E)}$, où $\overline{E}(\mathbf{Q})_{\text{tors}}$, sous-groupe des points d'ordre fini[7], est un groupe fini, et $r(E) \in \mathbf{N}$.*

Ce résultat, conjecturé par Poincaré vers 1900, a été démontré par Mordell en 1922 en adaptant[8] la méthode de la descente infinie de Fermat ; c'est un cas particulier du célèbre théorème de Mordell-Weil. Le groupe $\overline{E}(\mathbf{Q})_{\text{tors}}$ se calcule très facilement ; par contre la détermination du rang $r(E)$ et des générateurs de $\mathbf{Z}^{r(E)}$ est très délicate. À ce jour, il n'y a pas d'algorithme[9] dont on puisse prouver qu'il va permettre de les déterminer, ce qui ne nous arrange pas en ce qui concerne le problème des nombres congruents, mais la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, dont il sera question plus loin, fournirait un tel algorithme si elle était démontrée.

Exemple 7. On note C_D la courbe elliptique d'équation $Dy^2 = x^3 - x$. Alors $Q_1 = (-1, 0)$, $Q_2 = (0, 0)$ et $Q_3 = (1, 0)$ sont d'ordre 2, et $\overline{C}_D(\mathbf{Q})_{\text{tors}} = \{\infty, Q_1, Q_2, Q_3\}$. En conséquence, D est congruent si et seulement si $r(C_D) \geqslant 1$.

2. L'heuristique de Birch et Swinnerton-Dyer

Si p est un nombre premier, $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un corps. Si $r = \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$ et p ne divise pas b, on peut voir r comme un élément de $\mathbf{F}_p$ en réduisant a et b modulo p (i.e. en prenant le quotient des images de a et b dans $\mathbf{F}_p$, ce qui ne dépend pas des choix de a et b). En particulier, si E est une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ d'équation $y^2 = P(x)$, on peut aussi considérer E comme une courbe elliptique sur $\mathbf{F}_p$ pour tous les *bons* nombres premiers (ceux ne divisant ni les dénominateurs des coefficients de P, ni le numérateur de son discriminant (note 4)).

Si E est une courbe elliptique sur $\mathbf{F}_p$, on a trivialement, $|\overline{E}(\mathbf{F}_p)| \leqslant 2p+1$, mais on dispose du résultat plus précis suivant.

Théorème 8 (Hasse). *Si E est une courbe elliptique sur $\mathbf{F}_p$, et si $a_p = p + 1 - |\overline{E}(\mathbf{F}_p)|$, alors $|a_p| \leqslant 2\sqrt{p}$*

L'idée de Birch et Swinnerton-Dyer (1960-1965), est que, si $r(E) \geqslant 1$, alors il devrait y avoir en moyenne plus de points dans $E(\mathbf{F}_p)$ que si $r(E) = 0$, à cause de la réduction modulo p des éléments de $E(\mathbf{Q})$. Comme ce nombre de points est a peu près p d'après le théorème de Hasse, le produit $\prod_p \frac{p}{|\overline{E}(\mathbf{F}_p)|}$ devrait avoir des chance de diverger (d'être nul), si $r(E) \geqslant 1$, et de converger, si $r(E) = 0$. Pour donner un sens à tout ceci, nous allons avoir besoin de passer par les fonctions holomorphes.

3. Fonctions holomorphes

Définition 9. *Si Ω est un ouvert connexe de $\mathbf{C}$, on dit que $f : \Omega \to \mathbf{C}$ est holomorphe sur Ω, si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ et une suite $(a_n(z_0))_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres complexes tels que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0)(z - z_0)^n$ si $z \in \Omega$ et $|z - z_0| < r$.*

Les fonctions holomorphes ont des propriétés miraculeuses et représentent un petit paradis (bien caché des taupins et des polytechniciens ; on se demande bien pourquoi...). En particulier, elles vérifient les propriétés suivantes :

(H0) Si f atteint son maximum en un point de Ω, alors f est constante. (*Principe du maximum*).

(H1) Si f_n est une suite de fonctions holomorphes sur Ω convergeant uniformément sur tout compact, alors la limite est holomorphe sur Ω.

(H2) Si $f(x,s) : X\times\Omega\to\mathbf{C}$ est sommable en x, holomorphe en s, et s'il existe g avec $\int_X |g(x)|dx < +\infty$ et $|f(x,s)| \leqslant |g(x)|$ quels que soient x et s, alors $F(s)=\int_X f(x,s)dx$ est holomorphe sur Ω.

(H3) Si f et g sont deux fonctions holomorphes sur Ω telles qu'il existe un compact $K\subset\Omega$ sur lequel $f-g$ a une infinité de zéros, alors $f=g$ sur Ω tout entier.

Si $\Omega\subset\Omega'$ sont connexes et si f est holomorphe sur Ω, il est en général impossible de prolonger f en une fonction holomorphe sur Ω'. Quand c'est possible, un tel prolongement est unique d'après la propriété (H3), et est appelé *prolongement analytique* de f à Ω'.

Exemple 10. La fonction gamma d'Euler. Si $\mathrm{Re}(s)>0$, l'intégrale $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^s\frac{dt}{t}$ converge. La fonction Γ est holomorphe et ne s'annule pas sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s)>0$, et y vérifie l'équation fonctionnelle $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$. On la prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}-\{0,-1,-2,\dots\}$ en posant $\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+n)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)}$, où $n\in\mathbf{N}$ est choisi de telle sorte que $\mathrm{Re}(s)+n>0$. La fonction $\frac{1}{\Gamma(s)}$ est alors holomorphe sur $\mathbf{C}$ avec des zéros simples aux entiers négatifs.

Exemple 11. La fonction thêta. On note $\mathcal{H}=\{z\in\mathbf{C},\ \mathrm{Im}(z)>0\}$ le demi-plan de Poincaré. On pose $q=e^{2i\pi z}$, et on définit $\Theta:\mathcal{H}\to\mathbf{C}$ par

$$\Theta(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} q^{n^2}.$$

On a $\Theta(z+1)=\Theta(z)$ et $\sqrt{\frac{z}{2i}}\Theta(\frac{z}{2})=\Theta(\frac{-1}{2z})$ d'après la formule de Poisson[10].

Exemple 12. La fonction zêta de Riemann. Si $\mathrm{Re}(s)>1$, la série

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}=\prod_p (1-p^{-s})^{-1}$$

converge sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s)>1$, et y définit une fonction holomorphe d'après la propriété (H1). On montre[11] que cette fonction admet un prolongement analytique à $\mathbf{C}-\{1\}$, ce qui permet d'écrire les formules suivantes qui font la joie des théoriciens des nombres et des physiciens théoriciens.

$$\begin{aligned}
&1+1+1+1+1+\cdots=\zeta(0)=-1/2,\\
&1+2+3+4+5+\cdots=\zeta(-1)=-1/12,\\
&1+4+9+16+25+\cdots=\zeta(-2)=0,\\
&1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots=\exp(-\zeta'(0))=\sqrt{2\pi}.
\end{aligned}$$

4. Fonction L d'une courbe elliptique

Soit E une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$. Si p est un bon nombre premier, soit a_p l'entier défini par $a_p = 1 + p - |\overline{E}(\mathbf{F}_p)|$. On définit la [12] fonction $L(E, s)$, et des entier a_n, pour $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ par

$$L(E, s) = \prod_{p \text{ bon}} \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}.$$

Il est facile de voir que le produit converge pour $\mathrm{Re}(s) > 2$, et même $\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{2}$ si on utilise la majoration $|a_p| \leqslant 2\sqrt{p}$ de Hasse, et définit une fonction holomorphe sur ce demi-plan.

Théorème 13. *La fonction $L(E, s)$ admet un prolongement analytique à $\mathbf{C}$ tout entier.*

Ce résultat a été conjecturé par HASSE vers 1935 ; c'est un cas particulier de la conjecture de Hasse-Weil. Le premier résultat dans sa direction est celui, dû à WEIL, de la famille [13] des courbes C_D. SHIMURA (1958), inspiré par des travaux d'EICHLER (1954), a démontré de nombreux cas de cette conjecture en utilisant la théorie des formes modulaires dont il sera question plus loin. Le pas le plus important a été accompli par WILES en 1994, dans sa quête de la démonstration du théorème de Fermat, qui a démontré cette conjecture dans le cas où E est d'équation $y^2 = P(x)$ et P a toutes ses racines dans $\mathbf{Q}$. Le cas général a finalement été résolu par BREUIL, CONRAD, DIAMOND et TAYLOR en 1999.

La quantité $\prod_{p \text{ bon}} \frac{p}{|\overline{E}(\mathbf{F}_p)|}$ apparaissant dans l'heuristique de BIRCH et SWINNERTON-DYER est, au moins formellement, égale à $L(E, 1)$, et leur heuristique devient :

Conjecture 14 (Birch et Swinnerton-Dyer (forme faible))**.** « $r(E) \geqslant 1$ » *si et seulement si* « $L(E, 1) = 0$ ».

On peut préciser cet énoncé [14]. Notons $r_\infty(E)$ l'ordre du zéro en $s = 1$ de $L(E, s)$. La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer prend alors la forme suivante.

Conjecture 15 (Birch et Swinnerton-Dyer)**.** *On a l'égalité $r(E) = r_\infty(E)$.*

C'est sous cette forme que le problème vaut un million de dollar. Il y a en fait une forme plus précise [15] de cette conjecture (donnant une formule pour la quantité conjecturalement non nulle $\lim_{s\to 1}(s - 1)^{-r(E)} L(E, s)$), et plus générale ($\mathbf{Q}$ peut être remplacé par une extension finie, ou même par des corps de caractéristique p, extensions finies du corps $\mathbf{F}_p(T)$).

Les résultats sont peu nombreux ; ce sont les suivants.

- COATES et WILES (1977) ont démontré que, si $E = C_D$, ou plus généralement si E est une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$ à multiplication complexe [16], alors « $L(E, 1) \neq 0$ » $\Rightarrow$ « $r(E) = 0$ ».
- GROSS et ZAGIER (1983) ont donné une formule explicite [17] pour $L'(E, 1)$ en termes de certains points rationnels sur E, dits « de Heegner », et qui sont construits de manière purement analytique (ce sont ces points qui permettent d'amuser la galerie en exhibant des triangles rectangles à côtés rationnels avec un

nombre astronomique de chiffres). Comme conséquence, ils obtiennent l'implication : « $r_\infty(E) = 1$ » $\Rightarrow$ « $r(E) \geqslant 1$ ».

• KOLYVAGIN (1989) a démontré, en utilisant ces points de Heegner, l'implication suivante « $r_\infty(E) \leqslant 1$ » $\Rightarrow$ « $r(E) = r_\infty(E)$ ».

C'est tout ! On est dans la situation paradoxale où plus il est censé y avoir de points rationnels ($r_\infty(E) \geqslant 2$), moins on sait en construire... Mentionnons quand-même, qu'en général, le rang $r(E)$ est égal à 0 ou 1, mais qu'on connaît des courbes avec $r(E) \geqslant 24$, et il y a tout lieu de croire que $r(E)$ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes.

5. La stratégie de TUNNELL

La théorème de Coates-Wiles mentionné ci-dessus fournit un critère pour que D ne soit pas congruent : il suffit que $L(C_D, 1) \neq 0$. Réciproquement, si la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer est vraie (même sous sa forme faible), alors la nullité de $L(C_D, 1)$ implique que D est congruent. C'est le point de départ de la démonstration du théorème de Tunnell. Le problème est donc de calculer $L(C_D, 1)$ et de décider si ce nombre est nul ou pas. Il y a deux problèmes sérieux qui se posent : le produit définissant $L(C_D, 1)$ converge beaucoup trop lentement (s'il converge..., cf. note 1) pour qu'on puisse l'utiliser pour le calcul de $L(C_D, 1)$, et de toute façon, il est impossible de prouver qu'un nombre réel est nul en le calculant de manière approchée, sauf si on sait par ailleurs qu'il s'agit d'un entier. La solution que TUNNELL apporte à ces deux problèmes est particulièrement élégante.

Théorème 16 (TUNNELL). *Soit* $\Omega = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - x}}$, *et soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n q^n$ *le développement de*

$$\Theta(z) \cdot \Theta(2z) \cdot (2\Theta(32z) - \Theta(8z)),$$

alors, si D est impair (il y a une formule similaire pour les entiers pairs) *sans facteur carré,*

$$L(C_D, 1) = \frac{\Omega}{16\sqrt{D}} \cdot b_D^2.$$

Comme b_D est la différence des deux termes apparaissant dans la condition $(*)$ du th. 5, cela explique comment ledit théorème peut se déduire du théorème de Coates-Wiles. La démonstration du théorème 16 repose sur la théorie des formes modulaires dont il est question au § suivant.

6. Formes modulaires

Si f est holomorphe sur $\mathcal{H}$ et vérifie $f(z+1) = f(z)$, alors f a un développement de Fourier (q-développement)

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n q^n, \quad \text{avec } q = e^{2i\pi z}.$$

On dit que f est à croissance lente à l'infini si $a_n = 0$ pour tout $n < 0$ et s'il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que $a_n = O(n^C)$.

Si N est un entier, on note $\Gamma_0(N)$ le sous-groupe de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ des $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ avec c divisible par N. On note $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Définition 17. *Si $k \in \frac{1}{2}\mathbf{N}$ et $j : \Gamma_0(N) \to \{$racines de l'unité$\}$ vérifie $j(T) = 1$, l'espace $M_k(\Gamma_0(N), j)$ des formes modulaires de poids k et type j pour $\Gamma_0(N)$ est l'espace des fonctions f, holomorphes sur $\mathcal{H}$, vérifiant*

$$f\big(\frac{az+b}{cz+d}\big) = j\big(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\big)(cz+d)^k f(z), \quad \textit{quels que soient } z \in \mathcal{H} \textit{ et } \big(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\big) \in \Gamma_0(N),$$

et qui sont à croissance lente à l'infini.

Remarque 18. (i) Il n'est pas du tout clair que de telles formes existent ; et de fait, il faut choisir correctement la fonction j pour $M_k(\Gamma_0(N), j)$ soit non nul.

(ii) $M_k(\Gamma_0(N), j)$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension $\leqslant 1 + \frac{Nk}{12}\prod_{p|N}(1+\frac{1}{p})$.

(iii) Les formes modulaires ont un don d'ubiquité assez remarquable. On les rencontre en théorie des nombres [18], en combinatoire ou en physique théorique, bien que ce soient des objets définis de manière purement analytique.

Exemple 19. La fonction Θ est une forme modulaire de poids $\frac{1}{2}$ pour $\Gamma_0(4)$ et un j un peu compliqué (cela suit facilement des deux équations fonctionnelles déjà mentionnées). Plus généralement, si P est un polynôme homogène de degré d en $n_1, \dots, n_r$, et si Q est une forme quadratique définie positive à coefficients entiers, alors la fonction thêta $\Theta_{Q,P}(z) = \sum_{(n_1,\dots,n_r)\in\mathbf{Z}^r} P(n_1, \dots, n_r) q^{Q(n_1,\dots,n_r)}$ est une forme modulaire de poids $d + \frac{r}{2}$.

Si $t \in \mathbf{C}$ et $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, soit $\sigma_t(n) = \sum_{d|n,\, d\geqslant 1} d^t$.

Exemple 20. (i) Si k est un entier pair $\geqslant 3$, on définit [19] la série d'Eisenstein G_k par $G_k(z) = \frac{(k-1)!}{2\cdot(2i\pi)^k}\sum'_{m,n}\frac{1}{(mz+n)^k}$. C'est un élément de $M_k(\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}), 1)$; son q-développement est $G_k = \frac{(k-1)!\zeta(k)}{(2i\pi)^k} + \sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n$.

(ii) Pour $k = 2$, la série ci-dessus ne converge plus, mais on peut définir une série d'Eisenstein $G_2^*(z) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{2\cdot(2i\pi)^2}\sum'_{m,n}\frac{1}{(mz+n)^k}\cdot\frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}$, qui vérifie la loi de transformation pour appartenir à $M_2(\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}), 1)$, mais n'est pas holomorphe (elle n'en est pas très loin). Son développement de Fourier est donné par

$$G_2^*(z) = \frac{1}{8\pi y} + \frac{\zeta(2)}{(2i\pi)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\sigma_1(n)q^n.$$

Comme échauffement pour le théorème de Tunnell, mentionnons l'identité de Jacobi (1829) :

$$4G_2^*(4z) - G_2^*(z) = \frac{3\zeta(2)}{(2i\pi)^2}\Theta^4,$$

qui se démontre en constatant que les deux membres appartiennent à $M_2(\Gamma_0(4), 1)$ qui est de dimension 2, et que la différence est divisible par q^2. On en tire, en comparant les q-développements, une forme effective du théorème des 4 carrés de Lagrange (1770).

$$|\{(a,b,c,d) \in \mathbf{Z}^4,\ a^2+b^2+c^2+d^2 = n\}| = 8\sum_{d|n,\, 4\nmid d} d.$$

7. Courbes elliptiques et formes modulaires

Théorème 21. *Si E est une courbe elliptique définie sur* $\mathbf{Q}$ *et* $L(E,s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$*, alors* $f = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n \in M_2(N_E, 1)$*, où* N_E *est un entier explicite ne dépendant que des* p *mauvais.*

Autrement dit, *une courbe elliptique définie sur* $\mathbf{Q}$ *est modulaire*. Ce résultat, conjecturé de manière vague par Taniyama en 1955, et précisé par Weil en 1966 suite aux travaux de Shimura sus-mentionnés, est celui que démontrent Wiles[20] et Breuil-Conrad-Diamond-Taylor. Le prolongement analytique de $L(E,s)$ s'en déduit en utilisant la formule (cf. note 1)

$$L(E,s) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} f(iy) y^s \frac{dy}{y},$$

ce qui permet d'utiliser les propriétés analytiques de f pour étudier $L(E,s)$. C'est un cas particulier de la philosophie de Langlands sur les fonctions L arithmétiques (elle devraient provenir de *formes automorphes*, généralisations des formes modulaires, et donc avoir des tas de propriétés mirifiques). Dans le cas de la courbe C_D, la forme modulaire que l'on obtient est une combinaison linéaire de fonctions thêta.

La modularité d'une courbe elliptique E en fournit[21] une description analytique en termes du demi-plan de Poincaré. Ceci est à la base de la construction des points de Heegner (ce sont les images[22] des points $\tau \in \mathcal{H}$ solutions d'une équation du second degré à coefficients dans $\mathbf{Q}$) qui, comme nous l'avons déjà mentionné, jouent un rôle essentiel dans la démonstration du résultat de Kolyvagin ($r(E) = r_\infty(E)$ si $r_\infty(E) \leqslant 1$) ; ce résultat n'est donc devenu valable pour toutes les courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$ que depuis les travaux de Wiles et Breuil-Conrad-Diamond-Taylor.

Une autre application de la modularité des courbes elliptiques est le résultat suivant qui permet, modulo un calcul numérique, de déterminer la valeur de $L(E,1)$, ce qui fournit, modulo la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (sous sa forme faible), un algorithme pour décider de l'existence de solutions en nombres rationnels pour une équation $y^2 = P(x)$, avec P de degré 3.

Corollaire 22 (Manin-Drinfeld)**.** *Si E est d'équation* $y^2 = P(x)$*, et si* α *est la plus grande racine réelle de* P*, alors*

$$\Big(\int_\alpha^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}\Big)^{-1} L(E,1)$$

est un nombre rationnel de dénominateur explicite.

Le point de départ de la démonstration du théorème 16 est un théorème de Waldspurger (1979). Si $f = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n \in M_{2k}(\Gamma_0(N), 1)$, k entier, si D est sans facteur carré et premier à N, et si χ_D est le caractère de Legendre (cf. note 1), on peut montrer que $f \otimes \chi_D$, défini par $f \otimes \chi_D = \sum \chi_D(n) a_n q^n$, est un élément de $M_{2k}(\Gamma_0(ND^2), 1)$. Le théorème de Waldspurger dit, de manière vague, que les $L(f \otimes \chi_D, k)$ sont, quand D varie, les carrés de coefficients de Fourier de formes modulaires de poids $k + \frac{1}{2}$ pour $\Gamma_0(N')$, avec N' explicite. « Il n'y a plus qu'à » exhiber une base de l'espace de ces formes modulaires et calculer quelques coefficients pour obtenir une identité valable pour tout D.

Le lecteur désireux d'en apprendre plus sur ce sujet fascinant est invité à consulter les ouvrages suivants ; en particulier, celui de KOBLITZ, dont le présent texte est fortement inspiré.

8. Références

[1] Y. HELLEGOUARCH, *Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles*, Masson, Paris, 1997.

[2] D. HUSEMÖLLER, *Elliptic curves*, GTM **111** Springer-Verlag, 1987.

[3] N. KOBLITZ, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*, GTM **97**, Springer-Verlag, 1984.

[4] S. LANG, *Introduction to modular forms*, Corrected reprint of the 1976 original, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **222**, Springer-Verlag, 1995.

[5] J. SILVERMAN, *The arithmetic of elliptic curves*, GTM **106**, Springer-Verlag, 1986.

Notes

1. On a en fait démontré que D est congruent si et seulement si l'équation $Dy^2 = x^3 - x$ a une solution dans $\mathbf{Q}^2$ avec $-1 < x < 0$. La courbe $C_D(\mathbf{R})$ a deux composantes connexes : un ovale dans la région $-1 \leqslant x \leqslant 0$, et une courbe avec une direction asymptotique verticale dans la région $x \geqslant 1$. L'application qui, à $P = (x, y) \in C_D(\mathbf{R})$, associe $P' = (x', y')$, intersection de la droite $(P, (-1, 0))$ avec C_D, échange les deux composantes connexes comme le montre un petit dessin (ou un calcul explicite), et envoie $C_D(\mathbf{Q})$ dans lui-même comme il est expliqué au § 1 (ou comme le montre un calcul explicite). Ceci permet de montrer que l'existence d'une solution dans $\mathbf{Q}^2$ avec $-1 < x < 0$ est équivalente à celle d'une solution dans $\mathbf{Q}^2$ avec $x > 1$. On en déduit la proposition.

2. Soit $(x, y) \in C_D(\mathbf{Q})$, avec $x > 1$. Si on écrit $x = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbf{N}$, premiers entre eux, on obtient $b^4y^2 = ab(a-b)(a+b)$ et donc a et b sont des carrés dans $\mathbf{N}$ [car a est premier à $b(a-b)(a+b)$ et b est premier $a(a-b)(a+b)$], et donc x est un carré dans $\mathbf{Q}$. De plus, comme $\mathrm{pgcd}(a-b, a+b) \mid 2$, cela implique que $a-b$ est soit un carré, auquel cas $x+1$ et $x-1$ sont des carrés, soit le double d'un carré, auquel cas $x+1$ et $x-1$ sont aussi le double d'un carré.

Si K est un sous-corps de $\mathbf{C}$, soit $X(K) = \{(t, u, v) \in K^3,\ t^2 - u^2 = 1,\ v^2 - t^2 = 1\}$. Des petits calculs amusants montrent que l'application

$$(t, u, v) \mapsto f(t, u, v) = \big((t+u)(t+v), (t+u)(t+v)(u+v)\big)$$

induit une bijection de $X(\mathbf{Q})$ sur $C_1(\mathbf{Q}) - \{(-1, 0),\ (0, 0),\ (1, 0)\}$; la bijection réciproque étant donnée par

$$(x, y) \mapsto g(x, y) = \Big(\frac{x^2+1}{2y}, \frac{x^2-2x-1}{2y}, \frac{x^2+2x-1}{2y}\Big).$$

De plus, si $(x, y) = f(t, u, v)$, alors $x - 1 = (u+t)(u+v)$ et $x + 1 = (v+t)(v+u)$.

Soit alors $(t, u, v) \in X(\mathbf{Q})$. Les 8 points $(\pm t, \pm u, \pm v)$ appartiennent à $X(\mathbf{Q})$; on peut donc s'arranger pour que $t > 0$ et $v > 0$. Dans ce cas, $x^+ = (t+u)(t+v)$ et $x^- = (t-u)(t+v)$ sont tous deux positifs et donc sont des carrés d'après la discussion ci-dessus. Par ailleurs, $(x^+ + 1)(x^- + 1) = 2$ et comme $x^+ + 1$ et $x^- + 1$ sont soit des carrés, soit le double de carrés, l'un d'eux est un carré (et l'autre le double d'un carré). En conclusion, si $C_D(\mathbf{Q})$ contient un point $P = (x, y)$, avec $y \neq 0$, alors il contient un point $P_0 = (x_0, y_0)$ tel que l'on ait $x_0 = t_1^2$, $x_0 + 1 = u_1^2$ et $x_0 - 1 = v_1^2$, avec $t_1, u_1, v_1 \in \mathbf{Q}$. Soit $P_1 = (x_1, y_1) = f(t_1, u_1, v_1) \in C_1(\mathbf{Q})$. On peut de plus, d'après la discussion précédente, choisir les signes de t_1, u_1, v_1 de telle sorte que x_1, x_1+1 et x_1-1 soient des carrés dans $\mathbf{Q}$.

On a alors $x_0 = t_1^2 = (\frac{x_1^2+1}{2y_1})^2$. Écrivons $x = \frac{a_1}{b_1}$, avec a_1 et b_1 premiers entre eux. Alors $x_0 = \frac{(a_1^2+b_1^2)^2}{4a_1b_1(a_1^2-b_1^2)}$. Comme a_1b_1 est premier à $a_1^2+b_1^2$, on a pgcd$((a_1^2+b_1^2)^2, 4a_1b_1(a_1^2-b_1^2)) = 1$ ou 4 suivant que l'un des nombres a_1, b_1 est pair ou que les deux sont impairs (s'ils sont tous les deux impairs, alors $a_1^2+b_1^2$ est divisible par 2 et pas par 4). En conclusion, si on écrit $x_0 = \frac{a_0}{b_0}$, avec a_0 et b_0 premiers entre eux, alors $a_0 \geqslant \frac{1}{4}(a_1^2+b_1^2)^2$, et il faut 4 fois moins de chiffres pour écrire x_1 que x_0.

En partant d'une solution, ceci permet de construire une solution beaucoup plus simple, et finalement de montrer qu'il n'y en a pas (méthode de la descente infinie).

3. Il semble que FERMAT se soit légèrement laissé emporté par son enthousiasme quand il a découvert ce fait...

4. Ceci se traduit par la non nullité du discriminant $\Delta(P)$ du polynôme P. Si $P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, on a

$$\Delta(P) = \begin{vmatrix} a & 0 & 3a & 0 & 0 \\ b & a & 2b & 3a & 0 \\ c & b & c & 2b & 3a \\ d & c & 0 & c & 2b \\ 0 & d & 0 & 0 & c \end{vmatrix}.$$

La matrice ci-dessus est celle de l'application $(U, V) \mapsto UP + VP'$, où U est de degré $\leqslant 1$, V de degré $\leqslant 2$. La nullité de $\Delta(P)$ est donc équivalente à l'existence de (U, V) avec $UP = -VP'$ et U de degré $\leqslant 1$, V de degré $\leqslant 2$, ce qui est possible si et seulement si P et P' ne sont pas premiers entre eux.

5. Cette définition de $\overline{E}(K)$ est parfaitement artificielle. Une définition naturelle demande de travailler dans le plan projectif $\mathbf{P}^2$, espace des droites de l'espace vectoriel de dimension 3. Celui-ci peut être vu comme la réunion du plan affine et d'une droite (projective) à l'infini dont les points correspondent aux directions de droites du plan affine ; notre ∞ est le point de cette droite à l'infini correspondant à la direction verticale.

6. L'associativité n'est pas une évidence. Elle peut se vérifier par un calcul explicite assez pénible (mais on peut demander l'aide d'un ordinateur...). Une solution plus élégante consiste, si K est un sous-corps de $\mathbf{C}$, à passer par les fonctions elliptiques. (Dans le cas général, il y a une jolie démonstration passant par la géométrie projective.)

Si $\Lambda \subset \mathbf{C}$ est un réseau (i.e. $\Lambda = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$, avec $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbf{R}$), la série $\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}}(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2})$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbf{C}-\Lambda$. Elle définit donc une fonction $\wp(z,\Lambda)$, dite « de Weierstrass », holomorphe sur $\mathbf{C}-\Lambda$ et périodique de période Λ. De plus, au voisinage de 0, on a

$$\wp(z,\Lambda) = z^{-2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(2n+1)G_{2n+2}(\Lambda)z^{2n}, \quad \text{avec } G_k(\Lambda) = \sum_{\omega\in\Lambda-\{0\}} \omega^{-k}.$$

On a alors $\wp'(z,\Lambda) = -2z^{-3} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n+1)G_{2n+2}(\Lambda)z^{2n-1}$, et un petit calcul montre que $H(z) = \wp'(z,\Lambda)^2 - 4\wp(z,\Lambda)^3 - 60G_4(\Lambda)\wp(z,\Lambda) - 140G_6(\Lambda)$ s'annule en $z=0$. On peut donc étendre H en une fonction holomorphe, périodique de période Λ, sur $\mathbf{C}$ tout entier. Par compacité de $\mathbf{C}/\Lambda$, H atteint son maximum et donc est constante d'après le principe du maximum ; par suite elle est identiquement nulle. En conclusion $(\wp(z,\Lambda), \wp'(z,\Lambda)) \in E(\mathbf{C})$ si $\mathbf{C}$ est la courbe elliptique d'équation $y^2 = 4x^3 - 60G_4(\Lambda) - 140G_6(\Lambda)$. Le même genre d'arguments montre que l'on obtient une bijection $\mathbf{C}/\Lambda \to \overline{E}(\mathbf{C})$ en envoyant z mod Λ sur $(\wp(z,\Lambda), \wp'(z,\Lambda))$, et 0 mod Λ sur ∞, et que l'addition sur

$\mathbf{C}$ donne naissance, via cette bijection, à l'addition sur $\overline{E}(\mathbf{C})$ définie en termes d'alignement de points.

Maintenant, si K est un sous-corps de $\mathbf{C}$ et si E est une courbe elliptique sur K, un changement linéaire de variables permet de mettre l'équation de E sous la forme $y^2 = 4x^3 - \alpha x - \beta$, avec $\alpha, \beta \in K$. Par ailleurs, des techniques de base de fonctions holomorphes permettent de montrer qu'il existe un unique réseau Λ de $\mathbf{C}$ tel que $\alpha = 60 G_4(\Lambda)$ et $\beta = 140 G_6(\Lambda)$. Ceci permet d'identifier $\overline{E}(K)$ à un sous-groupe de $\mathbf{C}/\Lambda$. Il faut quand-même faire attention au fait que, $\wp$ étant une fonction transcendante, l'appartenance de $\wp(z, \Lambda)$ à K ne permet pas de dire quoi que ce soit en ce qui concerne le sous-corps de $\mathbf{C}$ engendré par z.

7. Si K est un sous-corps de C, et si $\overline{E}(\mathbf{C}) \cong \mathbf{C}/\Lambda$, alors le sous-groupe des points de n-torsion de $\overline{E}(K)$ s'identifie à un sous-groupe de $\frac{1}{n}\Lambda/\Lambda \cong (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^2$; en particulier il est de cardinal $\leqslant n^2$.

8. La preuve que nous avons donnée du fait que 1 n'est pas congruent peut se réinterpréter en utilisant la loi de groupe sur $\overline{C}_1(\mathbf{Q})$. Les 8 automorphismes de $X(\mathbf{Q})$ donnés par $(t, u, v) \mapsto (\pm t, \pm u, \pm v)$ sont induits par les automorphismes $P \mapsto \pm P + Q$, où Q est un des 4 points de 2-torsion. Par ailleurs, le point P_1 que l'on a construit à partir du point P_0 vérifie $2P_1 = \pm P_0$. On a donc démontré que, si $P = (x, y) \in C_1(\mathbf{Q})$ est tel que x, $x+1$ et $x-1$ sont des carrés dans $\mathbf{Q}$, alors il existe $P' \in C_1(\mathbf{Q})$ tel que $P = 2P'$; plus généralement, on a prouvé, en utilisant le fait que x, $x+1$ et $x-1$ sont presque des carrés dans $\mathbf{Q}$, qu'il existe un point Q de 2-torsion, et $P' \in C_1(\mathbf{Q})$ tel que $P = 2P' + Q$. Le dernier argument de la démonstration montre que P' est nettement plus simple que P. En itérant le procédé en partant de P', cela permet de prouver que $\overline{C}_1(\mathbf{Q})$ est engendré par les points de 2-torsion. La démonstration du théorème de Mordell suit exactement le même schéma.

9. Lors du congrès international des mathématiciens de 1900, Hilbert a énoncé une série de 23 problèmes, dont le 10-ième était de produire un algorithme permettant de décider si une équation polynomiale (en plusieurs variables), à coefficients entiers, a, ou non, des solutions en nombres entiers. Ce problème fut finalement résolu par Matiyasevich en 1970, qui prouva qu'un tel algorithme ne peut pas exister, au grand soulagement des arithméticiens qui voyaient d'un mauvais œil l'idée qu'un ordinateur puisse les mettre au chômage. En poussant plus loin les méthodes de Matiyasevich, on peut construire des polynômes explicites pour lesquels on peut décider arbitrairement de l'existence ou de la non existence de solutions en nombres entiers, sans rajouter de contradiction dans les mathématiques... C'est un peu ennuyeux, car cela veut dire qu'on n'est jamais sûr que le problème auquel on s'attaque n'est pas de ce type.

Le théorème de Matiyasevich n'exclut pas, a priori, l'existence d'un algorithme pour décider si un polynôme (en plusieurs variables) a des solutions rationnelles ou pas. Les courbes elliptiques fournissent le premier test non trivial dans cette direction ; la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer fournissant un tel algorithme (cf. cor. 22), si elle est vraie...

10. La transformée de Fourier de $e^{-\pi x^2}$ est $e^{-\pi x^2}$; celle de $e^{-\pi t x^2}$ est donc $t^{-1/2} e^{-\pi t^{-1} x^2}$, et la formule de Poisson nous fournit l'identité

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\pi t n^2} = t^{-1/2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\pi t^{-1} x^2}.$$

Ceci se traduit en l'identité $\sqrt{\frac{z}{2i}}\Theta(\frac{z}{2}) = \Theta(\frac{-1}{2z})$ si $z \in i\mathbf{R}_+^*$, et comme les deux membres sont holomorphes sur $\mathcal{H}$ cette identité est vraie pour tout $z \in \mathcal{H}$ d'après la propriété (H3).

11. Une manière de procéder est de partir de l'identité $\int_0^{+\infty} e^{-at} t^s \frac{dt}{t} = \Gamma(s) a^{-s}$ valable si $\mathrm{Re}(s) > 0$ et $\mathrm{Re}(a) > 0$. Ceci permet d'écrire

$$\xi(s) = \Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-s/2}\zeta(s) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \Big(\Theta(\frac{it}{2}) - 1\Big) t^{s/2}\frac{dt}{t}.$$

En coupant cette intégrale en deux à $t = 1$, et en utilisant l'équation fonctionnelle de Θ, cela permet de montrer que ξ a un prolongement analytique à $\mathbf{C} - \{0,1\}$, a des pôles simples en 0 et 1, et vérifie l'équation fonctionnelle $\xi(s) = \xi(1-s)$. Comme $\Gamma(\frac{s}{2})^{-1}$ s'annule en $0, -2, -4, \cdots$, on en déduit que $\zeta(-2n) = 0$ si $n \in \mathbf{N}$.

12. Cette fonction n'est pas celle qui est habituellement considérée ; elle en diffère par la multiplication par des facteurs en les mauvais p, mais comme ceux-ci ne s'annulent pas en $s = 1$, cela ne change rien en ce qui concerne la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer. La bonne fonction $L(E,s)$ a une équation fonctionnelle plus sympathique que celle considérée dans cet article : il existe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ et $N \in \mathbf{N}$ tel que, si $\Lambda(E,s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} N^{s/2} L(E,s)$, alors $\Lambda(E, 2-s) = \varepsilon\Lambda(E,s)$; en particulier, si $\varepsilon = -1$, alors $r_\infty(E)$ est impair et $L(E,1) = 0$.

13. Dans ce cas, on a le résultat suivant. On définit $\delta : \mathbf{Z}[i] \to \{0, 1, i, -1, -i\}$ par

$$\begin{cases} \delta(\omega) = 0 & \text{si } \omega \text{ est divisible par } 1+i \text{ dans } \mathbf{Z}[i], \\ \omega\delta(\omega) - 1 \text{ est divisible par } (1+i)^3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors

$$L(C_1, s) = \frac{1}{4}\sum_{\omega \in \mathbf{Z}[i]-\{0\}} \frac{\omega\delta(\omega)}{|\omega|^{2s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}.$$

Le cas D général se déduit facilement du cas $D = 1$: on a $L(C_D, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_D(n) a_n n^{-s}$, où $\chi_D : \mathbf{Z} \to \{-1, 0, 1\}$ est le symbole de Legendre modulo D. Ce symbole de Legendre est caractérisé par les propriétés suivantes : $\chi_D(n + 4D) = \chi_D(n)$, $\chi_D(n) = 0$ si $(D, n) \neq 1$, et

$$\chi_D(nm) = \chi_D(n)\chi_D(m), \quad \chi_D(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } D \text{ est un carré dans } \mathbf{F}_p^*, \\ -1 & \text{si } D \text{ n'est pas un carré dans } \mathbf{F}_p^*. \end{cases}$$

L'existence de χ_D est une conséquence de la loi de réciprocité quadratique conjecturée par Euler en 1783 et démontrée par Gauss en 1801.

14. En fait, Birch et Swinnerton-Dyer avaient été plus optimistes et avaient conjecturé que

$$\prod_{p \text{ bon},\ p \leqslant x} \frac{p}{|\overline{E}(\mathbf{F}_p)|} \sim C(\log x)^{-r(E)}.$$

Goldfeld (1982) a prouvé que, si c'est le cas, alors $r_\infty(E) = r(E)$, la fonction $L(E,s)$ vérifie l'hypothèse de Riemann (i.e. elle ne s'annulle pas pour $\mathrm{Re}(s) > 1$), mais, de manière surprenante, que l'on a $C = \frac{L(E,1)}{\sqrt{2}}$ au lieu de $C = L(E,1)$, si $r(E) = 0$.

15. Celle-ci prend la forme $\lim_{s\to 1}(s-1)^{-r(E)} L(E,s) = |\text{Ш}(E)| \cdot R_\infty(E) \cdot \Omega_\infty(E) \cdot \prod_{p \text{ mauvais}} c_p$, où c_p est un nombre rationnel explicite, $\Omega_\infty(E)$ est la période réelle de E (donnée par $\Omega_\infty(E) = 2\int_\alpha^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$, si E est d'équation $y^2 = P(x)$ et α est la plus grande racine réelle de P), $R_\infty(E)$ est un « régulateur » mesurant la taille des générateurs de $\overline{E}(\mathbf{Q})$, et $\text{Ш}(E)$, le *groupe de Tate-Shafarevich* de E, est un groupe *conjecturalement* fini.

Prouver que ce groupe est fini suffira probablement à prouver la forme faible de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer. Pour la courbe C_D, que cela suffise a été démontré par GREENBERG (1983) si $r_\infty(C_D)$ est impair, et par RUBIN (1991) sans condition sur $r_\infty(E)$. Dans le cas E général, cela a été démontré par NEKOVÁŘ (2001) si $r_\infty(E)$ est impair ; le cas « $r_\infty(E)$ pair » devrait suivre de travaux en cours de SKINNER et URBAN sur la « conjecture principale », et de LAUMON, NGÔ et al. sur un bout du « programme de Langlands ».

16. Si $(x, y) \in C_D(\mathbf{C})$, alors $(-x, iy) \in C_D(\mathbf{C})$. Si Λ est le réseau de $\mathbf{C}$ correspondant à $\overline{C}_D(\mathbf{C})$ (cf. note 7), la remarque précédente se traduit par le fait que $i\Lambda = \Lambda$. On dit qu'une courbe elliptique E définie sur un sous-corps de $\mathbf{C}$ *a de la multiplication complexe* si, Λ étant le réseau de $\mathbf{C}$ qui lui correspond, il existe $\tau \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ tel que $\tau\Lambda \subset \Lambda$ (c'est donc le cas de C_D, avec $\tau = i$) ; un tel τ est alors racine d'un polynôme unitaire de degré 2 à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

17. La démonstration de cette formule occupe une centaine de pages...

18. En particulier, elles jouent un rôle fondamental dans la démonstration de WILES du théorème de Fermat.

19. Si $\Lambda = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$ est un réseau de $\mathbf{C}$ (cf.note 7), on a $G_k(\Lambda) = \omega_2^{-k} G_k(\frac{\omega_1}{\omega_2})$, ce qui fournit un autre lien (plus ancien et plus transparent) entre courbes elliptiques et formes modulaires, que celui du th. 21. C'est d'ailleurs ce lien qui, couplé avec la théorie de la multiplication complexe (note 1), est à la base de la construction des points de Heegner.

20. Si $a^p + b^p = c^p$, avec $abc \neq 0$, est un contrexemple au théorème de Fermat, on peut considérer la courbe elliptique introduite par HELLEGOUARCH et FREY, d'équation $y^2 = x(x - a^p)(x + b^p)$. WILES montre que cette courbe est modulaire, ce qui est en contradiction avec la « conjecture ε » de SERRE (1984) démontrée par RIBET (1988). La « conjecture ε » décrit les congruences que l'on peut attendre entre formes modulaires. Dans le cas qui nous intéresse, cette conjecture prédit une congruence modulo p entre le q-développement de la forme modulaire attachée à la courbe de Frey et Hellegouarch, et celui de $g \in M_2(\Gamma_0(2), 1)$, ce qui n'est pas possible car cet espace est de dimension 1, et la divisibilité par p du terme constant du q-développement de g entraine celle de tous les termes du q-développement.

21. Il s'agit d'un résultat profond qui demande d'utiliser les travaux de SHIMURA déjà mentionnés, et des résultats de SERRE (1968) et FALTINGS (1983) (ou CHUDNOVSKY (1985), ou encore BOST (2001)) selon lesquels une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ est (presque) déterminée par sa fonction L (et donc par le nombre de ses points dans $\mathbf{F}_p$ pour suffisamment de nombres premiers p).

22. La théorie de la multiplication complexe (note 1) permet de déterminer le corps de définition de ces points ; ce sont, d'après un théorème de SCHNEIDER (1937), les seuls éléments de $\mathcal{H}$, algébriques sur $\mathbf{Q}$, qui fournissent des points algébriques de E.

MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

Nous remercions ici toutes les personnes dont l'aide nous a été précieuse : en premier lieu Elena Karpel, veuve de F.A. Berezin, pour nous avoir communiqué des documents inédits, et pour son autorisation de publier la traduction de la lettre au Recteur, ensuite tous ceux qui nous ont fourni des informations nombreuses et détaillées, Dimitri Leites en premier, et ensuite Mikhail Shubin et Anatol Vershik, et enfin S.I. Gelfand pour son autorisation de publier la traduction française de l'article de Minlos.

Hommage à Feliks A. Berezin

Claude Roger[1]

Nous présentons ici une traduction d'un article de R. Minlos et de souvenirs de A. Vershik, consacrés à la vie de F.A. Berezin (1931-1980), ainsi que de la lettre (inédite à notre connaissance) adressée par ce dernier à R.V. Khokhlov, Recteur de l'Université d'état de Moscou, peu de temps avant sa mort survenue pendant l'été de 1977.

Pourquoi une traduction française de cet article, dix ans après sa parution ? Tout d'abord, la Gazette des Mathématiciens nous a paru être le cadre adapté pour présenter les travaux de F.A. Berezin, à l'attention d'un vaste public mathématique et non plus seulement des spécialistes du cercle relativement restreint de la physique mathématique. La principale raison est que la dizaine d'années écoulées depuis la parution de l'article de Minlos ont encore mieux fait ressortir le caractère pionnier de l'œuvre de Berezin, et toute l'importance de sa contribution. On verra dans la suite que les idées initiées par Berezin ont été à l'origine de bien des développements tant en mathématiques avec l'explosion des diverses branches des « mathématiques quantiques » qu'en physique fondamentale avec la montée en puissance des théories supersymétriques, supercordes, etc... Je n'en mentionnerai pour l'instant que deux exemples : d'une part les succès des théories de quantification par déformations durant la dernière décennie, avec les travaux de M.Kontsevich (couronnés d'une médaille Fields), et de bien d'autres, avec leurs multiples applications ; d'autre part, du côté de la physique des particules, les expériences prévues au LHC (*Large Hadron Collider*) dont l'achèvement est attendu au CERN pour la fin 2007, laissent espérer la mise en évidence de particules supersymétriques, après celle du fameux boson de Higgs. Les plus légères des ces particules supersymétriques, appelées « neutralinos », pourraient être des constituants de la mystérieuse matière noire de l'univers. On attend les premiers résultats pour 2009.

[1] Institut Camille Jordan UMR 5208, Université Claude-Bernard (Lyon I).

D'une manière plus générale, on peut considérer l'œuvre de F.A. Berezin toute entière comme une magistrale réponse à la question « Qu'est-ce que la physique mathématique ? ». L'article de Minlos montre bien que le rôle du physicien mathématicien ne se réduit pas à celui du mathématicien de service, exécutant les calculs et détaillant les équations nécessaires aux physiciens, expérimentateurs comme théoriciens ; il doit en premier lieu mettre en forme les idées et les concepts mathématiques suscités par l'évolution des diverses théories physiques[2], mais aussi d'utiliser le développement des théories mathématiques correspondantes comme un véritable outil de découverte physique, en relation bien entendu avec les physiciens théoriciens. Un exemple bien connu en est la théorie du positron, dont l'existence avait été annoncée par P.A. M. Dirac, plusieurs années avant sa mise en évidence expérimentale, sous forme d'une solution « en trop » pour l'opérateur appelé maintenant de Dirac, construit comme racine carrée de l'opérateur de Klein-Gordon (cf. le beau livre de Ne'eman et Kirsh [N-K], chap. 3). Un autre exemple plus ancien et historiquement très important est la théorie de la chaleur selon Fourier, et les mathématiques qui en ont résulté. Je voudrais mentionner à propos de ce célèbre exemple, l'étude épistémologique et historique de G. Bachelard [Ba], remarquable de clarté et de précision, et analysant en profondeur à partir de cet exemple les relations entre la physique et les mathématiques. Je n'aborderai pas ici la question de philosophie des sciences concernant la nature de la physique mathématique et les rapports de celle-ci avec les mathématiques pures et la physique théorique ; je n'en ai pas les compétences, mais je renverrai à ce sujet le lecteur à un texte court, peu connu, et qui reste d'une étonnante actualité bien qu'il ait été écrit voici plus d'un demi siècle : je veux parler de la leçon inaugurale d'André Lichnérowicz au Collège de France [Li]. Je voudrais pouvoir le citer in extenso à titre d'introduction à l'analyse des travaux de Berezin contenue dans l'article de Minlos.

Je vais maintenant donner quelques commentaires et compléments à propos de la biographie de Berezin. Comme Minlos l'explique au début de son article, les travaux de Berezin ont dès le départ été inspirés par la recherche de bases mathématiques solides pour la théorie quantique des champs. Les premiers succès théoriques et expérimentaux de celle-ci remontent à 1948 avec Feynman, Schwinger et Tomonaga (cf. [N-K] partie 2.9), le premier traité général sur le sujet (Bogoliubov et Shirkov) est paru en 1957, mais la théorie mathématique définitive n'a toujours pas été élaborée et fait encore de nos jours l'objet de recherches actives, comme peuvent en témoigner par exemple les nombreuses publications récentes consacrées à la renormalisation et la théorie des champs constructive, ou encore les approches du modèle standard développées par A. Connes dans le cadre de sa géométrie non commutative. Le développement rapide des théories physiques, en relation forte avec les mathématiques n'a fait qu'amplifier le phénomène (voir par exemple [R] pour un historique passionnant).

Un moment essentiel du passage de la mécanique quantique à la théorie des champs a été *la seconde quantification* : celle-ci consiste à regarder le champ comme une assemblée de particules, soit au niveau classique comme une somme infinie d'oscillateurs (ou « modes ») que l'on peut voir mathématiquement comme

[2] Comme disait A. Lichnérowicz : *« C'est la tâche propre du physicien mathématicien que d'éprouver les grandes théories physiques non plus expérimentalement mais dans leur cohérence interne, que de les faire naître à l'existence mathématique... ».*

une série de Fourier ; cette construction correspond à un passage du fini à l'infini pour le nombre de degrés de liberté. Le livre de Berezin sur les méthodes de seconde quantification date de 1965, mais il est encore largement utilisé de nos jours ; on peut dire qu'il est devenu un classique, au sens où l'entendait I. Calvino, c'est à dire un livre qui n'a pas encore fini de dire ce qu'il a à dire. Dans [Li], Lichnérowicz insiste sur le rôle capital joué par certains classiques dans les progrès de la physique mathématique ; les divers livres écrits par Berezin ont peu à peu joué ce rôle. L'aspect le plus fascinant et mysterieux de cette seconde quantification, à savoir l'isomorphisme bosons-fermions a été par la suite développé par divers auteurs (Peetre, Vergne...), notamment pour ses retombées dans les domaines de l'analyse fonctionnelle, des probabilités ou de la représentation des groupes ; voir par exemple l'approche décrite dans le livre de Y. Neretin [Ne]. Cet étrange isomorphisme symétrique-antisymétrique se retrouve dans plusieurs domaines des mathématiques contemporaines et dissimule sans doute des phénomènes profonds (voir par exemple les constructions connues sous le nom de BGG ou Bernstein-Gelfand-Gelfand, la périodicité de Bott, les travaux de Gelfand et Zelevinsky en théorie des représentations...).

Par delà la seconde quantification, je dirai plus généralement que Berezin a joué un rôle fondateur dans les recherches consacrées à la compréhension du phénomène de quantification dans toute sa généralité, et on retrouve ses résultats dans à peu près toutes les branches des « mathématiques quantiques », qui ont connu le développement que l'on sait depuis les années 80 du siècle dernier. On peut distinguer parmi ces diverses approches de la quantification :

(1) *La quantification asymptotique :* on peut voir à ce sujet le traité sur l'équation de Schrödinger écrit en collaboration avec Mikhail Shubin (ref. 18 dans l'article de Minlos).

(2) *La quantification par déformations :* le point de départ de cette théorie, qui n'est certainement pas aussi ancienne que la mécanique quantique, consiste à regarder l'algèbre des observables quantiques comme une déformation de l'algèbre des observables classiques. Il faut signaler ici la presque simultanéïté des publications de Berezin sur ce thème (ref. 12 à 14 dans la bibliographie de l'article de Minlos) avec les fameux articles de Flato, Lichnérowicz et leurs collaborateurs. Depuis cette époque, les développements de la théorie ont été considérables et se sont étendus dans divers domaines comme les groupes quantiques, ou encore les progrès récents dans le sillage des célèbres résultats de M. Kontsevich (voir par exemple [K-R-T] [C-K-T-B] pour un état des recherches sur ce thème).

(3) *La quantification géométrique :* le point de départ en est l'existence d'une structure symplectique sur chaque orbite coadjointe d'un groupe de Lie. Ce résultat a été d'une part à l'origine de la méthode des orbites en théorie des représentations des groupes de Lie (voir le traité [Ki2]), et par extension à une variété symplectique quelconque, de la théorie de la quantification géométrique, développée notamment par J.-M. Souriau [So]. On fait souvent référence au crochet de Poisson correspondant à cette structure symplectique comme à celui de Kirillov-Kostant-Souriau, alors que l'on peut trouver la première version de ce crochet dans les œuvres de S. Lie, comme l'a fait remarquer Semenov-Tian-Shansky. Feliks Berezin a donné un exposé sur ce thème à la Société Mathématique de Moscou, dans lequel il a

construit la fameuse forme symplectique, et le crochet de Poisson correspondant en a ensuite été déduit par A.A. Kirillov et publié dans [Ki1].

Je terminerai cette brève revue de l'œuvre de Berezin par les *« supermathématiques »*, dont il fut le principal fondateur ; je dois à D. Leites les informations historiques détaillées qui vont suivre. Sur le versant mathématique il s'agit, dans l'ordre logique et chronologique, de la suparalgèbre, puis de la supergéométrie (algébrique ou différentielle), et enfin de la superanalyse, où l'intégrale porte le nom de Berezinien. Sur le versant physique, il s'agit de la supersymétrie (SUSY), réalisant l'isomorphisme bosons-fermions, audacieux prolongement de la seconde quantification mentionnée plus haut. L'histoire des *« supermathématiques »* a commencé avec l'article de F. Berezin et G.I. Kac [B-K] établissant la correspondance entre superalgèbres de Lie et supergroupes de Lie formels. Une conjecture y était formulée, concernant la possibilité de construire la notion de groupe correspondante, en considérant l'algèbre extérieure (ou de Grassmann) comme algèbre de fonctions. Le livre de Y.I. Manin [Man] y était mentionné comme source d'inspiration de ce type de construction. Peu de temps après, D. Leites parvint à proposer une construction de supervariétés algébriques et de superschémas ; sa construction se heurta d'abord à un certain scepticisme : vu que le spectre d'une algèbre extérieure se réduit à un seul point, le superespace obtenu se trouve lui aussi réduit à un point ! Le résultat fut néanmoins exposé publiquement à l'automne de 1972 au séminaire de Kirillov, puis à celui d'algèbre, dirigé par Vinberg et Onishchik ; à la même époque V.G. Kac commençait ses célèbres travaux de classification des superalgèbres de Lie simples ; de même, des physiciens théoriciens commençaient à utiliser les idées superalgébriques de l'article [B-K] : ce fut le travail de Golfand et Likhtman [G-L] à Moscou et de Volkov et Akulov [V-A], puis les premiers et célèbres articles de J. Wess et B. Zumino sur la supersymétrie [W-Z]. L'article de D. Leites [Le] donnant les bases de la supergéométrie algébrique, parut aux Uspekhi Mat. Nauk en mars 1973. La version différentiable fut élaborée peu après et publiée dans les Doklady [B-L]. Sa version anglaise « supermanifolds » devait être pendant longtemps l'une des références principales sur le sujet. Ce texte fut assez largement diffusé dans le monde occidental (il faut se souvenir des difficultés de communication entre les blocs à cette époque, cf. infra), mais il n'apparaît pourtant pas dans les bibliographies des travaux occidentaux parus un peu plus tard sur ce sujet (Kostant [Ko], Koszul [Kos]).

Du côté des publications « supersymétriques » en physique, la première apparition du terme superespace est en général attribuée à [SS1], et donc postérieure à [B-K]. Il faut cependant signaler l'utilisation par J. Wheeler du terme de « superespace » dès 1970, mais dans un contexte tout différent [Wh]. D. Leites a publié récemment un historique détaillé de cette question dans l'introduction de l'Encyclopédie sur la supersymétrie dirigée par S. Duplij [CE]. Nous y renvoyons le lecteur désireux d'en savoir plus ainsi qu'à l'article de V. Akulov [Ak].

Pour terminer cette introduction aux textes qui vont suivre, je donnerai quelques indications sur la vie scientifique en Union Soviétique dans les années qui ont précédé la perestroïka, de façon à faciliter la compréhension du contexte historique de la lettre au Recteur Khokhlov et de la dernière partie de l'article de Minlos, pour les lecteurs du 21ème siècle. Le passé est si vite oublié !

La période qui nous concerne ici (1965-1985) est connue en Russie sous le nom de « période de stagnation », elle correspond au règne sans partage de L.I. Brejnev et de ses compères, et constitue une période de réaction et de déclin, ou mieux de « restalinisation », par rapport au relatif « dégel » de la période où N.S. Krouchtchev était aux affaires (1956-1964). Si la période de Staline a été abondamment étudiée, il n'existe encore que peu d'ouvrages réellement historiques sur la « restalinisation » brejnévienne, du moins en langue française, à part le livre passionnant de Martin Malia, *La tragédie soviétique* [Ma] (voir surtout son chapitre 10, Brejnev ou le communisme de nomenklatura). Nous avons pu trouver sur la toile le texte [MS] quelque peu sommaire, mais qui a le mérite de la précision et de la clarté.

Les conséquences dans le domaine scientifique de la période stalinienne proprement dite sont trop connues pour qu'il soit nécessaire d'en rappeler ici les détails, le livre de Krementsov [Kr] en constitue une vaste synthèse. La période du dégel krouchtchévien a peut-être été plus sensible dans les domaines universitaire et académique qu'ailleurs ; elle a été synonyme d'incertitude pour l'appareil du Parti[3], la pression et le contrôle de celui-ci sur la société se sont quelque peu relâchés, d'où quelques espaces de liberté d'expression, un peu plus de facilités pour voyager, de contacts avec l'extérieur. Le début de l'ère brejnévienne a vu par contre une reprise en mains dans tous les domaines, marquée notamment par le tristement célèbre procès de Daniel et Siniavski (1966).

Dans les départements universitaires et les instituts académiques, les bureaux du Parti reprirent dans un esprit de revanche la totalité du pouvoir qui leur avait momentanément échappé, avec pour conséquences les faits relatés dans l'article de Minlos, les souvenirs de Vershik, et surtout la courageuse lettre de Berezin au Recteur Khokhlov. Il ne faudrait surtout pas confondre ce « bureau du Parti » avec un quelconque groupe militant, il s'agissait bien de branches de l'appareil, composées de fonctionnaires, implantées dans chaque secteur de la société, et visant à contrôler et diriger tous les aspects de la vie sociale et économique. La situation dans les instituts de recherche et d'enseignement supérieur était assez variable suivant les endroits, elle dépendait pour beaucoup de la personnalité du directeur en place et de la capacité de celui-ci à se faire respecter du bureau du Parti. Les « personnes incompétentes » dont parle Berezin dans sa lettre au Recteur sont précisément les membres du dit bureau ; ce sont leurs interventions permanentes qui ont abouti entre autres à la médiocrité des recrutements, au refus d'admettre des étudiants, et au rejet de certaines thèses de haute qualité : les conséquences les plus visibles extérieurement de leurs actions ont été les interdictions de voyager à l'étranger opposées à une grande part de l'élite des mathématiques soviétiques entre 1970 et 1986. Les mathématiciens de ma génération et les plus anciens se souviennent des Congrès Internationaux des Mathématiciens (C. I. M.) de 1970, 1974, 1978, 1986[4], auxquels la majorité des orateurs invités en provenance d'URSS étaient empêchés de venir (en général à la dernière minute), et leurs conférences présentées par d'autres ; les exemples en sont multiples et célèbres. J'ai d'autre part pu retrouver dans les collections anciennes de la Gazette des Mathématiciens

[3] Ici « Parti » désigne bien évidemment le Parti Communiste de l'Union Soviétique (P. C. U. S.).
[4] Celui de 1983, tenu à Varsovie au cœur de la dictature militaire, est à mettre à part.

divers articles consacrés à des mathématiciens soviétiques de l'époque, en butte à des difficultés diverses avec le pouvoir [G].

Mais les exemples les plus sinistres de l'action des bureaux du Parti dans les Universités sont évidemment les cas flagrants d'antisémitisme, sous forme de discrimination ouverte à l'encontre des étudiants de nationalité juive[5], ou même dont le nom de famille laisse supposer une origine juive. L'antisémitisme officiel (ou plutôt l'antisémitisme d'état) fut instauré en URSS dans la période du stalinisme d'après guerre (voir encore [Ma] à ce sujet), puis s'apaisa quelque peu sous Kroucht-chev, pour mieux reprendre sous Brejnev, et plus fortement encore après 1967 et la Guerre des Six Jours. Cet antisémitisme s'est manifesté de la façon la plus flagrante dans les examens de sélection à l'entrée de la faculté de Mathématiques et Mécanique (MekhMat) de l'Université de Moscou. L'essentiel de ces examens est oral et la sélection y est plutôt sévère ; le refus d'admettre des étudiants juifs et ses conséquences sur le niveau scientifique de MekhMat sont évoqués à mots couverts dans la lettre de Berezin au Recteur (cf. par exemple l'épisode tragi-comique des Olympiades), et décrits avec détails et précisions dans un article des Notices de l'AMS [Sa], et dans [Sh][V2]. Des discriminations du même type s'exerçaient à l'encontre des candidats à une bourse de thèse (« aspirants »), à l'occasion des autorisations de soutenances de thèses, et plus généralement tout au long de la carrière. Ces discriminations et brimades en tout genre sont évoquées dans l'article de Minlos, et de façon plus personnelle, dans les souvenirs de A.M. Vershik. L'ouvrage [V1] édité par A.M. Vershik permettra au lecteur slavisant d'en apprendre davantage sur la dissidence de l'époque brejnévienne, dans les milieux académiques et les autres.

Notes sur la traduction des textes qui suivent

Le terme « sotroudnik » (littéralement « qui travaille avec ») est en général traduit par « collaborateur ». Vu le contexte, nous l'avons rendu par le terme contemporain d'« enseignant-chercheur ».

Il existait deux niveaux de thèses en Union Soviétique, nommés respectivement « kandidat » et « doktorat » ; nous les avons traduits par leurs équivalents approximatifs dans le système français actuel, à savoir « doctorat » et « habilitation ».

Nous avons de même traduit « aspirant » par son équivalent français de boursier de thèse ou étudiant de troisième cycle.

« Docent » : terme d'origine allemande. Il s'agit d'un emploi de chargé de cours, correspondant à peu près à celui de Professeur 2^e^ classe.

MekhMat : abrégé pour la Faculté de Mécanique et Mathématique de l'Université de Moscou (MGU).

« travail social » (partie 5 de l'article de Minlos) : les citoyens soviétiques étaient en principe tenus d'effectuer une certaine quantité de « travail social », supposé d'intérêt collectif, mais en général dépourvu de toute signification. Un exemple pittoresque en est le « subotnik » ou samedi communiste de travail gratuit dans l'intérêt (?) de la collectivité.

[5] Pour comprendre la situation, il faut savoir que chaque citoyen soviétique était pourvu d'une nationalité dépendant de celle de ses parents, qui pouvait être la nationalité juive, ce qui était le cas de Berezin dont la mère était juive ; mais pour les antisémites de l'appareil, les moscovites portant un nom de famille à consonance germanique étaient tous considérés comme juifs, fussent-ils de nationalité russe.

Références

[Ak] Akulov V., Non-linear way to supersymmetry and N-extended SUSY, hepth/0104187

[BA] Bachelard Gaston, étude sur l'évolution d'un problème de physique : la propagation thermique dans les solides (préf. de A. Lichnerowicz) J. Vrin (1973).

[B-K] Berezin F.A., Kac G.I., Lie groups with commuting and anticommuting parameters, Mat. Sb. 82(3), 343-359 (1970). English translation in Math. USSR-Sb. 11, 311-325 (1971)

[B-L] Berezin F.A., Leites D.A. : Supermanifolds. Dokl. Akad. Nauk SSSR 224(3), 505-508 (1975). English translation in Soviet Math. Dokl. 16, 1218-1222 (1975)

[CE] Concise encyclopedia of supersymmetry and noncommutative structures in Mathematics and physics. Edited by Steven Duplij, Warren Siegel and Jonathan Bagger. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2004).

[C-K-T-B] Cattaneo A., Keller B, Torossian C., Bruguières A., Déformation, Quantification, Théorie de Lie, *Panoramas et Synthèses 20*, Société Mathématique de France, Paris, (2005).

[G] *Gazette des mathématiciens* : n° 8 fevrier 77 (Chafarevich), n° 17 juillet 91 (T. Velikanova), n° 24 avril 84 (comité des mathématiciens)

[G-L] Golfand Yu. A., Likhtman E. P., Extension of The Algebra of Poincaré Group Generators and Violation of P Invariance, JETP Lett. 13 :323-326, 1971, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 13 :452-455 (1971).

[K-R-T] Kassel C., Rosso M.,Turaev V., Quantum groups and knot invariants, *Panoramas et Synthèses 5*, Société Mathématique de France, Paris, (1997).

[Ki1] Kirillov A.A., Unitary representations of nilpotent Lie groups. *Dokl. Akad. Nauk* SSSR 138 1961 283284.

[Ki2] Kirillov A A., Lectures on the orbit method., *Graduate Studies in Mathematics*, 64., American Mathematical Society, Providence, RI, (2004).

[Ko] Kostant B., Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization. Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Sympos. , Univ. Bonn, Bonn, 1975), pp. 177-306. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 570, Springer, Berlin, (1977).

[Kos] Koszul J.-L., Differential forms and near points on graded manifolds, Symplectic geometry (Toulouse, 1981), 55–65, *Res. Notes in Math.* , 80, Pitman, Boston, MA, (1983).

[Kr] Krementsov N., Stalinist Science, Princeton University Press (2001).

[Li] Lichnérowicz A., Leçon inaugurale de la chaire de physique mathématique, Collège de France, (3 décembre 1952).

[Ma] Malia M., La tragédie soviétique : histoire du socialisme en Russie, 1917-1991 / Ed. du Seuil, (1995).

[Man] Manin Y.I., Géométrie algébrique. Partie I : Schémas affines, *Izdat. Moskov.* Univ. Moscou (1970).

[MS] Modèle soviétique ; époque brejnevienne.
Fichier `http://f.monthe.club.fr/Doctextes/Modele_sovietique.pdf`, `http://www.google.com/search?q=cache:yR-qcZV0T04J:f.monthe.club.fr/Doctextes/Modele_sovietique.pdf+systeme+sovietique+Brejnev+\%22restalinisation\%22&hl=fr&gl=fr&ct=clnk&cd=3&lr=lang_fr&ie=UTF-8`

[N-K] Ne'eman Y., Kirsh Y., Les Chasseurs de particules, éditions Odile Jacob (1999).

[Ne] Neretin Yu.A, Categories of symmetries and infinite-dimensional groups, Translated from the Russian by G.G. Gould, *London Mathematical Society Monographs. New Series 16*, Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, (1996).

[R] Rovelli C., Notes for a brief history of quantum gravity/ gr-qc/0006061.

[SS1] Salam A., Strathdee, J.A., Supergauge transformations. *Nucl. Phys.* B76 : 477–482, (1974).

[SS2] Salam A., Strathdee J.A., On Superfields And Fermi-Bose Symmetry, *Phys. Rev.* D11 :1521–1535, (1975).

[Sa] Saul M., Kerosinka : an episode in the history of Soviet mathematics, *Notices Amer. Math. Soc.* 46, n° 10, 1217–1220, (1999).

[Sh] Shen A., Entrance examinations to the MekhMat., *Math. Intelligencer* 16 n° 4, 6–10 (1994).
[So] Souriau J.-M., Structure des systèmes dynamiques, Maîtrises de mathématiques, Dunod, Paris (1970).
[V-A] Volkov D., Akulov V., JETP Lett, v16, p. 621 (1972) ; Phys. Lett. B46, p. 109 (1973).
[V1] Vershik A. (éditeur), Summa za svobodnuiu myslí [Somme pour une pensée libre], Zvezda Ed, St-Petersbourg, (2002).
[V2] Vershik A., Admission to the Mathematics Faculty in Russia in the 1970s and 1980s, *Math. Intelligencer* 16 n° 4, 4–5 (1994).
[W-Z] Wess J., Zumino B., Supergauge Transformations In Four-Dimensions, published in *Nucl. Phys.*, B70 :39-50, (1974).
[Wh] Wheeler J.A., Superspace, (1970), In Gilbert and Newton, Analytic Methods In Mathematical Physics, 335-378, New York (1970).

Brève biographie scientifique de F.A. Berezin[1]

Robert A. Minlos[2]

L'œuvre scientifique de F.A. Berezin — un aperçu des travaux de F.A. Berezin, l'interprétation moderne de la physique mathématique

Au cours d'une vie relativement brève (il mourut dans un accident avant l'âge de cinquante ans), F.A. Berezin eut une activité très productive en mathématiques et physique mathématique. Il ne s'est pas contenté de marquer profondément plusieurs domaines des mathématiques qui existaient déjà auparavant (théorie des représentations de groupes, théorie spectrale des opérateurs, mécanique quantique, physique statistique, théorie quantique des champs constructive), mais il fut aussi à l'origine de nouveaux concepts, méthodes et théories : une approche générale du problème de la quantification, la construction du formalisme de seconde quantification en termes d'intégrales fonctionnelles, qui deviendra par la suite le calcul des symboles (à l'origine de la théorie des opérateurs pseudodifférentiels), et finalement (et ce fut sa réalisation la plus importante et la plus longuement mûrie) la théorie de la supersymétrie et des supervariétés, que les mathématiciens désignent généralement maintenant par le terme supermathématiques. Nous discuterons plus loin de tout cela en détail.

J'aimerais seulement souligner ici que ce qui donne peut-être toute sa valeur et toute son importance au parcours scientifique de Berezin, ce ne sont pas tant ses résultats effectifs que son obstination à suivre sa propre direction de recherches, axée principalement sur la physique mathématique. Il fut l'un des rares scientifiques qui firent de la physique mathématique ce qu'elle est devenue aujourd'hui. En effet, jusqu'à la fin des années 1950, l'expression physique mathématique était, du

[1] Traduit de l'anglais par Claude et Danielle Roger - Article paru dans : *Contempory mathematical physics*, p. 1-13, AMS Translations Serie 2, n° 175 (1996), repris dans *Letters in Mathematical Physics* 74, p. 5-19 (2005).

[2] Laboratoire de Mathématiques Dobrushin, Institut des Problèmes de Transmission de l'Information, Académie des Sciences de Russie, Moscou.

moins en Russie, associée essentiellement à l'étude de types particuliers d'équations différentielles issues des théories physiques (équation des ondes, équation de la chaleur, etc.). Berezin fut l'un des premiers à remarquer que, de même que, selon le vieil adage, les vieux tonneaux ne sont pas trop vieux pour le vin nouveau, le terme « physique mathématique » devrait s'appliquer à une classe bien plus large de problèmes mathématiques : plus précisément à toutes les théories et structures mathématiques qui sont nées des tentatives pour comprendre et clarifier les théories physiques fondamentales (physique quantique, cinétique, physique statistique, gravitation).

La physique mathématique actuelle s'est considérablement développée précisément selon cette approche, attirant de nombreux mathématiciens (et même quelques physiciens), alors qu'il y a quelques 35-45 ans, au tout début du parcours scientifique de Berezin, la quasi totalité des physiciens considéraient cette activité avec un dédain à peine déguisé, tandis que les mathématiciens s'en désintéressaient ouvertement. Il a fallu à Berezin, conscient d'être totalement incompris, et en souffrant secrètement, une forte dose de courage et de détermination pour persévérer dans cette direction.

Telles sont, esquissées à grands traits, les principales motivations internes de l'œuvre mathématique de F.A. Berezin.

Les années de jeunesse de Berezin — sa famille, les années d'école et d'université, comment il ne peut faire d'études de doctorat

Alik (Felix Alexandrovitch) Berezin naquit le 25 avril 1931 à Moscou d'une famille intellectuelle typique : son père était économiste, sa mère médecin. Les parents d'Alik se séparèrent rapidement, et il fut élevé par sa mère et ses grands-parents maternels. En 1948, après avoir obtenu le diplôme terminal des études secondaires, il entra comme étudiant de première année à la Faculté de Mécanique et de Mathématiques de l'Université d'État de Moscou.

Son intérêt pour les mathématiques s'était révélé beaucoup plus tôt. Dès la huitième, il participa aux Olympiades mathématiques scolaires, des concours particulièrement ardus de résolutions de problèmes mathématiques, qui sont organisés chaque printemps à la Faculté de Mécanique et de Mathématiques par des jeunes gens passionnés de mathématiques (des étudiants de 2^{e} et 3^{e} cycles pour la plupart). Ces derniers proposaient aussi chaque semaine des cercles mathématiques, en quelque sorte des séminaires de maths pour débutants, où l'on exposait d'élégantes démonstrations de théorèmes, voire des fragments de théories mathématiques accessibles à des lycéens, et où l'on discutait de problèmes difficiles qui étaient résolus en séance. Alik Berezin participa aux travaux d'un tel cercle dirigé par E.B. Dynkin, à l'époque encore étudiant de 3^{e} cycle.

Au cours de ses premières années à l'université, il prit également part au séminaire de Dynkin à l'intention des étudiants de licence, qui était en quelque sorte la continuation du cercle pour lycéens. Ce séminaire avait deux thèmes principaux (algèbre et probabilités), correspondant aux deux principaux axes de recherche de E.B. Dynkin à l'époque.

Berezin était davantage intéressé par l'algèbre, et bénéficia d'une solide initiation à cette matière, ce qui devait lui être d'une grande utilité dans ses travaux ultérieurs. Au cercle mathématique, et plus tard au séminaire de Dynkin, Berezin fit rapidement la connaissance de plusieurs mathématiciens prometteurs qui étaient à l'époque ses condisciples à la Faculté (R. Dobrouchine, S. Kamennomostkaya, F. Karpelevitch, R.A. Minlos, I. Schapiro-Pyatetski, N. Vvedenskaya, A. Youchkevitch). Ces collègues, dont beaucoup allaient devenir ses amis pour la vie, devaient jouer un rôle important dans son existence. Quelques années plus tard, Alik Berezin, alors étudiant de maîtrise, se mit à participer au célèbre séminaire Gelfand, et tomba pour une longue période sous l'influence d'Israël Gelfand. C'est dans le cadre de ce séminaire qu'il écrivit sa première publication importante sur la théorie de la représentation des groupes (cf. ci-dessous).

En 1953, Berezin obtint le diplôme de la Faculté de Mécanique et de Mathématiques de l'Université de Moscou. Bien que, dès cette époque, il ait fait ses preuves comme jeune mathématicien de talent (il était de toute évidence l'étudiant le plus brillant de sa promotion), il ne fut pas proposé pour les études doctorales : à la fin de la vie de Staline, la politique officielle était devenue ouvertement antisémite, et ce droit lui fut automatiquement refusé car sa mère était juive (à cette époque, les personnes de nationalité juive ne pouvaient pratiquement même plus entrer en première année à l'université de Moscou). Pendant trois ans, Berezin enseigna les mathématiques dans un lycée de Moscou, tout en poursuivant sa participation au séminaire Gelfand et ses recherches en théorie des représentations. En 1956, avec l'arrivée de la libéralisation krouchtchévienne, l'atmosphère à la Faculté de Mécanique et de Mathématiques s'améliora quelque peu, si bien qu' I.G. Petrovski, à l'époque Recteur de l'Université, réussit, sur l'insistance de I.M. Gelfand, à trouver un emploi pour Berezin à la Chaire de Théorie des Fonctions et d'Analyse Fonctionnelle. Berezin n'avait que 25 ans et devait y travailler jusqu'à la fin de sa vie.

Premières années en fonction à l'université — la Chaire de Théorie des Fonctions et d'Analyse Fonctionnelle dans les années 50 et 60, les débuts de la physique mathématique, premiers travaux de recherche, Berezin l'enseignant

Les premières années de la carrière de Berezin se déroulèrent dans le climat tout à fait exceptionnel de renouveau intellectuel et spirituel qui caractérisait la Faculté de Mécanique et de Mathématiques à la fin des années 50 et au cours des années 60, et particulièrement à la chaire où exerçait Alik. Jusqu'au milieu des années 50, la chaire, dirigée depuis de nombreuses années par le merveilleux D.E. Menchov, d'une adorable ingénuité, était composée en majeure partie de spécialistes de théorie des fonctions d'une variable réelle ou complexe (D.E. Menchov, N.K. Bari, A.I. Markouchevitch). Au cours des années qui suivirent, leur groupe s'élargit encore à plusieurs experts reconnus (P.L. Oulianov, B.V. Chabat, A.G. Vitouchkine, A.A. Gonchar, E.P. Doljenko et leurs élèves), mais c'est dans le domaine de l'analyse fonctionnelle, sous la conduite d'I. M. Gelfand, que la chaire connut le développement le plus considérable. C'est ainsi que R.A. Minlos fut recruté en même temps que Berezin, puis peu après G.E. Chilov, suivi par son élève A.G. Kostouchenko. Quelques années plus tard, il y avait là un groupe important d' élèves brillants d'I.M. Gelfand et G.E. Chilov (A.A. Kirillov, V.P. Palamodov, E.A Gorin, et d'autres). Au début des années 60, le professeur B.M. Levitan fut invité à la chaire, et pendant plusieurs années S.V. Fomine et V.M. Tikhomirov y menèrent leurs travaux.

Ainsi, grâce aux efforts de I.M. Gelfand et G.E. Chilov et au soutien de I.G. Petrovski, la chaire rassembla un groupe d'analystes de premier ordre ; aucune autre université au monde ne pouvait se vanter d'une équipe de ce niveau. Celle-ci, renforcée au fil des années par de bons spécialistes du domaine, perdura presque sans changement jusqu'au début des années 90, au cours desquelles la désagrégation progressive de la Faculté (qui avait commencé à la fin des années 60 et pendant les années 70 sous le décanat de P.M. Ogibalov), jusque-là latente, devint évidente. La chaire perdit naturellement plusieurs membres au cours de cette longue période : G.E. Chilov mourut en 1975, Berezin en 1980. Quant à I.M. Gelfand, il cessa de fait de s'intéresser aux affaires de la chaire vers la fin des années 60. Mais dans les années 50 et 60, l'intensité de la vie scientifique, l'arrivée d'étudiants de 2^e^ et 3^e^ cycles jeunes et talentueux, créaient une atmosphère stimulante et bénéfique pour la recherche.

En 1957, Berezin soutint sa thèse de « kandidat » qui incluait son article sur les opérateurs de Laplace sur les groupes de Lie semi-simples ; cet article contenait le résultat remarquable suivant : la description de toutes les représentations irréductibles de dimension infinie des groupes de Lie complexes semi-simples dans les espaces de Banach. En langage moderne, le théorème de Berezin peut s'énoncer ainsi : « toute représentation irréductible du groupe G est isomorphe à un sous-facteur d'une représentation élémentaire » (c'est-à-dire une représentation induite par un caractère de dimension un d'un sous-groupe de Borel). La profondeur de ce résultat se reconnaît à ce que l'étape suivante se fit attendre pendant vingt ans, c'est-à-dire lorsque D.P. Jelobenko et M. Duflo obtinrent une classification explicite de toutes les représentations irréductibles en précisant quels étaient les sous-facteurs des représentations élémentaires équivalents entre eux.

En 1956, Berezin, sur le conseil de I.M. Gelfand, entreprit l'étude approfondie de la théorie quantique des champs, et ce fut le point de départ de ses travaux en physique mathématique. Au cours de la première phase de ces travaux, de la seconde moitié des années 50 jusqu'au milieu des années 60, Berezin réfléchit beaucoup à la théorie spectrale, et plus particulièrement la théorie de la diffusion pour l'opérateur de Schrödinger. De cette réflexion sont issus peu de résultats décisifs, que l'on trouve dans plusieurs de ses articles traitant de cas particuliers (voir [2-5]), mais les observations, les réflexions et les idées nées de ces travaux eurent une influence significative sur d'autres mathématiciens et physiciens qui étaient en contact avec lui, et à la longue, elles menèrent à la compréhension du problème quantique à N corps du point de vue de la description spectrale et de la théorie de la diffusion, c'est-à-dire conformément à la conception actuelle (voir[6]).

En même temps que Berezin, d'autres jeunes mathématiciens de Russie entreprirent d'étudier des problèmes connexes (L. Faddeev, V.P. Maslov, R.A. Minlos, G.M. Jislin), initiant ainsi le mouvement, évoqué plus haut, des mathématiciens vers la physique mathématique. Les membres de ce cercle avaient de nombreuses discussions et considéraient avec raison Alik Berezin comme leur chef de file. La coopération entre Berezin et L.D. Faddeev fut particulièrement fructueuse ; l'influence d'Alik sur ce dernier était apparemment très forte. Plus tard, au milieu des années 50, leurs sujets de recherche divergèrent et leur esprit de camaraderie pâlit quelque peu, mais le souvenir de cette période reste bien vivace chez certains d'entre nous. Au tout début des années 1960, Berezin écrivit son fameux article sur le formalisme de seconde quantification, qu'il reprendra plus tard dans son livre : *The Method of second Quantization*[3] [7]. Ce formalisme, longtemps utilisé par les physiciens, s'appuie sur la représentation des opérateurs linéaires agissant dans l'espace dit de Fock sous la forme de fonctions (en général polynomiales) de certains générateurs spéciaux de l'algèbre de tous les opérateurs de ce type, opérateurs dits de création et d'annihilation. Berezin donna à ce calcul une forme très élégante en attribuant à tout polynôme de ce type une fonctionnelle polynomiale sur l'algèbre des fonctions (dans le cas d'un espace de Fock symétrique) ou sur l'algèbre de Grassmann (dans le cas d'un espace de Fock antisymétrique), de telle sorte que pour les opérations avec des opérateurs (multiplication, dualisation, transformations provenant de changements de variables canoniques), les fonctionnelles correspondantes subissent des transformations bien connues des mathématiciens : dérivation, multiplication, changement de variable, intégration continue. Cette méthode fut appliquée par Berezin et ses élèves à l'étude de certains modèles de théorie quantique des champs en dimension un : le modèle de Thirring (dans le cas de masse nulle comme dans le cas de masse positive), l'équation de Schrödinger non linéaire deux fois quantifiée (voir [8-10]). Notons que ces articles eurent une influence significative sur le développement de la théorie quantique des champs constructive contemporaine.

L'article sur la seconde quantification constitua la partie essentielle de la thèse de doctorat de Berezin, qu'il soutint avec succès à la Faculté de Mécanique et de Mathématiques en 1965. L'étude de Berezin sur la seconde quantification eut plusieurs conséquences scientifiques importantes. Tout d'abord, elle stimula en le renouvelant l'intérêt pour le vieux problème de la représentation des relations de commutation et d'anticommutation (à ce propos, voir l'aperçu de V.Ya. Golodet's dans les *Uspekhi*[11]).

Un autre problème qui émergea en partie de l'étude de la seconde quantification et que Berezin développa durant de nombreuses années, c'est celui de la compréhension générale de la procédure de quantification. Bien que Berezin ait travaillé sur ces questions dès le milieu des années 60, la conception qu'il en a s'exprime le mieux dans une série d'articles parus en 1973 et 1976 (voir [12-14]). L'idée principale de ces articles, suivant la quantification, a la signification mathématique précise suivante : l'algèbre des observables quantiques est une déformation de l'algèbre des observables classiques, et le paramètre de déformation est la constante de Planck, alors que la direction de la déformation (la dérivée première en 0 par rapport au paramètre) est le crochet de Poisson. Dans le cas d'un espace de phase plat, ce point de vue équivaut au point de vue courant. Dans les autres cas, il conduit à une nouvelle théorie. En particulier dans ses articles aux Izvestia [12,13], Berezin considéra le cas où l'espace de phase se décrit par un domaine symétrique homogène dans un espace complexe. Il découvrit un phénomène intéressant : l'ensemble des valeurs possibles de la constante de Planck est discret et borné supérieurement.

Bien plus tôt, au cours de la seconde moitié des années 60, en rapport avec son travail sur la seconde quantification, Berezin avait publié un article [15] où il étudiait la représentation des opérateurs dans les espaces de Hilbert en utilisant

[3] Titre original : *Metod vtorichnogo kvantovaniya*

divers systèmes de générateurs dans l'algèbre de ces opérateurs (pq-symboles, qp-symboles, symboles de Weyl, symbole de Wick utilisé couramment en seconde quantification). Remarquons que, sous bien des aspects, cet article est très proche de la théorie des opérateurs pseudodifférentiels, qui est apparue à cette époque et qui joue maintenant un rôle important en physique mathématique. Ainsi beaucoup d'idées cruciales de cette théorie ont émergé de manière indépendante dans les travaux de Berezin, mais, malheureusement, l'importance du travail de Berezin à cet égard n'a pas été comprise à l'époque.

Un exemple concret de l'activité de Berezin dans ce domaine, qui l'a amené à découvrir des objets mathématiques tout à la fois beaux et importants, est son approche de l'étude de l'inégalité de Feynman (1),

$$Sp(e^{-t\widehat{H}}) < (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-tH(p,q)} dpdq,$$

où $H(p,q) = p^2 + V(q), V(q)$ est le potentiel, tandis que $\widehat{H} = -\triangle + V(q)$ est le Hamiltonien quantique correspondant, c'est-à-dire l'opérateur de Schrödinger agissant sur $L_2(\mathbb{R}^n)$. Berezin voulait comprendre pour quels hamiltoniens $\widehat{H}$ plus généraux cette inégalité restait valable. Il s'aperçut que la réponse dépendait de la quantification choisie, c'est-à-dire de la correspondance entre H et $\widehat{H}$. Il en déduisit finalement que, pour tout opérateur $\widehat{H}$, les inégalités suivantes étaient vérifiées (2) :

$$(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-tH_W(p,q)} dpdq \leqslant Sp(e^{-t\widehat{H}}) < (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-tH_{aW}(p,q)} dpdq,$$

où $H_W(p,q)$ est le symbole de Wick de l'opérateur $\widehat{H}$, alors que $H_{aW}(p,q)$ est son symbole anti-Wick, introduit pour la première fois par Berezin en relation avec l'inégalité (2). Dans l'article [16], il démontre que l'exposant e^{-t} de (2) peut être remplacé par n'importe quelle fonction concave. Plus tard, l'inégalité (2) et sa généralisation décrite ci-dessus furent étendues au cas où, au lieu de H_W et H_{aW}, on considère les symboles covariants et contravariants introduits par Berezin dans [17], et qui sont définis par un système complet de vecteurs dans l'espace de Hilbert. Le schéma abstrait pour l'introduction de ces symboles dans [17] fut utilisé ultérieurement par Berezin pour la construction de la quantification sur les variétés kählériennes.

De plus, dans les articles [16] et [17] déjà, Berezin se servit d'inégalités analogues à (2) pour obtenir des asymptotiques spectrales variées pour l'opérateur $\widehat{H}$ pour des valeurs suffisamment grandes du paramètre spectral, ainsi que des asymptotiques semi-classiques. En particulier l'article [16] contient la première preuve rigoureuse des asymptotiques semi-classiques pour la fonction de distribution des valeurs propres de hamiltoniens suffisamment généraux.

Voilà quels furent les principaux thèmes des recherches d'Alik Berezin dans les années 1950 et 1960. Nous reviendrons plus loin à l'exposé de ses résultats ultérieurs.

Mais pour mieux évaluer le rôle joué par les travaux de physique mathématique présentés ci-dessus, nous devons aussi examiner les activités pédagogiques (au sens large) de Berezin. En effet, il s'efforçait patiemment de développer chez les physiciens avec lesquels il était en contact le goût et le sens de la pensée mathématique et de l'élégance des déductions abstraites, et il montrait comment les appliquer à des problèmes spécifiques. Berezin maîtrisait parfaitement le langage et le style de pensée souple des physiciens (pour ainsi dire, « galopant »), dialoguant facilement avec eux selon leur mode, donnant ainsi un bel exemple à ses collègues et à ses élèves. Il prenait plaisir à donner des cours de mathématiques à des physiciens. Il fallait plus encore de patience et de travail pour intéresser les mathématiciens à la physique, pour surmonter le préjugé profondément enraciné qui leur fait considérer la physique comme une science au-delà de l'intelligible. Pendant plus de 20 ans, Berezin dirigea un séminaire de physique mathématique et d'analyse fonctionnelle à la Faculté de Mécanique et de Mathématiques de l'Université de Moscou, seul ou en collaboration. Ce séminaire était bien connu des jeunes physiciens et mathématiciens : plusieurs scientifiques de premier ordre se formèrent en son sein, et nombre d'articles remarquables y furent écrits. À différentes reprises, il dirigea aussi des séminaires en théorie des représentations et en analyse fonctionnelle, et donna des cours de mécanique quantique, physique statistique, théorie quantique des champs, et intégrales de chemin. Ses cours de physique statistique et de mécanique quantique furent publiés sous forme polycopiée. Juste avant sa mort, il avait entrepris de réviser ces derniers ; ce travail fut achevé par M.A. Shubin à partir des notes laissées par Berezin [18].

Berezin aimait beaucoup discuter avec ses élèves, collègues et amis, et il publia beaucoup d'articles en collaboration. Ses coauteurs au cours de toutes ces années furent I.M. Gelfand, V.L. Golo, R.I. Karpelevitch, G.I. Kac, D.A. Leites, M.S. Marinov, A.M. Perelomov, G.P. Pokhil, V.S. Retakh, Ya. G. Sinaï, L.D. Faddeev, I.I. Shapiro-Pyatetski, M.A. Shubin, V.M. Finkelberg.

La dernière période — Les grandes heures de la physique mathématique, chacun suit sa propre voie, les supermathématiques et autres sujets

Au cours des années 60, le champ des idées qui intéressaient les chercheurs en physique mathématique s'élargit constamment, et au début des années 70, il était devenu trop vaste pour être maîtrisé par un seul individu. Cette période (du milieu des années 60 au milieu des années 70) fut réellement l'époque héroïque de l'histoire de la physique mathématique, non seulement en Russie mais dans le monde entier : les progrès réalisés en théorie des transitions de phase, dans la théorie générale des champs de Gibbs, la révolution markovienne en théorie des champs constructive, les nouvelles méthodes introduites dans l'étude des systèmes intégrables à une dimension, le groupe de renormalisation et le programme de Wilson pour l'étude des phénomènes critiques, la naissance des supermathématiques (dont nous parlerons ci-dessous), ne sont que quelques-uns des thèmes les plus remarquables de cette période. Bien entendu, un développement aussi radical de la physique mathématique et la multiplication de ses partisans (qui aurait difficilement semblé possible dans les années 50) entraînèrent naturellement une diversification des intérêts de recherche ; les chercheurs en physique mathématique se dispersèrent progressivement pour reformer plusieurs groupes déconnectés, chacun rassemblé autour de son propre maestro. Berezin devint l'un de ces chefs de file et durant toute cette période travailla au sein du cercle beaucoup plus étroit de ses plus proches collaborateurs et de ses élèves. Cet isolement relatif n'avait pas seulement une cause externe mais aussi une profonde motivation interne. C'est à cette époque-là que l'approche générale de la construction des supermathématiques est devenue claire pour Berezin, et sa mise au point l'a occupé pendant la majeure partie des années 70. Cette approche le plongeait dans une sorte de folie douce, une barrière psychologique qui était des plus difficiles à surmonter. Ceci explique le faible nombre de personnes à qui Berezin était disposé à révéler ses projets.

Nous sommes maintenant arrivés au point de notre exposé où il nous faut décrire plus en détails cette dernière période, la plus significative de la carrière scientifique de Berezin. Même si il y avait aussi d'autres sources, c'est à partir de son travail sur la seconde quantification que Berezin est venu aux supermathématiques, comme dans beaucoup d'autres cas. Le calcul formel dans l'algèbre de Grassmann, qui fut développé par Berezin en relation avec le formalisme de la seconde quantification dans l'espace de Fock antisymétrique, l'amena à penser qu'il existe un analogue non trivial de l'analyse dans lequel le rôle des fonctions est joué par des éléments de l'algèbre de Grassmann [7,19-21], c'est-à-dire un calcul dans lequel les variables anticommutantes et les variables commutantes jouent chacune leur rôle simultanément. Il ne cessa de promouvoir cette idée et rassembla soigneusement des exemples et des constructions à l'appui.

La première construction, c'est-à-dire l'intégrale de Berezin en variables anticommutantes, reste encore la plus frappante de la nouvelle théorie, la plus compliquée et la plus difficile à comprendre réellement, bien que sa formulation soit tout à fait simple (voir [7]). Cette construction est étroitement reliée à une autre, également découverte par Berezin et qui porte maintenant son nom, le bérézinien. Dans [20], Berezin développa le cas principal (dans lequel toutes les variables sont impaires), et en 1971 proposa, dans une lettre adressée à G.I. Kac, une formule générale hypothétique pour le bérézinien, formule qui fut établie ultérieurement par son étudiant en thèse V.F. Pakhomov.

Le résultat final de la coopération entre Berezin et Kac fut leur article en collaboration [21]. Ses résultats sont proches de ceux obtenus par Milnor, Moore et Quillen dans les années 1960, mais Berezin et Kac traitent les algèbres de Hopf comme des supergroupes de Lie formels et montrent les relations entre les supergroupes de Lie formels et les superalgèbres de Lie, généralisant l'application exponentielle et la théorie de Lie. Cet article pose pour la première fois le problème de construire de manière globale des superalgèbres de Lie et non plus seulement en tant qu'objet formel. Au bout de deux ans, ce problème était résolu.

Enfin, un dernier concept essentiel de la théorie, la notion de supervariété, fut défini par Leites [22] à partir d'une idée proposée par Berezin [23]. La construction des supervariétés s'effectue selon les principes de la géométrie algébrique (en étudiant la variété au moyen de l'algèbre locale des fonctions différentiables sur cette variété), la seule différence étant que dans le cas des supervariétés on doit utiliser des superalgèbres (voir l'aperçu de Berezin [24]).

Dans les années 70, les idées pionnières de Berezin se répandirent, et les groupes de supersymétrie, c'est-à-dire les supergroupes de Lie de transformation du « superespace-temps », commencèrent à apparaître dans les travaux des physiciens. Grâce aux travaux de Yu.A. Golfand et E.P. Lichtman, D.V. Volkov et V.A. Akoulov, J. Wess et B. Zumino, V.I. Ogievetski, et beaucoup d'autres, il devint clair que les supervariétés fournissaient un langage approprié à la formulation d'une théorie des champs unifiée. Cela est lié à l'hypothèse fondamentale suivante sur la structure de l'espace-temps : l'espace-temps est une supervariété dont chaque point est un espace-temps ordinaire, alors que le groupe de transformation est le supergroupe extension du groupe de Poincaré par des générateurs impairs.

Au cours de la dernière année de sa vie, Berezin entreprit d'écrire sur les supermathématiques un livre qu'il ne devait pas terminer. Ce livre fut achevé par V.P. Palamodov, en utilisant les notes et les brouillons laissés par Berezin (voir [25]).

Nous approchons de la fin de notre exposé sur l'œuvre mathématique de Berezin, et nous aimerions dire quelques mots de deux autres sujets de physique mathématique auxquels Berezin s'est intéressé à plusieurs reprises. Il espérait (comme beaucoup d'autres) parvenir à construire une théorie quantique des champs non contradictoire. On peut dire sans exagération qu'il considérait presque tout son travail (sur le problème à N corps, la quantification, la superanalyse) comme une suite de jalons menant vers la solution de ce difficile problème. Il y réfléchissait et avait déjà quelques idées ; par exemple il pensa longtemps que la procédure de renormalisation en théorie quantique des champs pouvait être correctement interprétée dans le cadre de la théorie des extensions : considérant que le Hamiltonien originel n'est bien défini que comme opérateur symétrique sur un sous-ensemble approprié de l'espace de Fock, alors que le véritable Hamiltonien peut être obtenu comme son extension auto-adjointe. Cette idée fut joliment illustrée dans son article en collaboration avec L.D. Faddeev sur l'interaction de type δ de deux particules quantiques [4]. Son propre article sur le modèle dit « de Lie » est fondé sur la même idée [26]. Dans ce dernier, Berezin se servit de l'idée de Heisenberg selon laquelle ce modèle devrait être étudié dans un espace à métrique indéfinie et construisit le Hamiltonien du modèle de Lie comme une extension d'un opérateur symétrique à un espace à métrique indéfinie. Beaucoup pensent que cette approche peut se révéler utile dans la théorie quantique contemporaine des champs de jauge, qui exige l'introduction d'une métrique indéfinie.

Dans les années 60, Berezin s'occupa assez souvent de physique statistique. En 1965 fut publié son article en collaboration avec Ya.G. Sinaï sur l'existence d'une transition de phase dans les structures ferromagnétiques sur réseau avec interaction finie [27]. Au cours des années suivantes, Berezin tenta à plusieurs reprises de trouver des solutions explicites pour le modèle d'Ising à trois dimensions, en utilisant de nouveau les techniques de seconde quantification (qu'il aimait beaucoup et considérait apparemment comme une approche universelle). Plusieurs résultats en ce sens furent publiés dans [28,29]. Malheureusement, les avancées importantes de la physique statistique à la fin des années 60 et au début des années 70, et les progrès concomitants en théorie constructive des champs échappèrent pratiquement à son attention. Au cours des années 70, il ne revint jamais vers ce sujet.

Telle fut, dans ses grandes lignes, la trajectoire scientifique de F.A. Berezin.

Le statut social et politique de Berezin et sa situation à la Faculté

la vie à la Faculté de Mécanique et de Mathématiques : Berezin vu comme un corps étranger par tous les pouvoirs, la loi du Parti dans la Faculté, l'histoire de l'opéra, la lettre au Recteur R.V. Khokhlov

Il est difficile d'apprécier la carrière scientifique de Berezin, aussi bien que celle de tout autre scientifique reconnu et intègre exerçant en Russie à l'époque, en dehors du contexte scientifique, social et politique de son travail, sans prendre en considération sa propre situation sociale et politique.

Nous avons eu l'occasion de mentionner précédemment l'atmosphère scientifique remarquable qui régnait dans la Faculté de Mécanique et de Mathématiques de l'Université de Moscou à la fin des années 50 et dans les années 60. Cette atmosphère, en dépit du « serrage de vis » ultérieur (cf. ci-dessous) ne disparut pas totalement avant le début des années 90. Chaque année, des dizaines de séminaires scientifiques se tenaient régulièrement sur divers thèmes de mathématiques et de mécanique à la Faculté de Mécanique et de Mathématiques, et on y donnait à peu près autant de cours optionnels. Les objectifs et les niveaux de ces séminaires et de ces cours pouvaient être très différents, mais la plupart d'entre eux visaient à compléter les connaissances des étudiants de 2^{e} et 3^{e} cycles. Pour plus de clarté, il est utile de comprendre comment fonctionne traditionnellement le système d'enseignement à la Faculté de Mécanique et de Mathématiques : il y a un syllabus comprenant 10 à 12 cours obligatoires qui s'étalent habituellement sur deux (voire trois) semestres. En règle générale, en complément de ces cours, sont organisées des séances d'exercices, où des groupes plus réduits d'étudiants doivent résoudre des problèmes illustrant le contenu du cours. Par ailleurs, les séminaires et les cours optionnels évoqués plus haut sont entièrement facultatifs et choisis directement par les étudiants eux-mêmes ou d'après les suggestions de leurs tuteurs scientifiques (le syllabus fixant seulement le nombre minimum de ces cours et séminaires).

En plus de ces séminaires pédagogiques, la Faculté organisait traditionnellement plusieurs séminaires de recherche de très haut niveau, qui rassemblaient des mathématiciens avancés, et où l'on débattait des résultats les plus récents du sujet en question. Naturellement ces séminaires de recherche étaient fréquentés régulièrement par de nombreux étudiants de 3^{e} cycle et par les plus avancés des étudiants de 2^{e} cycle, et constituaient pour eux une excellente formation. Nous avons déjà mentionné deux de ces séminaires : le célèbre séminaire de I.M. Gelfand et celui de physique mathématique et analyse fonctionnelle dirigé à la fin des années 50 et au début des années 60 par Berezin en collaboration avec R.A. Minlos. Il y avait aussi un autre séminaire bien connu de physique mathématique, qui fonctionnait à la Faculté de Mécanique et de Mathématiques depuis 1962 (et qui existe encore maintenant -1994), dirigé par R.L. Dobrouchine, V.A. Malychev, R.A. Minlos et Ya. G. Sinaï, et traditionnellement consacré à la physique statistique. La physique mathématique (du point de vue de ses aspects géométriques et de la théorie des systèmes intégrables) était également le thème du célèbre séminaire dirigé par S.P. Novikov qui a fonctionné à la Faculté pendant de nombreuses années.

Tous ces séminaires, de même que plusieurs autres qui se tenaient à la Faculté, étaient mondialement connus, et beaucoup de scientifiques (de Russie ou de l'étranger) se faisait un devoir d'y assister et/ou d'y donner un exposé. On se souvient de cette atmosphère unique de liberté et de sérieux dans la discussion qui était de règle à tous les exposés de ces séminaires : chaque participant s'efforçait de comprendre l'orateur de manière approfondie, l'exposé pouvait être interrompu à tout moment par une question, une explication, ou tout un flot de commentaires improvisés provenant d'un des participants. Il n'y avait pas la moindre trace de hiérarchie, et tout participant qui avait quelque chose à dire sur le sujet en question pouvait venir au tableau (parfois même en cours d'exposé) pour se faire entendre. Une attitude de respect et de considération pour tous les participants était de règle. Ces discussions, spontanées et passionnantes, souvent épicées de plaisanteries pleines de finesse, étaient vraiment de premier ordre pour l'esprit, et constituaient peut-être l'apport le plus précieux des séminaires. Elles conduisaient souvent à une compréhension nouvelle du problème débattu, parfois même inattendue pour l'orateur, et faisaient émerger des idées et des questions nouvelles qui plus tard mèneraient à des travaux de recherche sérieux. C'était à la fois très important pour les participants les plus jeunes, pour les habituer au comportement adapté à une recherche productive et aux relations entre chercheurs, et cela enchantait les visiteurs étrangers, ennuyés par l'étiquette rigide de leurs propres séminaires. Un collègue italien, qui vécut longtemps à Moscou et venait régulièrement au séminaire de physique statistique (et parfois, par pure curiosité, se rendait aux réunions politiques qui avaient lieu de temps en temps à la Faculté), déclara en matière de plaisanterie que ces séminaires lui rappelaient les réunions politiques à l'Université de Rome, tandis que, à l'inverse, nos réunions politiques lui rappelaient les séminaires scientifiques de Rome, épouvantablement ennuyeux.

Parmi les événements importants de la vie mathématique moscovite, il y avait aussi les sessions de la Société mathématique de Moscou, particulièrement dans les années 70 et 80, lorsque I.M. Gelfand en devint le Président et réussit à dynamiser remarquablement son activité. Chaque session de la Société était consacrée à une conférence préparée avec soin sur quelque nouveau sujet mathématique d'intérêt. Cette conférence était habituellement donnée par le meilleur spécialiste de la question. Les sessions étaient suivies très largement par les mathématiciens les plus jeunes comme par les chercheurs les plus expérimentés.

Parmi les conditions exceptionnelles de recherche à la Faculté de Mécanique et de Mathématiques, il faut aussi mentionner la riche bibliothèque universitaire, en particulier sa section mathématique, qui jusqu'à une date récente recevait systématiquement les publications mathématiques publiées en Russie, et la plupart des revues majeures d'Europe, d'Amérique et du Japon.

Toutefois, en dépit des excellentes conditions de travail à la Faculté, la vie de Berezin à la Faculté de Mécanique et de Mathématiques ne s'est pas déroulée sans heurts. Nous avons déjà mentionné la discrimination dont il fut victime à propos de ses études doctorales.

Le dégel de la période Krouchtchévienne lui donna l'occasion de revenir à l'université et d'y rester. Cependant, dans son travail, Berezin fut souvent confronté à diverses obstructions extérieures, à une sorte d'injustice préprogrammée, inhérente au système lui-même. Les discriminations et obstructions, qui s'aggravèrent de façon notable au cours des années 70, lui rendirent souvent la vie malheureuse. Pour tenter de faire comprendre le mécanisme d'oppression qui s'exerçait sur Berezin de manière insidieuse, je devrais peut-être expliquer la répartition traditionnelle du pouvoir qui était en vigueur jusqu'à la fin du régime soviétique à la Faculté de Mécanique et de Mathématiques. Une partie importante du pouvoir appartenait à ce que l'on appelait Bureau du Parti, le groupe exécutif de l'organisation du Parti communiste dans la Faculté. Le Bureau du Parti consistait principalement en fonctionnaires improductifs et stériles qui avaient trouvé dans le Parti un havre et une justification de leur propre nullité. Ces gens étaient d'habitude malveillants (et en règle générale antisémites) et exerçaient leur malveillance à l'encontre des chercheurs vraiment actifs de la Faculté (particulièrement si ces derniers étaient juifs). Bien sûr, la malveillance du Bureau du Parti était en partie compensée par certaines règles et traditions positives, aussi bien que par l'influence et les prérogatives administratives du Conseil scientifique (et parfois par le bureau du doyen), composé en majorité de véritables chercheurs. Pendant la période du libéralisme khrouchtchévien et les premières années de l'ère post-khrouchtchévienne, alors que les caciques du parti étaient encore dans un état d'indécision relative, l'influence de ce qu'on pourrait appeler le Parti scientifique grandit notablement. Ce fut particulièrement le cas pendant le décanat de N.V. Efimov, une personnalité remarquable et un esprit noble. À la fin des années 60, quand P.M. Ogibalov (un fonctionnaire du Parti à l'ancienne, connu dans les années de Staline pour sa participation active à diverses purges et dénonciations) devint doyen, les dirigeants du parti s'unirent au bureau du doyen et une atmosphère sinistre envahit la Faculté pour des années. Plus particulièrement, selon les traditions en usage, le Bureau du Parti pouvait (et ne s'en privait pas) régenter la vie et le travail de tout employé de la Faculté en s'appuyant sur les interdictions suivantes :

– empêcher une promotion à un grade supérieur ou une nomination à un emploi plus élevé ;

– interdire un voyage à l'étranger (aussi bien dans le cas d'une invitation personnelle que d'une invitation scientifique) ;

– interdire l'accès aux études doctorales à l'élève d'un chercheur qui déplaît au Parti ;

– interdire d'enseigner d'un cours du cursus obligatoire ;

– interdire la réélection à un emploi permanent pour une nouvelle période de cinq ans.

Ce dernier veto n'était appliqué que dans des cas exceptionnels (l'un de ceux-ci fut la cause de la mort prématurée de G.E. Chilov). Toutes ces interdictions, excepté la dernière, furent appliquées régulièrement à Berezin à la Faculté. Peut-être est-ce le moment de rappeler un épisode amusant et typique dans lequel je me suis trouvé impliqué avec Berezin. L'un des prétextes habituels pour les diverses interdictions était que l'employé concerné ne fournissait pas de « travail social » ou ne s'en était pas convenablement acquitté. « Travail social » signifiait là une activité dénuée d'importance et nécessairement non rémunérée, habituellement tout à fait ennuyeuse et/ou dépourvue de sens ; par exemple, l'organisation de soi-disant informations « politiques » où l'on devait répéter aux étudiants (ou à ses propres collègues) le contenu des derniers journaux soviétiques ou encore, les soi-disant sessions de « défense civile » où, année après année, on vous disait que faire si une bombe H vous tombe sur la tête ou des choses de ce genre. Il fallait absolument que chaque employé ait son propre travail social de ce type.

Evidemment, aucun être humain sensé ne pouvait prendre au sérieux une activité aussi grotesque et habituellement on faisait seulement semblant de l'exécuter, ou même trouvait le moyen de s'en dispenser. Le bureau du parti était en général au courant et ne prenait pas trop sérieusement cette tromperie mais pouvait à tout moment demander une explication, gardant chacun sous contrôle et contrainte, en lui rappelant sa présence envahissante. Il est typique qu'aucune activité sérieuse socialement utile (par exemple être membre d'un comité éditorial, une responsabilité dans l'administration de la Société mathématique de Moscou, l'organisation de « cercles mathématiques » pour lycéens), n'était acceptable comme « travail social », sauf évidemment autorisation spéciale du bureau du Parti ; je me souviens avoir entendu plusieurs fois la phrase suivante : « *quel genre de travail social est-ce là s'il aime l'accomplir ?* ». Pour revenir à mon récit, dans les années 1960, après que Berezin et moi-même ayons travaillé pendant cinq ans à la Chaire de Théorie des Fonctions et Analyse Fonctionnelle en qualité d'attachés de recherche, la question de notre recrutement en qualité de chargés de recherche se posa. Le Bureau du Parti n'était pas d'accord, prétextant l'absence de tout travail social. Les négociations avec le Bureau du Parti furent conduites par G.E. Chilov, qui, en tant que musicien amateur était en rapport permanent avec le studio d'opéra de l'université. Il décida de nous aider en se servant du studio, qui était sur le point de monter un opéra dont le livret était en biélorusse ; il proposa que Berezin et moi-même réalisions la traduction. Nous y travaillâmes dur pendant plusieurs semaines réalisant une version russe plutôt bonne (hélas ce devait être notre unique travail en collaboration [30]), puis nous passâmes un grand moment avec G.E. Chilov pour adapter le texte à la musique. Le studio d'opéra fut satisfait du résultat, l'opéra fut un succès (nos noms étaient sur les affiches), mais nous n'obtinmes point les postes attendus, parce que le Bureau du Parti refusa de considérer toute cette activité comme un travail social acceptable. Nous fûmes tous deux recrutés comme chargés de recherche seulement deux ans plus tard, quand une partie des membres du Bureau du Parti fut remplacée. Ce devait être la dernière promotion de Berezin jusqu'à la fin de sa vie. Il y eut de même de sérieux problèmes avec certains élèves de Berezin qui ne furent pas autorisés à suivre des études doctorales. Ce fut le cas de D.A. Leites, son élève préféré, qui fut un acteur essentiel de la construction des supermathématiques.

En ce qui concerne les voyages de Berezin à l'étranger, ils cessèrent entièrement après 1975 en dépit d'un flot incessant d'invitations provenant d'Europe et d'Amérique (un des tiroirs de son bureau était plein à ras bord de ces invitations, ainsi que nous devions le découvrir après sa mort). Les voyages qu'on lui interdisait étaient importants pour lui non seulement à titre professionnel, mais aussi pour des raisons psychologiques : au cours de ces années, la reconnaissance dont il avait si fortement besoin commençait à devenir une réalité. Au milieu des années 70, Berezin écrivit au nouveau recteur de l'Université de Moscou, le physicien R.V. Khokhlov, une lettre où il décrivait la situation générale qui régnait à la Faculté de Mécanique et Mathématiques : discrimination contre les juifs aux examens d'entrée à l'université et pour l'admission aux études doctorales ; corrélation exclusion de beaucoup d'enseignants intègres, chercheurs actifs, de toutes les affaires importantes de la Faculté, telles que les examens d'entrée et terminaux, et l'enseignement de cours obligatoires ; interdiction presque totale des voyages à l'étranger pour une écrasante majorité d'enseignants ; « échecs » injustifiées spécialement organisés aux soutenances de thèse de kandidat (PhD) et de doctorat pour les personnes de nationalité juive ; et bien d'autres aspects. Il est notoire que R.V. Khokhlov avait l'intention de prendre des mesures décisives pour assainir la vie à la Faculté de mécanique et de mathématiques. Sa mort soudaine des suites d'un accident de montagne mit fin à ses projets. Et, apparemment, la lettre de Berezin a eu une influence significative sur les projets de Khokhlov qu'il n'eut pas le temps de réaliser. Après la mort de R.V. Khokhlov, le contenu de la lettre parvint aux caciques du parti, ne faisant qu'augmenter leur hostilité à l'encontre de Berezin (le premier acte de représailles fut l'annulation subite et anonyme d'un voyage en Tchécoslovaquie sur invitation privée, qui avait déjà été accepté).

En dépit de tout ce harcèlement et de toutes ces humiliations, Berezin ne se départit pas de son caractère indépendant et épris de liberté, observant la vilenie qui l'entourait avec dégoût et chagrin. De nature pessimiste, il devint de plus en plus sombre dans les dernières années de sa vie, incapable de discerner un rayon de lumière dans notre vie lugubre de ces années-là.

Pendant l'été 1980, F.A. Berezin se noya au cours d'un voyage à la Kolyma. Son corps fut retrouvé et ramené à Moscou. Son urne funéraire repose dans sa tombe au cimetière Vostriakov de Moscou. Il est dommage qu'il n'ait pu connaître la période actuelle, ni voir son travail scientifique mondialement reconnu. Il se serait réjoui de l'une et de l'autre.

Moscou, février 1994.

Références

[1] Berezin F.A. : Laplace operators on semi-simple Lie groups. Trudy Moskov. Mat. Obshch. 6, 371-463 (1957) ; ibid. 12, 453-466 (1963)

[2] Berezin, F.A. : Asymptotics of eigenfunctions of the multiparticle Schrödinger equation. Dokl. Akad. Nauk SSSR 163(4), 795-798 (1965)

[3] Berezin, F.A. : Trace formula for the multiparticle Schrödinger equation. Dokl. Akad. Nauk SSSR 157(5), 1069-1072 (1964)

[4] Berezin, F.A. : Remark on the Schrödinger equation with singular potential. Dokl. Akad. Nauk SSSR 137(5), 1011-1014 (1961)

[5] Berezin, F.A., Pokhil, G.N., Finkelberg, V.M. : The Schrödinger equation for systems of one-dimensional particles with point-like interaction. Vestnik Moskov. Univ. 1, 21-28 (1964)

[6] Berezin, F.A., Minlos, R.A., Faddeev, L.D. : Some mathematical questions in the quantum mechanics of systems with a large number of degrees of freedom. Proc. 4th Soviet Math. Congress Moscow 2, 532-541 (1964)

[7] Berezin, F.A. : The method of second quantization. Naukaî, Moscow (1965). English translation Academic Press, New York (1966)

[8] Berezin, F.A. : On the Thirring model. Zh. Eksper. Teoret. Fiz. 40(3), 885-894 (1961)

[9] Berezin, F.A., Syshko, V.N. : Relativistic two-dimensional model of a self-interacting fermion eld with nonzero mass in the state of rest. Zh. Eksper. Teoret. Fiz. 48(5), 1293-1306 (1965)

[10] Berezin, F.A. : On a model for quantum eld theory. Mat. Sb. 76(1), 3-25 (1968). Math. USSR-Sbornik, 5(1), 1-23 (1968)

[11] Golodets, V.Ya. : Description of the representations of anti-commuting relations. Uspekhi Mat. Nauk 24(4), 3-64 (1969). English translation in Russian Math. Surveys 24(4), 1-63 (1969)

[12] Berezin, F.A. : Quantization. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 38(5), 1116-1175 (1974). English translation in Math. USSR-Izv. 8, 1109-1165 (1974)

[13] Berezin, F.A. : General concept of quantization. Comm. Math. Phys. 40, 153-174 (1975)

[14] Berezin, F.A. : Quantization on complex symmetric spaces. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 39(2), 363-403 (1975). English translation in Math. USSR-Izv. 9, 341-379 (1975)

[15] Berezin, F.A. : About a representation of operators by means of functionals. Trudy Moskov. Mat. Obshch. 17, 117-196 (1967)

[16] Berezin, F.A. : Wick and anti-Wick symbols of operators. Mat. Sb. 86(4), 578-610 (1971). English translation in Math. USSR-Sb. 15, 577-606 (1971)

[17] Berezin, F.A. : Covariant and contravariant symbols of operators. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 36(5), 1134-1167 (1972). English translation in Math. USSR-Izv. 6, 1117-1151 (1973)

[18] Berezin, F.A., Shubin, M.A. : The Schrödinger equation. Moscow State University, Moscow (1983). Translated from Russian by Yu. Rajabov, D.A. Leites and N.A. Sakharova and revised by Shubin. With contributions by G.L. Litvinov and Leites. Mathematics and its Applications (Soviet Series), 66. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1991

[19] Berezin, F.A. : On canonical transformations in representations of second quantization. Dokl. Akad. Nauk SSSR 150(5), 959-962 (1963)

[20] Berezin, F.A. : Automorphisms of the Grassmann algebra. Mat. Zametki 1(3), 269-276 (1967)

[21] Berezin, F.A., Kac, G.I. : Lie groups with commuting and anticommuting parameters. Mat. Sb. 82(3), 343-359 (1970). English translation in Math. USSR-Sb. 11, 311-325 (1971)

[22] Leites, D.A. : Spectra of graded commutative rings. Uspekhi Mat. Nauk 29(3), 209-210 (1974).

[23] Berezin, F.A., Leites, D.A. : Supermanifolds. Dokl. Akad. Nauk SSSR 224(3), 505-508 (1975). English translation in Soviet Math. Dokl. 16, 1218-1222 (1975)

[24] Berezin, F.A. : Mathematical foundations of supersymmetric field theories. Yadernaya Fiz. 29(6), 1670-1687 (1979)

[25] Berezin, F.A. : Introduction to the algebra and analysis of anticommuting variables. Moscow State University Publ., Moscow (1983)

[26] Berezin, F.A. : On the Lee model. Mat. Sb. 60(4), 425-446 (1963). English translation in Am. Math. Soc., Transl., II. Ser. 56, 249-272 (1966)

[27] Berezin, F.A., Sinaï, Ya.G. : Existence of phase transfer of a lattice gas with attracting particles. Trudy Moskov. Mat. Obshch. 17, 197-212 (1967)

[28] Berezin, F.A. : The plane Ising model. Uspekhi Mat. Nauk 24(3), 3-22 (1969). English translation in Russian Math. Surveys, 24(3), 3-22 (1969)

[29] Berezin, F.A. : The number of closed nonselfintersecting contours on a plane lattice. Mat. Sb. 85(1), 49-64 (1971). English translation in Math. USSR-Sb. 14, 47-63 (1971)

[30] Berezin, F.A. and Minlos, R.A. : The thorny rose : opera libretto (translation in Russian from the Bielorussian libretto), Moscow university opera studio (1962)

Souvenirs

Anatoli M. Vershik

Le texte qui suit est extrait de la contribution de A.M. Vershik à un article collectif écrit par plusieurs amis de F.A. Berezin[1]. Afin d'éviter les redites, nous nous sommes permis de sélectionner certains passages.

Berezin quitta ce monde de façon inattendue et mystérieuse. Toute mort contient un élément de mystère, mais celle d'Alik, bien loin de Moscou, dans une excursion géologique à laquelle ne participait aucun de ses amis, et dans des circonstances qui restent obscures, fut une étrange manière de disparaître. Je me souviens du moment où j'en fus informé et de l'écrasant sentiment d'incrédulité... Notre dernière longue conversation avait eu lieu six mois auparavant lors de rencontres d'été près de Minsk. Cette conversation m'avait fait une très forte impression : j'y reconnaissais le pessimisme aigu d'Alik. C'était en 1979, et nous étions en plein cœur de la « période de stagnation » avec son atmosphère oppressive, l'absence de tout espoir de libéralisation de notre société, les attaques pernicieuses contre toute forme de dissidence, l'émigration active, les jours lugubres à l'université. Nous fîmes une longue promenade dans le calme d'une forêt. Alik aborda les sujets habituels de nos discussions la situation à MekhMat[2], l'absence d'espoir d'amélioration, la question de nos amis communs qui étaient ou non en cours d'émigration, l'impossibilité de véritables contacts avec les mathématiciens de l'ouest, et comment certains en tiraient parti aussi bien ici qu'à l'étranger. Mais ce soir-là, le sujet principal de notre discussion était le problème juif, dont nous avions rarement discuté auparavant. Je me souviens que ce fut cette partie de la conversation qui me frappa le plus ; j'avais rarement entendu auparavant de quiconque des prévisions aussi sinistres sur les événements à venir : Alik me dit qu'il avait peur des pogroms et des persécutions au grand jour, que les idées communo-fascistes étaient dans l'air, et ainsi de suite. Pour la conférence, j'avais apporté avec moi quelques documents de samizdats et tamizdats, et notre journal Summa (une publication samizdat[3] de Leningrad, qui traitait d'un large spectre de questions politiques, sociales et littéraires), où l'on débattait aussi du problème juif ; j'avais montré tout cela à Alik. Comme certains écrivains du mouvement dissident, je considérai les dangers à venir sous un angle différent, et j'essayai de convaincre Alik que l'on était pas à la veille d'un pogrom. Aujourd'hui, après toutes ces années, on peut dire que les prédictions de Berezin ont été plusieurs fois sur le point de se vérifier ; son intuition ne l'avait pas entièrement trompé. Toutefois, en repensant plus tard à cette conversation, j'ai toujours eu l'impression que la vision apocalyptique d'Alik, en un certain sens mystique, n'était pas le fruit du hasard [...] Berezin occupait une situation particulière sur la scène mathématique moscovite et de toute l'Union soviétique. Il débuta comme l'un des élèves préférés, et des plus brillants, de I.M. Gelfand en théorie des représentations. La multitude

[1] MR1402925 Maslov, V.P. ; Shubin, M.A. ; Vershik, A.M. ; Vvedenskaya, N.D. Alik Berezin in the recollections of friends. Contemporary mathematical physics, 225–236, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 175, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[2] Voir l'explication de ce terme dans l'introduction.

[3] Voir l'explication de ce terme dans l'introduction.

de résultats, découvertes, et de relations inattendues obtenues à cette époque (la fin des années 50) constitua le cœur de cette nouvelle théorie : le rôle de Gelfand lui-même dans ce processus ne peut être surestimé. Toutefois beaucoup de ces travaux furent alors simplement esquissés, d'autres nécessitèrent des corrections et des compléments. C'est également vrai des premiers articles de Berezin, écrits en collaboration avec ou sous la direction de son directeur de thèse. Les points faibles de ces articles ou peut-être d'autres circonstances, eurent malheureusement pour conséquence la fin prématurée de la coopération entre le maître et l'élève et cette coopération ne fut jamais reprise. Ayant travaillé avec Gelfand pendant les années 70 et faisant partie des amis d'Alik, j'essayai de les convaincre l'un et l'autre de l'utilité et de l'importance de leur réunification, mais sans grand succès. En essayant de rendre compte de son rôle dans nos mathématiques, je dirais d'abord que, à mon avis, c'est précisément Berezin qui fut à l'origine de ce tournant essentiel dans la vie de beaucoup de mathématiciens que fut le rapprochement avec la physique. Il fut le premier de sa génération à décider, guidé par sa conception de la science, de se lancer dans l'énorme travail indispensable pour pénétrer la physique théorique en tant que physicien et pas seulement en mathématicien, et il y réussit. On peut longuement discuter pour savoir dans quelle mesure il était possible ou nécessaire d'accomplir cela, tout en restant encore un mathématicien ; il y a des exemples de mathématiciens devenus physiciens, mais Alik trouva le bon équilibre et devint un physicien mathématicien actif et suscita l'intérêt pour les problèmes physiques. C'est lui qui amena beaucoup de mathématiciens vers ce domaine, et certains d'entre eux devinrent de remarquables spécialistes de la théorie des modèles mathématiques de la physique contemporaine. L'attitude des « leaders » de la physique des années 30 à 50 à l'égard des mathématiques, était pour le moins réservée bien que certains d'entre eux fussent capables d'utiliser les techniques mathématiques de l'époque. Si cette situation a radicalement changé au cours des années 70, 80 et 90, on le doit en grande partie à Berezin. [...] Les contributions de Berezin à la théorie mathématique de la quantification sont si variées qu'il est difficile de les évoquer ici, même brièvement. Je n'en mentionnerai que quelques aspects. Le concept bien connu de groupe quantique, n'est que le développement de l'idée de déformation d'algèbre enveloppante universelle mis en avant par Berezin, quoique sous une forme quelque peu différente que celle étudiée dans les années 80. L'histoire du crochet de Lie-Berezin-Kirillov-Kostant lui aussi apparu en relation avec la quantification, est bien connue. Mon impression est que Berezin lui-même considérait sa série d'articles sur la quantification comme son sujet principal et favori. Je me rappelle beaucoup de nos conversations sur différents sujets variés. La plupart d'entre eux étaient liés d'une façon ou d'une autre à différents développements du thème principal et pouvaient servir d'exemples de l'application d'idées physiques à des problèmes purement mathématiques. L'un d'entre eux (l'approximation dans les systèmes dynamiques) fut largement développé bien que le rôle de Berezin soit resté caché en arrière-plan. Il était intéressé par les intégrales de chemin, dont il se considérait à juste titre comme l'un des initiateurs, par la théorie de facteurs de von Neumann, les C*-algèbres, les problèmes asymptotiques en algèbre et autres sujets. Toutes les variations de la théorie spectrale des opérateurs, la théorie de la diffusion, la théorie des spectres de matrices, tout cela a toujours été au centre de son attention. Je me rappelle les discussions sur le calcul des variations, sur la mécanique non holonome, sur les aspects algébriques de la théorie des systèmes intégrables. L'héritage d'un mathématicien n'est jamais limité à son œuvre publiée, ni même à ses manuscrits ; une part de celui-ci, en général difficile à apprécier par les générations futures, est transmise par l'intermédiaire de rapports, d'exposés, et de conversations, dans les idées discutées avec les collègues, et finalement par l'influence exercée sur les autres. Toutes ces composantes étaient fortement présentes dans la vie scientifique de Berezin : par son talent et son enthousiasme, son travail, les séminaires, ses nombreux rapports et contacts, il réussit à intéresser à de nouveaux problèmes des mathématiciens, jeunes aussi bien que reconnus. Sa vie de chercheur, riche en événements scientifiques, connut une fin prématurée. La dureté de l'existence en Union soviétique pour un scientifique de talent qui n'était pas très fidèle au pouvoir en place et juif de surcroît, laissa une trace profonde sur Alik. Je n'ai pas envie de dresser ici la liste de tous les mauvais coups et injustices qu'il dut endurer de la part des gens au pouvoir, de la part de ceux qui lui voulaient du mal. De nature courageuse, Berezin trouva toujours la force de s'élever au dessus des tracas quotidiens et de travailler, travailler encore. Son talent exceptionnel fut-il pleinement réalisé ? Peut-on répondre à une telle question ? Quoi qu'il en soit, j'estime qu'il a réussi à nous en dire beaucoup.

Lettre[1] au Recteur de l'Université d'État de Moscou, l'académicien R.V. Khokhlov

Felix Alexandrovitch Berezin

Très honoré Rem Viktorovich,

Je voudrais partager avec vous quelques considérations à propos de la section mathématique de la faculté MekhMat. Sa situation actuelle n'est pas à mon avis satisfaisante, et son avenir est inquiétant. Il y a à la faculté MekhMat un groupe de professeurs qui sont des mathématiciens éminents, mais n'ont aucun pouvoir de décision sur l'organisation scientifique de la faculté, tout au moins de sa section mathématique. Ces personnes devraient normalement prendre une part active aux décisions essentielles concernant les activités de la faculté : l'admission des nouveaux étudiants et des doctorants, les problèmes des concours, et la définition de la politique scientifique. Cependant, l'administration actuelle de la faculté a presque entièrement éliminé les mathématiciens pourvus d'autorité scientifique du pouvoir de décision sur toutes ces questions. Les décisions sont prises dans un cercle restreint d'individus, et révèlent souvent un manque de compétence ; les enseignants-chercheurs de la faculté qui ne font pas partie de ce cercle étroit n'ont aucune influence sur ces décisions, et il en résulte d'importants préjudices pour la faculté. A mon avis, si la situation actuelle n'est pas résolument modifiée, il y a un risque de dégradation de la faculté en tant que centre de formation de mathématiciens de haut niveau, et en tant que centre scientifique. Je vais citer quelques faits concernants différents aspects de la vie de la faculté.

[1] Traduit du russe par Olga Kravchenko et Claude Roger

L'admission des nouveaux étudiants

C'est une question fondamentale de la vie de la faculté. Le domaine principal d'intérêt de la société s'est de nos jours déplacé des sciences exactes vers les sciences humaines, et ceci se manifeste en particulier par la diminution du nombre des candidats à l'admission dans notre faculté. D'autre part, le système largement répandu des répétiteurs, masque la différence entre les gens entraînés à la résolution de problèmes typiques et ceux pourvus d'authentiques aptitudes mathématiques. Dans ces conditions, il est particulièrement important de gérer le recrutement de façon responsable. Dès l'arrivée aux affaires de l'administration actuelle, l'adjoint du doyen M.K. Potapov a dirigé l'admission des nouveaux étudiants ; pendant ce temps-là aucun des grands mathématiciens, qui de plus connaissent parfaitement les programmes scolaires, n'a jamais siégé dans la commission d'entrée à la faculté. Au nombre de ceux-ci on pouvait compter par exemple les professeurs V.N. Alekseev, V.I. Arnold, A.A. Kirillov, V.P. Palamodov, les docents A.M. Stepin, M.A. Shubin ; cette liste est loin d'être complète. La commission d'admission travaille de façon non professionnelle, le résultat en est la chute rapide du niveau moyen des étudiants, et aussi la diminution notable du nombre de mathématiciens de talent parmi ceux-ci.

La baisse du niveau moyen des étudiants a été remarquée par beaucoup d'enseignants, en poste à la faculté depuis assez longtemps pour leur permettre des comparaisons. Cette baisse ne se reflète pas dans les notes aux examens, car pendant les examens on s'adapte toujours au niveau moyen des étudiants. Néanmoins cette adaptation prend parfois des formes claires et caractéristiques ; par exemple, les examens de la chaire d'équations différentielles ont été radicalement simplifiés dans le but d'améliorer les résultats : si un étudiant devait auparavant traiter une question théorique et un problème, actuellement le problème a disparu.

La baisse du nombre de mathématiciens de talent parmi les étudiants de la faculté se remarque au niveau des doctorants. On ne peut pas vérifier ce niveau de façon formelle, mais cette baisse a cependant été ressentie par beaucoup de membres de la faculté. De même, il est clair que la diminution du nombre de mathématiciens de talent parmi les étudiants n'est pas non plus un secret pour l'administration. Ceci est attesté par un épisode caractéristique, qui s'est produit l'année dernière lors des Olympiades Mathématiques étudiantes organisées par notre faculté. Suivant les règles de fonctionnement des Olympiades, tous les établissements d'enseignement supérieur sont divisés en trois groupes de niveau : la faculté MekhMat fait partie du premier groupe, et le M.I.I.T. (Institut Moscovite des Ingénieurs des Transports) fait partie du second ,avec quelques autres établissements d'enseignement supérieur technique. L'année dernière, l'équipe du M.I.I.T. a pris la première place de son groupe, devançant largement tous ses compétiteurs. Sur cette base, le M.I.I.T. a demandé le transfert de son équipe dans le premier groupe pour cette année, ce qui lui fut pourtant refusé. Néanmoins, les membres de l'équipe du M.I.I.T. ont demandé aux surveillants de l'amphithéâtre les sujets des problèmes du premier groupe et commencé à les résoudre. Quand ce fait fut connu, l'équipe du M.I.I.T. fut disqualifiée.

La seule explication rationnelle de cet épisode est à mon avis la suivante. L'administration est parfaitement au courant de l'entrée au M.I.I.T. d'un nombre significatifs de mathématiciens très doués qui n'ont pas été admis à Mekhmat. Leur appartenance à une équipe en compétition avec la nôtre aurait pu coûter la victoire à notre équipe, ou en tout cas rendre cette victoire moins convaincante.

Les faits suivants permettent jusqu'à un certain point de juger de la nature du travail de la commission d'admission : je peux citer les noms de onze personnes, lauréates des olympiades scolaires moscovites et de toute l'Union, qui n'ont pas été admises dans notre faculté, et cette liste n'est sans doute pas exhaustive.

Une tradition d'activités intenses visant à attirer des étudiants s'est maintenue pendant plusieurs années. Ce travail s'effectuait à différents niveaux : avec les cercles mathématiques des lycées, avec l'organisation des Olympiades à Moscou et en province et enfin par le transfert dans les deuxième et troisième années d'étudiants des Universités de province qui y avaient suivi leur formation initiale. Des membres de notre faculté étaient envoyés spécialement dans ces universités pour le choix de ces candidats à la mutation. Actuellement, une génération de mathématiciens connus est passée par cette filière ; je voudrais mentionner parmi ceux-ci D. Khadzhiev, un de mes étudiants, qui a récemment soutenu son habilitation, et est actuellement doyen de la faculté de mathématiques de l'Université de Tachkent.

Actuellement ce travail a été abandonné. Il faut remarquer toutefois que ces derniers temps, conformément aux directives du rectorat, les cours mathématiques du soir ont été réorganisés. Cependant ces cours n'existent pas encore depuis assez longtemps pour pouvoir juger de leur rôle dans l'admission des nouveaux étudiants. L'envoi de membres de la faculté dans les Universités de province pour le choix des candidats à la mutation parmi les étudiants des premiers cycles a été totalement stoppé. Cette circonstance réduit fortement le rôle de notre faculté comme centre de toute l'Union pour la formation de mathématiciens de niveau élevé.

L'année dernière déjà, personne n'a été envoyé pour encadrer les olympiades régionales.

L'admission aux études doctorales

Durant l'activité de l'administration actuelle, on peut citer une série de cas où des personnes recommandées par leur directeurs scientifiques n'ont pas été admises à se présenter aux examens d'admission à l'école doctorale pour différentes et étranges raisons. Certaines parmi ces personnes, comme Khovanskij, Blekher, Zarkhin, Kojtman ont soutenu leurs thèses peu de temps après, en dehors du cadre de l'école doctorale, et se révèlent actuellement comme des mathématiciens reconnus.

C'est à la chaire d'algèbre que des cas analogues se sont le plus fréquemment produits ces derniers temps : Skornjakov, Kifer (recommandés par Yu.I. Manin), Leites (recommandé par A.L. Onischik) ne furent pas admis à se présenter à l'examen d'entrée à l'école doctorale. Concernant Leites, je sais qu'au moment de la fin de son cursus universitaire il avait écrit quelques articles, l'un d'entre eux fut publié, les autres soumis. En plus de cela il était un membre assez actif des Komsomol. Le prétexte du refus était la note médiocre obtenue en deuxième année. Dans un tel contexte cette raison paraît purement formelle.

Les relations de l'administration avec le personnel académique. L'admission de nouveaux enseignants-chercheurs

À mon avis, le problème du recrutement des nouveaux enseignants-chercheurs n'est pas considèré avec assez de sérieux par l'administration de la faculté. Pour des raisons sans fondement scientifique le brillant mathématicien Gabrielov, qui a soutenu voici quelques années sa thèse à la chaire de théorie des fonctions et analyse fonctionnelle (directeur de thèse professeur Palamodov), n'a pas obtenu de poste à la faculté. Au même moment tout un groupe de gens dépourvus de la qualification nécessaire ont eu un poste à la faculté. Ces derniers temps est apparue l'habitude d'attribuer des postes de façon purement administrative à certaines personnes, sans aucune concertation avec les membres de la chaire dont ces gens allaient faire partie. (Par exemple Shkalikov fut nommé dès sa soutenance de thèse en 1976 à la chaire de théorie de fonctions et analyse fonctionnelle où il était inconnu auparavant). Une telle pratique présente un très grand risque de dégradation du niveau de la faculté par le recrutement de cadres inadaptés. La politique de l'administration vis-a-vis des collaborateurs extérieurs est incompréhensible. Il parait évident que dans ce but il faudrait inviter uniquement les plus grands mathématiciens de l'Union Soviétique, ou alors les spécialistes des domaines des mathématiques qui ne sont pas assez representés à la faculté. Pourtant, le fait est que ce n'est pas toujours le cas. On peut citer par exemple, parmi les collaborateurs de la chaire de théorie des fonctions : Gelfand, Vitushkin, Gonchar, Stechkin, Guschin. Je pense que l'invitation de Stechkin et Guschin n'est pas justifiée. Stechkin est un mathématicien connu et un bon enseignant, mais il est spécialiste de la théorie des fonctions, très fortement représentée dans notre faculté par les membres permanents de la chaire, et il ne les dépasse pas d'une façon significative par son niveau scientifique. En ce qui concerne Guschin, c'est un spécialiste de second ordre des équations différentielles ; autrement dit non seulement son niveau scientifique n'est pas suffisant, à mon avis, pour être invité en tant que collaborateur extérieur de notre faculté, mais de plus sa spécialité mathématique n'a pas de relation avec la chaire où il a été invité.

Beaucoup d'enseignants-chercheurs sont traités avec mépris par l'administration de la faculté. Un des exemples de ce traitement se révèle être l'absence de nomination aux conseils scientifiques de la faculté d'un groupe de grands mathématiciens qui y travaillent, comme par exemple les professeurs Kirillov et Palamodov.

Un autre exemple d'une pratique qui s'est répandue ces derniers temps : il arrive que la commission d'admission ne prenne aucune décision vis-a-vis de tel ou tel enseignant-chercheur, en reportant celle-ci d'un an ou plus. Parmi les enseignants-chercheurs qui se trouvent dans cette situation, on peut par exemple citer un mathématicien de talent, le docent A.M. Vinogradov. Sa titularisation est reportée depuis déjà deux ans. Cependant, l'affaire la plus scandaleuse est celle du professeur G.E. Shilov qui n'a pas vu son poste renouvelé et en mourut peu de temps après. Shilov n'était pas seulement un grand mathématicien, qui a lié sans partage son destin à celui de Mekhmath, mais aussi un enseignant brillant, auteur de manuels très populaires, un des créateurs du cours d'analyse fonctionnelle de notre faculté (connu sous le nom "Analyse III"). Son apport à la faculté a été très grand et son absence se fera sentir encore pendant longtemps.

Ne voulant plus supporter ce mépris de la part de l'administration, certains enseignants-chercheurs ont quitté la faculté ; parmi eux un grand mathématicien, menant un travail pédagogique très actif à la faculté, le docteur en sciences physiques et mathématiques A.L. Onischik.

Au cas où l'ambiance de la faculté ne serait pas assainie, son exemple pourrait bien être suivi par d'autres parmi les enseignants-chercheurs qui forment en ce moment le noyau scientifique de la faculté.

La politique scientifique

L'administration n'a pas la possibilité de dicter aux enseignants-chercheurs de la section mathématique de notre faculté les thèmes de leur activité scientifique. Pour cette raison la politique scientifique ne peut consister qu'à inviter des scientifiques extérieurs pour renforcer telle ou telle direction et à établir des contacts avec les différents centres scientifiques.

À mon avis, la politique scientifique de l'administration de la faculté n'est pas satisfaisante. Pour commencer je vais me référer à un exemple que nous avons déjà considéré. Bien que la théorie des fonctions soit très fortement représentée dans notre faculté, un spécialiste de ce domaine, Stechkin, a été invité en tant que collaborateur extérieur. D'un autre côté, bien que la physique mathématique ne se trouve pas dans une position aussi favorable, les physiciens théoriciens, invités par Petrovsky[2] pour la renforcer, ont été remerciés. Pire encore, un des plus grands spécialistes soviétiques des problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs, le professeur A.S. Schwarz, s'est vu interdire d'enseigner un cours de troisième cycle sur la théorie quantique des champs. Ce cours était enseigné librement, et fut interrompu au milieu de l'année.

De façon analogue, l'administration a interrompu la collaboration avec notre faculté de grands mathématiciens spécialistes de l'économie mathématique, membres du CEMI (Institut Central d' Economie Mathématique) Mityagin et Katok, et pourtant l'économie mathématique ne fait pas partie des discipline représentées de façon satisfaisante à la faculté . De ce fait, les contacts prévus entre notre faculté et le CEMI ont été étouffés dans l'oeuf. Il a toujours fait partie des traditions de notre faculté de donner la possibilité aux mathématiciens actifs qui ne faisaient pas partie de ses cadres permanents, de donner des séminaires ou des cours de troisième cycle, libres ou payés à l'heure ; cette disposition a toujours fortement stimulé les étudiants et constituait un moyen souple de renforcer les domaines scientifiques qui en avaient besoin. L'administration actuelle s'est mise pour la première fois à réglementer de telles activités, sans aucune cohérence avec la valeur scientifique ou la popularité auprès des étudiants des cours ou séminaires de troisième cycle concernés.

Je ferai finalement remarquer que pendant ces dernières années les grands centres scientifiques internationaux tels que l'IAS de Princeton, l'Université d'Oxford, le CERN ont fait preuve d'un grand intérêt en nouant des contacts avec notre faculté et en invitant certains de nos scientifiques *(note de E.G. Karpel : ces invitations ont été reçues personnellement par F.A. Berezin, et par plusieurs autres encore)*. Cependant l'administration de la faculté a coupé ces contacts sous

[2] I.G. Petrovsky, recteur de MGU dans les années soixante.

des prétextes biscornus. Je pense que ce fait a handicapé le développement des mathématiques dans notre pays.

Je voudrais profiter de l'occasion pour exprimer mon opinion sur les mesures nécessaires à l'amélioration des méthodes de travail de la faculté.

(1) L'administration dirigeante de la faculté devrait se composer de grands scientifiques pourvus d'une indiscutable autorité professionnelle ; ceci concerne en premier lieu le doyen de la faculté. À mon avis, il n'y a en ce moment personne qui pourrait diriger avec la même compétence la partie mécanique aussi bien que la partie mathématique de la faculté. Par conséquent, il faudra peut être prévoir un poste de doyen délégué pour la section de mécanique au cas où le doyen se trouve être mathématicien, et de doyen délégué en section mathématique au cas où le doyen se trouve être un mécanicien.

(2) Je pense que l'une des raisons de l'état non satisfaisant de la vie de la faculté est la chape impénétrable de secret avec laquelle l'administration actuelle entoure toutes ses actions. Cette question me paraît fondamentale, car les activités de l'administration devraient être transparentes.

Dans ce but, les mesures suivantes me paraîssent utiles :

(a) Les rapports d'activité annuels doivent cesser d'être purement formels. Pour cela il faudrait envoyer aux enseignants-chercheurs de la faculté les convocations contenant le rapport d'activité, ou au moins, son resumé, suffisamment tôt et pas moins de deux semaines en avance.

(b) Pour chaque réunion du conseil d'administration de la faculté, il faut présenter le compte-rendu avec la liste des questions traitées, les décisions, la liste des membres présents.

Ces comptes-rendus doivent être disponibles, tous les enseignants-chercheurs doivent avoir libre accès à chacun de ces comptes-rendus, et l'administration ne doit ensuite prendre aucune décision qui n'ait auparavant été actée dans ces comptes-rendus.

(c) En cas de recrutement de nouveaux collègues, il faut organiser au préalable une réunion de la chaire à laquelle il sera rattaché. À cette réunion, il faut que le directeur de la chaire ou un représentant de l'administration fasse un rapport sur les résultats scientifiques du candidat recommandé ; il faudra aussi inviter à cette réunion les membres des autres chaires avec lesquels le candidat a des relations scientifiques.

(d) Les conseils scientifiques doivent discuter de toutes les candidatures pour l'inscription en thèse recommandées par les enseignants-chercheurs de la faculté. Au cas où une candidature quelconque provoque une opposition, cette opposition doit être exprimée ouvertement.

(3) Il faut améliorer la composition des conseils scientifiques. Comme je l'ai déjà indiqué, il y a actuellement un certain nombre de scientifiques de grande renommée en poste à la faculté qui ne sont pas membres des ces conseils.

En même temps, les membres des conseils scientifiques sont des gens étranges qui mettent systématiquement des bulletins nuls dans les votes pour les thèses, ou bien qui votent « pour » ou « contre » indépendamment de la qualité de la thèse. Le résultat en a été que des choses scandaleuses se sont produites à deux reprises : alors que tous les rapports écrits et oraux étaient élogieux, les conseils ont refusé les thèses (un des membres du conseil scientifique a fait une tentative de justification morale d'un tel comportement en arguant du secret du vote). Dans les deux cas, afin d'éviter un scandale plus grand, les conseils scientifiques ont déclaré non valables les proclamations de la commission de décompte, afin d'obtenir la tenue d'un nouveau scrutin.

(4) Il me semble qu'il faudrait renouer avec l'ancienne tradition selon laquelle chaque mathématicien scientifiquement actif, même s'il ne fait pas partie des enseignants-chercheurs de la faculté, doit avoir la possibilité de tenir un séminaire pour les étudiants ou de donner un cours spécialisé libre ou payé à l'heure. Ceci ne devrait pas faire l'objet de formalités administratives, mise à part l'autorisation de la chaire concernée.

(5) Je pense que pour revigorer la section mathématique de notre faculté il ne faut pas seulement développer les directions traditionnelles qui ont une valeur purement mathématique mais aussi les fondements mathématiques des autres sciences.

Les plus importantes ici me semblent être :

(a) La physique mathématique au sens large, qui inclut les fondements mathématiques de la mécanique quantique, la physique statistique, et la théorie quantique des champs.

(b) La biologie mathématique.

(c) L'économie mathématique.

En ce moment c'est la physique mathématique qui se porte le mieux. En ce qui concerne la biologie et l'économie mathématiques elles sont en ce moment très faiblement représentées à la faculté. Cependant, on trouve à Moscou des groupes de mathématiciens sérieux qui se consacrent à la biologie et l'économie mathématiques. Je pense qu'il faut promouvoir leur collaboration avec notre faculté.

Pour l'avenir, la création de chaires de physique mathématique, de biologie mathématique et d'économie mathématique me semble utile.

Les opinions exprimées dans cette lettre sur les activités de l'administration ainsi que sur certains mathématiciens sont mes propres opinions personnelles et c'est pourquoi elles sont peut-être subjectives. Cependant elles sont partagées par certains collègues de la faculté. En ce qui concerne les faits exposés ici, ils peuvent être confirmés par un groupe de collègues de la faculté.

« Au Bureau de la Société Mathématique de Moscou :

Des conflits à l'occasion de soutenances d'habilitations sont apparus plus fréquemment ces dernières années. Ces conflits proviennent pour une part des différences d'exigence de niveau des habilitations et pour une autre de considérations extra-mathématiques.

Je pense que la Société Mathématique de Moscou ne doit pas rester en dehors de ces conflits, en tout cas quand il s'agit des habilitations de ses membres. À mon avis, chaque fois qu'un membre de la Société s'apprête à soumettre un mémoire d'habilitation, le bureau de la Société doit avoir une opinion claire sur la qualité du travail. Au cas où le bureau considère le mémoire d'habilitation comme satisfaisant aux exigences requises, il doit soutenir le candidat, dans le cas contraire lui recommander de s'abstenir de soumettre le mémoire. Le soutien au mémoire d'habilitation suite à un choix du bureau de la Société peut prendre des formes différentes mais doit toujours prendre en compte un certain consensus public ; à *part cela, il est possible aussi de faire par exemple une déclaration suite à la soutenance ou si nécessaire une demande officielle adressée à la VAK (haute commission de contrôle). En cas d'émergence d'un conflit avant la soutenance de l'habilitation, il me paraît raisonnable de réunir un groupe de personnes compétentes dans le domaine concerné et choisi avec l'accord du candidat et de ses opposants afin de résoudre le conflit. Après cela il faut faire une réunion de toutes les personnes concernées pour une discussion de fond. Dans certains cas il pourrait peut être être utile de publier le compte-rendu d'une telle réunion dans UMN (Uspekhi Matematicheskii Nauk), dans la partie consacrée à la vie mathématique en URSS.*

Le but d'une telle discussion est l'élaboration d'une opinion publique claire et justifiée sur la qualité de l'habilitation et la justification des réserves qu'on y oppose. Je pense que l'initiative de la Société Mathématique de Moscou que je propose pourra aboutir à la création de critères généralement acceptés pour le niveau d'un travail pouvant être reconnu comme habilitation, et aurait une grande valeur morale. Une telle initiative améliorerait le prestige de la Société Mathématique de Moscou. »

Je le dis pour le salut de mon âme (du latin « *Dixi, et animam levavi* »).

F.A. Berezin

F.A. Berezin

ENSEIGNEMENT

SUITE DU DÉBAT AU CONSEIL DE LA SMF DU 7-01-2006

Le départ de Laurent Lafforgue du HCE (Haut Conseil à l'Éducation), en novembre 2005 a donné lieu –notamment– à la parution de plusieurs messages sur le forum de la SMF et à des discussions parfois passionnées dans notre milieu. Cette question a été évoquée lors de la réunion de bureau de la Société du 2 décembre 2005. Si tous les membres de cette instance ne s'accordaient pas sur l'attitude à tenir, ils étaient néanmoins unanimes sur la nécessité d'une initiative de la SMF à propos de l'enseignement des mathématiques, dans le cadre du débat qui traverse la société sur tout le système d'enseignement, du primaire au supérieur. Cette réunion de bureau a permis l'élaboration d'une déclaration de Marie-Françoise Roy portée à la connaissance des adhérents puis rendue publique sur le forum de la SMF.

« Ce qu'il est convenu d'appeler "l'affaire Lafforgue" à savoir sa démission forcée du Haut Comité à l'Éducation où il venait d'être nommé, a soulevé beaucoup de débats dans la communauté mathématique. Les appels et courriels que j'ai reçus, et les avis que j'ai sollicités auprès de collègues qui n'avaient pas souhaité s'exprimer spontanément, m'ont convaincue que la proposition d'une réaction publique immédiate de la SMF divisait profondément les mathématiciens. En conséquence, et conformément à nos règles de fonctionnement (une décision du Bureau ou du Conseil de la Société ne peut se prendre par voie électronique que si elle est unanime, le manque d'unanimité rendant nécessaire une réunion autour d'une vraie table non virtuelle), j'ai saisi de cette question le Bureau lors de sa réunion du 2 décembre.

La discussion, passionnée, longue et sérieuse, a montré que si les avis divergeaient fortement sur l'interprétation de l'événement lui-même et les réactions immédiates qu'il convenait ou non de lui consacrer, l'accord se faisait sur l'importance de la question sous-jacente : l'état de l'enseignement des mathématiques dans notre pays, qu'il est nécessaire d'analyser à fond, sans langue de bois et discours lénifiant.

Nous avons identifié trois points clefs :

(1) *Des problèmes aigus se posent à l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux.*

(2) *Dans la situation où se trouve notre pays, et plus précisément la persistance depuis 20 ans d'un taux de chômage destructeur notamment chez les jeunes, des questions de société, telles que le rôle de la sélection par les mathématiques dans l'accès à un grand nombre de formations, pèsent lourd dans la perception de notre discipline par nos concitoyens.*

(3) *Comme sur d'autres sujets d'actualité, l'affrontement entre les tenants de positions bloquées ne permettra pas de sortir de cette situation. On peut même penser qu'elle aura in fine un impact globalement négatif sur la qualité de l'enseignement de notre discipline.*

Le Conseil de la Société a désigné, lors de la réunion qui a suivi son renouvellement partiel, un vice-président et une commission chargés de traiter des questions relatives à l'enseignement. Beaucoup de travail a été accompli récemment à ce niveau, notamment l'organisation du récent colloque franco-finlandais "L'enseignement des mathématiques : à partir de l'enquête PISA", qui a renforcé notre conviction que le débat ne doit surtout pas rester franco-français. Toutefois, lorsque la situation l'exige, c'est naturellement au Conseil, seul organe élu directement par nos adhérents, qu'il revient de se prononcer. Sans prétendre atteindre du premier coup une vue exhaustive de la diversité des points de vue, le Conseil du 7 janvier prochain auditionnera plusieurs collègues à propos de l'état de l'enseignement des mathématiques dans notre pays et des remèdes qu'il convient d'y apporter. Il décidera des moyens à mettre en œuvre pour nous permettre de mener un vrai débat, condition indispensable pour parvenir à reconstruire une pensée collective de notre communauté sur cette question fondamentale. »

Il a été décidé de consacrer un temps important, lors de la réunion suivante du Conseil d'Administration, le 7 janvier 2006, à un débat sur ce problème. Il a paru intéressant aux membres du bureau d'inviter à ce débat 4 collègues représentant une partie des points de vue qui se sont exprimés ces dernières années dans notre collectivité mathématique sur la question de la transmission du savoir de notre discipline. Nous avons ainsi sollicité :

– Martin Andler,
– Jean-Pierre Demailly,
– Daniel Duverney,
– Claudine Schwartz.

La discussion avait été cadrée par un message de Guy Chassé et Marie-Françoise Roy dont nous donnons quelques extraits :

« Il nous semble important de préciser tout d'abord qu'un débat en deux heures en conseil ne permettra pas d'élaborer des prises de position de la SMF sur l'ensemble des problèmes abordés mais a pour but essentiel l'organisation future de la réflexion.

Nous souhaitons que les éléments suivants soient pris en compte

– le fait que la SMF a une responsabilité particulière dans l'enseignement supérieur (universités et classes préparatoires/grandes écoles) et la formation des maîtres,

– le fait que l'organisation d'un débat général sur l'enseignement des mathématiques ne peut être l'affaire de la seule SMF même si elle peut en prendre l'initiative,

– l'importance d'une ouverture internationale vers ce qui se fait d'intéressant dans les pays étrangers,

– l'existence de prises de position précédentes de la SMF (au sein d'Action Sciences, par exemple) et de sa commission enseignement, dont le rôle dans l'organisation du débat futur doit être précisé,

- le travail effectué par la CREM dans ses différents rapports. »

Pour lancer le débat

Martin Andler[1]

Dans cette brève intervention, je me limite aux mathématiques et à quelques remarques générales, sans aborder l'ensemble des questions posées par Laurent Lafforgue dans les débats de ces derniers mois.

Ce que nous (les mathématiciens) pensons/ce que les autres (le reste de la population) pensent

Sans prendre à la lettre l'opposition que je vais décrire (par exemple, je ne me range pas complètement dans le « nous »), il me semble qu'en gros les positions sont les suivantes :

« Ce que nous pensons » :

a- Il n'y a pas de section vraiment scientifique au lycée

b- Le niveau en mathématiques est vertigineusement bas, que ce soit celui des bons élèves (par rapport à leurs homologues d'il y a vingt ou trente ans) ou celui des élèves moyens

c- Les élèves de TS ne font pas assez de mathématiques et pas du tout de vraies mathématiques

d- Par ailleurs, il va de soi qu'une bonne formation scientifique repose sur un bon niveau de mathématiques ; donc il ne peut, dans ces conditions, y avoir de formation scientifique correcte

e- Le niveau général des élèves se dégrade.

« Ce que eux pensent »

a- Les mathématiques au collège et au lycée sont trop difficiles

b- C'est sur la base des mathématiques que se fait la sélection

c- Les mathématiques ont un rôle excessif dans la formation y compris la formation scientifique

d- Les sciences ne dérivent pas des mathématiques ; elles entretiennent avec les mathématiques des rapports variables de proximité, mais non de sujétion.

Dans mes activités diverses : communication scientifique, politiques, à l'université, à la SMF, à Animath, j'ai fait l'expérience concrète de cette contradiction, et elle m'incite à penser que ce que « nous » disons est inaudible de presque tous nos interlocuteurs. Ça ne veut pas dire nécessairement qu'il ne faut pas le dire : on peut avoir raison seul contre tous, mais il faut savoir ce que l'on fait... Mais pour ma part, je pense que ce que nous disons doit être au moins sérieusement reformulé.

[1] Université de Versailles Saint-Quentin, président d'Animath.

Symptômes alarmants

J'ai commencé par décrire les obstacles parce que la mise en garde me paraissait nécessaire. Mais voici huit points qui me paraissent refléter divers aspects de la crise de notre système d'enseignement général, et de celui des mathématiques en particulier.

a- Il y a des signes concordants d'un niveau insuffisant de nos élèves (pour les meilleurs, résultats médiocres aux Olympiades internationales de mathématiques ; pour l'appréciation du niveau d'ensemble : les enquêtes Pisa, TIMMS ?) ; nous ne savons pas apprécier les conséquences à long terme de cela. Est-ce que ces élèves seront effectivement moins performants une fois adultes ? Il est probable que oui.

b- Le problème de la désaffection pour les études scientifiques, désaffection qui affecte très gravement les universités et beaucoup moins les classes préparatoires. Il est notamment clair qu'une partie des élèves qui sont dans les sections S ne le sont pas par vocation scientifique, mais pour d'autres raisons ; a contrario, ne sont pas en S des élèves qui ont un potentiel pour des études scientifiques mais qui ont eu peur ou été orientés vers d'autres sections.

c- L'inégalité des chances, qui se manifeste par des phénomènes de ségrégation scolaire, par le creusement des inégalités entre établissements, par la réussite disproportionnée des enfants d'enseignants.

d- L'échec scolaire total de plus de 15% d'une classe d'âge.

e- L'ennui qui touche la grande majorité des élèves.

f- La domination sans partage dans notre système d'un critère unique de réussite : être « bon élève », ce qui veut dire être capable de réussir aux contrôles et aux examens.

g- Une crise du consensus sur les contenus mathématiques enseignés (doit-on mettre l'emphase sur les calcul et les mécanismes, ou sur les démonstrations ?), qu'on doit mettre en relation avec une interrogation plus fondamentale sur la manière dont on présente le rapport entre mathématiques et autres sciences.

h- La démoralisation massive des enseignants du secondaire, ceux de mathématiques étant particulièrement touchés.

Pour plusieurs de ces points, y compris les points généraux, les mathématiques jouent un rôle essentiel, sur lequel nous devons nous interroger collectivement – et tout particulièrement nous qui formons les futurs enseignants. J'en évoquerai trois :

– Les mathématiques et les tropismes particuliers du système français sont compatibles, voire complémentaires : dans un système qui repose de manière centrale sur les examens et les concours (épreuves en temps limité), les mathématiques sont une discipline bien adaptée.

– Qu'on le veuille ou non, les mathématiques remplissent une fonction « élitiste » (primauté de la filière S), dont on voit bien les effets négatifs (voir plus haut).

– Présenter les mathématiques comme un préalable tend à décourager les vocations scientifiques, et à favoriser deux profils bien précis : les individus obéissants, qui font ce qu'on leur dit de faire, et ceux qui ont cette mystérieuse configuration d'esprit qui les incite à accorder de l'importance à des questions formulées en termes purement mathématiques ; il y a de nombreux scientifiques, y compris des mathématiciens qui n'appartiennent à aucune de ces deux catégories !

À qui la faute ?

a- Imputer la faute à une coalition des pédagogues et des inspecteurs unis pour faire baisser le niveau me paraît dans le meilleur des cas une simplification puérile ;

b- Il n'y a pas d'âge d'or : ni l'avant-guerre, ni les années 60 ou 70 (pour autant, il y a certainement des pratiques et des savoir-faire de ces époques que l'on pourrait réhabiliter) ;

c- Dans l'ensemble, il y a dans les débats pédagogiques des gens de plutôt bonne volonté, avec des points de vue très divers, et on constate qu'on est parfois d'accord avec les uns, et parfois avec les autres. Evitons le manichéisme qui opposerait les bons (les vrais matheux) et les méchants (coalition hétéroclite des pseudo-matheux, pas-du-tout-matheux, ex-matheux ?)

d- S'il faut distribuer des blâmes, soyons généreux et œcuméniques :

- au ministère, pour l'empilement des réformes ;
- aux syndicats d'enseignants, pour bloquer tout changement de la manière de travailler dans les établissements scolaires ;
- aux « pédagogues », qui ont déstabilisé les approches traditionnelles, ont basé leur réflexion sur une connaissance très superficielle des mathématiques, sans avoir mis en place une approche nouvelle réellement fonctionnelle ;
- aux conservateurs de tous poils, qui pensent toujours qu'avant c'était mieux : qui les quadriques, les inversions et la géométrie du triangle, qui les structures fondamentales, qui les dictées ?
- *last but not least* : à nous les mathématiciens, pour notre incapacité à avoir de notre propre discipline une vision ouverte et équilibrée.

– Mais il y a une question philosophique fondamentale sous-jacente à tous les débats sur l'éducation : la compatibilité entre enseignement de masse et formation de divers types d'élites. Il ne s'agit de rien de moins que de comprendre l'inscription du système éducatif dans la modernité des sociétés démocratiques. Tant que nous ne sommes pas capables de construire un discours sur l'éducation qui fasse droit à tous les volets du système, depuis la formation des élites (en ce qui nous concerne, des chercheurs en mathématiques) à celle de ceux qui sont orientés vers l'apprentissage à 14 ans, nos débats resteront parfaitement stériles.

Que faire ?

Il ne saurait être question en quelques lignes, d'esquisser une réforme d'ensemble du système éducatif – tout au plus d'énoncer quelques principes et faire quelques suggestions ponctuelles.

a- D'abord, nous devons proscrire toute proposition qui soit en contradiction avec l'impératif démocratique général.

b- Ceci implique d'accepter l'existence d'un tronc commun long (Primaire + Collège) et se donner les moyens de le faire marcher, ce qui n'est pas seulement une question d'argent (souvenons-nous que les dépenses éducatives par collégien et lycéen en France sont parmi les plus élevées des pays riches). Il est clair que le tronc commun long implique l'acceptation sociale d'un certain égalitarisme éducatif.

– Le caractère vraiment réversible des choix au lycée.

– Ceci me paraît exclure la recréation d'une TC ; mais ce que dit Duverney est convaincant la TS est trop dure.

c- Au delà du Collège, la différenciation des cursus est souhaitable, mais dans des conditions très encadrées : il faut proscrire les processus de sélection précoce qui sont peu efficaces, et en particulier proscrire la création de sections d'élite ; le maintien des lycéens dans leur établissement de secteur doit être la règle.

d- Si les cursus se différencient, il faut que les choix et orientations effectués au lycée soient vraiment réversibles.

e- Très concrètement, la distinction entre sections L, ES, S (pour le lycée général), et au sein de la section S, des options math, physique, SVT me paraît contrevenir aux principes précédents : caractère irréversible, inévitablement hiérarchisé.

f- S'il est vrai que la section S est actuellement trop lourde pour la plupart des élèves, je pense que les deux pistes préconisées parfois (diminution de la place des disciplines non scientifiques, possibilité de choix entre des voies plus différenciées : mathématiques, physique, SVT) ne me paraissent pas très convaincantes. Dans le cadre des principes énoncés ci-dessus, le développement de l'optionnel me paraît être la bonne solution – à condition que le critère de réversibilité soit appliqué.

g- Les activités périscolaires doivent pouvoir jouer un rôle radicalement plus important qu'aujourd'hui dans l'ensemble du système éducatif. Elles sont un élément de diversification des activités des élèves en dehors des contraintes liées à l'hétérogénéité des classes.

h- La prise en compte de ces activités périscolaires dans l'évaluation des élèves doit être possible. Mais elle implique un changement fondamental des critères d'excellence des élèves.

i- Terminons par des points qui concernent l'enseignement à l'université. Si on réfléchit sérieusement à la formation utile pour un futur professeur de mathématiques (et pas seulement à la formation utile pour réussir au CAPES de mathématiques), on doit mettre en question les dogmes de ce que doit connaître un étudiant en fin de licence : doit-on connaître la théorie de la mesure, la topologie générale, le calcul différentiel banachique, les groupes de Sylow ? pour ne citer que quelques exemples ? Ne serait-il pas plus utile, par exemple, qu'ils sachent comment les mathématiques sont pertinentes dans les autres sciences ? Mais les étudiants que nous formons ne sont qu'assez peu à avoir de réelles chances de réussite au CAPES et a fortiori à l'agrégation. Encore moins deviendront chercheurs. Quelle est la cohérence des formations que nous proposons par rapport à cette réalité ?

Vers une réévaluation de l'enseignement des mathématiques et des sciences : initiatives du GRIP et réseau de classes SLECC

Jean-Pierre Demailly[1]

Suite à la publication de notre mémoire « *Les savoirs fondamentaux au service de l'avenir scientifique et technique. Comment les ré-enseigner* » [1], un certain nombre d'interrogations compréhensibles ont fait surface. Quelques collègues, peut-être surpris par notre ton, se sont demandés si notre texte reflétait bien de manière objective la situation actuelle, et si les propositions qui y étaient faites pouvaient s'inscrire dans la réalité du moment.

Il me semble donc utile de dresser de nouveau un bilan qui, malheureusement, s'alourdit chaque jour de faits ou témoignages concordants confirmant la sévérité de notre diagnostic et la gravité des problèmes structuraux de notre école. La crise des banlieues intervenue en novembre 2005 est un épisode qui a frappé les esprits - même si à l'évidence le problème des banlieues est loin de relever seulement de la question scolaire. Dans le même temps, les manœuvres souterraines visant à pousser Laurent Lafforgue à la démission [2], fin novembre 2005, laissent penser que l'appareil de l'Education Nationale reste sous l'influence d'individualités et d'idéologies animées d'un profond mépris pour la transmission du savoir et la valeur de la connaissance. Ces idéologies n'ont eu de cesse depuis trois ou quatre décennies de faire dévier la réflexion éducative vers de fausses questions.

– La mission primordiale d'instruction de l'école a été détournée au profit de questions secondaires : le discours institutionnel n'a cessé de s'épancher sur la « socialisation » de l'élève, sur le « vivre ensemble » [3], sur le respect des règles implicites ou explicites de notre société (dont le dernier avatar est le respect du copyright, à l'heure où des lois liberticides comme le DADVSI sont votées pour verrouiller les droits d'auteur et l'accès à la technologie entre les mains de quelques monopoles d'édition... [4])

– Un « constructivisme rampant » imprègne le libellé des programmes ou des textes d'accompagnement, et laisse croire que l'élève peut bâtir lui-même ses savoirs ou se muer en chercheur improvisé, là où souvent il a fallu des siècles de travail collectif des plus grands penseurs de l'humanité pour parvenir à des connaissances organisées.

– La propédeutique officielle vise d'emblée des connaissances globalisantes, et pour ce faire a dévalorisé les démarches traditionnelles d'enseignement structurées et systématiques, procédant de l'élémentaire vers l'élaboré.

Le lecteur pourra observer que ces trois premières observations s'appliquent de manière caricaturale au projet de « Socle commun de connaissances et de compétences » proposé en janvier au Haut Conseil pour l'Education [5] (ce projet émane d'un groupe de travail mis en place confidentiellement par la DESCO en juin 2005).

[1] Université Grenoble I.

– Le dogme de la « centralité de l'élève », inscrit dans la loi Jospin de 1989 sous l'influence de penseurs comme Philippe Meirieu, a considérablement affaibli l'autorité des équipes éducatives.

– Le mythe de « l'égalité des élèves face à l'instruction », a induit une politique de nivellement systématique par le bas et des procédures d'évaluation et d'orientation de plus en plus démagogiques. Ce nivellement par le bas n'épargne aucun niveau, même pas les plus élevés.

– La quête prématurée et artificielle de « l'interdisciplinarité » a contribué à vider les enseignements fondamentaux de leur objet (tout en niant la valeur des véritables savoirs interdisciplinaires comme le lien profond entre les mathématiques et les sciences de la matière) - aboutissant à ce qu'André Vaschalde appelle « l'expérimentomania », à savoir une frénésie de démarche expérimentale sans conceptualisation, ou, à l'inverse, à un enseignement formel détaché de la pratique et de l'expérience [6].

À ces déviances on peut rattacher l'introduction des méthodes de lecture semi-globales (la phrase précède le mot qui lui-même doit être lu avant que les lettres soient connues), l'enseignement de la grammaire (les concepts de grammaire structuraliste précèdent les concepts élémentaires de nom, sujet, verbe, adjectif...), du Français (les élèves doivent reconnaître les figures de style avant même de savoir écrire correctement). Il n'est pas sûr que la récente circulaire de Robien sur la lecture suffise à changer la donne : les recommandations pour l'école maternelle restent en effet empruntes de cette vision globaliste (reconnaître les prénoms, rituel de la frise des dates et des jours), et, sans fixer d'objectifs précis, découragent les apprentissages explicites et structurés : écriture et dessin, reconnaissance des lettres et des chiffres, activités de comptage, manipulation concrète d'objets [7][8].

L'enseignement du calcul procède des mêmes idéologies absurdes : lors de la table ronde organisée par la SMF en octobre 2003 sur les programmes du primaire de janvier 2002 (programmes Joutard/Lang), Roland Charnay, l'un des principaux architectes des programmes de calcul, explique sans sourciller [9][10] que le sens des opérations doit précéder leur pratique effective et celle des algorithmes ! Théorie au nom de laquelle on n'a pas hésité à sabrer dans les contenus et les exigences, au point que le programme actuel accuse un retard de près de deux ans à la fin du primaire par rapport aux programmes 1880-1970 : nous relevons une sous-estimation récurrente de la nécessité de maîtriser les algorithmes opératoires, le fait que les opérations sur les décimaux, les fractions, les unités, la pratique de la division ont été pratiquement exclues du primaire, le report au lycée de points essentiels comme la décomposition des entiers en facteurs premiers, etc.

Les programmes actuels du collège, notamment en sciences, sont à la fois incohérents et très pauvres. Les ambitions les plus effarantes (par exemple, dans le cours de physique de 3e : les concepts de puissance électrique, de tension efficace, abordés de manière abrupte...) côtoient les lacunes les plus ahurissantes (réduction des fractions au même dénominateur par le ppcm seulement en classe de 3e - à l'aide de la calculette et de l'algorithme d'Euclide puisque la notion de nombre premier n'est pas censée être connue), et de graves incohérences dans l'introduction des concepts physiques de base [11]. Il va sans dire que la majorité des élèves ne peut suivre avec profit dans ces conditions. Ceux des élèves qui le peuvent encore - parce qu'ils ont bénéficié de circonstances exceptionnelles ou d'une aide familiale

- perdent un temps considérable dans des classes hétérogènes, où la progression est ralentie par la fragilité générale des connaissances de base. Au lycée, les programmes de mathématiques restent substantiels sur le papier, mais le rythme en brutale accélération imposé par les horaires insuffisants fait qu'il est impossible d'approfondir les matières traitées et que de nombreux élèves sont « largués ».

Notre système d'enseignement est donc profondément déstabilisé. On ne pourra le remettre en place sans une véritable refondation de l'école depuis ses premiers niveaux. Il est évident que cela demandera beaucoup de temps et d'énergie. Face à l'immensité de la tâche à accomplir, le découragement n'est pas de mise. Il me paraît au contraire indispensable que les sociétés savantes, à commencer par la Société Mathématique de France, se dotent d'instruments de réflexion et fassent connaître leur position. Voici quelques pistes d'action :

(1) Continuer la réflexion sur les contenus et progressions proposées dans les différentes disciplines, notamment les mathématiques et les domaines connexes comme la physique, sur l'ensemble du parcours scolaire. Cette réflexion est d'ailleurs l'une des principales raisons d'être de notre « Groupe de Réflexion Interdisciplinaire sur les Programmes (GRIP) », fondé en juin 2003. De ce point de vue, le projet de « socle » [5] qui a diffusé début janvier 2006 est très inquiétant à la fois par l'emploi d'un jargon abscons, par son caractère flou et minimaliste, aussi bien que par l'absence de concertation qui a prévalu dans son élaboration. Les associations de professeurs, la SMF et les autres sociétés savantes devraient être des partenaires incontournables de ce type de réflexion, et elles doivent donc se donner les moyens de coordonner de manière plus efficace leurs analyses et leurs propositions.

(2) Procéder à des comparaisons internationales avec les quelques rares pays où la situation est moins dégradée qu'en France. On ne peut malheureusement ranger dans cette catégorie presque aucun pays de la communauté européenne, puisque ces pays ont majoritairement suivi des politiques régressives sur le plan des contenus enseignés, politiques elles-mêmes en partie inspirées des aspects les plus contestables des « modèles » anglais ou américain. Font peut-être exception des pays comme la Slovénie, récemment entrée dans la Communauté Européenne (et qui, malgré une population de seulement 2 millions d'habitants, semble avoir de bien de meilleurs résultats que la France aux Olympiades internationales de mathématiques), et quelques pays de l'ex-Europe de l'Est. Des témoignages concordants indiquent que la Russie a conservé un système d'enseignement de meilleure qualité que le nôtre. Il pourrait être utile de s'intéresser également à ce qui se passe dans les pays occidentaux ayant entamé une démarche de revalorisation de leur enseignement après une période d'effondrement (Israël [12], quelques états américains comme la Californie ou le Massachusetts [13]).

(3) Encourager et suivre avec toute l'attention nécessaire les expérimentations scolaires visant à une revalorisation des contenus enseignés. Le GRIP encadre ainsi depuis septembre 2005 un réseau de classes expérimentales primaires « SLECC » (Savoir, Lire, Ecrire, Compter, Calculer) dont le but principal est de mettre en œuvre des programmes d'enseignement cohérents et structurés, incluant l'enseignement du déchiffrage et des 4 opérations dès le début du CP (et un apprentissage systématique de tous les autres savoirs fondamentaux, grammaire, orthographe, géométrie, ...). Le MEN et la DESCO ont apporté leur agrément à cette expérience.

Les premiers résultats sont très encourageants, y compris dans un certain nombre de classes situées dans des zones défavorisées [14].

(4) Viser à une réforme des conditions structurelles qui sont à l'origine des blocages et des difficultés : manque de rigueur des évaluations, des examens et de la gestion des passages de classe ; diversification et souplesse insuffisantes des filières au collège ; au lycée, horaires insuffisants dans les disciplines principales du fait d'un éparpillement trop grand des contenus enseignés, au détriment du nécessaire approfondissement qui seul peut préparer sérieusement à des études efficaces. La SMF devrait donc se préoccuper de la pertinence et de valeurs des épreuves de mathématiques figurant dans les tests et les examens nationaux, notamment ceux du brevet et du baccalauréat (par exemple au moyen d'analyses publiques régulières de ces épreuves et de leurs résultats).

(5) Une excellente façon d'impulser la nécessaire diversification de notre système éducatif serait de susciter l'organisation de voies d'enseignement approfondi à tous les niveaux ; par exemple des classes ou groupes spéciaux en liaison avec des clubs d'activités scientifiques ; des préparations spécifiques pour les Olympiades nationales et internationales de mathématiques - et ce pas seulement dans un ou deux grands lycées parisiens, mais sur tout le territoire national. Les enseignants du supérieur et la SMF auraient vocation à s'y impliquer plus étroitement. De la même façon, des filières d'enseignement approfondi seraient indispensables à l'université pour attirer les étudiants les plus motivés. Parallèlement, des filières de remise à niveau pour les étudiants en difficulté ou en reprise d'études seraient tout aussi nécessaires afin de mieux adapter l'offre d'enseignement aux besoins d'une audience aujourd'hui très hétérogène.

Références

[1] R. Balian, J.-M. Bismut, A. Connes, J.-P. Demailly, L. Lafforgue, P. Lelong, J.-P. Serre, Les savoirs fondamentaux au service de l'avenir scientifique et technique. Comment les réenseigner, `http://www.fondapol.org/pdf/SavoirsFondamentaux.pdf`

[2] Laurent Lafforgue, `http://www.ihes.fr/~lafforgue/demission.html`

[3] *Rapport Thélot*, `http://www.ladocumentationfrancaise.fr/rapports-publics/044000483/index.shtml`

[4] Sauvons le droit d'auteur, `http://eucd.info/`

[5] Projet de socle de la DESCO, `http://grip.ujf-grenoble.fr/documents/SOCLE.doc`

[6] Lettre d'André Vaschalde à François Bayrou, `http://grip.ujf-grenoble.fr/documents/vaschalde/LBayrou96.doc`

[7] Michel Delord, La globale et la syllabique, `http://michel.delord.free.fr/syll-glob.pdf`

[8] Michel Delord, Trois mois, ou trois ans et trois mois ? `http://michel.delord.free.fr/3ans.pdf`

[9] Roland Charnay, Les nouveaux programmes pour l'école primaire, *Gazette des mathématiciens*, janvier 2004, n°99

[10] Paul-Jean Cahen, La division nous divise, Courrier des Lecteurs, *Gazette des mathématiciens*, avril 2004, n°100

[11] Jean-Pierre Demailly, Analyse des prérequis éducatifs nécessaires pour l'enseignement des sciences `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/prerequis.pdf`

[12] Ron Aharoni, Page on education, `http://www.math.technion.ac.il/~ra/education.html`

[13] Wilfried Schmid, New Battles in the Math Wars `http://www.math.harvard.edu/7Eschmid/articles/wars.html`

[14] SLECC, Résultats préliminaires en dictée `http://grip.ujf-grenoble.fr/documents/slecc-dictee.txt`

Les « spécialités » au Bac S : une approche historique

Daniel Duverney

Le but de ce travail est de présenter l'origine historique et l'évolution du système des « spécialités », qui gouverne actuellement le fonctionnement de la voie scientifique des lycées. Le texte principal vise à apporter une information aussi objective et synthétique que possible ; il est complété par des notes qui renvoient aux sources documentaires (textes officiels, rapports, statistiques), le plus souvent disponibles sur Internet grâce à des liens hypertextes. Ces liens hypertextes sont accessibles à partir de la version électronique de cet article, qui peut être téléchargée à l'adresse `http://home.nordnet.fr/~dduverney/monsite/niveau3/spe.doc`

L'explosion des lycées, 1985-1995

Cette explosion, bien connue, apparaît sur le graphique suivant, qui donne l'évolution du nombre de bacheliers généraux depuis le début des années soixante. Elle résulte d'une décision politique, prise par le ministre Jean-Pierre Chevènement sur la base d'une analyse économique des besoins de qualification et rendue publique le 12 novembre 2005[1].

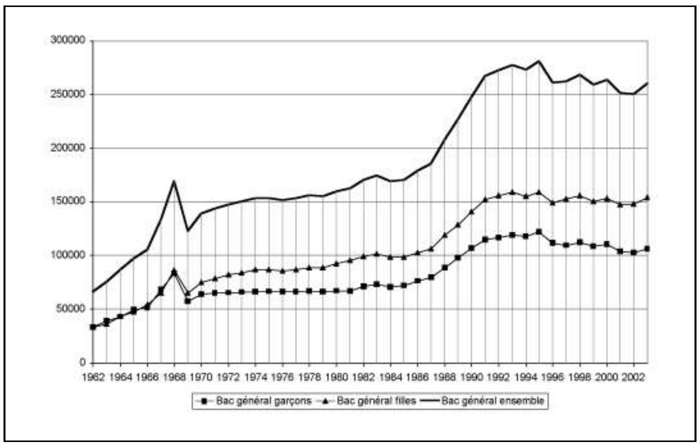

FIG. 1. Baccalauréat général, 1962-2003[2]

En cohérence avec cette analyse économique, Jean-Pierre Chevènement lance l'objectif des « 80% d'une classe d'âge au niveau du baccalauréat », déjà évoqué

[1] Antoine Prost, *Les mutations des lycées 1985-1990, in Education, société et politiques, une histoire de l'enseignement de 1945 à nos jours*, Points Histoire, Seuil, 1992, pages 204-208.
[2] Daniel Duverney, *À propos des baccalauréats depuis 1962*, Ètude sur le baccalauréat général, Action Sciences, 2005.

dans le rapport Prost[3]. Pour le ministre, l'essentiel de la croissance des bacheliers doit provenir des baccalauréats technologiques et des baccalauréats professionnels, nouvellement créés[4]. Dans les faits cependant, la demande sociale d'éducation fera évoluer les choses autrement : le prestige du baccalauréat va susciter de la part des parents et des élèves une vigoureuse demande d'enseignement général. Confirmé par le gouvernement Chirac et son ministre de l'Éducation René Monory (mars 1986-mai 1988), puis introduit dans la loi d'orientation de 1989[5] par le ministre Lionel Jospin, l'objectif de 80% d'une classe d'âge au baccalauréat conduit, entre 1985 et 1995, à un quasi-doublement des effectifs de l'enseignement général secondaire : en dix ans seulement, le taux d'accès d'une classe d'âge au baccalauréat général augmente de 23 à 43%[6].

Deux autres points importants sont à signaler dans le mouvement initié par Jean-Pierre Chevènement :

– Le début de l'explosion des lycées coïncide avec une crise économique sévère, qui entraîne une révision drastique des objectifs de politique macro-économique. La baisse relative de la dépense nationale d'éducation se traduit entre 1985 et 1989 par une dégradation très sensible des taux d'encadrement et des conditions matérielles de travail dans les lycées[7]. La tendance s'inversera sous le gouvernement Rocard (mai 1988-mai 1991), où l'Éducation Nationale devient une priorité nationale[8].

– Il n'y eut pas, dans la période 1985-1990, de tentative d'introduction d'une pédagogie nouvelle, bien au contraire. Les premiers propos de Jean-Pierre Chevènement furent même interprétés comme « un coup de sifflet qui mettait fin à une récréation ouverte en mai 1968[9] ». Le discours du ministre se fit plus nuancé par la suite.

---

[3] *Les lycées et leurs études au seuil du 21e siècle*, rapport du groupe de travail national sur les seconds cycles présidé par M. Antoine Prost, MEN, Service d'information, 1983, page 66.

[4] Loi-programme pour les enseignements technologiques et professionnels, 23 décembre 1985.

[5] Voir la version électronique pour le texte intégral.

[6] Dans le même temps, le taux d'accès d'une classe d'âge au baccalauréat scientifique grimpe de 11 à 18%. Voir Daniel Duverney, *À propos des baccalauréats depuis 1962*, Étude sur le baccalauréat scientifique, Action Sciences, 2005.

[7] Entre 1985 et 1989, la dépense nationale d'éducation décroît de 6,8 à 6,3% du PIB. Il en résulte notamment un alourdissement des effectifs des classes dans les lycées ; le pourcentage de classes de 35 élèves et plus passe de 15,3% en 1983-84 à 39,4% en 1988-89. Voir A. Prost, *Les mutations des lycées 1985-1990, in Education, société et politiques, une histoire de l'enseignement de 1945 à nos jours*, Points Histoire, Seuil, pages 211-212.

[8] Le budget de l'Éducation Nationale de 1991 est supérieur de 25% à celui de 1988. En 1991-1992, le pourcentage de classes surchargées est redescendu à 26,1%. Voir Antoine Prost, *Op. Cit.*, Tableau 14, page 214.

[9] Le discours pédagogique de Jean-Pierre Chevènement insiste « sur la compétence scientifique des enseignants, sur les savoirs à transmettre, sur l'effort et le travail, toutes choses assurément indispensables, sans dire simultanément le caractère tout aussi indispensable de l'adaptation de l'enseignement au niveau réel des élèves, de l'appel à leur intérêt et leur activité. (...) Il accorde à l'Inspection Générale un poids que Christian Beullac eût jugé excessif » [A. Prost, *La tornade qui emporta Savary, in Education, société et politiques, une histoire de l'enseignement de 1945 à nos jours*, Points Histoire, Seuil, pages 194-196]. L'auteur ajoute néanmoins : « Le grand succès de J. P. Chevènement est d'avoir réussi à retourner le courant d'opinion qui régnait en 1984 et à rendre positive l'image de l'enseignement public. La popularité personnelle qu'il s'attira de la sorte rejaillit sur l'institution, et les enseignants, qui avaient souffert de se voir arbitrairement et injustement désignés à la vindicte publique, en surent gré au ministre ».

La « rénovation pédagogique », 1988-1990

Le mois de mai 1988 marque une rupture. À la suite de la réélection de François Mitterrand à la Présidence de la République et des élections législatives qui s'ensuivent, Michel Rocard est nommé premier ministre et Lionel Jospin devient ministre de l'éducation nationale, ministre d'état[10]. Il le restera jusqu'au mois d'avril 1992.

La nouvelle équipe au pouvoir dans l'éducation nationale a un objectif très ambitieux : réformer tout le système éducatif, tant au niveau de ses objectifs que de ses structures et de la pédagogie[11]. Cette ambition se manifeste par la loi d'orientation de 1989, première du genre, qui vise à codifier les grands principes gouvernant l'ensemble des activités du système éducatif. Fruit de compromis laborieux, cette loi n'aborde pas directement le problème des contenus de l'enseignement, évoqué par Lionel Jospin dans sa déclaration du 26 janvier 1989[12] ; ce problème est traité de manière indirecte, au travers de deux commissions qui vont travailler simultanément.

La commission Bourdieu-Gros, ou Commission de réflexion sur les contenus de l'enseignement est créée fin 1988 pour « réviser les savoirs enseignés et en renforcer la cohérence et l'unité » [13]. Le rapport qu'elle remet en mai 1989, intitulé *Principes pour une réflexion sur les contenus de l'enseignement*[14], est directement issu d'un rapport antérieur, établi par le Collège de France entre février 1984 et mars 1985[15]. Les principes en question sont au nombre de sept :

– La remise en question périodique des savoirs passe par la sélection de nouveaux savoirs enseignés en contrepartie de suppressions.

– Priorité est à donner aux enseignements impliquant des modes de pensée de validité et applicabilité générale.

– Les programmes sont à élaborer en collaboration, avec le contrôle d'instances assurant la cohérence entre disciplines et niveaux.

– Les critères pour déterminer les enseignements à retenir sont leur « exigibilité » (en quoi sont-ils aujourd'hui exigibles ?) et leur « transmissibilité » (dans quelle mesure sont-ils transmissibles ?).

---

[10] Ce terme, exceptionnel, marque la volonté gouvernementale de faire de l'éducation nationale une « priorité ». On sait par ailleurs que Lionel Jospin choisit Claude Allègre comme « conseiller spécial » ; ce terme est lui aussi exceptionnel ; on le retrouve lorsque Claude Allègre, à son tour ministre de l'éducation nationale en 1997, choisit Didier Dacunha-Castelle, premier président du CNP, comme « conseiller spécial ».

[11] Voir par exemple la déclaration d'intention de Lionel Jospin dans *Le Monde* du 26 janvier 1989, accessible à partir de la version électronique.

[12] Selon Lionel Jospin (cf note n°11), « le développement de la recherche scientifique a conduit à un renouvellement du savoir. Le système éducatif a réagi par l'empilement des connaissances. Les programmes et les horaires ont suivi cette inflation. L'objectif des têtes bien faites a débouché sur la réalité des têtes trop pleines et surtout fatiguées. »

[13] Je reprends ici largement le résumé qui figure dans l'ouvrage *Les français et leur école, le miroir du débat*, Dunod 2004, page 526. Le chapitre 13 de cet ouvrage présente les grandes consultations sur le système éducatif depuis 20 ans.

[14] Pour accéder au texte intégral du *rapport Bourdieu-Gros*, voir la version électronique.

[15] Ceci n'est guère surprenant, car le rapporteur de ce premier travail n'était autre que Pierre Bourdieu. Intitulé *Propositions pour l'enseignement de l'avenir*, ce rapport avait été commandé par le président de la république François Mitterrand. Il est disponible en ligne.

– Il est nécessaire d'assurer une diversification des formes de pédagogie. Plus précisément, « il importe de substituer à l'enseignement actuel, encyclopédique, additif et cloisonné, un dispositif articulant des enseignements obligatoires, chargés d'assurer l'assimilation réfléchie du minimum commun de connaissances, des enseignements optionnels, directement adaptés aux orientations intellectuelles et au niveau des élèves, et des enseignements facultatifs et interdisciplinaires relevant de l'initiative des enseignants ».

– La cohérence des enseignements passe par la pluridisciplinarité et la collaboration avec la reconnaissance du temps nécessaire à la coordination.

– L'équilibre entre universalisme scientifique et relativisme culturel est obtenu par la généralisation des enseignements culturels et l'approche historique et critique.

En conclusion, le rapport appelle de ses vœux la création d'un « Conseil national des programmes d'enseignement », qui « aura pour tâche de mettre en œuvre l'ensemble des principes énoncés ci-dessus » [16].

La commission Bergé de réflexion sur l'enseignement de la physique rend son rapport au mois d'octobre 1989[17]. Celui-ci est basé sur trois idées principales :

– De façon générale, il faut changer la forme même de l'enseignement et introduire des méthodes d'apprentissage actives[18].

– L'enseignement de la physique doit être résolument inductif, et centré sur la pratique expérimentale, qui est la priorité [19].

---

[16] Le texte du rapport ajoute : « Ses membres devront être choisis en fonction de leur seule compétence et agir à titre personnel et non en tant que représentants de corps, d'institutions ou d'associations ». Le CNP sera créé par la loi d'orientation de 1989 (article 6) et installé dans ses fonctions par le Journal Officiel n° 50 du 28 Février 1990. Son premier président en sera Didier Dacunha-Castelle, par ailleurs membre de la commission Bourdieu-Gros et proche de Claude Allègre (voir note 10). On notera que tous les membres du CNP sont nommés pour 5 ans par le Ministre de l'Éducation Nationale, c'est-à-dire, en 1990, Lionel Jospin.

[17] Voir la version électronique pour des extraits de ce rapport.

[18] Selon le rapport Bergé : « L'enseignement est profondément marqué par *la tradition du cours magistral* : l'élève écoute passivement la bonne parole du maître. Trop peu d'efforts sont faits vers des formes plus actives et autonomes de l'appropriation des savoirs ; *il est pourtant bien connu qu'on ne sait bien que ce que l'on est allé chercher soi-même* ». On retrouve dans cette opinion une des idées de la commission Bourdieu-Gros, dont Pierre Bergé est d'ailleurs un des membres.

[19] Ce programme est largement inspiré du *Nuffield Project for Physics*, expérimenté dans les années 60-70 au Royaume-Uni. Selon Jon Obgorn, il se « caractérisait par les traits suivants :

> – Une organisation suivant un canevas structurel de concepts ;
> – Des objectifs tirés des domaines majeurs de la physique : atomes, astronomie, énergie ;
> – L'adoption d'un plan prenant en compte le développement cognitif ;
> – L'élaboration d'un programme complet étalé sur cinq années, avec une approche en spirale où les idées qui sont introduites une année sont développées au cours des années suivantes ;
> – L'accent mis sur la nécessité pour les élèves de réfléchir par eux-mêmes ;
> – L'importance accordée à la "découverte" ;
> – La priorité absolue accordée aux activités pratiques ;
> – La multiplication des expériences pratiques pour voir, toucher, sentir, réfléchir, penser, discuter. » Voir l'article *Les Anglo-saxons sont-ils différents ?* in *Les sciences au lycée, Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, sous la direction de Bruno Belhoste, Hélène Gispert et Nicole Hulin, Vuibert-INRP, 1996.

– La physique est une discipline concrète, qui s'oppose à l'abstraction des mathématiques : il est donc plus facile d'introduire les notions de mathématiques en partant de la physique[20].

C'est dans le rapport Bergé qu'on voit apparaître l'idée d'un remodelage de la voie scientifique des lycées, sous la forme d'un tronc commun unique complété par des modules et des options. Une des idées de base de ce remodelage semble être que les mathématiques, « dominatrices », seraient un obstacle au développement de l'enseignement scientifique, notamment celui de la physique[21]. Cette idée sera reprise par le Conseil National des Programmes.

Ainsi la loi d'orientation de 1989 s'accompagne-t-elle d'une profonde remise en cause des modes de fonctionnements pédagogiques en vigueur dans l'Éducation Nationale. L'instrument principal de cette remise en cause sera, comme nous allons le montrer pour la voie scientifique, le Conseil National des Programmes. Avant d'examiner les conclusions auxquelles il aboutira en 1991, il nous faut dire un mot de sa composition[22]. Le CNP compte 22 membres et on peut observer que :

– L'Inspection Générale en est presque totalement écartée[23] : une seule inspectrice générale, du groupe économie et gestion, en fait partie.

– Trois des membres du CNP étaient membres de la commission Bourdieu-Gros[24], dont le président, Didier Dacunha-Castelle, qui est aussi le seul mathématicien.

– Il ne compte que deux professeurs scientifiques de lycée (dont un honoraire), un de biologie et un de mécanique. Ceci montre que l'enseignement secondaire scientifique n'est pas représenté au niveau du CNP lors de sa création en 1990, ni par des personnels effectivement en exercice, ni par les corps d'inspection, qui sont en contact permanent avec le terrain[25].

Le CNP et la voie scientifique des lycées, 1990-1992

Même s'il a publié quantité d'avis sur la plupart des niveaux de notre système éducatif, le principal travail du CNP au début des années 90 a été de réfléchir

[20] Selon la commission Bergé, « l'évidence expérimentale sera la meilleure occasion de favoriser un enseignement interdisciplinaire ou d'introduire fort naturellement les notions, a priori abstraites, de mathématiques ». Le rapport Bergé fournit une liste étoffée de notions mathématiques qui « gagneraient » à être introduites à partir d'expériences de physique.

[21] Il n'est pas certain que les opinions de la commission Bergé soient partagées par tous les physiciens. Voir par exemple le remarquable texte de Michel Hulin, *Rappel de quelques évidences sur la physique*, qui fait remarquer qu'une des difficultés didactiques de l'enseignement de la physique « tient à la dépendance de cette discipline vis-à-vis de l'outil mathématique : niveau par niveau d'enseignement, une maîtrise préalable de cet outil doit être acquise, et les besoins ne sont pas négligeables... La Physique n'est pas "didactiquement autonome", au contraire des Mathématiques, des Sciences Naturelles. »

[22] Publiée au Journal Officiel n°55 du 6 mars 1990, celle-ci est accessible sur le site de LegiFrance : dans la rubrique « code NOR », taper MENB9000519A, puis cliquer sur le bouton « code NOR ».

[23] Ceci contraste évidemment avec la période précédente (voir note 9).

[24] En totale cohérence avec les recommandations de cette commission (voir note 16).

[25] Ajoutons qu'un des membres du CNP est Philippe Mérieu, qui jouera un rôle important dans la mise en place de la « réforme des lycées » sous le ministère Allègre (1997-2000). De formation littéraire, Philippe Mérieu pense que « personne ne se sert du théorème de Thalès une fois sorti du collège, en dehors des mathématiciens de métier » [Xavier Darcos et Philippe Mérieu, Deux voix pour une école, Desclée de Brouwer 2003, page 79].

sur la réforme des lycées[26]. Cette réflexion se concrétisera par un projet global, diffusé à des milliers d'exemplaires : *Quel lycée pour demain ? Propositions du CNP sur l'évolution du lycée*[27]. Bien que ce projet ait été global, nous limiterons notre analyse à la voie scientifique[28]. Les objectifs du CNP sont ici les suivants :

– Diminuer la part des mathématiques, finalement accusées de faire de la sélection sociale au travers de la section C[29].

---

[26] Selon Thierry Bossard, chef du service de l'IGAENR : « Le premier problème posé à toute réforme de l'enseignement secondaire est de savoir par où il convient de commencer : par le collège ou par le lycée ? Deux options sont possibles : l'une est de piloter le système par l'aval, c'est-à-dire par l'examen final (le baccalauréat) et les poursuites d'études qui "tirent" le système scolaire secondaire ; ce point de vue était notamment celui de Lionel Jospin et de Claude Allègre pour lesquels le lycée était en conséquence la priorité » [*Les français et leur école, le miroir du débat*, Dunod 2004, page 531]. Ce point de vue est confirmé par Philippe Mérieu, qui déclare : « Claude Allègre était convaincu que le lycée pilote le collège parce que les attentes du niveau supérieur déterminent toujours celles du niveau inférieur : les professeurs et les pratiques pédagogiques du collège finiraient bien par évoluer sous l'attraction du lycée ; lutter contre l'inégalité de traitement des lycées généraux, technologiques et professionnels imposerait de repenser l'orientation ; redéfinir les contenus d'enseignement et les méthodes de travail en seconde amènerait les professeurs de troisième à modifier leur manière de traiter le programme, etc » [P. Mérieu et S. Le Bars, *La machine-école*, Folio, 2001, page 64].

[27] Le livre de poche, 1991. Il n'est pas sans intérêt ici de citer *in extenso* la quatrième de couverture : « Demain, le lycée devra conduire 80 % d'une classe d'âge au niveau du baccalauréat. Un pari qui implique une profonde réadaptation des habitudes acquises et concerne l'enseignement dans son ensemble. À la demande du Ministère de l'Éducation Nationale, le Conseil National des Programmes, organisme indépendant de celui-ci et qui regroupe 22 personnalités autour de son président, M. Didier Dacunha-Castelle, professeur de mathématiques à l'université de Paris 11, a élaboré une série de propositions pour répondre aux besoins nouveaux. Quelles classes ? Quelles filières ? Quelle organisation du travail ? Quels réaménagements de l'année scolaire ? Quels horaires ? Quels programmes ? Quelles méthodes pédagogiques ? Quelles disciplines nouvelles, quelles réformes des anciennes ? Et pour quel lycée ? Ce document présente de manière claire et synthétique la physionomie d'une scolarité rénovée, capable d'affronter les défis de notre époque. Un texte essentiel pour comprendre le débat sur l'avenir des lycées ». Outre que cette présentation confirme l'intention d'une profonde réforme du lycée, on peut s'étonner du fait que le CNP se qualifie d'organisme « indépendant » du ministère de l'Éducation Nationale, compte-tenu du fait que tous ses membres sont nommés par le ministre lui-même.

[28] Le chapitre 5, concernant la voie scientifique, est disponible sur Internet. Ce texte est d'importance fondamentale dans l'analyse de l'évolution de la voie scientifique des lycées.

[29] Le discours du CNP sur les mathématiques et la section C paraît contradictoire. Il semblerait que le principal reproche adressé à la section C soit d'ordre institutionnel et sociologique : « Une des grandes réussites de ces dernières années a été d'amener le quart des bacheliers de l'enseignement général en filière C. L'ouverture de cette voie est reconnue par tous comme indispensable. Toutefois, elle présente de graves défauts : bien qu'on lui reproche souvent le poids trop grand qu'elle donne aux mathématiques, elle assure aux disciplines non scientifiques une place considérable ; offrant les clés de toutes les filières post-baccalauréat intéressantes, elle attire presque tous les bons élèves, qui peuvent y réussir quelle que soit leur motivation pour les sciences. La hiérarchisation se trouve ainsi renforcée. Et les élèves de terminale C s'engagent souvent dans des voies post-baccalauréat non scientifiques, en l'absence de toute politique volontariste pour limiter cette orientation. S'ajoute à cela un problème sociologique. L'ouverture de la filière C est un acquis fragile et ambigu. Profitant beaucoup aux garçons des couches favorisées, elle risque d'atteindre ses limites. L'aide extérieure sous forme de leçons particulières, l'appui sur les compétences familiales sont des facteurs importants du passage en première scientifique et d'accès à la terminale C » [*Op. cit.*, page 116]. Un peu plus loin, ce sont les mathématiques qui se trouvent rendues responsables du problème : « Les horaires de mathématiques de la terminale C sont excessifs (et quasiment uniques au plan international) ; en revanche, les programmes ont été revus à la baisse et se situent dans les normes internationales. Les attaques régulières contre cette

– Revaloriser les sciences expérimentales et notamment les travaux pratiques[30].

– Introduire un enseignement modulaire, permettant à partir d'une voie scientifique commune des parcours plus individualisés[31].

Au mois d'avril 1992, Jack Lang remplace Lionel Jospin à la tête du ministère de l'Éducation Nationale[32], et c'est sous sa signature que va être publié l'arrêté de réorganisation du cycle terminal des lycées (premières et terminales)[33]. Comme demandé par le CNP, il est créé une voie scientifique unique en terminale, et un système d'options (du premier groupe et du deuxième groupe) et de modules apparaît en première S et Terminale S[34]. La grille horaire proposée, bien qu'elle n'ait jamais été appliquée, mérite une analyse détaillée. Nous nous limitons à la classe de première scientifique, car première et terminale sont construites sur le même modèle. Le tronc commun se réduit à 24 heures : 5 h de mathématiques (sans dédoublement), 4h de physique-chimie (dont 1h30 de TP dédoublées), 3 h

discipline sont dangereuses. À notre époque, l'outil et le langage mathématiques jouent un rôle fondamental dans toutes les sciences et bien au-delà. Il ne faut donc pas perdre en ce domaine nos traditions et notre haut niveau d'enseignement (...). L'excès de mathématiques se manifeste surtout par un excès de formalisme dans les sciences physiques. Par commodité, leur évaluation fait trop appel aux mathématiques et cela déforme tout leur enseignement. Des réactions ont eu lieu très récemment à cet égard, mais le problème reste profond » [*Op.* cit., page 118]. On reconnaît ici l'influence de la commission Bergé.

30 Les objectifs de la réforme de la voie scientifique des lycées sont, pour le CNP :

> – « Donner une place véritable aux *aspects expérimentaux* de la science en rééquilibrant mathématiques et sciences expérimentales et donner à la chimie l'importance qui lui est due en lui consacrant un module ;
>
> – *Assurer à tous les scientifiques une formation de base en biologie* par les enseignements généraux et donner à ceux qui le souhaitent la possibilité d'avoir, dès la première S, un contact avec la biologie moderne ;
>
> – Marquer l'importance d'un champ disciplinaire décisif au moment où *l'environnement et l'espace* nous interpellent : celui des sciences de la terre et de l'univers ;
>
> – *Ouvrir la voie de l'ingénierie à tous les élèves scientifiques* par l'instauration, nécessairement progressive, de modules de technologie industrielle, par la création d'un réseau de passerelles de terminales SF pour les élèves de première S plus portés à la réalisation et au technologique qu'au conceptuel » [*Op. cit.*, page 120].

31 Ainsi « il est raisonnable de créer une voie scientifique unique, dans laquelle le programme complémentaire permettra, et en première S et en terminale, des orientations positives au lieu des actuelles orientations par l'échec » [*Op. cit.*, page 120]. Bien que cela ne soit pas écrit explicitement dans le texte, il est clair que la nécessaire diversification des parcours individuels dans cette terminale scientifique unifiée sera confiée à un enseignement modulaire. Notamment, les modules permettront de changer l'enseignement, puisque « la forme d'organisation des modules permet de véritables travaux pratiques avec appel à l'ingéniosité et aux qualités pratiques ».

32 Auquel se trouve rattaché d'ailleurs, durant la brève période avril 1992-mars 1993, le Ministère de la Culture. Le ministre de l'Éducation Nationale et de la Culture conserve le titre de ministre d'Etat. Le premier ministre est alors Pierre Bérégovoy.

33 Il s'agit de l'arrêté du 10 juillet 1992, paru dans le Bulletin Officiel du 6 août 1992, p. 2190-2198.

34 Pour ne pas trop compliquer l'exposé, nous nous limitons ici à la voie S "classique", dont les trois matières scientifiques sont les mathématiques, la physique-chimie et les sciences de la vie et de la terre. Elle représente environ 90% des bacheliers scientifiques. L'arrêté du 6 août 1992 intègre dans la foulée la voie E dans la voie scientifique (environ 10% des bacheliers) ; les trois matières scientifiques y sont les mathématiques, la physique-chimie et la technologie industrielle. Pour plus de détails, voir Daniel Duverney, *À propos des baccalauréats depuis 1962*, in Etudes sur le baccalauréat scientifique, Action Sciences, 2005.

de SVT (dont 2h de TP dédoublées), 4 h de français, 3 h d'histoire-géographie, 3 h de LV1 et 2h d'EPS. Il apparaît un horaire de « modules » assez étonnant de 2h15 hebdomadaires, à partager sous la forme 45mn de mathématiques, 45mn de physique-chimie, 45mn de sciences de la vie et de la terre[35]. Selon l'article 4 de l'arrêté, l'effectif des élèves en module peut être réparti en « groupes variables dont l'effectif est inférieur à celui de la classe entière ». L'affectation des élèves dans les groupes de modules est de la responsabilité des enseignants.

Un double système d'options facultatives est créé. L'élève a le choix entre mathématiques, physique-chimie et SVT, d'une part (2h pour chaque matière). Ce sont les options du premier groupe. Il ne peut en choisir qu'une. Les options physique-chimie et SVT sont constituées de TP. Il peut en outre choisir, s'il le désire, une ou deux options du second groupe, parmi lesquelles la LV2, les langues anciennes, les arts, etc. Avec ce système, l'élève *Lambda* de première peut choisir mathématiques en option de premier groupe, LV2 allemand et langues anciennes : son horaire total est alors de 32 heures, sans compter les modules éventuels. Il suit alors au minimum 7 heures de mathématiques, un record dans les annales de notre système scolaire en première. D'un autre côté, l'élève *Mu* peut ne choisir aucune option : son horaire total est de 24 h. On peut naturellement mélanger à l'envie toutes les nuances entre l'élève *Lambda* et l'élève *Mu* dans les mêmes classes[36].

La création du système des spécialités par François Bayrou, 1993

Au mois de mars 1993, les élections législatives entraînent un changement de majorité, et François Mitterrand demande à Edouard Balladur de former le nouveau gouvernement. François Bayrou devient ministre de l'Éducation Nationale. Tout en entérinant la nécessité et les grands principes de la réforme des lycées élaborée par l'équipe précédente, il entreprend dès le 7 avril (8 jours après sa nomination) de modifier l'organisation du cycle terminal des lycées, telle qu'elle avait été définie par l'arrêté du 10 juillet 1992. La description que je donne de cette modification est fondée sur une série d'articles parus dans « Le Monde » entre avril et juin 1993[37].

François Bayrou confie le 11 avril 1993 à Georges Septours, inspecteur général de l'Éducation Nationale, la mission de former une commission et de remettre dans un délai de 15 jours ses conclusions, afin que des décisions puissent être prises avant la fin du mois d'avril. La raison de cette hâte est que la « rénovation pédagogique » a déjà été engagée en seconde à la rentrée 1992, et doit se poursuivre en première à la rentrée 1993.

De fait, le 29 avril 1993 François Bayrou annonce ses décisions concernant la classe de première. Il fonde les modifications apportées sur le fait que la réforme était « mal préparée et illisible », et surtout risquait de reconstituer « subrepticement », par le jeu du « maquis » des options offertes aux élèves, des filières

[35] On rappelle que « l'heure d'enseignement » en lycée est de 55 minutes.

[36] En considérant pour simplifier que tous les élèves d'une classe font anglais en LV1 et que le seul choix possible d'options du second groupe est LV2 allemand, langue ancienne latin, et activité artistique musique, on voit aisément que chaque élève dispose de 24 choix possibles. Bien sûr, si on peut choisir entre 6 options du second groupe, le nombre de choix possibles grimpe à 84.

[37] J'ai regroupé ces articles sous la forme d'une revue de presse, disponible à partir de la version électronique. Il serait souhaitable de compléter ce compte-rendu journalistique par des références plus officielles (déclarations ministérielles, rapport Septours, etc).

d'excellence à l'intérieur de chaque filière[38]. La principale mesure concernant la classe de première scientifique est d'empêcher les options de venir renforcer le tronc commun ; ainsi, par exemple, les élèves de première scientifique ne pourront plus choisir une option supplémentaire de mathématiques, « ce que, selon François Bayrou, près des deux tiers d'entre eux s'apprêtaient à faire, parfois à la demande insistante des établissements ».

Le lundi 7 juin 1993, François Bayrou annonce les décisions qu'il a prises pour les classes terminales[39] ; l'objectif est clair : « *offrir à chaque élève la possibilité de réussir au mieux et d'obtenir la "meilleure mention au bac" dans la voie correspondant à "ses goûts et à ses aptitudes", et l'inciter à s'y engager en gommant la prééminence presque exclusive, aujourd'hui, de la série C du baccalauréat. Dans chaque filière d'enseignement général, l'enseignement de spécialité (deux heures hebdomadaires) est conçu comme un renforcement de la discipline dominante qui ne fera pas l'objet d'un programme spécifique et ne sera pas évalué de façon autonome. (...) La terminale scientifique (S) est construite autour de quatre spécialités : mathématiques, physique-chimie, sciences de la vie et de la terre et technologie industrielle.* »

Les textes officiels réglementant la nouvelle organisation du cycle terminal des lycées vont paraître au Bulletin Officiel du 23 septembre 1993[40], c'est-à-dire après la rentrée scolaire des classes de première. Ainsi, il semblerait que le système des « spécialités » en terminale S ait été créé dans une certaine précipitation. Cependant, nous disposons désormais d'une période d'essai de 10 ans, qui devrait permettre d'analyser son évolution et, peut-être, de mettre à jour certaines des causes de cette évolution.

L'évolution du système des spécialités, 1995-2005

Cette évolution est présentée par le graphique 2. Elle montre la dégradation continue du choix de la spécialité mathématiques, au profit essentiellement de la spécialité physique-chimie, et, dans une moindre mesure, de la spécialité Sciences de la Vie et de la Terre.

Voici quelques remarques sur cette évolution :

a) Elle n'est pas surprenante. La baisse de la part des mathématiques dans la formation scientifique a été un des objectifs majeurs de la « rénovation pédagogique »

---

[38] Je cite ici, et dans la phrase suivante, quasiment mot pour mot ce qu'écrit Christine Garin dans « le Monde » du 2 juin 1993. Le texte intégral de Christine Garin est accessible dans la revue de presse.

[39] La suite de ce paragraphe est également une citation de Christine Garin, cette fois dans "le Monde" du 8 juin 1993 (le texte intégral de l'article se trouve dans la revue de presse).

[40] Arrêté du 15 septembre 1993, paru dans le Bulletin Officiel du 23 septembre 1993, pages 5-10.

[41] Ce graphique correspond à l'ensemble des élèves (filles et garçons) et il est donné pour la France Métropolitaine. Les données statistiques brutes se trouvent dans les « Tableaux Statistiques » nn° 6413, 6567, 6671, 6682, 6773, 6832, 6878, 6932, 6972, 6997. Pour l'année 1996, où il n'existe pas de Tableau Statistique détaillant les résultats du baccalauréat général, on a utilisé la « Note d'Information » 97-10. Les Notes d'Information de la DEP sont beaucoup plus faciles d'accès que les Tableaux Statistiques, car elles sont disponibles sur Internet. Mais elles ne fournissent plus les données détaillées sur les spécialités depuis 1998. Pour une étude plus détaillée du choix des spécialités, distinguant notamment filles et garçons, voir Daniel Duverney, *À propos des baccalauréats depuis 1962*, Étude sur le baccalauréat scientifique, Action Sciences, 2005.

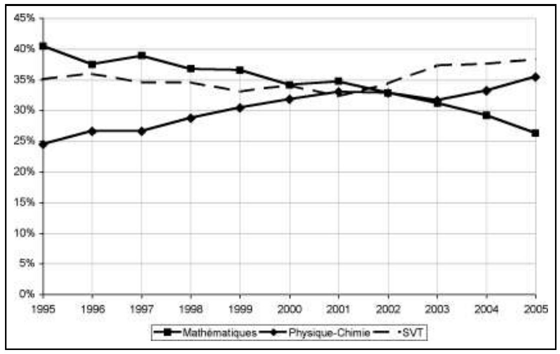

FIG. 2. Évolution des spécialités au baccalauréat S SVT, en « parts de marché » (source : DEP)[41]

des années 1988-1993, puis de la « réforme des lycées » des années 1998-2002. Cet objectif majeur est clairement exprimé notamment dans le rapport Bergé et le texte du CNP cités plus haut. Mais l'idée que les mathématiques soient un frein à la fois à la démocratisation du système éducatif et au développement des études scientifiques semble être une des évolutions majeures de la pensée éducative dominante en France depuis une vingtaine d'années[42]. Pour ce qui concerne la création des

[42] Ce point de vue est exprimé clairement par Jacques Lesourne, qui remet en 1987 au ministre de l'Éducation Nationale de l'époque, Roger Monory, un rapport remarquable intitulé *Éducation et société, les défis de l'an 2000*, La découverte-Le Monde, 1988, dans lequel on lira avec intérêt l'analyse de la complexité du système éducatif. Cette conception négative du rôle des mathématiques semble due en partie à la longue stagnation consécutive à l'expérience des mathématiques modernes. Ainsi Jacques Lesourne, qui a pourtant une formation de polytechnicien, déclare-il d'abord : « En matière de culture, trois constats marquent le présent :

– Bien que l'ancienne culture soit en perte de vitesse, son souvenir continue à dévaloriser la culture technique ;

– L'absence actuelle du rôle intégrateur d'une culture fait perdre aux connaissances leur cohérence et les transforme en un savoir en miettes ;

– Quant aux mathématiques, elles ne jouent qu'un rôle de sélection et ne constituent en rien le noyau d'une culture nouvelle [*Op. Cit.*, page 22]. »

Plus loin, l'auteur remarque que les effectifs des sections C, D, E ont stagné entre 1975 et 1985, ce qui est tout à fait exact, puis ajoute : *« Quant à la sélection par les mathématiques dans le cadre de la série C, elle a pris une telle importance qu'elle engendre maintenant des effets pervers graves pour l'ensemble de l'enseignement français »*. Certes, il ne s'agit pas de nier le rôle que, dans un nombre croissant de disciplines, les mathématiques jouent dans la modélisation des phénomènes observés et la nécessité absolue pour la France de former les scientifiques qui soutiendront demain son effort de recherche et d'innovation technique. Mais comment ne pas voir :

– Qu'en privilégiant les mathématiques abstraites et qu'en les enseignant comme une technique, la série C ne donne nullement à ses élèves la base théorique et expérimentale sur laquelle repose le progrès des connaissances et ne leur offre aucune lecture culturelle du monde ;

– Qu'en jouant comme un signal, elle attire à elle les meilleurs élèves, indépendamment de leurs préférences et de leurs capacités, et distord de ce fait la composition scolaire de toutes les autres séries ;

– Qu'elle rejette en revanche dans des séries moins prestigieuses, où toutes les conditions ne sont pas réunies pour réussir, nombre de bons éléments, notamment parce qu'elle développe autour d'elle une allergie à l'égard des mathématiques alors qu'un plus spécialités lors de la rénovation pédagogique, on relève notamment dans le Bulletin Officiel n°18 du 4 mai 1995 cette analyse de Christian Forestier : *« La mise en place des enseignements de spécialité dans les classes terminales de la voie générale visait à reconnaître et donc à valoriser différents profils au sein de séries plus larges. La répartition observée cette année suscite quelques commentaires par rapport à cet objectif. En série S SVT, la répartition est de 38% pour les mathématiques, 38% pour les sciences de la vie et de la terre et 24% pour la physique-chimie*[43]*. Cette répartition, si elle ne révèle pas, comme cela était craint, un quasi-monopole des mathématiques, ne laisse pas la place souhaitable aux sciences physiques. À travers l'option sciences expérimentales de première S, les professeurs de physique-chimie doivent montrer aux élèves tout le profit qu'ils pourront tirer de l'enseignement de spécialité. La nouvelle organisation des classes préparatoires scientifiques doit leur être également présentée pour leur faire comprendre la place nouvelle qu'y prennent les sciences physiques*[44]*. »* Il ne fait donc aucun doute que le développement de la spécialité physique-chimie, au détriment de la spécialité mathématiques, a été impulsé au plus haut niveau de notre système éducatif. Le graphique 2 montre que cette politique a réussi, sans doute au-delà des objectifs fixés[45].

b) Elle ne provient pas uniquement des « goûts » des élèves.

L'interversion, en 10 ans, des proportions de choix entre les spécialités mathématiques et physique-chimie ne semble pas due au fait que les élèves de terminale scientifique préfèrent la physique et la chimie aux mathématiques. Selon une enquête de la DEP datant de 1996[46], la proportion d'élèves de terminale scientifique qui aiment ou adorent les mathématiques est de 85,5% (14,5% ne les aiment pas ou les détestent), contre 66,3% qui aiment ou adorent la physique (33,7% ne l'aiment pas ou la détestent). La situation ne semble guère avoir changé depuis 1996. Selon Claudine Peretti, directrice de la DEP, citée par la mission parlementaire sur l'enseignement scientifique, « une enquête en cours semble

grand nombre de bacheliers a besoin dans ce domaine d'une culture suffisante" [*Op. Cit.* page 235].

Pourtant, à la suite du rapport Prost, qui signalait le rôle excessif de la sélection par les mathématiques [*Les lycées et leurs études* au seuil du 21^{e} siècle, Op. Cit., page 28], des réactions avaient déjà eu lieu sous l'impulsion de Claude Pair et Jean-Louis Ovaert. Grâce à de substantielles modifications des programmes de mathématiques notamment (fin des « maths modernes »), et à l'activité des inspecteurs pédagogiques régionaux dans les années 1982-1984 auprès des professeurs de mathématiques des lycées, les effectifs de la voie scientifique grimpent de 10% à 19% de la classe d'âge entre 1984 et 1994. La série C n'est pas en reste dans cette spectaculaire progression, puisqu'elle représente 45% des effectifs des bacheliers scientifiques (C, D, E) en 1994, contre 39% seulement en 1984. Pour plus de détails, voir Daniel Duverney, *À propos des baccalauréats depuis 1962*, Étude sur le baccalauréat scientifique, Action Sciences, 2005.

[43] Ces pourcentages diffèrent de ceux donnés dans le graphique 2. Il s'agit ici des élèves inscrits en terminale dans chaque spécialité, alors que le graphique 2 donne les reçus au baccalauréat. La différence provient du fait que le taux de réussite à l'examen est différent suivant la spécialité choisie : en 1995, il est de 84,8% en spécialité maths , 78,8% en spécialité physique-chimie et 72,7% en spécialité SVT [France métropolitaine, source : Tableaux Statistiques n° 6413, février 1996].

[44] Circulaire n°95-099 du 27 avril 1995, pages 1561-1562.

[45] La formulation des remarques de Christian Forestier semble suggérer qu'on attendait une répartition théorique de 33,3% pour chacune des spécialités.

[46] Josette le Coq et Fabrice Murat, *Les connaissances en mathématiques et en physique des élèves de terminale scientifique*, Note d'Information n° 96-50, DEP, décembre 1996.

démontrer que les sciences physiques ne sont pas aimées des élèves et que même les enseignants ont une image dévalorisée de leur discipline[47] ».

Pour compléter ces remarques sur les « goûts » et les « choix », on observera que l'institution de la spécialité physique-chimie[48] au bac S a coïncidé exactement avec le début de la désaffection pour les études scientifiques à l'université, particulièrement sévère en physique et en chimie. En outre, le développement de cette spécialité dans l'enseignement secondaire s'est poursuivi en 1995-2000 parallèlement avec la poursuite de l'effondrement du choix d'études en physique à l'université. Il semblerait donc que l'appétence, le goût ou même l'amour pour la physique, les sciences de la vie et de la terre, les mathématiques, ne soient pas seuls à jouer un rôle dans le choix des spécialités[49].

c) Elle provient en partie d'une moindre ambition scolaire

Selon Bernard Convert, *« la sociologie de l'éducation a depuis longtemps établi que les élèves ne font pas les mêmes choix d'orientation selon leur niveau de réussite scolaire, selon leur genre, et même, à niveau de réussite égal, selon leur origine sociale*[50] » . Au terme d'une enquête sur les vœux d'orientation en terminale S dans l'académie de Lille, Bernard Convert conclut : *« Le paradoxe de la chute des inscriptions en Physique-Chimie à l'Université, à partir de 1995, alors même que venait de se créer une filière spécifique dans l'enseignement secondaire, tient à ce qu'en scindant en deux l'ancienne série C, on a produit des effets liés à la position différente occupée par l'une et l'autre spécialité dans la hiérarchie des disciplines. Pour beaucoup d'élèves de S, le choix de la physique-chimie plutôt que des mathématiques est associé à une moindre ambition scolaire, elle-même associée à une moindre réussite et/ou une origine sociale plus modeste*[51] ». Cette

---

[47] Page 20 de ce rapport, qui peut être téléchargé sur le site de Educmath. On notera au passage que ce rapport reprend, semble-t-il sans beaucoup de recul, les arguments des années 80 sur la sélectivité des mathématiques. Voir par exemple la deuxième partie, intitulée *L'enseignement des sciences et des mathématiques ne doit pas être réduit à sa seule efficacité sélective*, et notamment la sous-partie A, *Pour être plus formateur l'enseignement des mathématiques devrait être moins sélectif*.

[48] Ou peut-être, pour être plus précis, la « rénovation pédagogique », dont le système des spécialités n'a été qu'un élément. Dans son ensemble, l'enseignement secondaire de la physique a été réorienté à cette occasion suivant les conceptions exprimées dans le rapport Bergé, ce qui a peut-être eu une influence plus importante que le système des spécialités en lui-même. On lira avec intérêt, à ce sujet, la lettre envoyée à l'époque par André Vaschalde, Inspecteur Pédagogique Régional de Physique-Chimie, au ministre François Bayrou, notamment le passage intitulé *D'un expérimental « raisonnable » à « l'expérimento-mania »* .

[49] Dans le cadre plus général de la « rénovation pédagogique » des lycées, on notera cette analyse de Thierry Bossard, chef du service de l'IGAENR : « Le problème de fond vient de ce que le choix des élèves pour telle ou telle série n'est pas toujours lié aux contenus d'enseignement proposés, n'est pas fonction de l'appétence pour les matières enseignées ; l'orientation relève d'abord d'une stratégie commandée par l'éventail des possibilités de poursuite d'études à l'issue du baccalauréat. La rénovation pédagogique des lycées a donc eu pour objet de procéder à un rééquilibrage entre les voies et, au sein des voies, entre les séries. Force est de constater que, par-delà quelques effets immédiats qui n'ont pas perduré, l'objectif n'a pas été atteint. » [*Les français et leur école, le miroir du débat*, Dunod 2004, pages 531-532].

[50] Voir Bernard Convert, « La "désaffection" pour les études scientifiques. Quelques paradoxes du cas français », *Revue française de sociologie*, vol. 44 n° 3, juillet-septembre 2003, p. 449-467.

[51] En fait, Bernard Convert analyse la voie scientifique des lycées actuelle comme plus spécialisée qu'avant la « rénovation pédagogique ». Il écrit notamment : *« Cette spécialisation plus précoce, dès la classe de première, après une seconde dite "indifférenciée", était bien l'un des objectifs de*

analyse est confirmée par l'étude des statistiques nationales. Notamment, l'effet de la « réussite scolaire » sur le choix de la spécialité est attesté par le fait que le taux de réussite au baccalauréat est différent suivant la spécialité choisie, comme nous l'avons signalé en note 44 pour l'année 1995. Plus près de nous, ce taux de succès en 2005 est de 88% en spécialité maths, 83,5% en spécialité physique-chimie et 76,9% en spécialité SVT[52]. Quant à la part tenue par l'origine sociale (souvent liée à la géographie économique des territoires), on peut l'apprécier dans le tableau suivant, qui donne l'évolution en pourcentage[53] du nombre de bacheliers scientifiques par spécialité dans quatre académies, entre 1995 et 2005 :

Evolution 1995-2005	Spé Maths	Spé Physique	Spé SVT	Total S SVT
Lille	- 40%	- 3%	+ 77%	- 11%
Paris	- 26%	+ 37%	+ 5%	- 6%
Créteil	- 27%	+ 44%	+ 14%	- 2%
Clermont-Ferrand	- 46%	+ 10%	+ 3%	- 22%

Bien sûr, une académie n'est pas homogène du point de vue social, et une étude plus fine serait nécessaire au niveau des lycées. Néanmoins, on observe que les effectifs de bacheliers scientifiques dans l'académie de Lille diminuent notablement, bien qu'une grande partie du choix de la spécialité mathématique se reporte sur la spécialité SVT. Dans l'académie de Clermont-Ferrand, le dévissage de la spécialité mathématique n'est pas compensé, et l'ensemble de la voie scientifique perd un bachelier sur cinq en dix ans. Dans les académies de Paris et Créteil, la chute de la spécialité mathématique, moins importante, se reporte presque exclusivement sur la spécialité physique-chimie. Dans ces deux académies, le nombre de bacheliers scientifiques ne baisse que modérément.

la réforme mise en place en 1992-95. Dans le dispositif initial conçu autour de Lionel Jospin, alors Ministre de l'Éducation Nationale, l'élève, après la seconde dont la fonction "de détermination" était renforcée, devait à l'entrée en première s'engager dans une véritable filière qui se prolongeait dans l'enseignement supérieur (...). L'élève devait donc, dès la classe de première, se constituer un " profil" très typé autour des "matières dominantes" de sa série, représentant l'essentiel (au moins 60%) des coefficients à l'examen, et qui pouvaient être renforcées par des options. Les disciplines ne participant pas directement à la définition de la série devenaient des "matières complémentaires". L'objectif du réformateur était bien de contraindre les élèves à faire un choix responsable, en s'engageant dès la seconde dans la filière correspondant véritablement à leurs dispositions (...). Il s'agissait également, en accentuant les profils des filières, de tenter de mettre fin au rôle prédominant des mathématiques comme instrument de sélection ainsi qu'à la hiérarchisation qui s'était établie au profit de la filière C, et qui faisait que convergeaient vers elle les bons élèves, y compris ceux dont les meilleures dispositions étaient littéraires. Il est vrai que, sans revenir sur ces objectifs, les ministères suivants, celui de Jack Lang, puis celui de François Bayrou, en réponse notamment aux pressions exercées par les lobbies des différentes disciplines, y ont apporté des aménagements, qui ont contribué à adoucir le profil des séries tel qu'il était conçu dans la première version. Mais si les nouvelles séries sont moins typées que ne l'avaient prévu les initiateurs de la réforme, elles le sont plus que les anciennes, ce qui contribue à prédéterminer plus étroitement qu'avant le choix d'études supérieures. C'est particulièrement le cas pour les spécialités scientifiques "Mathématiques" et "Physique-Chimie", puisqu'on a désormais deux univers de disciplines relativement cloisonnés, associés à deux univers de possibles, là où il n'y en avait qu'un seul, indifférencié » [Op. Cit.]

[52] Tableaux Statistiques n°6997, DEP, page 10.

[53] Calculée à partir de deux tableaux d'effectifs, tirés des Tableaux Statistiques n° 6413 et 6997, disponibles dans la version électronique.

Ce tableau montre, à tout le moins, de très importantes disparités régionales dans les choix de spécialités et leur évolution.

En guise de conclusion

Au terme de ce bilan, destiné à donner des éléments objectifs permettant d'appréhender une réalité extrêmement complexe et son évolution, il peut être utile de s'essayer à dégager quelques remarques. Comme nous l'avons montré, les réformes qui ont marqué notre système éducatif secondaire depuis vingt ans semblent avoir été fondées sur des idées simples, voire simplistes, concernant notamment :

– Le rôle exclusivement sélectif des mathématiques [54] ;

– La place de l'expérimentation dans l'enseignement scientifique, notamment en physique ;

– Les motifs qui déterminent l'orientation des élèves ;

– Les mécanismes de l'apprentissage, notamment scientifique.

J'espère que ce travail contribuera à une étude sérieuse de l'évolution de notre enseignement scientifique, en vue de décisions mûrement réfléchies, prenant en compte toute la complexité du problème.

[54] Sur ce sujet, on lira avec intérêt le texte intitulé « Socle commun des connaissances et compétences et objectifs généraux de l'enseignement des mathématiques », cosigné par toutes les associations d'enseignants et sociétés savantes de mathématiques.

Quelques éléments de réflexion

Claudine Schwartz[1]

J'ai été invitée par la SMF à une table ronde, le 7 janvier 2006. Voici, très brièvement en vrac et sans souci de rédaction, des éléments de mon intervention orale.

À propos de l'analyse de la situation de l'enseignement secondaire

On peut sans doute écrire des textes consensuels sur un large ensemble de contenus mathématiques qu'il serait intéressant d'enseigner dans le secondaire et à l'université : c'est un peu ce qu'a fait la CREM[2]. Par contre il semble aujourd'hui que le dialogue à propos des choix à faire dans un tel ensemble de contenus soit source de tensions, et plus encore le choix de l'organisation du temps scolaire. La communauté des mathématiciens apparaît au grand public comme très divisée et incapable de s'entendre (au sens propre du terme). Je n'ai ni solution, ni analyse historique et sociologique susceptible d'éclairer cette situation de grande discorde ; j'ai simplement l'idée qu'il s'agit essentiellement de conflits de nature politique que l'on fait porter par les très réels problèmes de l'enseignement (ce n'est pas nouveau !).

Très grossièrement, pour les mathématiques, on peut considérer qu'il se joue en ce moment une version spécifique de la métaphore de la bouteille « à moitié vide, à moitié pleine ». Il y a tout un nuancier de positions, autour des positions extrêmes suivantes[3] :

– ceux (génériquement : les « sauveurs ») qui disent : la bouteille est non seulement dramatiquement vide, mais qu'elle a été rendue inutilisable à la suite d'un complot. Une telle assertion est une posture politique, d'où découle une analyse apparemment logique, mais partiale. Cette analyse est suivie par un programme politique de rénovation reposant essentiellement sur le retour à une situation antérieure vécue comme « meilleure » ;

– ceux qui pensent que ce n'est pas le niveau de la bouteille qui compte, mais l'élaboration de théories didactiques, qui permettraient « scientifiquement » de rendre son contenu « buvable » ;

– ceux qui, tout en souhaitant que les conditions s'améliorent, font ce qu'ils peuvent au jour le jour et pensent d'une part que la réflexion doit continuer à se faire à tous les niveaux de l'enseignement, d'autre part que les réformes ne doivent pas être trop brutales.

Alors, pourquoi essayer de faire un livre blanc de l'enseignement des mathématiques, pour exposer des positions et les positions contraires ? Le risque d'étaler, sans les analyser vraiment, les dissensions plutôt que d'ouvrir un

[1] Université J. Fourier, Grenoble. A présidé le groupe chargé de l'élaboration des programmes de mathématiques actuellement en vigueur dans les lycées d'enseignement général.

[2] Commission de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

[3] Les extrêmes sont ce qu'il y a de plus facile à repérer et à décrire, mais la description comporte alors sa bonne part de caricature.

débat serait réel. D'autres actions sont possibles : on pourrait concentrer notre attention sur des thèmes précis. Par exemple :

– réfléchir à ce que pourrait être un observatoire de l'enseignement des sciences digne de ce nom, qui dépasse les rumeurs, l'accumulation biaisée de témoignages sincères et l'a priori idéologique sur ce qui peut ou non « passer », tant auprès des élèves que du corps professoral. Il y a sûrement plusieurs degrés de libertés pour l'enseignement aujourd'hui, encore faut-il savoir où on en est, et ce n'est pas le cas aujourd'hui.

– travailler sur le baccalauréat. Cette noble institution française pilote l'enseignement, beaucoup plus que les programmes, et ce pilotage est fort peu démocratique (il n'est qu'à penser à ce que signifie l'arrêt de l'enseignement fin mai, pour des élèves du 93, ou pour ceux de Neuilly). Or aucun gouvernement (crainte des manifestations), et même aucun syndicat (crainte de diviser ses troupes) ne peut aujourd'hui s'attaquer à cette question, qui est cependant une de celles qui peuvent être débattues avec un « grand public ». On pourrait imaginer que des associations telles la SMF initie dans la presse un débat long sur ce sujet. Pour l'instant, en ce qui concerne les mathématiques, l'existence de calculatrices très communicantes (entre candidats ou avec l'extérieur) pourrait conduire à des épreuves sans calculatrices ; une conséquence pourrait bien être que les mathématiques en tant que telles deviennent optionnelles.

À propos de la formation des maîtres

Les IUFM vont être intégrés aux universités. Cela pourrait notamment permettre, pour la formation des professeurs des lycées et collèges de mener des réflexions plus larges et ouvertes, sur l'enseignement des sciences, dont pourraient à l'avenir bénéficier les futurs professeurs.

Le rôle de la SMF

Indépendamment d'une réflexion et des débats sur le baccalauréat, il me semblerait important que la SMF travaille plus particulièrement sur les nombreux problèmes des universités, notamment ceux de la licence, et de la mise en place des L/M/D[4]. S'il est louable d'aller balayer devant la porte des écoles primaires et des collèges, ce serait dommage que cela remplace la réflexion sur l'université, qui concerne de plus près la pratique professionnelle des membres de la SMF.

[4] La SMF a organisé plusieurs débats sur les cursus universitaires (18 janvier 2003, 22 janvier 2005) dont il a été rendu compte dans la *Gazette n^o^ 96 et n^o^ 103* . Un débat sur le niveau L s'est tenu le 6 octobre 2006 [NdlR].

Conclusion

Le Bureau de la SMF

Le débat en conseil a fait ressortir l'importance de définir en termes clairs « quel est l'objectif de l'enseignement des mathématiques, à quoi sert-il d'enseigner les mathématiques ? » en modulant ces objectifs en fonction des niveaux et de la population visée.

Voici la liste des propositions qui ont été faites dans le cadre de cette réunion de CA :

– remettre en route, avec d'autres, le débat démocratique sur l'enseignement des mathématiques,

– élaborer, avec d'autres, un livre blanc sur l'état actuel de l'enseignement des mathématiques,

– réaffirmer la responsabilité spécifique de la SMF dans la réflexion sur l'enseignement des mathématiques post bac, notamment l'université,

– prendre en compte les acquis et expériences des autres pays,

– organiser la réflexion sur la formation des enseignants (notamment sur le CAPES),

– développer des activités périscolaires avec une implication de la SMF,

– aider à un redressement de la participation française aux Olympiades de mathématiques,

– réfléchir à l'institution bac,

– suivre l'état actuel des manuels d'enseignement et rédiger collectivement des textes et préconisations,

– observer des expériences d'enseignement sur des programmes différents (renforcés),

– intervenir sur le « socle commun ».

Nous mettons en ligne les contributions de nos quatre invités ainsi que le présent texte de présentation. Cela ne met pas un terme à notre intervention continue sur les problèmes d'enseignement des mathématiques. Une partie de notre réunion de conseil d'automne 2006 y sera de nouveau consacrée, pour décider des suites à donner au débat du 7 janvier et aux propositions qui ont été faites lors de cet échange. D'autres initiatives sont en préparation (éventuel colloque franco-belge en 2007) et nous réagissons en permanence aux questions d'actualité (par exemple sur le « socle commun de connaissances » voir `http://smf.emath.fr/VieSociete/PositionsSMF/`).

SCIENCE BEST SELLERS

Top Ten Best Sellers

1. ***How to Grow Fresh Air: 50 Houseplants That Purify Your Home or Office***
   B.C. Wolverton
2. ***Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics***
   Howard Eves
3. ***The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe***
   Roger Penrose
4. ***Warped Passages: Unraveling the Mysteries of the Universe's Hidden Dimensions***
   Lisa Randall
5. ***Concepts of Modern Mathematics***
   Ian Stewart
6. ***Scientific American: Great Science Fair Projects***
   Marc Rosner
7. ***Scientific American: The Complete Collection of "The Amateur Scientist" on CD-ROM—Science Fair Edition***
   Shawn Carlson, Editor
8. ***Journey through Genius: The Great Theorems of Mathematics***
   William Dunham
9. ***What Is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods***
   Richard Courant and Herbert Robbins; revised by Ian Stewart
10. ***Deep Down Things: The Breathtaking Beauty of Particle Physics***
    Bruce A. Schumm

By arrangement with *Scientific American* (www.sciam.com), January 2006.

PRIX ET DISTINCTIONS

La vulgarisation des mathématiques

Philippe Boulanger

Philippe Boulanger a reçu le prix d'Alembert 2006, décerné par la SMF, « pour l'ensemble de son action, notamment à la tête de la revue "Pour la Science" et aux éditions Belin. »

L'homme de la rue, adulé par les sondages, sait ce que fait un chimiste (qui ne se limite pas à la fabrication de produits polluants), un physicien (qui modifie les propriétés de la matière), un géologue (qui étudie le fonctionnement de la planète Terre), mais n'a aucune idée de ce que fait un mathématicien. Cette ignorance est sans doute la contrepartie de l'absolue liberté des mathématiciens qui orientent leur recherche comme ils le veulent et sont moins contraints que les spécialistes des autres disciplines.

Cependant, si l'on ne peut influer sur l'objet de leur activité (qui l'oserait ?), la curiosité sur leur activité est saine. Les mathématiciens font partie de la cité, et le désir de connaître l'objet de leur quête est un bien : se lèvent-ils le matin d'un pied léger comme le savant Cosinus en se donnant pour tâche de démontrer un théorème sur « le lieu géométrique de l'intersection des cercles imaginaires à centre indéterminé » ?

Afin de satisfaire cette légitime curiosité, même informulée, *Pour la Science* et les éditions Belin ont édité des livres et des articles sur les mathématiciens et ces livres se sont bien vendus. Il est remarquable que si les ouvrages sur l'histoire des mathématiques rencontrent un bon public (les mathématiques sont éternelles), ceux sur l'histoire de la biologie ou de la botanique sont des insuccès retentissants : les sciences du vivant avant l'ADN n'intéressent personne. Quant aux livres de vulgarisation de la chimie, per se, seul un éditeur masochiste, voire suicidaire, pourrait s'y essayer.

Les mathématiques sont-elles si mal vulgarisées ? Une enquête de juin 2006 sur les livres de vulgarisation scientifique les mieux vendus aux États-Unis montre que 4 livres sur 10 traitaient de mathématiques. Ainsi, la situation n'est pas aussi noire que dépeinte et les mathématiques, au contraire de la chimie, ne souffrent pas de désamour marqué parmi les sciences. En revanche, la structure des médias (leurs us et coutumes) fait que les mathématiciens ne passent pas à la une du journal de 20 heures même quand ils obtiennent des distinctions prestigieuses : la médaille Fields de Wendelin Werner n'a été l'objet que de rares interviews (et toujours sur l'homme, jamais sur ses travaux) alors que ces mathématiques sont explicables[1].

[1] Voir son article : *Les chemins aléatoires* dans le numéro d'août 2001 de *Pour la Science*.

Nous pouvons nous interroger sur ce silence et ce désintérêt, même sur les chaînes dites « culturelles ».

Faut-il vulgariser les mathématiques ?

Ce que publient les revues de vulgarisation ne résulte pas, me semble-t-il, d'une demande du public (que les éditeurs souhaiteraient assoiffé de connaissances rationnelles). La publication des sujets scientifiques résulte d'une offre des éditeurs qui veulent faire partager leurs intérêts (il est impossible d'imposer à un éditeur ou à un journaliste de travailler sur des sujets qu'il n'apprécie pas, d'où souvent une incompréhension persistante entre les patrons de presse et leurs salariés, mais ceci est une autre histoire). Toujours est-il qu'à première vue (fausse, voir plus haut) il semblerait qu'il n'y ait pas beaucoup de demandes ni de la part des mathématiciens craignant que l'on dénature leur travail ni du public des non-mathématiciens, lesquels redoutent qu'on leur présente en termes abscons des concepts incompréhensibles... C'est probablement ce raisonnement simpliste que pratiquent les responsables des activités culturelles du paysage médiatique en quête d'une audience immédiate. Ce qui est quand même désespérant de la part de chaînes nationales pour lesquelles nous payons une redevance : je me souviens avoir voulu, il y a quelques lustres, défiler pour la sauvegarde du service public... Je ne manifesterai pas la même volonté aujourd'hui. De plus, qui peut s'étonner du désintérêt actuel des jeunes pour des sciences partout absentes (mais la cause et l'effet sont parfois difficiles à démêler) ? Toujours est-il que la vulgarisation dans *Pour la Science* à créé des vocations mathématiques.

La rigueur ?

L'inquiétude du mathématicien mérite examen : vaut-il mieux comprendre un petit peu quelque chose en ignorant l'arsenal de rigueur utilisé par le professionnel pour assurer la vérité de son travail, ou bien, pour éviter l'erreur, devrions-nous nous cantonner dans l'ignorance ?

Dès le lancement de *Pour la Science* en 1977, le désir de populariser correspondait au goût des éditeurs : je pensais à l'époque, et je pense toujours, que les mathématiciens transcendent leur siècle et que la finesse de leur logique contraste fortement avec les contingences d'un monde aux progrès politiques peu marqués (le mot progrès, trop naïf semble-t-il, est d'ailleurs banni des discours politiques, même électoraux). D'où le désir de vulgarisation. Cette volonté était à contre-courant de l'atmosphère de la fin des années 1970, car la pensée bourbakiste persistante jusque dans l'enseignement (disons ensembliste), incitait plus à la sacro sainte rigueur qu'au désir d'aller vers le public. Et les mathématiciens qui osaient des métaphores rentraient, en les exposant, la tête dans les épaules, de peur de recevoir un coup de bâton de Dieudonné, et craignaient le mépris de leurs collègues.

La rigueur est, me semble-t-il, nécessaire dans certains domaines si l'on veut éviter les autocontradictions et les contrevérités. Mais cette rigueur du propos n'est indispensable que dans les domaines où son absence pose problème. Après tout les mathématiques ont existé pendant des siècles sans que l'on fasse la différence entre les fonctions continues et dérivables et s'attarder sur ce distinguo dans des domaines de géométrie où il n'a rien à faire alourdit le discours et impose une compréhension préalable de questions difficiles qui n'ont pas de rapport avec le sujet. Les précautions sont importantes pour établir un résultat, pas pour en traiter la teneur, et j'ai tendance à faire partie des amateurs qui préfèrent Euler à Weierstrass.

Ainsi, il ne semble pas que la rigueur et la clarté soient des variables conjuguées, l'augmentation de l'une diminuant l'autre ; ce serait une fausse manière de regarder le discours de vulgarisation mathématique. En revanche, ce qui est utile à la compréhension d'un point particulier et qui marque l'avancée, objet de l'article, doit être expliqué avec toute la délicatesse possible avec des analogies, des exemples marquants etc. *« Soyez aimable »* , intimait Pascal à Descartes, dans l'exposé des théories.

Nous abordons là le sujet d'une autre partie de cet article, comment vulgariser. Il n'empêche : pour être compréhensible et capter l'intention, première étape vers l'amabilité, n'est-il pas souhaitable de présenter les exemples d'abord ? En cela, la vulgarisation se distingue de l'exposé destiné à des mathématiciens auxquels on présente une science constituée allant du général au particulier. Le lecteur (et ce désir est certainement aussi présent chez les étudiants) veut exactement le contraire : l'exemple avant la théorie. J'ai subi avec agacement, il y a longtemps, deux mois d'un cours sur les distributions, chatoyant par ailleurs, où le professeur prestigieux mentionnait les fonctions indéfiniment différentiables à support compact sans en montrer une seule... Il a fallu insister pour obtenir cet exemple.

L'étonnant, voire incompréhensible, désir de nouveauté

Continuons les désirs parfois antinomiques : si le mathématicien aime la rigueur, les vulgarisateurs désirent la nouveauté car elle correspond au souhait des lecteurs. Cette appétence apparaît quelquefois paradoxale au mathématicien : pourquoi le lecteur qui ne connaît rien à la discipline se focalise-t-il sur la progression qui a conduit au résultat décisif ? Pourquoi l'ignorant s'intéresserait-il à la dernière nouveauté alors que tout lui est inconnu ? Calmons les dubitatifs : même si ce souhait semble inconséquent, le désir du lecteur est roi. De plus, dans un sens, il a raison : ce n'est pas l'étude approfondie des arcanes de la géométrie descriptive de Monge ou de la géométrie du triangle qui apportera une meilleure compréhension des nouvelles caractéristiques du mouvement brownien. Les professionnels savent cela, ils suivent souvent leur intuition sans faire une étude exhaustive de l'état de l'art... Du passé il faut savoir faire table rase car la place est limitée. Ou alors, ce qui est intéressant, mais une autre discipline, faire œuvre d'historien.

L'utilité des mathématiques, un argument de vente ?

On évoque souvent l'inexplicable utilité des mathématiques. Il est vrai que certaines applications des mathématiques sont inattendues et que cela est merveilleux. Ajoutons toutefois un bémol. L'utilité pratique et immédiatement opérationnelle d'une découverte touche peu le lecteur, sauf quand il s'agit de disciplines ludiques comme le cube de Rubik ou les caractéristiques du Sudoku, très éloignées du courant des recherches mathématiques. Il est très rare que le progrès mathématique exposé dans une revue de vulgarisation ait un impact direct et immédiat... D'ailleurs, en leur for intérieur, de nombreux mathématiciens se moquent que leur discipline ait ou non des utilisations pratiques (bien sûr ils prétendent le contraire), sauf si cela les met dans une meilleure situation sociale et les aide à obtenir des crédits.

Un des plus grands, G. H. Hardy s'enorgueillissait de l'inutilité de sa discipline, la théorie des nombres.

En revanche, que les mathématiques aient leur mot à dire, par exemple dans le comportement social, dans la stratégie des jeux ou l'interprétation des figures « impossibles », reste une formidable source d'étonnement, voire d'émerveillement. Qui aurait pu croire que, dans ces domaines, leur apport puisse être déterminant ? En cela les mathématiciens vont, pour la plus grande joie des vulgarisateurs, au-devant du public. Il y a certes des marronniers[2], mais il n'est pas jusqu'aux plus simples d'entre eux qui n'aient de prolongements nouveaux et intéressants, tel le problème qui date des premiers livres de vulgarisation mathématique, les trajets du loup de la chèvre et du chou. Le flot des progrès des mathématiques entraîne ces « petites questions » sur des rives insoupçonnées.

Énoncés et solutions

Paradoxalement des problèmes a priori très simples comme la conjecture de Goldbach (tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers) ne sont pas démontrés. Les lecteurs aiment bien qu'à côté de l'extraordinaire puissance des mathématiques, il existe des témoignages de leur faiblesse. Une des difficultés est d'accepter que des problèmes d'énoncé élémentaire, soient très difficiles à résoudre, voir par exemple le théorème de Fermat. Les lecteurs s'y essayent et il faut parfois modérer certains enthousiastes qui voudraient que l'on publie « leur démonstration ». Un sympathique patron d'un grand journal du Havre était ancien élève de Polytechnique et s'était intéressé toute sa vie au théorème de Fermat, dont il pensait avoir trouvé une démonstration « élémentaire » (est qualifié d'élémentaire ce que le locuteur comprend). Il nous avait envoyé son travail en urgence en nous demandant de l'examiner. Hélas, avant que nous n'ayons pu lui indiquer son erreur (qui n'était même pas nouvelle) il avait lancé les presses de son imprimerie. Le démenti sur deux lignes suivit de près la fausse annonce de deux pages.

Comment vulgariser ?

Le rêve de certains scientifiques est de remettre les lecteurs des revues de vulgarisation sur les bancs de l'école... Il faudrait le faire avec prudence : un des moyens est de piquer la curiosité pour ensuite la satisfaire. L'attitude consistant à tabler sur le goût du savoir est aujourd'hui illusoire dans l'école moderne qui n'est plus celle de Ferry (Jules). Pour ce qui est des mathématiques, la curiosité à motiver est celle du résultat, en montrant pourquoi celui-ci est important pour notre compréhension des nombres et des formes. Cela n'est pas facile, mais grâce à leur talent, certains vulgarisateurs, mathématiciens professionnels ou journalistes compétents (pléonasme), y parviennent avec succès.

Qui vulgarise ?

Pour la Science a choisi de faire s'exprimer les scientifiques sur leur découverte, le journaliste ayant, dans une grande partie du journal, plus le rôle d'un éditeur rassis de textes que d'un Rouletabille surexcité. C'est un choix. Le journaliste semble plus près du public, l'auteur de la percée scientifique étant plus près de la vérité

[2] Sujet rebattu qui reparaît régulièrement (comme la floraison des marronniers) - Argot de presse [NdlR]

de sa discipline. Il n'y a pas de meilleure solution sinon, peut-être une adéquation à la périodicité ; un quotidien colle au plus près de l'événement et utilise les facilités d'écriture d'un journaliste, un mensuel ou un livre a plus de recul et demande au mathématicien professionnel de relater sa découverte. La collaboration journaliste-mathématicien est chaotique ou réussie selon que chacun fait plus ou moins confiance à l'autre sur l'importance des notions et leur possible assimilation. Il n'empêche, un article de mathématiques demande dix fois plus de travail d'édition qu'un article d'archéologie... Les mathématiciens professionnels ont parfois de superbes et inattendues idées de vulgarisation et il ne me semble pas que les meilleurs mathématiciens soient les plus mauvais vulgarisateurs. Il est cependant difficile de les persuader de l'intérêt de la vulgarisation...

... et de la longueur limitée de l'exposé. La vulgarisation, et le journalisme en général sont constamment préoccupés par la place disponible corrélée aux limites de l'attention des lecteurs. La longueur des articles a beaucoup diminué depuis la création de *Pour la Science*. Cela pose un problème pour l'exposé de questions délicates : *« Si je pouvais vous exposer le résultat de mes recherches en trois minutes je n'aurais pas obtenu le prix Nobel pour cela... »* a répondu Richard Feynman à un journaliste pressé. Toutefois, les contraintes littéraires sont des difficultés qui amènent souvent un bien : elles obligent à mieux délimiter et ciseler l'exposé. Une remarque lapidaire est l'œuvre de Jean-Pierre Kahane : 1) « Faut-il vulgariser toutes les mathématiques ? La réponse est oui. 2) Peut-on vulgariser toutes les mathématiques ? La réponse est non. » L'exégèse de cette phrase semble inutile. La vulgarisation des sciences est plus un art qu'une science : il n'existe pas de théorèmes ni de recettes, le lecteur étant par définition attiré par la nouveauté du sujet et de son exposition. Il existe deux types de bons pédagogues : ceux qui ont étudié la psychologie et les mécanismes d'apprentissage et ceux, qui, du fait de leur intérêt pour leur discipline savent communiquer leur enthousiasme. Nous avons plus d'exemples en tête de la seconde catégorie.

Les « jeux mathématiques »

L'existence des jeux mathématiques est paradoxale : les mathématiques sont décriées pour leur abstraction et leur difficulté et pourtant c'est la seule discipline scientifique qui engendre une activité ludique, les Jeux mathématiques. Elle devrait faire des jaloux. N'écoutons plus les rares rigoristes qui professent un dédain amusé pour un art qui leur semble incongru : même si les jeux mathématiques n'étaient, et je ne le crois pas, qu'un amusement, la parodie est une consécration. Les jeux mathématiques sont une voie royale pour rendre les mathématiques aimables. Le début du XX^{e} siècle vit la concurrence de deux maîtres du genre, l'Anglais Ernest Dudeney et l'Américain Sam Loyd. Puis Martin Gardner enchanta le monde de ses chroniques dans *Scientific American* et *Pour la Science*. Ian Stewart prit, d'Angleterre, le relais avec ses chroniques et Jean-Paul Delahaye, depuis 15 ans, a conquis par ses livres et les colonnes de *Pour la Science*, une armée d'amateurs éclairés par ses écrits. Chacun de ces auteurs a son style et Jean-Paul Delahaye a intitulé sa rubrique *Logique et calcul* en prolongation de son activité de professeur et de chercheur à l'université de Lille. Jean-Paul Delahaye est le premier des auteurs mentionnés à avoir intégré dans ses colonnes les nouveautés informatiques. La surprise est de taille : l'informatique n'est pas essentiellement utilisée pour démontrer des théorèmes, mais pour en découvrir de nouveaux. En mathématiques toujours l'inattendu arrive, pour notre plus grande joie.

L'enseignement

Ce qui m'attriste véritablement, et cette opinion est toute personnelle, est l'aridité des programmes scolaires qui ne se renouvellent pas assez pour tenir compte des progrès de la discipline (un des deux actionnaires de *Pour la Science* est Belin, grand éditeur scolaire, qui par ses idées et son souci de qualité est proche de *Pour la Science*, et grâce à qui je me suis intéressé à ce type d'édition...). Bien que de petites avancées aient été accomplies, l'enseignement reste figé et austère. Les rares discours sur l'intérêt des mathématiques portent sur leur utilité industrielle qui ne semble pas leur principal intérêt, du moins c'est ce que la vulgarisation nous enseigne : les mathématiques sont une forme nécessaire de la pensée et sont intéressantes par elles-mêmes. Les mathématiques promettent plus que la Lune, elles permettent d'observer sa face cachée, l'inattendu logique derrière le réel compliqué. Si nous en sommes persuadés, nous saurons les faire vivre dans le cœur des lecteurs. Citons André Weil : « À nous dont les épaules ploient sous l'héritage de la pensée grecque, à nous qui traînons encore nos pas dans les sillons tracés par les héros de la Renaissance, une civilisation sans mathématiques semble inconcevable. » En cette occasion anecdotique de la remise du prix d'Alembert, je voudrais sincèrement remercier la communauté des mathématiciens qui a su constamment aider et supporter, aux deux sens du terme, les activités des journalistes de *Pour la Science*.

Michel Demazure, Président du jury, remet le Prix d'Alembert 2006 à Philippe Boulanger

Le prix Anatole Decerf 2006 décerné à Centre-Sciences

Patrick Maheux[1]

Centre-Sciences[2] vient de recevoir le prix Anatole Decerf décerné par la Société Mathématique de France (SMF) pour son action pour la promotion des mathématiques, en particulier pour sa nouvelle exposition « Pourquoi les mathématiques » ou « Experiencing mathematics », exposition interactive, internationale et itinérante.

Qui est Centre-Sciences ? C'est un des 30 CCSTI (Centre de Culture Scientifique, Technique et Industrielle), régi par un statut associatif, qui a pour objet la promotion de la culture scientifique, technique et industrielle dans la région Centre.

Créé en 1990, Centre-Sciences joue un rôle essentiel, dans la durée, pour la promotion des sciences et notamment des mathématiques en aidant les laboratoires de la région Centre, par différentes actions lors de la Fête de la Science, les Journées Mathématiques régionales organisées par l'IREM d'Orléans, les Journées Portes Ouvertes ou encore pour l'opération `http://enigmath.org` en 2002 et 2003. L'association contribue aussi à des actions au niveau national et international, notamment dans le cadre de l'année mondiale des mathématiques 2000. Prochainement, l'exposition de « Experiencing Mathematics » sera au Congrès International des mathématiciens ICM2006 à Madrid (d'août à octobre 2006) puis au Muséum de Lyon du 5 octobre au 19 novembre 2006. Cette exposition est réalisée par Centre-Sciences et l'université de Tokaï (Japon) à l'initiative de l'Unesco et de l'Académie des sciences. Pour les expositions passées et futures, on pourra consulter le site `http://www.mathex.org`.

Cette CCSTI a ceci d'original qu'elle ne possède pas de lieu d'exposition propre : elle conçoit et réalise de nombreuses expositions scientifiques interactives et itinérantes. Son action est à la fois au niveau local, national et international. Au niveau local, les expositions se déplacent dans les lycées et collèges par exemple. Elle possède actuellement 8 permanents.

[1] Chargé de communications pour le laboratoire de mathématiques de l'université d'Orléans (MAPMO).
[2] http ://www.Centre-Sciences.org

L'équipe Centre-Science

Michel Darche, qui l'a dirigée jusqu'à sa retraite en 2005, explique dans[3] les modalités de fonctionnement de cette structure dont nous reprenons ici quelques extraits. « *Nous avons mis en place un travail de réseau et fonctionnons de façon très étroite avec les laboratoires de recherche de la région. Nous avons besoin de rencontrer les chercheurs, de les côtoyer dans leur travail et leur mode de fonctionnement pour avoir des relations très simples et très rapides. Le CA de l'association est constitué principalement par des chercheurs "représentants" d'organismes universitaires et de recherche. Nous avons développé une stratégie de création récurrente où on crée, au minimum une exposition « lourde » (200m^2 comme les maths) par an et une exposition « légère » sur le même concept qui tient dans une voiture, peut circuler facilement et que les gens peuvent venir chercher et rapporter* » .

Cette association a le soutien de plusieurs ministères, conseils généraux, villes, du conseil régional du centre, de l'IREM d'Orléans... Pour plus d'informations, voir la note 3.

Le point fort des expositions de Centre-Sciences est la création d'objets manipulables (même en mathématiques !) comme la planche de Galton pour simuler la gaussienne et le vélo à roues carrées pour la cycloïde. Le public « accroche » plus facilement avec une manipulation qu'avec uniquement une explication théorique sans support matériel. L'interactivité des activités rend les expositions attractives. L'effort d'accessibilité est une recherche constante mais ne veut pas se substituer à l'enseignant ou au chercheur. On leur montre un phénomène lié aux mathématiques. Le succès par rapport à d'autres type d'exposition, c'est que le public ne voit pas habituellement les mathématiques sous cette forme aussi manipulable. Centre-Sciences a évidemment aussi pour mission de sensibiliser le jeune public aux sciences.

[3] *MATAPLI* n° 77, juin 2005 p. 46-54.

Centre-Sciences a donc une action bénéfique pour l'image des mathématiques que l'on sait détériorée actuellement (ceci est aussi valable en général pour les sciences). Plusieurs actions comme les Journées Porte Ouvertes, Fêtes de la science sont menées pour changer cette image depuis plusieurs années. La méconnaissance du rôle des mathématiques dans la société demande un médiateur entre les centres de recherches où les connaissances sont créées et le grand public. Centre-Sciences joue ce rôle avec une équipe dynamique qui a déjà réalisé beaucoup de projets et qui en prépare d'autres notamment en développant son site internet.

Il s'est imposé depuis quelques années la nécessité de communiquer les résultats de la recherche au grand public. En particulier ce qu'apportent les mathématiques dans la vie de tous les jours et qui est souvent ignoré. L'existence d'un médiateur permet d'une part de concentrer des compétences de communications, d'avoir une interface clairement identifiée et de centraliser les informations provenant des laboratoires en les adaptant pour un large public. Les laboratoires et plus généralement les facultés des sciences ont été amenés à soutenir, encourager et utiliser ces initiatives.

La Fédération Denis Poisson (créée le 1er janvier 2006) qui regroupe les laboratoires de mathématiques d'Orléans[4] et de physiques théoriques de Tours[5] est à l'origine de la présentation de la candidature de l'association Centre-Sciences pour sa nouvelle exposition « Pourquoi les mathématiques » ou « Experiencing mathematics ». En effet, Centre-Sciences participe régulièrement et depuis longtemps aux manifestations organisées, en particulier, sur le campus orléanais.

Centre-Sciences (sous un autre nom) a déja reçu le prix d'Alembert des mathématiques pour l'exposition « Horizon mathématiques » en 1984 et se voit décerner le prix Anatole Decerf en 2006. Ce dernier prix récompense l'action continue qu'a exercée cette association pour le partage des connaissances ainsi que le développement croissant de ses activités.

Souhaitons à Centre-Sciences de continuer à développer ses projets scientifiques, en particulier pour les mathématiques, avec autant de succès.

4 http://www.univ-orleans.fr/mapmo/

5 http://www.lmpt.univ-tours.fr/

INFORMATIONS

Quel bagage mathématique pour l'ingénieur européen ?

Lê Thanh-Tâm

« Qualification Profiles »

En 1999 s'est constituée l'*IDEA League*, un réseau de quatre universités européennes considérées, dans leurs pays respectifs, comme des références en science et technologie : l'*Imperial College* (Londres), la *Technische Universiteit Delft*, l'*Eidgenössische Technische Hochschule Zürich (ETHZ)* et la *Rheinisch-Westfälische Technische Universität Aachen (RWTH)*. La recherche de critères de qualité globale communs et la volonté de développer les échanges d'étudiants dans les meilleures conditions de lisibilité les a conduites à établir une série de *« qualification profiles »* , documents synthétiques tenant du profil de connaissances et du profil de compétences. Ils comprennent une partie générique à l'ensemble des domaines enseignés aux niveaux Bachelor et Master et une partie spécifique déclinée par grande discipline élaborée par un groupe de travail constitué de professeurs de la discipline représentant chacune des universités membres. Ces documents sont destinés à être périodiquement remis à jour ; ils servent notamment de base aux accords de reconnaissance mutuelle des diplômes entre les membres du réseau, le doctorat faisant par ailleurs l'objet d'une démarche spécifique en cours. ParisTech, association de onze grandes écoles d'ingénieurs basées en Île-de-France (Agro ParisTech (ENGREF et INA-PG), Arts et Métiers, Chimie Paris, ENSAE Statistique, ENSTA, ESPCI, Mines de Paris, Polytechnique, Ponts et Chaussées, Télécom Paris), a été invitée à rejoindre l'IDEA League en 2006.

Le *« qualification profile in Mathematics »* se concentre sur les buts et objectifs communs des programmes en mathématiques des différentes universités membres. La philosophie en est largement partagée mais les modalités et détails de mise en œuvre diffèrent, ne serait-ce que sur le format : ainsi, le Master d'Imperial College (pas uniquement en mathématiques) ne dure qu'un an après les trois années du cycle Bachelor, tandis que RWTH Aachen ne délivre pas (ou pas encore) de bachelor en mathématiques, ce qui est également le cas des écoles de ParisTech.

Une exigence qui semble aller de soi est que l'enseignement dans chaque université membre soit délivré par des enseignants *actifs en recherche*.

La liste des critères à laquelle a abouti le groupe de travail, tant au niveau du Bachelor que du Master, n'est pas rigide : si elle fournit une grille d'estimation des connaissances et compétences acquises, il n'est pas absolument exigé que chaque étudiant satisfasse l'intégralité de ces critères pour prétendre à une « mobilité verticale » (changement d'université entre deux cycles, par exemple en fin de Bachelor).

L'exercice peut sembler évident, voire un peu vain dans sa généricité. Pourtant, par contraste avec d'autres tentatives plus ou moins heureuses de surimprimer à des structures pédagogiques des démarches qualité qui n'ont, bien souvent, nullement été conçues à cette fin, l'approche d'IDEA League se veut avant tout pragmatique et réaliste, même si elle peut sembler par certains aspects singulièrement ambitieuse. On peut y lire également le souci de former des étudiants au profil aussi équilibré et complet que possible. Certains groupes thématiques ont d'ailleurs préféré se limiter à un profil au niveau Bachelor, constatant une divergence trop marquée entre leurs programmes de master.

Quelques commentaires « parisiens »

L'adhésion à l'IDEA League, qui n'est évidemment exclusive d'aucune autre coopération, conduit les écoles de ParisTech à se poser, de manière bien plus opérationnelle qu'idéologique, des questions assez stimulantes sur leur lisibilité, leur capacité à accueillir des étudiants européens formés, de plus en plus, selon le schéma LMD. En particulier, on peut se demander comment la reconnaissance mutuelle des diplômes au niveau Bachelor peut se concrétiser dans des établissements qui recrutent essentiellement en sortie de classes préparatoires, ne délivrent pas d'autre diplôme de niveau « L » qu'un passeport pour des échanges académiques avec leurs partenaires universitaires étrangers et dont la première année n'est que rarement spécialisée dans une discipline, constituant plus volontiers un tronc commun multidisciplinaire, qui complète les acquis de classes préparatoires et prépare à l'introduction de sciences de l'ingénieur dépendant, elles-mêmes, de l'école considérée. Précisons que même si les accords de reconnaissance mutuelle des diplômes entre membres d'IDEA League reposent sur ces profils de qualification, le seul fait d'être titulaire du Bachelor (Master) d'une des institutions n'oblige en rien une autre à admettre l'étudiant dans ses programmes de Master (Doctorat) ; le travail réalisé sur ces profils constitue simplement un puissant outil de lisibilité mutuelle. Par ailleurs, le Bachelor n'est destiné à ouvrir directement sur la vie professionnelle dans *aucune* des universités du réseau.

Outre le fait que les écoles ne sont pas vierges de toute réflexion en ce domaine, envoyant volontiers leurs étudiants formés en France acquérir une expérience internationale dans une université partenaire et accueillant déjà, pour la plupart d'entre elles, des étudiants issus de formations universitaires françaises et étrangères par admission sur titres en deuxième année du cycle ingénieur et, depuis peu, en première et en seconde année de master, il ne faut pas oublier que les profils de qualification ne concernent, chez nos partenaires d'IDEA League, que les programmes centrés sur la discipline concernée. S'il est certain que le bagage mathématique d'un élève n'est pas le même en fin de cycle « L » à l'École Polytechnique ou à l'INA-PG (dont les étudiants issus des classes préparatoires ne sont pas issus des mêmes filières), l'écart n'est en rien comparable à celui que l'on peut trouver, par exemple, entre un Bachelor en mathématiques de l'ETH Zürich et un Bachelor de TU Delft se destinant au design industriel.

Les départements de mathématiques de plusieurs grandes écoles ont ainsi l'expérience d'étudiants européens éprouvant les plus grandes difficultés à suivre un programme de première année, même avec un effort de soutien personnalisé très important, ne serait-ce que parce que le concept même de démonstration leur semble d'une difficulté quasi-inaccessible. L'une des capacités censément acquises en sortie de Bachelor, « savoir utiliser des savoir-faire analytiques, prêter attention aux détails et employer correctement la terminologie technique, travailler sur des concepts précis et élaborés, construire des argumentations logiques » est un exercice que nos meilleurs étudiants issus des classes préparatoires maîtrisent, sinon en profondeur, du moins avec une efficacité certaine qu'il nous appartient de diversifier, d'enraciner dans un véritable substrat scientifique. Pour un étudiant allemand ou britannique du même âge, cela peut s'avérer un véritable défi, à tel point que, de notre point de vue et à la remarquable exception de certains Roumains, Russes ou Ukrainiens, il est rarement réaliste d'accueillir des étudiants européens dès la première année d'une école à forte composante scientifique « dure ».

En revanche, il va de soi que dès la deuxième année, ces mêmes étudiants bénéficient de compétences qu'ils ont acquises par des voies bien différentes. J'ai notamment eu l'occasion de recevoir à Supaero des Belges, des Espagnols, des Italiens tout à fait brillants dans des disciplines qui, comme l'automatique, l'électronique, l'informatique, la mécanique supposaient une capacité d'application mathématique substantielle. Les étudiants issus du système français de classes préparatoires sont, de leur côté, confrontés à des défis non négligeables. « Être conscient de l'importance d'une argumentation précise et la comprendre », autre acquis en sortie de Bachelor, ne leur est pas aussi évident qu'il n'y paraît : leur plus grande pratique de démonstrations élaborées est souvent associée, dans leur esprit, à une exigence académique formelle (celle des concours) et au caractère exhaustif et systématique de la preuve écrite, ce qui ne recouvre bien sûr qu'une partie de la précision et de la pertinence d'une argumentation. Les « interrelations » entre un large ensemble de concepts complexes ne s'appréhendent pas par simple juxtaposition de techniques de calcul et leur intuition est d'autant plus cruciale que cette aptitude à les comprendre, les affiner, les mettre en évidence est une qualité fondamentale attendue des ingénieurs formés dans nos écoles. Quant aux « capacités sociales et de communication suffisantes pour travailler en équipe », également mentionnées dans le profil de fin de Bachelor, si elles sont certes favorisées par la taille relativement réduite de nos promotions, peut-on penser que nos étudiants ne les développent pas tous prioritairement dans le champ scientifique ?

Une analyse détaillée de l'adéquation de nos formations à chaque ligne des profils IDEA League sortirait du cadre de ce texte et devra faire l'objet d'un travail approfondi entre départements de mathématiques de ParisTech dans les mois à venir. Je relèverai cependant l'expression suivante : « avoir acquis une connaissance et une compréhension des fondements des mathématiques comme discipline vivante à part entière ». Le besoin de la rappeler reflète sans aucun doute un malaise qui ne se limite certainement pas au supposé clivage entre mathématiques « pures » et « appliquées ».

Transfer workshop

Ce point était très sensible au cours d'une rencontre de deux demi-journées organisée chaque année entre établissements d'IDEA League et qui était consacrée, en avril dernier à Imperial College, au thème de l'enseignement des mathématiques aux ingénieurs.

Sans entrer dans trop de détails, un certain nombre de constats ont été esquissés à l'issue de cette rencontre. En voici les principales lignes.

– Toutes les institutions membres d'IDEA League sont confrontées, bien qu'à des degrés variables, à une baisse du niveau mathématique des étudiants qu'elles recrutent. Ce phénomène est confirmé par la récente étude PISA qui montre un écart croissant entre les pays d'Europe occidentale et, par exemple, les pays asiatiques.

– Le saut quantitatif et qualitatif des connaissances et des compétences scientifiques entre la fin du lycée (ou équivalent) et l'entrée dans ces universités est aggravé par un manque d'enthousiasme réel pour les disciplines scientifiques. (Cela reste souvent vrai pour les étudiants sortant des classes préparatoires, quoique ce soit pour des raisons quelque peu différentes, notamment la saturation de méthodes calculatoires que les professeurs de classes préparatoires s'efforcent de compenser par une analyse plus profonde des concepts – dans la mesure où le gouffre qualitatif et quantitatif entre le niveau en sortie de lycée et celui, technique, exigé aux concours d'entrée dans les écoles leur en laisse la latitude.)

– Les effets de ces phénomènes ne doivent pas être sous-estimés, ni dans leur variété, ni dans leur persistance à long terme : le déficit global de préalables aux cours scientifiques et techniques influe nécessairement sur l'efficacité de ces cours et sur les compétences acquises en fin de cours ; le nombre d'étudiants des universités de ce niveau va décroître en raison des difficultés initiales qu'ils rencontrent ; la baisse quantitative et qualitative va essentiellement affecter les activités économiques relatives aux sciences et à la technologie et cela va, notamment, à l'encontre de la stratégie dite de Lisbonne qui exhorte au renforcement de la « société de la connaissance ».

Quelques actions tant internes à IDEA League qu'externes peuvent être envisagées :

– Faire prendre conscience de l'influence directe de la rémunération des professeurs en mathématiques et science du secondaire sur leur nombre et leur niveau : la qualité des élèves sortant du lycée semble meilleure dans les pays qui proposent un niveau de salaire plus satisfaisant ;

– Tenter de contribuer à l'amélioration de l'enseignement des sciences dans le secondaire et redresser la tendance très forte (dans plusieurs pays d'Europe de l'ouest) à une forte décroissante de la part dévolue aux mathématiques et aux autres disciplines scientifiques ;

– Utiliser l'enseignement à distance par ordinateur : celui-ci peut apporter des méthodes utiles, des illustrations efficaces mais le constat unanime est qu'il ne peut en aucun cas se substituer à l'enseignant, a fortiori en l'absence de personnels suffisamment nombreux pour le faire fonctionner efficacement.

Plusieurs aspects apparus au fil des discussions donnaient un éclairage intéressant sur les problèmes, souvent communs, parfois spécifiques rencontrés dans chaque pays du réseau. Au sein d'Imperial College existe ainsi une tension, probablement plus forte que dans la plupart de nos écoles, entre les tenants d'une science mathématique à part entière, dont la compréhension au-delà des outils de modélisation et de calcul est considérée comme formatrice pour tout futur ingénieur, et ceux qui constatent, non sans quelque esprit de provocation, que dès lors qu'ils se destinent à un métier d'ingénieur, même les étudiants les plus à l'aise en mathématiques choisissent spontanément les cours de techniques mathématiques dispensés par des non-mathématiciens... La responsable à Delft de l'unique enseignement d'analyse en filière de design industriel, elle-même ingénieur en aéronautique, déplorait que ses étudiants ne saisissent pas du tout la raison d'être d'un cours mathématique dans leur cursus jusqu'au moment où, en projet d'étude final, ils se découvraient inaptes à réaliser une modélisation simple – et nous parlons pourtant d'une formation dite d'ingénieur. Cela n'empêche bien sûr pas la même université de former d'autres ingénieurs dont l'expertise technologique est largement reconnue et TU Delft est très fière, par exemple, des réalisations de ses étudiants sur les véhicules solaires à grande vitesse, lesquels ne se concrétisent certes pas par la seule magie de l'esthétique formelle.

Une difficulté importante qui, dans nos écoles, a été partiellement filtrée par les classes préparatoires (même si l'évolution des programmes du secondaire l'a rendue nettement perceptible) est celle de l'hétérogénéité du niveau mathématique des nouveaux étudiants. RWTH Aachen, dont la réputation en Allemagne n'est plus à faire, se trouve comme toutes les autres confrontée à l'impossibilité de sélectionner ceux-ci à l'entrée et le professeur chargé d'organiser la phase d'harmonisation en mathématiques se voit contraint au grand écart entre des étudiants au bagage moins ambitieux qu'en France mais relativement solide et d'autres pour lesquels la soustraction n'est que très imparfaitement maîtrisée ! Ce programme recourt notamment à des tutorats entre étudiants, conduit ses responsables à déployer des trésors d'ingéniosité, parfois artisanale au sens noble du terme et même s'il est clair que tous les diplômés de niveau master issus d'une telle université n'ont pas le socle mathématique que l'on attend implicitement de tout ingénieur en sortie de nos écoles, il est assez remarquable que les meilleurs d'entre eux parviennent finalement à un niveau de compétence élevé, y compris dans des secteurs aussi fortement technologiques (sans nuance réductrice) et transdisciplinaires que l'aéronautique et la construction automobile. Il est également vrai que le doctorat bénéficie, au sein de l'industrie allemande, d'une reconnaissance que l'on rencontre bien plus rarement de ce côté-ci du Rhin mais c'est là un autre – et vaste – débat.

L'exemple de la Suisse donne à réfléchir. Il est troublant d'entendre un professeur de mathématiques (explicitement *appliquées*) expliquer après quarante ans d'expérience que, constatant que le niveau de bruit des étudiants augmente significativement pendant les démonstrations, il a presque systématiquement renoncé à présenter celles-ci. (Le constat serait probablement différent dans les filières centrées sur les mathématiques, l'école zurichoise conservant une belle santé en ce domaine comme en physique théorique.) Néanmoins, des cinq pays représentés et même si les programmes mathématiques du lycée y sont moins gourmands que les nôtres, les formations d'ingénieur helvétiques semblent les moins touchées par l'élargissement préoccupant du fossé entre le secondaire et les exigences des meilleures universités. La raison peut probablement se résumer en deux mots : « bon sens ». Au Royaume-Uni, une réduction très forte des volumes horaires consacrés aux mathématiques au lycée s'est accompagnée d'une tendance à la modularisation face à laquelle nos collègues d'Imperial College tirent le signal d'alarme : l'ambition de construire un bagage cohérent semble largement abandonnée lorsque les lycéens ont la possibilité de choisir des « briques » aux noms aussi évocateurs que « mathématiques I » et « mathématiques II » . . . ou seulement la première citée. Des actions sont entreprises pour tenter de limiter les ravages de ces réformes, en particulier l'organisation, par des professeurs d'Imperial College, de séances d'introduction aux sciences et de cours du soir à destination de jeunes des quartiers défavorisés de Londres, dans l'espoir de révéler en certains d'entre eux une fibre et un don scientifique que le système éducatif général ne leur laisse que fort peu de chances de découvrir par eux-mêmes.

Pour conclure très provisoirement sur une note plus légère (?), le thème des « mathématiques comme tueur » (*i.e.,* comme discipline vecteur privilégié de l'élimination des étudiants plus faibles) a été abordé sous deux angles : dans le contexte français en sortie de classes préparatoires, une proportion minoritaire mais non négligeable de leurs élèves finissant par se convaincre que les mathématiques n'ont pour seule utilité que de sélectionner à l'occasion des concours, à l'exclusion de toute application ultérieure, mal un temps nécessaire à confiner et éradiquer ensuite au plus vite, pour filer une métaphore de Claude Viterbo ; puis à travers une petite enquête réalisée à l'ETH Zurich et d'où il ressort que les mathématiques ne sont directement « responsables » que d'un tiers des échecs scolaires définitifs observés dans cette université.

Irish Mathematical Society

Maurice OReilly[1]

In this article, I will introduce members of the SMF to the Irish Mathematical Society (IMS) and its activities, as well as the education system as it relates to mathematics and recent developments in support of research in mathematics in the Republic of Ireland.

The IMS

The Irish Mathematical Society (or Cumann Matamaitice na hÉireann, in Irish) had it origins in the late 1960's adopting its constitution, based on that of the Edinburgh Mathematical Society, in 1976. From the beginning, the IMS drew its membership from the whole island, both the Republic and Northern Ireland. The neutral ground of Royal Irish Academy (RIA) became the cradle of the IMS, facilitating support from all the universities. Moreover, the National Committee for Mathematics of the RIA was the Irish body recognised by the International Mathematical Union. Thus, a framework was in place both nationally and internationally. Between 1969 and 1975, in its formative years, the emerging society (as a subcommittee of the RIA) organised eight conferences in areas such as group representations, quantum mechanics, numerical analysis and complex function theory.

[1] Maurice OReilly is a lecturer in mathematics at St Patrick's College, Drumcondra, Dublin, a College of Dublin City University and President of the Irish Mathematical Society.

Article 2 of the IMS Constitution states simply that the Society was set up for 'the purpose of promoting and extending the knowledge of mathematics and its applications'. The article continues by listing five activities in particular: holding meetings, publishing the Bulletin, organizing and supporting conferences, lectures and discussions, discovering and making known the views of its members on mathematical matters of public interest and, finally, co-operating with other organizations to achieve its purpose. It is with a view to promoting the last of these activities that I have initiated, together with the President of the SMF, an exchange of information between our two societies.

In December 2005, the Society had 266 members plus 73 student members. Of the 266, 77% were resident in Ireland, 77% had addresses in universities or institutes, while 62% had addresses in Irish universities or institutes.

Its activities

Every year since 1988, the Society has held a meeting in September, hosted by one or other of the universities or institutes of technology. In 2004, exceptionally, our usually meeting was replaced by a joint meeting with the British Mathematical Colloquium (BMC) in Belfast. It has been decided to hold the 61^{st} BMC in Galway in 2009, again as a joint meeting. At our September meeting, speakers are encouraged to make their presentations accessible to a general mathematical audience - and this has nearly always been the case! This year, our September meeting ($4-5^{\text{th}}$) took place in the Institute of Technology, Tralee, where papers were presented on geometry, integrable systems, differential equations, group theory, graph theory, mathematical biology and mathematics education.

The first Newsletter of the Society appeared in 1974, before the IMS emerged from the cradle of the RIA. In 1986, it was renamed the Bulletin since it was considered that 'the title did not do justice to the substance of the publication'. The Bulletin appears twice yearly and includes, for example, a record of the business of the Society, research notes, survey articles, book reviews and obituaries. The contents are available online since December 1997, on the Society website.

The IMS partially supports specialist conferences held in Ireland - typically about five every year. Recent conferences were on geometry, operator theory, general relativity, mathematics education, group theory and differential equations. A list of conferences supported since 2003 also appears on the website. The Society collaborates with the School of Theoretical Physics of the Dublin Institute for Advanced Studies (DIAS) in a two-day colloquium every December at the Institute.

The IMS supports the Irish Mathematical Olympiad by awarding the Fergus Gaines Cup to the best performer in this national competition for selection to the International Mathematical Olympiad (IMO). In addition, IMS members are active in the provision of IMO training for bright youngsters. The IMS collaborates with the Irish Mathematics Teachers Association and the Hamilton Mathematics Institute (in Trinity College, Dublin) in supporting mathematics in secondary schools through an annual competition.

Internationally, the IMS enjoys close relationships with both the London and Edinburgh Mathematical Societies, not least in the joint organisation of the BMC as already mentioned. The IMS has only two international reciprocity agreements, one with the AMS, the other with the RSME[2]. Closer links with the SMF are indeed overdue!

Universities and research in Ireland

There are seven universities in the Republic and two in Northern Ireland. There are also fourteen institutes of technology, eight colleges of education and three other third level colleges in the Republic supported by the state. Further information about the structure of third level education can be found on the website of the Higher Education Authority (HEA). It is from these institutions that 62% of our membership comes and in which the vast bulk of third level mathematical education takes place. As far as research is concerned, one would need to add DIAS to this list. Finally, the RIA has a key role as both a neutral and common ground for research and policy development in mathematics and mathematics education.

Two government ministries fund most mathematical activity in the Republic: the Department of Education and Science (DES) and the Department of Enterprise, Trade and Employment (DETE). Mathematics education, at all levels, is, of course, the responsibility of the DES. Research, on the other hand, is funded largely through the Irish Research Council for Science, Engineering and Technology (IRCSET) together with the HEA, in the DES, and through Science Foundation Ireland (SFI), in the DETE. These funding structures emerged in the past decade - progress has been rapid and substantial. The increase in funding has been accompanied by much discussion and debate, with diverse views emerging on the best way to support research in mathematics. In 2004, SFI identified mathematics as a discipline which was under-funded and in need of encouragement. After consultation with various parties, including the IMS, leading to SFI's Mathematical Initiative 2006, SFI issued a call for proposals for mathematical research that had 'a potential impact on enterprise, industry, science, engineering and mathematical education'. At the time of writing this article have been selected two projects for substantial support one in coding theory and cryptography, the other in mathematical modelling and computational analysis with applications in science, engineering and industry.

Recent developments

William Rowan Hamilton was born in Dublin in 1805. To mark the bicentenary of his birth, the Irish Government designated 2005 as Hamilton Year: Celebrating Irish Science. The year was marked by a great number of events involving prestigious international mathematicians and scientists, as well as significant publicity to promote science amongst the public at large. The events included the traditional commemorative walk, on the 16th October, following Hamilton's footsteps on the day he discovered quaternions, at Broombridge on the Royal Canal, Dublin, on that date, in 1843. Conveniently, last year, the anniversary occurred on a Sunday, and, moreover, the weather was fine! In 2006, for the first time, there will be a national mathematics week starting on 16th October, with events throughout the country.

As well as Hamilton Year and the launching of SFI's Mathematical Initiative, 2005 also saw the formation of a restructured committee of the RIA to 'lead, inform

[2] Real Sociedad Matemática Espanola

and guide Academy and Government policy across the full spectrum of Mathematical Sciences'. This Academy Committee for Mathematical Sciences replaced three committees with responsibilities for mathematics, mathematical instruction and theoretical and applied mechanics. The IMS is one of seven bodies represented on the Academy Committee.

The challenge of education

As in many other countries, there is considerable concern in Ireland regarding the state of mathematics education. The concern exists across a wide spectrum from mathematicians to policy makers, to students and to the public at large. The situation is complex and, of course, perspectives vary considerably. Traditionally there have been three levels of education in Ireland: primary, secondary and third level. Primary school lasts for eight years (with a typical entry age of four or five), secondary (or post-primary) school lasts for five or six years, while third level education has already been mentioned. Increasingly, the terminology 'fourth level' is used in reference to higher education from masters' level upwards. Moreover, the Bologna Declaration is influencing more and more the structure at the third and fourth levels.

One area of serious concern is the articulation between systems. For example, the approach to teaching at primary level is 'constructivist', while the emphasis at secondary level is very much driven by two state examinations (the Junior Certificate, after three years, and the Leaving Certificate after a further two, with the possibility of an additional 'transition year' immediately after the Junior Certificate). There is also concern about the mathematical background of many teachers which gives rise to a poor appreciation of the direction of mathematical development, amongst primary teachers, and excessive emphasis on mechanical skills at the expense of understanding, amongst secondary teachers.

The 2003 OECD Programme for International Student Assessment (PISA) study puts Ireland in 17$^{\text{th}}$ place out of 29 countries in the ranking for mathematics of 15-year olds. The mathematics score, like those of France and Germany, was close to the mean, but disappointing compared with the Irish scores in language and in science. Neither such scores nor my earlier comments on the state of mathematics education in Ireland can encompass the complexities of the issues which require sustained collaborative efforts on the part of policy makers, educators and, indeed, students. The National Council for Curriculum and Assessment (NCCA) of the DES published its Review of Mathematics in Post-Primary Education last year, inviting responses from the public at large. Thencca published a report on this consultation last april. It is likely that significant reform of the secondary level curriculum will follow.

Franco-Irish collaboration

My informal enquiries reveal that there are already many links between French and Irish mathematicians. Irish mathematicians collaborate with French colleagues in the IHES and CIRM as well as universities in Paris, Bordeaux, Lille, Lyon, Metz, Nice, Orleans and Poitiers, for example. I hope that by exchanging information about our respective societies in our publications, your Gazette and our Bulletin, more collaborations will be encouraged and we will appreciate in more detail the situation of mathematics in our respective countries.

Websites of interest

IMS: `http://www.maths.tcd.ie/pub/ims/`
RIA: `http://www.ria.ie/`
HEA: `http://www.hea.ie/`
DES: `http://www.education.ie/`
IRCSET: `http://www.ircset.ie/`
SFI: `http://www.sfi.ie/`
PISA: `http://www.erc.ie/pisa/`
NCCA: `http://www.ncca.ie/`
Other links at: `http://www.spd.dcu.ie/moreilly/ims.htm`

Bilan de la session 2006 du CNU, section 26

Le bureau de la Section[1]

Qualifications : bilan 2006

Qualifications aux fonctions de Maître de Conférences

Le nombre de candidats inscrits était de 542. Le nombre de dossiers non parvenus aux rapporteurs est de 132. Sur les 410 dossiers examinés, 284 candidats ont été qualifiés (soit 69%, proportion stable depuis au moins trois ans). Environ les trois-quarts des refus de qualification sont justifiés par une inadéquation de la candidature au domaine disciplinaire recouvert par la section.

Comme les années passées, deux critères importants ont été utilisés dans l'évaluation des dossiers, en particulier pour les candidats dont le parcours ne s'inscrivait pas de façon canonique dans les thématiques de la section.
1. L'aptitude à enseigner les mathématiques.
2. L'activité scientifique. Dans les domaines d'application des mathématiques, cette activité ne doit pas se limiter à une description de modèles classiques et une utilisation de méthodes et algorithmes éprouvés. L'évaluation prend en compte l'apport méthodologique, la mise en place de modèles originaux, le développement de nouveaux algorithmes, la validation par des applications réalistes.

Recommandations aux candidats (et aux directeurs de thèse)

[1] Emmanuel Lesigne, François Golse, Bernard Gleyse et Olivier Raimond, mai 2006

Le dossier de candidature doit faire apparaître clairement :
- La capacité à enseigner les mathématiques dans un cursus de Licence de Mathématiques. - Un travail de recherche en mathématiques appliquées. L'utilisation d'un outil mathématique standard dans un travail de recherche relevant d'une autre discipline ne semble pas suffisante à elle seule pour la qualification en Section 26.
- Une activité liée à la recherche en mathématiques appliquées dans la période précédant la demande de qualification.

Le dossier de candidature doit être présenté avec soin et clarté. Nous demandons que les rapports préalables à la soutenance de thèse de doctorat soient joints au dossier (quand ils existent et sont publics, ce qui est le cas des doctorats français). Le dossier doit contenir un CV détaillé, les références complètes des travaux du candidat, et au minimum quelques-uns de ceux-ci.

La présence d'une publication dans une revue à comité de lecture n'est pas exigée pour les thèses récentes. Mais elle représente un élément d'appréciation décisif pour les thèses plus anciennes. La publication d'un article en seul auteur, ou sans son directeur de thèse, peut être un élément positif d'appréciation.

En ce qui concerne les candidats dont la formation et/ou la mention du doctorat ne relèvent pas des mathématiques (informatique, biologie, physique, mécanique, traitement du signal, économie,...), il est impératif qu'une large part du dossier de qualification soit consacrée à la mise en évidence :
- de la part des mathématiques dans leur formation initiale ;
- de leur contribution scientifique dans le domaine des mathématiques appliquées.
Pour les candidats titulaires d'un doctorat récent, il est naturel d'attendre qu'un ou plusieurs membres du jury de thèse, et si possible un des rapporteurs, relèvent de la section du CNU dans laquelle le candidat demande la qualification. (Cette condition n'est bien sûr pas absolue).

Enfin, signalons l'existence de guides édités par les sociétés savantes (livret du candidat SMF-SMAI, voir `http://www.emath.fr`) qui donnent des conseils très utiles aux candidats sur les postes universitaires.

Qualifications aux fonctions de Professeur

Le nombre de candidats inscrits était de 155. Le nombre de dossiers non parvenus aux rapporteurs est de 37. Sur les 118 dossiers examinés, 96 candidats ont été qualifiés (soit 81%, proportion en hausse par rapport aux années précédentes). Plus d'un refus de qualification sur deux est justifié par une inadéquation de la candidature au domaine disciplinaire recouvert par la section.

Les points essentiels examinés dans un dossier de candidature à la qualification aux fonctions de Professeur sont les suivants :
- La capacité à enseigner les mathématiques dans un cursus de Master de Mathématiques.
- Un travail de recherche significatif en mathématiques appliquées, avec une activité avérée dans la période récente.
- La démonstration d'une réelle autonomie scientifique.
- L'aptitude à l'encadrement et à la direction de recherches.

Sur la base de ces critères, la majorité des dossiers examinés ne posait aucun problème.

Remarque sur la procédure

Nous devons attirer l'attention des futurs candidats à la qualification sur le fait que la procédure administrative a changé cette année : les candidats doivent consulter le site internet du ministère (application ANTARES) entre le 15 novembre et le 14 décembre pour connaître le nom des rapporteurs auxquels ils doivent envoyer leur dossier. Cette information ne leur est pas envoyée personnellement. L'inscription aura été effectuée préalablement (entre le 11 septembre et le 15 octobre) via l'application ANTARES. Les dates données ici sont celles de la campagne de qualification 2007. L'arrêté d'organisation de cette campagne est paru au Journal Officiel n° 110, du 12 mai 2006.

Promotions

Nous donnons dans cette section un bilan du travail du CNU sur les promotions en 2006, auquel nous avons ajouté un bilan des promotions locales l'année précédente.

Pour les promotions, le CNU doit gérer la pénurie. Il ne fait aucun doute pour chacun des membres du Conseil que le nombre de promotions offertes est faible par rapport au nombre de collègues pouvant légitimement y prétendre pour la qualité de leur travail scientifique, de leur investissement pédagogique et des services rendus à la communauté dans l'administration de la recherche ou de leurs établissements.

Les dossiers de candidature à une promotion doivent contenir un descriptif de l'ensemble de la carrière (et non des trois dernières années, comme c'est demandé par l'administration). À côté du CV et de la liste complète des travaux (classés par type de publication), le dossier doit comporter des informations précises sur les activités pédagogiques, administratives, et les services rendus à la communauté universitaire.

Chaque dossier de candidature est examiné par deux rapporteurs du CNU, désignés par le bureau, après consultation du bureau élargi.

Promotions à la hors-classe des MCF

Nombre de promotions offertes : 12
Nombre de collègues promouvables : 295
Nombre de candidats : 122
Liste des promus :

Bahlali Khaled (Toulon), Barbolosi Dominique (Aix-Marseille III), Blumenthal Serge (Paris V), Bronner Alain (IUFM Montpellier), Castella (ép. Guillot) Corinne (IUFM Rouen), Driollet (ép. Aregba) Denise (Bordeaux I), Ducret (ép. Comte) Myriam (Paris VI), Jolivaldt Philippe (Paris I), Merrien Jean-Louis (INSA Rennes), Morel Guy (Tours), Salaun Michel (CNAM Paris), Tomasik Jerzy (Clermont I).

Nous encourageons nos collègues promouvables à éviter une autocensure excessive.

Pour les promotions à la hors-classe, le CNU examine l'ensemble d'une carrière de MCF. À côté du travail de recherche et de l'activité d'enseignant, un investissement particulier dans le domaine pédagogique ou au service de la communauté scientifique est apprécié. Un objectif de ces promotions étant d'offrir une fin de carrière valorisée à des collègues méritants, le CNU est vigilant à une juste répartition des âges des collègues promus.

L'âge moyen des promus est 51 ans. Les âges s'étendent de 43 à 59.

Promotions à la première classe des PR

Nombre de promotions offertes : 15

Nombre de collègues promouvables : 289

Nombre de candidats : 148

Liste des promus :

Borouchaki Houman (Troyes), Cardaliaguet Pierre (Brest), Caspi (ép. Girault) Vivette (Paris VI), Chassaing Philippe (IUFM de Lorraine), Delecroix Michel (Toulouse I), Delyon Bernard (Rennes I), Hamel François (Aix-Marseille III), Hess Christian (Paris IX), Mokhtar Kharroubi Mustapha (Besançon), Pham Dinh Tao (INSA Rouen), Seppecher Pierre (Toulon), Sonnendrucker Eric (Strasbourg I), Touzi Nizar (Paris I), Vieu Philippe (Toulouse III), Volny Dalibor (Rouen).

Pour l'examen des promotions à la première classe des professeurs, le CNU dégage de chaque dossier de candidature les éléments suivants :
- domaine scientifique, âge et ancienneté comme professeur,
- faits marquants de la carrière, distinctions scientifiques,
- responsabilités diverses (direction d'équipe, de projet ou d'établissement, responsabilités pédagogiques, activités éditoriales, appartenance à différentes commissions,...),
- activité scientifique (nombre et qualité des publications, communications),
- valorisation de la recherche, collaborations extra-mathématiques,
- encadrement doctoral (thèses encadrées et devenir des docteurs).

Les candidats sont invités à mettre clairement ces éléments en avant dans leurs dossiers.

Le CNU veille à une répartition équilibrée des sous-disciplines (analyse des EDP et analyse numérique, calcul scientifique, didactique, optimisation, probabilités, statistiques) qui n'exclut pas les dossiers transversaux ou atypiques.

L'âge moyen des promus est 48 ans. Les âges s'étendent de 35 à 63.

Promotions au 1er échelon de la classe exceptionnelle des PR

Nombre de promotions offertes : 7

Nombre de collègues promouvables : 194

Nombre de candidats : 86

Liste des promus : Bourgeat Alain (Lyon I), Cornet Bernard (Paris I), Damlamian Alain (Paris XII), Derriennic Yves (Brest), Méléard Sylvie (Paris X), Sorin Sylvain (Paris VI), Tsybakov Alexandre (Paris VI).

Le CNU attend des candidats à une promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle qu'ils aient fait preuve de compétences exceptionnelles dans les différentes missions d'un professeur des universités, que ce soit par l'excellence de leurs travaux de recherche, ou en jouant un rôle majeur dans la communauté scientifique en termes d'encadrement, de diffusion et de structuration de la recherche.

L'âge moyen des promus est 56 ans. Les âges s'étendent de 48 à 64.

Promotions au 2nd échelon de la classe exceptionnelle des PR

Nombre de promotions offertes : 4

Nombre de collègues promouvables : 46

Nombre de candidats : 15

Liste des promus : Birgé Lucien (Paris VI), Brauner Claude Michel (Bordeaux I), Penot Jean-Paul (Pau), Véron Laurent (Tours).

Parmi les candidats dont le dossier démontre une activité soutenue dans les différentes missions dévolues aux professeurs d'université, le critère essentiel pour le changement d'échelon est l'ancienneté dans la classe exceptionnelle, ainsi que l'âge.

L'âge moyen des promus est 59 ans. Les âges s'étendent de 56 à 64.

Promotions locales 2005

Les sections du CNU ne distribuent que la moitié (49,5%) des promotions ouvertes aux enseignants-chercheurs. (Ces promotions sont distribuées entre sections du CNU proportionnellement au nombre de promouvables.) Les autres promotions sont attribuées par les établissements d'enseignement supérieur.

Le commentaire publié l'an dernier est encore d'actualité. Nous le répétons mot pour mot. « On pourrait s'attendre à observer, discipline par discipline, un équilibre entre les nombres de promotions nationales et locales. Or en mathématiques, et particulièrement en 26^{e} section, le nombre de promotions locales reste assez nettement inférieur au nombre de promotions nationales. Ce fait a été clairement décrit et dénoncé par le CNU précédent (cf. le bilan 2003). Il faudrait analyser en profondeur les raisons du manque de reconnaissance locale des mathématiciens dans l'Université Française. Il est difficile de croire que le manque de qualité scientifique en soit la cause principale. »

Le bilan des promotions locales 2006 n'est pas encore disponible, mais voici le bilan des promotions locales en 2005 dans notre section.

Hors-Classe des Maîtres de Conférences

12 promotions avaient été attribuées par le CNU. 7 promotions ont été obtenues localement. Voici la liste des promus : Beguin Maryse (INP Grenoble), Duval Victor (Paris VI), Normand Myriam (Saint-étienne), Payet Charles André (La Réunion), Raynaud de Fitte Paul (Rouen), Romain Yves (Toulouse III), Terracher Pierre (Bordeaux I).

Première classe des professeurs

14 promotions avaient été attribuées par le CNU. 11 promotions ont été obtenues localement. Voici la liste des promus : Agnan (ép. Thomas) Christine (Toulouse I), Cannone Marco (Marne la Vallée), Carbon Michel (Rennes II), El Badia Abdellatif (Compiègne), Ionescu Ioan (Chambéry), Rao Bopeng (Strasbourg I), Sadok Hassane (Calais), Seeger Francisco (Avignon), Sofonea Mircea (Perpignan), Touzani Rachid (Clermont II), Vanderbeck François (Bordeaux I),

Classe exceptionnelle des professeurs

Le CNU avait attribué 4 promotions au premier échelon de la classe exceptionnelle. 5 promotions ont été obtenues localement. Voici la liste des promus : Berlinet Alain (Montpellier II), Cottrell Marie (Paris I), Sallet Gauthier (Metz), Woimant (ép. Elie) Laure (Paris VII), Yvon Jean-Pierre (INSA Rennes).
Le CNU avait attribué 3 promotions au second échelon de la classe exceptionnelle. Il y a eu 2 promotions locales : Bernard Pierre (Clermont II), Maday Yvon (Paris VI).

Congés pour recherche ou conversion thématique, pour l'année 2005-2006

Le nombre de semestres de CRCT que le CNU pouvait attribuer cette année est 8. Ce nombre est ridiculement faible par rapport au nombre de semestres demandés (plus de 100 dans notre section cette année), et à la qualité des projets annoncés.

Le CNU a proposé d'accorder un semestre de CRCT à :
Addi Khalid (MdC, La Réunion), Francq Christian (Prof., Lille III), Hillairet (ép. Chainais) Claire (MdC, Clermont II), Ionescu Ioan (Prof., Chambéry), Rainer Catherine (MdC, Brest), Saut Jean-Claude (Prof., Paris XI), Simon Thomas (MdC, Evry), Vallois Pierre (Prof., Nancy I).

Bilan des sessions 2006 du CNU, section 25

Michel Olivier, Isabelle Chalendar

Voici les résultats des sessions 2006 (qualifications, promotions et CRCT) du CNU 25.

Session de qualifications

La session s'est tenue du 1er au 3 février 2006, à l'Institut Henri Poincaré. Les listes des qualifiés sont consultables sur le site du CNU 25, à l'adresse suivante : `http://cnu25.emath.fr`

Maîtres de Conférences

355 candidats à cette qualification ont rempli l'application ANTARES (328 en 2005) ; parmi eux, 2 ont transmis leur dossier hors délai et 65 n'ont pas envoyé de dossier aux rapporteurs. Le CNU 25 a donc délibéré sur 288 dossiers de demande de qualification (278 en 2005 et 270 en 2004).

71 candidats, soit 25% (contre 20% en 2005 et 2004), n'ont pas été qualifiés aux motifs suivants : 50 ont été jugés hors section (31 en 2005) ; 21 ont été jugés de niveau scientifique insuffisant, en particulier pour cause d'absence de travaux récents (i.e. durant les quatre dernières années).

Le CNU 25 a donc qualifié 217 candidats (223 en 2005) pour 54 postes de MCF mis au concours en 2006. Parmi les qualifiés 41 (soit 19%) sont des femmes, 35 (soit 16%) des qualifiés possèdent un diplôme étranger (hors thèse en cotutelle), contre 15% en 2005.

Sur les 355 candidats, 142 ont demandé la qualification en section 25 et en section 26 ; parmi ces derniers 56 ont obtenu la double qualification (11 ont été qualifiés en 25 et 27). La quasi-totalité des non-qualifiés en 25 l'a été pour le motif « hors section » ; ils ont été qualifiés en 26. Signalons que 3 candidats ont obtenu la qualification en 25, 26 et 27 ; 2 ont été qualifiés MCF et PR en 25, et un candidat a obtenu quatre qualifications (MCF et PR en 25 et 26).

Professeurs

159 candidats ont renseigné l'application ANTARES (126 en 2005), 34 n'ont pas transmis de dossier à leur rapporteur. Le CNU 25 a donc examiné 125 candidats (112 en 2005 et 105 en 2004).

103 d'entre eux ont été qualifiés PR (89 en 2005) ; 22 n'ont pas été qualifiés (17%) aux motifs suivants : 6 ont été jugés hors section et 16 ont été jugés de niveau scientifique insuffisant.

28 postes PR ont été mis au concours en 2006. Parmi ces qualifiés, 12 (soit 11,6%) sont des femmes, 31 (soit 30%) des qualifiés ont une thèse étrangère (idem en 2005). En ce qui concerne les PR, les candidatures étrangères ont atteint un niveau stable et important.

45 dossiers communs avec la section 26 ont été examinés ; 21 ont obtenu la double qualification 25 et 26 (3 la double qualification 25 et 27). Les refus de qualification en section 25 sont pour le motif « hors section ». Un candidat a été qualifié en 25, 26 et 27.

Recommandations aux candidats

Depuis l'an dernier, les candidats doivent consulter ANTARES avant une date butoir (le 14 décembre pour la campagne 2007) pour connaître les noms de leurs rapporteurs. Cette procédure a échappé à quelques-uns (heureusement peu nombreux) avec des conséquences désastreuses pour certains.

Le décret prévoit que le dossier doit comporter un ensemble de documents transmis par courrier, et donc sur papier. Eviter de transmettre aux rapporteurs des documents sur support électronique par mél.

Si le texte officiel prévoit la transmission du rapport de soutenance, il ne prévoit pas d'envoyer les rapports scientifiques des arbitres sur la thèse ou l'habilitation. Le CNU 25 recommande aux candidats de communiquer ces documents aux rapporteurs. La question ne se pose évidemment pas pour les candidats étrangers venant de pays où les rapports sont confidentiels.

Pour les candidats à la qualification MCF, la publication de premiers articles scientifiques cosignés par le candidat et son directeur de thèse est peu appréciée des membres du CNU 25 ; ces derniers peuvent légitimement s'interroger sur la contribution originale réelle du candidat.

La publication dans une revue internationale à comité de lecture n'est pas exigée par le CNU 25 pour les jeunes titulaires d'une thèse de l'année précédant la demande de qualification. Toutefois, en l'absence de publication, le CV du candidat doit clairement permettre aux rapporteurs de se faire une idée précise de la contribution scientifique du candidat dans son domaine de recherche.

Il est naturel d'attendre que le jury de thèse comporte au moins un membre relevant de la section dans laquelle la qualification est demandée. Dans le cas contraire, le dossier du candidat doit clairement mettre en évidence des travaux relevant de la section 25.

Si l'activité de recherche récente est privilégiée dans l'examen du dossier, le candidat est encouragé à décrire dans son CV son expérience en matière d'enseignement des mathématiques.

Signalons pour finir l'excellent et utile site de la SMF-SMAI (`www.emath.fr`) où les candidats peuvent trouver toutes les précisions et conseils nécessaires (y compris le site du CNU 25).

Session de promotions

Cette session s'est tenue du 9 au 11 mai 2006 à l'IHP.

Nous donnons ci-après le nombre de notices individuelles déposées auprès du CNU 25, le nombre de promotions à répartir dans chaque grade et corps, avec, entre parenthèses, les chiffres analogues des années 2005 et 2004 dans cet ordre.

Pour la hors classe des MC, le CNU a reçu 74 notices (88, 86) pour 11 promotions à décerner (11, 13).

Pour l'accès au grade de PR1, 102 notices (121, 135) pour 11 promotions (11, 11) ; pour l'accès au grade de PR CE1, 67 notices (79, 86) pour 7 promotions (4, 5) ; et enfin pour l'accès au grade de PR CE2, 16 notices (20, 20) pour 5 promotions (4, 3).

Ont donc été promus, à compter du 1er septembre 2006, dans les grades suivants :

MC hors classe

Badra Abdallah, Clermont II ; Berger Clemens, Nice ; Bouche Thierry, Grenoble I ; Grellier Sandrine, Orléans ; Hoff Georges, Paris XIII ; Kraus Alain, Paris VI ; Lancien Gilles, Besançon ; Landreau Bernard, Angers ; Laurent Pascal, Paris, École Centrale ; Morillon Marianne, La Réunion ; Zarrabi Mohamed, Bordeaux I.

PR première classe

Berger Roland, Saint-Etienne ; Bugeaud Yann, Strasbourg I ; Carron Gilles, Nantes ; Enriquez Benjamin, Strasbourg I ; Fan Ai Hua, Amiens ; Grebert Benoit, Nantes ; Karpenko Nikita, Artois ; Kowalski Emmanuel, Bordeaux I ; Mathias Adrian, La Réunion ; Peigne Marc, Tours ; Planchon Fabrice, Paris XIII.

PR classe exceptionnelle, 1er échelon

Arnoux Pierre, Aix-Marseille II ; Coulhon Thierry, Cergy-Pontoise ; Delort Jean-Marc, Paris XIII ; Dimca Alexandru, Nice ; Tilouine Malek, Paris XIII ; Torasso Pierre, Poitiers ; Viterbo Claude, Paris XI.

PR classe exceptionnelle, 2e échelon

Carayol Henri, Strasbourg I ; Cassou Nogues Philippe, Bordeaux I ; Dehornoy Patrick, Caen ; Petkov Vesselin, Bordeaux I ; Thiebaut Christine, Grenoble I.

Congés pour recherches ou conversions thématiques (CRCT)

Comme en 2005, pas de liste supplémentaire. La pression des demandes de CRCT au niveau national est énorme et a amené le CNU 25 à voter une motion transmise au ministère : en cette année 2006, 59 candidats pour 7 semestres à distribuer (43 pour 7 en 2005). Il a été convenu de distribuer 4 semestres aux candidats MCF et 3 aux candidats PR.

Le CNU 25 s'efforce de classer les candidats selon des critères « objectifs » communs : travaux depuis 2001, responsabilités collectives récentes, projet de recherche, organisation de colloques, préparation HDR pour les MC, etc....

En fonction de ce classement, un semestre CRCT a été attribué à :

Auscher Pascal, Paris XI ; Barkatou Moulay, Limoges ; Lustig Martin, Aix-Marseille III ; Bonino Marc, Paris XIII, IUT ; Gautero François, Clermont II ; Keraani Sahbi, Rennes I ; Pellarin Fédérico, Caen.

Transformations Assistants-MCF

La commission nationale de transformation des assistants en MCF qui siège depuis quatre ans a été réunie, malgré le souhait contraire de ses membres, cette année 2006. Aucun candidat ne s'est déclaré en section 25 ; les membres des sections 25 et 26 ayant, les années précédentes, transformé tous les candidats relevant de la section 25.

Remarques conclusives

Cette période de profonds changements qui touchent à l'organisation de la recherche française (pacte pour la recherche, ANR, AERES, HCS, regroupements de laboratoires, etc...) est toujours marquée par la pénurie, notamment en matière de promotions.

Nombreux sont les collègues qui méritent une promotion que le CNU ne peut satisfaire. Le nombre de qualifiés, notamment MCF, est sans rapport avec le nombre de postes mis au concours. Or, la qualité des dossiers présentés est d'un niveau élevé, voire pour certains, très élevé. Le CNU 25 gère donc la pénurie du mieux qu'il peut.

Enfin, le bureau du CNU 25 se félicite encore cette année de la sérénité et du sérieux qui règnent au sein de notre assemblée durant nos sessions. Le bureau remercie aussi les personnels de l'IHP qui nous accueillent dans leurs locaux avec dévouement et gentillesse.

Section 01 du Comité National Compte rendu de la Session de Printemps 2006 et Concours 2006

Fabrice Planchon

Session de printemps (février 2006)

Présents : Laumon, André, Baladi, Cellier, Trouvé, Sabbah, Nier, Welschinger, Beffara, Planchon, Jouve, Comets, Flavigny, Esteban, Franjou, Fougeres, Sorger, Montchanin, Baraud.

Assistaient également en partie à la session, C. Peskine, DSA pour les mathématiques, M. Enock, chargé de mission au département scientifique, et pour l'examen des laboratoires, Aline Bonami (MSTP).

- Élection d'un membre en remplacement de Lucia DiVizio, démissionnaire : Jean-Yves Welschinger est élu.

- Intervention de Michel Lannoo, Directeur scientifique du département MIPPU, et échange de points de vue sur les évolutions en cours (le compte-rendu qui suit tient compte d'éléments postérieurs à la session).

La nouvelle direction souhaite conserver les éléments positifs de la réforme. La nouvelle présidente souhaite que la science soit replacée au centre des préoccupations, et le département scientifique est le lieu naturel pour cela. On conserve un principe organisationnel : pour chaque laboratoire, un DSA principal qui est du département scientifique de rattachement principal, et d'où la dotation financière vient ; i.e. dans les laboratoires pluridisciplinaires il n'y a plus qu'une seule source. L'avenir des DIR est actuellement à l'étude, avec l'idée que les DIR jouent le rôle d'émissaires de haut niveau (avec le monde universitaire, les collectivités locales...). Ceci n'a de sens que pour des grands dossiers, en collaboration avec les DSA. Le département MIPPU devient MPPU, les informaticiens ayant exprimé le souhait de rejoindre le département d'ingénierie. Les instituts (IN2P3 et INSU) font partie du département, même si l'interaction avec eux reste à définir. Les questions de labelisation des laboratoires (« labos liés ») n'est plus à l'ordre du jour, et la politique de regroupement d'unités n'a de sens que lorsqu'il y a un projet scientifique de concert avec les unités concernées.

En ce qui concerne les questions d'évaluation, on attend les décrets de mise en place de l'AERES. Dans un premier temps, l'agence devrait de toute façon déléguer l'organisation des CEs au CNRS pour les unités associées, donc il n'y a pas de changement au moins pour 2007 en ce qui concerne l'évaluation des laboratoires dépendant de 01, qui fonctionne plutôt bien.

- Reconstitutions de carrière approuvées.

- Évaluation biennale des chercheurs et quadriennale des unités.

Unités : PPS, IRMA, Chambéry, Logique (P7), Institut Fourier, LMC, Mathdoc, Dijon, Montpellier, UMPA, Bordeaux, Toulouse, Pau, CMLS, CMAPX, avis favorable.

Institut Camille Jordan : à revoir à la session d'automne.

FR Angers-Nantes (création) avis favorable.

GDR MOMAS (mi-parcours) avis favorable.

CREA, changement de directeur, ne se prononce pas.

- Cas particuliers : la section donne un avis favorable aux diverses demandes présentées (notamment de détachement). Elle rappelle cependant que pour faciliter le travail des rapporteurs, il est important de joindre à toute demande une version à jour de son CV et un bref compte-rendu de l'activité récente, ainsi qu'un exposé des motivations (notamment scientifiques !) de la demande. Enfin, il importe de faire ces demandes dans un délai raisonnable avant les sessions (dont les dates sont publiques), pour éviter la désagréable impression de fait accompli. Les mêmes règles de bon sens valent également pour les demandes de type « renouvellement ».

Concours 2006, session d'admissibilité

Présents : Laumon, André, Baladi, Cellier, Trouvé, Sabbah, Nier, Welschinger, Planchon, Jouve, Comets, Esteban, Franjou, Fougeres, Sorger, Beffara (à l'exception du concours 01/04).

Le concours 2006 a vu des effectifs en augmentation sur le concours CR, où la limite d'âge a été supprimée. Il y avait environ 80 candidats au concours 01/01 (6 postes de DR), une trentaine au concours 01/02 (1 poste de DR fléché thématiquement), une cinquantaine au concours 01/03 (2 postes de CR1), environ 260 au concours 01/04 (11 postes de CR2) et une cinquantaine au concours 01/05 (1 poste de CR2 fléché thématiquement, pour affectation dans un laboratoire de la section 07). La pression est donc considérable à tous les niveaux et le jury s'est efforcé de constituer des listes respectant l'intégralité des critères qu'il s'était fixé. Les nombreuses thématiques présentes dans les listes finales reflètent la qualité et la diversité des mathématiques françaises, et à travers les candidats étrangers d'excellent niveau, l'attractivité du CNRS en mathématiques par-delà les frontières.

D'un point de vue organisationnel, la généralisation des dossiers électroniques est, pour le jury, bienvenue et à encourager vivement : un dossier électronique complet permet au candidat de faire connaître l'intégralité de son dossier à tous les membres du jury, contrairement au dossier papier dont la quasi-totalité des pièces ne seront consultées que par les rapporteurs. En ce qui concerne le concours CR, les candidats sont vivement encouragés à joindre au dossier les rapports de thèse, lorsqu'ils en disposent, par exemple dans la rubrique « documents divers » : en effet, en mathématiques, le rapport de soutenance apporte peu d'information, contrairement à la pratique d'autres disciplines. Enfin, postuler sur l'un ou l'autre des concours fléchés ne doit pas dissuader de concourir sur le concours général correspondant, bien au contraire (ce point s'applique au niveau CR et DR).

Astérisque 304

Random Surfaces

Scott Sheffield

Nous étudions de manière générale les modèles discrets et continus de fonctions de hauteur aléatoires définies via des potentiels Gibbsiens qui ne dépendent que des différences locales de hauteur. Nous caractérisons les mesures de Gibbs associées qui sont ergodiques par rapport à l'action d'un sous-réseau (et d'énergie libre spécifique finie) comme minimiseurs de cette énergie libre spécifique, et nous démontrons des principes de grandes déviations pour les mesures empiriques ainsi que les formes des surfaces. Pour des interactions convexes de plus proche voisin, nous montrons que ces mesures de Gibbs sont caractérisées par leurs pentes et (dans les cas de plus grande dimension) un paramètre supplémentaire. Pour les modèles de dimension 2+1 de surfaces de cristaux, nous montrons que toutes les pentes des mesures lisses (les facettes) sont dans le dual du réseau par rapport auquel le modèle est invariant par translation.

We develop a general theory of discrete and continuous height models governed by Gibbs potentials that depend only on height differences. We characterize the gradient phases of a given slope as minimizers of specific free energy and give large deviations principles for surface shapes and empirical measures. For convex, nearest neighbor Gibbs potentials, we show that gradient phases are characterized by their slopes -and (in higher dimensional discrete settings) one additional parameter. For standard 2+1 dimensional crystal surface models, we show that all smooth phases (a.k.a. facets) lie in the dual of the lattice of translation invariance.

prix public* : 26 € - prix membre* : 18 €
* frais de port non compris

Société Mathématique de France

SMF

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

http://smf.emath.fr

LIVRES

Prediction, Learning, and Games
NICOLÒ CESA-BIANCHI, GÁBOR LUGOSI
Cambridge University Press, 2006. 406 p.
ISBN : 0-521-84108-9. $ 65

Cet ouvrage dresse l'état de l'art dans un domaine de recherche en pleine expansion, à la croisée des chemins de la théorie de l'apprentissage, de la statistique, de la théorie des jeux et de celle de l'information ; il présente également quelques points de vue ou résultats nouveaux. Le spectre des applications considérées (ou des applications potentielles) est large, de la compression de données à l'investissement dans le marché boursier, en passant par la reconnaissance de formes.

L'exposé se concentre sur différentes variantes d'un problème générique de prédiction séquentielle, dont voici un énoncé, tiré de l'introduction d'un article de revue, en français, écrit par Gábor Lugosi pour le *Journal de la Société Française de Statistique* (et traduit par mes soins). Dans la version la plus simple de ce problème, le prévisionniste observe, l'un après l'autre, les éléments d'une suite $y_1, y_2, \ldots$ de symboles (à valeurs dans un ensemble donné, fini ou infini). À chaque tour $t = 1, 2, \ldots$, avant que le t-ième symbole de la suite ne soit dévoilé, le pronostiqueur essaie de deviner sa valeur y_t en se fondant sur les $t - 1$ observations précédentes.

Dans la théorie statistique de l'estimation séquentielle, on suppose classiquement que les éléments de $y_1, y_2, \ldots$ sont les réalisations d'un certain processus stochastique (par exemple, stationnaire). Il s'agit alors d'estimer les caractéristiques de ce processus ; on en déduit ensuite des règles de prédiction efficaces. Dans un tel contexte, le risque d'une règle de prédiction peut être défini comme l'espérance d'une certaine fonction de perte mesurant l'écart entre la valeur prédite et le vrai résultat ; on compare différentes règles *via* le comportement de leurs risques.

On abandonne ici cette hypothèse essentielle de génération des résultats par un processus stochastique sous-jacent, et on voit la suite $y_1, y_2, \ldots$ comme le produit d'un certain mécanisme, inconnu, non spécifié (et qui pourrait être déterministe, stochastique, ou même dynamique et antagoniste). On appelle souvent cette approche prédiction de suites individuelles, pour l'opposer à celle qui procède par une modélisation stochastique préliminaire. Sans modèle probabiliste, on ne peut toutefois pas définir de notion de risque, et fixer les objectifs de la prédiction n'est pas de toute évidence.

Dans une présentation très simplifiée du modèle de prédiction randomisé étudié aux chapitres 4 à 7 de ce livre, le pronostiqueur choisit à chaque pas une action $i \in \{1, \ldots, N\}$ parmi N actions, et lorsque le résultat est y_t, il essuie une perte $\ell(i, y_t)$ où ℓ est une certaine fonction de perte, à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. La performance de sa stratégie est comparée à celle du meilleur pronostiqueur "constant", c'est-à-dire, à celle de l'action fixe i qui, parmi toutes les autres, obtient la moindre perte cumulée lors des n tours de prédiction. On appelle regret la différence entre la perte cumulée du pronostiqueur et celle d'une action constante, simplement parce qu'il mesure combien le pronostiqueur regrette, rétrospectivement, de ne pas avoir suivi cette action précise. Ainsi, il cherche à commettre (presqu') aussi peu d'erreurs que la meilleure stratégie constante. Son idéal est que son regret, rapporté au nombre de pas du problème, converge vers zéro.

Comme la suite des résultats est complètement arbitraire, il est immédiat que pour toute stratégie de prédiction déterministe, il existe une suite de résultats $y_1, \ldots, y_n$ telle que le pronostiqueur ait choisi à chaque tour l'action la pire ; aucune borne sensée ne peut donc être obtenue sur le regret d'une telle stratégie. Cela peut paraître étonnant, mais dès qu'on autorise le pronostiqueur à recourir au hasard (c'est-à-dire qu'il peut lancer une pièce avant de former sa prédiction), la situation change du tout au tout ; l'introduction d'un aléa dans le choix final est un outil extrêmement puissant.

Ainsi, parce que l'on joue contre un adversaire potentiellement dynamique et antagoniste, le caractère stochastique qui n'apparaissait pas dans la détermination de la suite d'éléments à prédire se retrouve dans la stratégie du prévisionniste.

La première mention des problèmes de prédiction randomisée de suites arbitraires remonte aux années 50, et plus précisément aux travaux de Hannan (1957) et Blackwell (1956), qui ont formulé leurs résultats dans un cadre nommé « problèmes de décisions multiples séquentielles ». Cover (1965) figure également parmi les pionniers du domaine ; en 1991, il a proposé un algorithme d'investissement dans le marché boursier lié aux techniques de suites individuelles. Le problème de la prédiction séquentielle, tel que démuni de toute hypothèse de nature probabiliste, est intimement lié à la compression de suites individuelles de données en théorie de l'information. Les recherches d'avant-garde dans ce domaine ont été menées par Ziv (1978, 1980) et Lempel et Ziv (1976, 1977) ; ils ont résolu la question de compresser une suite individuelle de données presqu'aussi bien que le meilleur automate fini. Le paradigme de la prédiction de suites individuelles a été étudié également en théorie de l'apprentissage, où Littlestone et Warmuth (1994) et Vovk (1990) ont introduit le problème.

Cependant, jusqu'au milieu des années 90, les développements se sont effectués de manière parallèle dans ces disciplines, et les chercheurs des différentes communautés ont alors réalisé qu'ils avaient beaucoup à apprendre les uns des autres. Des articles de recension et de mise en perspective (Feder, Merhav et Gutman, 1992, Foster et Vohra, 1999) et des livres de synthèse (Fudenberg et Levine, 1998) ont jeté les premiers ponts. En 2001, Gábor Lugosi a donné une série de cours à l'IHP, dans le cadre d'un semestre de statistique, à propos de la prédiction de suites individuelles.

Les notes de ces cours ont été le premier jet de ce livre, dont la clarté d'exposition doit ainsi autant à la confrontation avec des étudiants (dont l'auteur de cette recension, pendant son DEA et sa thèse) qu'aux qualités personnelles des auteurs (les deux précédents ouvrages de Gábor Lugosi, *A Probabilistic Theory of Pattern Recognition* et *Combinatorial Methods in Density Estimation*, ont été et sont encore de véritables *best-sellers*).

Avant de décrire plus en détail le contenu mathématique du livre, on s'arrêtera sur la couverture, inspirée par la broderie *Venti cinque per venti cinque...* d'Alighiero Boetti, et sur l'organisation formelle de l'ouvrage, en douze chapitres et un appendice. À l'intérieur d'un chapitre, tous les résultats sont prouvés et discutés ; la lecture est rendue fluide par le regroupement à la fin du chapitre des remarques et crédits bibliographiques ; enfin, une série d'une vingtaine d'exercices, dont la moitié indique sans les prouver des extensions plus ou moins immédiates de résultats prouvés dans le livre, clôt chaque chapitre. Tout au long du manuscrit, les algorithmes et stratégies de prédiction sont mis en valeur et formulés dans des encadrés, ce qui facilite la lecture et l'analyse ; par ailleurs, les premiers chapitres contiennent quelques illustrations. On peut regretter l'énoncé théorique des méthodes sans validation pratique ou illustration sur des données réelles de leur efficacité ou pertinence ; cependant, les remarques bibliographiques indiquent les articles dans lesquels ces études ont été conduites. Il faut noter également que les auteurs mettent régulièrement à jour sur leur site une table des errata.

Le chapitre 1 est une brève introduction historique et il présente un cas d'école. Les chapitres 2 et 3 s'intéressent à la prédiction avec avis d'experts à disposition : il s'agit de méta-apprentissage ; on dispose d'un nombre N de stratégies de prédiction fondamentales et on cherche à les combiner efficacement d'une manière séquentielle. Les chapitres 4, 5 et 6 portent sur la prédiction randomisée lorsque soit la classe d'experts de comparaison est très grande mais structurée, soit le retour sur prédiction est peu informatif (on n'accède pas à y_t, mais à une version dégradée, par exemple seulement la perte de l'action jouée). Le chapitre 7 constitue une mise en perspective et une extension des résultats précédents au cadre de la théorie des jeux, i.e., quand plusieurs joueurs mettent en œuvre des stratégies de suites individuelles les uns face aux autres. Les chapitres 8, 9 et 10 s'arrêtent sur deux fonctions de perte particulières, la fonction valeur absolue (avec laquelle on établit au chapitre 8 des résultats théoriques d'optimalité, en exhibant des bornes inférieures sur le regret) et la fonction de perte logarithmique, utilisée aussi bien en théorie de l'information pour compresser des données (chapitre 9) que dans le cadre de l'investissement dans le marché boursier (chapitre 10). Enfin, le livre se clôt sur deux problèmes d'apprentissage, la reconnaissance linéaire de formes (et notamment, le cas particulier de la régression linéaire séquentielle au sens des moindres carrés, chapitre 11) et la classification linéaire (chapitre 12).

Même si l'ouvrage s'adresse à un public de chercheurs ou de futurs chercheurs, il ne demande que très peu de pré-requis. Aucune notion poussée de probabilités n'est mobilisée (un niveau M1 suffit largement) ; les preuves d'ailleurs sont souvent assez simples, et requièrent plus d'idées que de technique.

En conclusion, je ne saurais que vous recommander cette synthèse remarquable et enthousiaste d'un domaine en plein essor, qui se lit et s'apprécie comme un roman de la rentrée littéraire. C'est déjà lui aussi un succès de librairie, et des groupes de travail se montent à divers endroits, notamment à Berkeley, pour l'étudier. Pour une présentation plus vivante, je vous invite à venir écouter les auteurs, qui seront professeurs invités à l'Ecole normale supérieure en février 2007 et donneront une série de cours à propos de *Prediction, Learning, and Games*.

Gilles Stoltz,
École Normale Supérieure

La quadrature du cercle, Un problème à la mesure des lumières
M. Jacob
Fayard, 2006. 571 p. ISBN : 2-213-62860-2. 39 €

La quadrature du cercle est la construction, à la règle et au compas, d'un carré ayant la même aire qu'un cercle donné. Le problème date de l'Antiquité grecque, mais l'impossibilité de la quadrature du cercle n'est vraiment établie qu'en 1882 lorsque Lindemann démontre la transcendance du nombre π.

Avant cette date, des mathématiciens, mais surtout des amateurs, ont tenté d'apporter une réponse au problème en proposant des preuves de la possibilité ou de l'impossibilité de la quadrature. Au 18e siècle, l'engouement pour le problème est tel qu'il se traduit par un foisonnement d'écrits de toutes sortes : mémoires, articles, brochures, prospectus, livres de synthèse. Cela explique pourquoi le siècle des lumières est la période retenue par Marie Jacob pour son étude concernant la quadrature du cercle.

Le sujet est traité dans le livre, en sept chapitres, sous trois éclairages différents.

– Les deux premiers chapitres traitent de l'aspect sociologique. On y trouve en particulier une typologie des quadrateurs.
– Les trois chapitres suivants concernent les mathématiques mises en jeu, les différents types de démonstrations, les résultats importants et les erreurs rencontrées.
– Les deux derniers chapitres sont consacrés à l'Académie et aux savants. On y trouve en particulier l'analyse des raisons qui ont conduit l'Académie en 1775 à ne plus accepter les articles concernant la quadrature du cercle.

Dans le livre, quand on parle d'Académie, il s'agit de l'Académie royale des Sciences de Paris. Le mot « savant » s'applique aux académiciens et à leurs proches, alors que le mot « quadrateur », utilisé sans connotation péjorative, concerne ceux qui sans être nécessairement scientifiques, ont écrit sur la quadrature du cercle.

Il suffit de se reporter à l'index, à la fin de l'ouvrage, où l'on trouve la liste des quadrateurs recensés, ou à la bibliographie, pour réaliser l'immense travail accompli pour l'écriture de ce livre. Les sources principales de documentation sont « Histoire et Mémoires de l'Académie royale des Sciences », ouvrage imprimé chaque année, qui donne une image officielle des travaux de l'Académie, ainsi que les procès-verbaux manuscrits établis à chaque séance de l'Académie, accompagnés de lettres, mémoires et commentaires inédits. Il faut également mentionner certains périodiques comme par exemple *Acta eruditorum*, le Journal des Savants ou les Mémoires de Trévoux.

Au début de son étude, Marie Jacob analyse le livre de Jean-Etienne Montucla paru en 1754 sous le titre « Histoire des recherches sur la quadrature du cercle ». On y trouve les approximations de π obtenues par des polygones inscrits et circonscrits au cercle : 22/7 par Archimède, 355/113 par Métius et les 36 chiffres significatifs obtenus par Ludolph Van Ceulen. On y trouve aussi la formule de Machin, $\frac{\pi}{4} = 4\, Arctan\left(\frac{1}{5}\right) - Arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ et les 127 décimales exactes obtenues en 1719 par Lagny qui utilise les nouveaux calculs de développement en série et d'intégration. Dans son livre, Montucla n'est pas tendre au sujet des quadrateurs traités de « vulgaires ignorants » et de « ridicules auteurs de quadrature du cercle ». Le livre de Marie Jacob s'inscrit dans la lignée de celui de Montucla, mais elle trouve que l'approche de Montucla, trop partielle, donne une vision inexacte de la population des quadrateurs. Marie Jacob a recensé plus de 150 quadrateurs à partir desquels elle propose une typologie suivant la profession, la motivation, le niveau des mathématiques utilisées et les erreurs rencontrées. On y trouve une grande diversité tant au niveau des connaissances intellectuelles qu'au niveau social. Un quart des quadrateurs sont des savants (médecins, professeurs, ingénieurs), un quart est composé de religieux, le reste s'équilibre entre juristes, militaires, arpenteurs, négociants et artisans. La motivation principale des quadrateurs semble être la recherche de la gloire personnelle et de la renommée, mais on trouve aussi l'appât du gain car certaines personnes pensaient qu'il y avait un prix attaché à la découverte de la quadrature du cercle. Cette croyance a été entretenue par la confusion entre le problème de la quadrature du cercle et celui de l'amélioration de la détermination des longitudes en mer pour lequel un prix avait bien été créé en Hollande, en Angleterre et ensuite en France en 1720.

Pour donner plus de vie à son étude, Marie Jacob a eu l'excellente idée d'extraire de sa liste de quadrateurs quelques personnages dont elle brosse le portrait avec tout le talent d'une romancière. On découvrira donc le Père Lemuet qui, après avoir annoncé sa quadrature dans le Journal de Verdun, la défendit dans le même Journal pendant plusieurs années, jusqu'à un avis défavorable de l'Académie sur son travail. Il changea alors de Journal et utilisa le Mercure de France. On suivra le professeur de philosophie Basselin pendant presque dix ans dans ses démêlés avec l'académicien Clairaut qui réfute de façon polie mais ferme la quadrature du professeur. On sera surpris par le médecin Mathulon qui dépose chez un notaire lyonnais la somme de 3125 louis d'or à remettre à qui démontrera dans le Journal des Savants que « ledit Mathulon a donné dans l'erreur au sujet de la quadrature du cercle ». C'est l'académicien Nicole qui relèvera le défi. Sur décision de justice, la somme promise sera remise à l'Hôtel-Dieu de Lyon. On lira aussi avec autant de plaisir les aventures de Liger, De la Frainaye et autre Vausenville. Mais le récit le plus romanesque concerne le Chevalier de Causans qui inondera pendant plus de sept ans l'Académie de lettres et de manuscrits et qui publiera nombre de mémoires et prospectus.

Dans la deuxième partie de son livre, Marie Jacob analyse de nombreuses études sur la quadrature. Les démonstrations, souvent accompagnées de figures, sont données avec beaucoup de détails et les erreurs ou paralogismes sont signalés. Les méthodes utilisées reposent souvent sur la géométrie d'Euclide. Elles s'inspirent alors des polygones d'Archimède ou des lunules d'Hippocrate. Elles utilisent parfois de la géométrie dans l'espace en évaluant des volumes obtenus à l'aide de sphères ou de paraboloïdes. Moins élémentaires sont les méthodes qui utilisent le nouveau calcul, le calcul infinitésimal introduit par Newton et Leibnitz.

Concernant les erreurs rencontrées, la plus courante est la confusion entre quadrature exacte et quadrature approchée qui assimile le nombre π avec une de ses approximations. On trouve aussi des erreurs résultant de l'usage de l'infini, en considérant par exemple un cercle comme un polygone ayant une infinité de côtés ou en utilisant l'infini avec une connotation métaphysique et cela malgré l'avis de Fontenelle : « l'infini métaphysique ne peut s'appliquer ni aux nombres ni à l'étendue ». Il y a aussi parfois, comme chez le philosophe polonais Hanovius, une conception atomiste de la notion de point géométrique qui nie la disposition continue des points d'une courbe. Il y a enfin un manque de maîtrise dans l'usage du calcul infinitésimal.

Un problème logiquement équivalent à la quadrature du cercle est celui de « la circulature du carré » : Construire, à la règle et au compas, un cercle ayant le même périmètre qu'un carré donné. En 1640 Descartes trouva une élégante construction géométrique qui conduit à une approximation du diamètre du cercle cherché. La démonstration de Descartes n'étant pas détaillée, Euler reprend le problème en 1763. Sa preuve et ses corollaires figurent dans le livre de Marie Jacob. On y trouve en particulier la formule : $\frac{4}{\pi} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} tan\left(\frac{\pi}{2^{p+2}}\right)$.

Dans le livre figure aussi en bonne place le résultat théorique le plus important obtenu au 18^{e} siècle sur la quadrature du cercle, à savoir, l'irrationalité du nombre π. Jean-Henri Lambert démontre le résultat dans un mémoire de 1767 en utilisant le développement en fraction continue de la fonction tangente. Il obtient en fait, plus généralement que pour $\theta \neq 0$, $tan(\theta)$ rationnel équivaut à θ irrationnel. Il y eut, à l'époque, peu d'écho pour ce résultat. On peut penser que la haute technicité de sa démonstration était incompréhensible au commun des savants. Ce résultat est pourtant une première étape vers l'impossibilité de la quadrature. Il sera complété en 1794 par Legendre qui établit que π^2 est aussi irrationnel, mais il faudra attendre 1882 pour obtenir avec Lindemann la transcendance de π.

La dernière partie de l'ouvrage de Marie Jacob est consacrée à l'Académie. On y trouve en particulier l'analyse des raisons qui ont conduit les académiciens en 1775 à prendre la décision « de ne recevoir, ni examiner aucun mémoire qui ait pour objet la quadrature du cercle ». Ces derniers chapitres sont aussi l'occasion de nous familiariser avec le fonctionnement de l'Académie. On y retrouve des mathématiciens bien connus comme d'Alembert, Bézout, Clairaut, Vandermonde, on en découvre d'autres comme Nicole ou Jeaurat qui ont fait preuve de beaucoup de patience et de pédagogie dans leur travail de rapporteurs sur les mémoires adressés à l'Académie. On peut lire aussi quelques extraits des rapports des académiciens. Par exemple de Clairaut et Montigny : « Il nous donne à choisir de deux choses l'une : ou bien qu'il a trouvé la quadrature du cercle, ou qu'Archimède et tous les géomètres qui l'ont suivi se sont trompés » ; ou bien de d'Alembert : « J'ai examiné cet écrit, qui ne vaut rien ».

Avant de conclure, signalons que la très belle figure en couleurs qui illustre la couverture du livre de Marie Jacob est extraite du mémoire que De Mean adressa à l'Académie en 1738. L'auteur découpe le cercle en lunules à partir desquelles il reconstitue « presque » un rectangle. Cela fournit une quadrature approchée qui fut approuvée par l'Académie.

La lecture du livre est facilitée grâce aux notes renvoyées à la fin de chaque chapitre et aux démonstrations précises accompagnées de figures claires. Le livre s'adresse bien sûr aux spécialistes de l'histoire des mathématiques au 18^{e} siècle, mais son style très clair et pédagogique permet de le recommander à un public beaucoup plus large. Je le recommande en particulier à mes collègues de l'Université ; ils y trouveront mille anecdotes pour illustrer ou agrémenter leurs cours.

Jean-Claude Carrega,
Institut Camille Jordan, Villeurbanne

Moduli of Riemann Surfaces, Real Algebraic Curves, and Their Superanalogs
S. M. Natanzon
American Mathematical Society, 2004. 160 p.
ISBN-13 : 978-0-8218-3594-4. $ 47

Les surfaces de Riemann, les groupes Fuchsiens, les espaces de Teichmüller, les fonctions Arf, les structures spin et leur parité, les variables super-commutatives et la super-symétrie, les courbes algébriques réelles, les fonctions thêta, le problème de Schottky sont tous, pour moi, des mots très alléchants, et ils jouent tous un rôle important dans le livre de Sergei Natanzon.

Pour introduire les surfaces de Riemann, la démarche de l'auteur consiste à commencer par le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}\, z > 0\}$ et son groupe d'automorphismes $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

$\mathbb{H}$ est le revêtement universel de toute surface de Riemann hyperbolique P, et donc $\pi_1(P)$ devient un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. En étudiant les sous-groupes ainsi obtenus on arrive, en relativement peu de pages, à une paramétrisation explicite de l'espace de Teichmüller : l'espace des structures complexes sur une surface donnée.

On étudie ensuite les structures spin et les fonctions Arf associées. Il existe de nombreuses manières d'introduire les structures spin ; l'auteur, fidèle aux groupes Fuchsiens, les définit comme relèvements du groupe $\pi_1(P)$ de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Puis, après une brève introduction à l'algèbre de Grassmann des variables super-commutatives, arrivent le super-demi-plan de Poincaré et son groupe d'automorphismes (les super-symétries). La classification des super-surfaces de Riemann se trouve être équivalente à la classification des fonctions Arf.

Le deuxième chapitre du livre est consacré aux surfaces de Riemann P réelles, autrement dit, munies d'une involution anti-holomorphe τ. Le nombre d'ovales réels (invariants par τ) sur une surface de genre g ne peut pas dépasser $g + 1$ (inégalité de Harnack). De plus, ces ovales peuvent diviser la surface P en deux morceaux ou bien la laisser connexe. Mais comment prouver que le nombre d'ovales et la connexité ou non de ($P \setminus$ ovales) sont les seuls invariants topologiques ? Réponse : à l'aide des groupes Fuchsiens réels, car l'espace de ces groupes peut, une fois de plus, être paramétré explicitement.

Après plusieurs sections où le travail du premier chapitre sur les fonctions Arf et les structures spin est transposé aux surfaces de Riemann réelles, l'auteur termine le chapitre par quelques sujets nouveaux. Le théorème de Sturm-Hurwitz classique affirme qu'une fonction périodique dont le développement en série de Fourier est de la forme

$$\sum_{\boxed{k \geqslant n}} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

a au moins $2n$ zéros sur $[0, 2\pi[$. Natanzon généralise la notion de série de Fourier et le théorème de Sturm-Hurwitz au cas des surfaces de Riemann réelles (P, τ). Le cas classique correspond à $P = \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, $\tau(z) = \bar{z}$. Suit une étude des jacobiennes, des variétés de Prym et du problème de Schottky pour les courbes réelles.

Le troisième chapitre parle des espaces des fonctions méromorphes sur les surfaces de Riemann. Étant donné un revêtement ramifié $f : P \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ de la sphère de Riemann, on peut relever la structure complexe de $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ sur P pour obtenir une structure de surface de Riemann sur P. Ainsi l'espace des fonctions méromorphes peut être vu comme l'espace des revêtements ramifiés de la sphère. Le problème de classifier les composantes connexes des espaces des revêtements ramifiés de la sphère avec des types de ramifications fixés est, dans le cas général, ouvert. Cependant, l'auteur prouve que ces espaces sont connexes dans le cas important où tous les points de ramification sur la sphère sont simples sauf peut-être un.

Le chapitre se conclut par une étude des espaces des fonctions méromorphes réelles sur les surfaces de Riemann réelles. Dans ce cas, le degré de la fonction sur chaque ovale réel de la surface est un nouvel invariant topologique.

Ainsi, à l'exception du troisième chapitre, la présentation passe avant tout par l'étude du groupe des automorphismes du demi-plan de Poincaré. La grande force de cette présentation est la cohérence de la vue d'ensemble. On voit qu'on peut construire, pas à pas, toute la théorie à partir des groupes Fuchsiens. Les étudiants qui s'intéressent aux espaces des modules ou aux espaces de Teichmüller, et qui pourraient être effrayés par les difficultés techniques des champs algébriques de Deligne-Mumford ou des différentielles de Beltrami, seront également rassurés de constater que dans l'approche par les groupes Fuchsiens, la plus grande difficulté technique consiste souvent à multiplier des matrices 2×2.

En même temps, cette démarche ne donne qu'une image très partielle de la richesse des objets qu'on introduit et des techniques qu'on peut utiliser pour les étudier ; ainsi l'apparition des espaces des modules et des super-symétries passe presque inaperçue. Je pense que le livre gagnerait beaucoup à être enrichi de quelques paragraphes attirant l'attention du lecteur sur telle ou telle construction et décrivant brièvement les sujets de recherche qui lui sont associés : la très riche théorie de l'intersection sur les espaces des modules ; les invariants de Gromov-Witten ; l'étude du flot de Teichmüller par des méthodes des systèmes dynamiques ; l'utilisation des fibrés spinoriels et de la super-symétrie en physique ; l'invariant de l'Arf des nœuds ; le seizième problème de Hilbert sur les courbes réelles et les méthodes de la géométrie tropicale.

Le livre est écrit avec rigueur et précision dans tout ce qui concerne le contenu mathématique : je n'ai pas trouvé une seule erreur ni dans les formulations et ni dans les démonstrations. Cependant, le texte mériterait d'être relu attentivement, car il contient un grand nombre de « bourdes », petites et grandes. (La comparaison avec le texte russe montre que la traduction en a éliminé quelques-unes, mais en a introduit d'autres.) Ainsi la toute première phrase du premier chapitre nous apprend que la métrique de Lobatchevski sur le demi-plan de Poincaré a une courbure *positive* constante. Sur la page 12 on lit une définition : « on dit qu'un triplet ordonné est *séquentiel* si ... » et sur la page 19 (soit 7 pages plus loin !) un lemme : « tout triplet ordonné est séquentiel ». De tels petits défauts sont sans importance pour un lecteur attentif, mais peuvent être déconcertants pour quelqu'un qui cherche à trouver rapidement telle ou telle information.

Je recommanderais sans hésiter ce livre aux bibliothèques et aux étudiants, tout en conseillant à ces derniers de ne pas se laisser déconcerter par des petits défauts de présentation et surtout de ne pas se laisser tromper par une certaine monotonie des arguments. En effet, Natanzon, sans en avoir l'air, introduit ici un grand nombre de concepts cruciaux pour les mathématiques modernes et en suivant une voie qui évite bon nombre de problèmes techniques.

Dimitri Zvonkine,
Institut Mathématique de Jussieu (Paris VI)

Introduction to Quadratic Forms over Fields
T.Y. Lam
American Mathematical Society, 2005. 550 p. ISBN : 0-8218-1095-2. $ 79

À l'origine, la théorie des formes quadratiques était essentiellement arithmétique, sujet d'étude d'éminents théoriciens des nombres, tels Minkowski, Siegel ou encore Hasse.

En 1937, dans un changement radical de point de vue, Witt fonde la théorie dite *algébrique* des formes quadratiques. D'une part, il ne se contente plus de travailler sur un corps local ou global, mais étudie les formes quadratiques sur un corps arbitraire. D'autre part, il les considère non plus individuellement, mais dans leur ensemble, construisant ainsi l'anneau de Witt. C'est une vingtaine d'années plus tard que cette théorie prend un véritable essor, notamment avec les travaux de Pfister sur les formes multiplicatives, et les théorèmes de structure de l'anneau de Witt qui en découlent.

Plus récemment, enfin, une nouvelle page a commencé à s'écrire avec des auteurs comme Karpenko, Morel, Vishik et Voevodsky. Trouvant sa place au cœur de développements récents, notamment la théorie homotopique des schémas, l'étude des formes quadratiques bénéficie de techniques sophistiquées, comme la cohomologie motivique ou les opérations de Steenrod sur certains groupes de Chow, qui ont permis des progrès spectaculaires. Citons, à titre d'exemple, la démonstration de la conjecture de Milnor par Voevodsky, ou encore les théorèmes de Vishik et Karpenko qui améliorent considérablement le fameux Haupsatz d'Arason-Pfister.

Dans le livre présenté ici, c'est la théorie algébrique des formes quadratiques qui est exposée, de façon à la fois claire, précise, et extrêmement détaillée. Il ne s'agit cependant pas d'une nouvelle version du précédent livre du même auteur sur le sujet, « The Algebraic Theory of Quadratic Forms », publié en 1973 et qui avait à l'époque reçu le prix Leroy P. Steele de l'American Mathematical Society. En effet, comme l'explique T.Y. Lam dans son introduction, si la structure globale a été préservée, de nombreux chapitres ont été réécrits, de façon à prendre en compte une partie des développements de ces trente dernières années. Au total, le nombre de pages, tout comme d'ailleurs le nombre d'exercices, a doublé.

Les résultats récents les plus techniques ne sont qu'effleurés, et les interactions avec d'autres domaines des mathématiques, comme les groupes algébriques, la géométrie algébrique ou encore la K-théorie, sont volontairement minimisés. Ceci permet à l'auteur de préserver le caractère introductif de son livre. Accessible à tout lecteur ayant de bonnes connaissances d'algèbre de base, il présente les fondements de la théorie : du théorème de simplification de Witt aux invariants de corps définis à l'aide de formes quadratiques, en passant entre autres par l'étude de l'anneau de Witt, le principe de Hasse-Minkowski ou encore l'étude du comportement des formes quadratiques par extension (algébrique ou transcendante) des scalaires. En outre, deux chapitres entièrement nouveaux, intitulés « Special Topics in Quadratic Forms » et « Special Topics on Invariants » présentent quelques résultats plus pointus. L'auteur y expose par exemple, en incluant toutes les démonstrations, la construction d'un corps dont le *u*-invariant vaut 6, telle qu'elle a été proposée par Merkurjev en 1988.

Ainsi, tout en éveillant la curiosité du lecteur sur les progrès remarquables obtenus dans le domaine au cours des dix dernières années, T.Y. Lam fournit non seulement une excellente introduction au sujet, mais également un livre de référence précieux pour les spécialistes.

Anne Queguiner-Mathieu,
Université Paris XIII