

SOMMAIRE DU N° 109

SMF

Rapport Moral	3
---------------------	---

MATHÉMATIQUES

Comment mesurer les surfaces? <i>Y. Meyer</i>	23
Opérateurs géométriques et géométrie conforme, <i>Z. Djadli</i>	37

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

How the proof of the strong perfect graph conjecture was found, <i>P. Seymour</i>	69
---	----

ENSEIGNEMENT

Du bon usage de « l'indisciplinarité », <i>N. Delprat, L. Mazliak</i>	85
---	----

HISTOIRE

Le livre <i>Geometry and Dioptrics in Classical Islam</i> de Roshdi Rashed, <i>E. Penchèvre</i> ..	89
--	----

INFORMATIONS

Enquête sur les chercheurs CNRS entre 1992 et 1999, <i>S. Cordier</i>	99
L'état des « Masters de mathématiques », <i>M.-F. Roy, Y. Maday</i>	107
Que sont nos étudiants devenus ? <i>J.-M. Morvan</i>	111
Sur le programme franco-brésilien, <i>B. Helffer, H. Rosenberg</i>	113
Maurice Audin (1932–1957), <i>G. Tronel</i>	116
Émile Borel (1871–1956), Membre de l'Académie des sciences, <i>DISC de l'Académie des sciences</i>	118

LIVRES	119
--------------	-----

Rapport Moral

Période de juin 2005 à juin 2006

Ce rapport moral et financier tente de brosser un rapide tableau des activités de la SMF. Celles-ci sont très variées, et s'appuient sur un travail collectif mené avec de nombreux partenaires. La vie de la société repose sur l'expertise scientifique et le dynamisme de très nombreux collègues qui ne ménagent ni leur temps ni leur énergie : correspondants, membres des comités de rédaction et conseils scientifiques, membres du bureau et du conseil. Elle dépend de manière essentielle de l'efficacité, du professionnalisme et de la disponibilité du personnel qu'elle emploie. Que tous et toutes veuillent bien accepter nos remerciements chaleureux.

Ce rapport a été préparé par Jean-Paul Allouche vice-président chargé des publications, Alain Bachelot secrétaire du Conseil Scientifique, Martine Bellet trésorière, Jean-Pierre Borel membre du conseil et responsable de la commission enseignement, Guy Chassé vice-président chargé de l'enseignement, Pascal Chossat membre du conseil et directeur du CIRM¹, Lucia Di Vizio vice-présidente chargée des colloques et des affaires européennes, Daniel Duverney membre du conseil et représentant de la SMF à « Action Sciences », Marie-Françoise Roy Présidente, Jacques Wolfmann vice-président chargé du Pôle de Luminy et Alain Yger représentant de la SMF à la CFEM².

Affaires générales

Paradoxes et inquiétudes

La situation de la communauté mathématique française est paradoxale. La liste des conférenciers de Madrid met une nouvelle fois en évidence que l'école mathématique française est bien la deuxième du monde, si on se fie à l'indicateur du nombre de conférenciers invités. L'écart se creuse toutefois avec les États-Unis dont la domination s'affirme.

Les déclarations de Catherine Brechignac en début d'année 2006 avaient déjà donné un coup de projecteur bien venu sur l'excellence des mathématiques françaises, même si l'augmentation de 4% des crédits de base du CNRS représentait une somme plutôt minime.

Ces bonnes nouvelles du point de vue de la recherche, vont de pair avec une situation très préoccupante du côté de l'enseignement. C'est ainsi que lors d'une réunion de responsables de masters en mars 2006 à Grenoble à l'initiative de la SMF

¹ Centre International de Rencontres Mathématiques

² Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques

et de la SMAI, il est apparu que la baisse des effectifs en master de mathématiques est importante, atteignant souvent 20% à 50% en cinq ans. Le nombre de diplômés a tendance à baisser moins, mais des éléments qualitatifs relevés par les collègues laissent penser que la baisse des acquis et des compétences va de pair avec la baisse des effectifs.

Dans ces conditions, la publication des postes 2006 fait l'effet d'une bonne surprise puisque 124 postes de maîtres de conférences et 59 postes de professeurs sont mis au concours, ce qui semble être légèrement supérieur au nombre de maître de conférences et professeurs de mathématiques partis à la retraite cette année. Ce nombre assez important de postes est dû à la superposition de deux phénomènes antagonistes : redéploiements de nombreux postes de mathématiques vers les autres disciplines, à cause de la baisse d'effectifs étudiants, et création de postes étiquetés recherche. Autant dire que si l'effort actuel de création de postes recherche ne se poursuit pas, et si la baisse des effectifs étudiants continue, la situation risque de s'aggraver très sérieusement.

Faire connaître les métiers des mathématiques

Dans ce contexte, la brochure *Les métiers des mathématiques*, projet commun SMF/SMAI/femmes et mathématiques/SFdS³ est particulièrement important. La réalisation coordonnée par Brigitte Lucquin est faite en partenariat avec l'ONISEP⁴. La brochure sera centrée sur des exemples de parcours individuels de jeunes hommes et femmes ayant suivi un cursus de mathématiques les conduisant à des insertions professionnelles variées. Le travail préparatoire, auquel a contribué la commission enseignement de la SMF, a consisté à dégager les métiers les plus représentatifs, et à en trouver des exemples vivants. Les volontaires pour les interviews ont été identifiés depuis plus d'un an. Le projet va se concrétiser début 2007 puisque le budget est bouclé et que le contrat avec l'ONISEP est signé. Le projet est soutenu (par ordre décroissant de subvention) par le Ministère de l'Éducation Nationale, la Région Haute Normandie, l'INRIA⁵, Rennes Métropole, ILOG, Bertin Technologies, Sofinnova, l'École Doctorale de Paris VI, l'INRA⁶, Bouygues et IMACS. Les quatre associations organisatrices contribuent également au budget, et l'APMEP⁷ prendra en charge les coûts de diffusion à ses membres.

Communiquer autour des mathématiques

De nombreuses manifestations sont organisées avec le soutien de la SMF, dans le cadre de divers partenariats en direction de publics variés.

Signalons cette année :

– Le cycle de conférences organisées avec la Bibliothèque Nationale de France, en partenariat avec France-Culture et Tangente, et dont le responsable pour la SMF est Martin Andler, « Un texte, un mathématicien » rencontre un succès impressionnant. Le grand auditorium est plein comme un œuf et plusieurs dizaines de personnes suivent l'exposé sur écran à l'extérieur de la salle. De nombreux jeunes

³ Société Française de Statistiques

⁴ Office National d'Information sur les Enseignements et les Professions

⁵ Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

⁶ Institut National de Recherche Agronomique

⁷ Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

venus des lycées de la région parisienne sont présents. Voici la liste des exposés de 2006 : « Pourquoi Lebesgue essayait de mesurer les surfaces, et n'y arrivait pas ? » par Yves Meyer, « Henri Poincaré et le monde non euclidien » par Étienne Ghys, « Le cas Sophie Kowalevskaya » par Michèle Audin, « Hermann Minkowski, grand prix de l'Académie des sciences à 18 ans » par Eva Bayer-Fluckiger.

- Nous participons à l'organisation de plusieurs événements culturels liés à la pièce de Jean-François Peyret « Le cas de Sophie K » : une conférence BNF⁸-SMF de Michèle Audin, une brochure « *Sophie Kovalevskaya* » diffusée à plusieurs milliers d'exemplaires, une rencontre à la BNF entre Michèle Audin et Jean-François Peyret, une intervention lors d'une rencontre « Les femmes scientifiques, où sont-elles ? » à l'Ambassade de Suède.

- Une dizaine de conférences « Promenades mathématiques » ont été coorganisées avec Animath, et la page web correspondante a été créée sur notre site.

- Nous avons soutenu et participé au Salon des jeux mathématiques (25 au 28 mai 2006), en y tenant un stand et en contribuant à l'exposition et à la brochure « *Mathématique et images* ».

- Plusieurs journées « Mathématiciens et Industriels se parlent » organisées par la SMAI, le CNRS et soutenues par la SMF ont eu lieu : « Mathématiques et applications médicales » (2 juin 2005, IHP⁹), « Mathématiques et modélisation financière » (16 novembre 2005, IHP), « Modélisation dans le secteur agro-alimentaire » (4 avril 2006, IHP). Celle consacrée aux mathématiques financières a été un franc succès. Nous avons joué un rôle actif dans l'organisation de la première réunion décentralisée de cette série, le 9 juin 2006 à Toulouse sur le thème « Aéronautique et Espace ». La rencontre suivante, entre mathématiciens et acousticiens, aura lieu à Paris le 16 novembre 2006.

Le site web de la société évolue en permanence. Il est de plus en plus consulté (augmentation de plus de 30 % des pages consultées entre 2005 et 2006). Notre but est qu'il devienne, au delà d'une ressource utile pour nos adhérents et l'ensemble des mathématiciens, une fenêtre sur les mathématiques, utilisable par un public varié : enseignants, journalistes, étudiants... Une rubrique « Math & grand public » a démarré. La mise en ligne des nouveaux numéros de la *Gazette* va être suivie d'un affichage progressif des fascicules de ces dernières années. Une nouvelle rubrique du site contiendra bientôt des documents mathématiques destinés aux agrégatifs, et une partie interactive internationale sera développée en commun avec le CIMPA¹⁰.

L'identité visuelle de la SMF est en cours de redéfinition : évolution du logo, charte graphique, plaquette de présentation, affiches, couvertures des revues, *Gazette*. Tout ce processus, mené avec le graphiste Serge Morand, nous donne l'occasion de réfléchir à nos buts et objectifs et à la cohérence de nos initiatives et de notre discours.

⁸ Bibliothèque nationale de France

⁹ Institut Henri Poincaré

¹⁰ Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées

Participer à la vie mathématique internationale

Si la participation de la SMF à la vie mathématique internationale passe d'abord par l'organisation avec d'autres sociétés savantes de colloques ou rencontres, comme expliqué dans le point 4 de ce rapport, d'autres initiatives sont à signaler.

- En ce qui concerne l'Europe, les mathématiciens nantais ont organisé en juin 2006 une fin de semaine mathématique européenne dans le cadre du programme « EMS ¹¹ Joint Mathematical Week-end », que nous soutenons. Nous y organisons une table-ronde sur le soutien de l'Europe aux mathématiques. Nous serons présents au conseil de la SME¹² à Turin en juillet et appuyons la candidature de Mireille Martin-Deschamps, ancienne présidente de la SMF, à son comité exécutif.

- Nous participons au sein du CNFM¹³ à la préparation de l'assemblée de l'IMU¹⁴ qui se tiendra à Saint-Jacques de Compostelle avant l'ICM¹⁵ Madrid 2006. Rappelons que le CNFM, composé de représentants de la SMF, de la SMAI, de l'Académie des sciences et du CNRS gère les subventions pour participations aux grands congrès tel ECM¹⁶ et ICM et met en place la C3I¹⁷ qui gère les demandes individuelles de soutien de missions à l'étranger. Lors de l'été 2005, une baisse brutale des crédits affectés par le MAE¹⁸ au C3I a eu lieu. Alertés par le CNFM, nous avons protesté par écrit et réagi rapidement par une pétition signée en quelques jours par près de 800 collègues. Depuis, une partie des crédits a été rétablie et le financement des échanges internationaux en mathématiques ne semble plus être menacé.

- L'*Explosion des mathématiques* continue à avoir un grand impact international et a été traduite dans plusieurs langues : après le finnois, l'italien et le persan, c'est maintenant le tour de l'anglais et de l'hindi. Elle doit être diffusée à l'ICM Madrid en anglais et peut-être en espagnol.

- Sur le plan de la solidarité internationale avec les pays pauvres, la SMF soutient activement les activités du CIMPA, dont elle est membre institutionnel, et organise chaque année une souscription au bénéfice de celui-ci.

Travailler à l'unité des mathématiques

Notre initiative principale en cours avec la SMAI, la SFdS et femmes et mathématiques est le projet de brochure *Les métiers des mathématiques* évoqué ci-dessus.

Nous sommes avec la SMAI, la SFdS, la Guilde des doctorants, l'AFIF¹⁹ et SPECIF²⁰ les partenaires de l'Opération Postes. Nous participons activement à la définition et à la collecte d'indicateurs permettant de suivre l'évolution des moyens humains et financiers consacrés aux mathématiques.

¹¹ European Mathematical Society/Société Mathématique Européenne

¹² Société Mathématique Européenne

¹³ Comité National Français de Mathématiciens

¹⁴ International Mathematical Union

¹⁵ International Congress of Mathematicians

¹⁶ European Congress of Mathematics

¹⁷ Commission des Colloques et Congrès Internationaux

¹⁸ Ministère des Affaires Étrangères

¹⁹ Association Française d'Informatique Fondamentale

²⁰ Société des Personnels Enseignants et Chercheurs en Informatique en France

D'une façon générale, les activités communes avec les autres sociétés savantes représentant les mathématiques que sont la SMAI et la SFdS, sont fréquentes. Nous avons des échanges de correspondants entre nos conseils respectifs, et des réunions de bureau communes avec la SMAI.

Nous coopérons avec l'APMEP²¹, femmes et mathématiques et l'UPS²² et les sociétés savantes d'autres disciplines proches (physique, informatique, ...). Nous sommes membres du collectif *Action Sciences* (voir infra).

Être au service de nos adhérents

L'enquête réalisée auprès de nos adhérents l'an dernier a mis en évidence un certain nombre de problèmes :

- La SMF est âgée, la moyenne d'âge de ses membres est autour de 55 ans
- La SMF est élitiste, la proportion d'adhérents parmi les professeurs et directeurs de recherche est d'environ 50%, alors qu'elle est de moins de 15% chez les maîtres de conférences.
- La SMF est parisienne ; malgré de réels progrès, ses adhérents et ses activités sont trop concentrées à Paris.
- La SMF reste une tour d'ivoire, les amateurs de mathématiques y sont encore trop peu nombreux.

Cette situation peut et doit être améliorée ; le conseil et le bureau y consacrent leurs efforts. Signalons quelques évolutions et projets en cours :

- En 2005, la SMF a compté plus de 1950 adhérents. Ce chiffre représente une hausse légère par rapport à l'année précédente, qui ne s'explique pas uniquement par les adhésions gratuites de jeunes docteurs.
- Une année d'adhésion gratuite a été offerte à nouveau en 2006 pour les nouveaux docteurs de l'année 2005. Les jeunes docteurs qui ont demandé à en bénéficier sont deux fois plus nombreux que l'an passé.
- Le tarif d'adhésion « jeunes » est appliqué jusqu'à 32 ans en 2006 et sera porté à 35 ans en 2007.
- Le comité de rédaction de la *Gazette* a poursuivi son travail sous la direction de Colette Anné. La *Gazette* est désormais en ligne sur notre site web. Le numéro spécial « *Aspects de la physique en 2005* » est paru à la fin 2005 à l'occasion de l'année mondiale de la physique. Pour les 25 ans du CIRM, la brochure « *À la rencontre du CIRM* » rédigée par Michel Zisman est en cours de diffusion comme supplément du numéro 108 de la *Gazette*. Un numéro spécial consacré à des entretiens avec Henri Cartan est en cours de réalisation.
- Le bulletin électronique mensuel d'information de la SMF est adressé aux adhérents et est archivé sur le site web de la société.
- L'*Officiel des Mathématiques* perd des abonnements depuis plusieurs années et n'est pas suffisamment exhaustif. L'abonnement et la diffusion papier seront arrêtés début 2007 et une nouvelle version électronique interactive sera mise en place.

²¹ Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

²² Union des Professeurs de Spéciales

Le personnel de la SMF

Plusieurs changements importants sont à signaler, à Paris et à Luminy.

À Paris, Claire Ropartz, secrétaire générale, assure la coordination et le suivi des activités de la Société et est chargée notamment du site web et de la *Gazette*. Laurent Koelblen aide à définir et met en œuvre les améliorations et extensions du site web. Julie Bernard a été remplacée par Nizar Marzouki pour les tâches d'aide au secrétariat.

Nathalie Christiaën est responsable du secteur de l'édition mathématique. Elle est désormais épaulée par Florent Arnaud, recruté début 2006, qui a pour mission entre autres de suivre les mutations technologiques de l'édition scientifique et de maintenir une chaîne d'édition performante. Il assurera aussi les tâches de mise au format, de vérification de formats, d'enrichissement (méta-données etc.) de tous les textes publiés. Marielle Randria a quitté son emploi à la SMF à la fin 2005.

La comptable de la SMF, Catherine Branger, s'occupe aussi de la comptabilité du CIRM et de la Maison de la SMF.

À Marseille Christian Munusami, chargé de diffusion, gère la Maison de la SMF. Le recrutement d'un technicien de diffusion est en cours. Après ce recrutement, Gilbert Mora jusqu'ici affecté à temps partiel à la Maison de la SMF et au CIRM, sera employé au CIRM à temps plein.

Muriel Bonin et Olivia Barbaroux sont employées de la SMF et sont affectées au CIRM.

Michel Demazure conseille le bureau sur les questions d'organisation, de répartition des tâches et de rémunération du personnel.

Publications

État des publications

Les publications de la SMF se portent assez bien. Nous restons toujours vigilants sur la qualité et le flux des articles ou projets d'ouvrages soumis, sur les subventions, sur la diffusion directe et par abonnements.

Faits à signaler pour l'année 2005-2006

- Un Comité des publications a été mis en place, voir : <http://smf.emath.fr/VieSociete/Instances/ComitePublications.html>
- Le principe de raccourcir à cinq ans la barrière mobile ou front de gratuité [*moving wall*] entre la publication et la mise en ligne gratuite est appliqué progressivement pour les revues (sauf, comme annoncé, pour certains textes à la fois à longue durée de vie et de vente – par exemple *Astérisque*, qui est notre publication phare).
- Les *Séminaires et congrès* restent gratuits en ligne, mais seulement un an après la parution de la version papier.
- La *Revue d'histoire des mathématiques* a maintenant un flux régulier de soumissions d'articles de qualité. Les dix ans de la revue ont été fêtés à l'occasion d'une journée scientifique : « L'histoire des mathématiques aujourd'hui : professionnalisation et diversité » (15 octobre 2005, Paris).
- Le *Bulletin* continue à jouer son rôle de revue généraliste de référence.

- Les *Documents mathématiques* se portent bien. Signalons la réédition de SGA (Séminaire de géométrie algébrique).
- Des discussions avec Vuibert, EDP-Sciences, Cassini ont lieu (co-éditions, contrats de diffusion, ...).
- Le projet de pôle d'édition des revues françaises de mathématiques (Cedram Unité mixte de service CNRS à Grenoble) se met en place. Nous continuons les discussions pour préciser le type de collaboration que nous pourrions envisager – étant entendu qu'une exigence essentielle est que la SMF ne perde ni son âme, ni son image et renforce ses compétences, notamment technologiques.

Perspectives

- Comme signalé dans le rapport financier, le personnel permanent de l'activité d'édition a été renforcé avec l'arrivée de F. Arnaud. Sa présence améliorera notre capacité à réagir aux défis scientifiques et économiques liés aux mutations technologiques dans le domaine de l'édition mathématique.
- Nous étudions attentivement plusieurs questions, en particulier : les relations avec les serveurs de prétrages, les contrôles d'accès, les références électroniques croisées aussi bien entre nos publications qu'entre nos publications et celles d'autres éditeurs, les identifiants universels (par exemple les DOI), la facturation (mise en place éventuelle de micropaiement ou paiement à l'article [*pay per view*]), la continuation de la numérisation des volumes qui ne sont pas en version électronique native, la veille technologique, l'évolution de nos compétences, et l'archivage électronique pérenne (en collaboration par exemple avec Cedram).
- Nous réfléchissons enfin à nos liens et notre articulation avec les sociétés sœurs d'autres pays, avec les unions internationales, avec d'autres publications académiques, avec les éditeurs privés français et, ponctuellement avec des éditeurs privés étrangers, en gardant à l'esprit deux idées essentielles : d'une part la SMF ne doit laisser échapper aucune de ses compétences propres pour conserver sa totale indépendance éditoriale, d'autre part ni la SMF ni ses partenaires éventuels ne doivent perdre leur âme ni leur image quel que soit le type de rapprochement ou de collaboration envisagé.

Le pôle de Luminy

Le CIRM

– Le CIRM, établissement de la SMF, devenu une unité mixte de service entre la SMF et le CNRS en 2000, est soutenu financièrement de manière très importante par le ministère. Une convention le lie par ailleurs à l'université de la Méditerranée. Le but principal du CIRM est d'organiser et de gérer des rencontres internationales mathématiques de haut niveau et d'accueillir des petits groupes de chercheurs pour des séjours, ce qu'il fait avec un succès croissant. En 2005, le CIRM a organisé 50 semaines de rencontres dont 3 sessions de longue durée et hébergé 9 petits groupes de travail. Il a accueilli plus de 2400 visiteurs dont près de la moitié sont venus de l'étranger. De plus, sa bibliothèque joue le rôle d'une bibliothèque régionale de mathématiques.

– Pascal Chossat, directeur du CIRM depuis le 1^{er} septembre 2005, poursuit les travaux d'aménagement et de construction de l'opération « CIRM-2000+x ». Cette opération, débutée en 2000, se termine en 2006. Un certain nombre de transformations et de rénovations ont eu lieu : réhabilitation de l'entrée historique, transformation du patio, remodelage des intérieurs de la Bastide, création d'une salle de détente, baies vitrées, réfection des façades, création d'un parking, rénovation de l'une des ruines du parc, etc...

Un auditorium de 90 places a été également réalisé, il sera inauguré le 28 juin 2006 en présence (sous réserve) du Ministre Délégué à l'Enseignement Supérieur et à la Recherche. Nous fêterons ce jour-là les 25 ans du CIRM dont les locaux réhabilités avaient été inaugurés en mai 1981.

L'opération « CIRM-2000+x » a été possible grâce au soutien des partenaires du CIRM : le Ministère de la Recherche et de l'Enseignement Supérieur, le Centre National de la Recherche Scientifique, la Région Provence-Alpes-Côte d'Azur, le Conseil Général des Bouches-du-Rhône, la Ville de Marseille et grâce à la participation de la communauté mathématique internationale. Plus de 120 mathématiciens ont montré leur attachement à ce projet en participant par le biais d'une souscription. Au nom du CIRM et de la SMF, nous les remercions d'avoir aidé à moderniser des installations du CIRM, ce qui permettra aux chercheurs du monde entier de poursuivre leurs rencontres scientifiques dans les meilleures conditions.

– Une action est engagée en direction de la Commission Européenne pour permettre au CIRM de bénéficier de financements dans le cadre du prochain « 7^e PCRD ». Une approche des groupes industriels est également engagée pour un soutien aux colloques. Un des objectifs poursuivi par le CIRM doit-il être d'arriver à une gratuité complète de ses colloques, comme Oberwolfach en Allemagne ou Banff en Amérique du Nord ?

– À partir de septembre 2006, le CIRM récupère l'ensemble des salles de l'Annexe-CIRM qui était jusqu'à présent partagé entre le CIRM et la formation permanente du CNRS, cette dernière étant rapatriée vers le GLM (Groupe des Laboratoires de Marseille) de la Délégation Provence. Une convention définira les relations entre la Délégation Provence et le CIRM.

– Michel Zisman a réalisé une monographie retraçant la mise en place du CIRM, publiée conjointement par la SMF et le CIRM. Diffusée à tous les adhérents de la SMF comme supplément à la *Gazette*, elle sera aussi en vente à la Maison de la SMF à Luminy.

– La proximité de la Maison de la SMF fait du CIRM un lieu idéal pour la diffusion de l'information concernant la SMF vers la communauté mathématique française et internationale via les congressistes du CIRM.

La maison de la SMF

La Maison a continué d'assurer sa mission de diffusion des ouvrages publiés par la SMF ainsi que d'information et de publicité sur les activités de la Société auprès des participants aux différentes rencontres du CIRM. L'année écoulée a donné lieu à différentes modifications et améliorations.

Les bâtiments et les abords

Les réparations concernant les dommages occasionnés par les pluies de décembre 2003 sont maintenant terminées. Les fissures sont bouchées, trente micropieux ont

été installés afin de mieux stabiliser le bâtiment et la totalité du remblai a été remplacée devant la porte de réception. Une clôture de sécurité, commune avec le CIRM a été installée autour des bâtiments et un fléchage commun SMF-CIRM est envisagé.

La diffusion

Un nouveau mode d'expédition des ouvrages pour la France et l'étranger a été mis en place à partir de janvier 2006 en utilisant des logiciels fournis par la Poste. Ceci permet une meilleure efficacité auprès des clients au prix d'un travail supplémentaire pour la cellule de diffusion. Cette année a vu une progression très nette des ventes au numéro : une centaine de commandes supplémentaires par rapport à l'année dernière. Les publications de la SMF sont davantage connues grâce à notre site, et les bibliothèques souhaitent compléter leurs collections.

Le fonctionnement de la Maison

Un protocole d'accord a été signé avec le CIRM concernant l'utilisation de services en commun (ménage, électricité, courrier, etc...). En particulier, la collecte et le dépôt du courrier, sont désormais communs, ce qui a entraîné un changement d'adresse postale au premier janvier 2006. L'augmentation du travail à fournir pour la diffusion ainsi que les besoins de l'entretien des abords du CIRM ont entraîné le recrutement d'un technicien de diffusion pour seconder le chargé de diffusion en fonction Christian Munusami, et l'affectation au CIRM de Gilbert Mora à temps plein.

L'accueil des visiteurs

Il est maintenant satisfaisant grâce à la mise en place d'horaires fixes et à l'utilisation d'une salle spécialement affectée à la réception des visiteurs. Les participants aux rencontres du CIRM sont incités à visiter la maison par des documents qui leur sont distribués et par un stand publicitaire présent dans la bibliothèque.

Rencontres et colloques

L'activité de la SMF en matière de rencontres scientifiques et de colloques est en augmentation constante. Nous essayons de mettre en place une politique de décentralisation géographique des rencontres de la SMF, qui, par exemple, nous a amenés à organiser la Journée annuelle 2005 à Strasbourg.

Rencontres scientifiques récurrentes de la SMF

La SMF a deux manifestations scientifiques récurrentes :

– La journée scientifique annuelle : La Journée scientifique annuelle 2005 de la SMF a eu lieu le 21 octobre 2005 à Strasbourg : pour la première fois elle se tenait en province. Elle a été organisée par Pierre Baumann sur le thème « Mathématiques et physique ».

La prochaine Journée annuelle intitulée « Mathématiques et vision », organisée par Bernard Teissier, a eu lieu à Paris, en même temps que la remise des Prix d'Alembert et Anatole Decerf.

– Les sessions « États de la recherche »

Les sessions « États de la recherche », ont un comité scientifique. Son secrétaire Jacques Tilouine a terminé son mandat en 2005 et a été remplacé par Eric Leichtnam.

Une session des États de la recherche intitulée « Fonctions Zêtas multiples » a été organisée à Lille en juin 2005 par M. Petitot et Hoang Ngoc Minh.

Deux sessions ont lieu en 2006 :

« Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux », organisée par Jean-Yves Briend, Serge Cantat, Charles Favre à l'université Rennes I ;

« Géométrie conforme et opérateurs géométriques », organisée par Zindine Djadli à l'université de Cergy-Pontoise.

La SMF soutient aussi sans les organiser des manifestations scientifiques diverses, ceci est détaillé dans le paragraphe du rapport consacré au Conseil Scientifique.

Colloques du CIRM

La plus grande partie de l'activité de la SMF en matière d'organisation de colloques et de rencontres scientifiques a lieu dans le cadre du CIRM (cf supra.)

Colloques internationaux

Nous avons entrepris une politique d'échange avec nos homologues étrangers : ceci a donné lieu à une série de conférences bilatérales ou multilatérales dans lesquelles nous avons eu parfois le rôle de « maître de maison » et parfois celui d'invité. En mai 2005, nous avons été invités au « Joint BeNeLuxFra Conference in Mathematics » (mai 2005, Belgique). Nous avons aussi en projet un colloque franco-italien (juillet 2006, Italie), un colloque hispano-français (2007, Espagne), un deuxième colloque franco-canadien (2008, Canada), et un colloque franco-indien (2007 ou 2008, Inde) coorganisé avec la Ramanujan Mathematical Society. Un colloque franco-maghrébin soutenu par le MAE est en cours de définition, il aurait lieu à Nice fin 2006 ou début 2007 à l'initiative de la SMF, de la SMAI et de l'Académie des Sciences.

Le Conseil Scientifique de la SMF

En 2005, la composition du Conseil Scientifique est restée inchangée. Conformément à sa mission, le Conseil a rendu des avis sur :

- (1) des propositions de nominations pour des Prix : *Abel*, *Wolf* ;
- (2) des nominations aux Comités de Rédaction des publications de la SMF : *Bulletin et Mémoires de la SMF*, *La Gazette des Mathématiciens* ;
- (3) des nominations au Conseil Scientifique de diverses manifestations : *Sessions des états de la recherche*, *Congrès SMF-UM²³ 2006*, *Second congrès franco-canadien 2008*, *Congrès RSME²⁴-SMF 2007* ;
- (4) des parrainages ou soutien à des colloques ou initiatives culturelles.

²³ Union mathématique internationale

²⁴ Real Sociedad Matemática Española

Quelques commentaires sur les points 2, 3 et 4 et le fonctionnement du Conseil :

Point 2. Les propositions pour les comités de rédaction émanent essentiellement des directeurs de ces comités. Cette année les candidatures ont été systématiquement accompagnées d'un curriculum vitae et d'une lettre de motivation. Ainsi le Conseil étant très bien informé a pu délibérer aisément. Tous les choix ont été approuvés à l'unanimité.

Point 3. Les demandes de nominations à des conseils scientifiques de congrès où la SMF est partie prenante, sont transmises par Lucia Di Vizio qui est éventuellement sollicitée en cours de débat si des informations complémentaires sont nécessaires. Cette collaboration fonctionne parfaitement. La question s'est posée de savoir si le Conseil Scientifique pourrait initier des propositions de manifestations scientifiques, par exemple au CIRM. Dans la mesure où sa mission essentielle consiste à rendre des avis, il ne semble pas opportun qu'il soit juge et partie, et de telles propositions devraient plutôt émaner d'un comité distinct.

Point 4. Les demandes de parrainages de colloques par la SMF ont été examinées selon les principes précisés dans le précédent rapport moral, en étant attentif en particulier au niveau mathématique, mais aussi à l'étendue du spectre de thèmes et d'équipes organisatrices. Toutefois il s'avère difficile de se faire une opinion sur des projets de colloques, très préliminaires, où on ne dispose que de déclarations d'intentions, éventuellement fort louables. Le Conseil souhaite que les projets comportent toujours un descriptif explicite, qui peut être court mais convaincant, des aspects scientifiques.

Dans cette perspective, le Conseil, saisi de cinq demandes de soutien (même nombre que l'an passé), a recommandé le parrainage de quatre d'entre eux : Colloque « Mathematics in the Twentieth Century, In Commemoration of the Birth Centenary of André Weil January 2- 5, 2006 », organisé par la Mathematical Sciences Foundation à New Delhi, Week-end mathématique à Nantes, Colloque en l'honneur d'Adrien Douady, Film « Wolfgang Doeblin, la redécouverte d'un mathématicien » (projet de Agnès Handwerk et Harrie Willems).

Toutes les délibérations du Conseil se font par courrier électronique (environ 280 mails échangés sur l'année). C'est un procédé souple et agréable. Quand les questions à traiter n'ont pas une réponse immédiate triviale, un dialogue très fructueux s'instaure entre les membres du Conseil. Dans plusieurs cas, l'examen attentif d'une question nous a amenés à faire évoluer une opinion initiale, et à motiver l'avis de façon nettement plus approfondie. Les réponses finales ont toujours été obtenues par consensus.

Enseignement

Les activités de la SMF dans ce domaine s'appuient en grande partie sur sa commission enseignement. Son responsable est Jean-Pierre Borel et elle a pour membre Pierre Arnoux, Jean-Marc Bonnisseau (représentant la SMAI), Guy Chassé, Michel Delord, Daniel Duverney, Frédéric Leroux, Pierre Loidreau, Marie-Jeanne Perrin

(représentant l'ARDM²⁵), Jean-Renaud Pycke, Frédérique Petit, Johan Yebbou. Elle a eu beaucoup de pain sur la planche, les questions en liaison avec l'enseignement des mathématiques étant nombreuses, et certaines revêtant une acuité particulière. Ce travail a nécessité six réunions au cours des douze derniers mois.

Colloque franco-finlandais

En 2004, ont été publiés les résultats de l'enquête PISA sur la « culture mathématique » des élèves de 15 ans dans les pays de l'OCDE. Cette enquête conduisait à un classement des différents pays qui donna lieu à de nombreux commentaires. Par exemple, la Finlande occupait la meilleure place dans cette évaluation, l'Espagne une mauvaise, la France une position intermédiaire. Pour faire le bilan, comprendre la signification de ce type d'enquête et donner des éléments de réflexion sur notre enseignement des mathématiques, la SMF décida, début 2005, d'organiser un colloque franco-finlandais. Ce colloque, co-organisé par la SMF, la SMAI et la Société Finlandaise de Mathématiques, a eu lieu du 6 au 8 octobre 2005 : les deux premiers jours à l'Institut Finlandais de Paris, le samedi 8 octobre à l'IHÉS²⁶. Il a permis de nombreux et riches échanges entre les participants (malheureusement trop peu nombreux) et intervenants. La plupart des textes des orateurs est disponible sur le site de la Société. La *Gazette* s'est fait l'écho du colloque, en particulier pour faire connaître les interventions de nos collègues finlandais.

Le débat du 7 janvier au CA de la SMF

La démission forcée de Laurent Lafforgue du Haut Conseil de l'Éducation en novembre 2005 a provoqué de nombreux commentaires et discussions et a suscité diverses prises de position dans notre collectivité. Le bureau de la Société a discuté de cette question lors de sa réunion de décembre. À défaut de s'accorder sur une vision commune de la situation, l'unanimité des membres s'est faite sur la nécessité de relancer le débat sur les problèmes de l'enseignement de notre discipline et de dresser un état de la situation, seule base de départ possible pour d'éventuelles propositions. Dans ce but, il a été décidé de consacrer une partie substantielle de la réunion du Conseil d'Administration de janvier 2006 à cette question. Cette décision a été communiquée aux adhérents puis rendue publique sur le forum de la SMF. Pour essayer de cerner les différents points de vue en présence, nous avons invité quatre collègues, représentant une palette assez exhaustive des diverses sensibilités en présence, à nous faire part de leur analyse de l'enseignement des mathématiques aujourd'hui et des solutions à apporter aux difficultés qu'il rencontre. Nous avons ainsi entendu les avis de Martin Andler, Jean-Pierre Demailly, Daniel Duverney (par ailleurs membre de notre Conseil) et Claudine Schwartz. Nous publierons, dès que nous les aurons toutes reçues, les versions écrites de ces interventions. Nous avons bien entendu l'intention d'aller au delà de cette initiative. En particulier, nous avons envisagé de réaliser une sorte de « livre blanc » sur l'enseignement des mathématiques en France. Mais nous rencontrons un obstacle important : à de nombreuses reprises, beaucoup de membres de la Société ont manifesté leur intérêt pour les questions d'enseignement, mais il est néanmoins difficile de réunir un nombre suffisant d'entre nous pour une action suivie sur la question. Nous avons

²⁵ Association de Recherche en Didactique des Mathématiques

²⁶ Institut des Hautes Études Scientifiques

pu cependant proposer aux autres associations concernées un texte intitulé : « *Socle commun des connaissances et compétences et objectifs généraux de l'enseignement des mathématiques* », dont la version définitive se trouve sur notre serveur et qui est signé de la SMF, de femmes et mathématiques, de l'APMEP, de la SFdS et de la SMAI.

L'enquête sur le LMD

Une enquête a été lancée par la commission enseignement sur la mise en place du L en mathématiques. Vingt et une universités ont répondu à un questionnaire très détaillé, et qui a demandé un travail important de préparation. Cela représente un peu moins de la moitié des universités ayant un L en mathématiques. La fin de l'année 2006 sera consacrée à un dépouillement plus précis, les premières tendances sont :

- une grande disparité des volumes horaires surtout au premier semestre. On observe un peu plus de cohérence ensuite même si des différences subsistent. Le jeu des enseignements obligatoires ou optionnels ou facultatifs (avec une signification probablement variable suivant les endroits) rend la lecture des chiffres difficiles.
- une réelle disparité des chapitres enseignés, notamment du moment où ils sont abordés pour la première fois. Ce point sera certainement à travailler.
- les chiffres d'inscrits font apparaître une baisse inquiétante sur laquelle nous devrions travailler plus. Les diverses réunions nationales et internationales (récemment, Lille ou Amsterdam) sur la « désaffection pour les études scientifiques » ont du mal à dépasser le stade du constat.

Réunion des responsables de masters de mathématiques

Comme signalé au début du rapport, une réunion des responsables de masters « de la vague A » (en cours de réhabilitation cette année) s'est tenue à Grenoble le 17 mars à l'initiative de la SMF et de la SMAI et en présence de membres de la MSTP au ministère. Une baisse très conséquente des effectifs est observée : entre 20% et 50% suivant les cas entre 2000 et 2005, les effectifs réels étant souvent inférieurs de moitié aux effectifs attendus.

Lors de la réunion, les raisons de cette baisse ont été évoquées : choix des lycéens déterminés par les notes mises au bac plus sévères en spécialité mathématique, et par une faible connaissance des débouchés de la discipline. Cette baisse d'effectifs s'accompagne d'un recrutement de bacheliers sans mention au bac, les meilleurs semblant s'orienter vers d'autres filières.

Il est donc essentiel de maintenir le potentiel d'enseignement et de recherche, dans la perspective d'un accroissement des effectifs qui n'interviendra qu'à moyen terme. Plusieurs mesures ont été évoquées lors de la réunion :

- Au niveau des Masters
 - valoriser davantage la qualité des connaissances en mathématiques des étudiants formés en Master, par comparaison avec les formations d'ingénieur ;
 - améliorer le suivi individuel des étudiants, pour leur permettre plus de souplesse dans leur choix, et leur ouvrir des perspectives plus attrayantes ;
 - utiliser les limites d'effectifs possibles pour introduire une sélection positive ;

- aménager les formes pédagogiques des cours à trop faible effectif, pour aboutir à des coûts recevables par l'établissement tout en maintenant une offre de formation suffisamment diversifiée (travail personnel encadré par exemple) ;
- formaliser en conventions les partenariats entre établissements, pour regrouper les effectifs de diverses provenances et pour faciliter la cohérence de l'offre de formation ;
- développer l'attractivité de nos Masters pour les étudiants étrangers ; adapter les contenus à la réalité des acquis à l'entrée en Master ;
- Plus généralement
 - accroître l'enseignement des mathématiques à l'extérieur des UFR et départements de mathématiques ; un obstacle semble être la diminution du nombre d'heures d'enseignement dans les autres cursus ;
 - développer des formations pluridisciplinaires avec l'informatique, la biologie, l'économie, la gestion...
 - argumenter le maintien voire la création de postes là où le contexte scientifique le permet ;
 - promouvoir la discipline et ses débouchés professionnels.

Le compte-rendu complet de cette réunion, accessible à partir de notre site, est publié dans ce numéro de la *Gazette*.

Contacts avec la CTI (Commission du Titre d'Ingénieur)

À l'initiative de la SMF, une délégation commune SMF-SMAI a rencontré deux représentants de la CTI (dont la Présidente Michelle Gelin) le 6 juillet 2005. Cette réunion, dont il a été rendu compte dans la *Gazette*, faisait suite à une première rencontre datant de février 2003. Nous voulions faire connaître les préoccupations des mathématiciens concernant la place de leur discipline dans les formations d'ingénieurs. Cette rencontre a été très positive car nous avons rencontré des responsables de la CTI très sensibles aux questions que nous évoquions et décidés à travailler avec nous. Il a été décidé -sur proposition de la CTI- de créer un groupe de travail commun entre les Sociétés de mathématiques et la CTI qui pourrait aller jusqu'à élaborer des recommandations concernant la place des mathématiques dans les formations d'ingénieurs.

Questions diverses

Parmi les autres questions discutées en commission enseignement :

- Le programme « Tuning ». Il s'agit d'une initiative européenne destinée à harmoniser les objectifs et/ou les programmes, ou au moins à mieux se connaître. Il s'agit certainement d'une initiative intéressante et trop peu connue, qui fonctionne dans quelques disciplines, dont les Mathématiques.
- Contacts avec la SFP²⁷. Les sujets de préoccupation sont voisins et les contacts vont être approfondis.
- La question des mentions au CAPES (possibilité ouverte cette année à un candidat d'obtenir une mention complémentaire au CAPES s'il a obtenu à une épreuve écrite d'une autre discipline une note au moins égale à la moyenne du dernier admis),

²⁷ Société Française de Physique

– La participation au site Internet de l'INRP²⁸, dont la SMF est partenaire et où la commission est représentée. « Educmath »²⁹ a vocation à traiter de tous les niveaux du primaire à l'université (CP jusqu'à bac+3 environ).

Notre participation à « Action Sciences »

Nos représentants dans ce collectif (<http://www.sfc.fr/ActionSciences.htm>) sont Pierre Arnoux et Daniel Duverney. Notre tentative d'engager un débat sur l'orientation et la structure actuelle de notre enseignement scientifique secondaire (<http://home.nordnet.fr/~dduverney/monsite/niveau3/propsci.pdf>) n'a pas abouti, du fait de l'opposition résolue de l'APBG³⁰ et de l'UdPPC³¹ à toute remise en cause des orientations impulsées depuis la loi d'orientation de 1989. Nous nous sommes alors efforcés de produire des chiffres irréfutables, qui ont été acceptés par tous, notamment sur l'évolution du baccalauréat depuis 40 ans. De plus l'action en faveur du renforcement de la filière scientifique dans le secondaire s'est poursuivie sur la base des orientations adoptées par « Action Sciences » les années précédentes (demande de programmation des recrutements et pré-recrutement des enseignants du secondaire, option scientifique en seconde), sans que cependant les conflits internes au collectif, souvent d'origine disciplinaire ou corporatiste, n'aient été réglés, ni même vraiment abordés. Signalons pour terminer que le collectif, malgré ses demandes répétées, n'a pas été reçu cette année par le cabinet du Ministre. Par contre, les associations d'enseignants du secondaire (APMEP, UdPPC et APBG) ont été reçues par une commission de l'Assemblée Nationale au mois de mars 2006.

Notre participation à la CFEM et à la CIEM³²

La composition du CFEM a changé et la SMAI dispose depuis janvier 2005 d'un représentant au bureau de la CFEM, ce qui met ainsi sur pied d'égalité les composantes ARDM, ADIREM³³, APMEP, SMF-SMAI (4 représentants chacun). La SMF, par le biais de ses représentants au bureau (J.-P. Kahane, A. Yger) avait soutenu ce changement. Il y aura 3 membres de la SMF dans l'Assemblée Générale (prochaine réunion avec élection du président prévue le 9 juin) : J. Wolfmann, J. Yebbou et A. Yger (membre du bureau de la CFEM).

Un chantier actif poursuivi par le CFEM durant l'année 2005-2006 a été la mise en place (conjointement avec l'université de Sherbrooke) des troisièmes rencontres scientifiques de l'Espace Mathématique Francophone (EPM03) qui se tiennent actuellement à Québec : une délégation française de 78 participants, des participations actives via les conférences plénières (A. Djebbar, C. Laborde), une part importante étant dévolue aux présentations françaises en matière d'instrumentation technologique dans l'enseignement des mathématiques.

Au niveau des relations internationales, les chantiers des études CIEM (International Commission for Mathematics Instruction) ont été menés à terme (Trondheim, été 2006, Hanoï, prévue hiver 2006). Dans le cadre du séminaire de didactique, une

²⁸ Institut National de Recherche Pédagogique

²⁹ <http://educmath.inrp.fr/Educmath>

³⁰ Association des Professeurs de Biologie-Géologie

³¹ Union des Professeurs de Physique-Chimie

³² Conférence Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques

³³ Association des Directeurs d'IREM

journée célébrant les 20 ans de la première étude CIEM a été organisée à l'IHP en mars 2006.

Concernant la gestion des fonds de solidarité, un projet est à l'étude concernant la formation de professeurs de mathématiques à l'ENS de Bamako.

En conclusion, on peut souligner le rôle important (et majeur) joué par l'ARDM au sein de la CFEM. Le rôle de la communauté mathématique (tant SMAI que SMF) y est plus difficile à cerner.

Rapport financier

Pour la deuxième année consécutive, le résultat de l'année 2005 (hors CIRM) est positif avec un bénéfice de 57 k€, double de celui de 2004 (30 k€). Deux remarques néanmoins s'imposent : les dépenses liées à la réorganisation des postes administratifs du siège (17,5 k€) ont pu être absorbées, d'autre part la nouvelle réglementation liée à l'immobilisation des actifs en vigueur depuis le premier janvier 2005 permet d'allonger la durée d'amortissement ce qui réduit la charge de la maison de la SMF de 15 k€ environ. Le bénéfice dégagé cette année est dû pour l'essentiel (50 k€) à l'indemnisation par la MAIF du sinistre qui a eu lieu à la maison de la SMF.

L'équilibre budgétaire reflète une bonne maîtrise dans la gestion des dépenses.

Grandes masses de l'exécution du budget

Le volume des recettes varie peu : 809 k€ en 2005, 751 k€ en 2004, 815 k€ en 2003. Il n'y a pas eu en 2005 d'actions spécifiques générant des flux financiers importants. Le volume des recettes comme celui des dépenses a peu varié par rapport à l'année précédente, respectivement 809 k€ en 2005, 751 k€ en 2004 pour les recettes et 752 k€ en 2005, 721 k€ en 2004 pour les dépenses.

Produits d'exploitation

Les recettes représentent en 2005 environ 809 k€ (751 k€ en 2004).

(1) Recettes dues aux deux principales revues : en forte augmentation 359 k€ (contre 314 k€ en 2004).

(2) Cotisations, abonnements à la *Gazette* : 111 k€ en 2005, de même niveau qu'en 2004.

(3) Produits financiers : en hausse avec 17 k€ en 2005 à comparer aux 22 k€ constatés en 2004 qui comprennent 11 k€ de remboursements d'intérêts de prêts faits au CIRM.

Subventions

Les subventions pour l'activité d'édition (31 k€ pour 32 k€ en 2004 et 31 k€ en 2003) sont stables.

Charges d'exploitation

Avec 752 k€ en 2005, la baisse constatée l'an dernier est stoppée : 721 k€ en 2004, 826 k€ en 2003, 943 k€ en 2002.

(1) La masse salariale augmente à 316 k€ en 2005 pour 278 k€ en 2004, 275 k€ en 2003.

C'est un poste qui restera important dans les années à venir.

(2) Les frais de fabrication, hors composition, restent très maîtrisés : 82 k€ en 2005 (dont 10 k€ pour Documents mathématiques qui n'apparaissait pas en 2004), 77 k€ en 2004, 87 k€ en 2003, 104 k€ en 2002.

(3) Les honoraires (15,6 k€ dont 11,6 k€ pour l'expert comptable) et assurances (2 k€) sont à un niveau comparable à 2004.

(4) Enfin la maintenance informatique et la maintenance du serveur avec un montant de 8 k€ diminuent de 34% alors que les frais généraux (fournitures diverses...) avec un montant de 39 k€ enregistrent une augmentation de 31%. Cette augmentation est pour une bonne part due à la clarification et la régularisation des charges entre la maison de la SMF et le CIRM.

Astérisque, Bulletins et Mémoires

Ces revues représentent à elles deux près de 80% des résultats. On constate que :

- *Astérisque* continue à progresser, avec un déficit limité à 5 k€ en 2005. Ce déficit s'élevait à 34 k€ en 2004 et à 40 k€ en 2003. Les ventes ont augmenté de près de 30% ;

- le déficit de *Bulletins et Mémoires* (35 k€) se poursuit. Il était de 20 k€ en 2004 et de 13 k€ en 2003.

Autres publications

(1) *Panoramas et Synthèses* est en progression avec un bénéfice de 7 k€ après avoir atteint l'équilibre en 2004.

(2) *Cours Spécialisés* progresse avec un bénéfice de 10 k€ (8 k€ en 2004).

(3) *Séminaires et Congrès*. Le bon résultat attendu l'an dernier s'est réalisé avec un bénéfice de 2,5 k€. Les ventes ont enregistré une très forte augmentation (plus de 50%), celles des *Cours Spécialisés* augmentent de 12% avec un volume de 19957 exemplaires vendus en 2005.

(4) *Documents mathématiques* montre un déficit de près de 4 k€ qui s'explique par les dates de fabrication et de retraitage dont le résultat positif devrait se reporter sur l'année 2006.

(5) Le déficit de la Revue d'Histoire des Mathématiques s'accroît de 4 k€ en 2004 à 12 k€ en 2005.

Budget du CIRM

Le budget du CIRM est présenté et géré de façon séparée de celui de la SMF.

Pour les actions communes entre le CIRM et la Maison de la SMF (AOT, courrier, entretiens divers) les parts respectives prises en charge financièrement ont été précisées par une convention.

Le CIRM est amené à revenir à une prise en compte des subventions analogue à ce qui se pratiquait avant l'an 2000, en distinguant les investissements mobiliers et les investissements immobiliers ce qui a un impact sur le niveau du résultat par le biais des amortissements, mais pas sur la réalité de la trésorerie.

De plus, une nouvelle réglementation sur la comptabilité des actifs est applicable à compter du 1er janvier 2005. Les durées d'amortissement ne sont plus standardisées par type d'immobilisations. Ainsi la durée de vie du gros œuvre des bâtiments pourra être allongée de 20 à 40 ans, compte tenu du bon état de conservation de ceux-ci, ce qui réduit la charge d'amortissement.

Conclusion sur la situation financière

La situation financière de la SMF (hors CIRM) est à l'équilibre avec un bénéfice apparent de 57 k€ pour un budget de 728 k€. Le bénéfice réel n'est que de 7 k€ si l'on neutralise les 50 k€ d'indemnisation versées par la MAIF. La gestion des dépenses et la maîtrise des coûts de fabrication sont rigoureuses. La tendance à l'effritement du niveau des cotisations se ralentit. La vente au numéro de plusieurs des collections (Astérisque, Panoramas et Synthèses, Séminaires et Congrès, Cours Spécialisés) a fortement progressé.



Quadrature

*Le magazine de mathématiques
« pures et épicées »*



- Alphanumérisme
 - Probabilités et statistiques
 - Étymologie
 - Arithmétique
- Analyse
 - Histoire des mathématiques
 - Géométrie
 - Logique
- Coin des problèmes
 - Physique mathématique
 - Nouvelles

Quadrature, magazine de mathématiques pures et appliquées, **s'adresse aux enseignants, étudiants, ingénieurs, amateurs de mathématiques**. La plupart des articles requièrent un bon niveau de terminale scientifique ou une première année de premier cycle. Les auteurs sont des mathématiciens, mais aussi des enseignants motivés et des étudiants.

Quadrature est éclectique : certains articles présentent des mathématiques toutes récentes, tandis que d'autres donnent un nouveau point de vue sur des sujets traditionnels ou encore ressuscitent des questions de géométrie ancienne ! On trouve également dans le magazine un **forum**, des **nouvelles**, des **notes de lecture**, des **articles d'histoire des mathématiques** et des **articles de réflexion en relation avec l'actualité**. Enfin, un large « coin des problèmes » permet aux lecteurs de poser des questions, qu'ils en connaissent la réponse ou pas.

Quadrature est ouvert, en particulier aux jeunes. Le magazine publie régulièrement des TPE (travaux personnels encadrés) de terminale et premier cycle d'université. Revue publiée avec le concours du Centre national du livre.



BON DE COMMANDE	
NOM	INSTITUTION
ADRESSE	
CODE POSTAL	VILLE/PAYS
Paiement : ☐ Chèque (à l'ordre d'EDP Sciences)	
☐ Carte de crédit : ☐ Visa	
☐ Eurocard/Mastercard	
☐ American Express	
DATE/SIGNATURE	
Carte No: Date de validité :	

ISSN 1142-2785 • 4 numéros	France et Europe (TTC)	Reste du Monde (HT)
Abonnement pour 1 AN	☐ 32 €	☐ 37 €
Abonnement pour 2 ANS	☐ 58 €	☐ 68 €

Veuillez retourner ce bon de commande

EDP Sciences • 17 av. du Hoggar • B.P. 112 • P.A. Courtabœuf • F-91944 Les Ulis Cedex A
 Tél.: 33 (0)1 69 18 75 75 • Fax: 33 (0)1 69 86 06 78 • E-mail: quadrature@edpsciences.org



© Gérard Tronel

Yves Meyer lors de sa conférence à la BNF le 11 janvier 2006

MATHÉMATIQUES

Comment mesurer les surfaces ?

Yves Meyer¹

Ce texte a été rédigé par Yves Meyer à la suite de sa conférence « Pourquoi Lebesgue essayait de mesurer les surfaces, et n'y arrivait pas ? » donnée le 11 janvier 2006 à la Bibliothèque Nationale de France. Cette conférence était la première des quatre du cycle « Un texte, un mathématicien » organisée par la BnF, la SMF et la revue Tangente pour l'année 2006.

Ce problème a eu une extraordinaire fécondité. Posé dès les débuts de la civilisation, le problème de la mesure des surfaces a été l'une des sources de la géométrie; il a ensuite contribué à la découverte du calcul infinitésimal, puis de la théorie moderne de l'intégration (Borel et Lebesgue); il a finalement débouché sur la géométrie fractale et le traitement de l'image.

Archimède (-287, -212) découvrit comment mesurer l'aire comprise entre une parabole, sa tangente au sommet et deux droites parallèles à l'axe L de la parabole. Pour ce faire, Archimède découpait la surface en de très fines lamelles parallèles à L . Archimède inventait le calcul infinitésimal et préluait ainsi aux mathématiques du XVII^e et du XVIII^e siècle. Au début du XX^e siècle, Emile Borel et Henri Lebesgue fondèrent la théorie moderne de la mesure qui permet de calculer essentiellement toutes les aires planes (techniquement, les aires de tous les ensembles boréliens) et tous les volumes dans l'espace. Les œuvres de Borel et de Lebesgue constituent le socle sur lequel est bâti le calcul des probabilités, car la probabilité d'un événement est la mesure de l'ensemble des instances où il se produit. En 1902, Henri Lebesgue posa avec insistance le problème de *la mesure des surfaces d'objets tridimensionnels*. Quand ces surfaces sont assez régulières, la méthode classique de la triangulation suffit aux besoins. Mais que faire dans le cas le plus général? Lebesgue cherchait à mesurer les surfaces d'objets rugueux, pointus, présentant des aspérités et ayant une géométrie complexe. Pour Lebesgue une feuille de papier froissée était une figure aussi intéressante que la surface d'une sphère.

Abram Besicovitch, Felix Hausdorff, Leonida Tonelli et Ennio De Giorgi ont donné des réponses différentes et même contradictoires aux questions posées par Lebesgue et, ce faisant, ont ouvert de nouvelles voies aux mathématiques pures et appliquées. Les géométries fractales et les algorithmes modernes de traitement de l'image sont directement issus de leurs travaux. Mais il convient d'abord de revenir à Camille Jordan (1838-1922). Il introduisit les *fonctions à variation bornée* qui furent une source d'inspiration, mais aussi un piège pour Lebesgue. Une fonction f

¹ Hervé Pajot m'a aidé à améliorer ce texte et je l'en remercie chaleureusement.

définie sur l'intervalle $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes, est à variation bornée si les sommes $\sum_1^N |f(t_{j+1}) - f(t_j)|$ étendues à toutes les partitions $a = t_0 \leq \dots \leq t_j \leq t_{j+1} \leq \dots \leq t_N = b$ de $[a, b]$ ne dépassent pas une certaine constante C et la plus petite de ces constantes est la *variation* totale de f sur $[a, b]$. La fonction $f(t) = t \sin(1/t)$, $0 \leq t \leq 1$, n'est pas à variation bornée sur $[0, 1]$ alors que $g(t) = t \sin(1/\sqrt{t})$, $0 \leq t \leq 1$, l'est. Jordan définit la longueur d'une courbe Γ , comme la limite, quand le plus grand côté tend vers 0, des longueurs des lignes polygonales inscrites. Une courbe de longueur finie est dite rectifiable. Les fonctions à variation bornée servent à paramétrer les courbes rectifiables. En effet, soit $z(t) = x(t) + iy(t)$, $0 \leq t \leq 1$, une représentation paramétrique d'une courbe rectifiable Γ . Camille Jordan nous apprend que la longueur de Γ est égale à la variation totale de $z(t)$. *La théorie de Jordan peut-elle être étendue aux surfaces ?* C'est la question qui fut posée par Camille Jordan à Lebesgue.

1. Henri Lebesgue

Henri Lebesgue naquit à Beauvais, en 1875. Son père, ouvrier typographe, mourut de la tuberculose. Ses deux sœurs aînées furent aussi emportées par cette maladie. Sa mère travailla durement pour subvenir aux besoins de la famille. Après de brillantes études, Lebesgue entra à l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm en 1894. Il écrivit sa thèse alors qu'il enseignait au lycée de Nancy. Il soutint cette thèse en 1902. Il fut alors nommé professeur à l'université de Rennes, puis de Poitiers et enfin à la Sorbonne en 1910. Professeur au Collège de France en 1921, il fut élu à l'Académie des Sciences en 1922. Il mourut à Paris en 1941.

Dans sa thèse, Lebesgue donna une définition nouvelle de la primitive $F(x)$ d'une fonction $f(x)$ de la variable réelle x ; $F(x)$ est l'aire de la surface S délimitée par le graphe de $f(\cdot)$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées (c-à-d. la droite d'abscisse 0) et la droite d'abscisse x . Lebesgue nous apprend que cette aire se calcule en divisant S en *finies lamelles horizontales* d'épaisseur h et en laissant ensuite h tendre vers 0. Cette approche est bien meilleure que la méthode d'Archimède, car elle introduit une plus grande stabilité dans les calculs numériques. On aboutit ainsi aux fonctions intégrables au sens de Lebesgue et l'on peut se libérer des conditions superflues (continuité, etc.) qui étaient imposées à $f(x)$ depuis les travaux de Riemann.

Comme Einstein le faisait à la même époque pour la Physique, Lebesgue revint aux fondements de la géométrie et aux problèmes posés par la mesure des grandeurs. Il souleva les questions suivantes : *Qu'est-ce qu'un volume ? Une surface ? Une frontière ? Comment calculer la surface d'un épi de blé ? Combien vaut la surface d'un arbre ?* Aujourd'hui Lebesgue nous aurait demandé ce que signifie la phrase : « *La surface du cortex cérébral est de $2m^2$* ». Les mathématiques qu'on avait enseignées à Lebesgue ne permettaient pas même de calculer la surface d'une feuille de papier froissée. Lebesgue l'observait avec malice alors qu'il était encore étudiant à l'École Normale Supérieure. La notion d'ensemble avait été chavirée par les travaux de Georg Cantor (1845-1918). Avant Cantor, les formes géométriques étaient lisses et régulières et l'on pouvait aisément en calculer la surface. Les nouveaux objets (ensembles) étudiés à partir de Cantor peuvent être rugueux, hérissés de pointes, fragmentés, tout comme le sont les objets qui nous entourent. Lebesgue se présenta donc comme un mathématicien appliqué quand il écrivit : « *Réduite aux théories générales, les mathématiques deviendraient une*

belle forme sans contenu ; elles mourraient rapidement. » Lebesgue se passionnait pour la « géométrie élémentaire » et nous verrons que cette passion ouvrit de nouvelles voies à l'analyse mathématique. Lebesgue définit l'aire d'une surface comme suit :

Définition 1. On appellera aire d'une surface S la plus petite des limites des aires des surfaces polyédrales tendant vers S .

Il revient au même de demander aux S_j d'être des surfaces suffisamment régulières. Mais il reste à savoir en quel sens les surfaces approchées tendent vers S . Lebesgue pensait-il à la distance de Hausdorff définie comme suit ?

Si E et F sont deux ensembles fermés, la distance de Hausdorff entre E et F est notée $d(E, F)$ et est définie par la condition suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, on a $d(E, F) < \varepsilon$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

- (a) pour tout $x \in E$, il existe un $y \in F$ tel que $|x - y| \leq \varepsilon$
- (b) la même propriété a lieu quand E et F sont échangés.

Filippo Santambrogio, jeune chercheur à l'École Normale Supérieure de Pise, m'a fait observer que si l'on utilisait ces définitions, la surface du carré unité C serait nulle. Il est en effet possible de construire, pour tout ε positif, une route en zigzag qui parcourt C en pénétrant dans chaque carré de côté ε . On peut faire en sorte que la largeur de cette route soit si petite que son aire ne dépasse pas ε . On arrive à la contradiction désirée (FIG. 1).

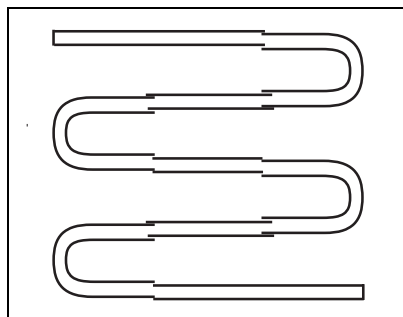


FIG. 1

Mais à l'intérieur du texte intitulé *Sur la définition de l'aire des surfaces*, Lebesgue répond en partie à cette objection en précisant la notion de convergence. Il écrit :

« Ayant à mesurer une surface S , il nous faudra considérer des surfaces polyédrales $S_1, S_2, \dots$, correspondant point à point d'une façon biunivoque et continue à S , et tendant vers S . »

Mais, là encore, le contre-exemple de Filippo Santambrogio contredit cette nouvelle définition. Il est probable que Lebesgue demandait que l'homéomorphisme $\Theta_j : S \mapsto S_j$ converge vers l'identité. Lebesgue avait en vue des surfaces paramétrées, définies par trois équations $x = f(u, v); y = g(u, v); z = h(u, v)$, $(u, v) \in D$, où f, g, h sont trois fonctions continues dans le disque unité D . Pour une surface fermée le disque unité serait remplacé par la sphère unité. Supposons que les $\Phi_j = (f_j, g_j, h_j)$ paramétrant S_j et $\Phi = (f, g, h)$ paramétrant S soient des applications

biunivoques de D sur S_j ou S . Alors l'approximation des S_j vers S définie par Lebesgue équivaut à la condition que les applications Φ_j convergent uniformément sur D vers Φ . Le problème posé par l'instabilité de la mesure d'une surface quand on modifie légèrement celle-ci est riche et difficile. Bien entendu on peut déplacer le problème et associer à une surface S un objet mathématique σ appelé *mesure de surface*, dont le support est S et qui est défini par la condition que, pour tout ensemble borélien B , la mesure de la surface de $S \cap B$ soit égale à $\sigma(B)$. On peut alors définir la convergence des surfaces S_j vers S par la convergence faible des mesures de surface σ_j vers σ . S'il en est ainsi, cette convergence entraîne celle des mesures des surfaces des S_j vers celle de S . Ce point de vue sera utilisé par De Giorgi, comme nous le verrons ci-dessous. Le lecteur qui voudrait en savoir plus se reportera au livre de Guy David [6], page 217, Théorème 4.

Camille Jordan critiqua la définition 1 en termes assez vifs [10] :

« Je ne suis pas satisfait par ce que vous avez dit de l'aire des surfaces. Vous dites que vous édifiez, pour la mesure des aires des surfaces, une théorie entièrement analogue à celle de la mesure des longueurs des courbes mais, pourtant, vous laissez sans réponses des problèmes essentiels alors que ces problèmes sont résolus dans le cas des courbes. Une courbe $x = f(t)$; $y = g(t)$; $z = h(t)$ étant donnée, nous savons quelle suite d'opérations il nous faut effectuer sur f , g , h pour reconnaître si la courbe est rectifiable et pour calculer sa longueur finie ou infinie; vous ne dites rien du problème analogue pour les surfaces données par trois équations $x = f(u, v)$; $y = g(u, v)$; $z = h(u, v)$. De là résulte aussi que tandis que l'on sait construire les formes les plus générales des fonctions $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ relatives aux courbes rectifiables, vous ne nous apprenez pas à former les fonctions $f(u, v)$, $g(u, v)$, $h(u, v)$ donnant des surfaces quarrables. »

Nous verrons que Felix Hausdorff, Abram Besicovitch, Leonida Tonelli et Ennio De Giorgi ont chacun apporté une réponse différente aux trois questions suivantes : *la définition donnée par Lebesgue est-elle cohérente ? Comment répondre au problème posé par Jordan ? Comment calculer l'aire du graphe S d'une fonction définie sur le carré unité ?*

Une des motivations de Lebesgue était le célèbre problème des surfaces minimales posé par Plateau. Joseph Plateau (1801-1883) fut un précurseur du dessin animé : il inventa en 1883 un appareil de projection fondé sur la persistance des impressions visuelles. Il posa le problème de la détermination de la surface d'aire minimale ayant une courbe donnée pour bord, problème essentiel dans l'étude des lames minces liquides. Une courbe fermée Γ est fixée dans l'espace et l'on cherche à construire la surface Σ délimitée par Γ dont l'aire soit la plus petite possible. Ce problème est résolu par l'expérience des bulles de savon s'appuyant sur Γ . Comme le remarque Lebesgue, on ne peut résoudre ce problème qu'à condition de laisser concourir *toutes les surfaces* Σ délimitées par Γ et dont l'aire a un sens. Lebesgue le dit avec force quand il écrit :

« Bref nous avons tous fait cette faute de confondre borne inférieure et minimum; mais il y a un profit certain quoique d'un autre ordre, à constater avec quelle facilité nous errons et qu'il

suffit d'avoir donné un aspect géométrique à une erreur classique et ancienne pour que personne ne la reconnaisse plus. »

David Hilbert avait alors introduit la *méthode directe* en calcul des variations. Le minimum n'est atteint que si l'on dispose d'une certaine forme de compacité s'appliquant à l'espace où ce minimum est recherché. La méthode directe de Hilbert nous oblige donc à étudier la question posée par Jordan : comment paramétriser l'ensemble des surfaces possédant une aire et vérifier la propriété de compacité requise par la méthode directe de Hilbert ? La solution sera donnée par Leonida Tonelli.

2. Felix Hausdorff

Hausdorff naquit à Breslau en 1868. Il fut nommé professeur à l'université de Leipzig en 1902. Il y enseigna jusqu'en 1910 et accepta alors une offre de l'université de Bonn. Sous le pseudonyme de Paul Mongré, il publia des ouvrages littéraires et philosophiques. Hausdorff était extrêmement modeste et son collègue Study eut du mal à le convaincre de se consacrer aux mathématiques. Hausdorff enseigna à Bonn jusqu'en 1935. Il fut alors chassé de l'université par les Nazis. En 1942, il décida avec sa femme et sa belle-sœur de se suicider, évitant ainsi la déportation et les camps.

Ses travaux mathématiques concernent la théorie des ensembles et les fondements de la topologie. Il étudia le même problème que Lebesgue, mais avant de calculer les aires des surfaces, il chercha à savoir quels sont les objets dont on puisse dire qu'ils sont de dimension 2. Ce faisant, Hausdorff définit la dimension d'un objet (c'est-à-dire d'un ensemble arbitraire). Cette définition sera utilisée par Benoît Mandelbrot pour décrire et analyser certains objets complexes du monde qui nous entoure. Le travail fondateur de Hausdorff, *Dimension und äusseres Mass*, est publié en 1919 (voir la référence [2]). Voici ce dont il s'agit : soit F un espace métrique (dans lequel on sait mesurer les distances) et soit E une partie de F . On veut définir la dimension de E . Soit s un nombre réel qui est candidat pour être la dimension de E . Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère tous les recouvrements possibles de E par une suite (a priori infinie) d'ensembles U_j de diamètre $r_j < \varepsilon$. On définit la constante α_s de façon appropriée en fonction du volume de la boule unité en dimension s (quand s est entier). On calcule alors la somme (finie ou infinie) de la série $\sum_1^\infty r_j^s$ pour chacun de ces recouvrements et l'on appelle $H(s, \varepsilon; E)$ la borne inférieure de ces sommes (multipliées par la constante α_s), en essayant et testant tous les recouvrements par des ensembles de diamètre ne dépassant pas ε . Dans ces conditions $H(s, \varepsilon; E)$ est une fonction décroissante de $\varepsilon > 0$ et a une limite (éventuellement infinie) si ε tend vers 0. Cette limite est la « mesure extérieure $M(s; E)$ de E en dimension s ». Le rôle de la constante α_s est de faire en sorte que $M(s; E)$ coïncide avec la surface ou le volume usuels quand s est un entier.

Définition 2. *La dimension de E est la borne supérieure des s tels que la mesure extérieure $M(s, E)$ soit infinie. C'est aussi la borne inférieure des s tels que $M(s, E)$ soit nulle.*

Voici trois exemples de structures fractales. L'ensemble triadique de Cantor sera notre premier exemple ; il est construit en « creusant des trous » dans l'intervalle $E = [0, 1]$. Le premier trou est l'intervalle ouvert $(1/3, 2/3)$ que l'on retire. Il

reste deux intervalles de longueur $1/3$ dans lesquels on répète l'opération. On obtient successivement $E_1, E_2, \dots, E_j, \dots$. L'ensemble E_j se compose donc de 2^j intervalles de longueur 3^{-j} . L'ensemble triadique de Cantor est l'intersection des E_j , $j \geq 1$. Il peut être aussi défini comme l'ensemble de tous les nombres réels dont le développement en base 3 ne contient aucun 1 ; on admet les développements ne contenant que des 0 à partir d'un certain rang ou des 2 à partir d'un certain rang. La dimension de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor est égale à $\log 2 / \log 3$. L'ensemble triadique de Cantor est totalement discontinu ; c'est de la poussière d'ensemble.

Un exemple plus intéressant, car connexe, d'un seul tenant, est fourni par l'ensemble du plan défini comme suit. On part du carré unité D que l'on découpe en 9 carrés de côté $1/3$. On supprime le carré central et l'on obtient ainsi une sorte de couronne E_1 composée de 8 carrés D_j de côté $1/3$. On itère l'opération sur chacun de ces carrés et l'on obtient alors un ensemble E_2 qui se compose de 8 petites couronnes. Finalement l'ensemble que nous voulons construire (nommé tapis de Sierpinski) est l'intersection E des E_j . Cet ensemble E a pour dimension de Hausdorff $\frac{\log 8}{\log 3}$. C'est un objet connexe, d'un seul tenant, intermédiaire entre une courbe et une surface.

L'éponge de Sierpinski est notre troisième exemple ; c'est une architecture tri-dimensionnelle qui est définie comme suit. On part du cube unité Q . On appelle L_1, L_2, L_3 , les trois axes de symétrie de Q qui sont perpendiculaires aux faces F_1, F_2, F_3 de Q . On découpe alors Q en 27 sous-cubes de côté $1/3$. On appelle $C_1 \subset F_1, C_2 \subset F_2, C_3 \subset F_3$, les trois carrés concentriques de côté $1/3$. On perce enfin trois tunnels dans Q autour des trois axes L_1, L_2, L_3 ; ces tunnels (ou galeries) ont pour section C_1, C_2, C_3 . Une fois ces trois galeries supprimées, il reste un ensemble connexe de 20 cubes fermés Q_j , $1 \leq j \leq 20$, de côté $1/3$. Toutes choses égales par ailleurs, on continue la construction : on perce à nouveau trois tunnels dans chacun de ces petits cubes Q_j . Ce qui subsiste est une suite décroissante d'ensembles compacts E_j dont l'intersection est l'éponge de Sierpinski E . Le volume de E est nul et un spécialiste de l'architecture gothique parlerait de « dentelle de pierre » en décrivant E . La dimension de Hausdorff de E est $\frac{\log 20}{\log 3}$. L'éponge de Sierpinski est plus épaisse qu'une surface sans être pour autant un volume. C'est, par ailleurs, un ensemble connexe, d'un seul tenant. Si l'on accepte l'hypothèse de travail que les définitions données par Lebesgue et par Hausdorff sont compatibles, alors la surface de l'éponge de Sierpinski est infinie, car $\frac{\log 20}{\log 3}$ est strictement supérieur à 2. Mais la définition de la mesure d'une surface donnée par Lebesgue est-elle compatible avec la théorie de Hausdorff ?

3. Abram Samoilovitch Besicovitch

Besicovitch naquit à Berdyansk, Russie, en 1891. C'est le troisième héros dont nous allons évoquer la vie. En 1917, après avoir soutenu sa thèse sous la direction de Markov, il est nommé professeur à l'université de Perm (Oural) qui venait d'être créée. Comme Pasternak le décrivit dans le « Docteur Jivago », la guerre civile fit rage à Perm et l'Armée Blanche prit le contrôle de Perm de 1918 à 1919. En 1919, Besicovitch fut nommé à Petrograd (aujourd'hui Saint-Pétersbourg). En 1924, il s'enfuit de l'Union Soviétique en franchissant à pied la frontière avec la Finlande.

Il arriva à Copenhague et s'établit définitivement à Cambridge en 1927. Il mourut à Cambridge en 1970.

Besicovitch s'attaqua au problème de savoir si la mesure des surfaces proposée par Lebesgue était compatible avec celle donnée par Hausdorff. À sa plus grande surprise, Besicovitch constata qu'il n'en est rien [3]. En se plaçant dans l'espace euclidien usuel, Besicovitch construisit une surface W , homéomorphe à la sphère et ayant deux propriétés contradictoires : W a une aire finie au sens de Lebesgue, mais a aussi une mesure tridimensionnelle positive. La dimension de Hausdorff de W est donc 3 alors que, pour Lebesgue, W est une surface. Dans les lignes qui suivent nous décrivons ce qui joue le rôle de l'hémisphère supérieur de W . L'objet étrange construit par Besicovitch est composé d'une sorte d'immeuble (qui sera noté D et sera la première partie de W) où l'on installe le chauffage central ; l'ensemble V des surfaces des tuyaux composera la seconde partie de W . On a donc $W = V \cup D$.

L'immeuble est obtenu en partant du cube unité A qui est décomposé en 8 cubes égaux, $A_1, \dots, A_8$, (de côté un peu plus petit que $1/2$) séparés par des murs. Chacun de ces sous-cubes est lui-même décomposé en 8 cubes égaux et séparés par des murs. On obtient ainsi une suite décroissante d'ensembles compacts D_j (D_j est la réunion de 8^j petits cubes) et l'on suppose que les murs sont de plus en plus fins, de sorte que la mesure de l'intersection D des D_j soit $1/2$. Voici pour l'immeuble dans lequel on va installer le chauffage central. Les tuyaux vont être construits de sorte qu'en se subdivisant de plus en plus, ils finissent par atteindre n'importe quel point de D . Au départ, le gros tuyau V_0 amène l'eau chaude de l'extérieur. En pénétrant dans A , ce gros tuyau se scinde immédiatement en 8 petits tuyaux qui vont circuler dans les murs pour déboucher dans les 8 appartements différents $A_1, \dots, A_8$, constituant la première approximation de l'immeuble. Après avoir pénétré dans ces appartements, chacun des 8 tuyaux se scinde en 8 plus petits tuyaux qui vont alimenter en eau chaude chacune des 8 pièces $A_{i,j}$ de l'appartement A_j . Les sections de tous les tuyaux sont carrées et un tuyau pénètre dans un cube à travers un petit carré dont le centre est le même que celui de la face correspondante.

On continue indéfiniment et chaque tuyau de la j -ième étape se scinde en 8 tuyaux encore plus fins. On obtient ainsi une tuyauterie dont la surface est notée V_j et l'on construit en même temps la représentation paramétrique Φ_j de V_j . Les V_j se terminent donc par 8^j tuyaux minuscules qui alimenteront autant de chambres de poupée à l'intérieur desquelles la construction continue. On appelle V la réunion des V_j , $j \geq 0$. C'est à ce propos que l'on demanda à Besicovitch s'il avait été plombier dans une vie antérieure. Comme nous l'avons dit, on peut organiser la pose des tuyaux pour que leurs branches indéfiniment continuées puissent atteindre n'importe quel élément de l'ensemble D . Il est facile de régler l'épaisseur des tuyaux pour que l'aire de leur surface V ne dépasse pas $\frac{1}{10}$. On montre sans peine que les Φ_j convergent uniformément vers une fonction continue Φ qui est définie sur le carré unité. Il en résulte qu'au sens de Lebesgue, la surface de $W = V \cup D$ ne dépasse pas $\frac{1}{10}$, puisque la distance entre W et V_j tend vers 0 quand j tend vers l'infini. Mais le volume de V est nul, celui de D est $1/2$ et donc celui de W est aussi $1/2$.

On obtient la contradiction désirée : la fermeture W de la tuyauterie V de

Besicovitch est à la fois une *surface* ayant une aire finie au sens donné par Lebesgue et un *volume* au sens de Hausdorff. On peut soit construire la partie symétrique, soit suivre Besicovitch et boucher l'origine du premier tuyau par un hémisphère. L'ensemble W est alors la frontière topologique d'un ensemble ouvert Ω homéomorphe à une boule tandis que W est une sphère dont la mesure de Lebesgue tri-dimensionnelle est positive (FIG. 2).

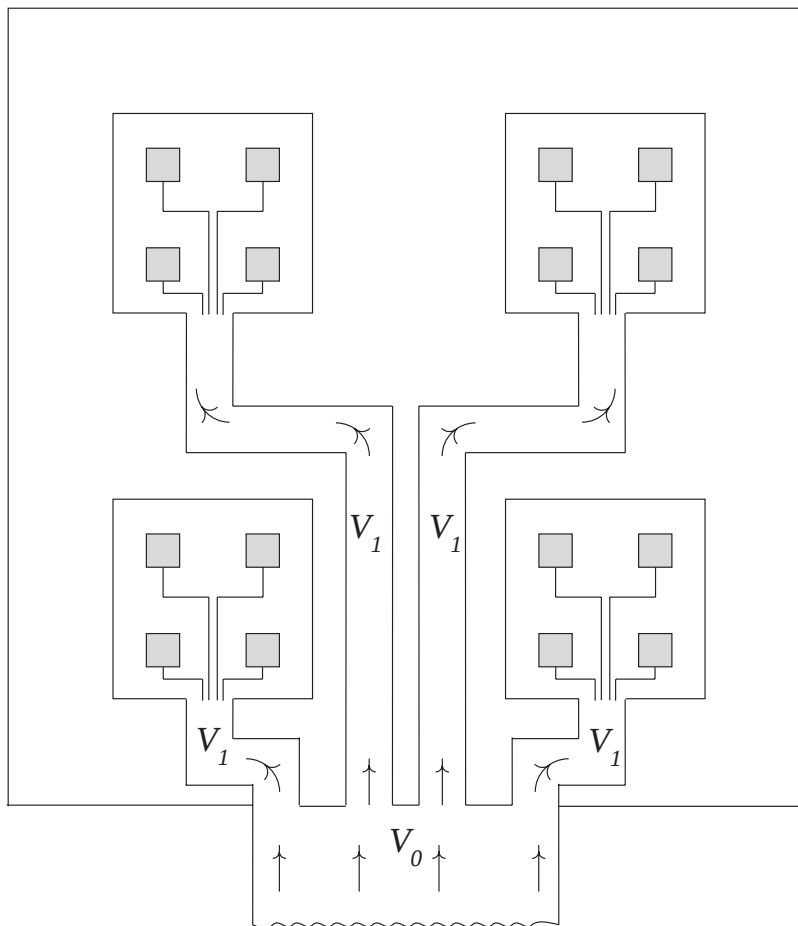


FIG. 2

On notera la similarité entre cette construction et celle d'une courbe de Jordan ayant une mesure positive. Pour construire une telle courbe, on part du carré unité D que l'on divise en quatre carrés D_j de côté $1/2$. On remplace alors ces quatre carrés par des carrés concentriques un peu plus petits de façon à aménager des murs. Ces quatre carrés forment l'ensemble E_1 . On continue la construction à l'intérieur de chaque carré composant E_1 et l'on obtient l'ensemble E_2 qui se compose de 16 carrés. On peut conduire cette construction de sorte que l'on ait $|E_j| > 1/2$. On appelle E l'intersection de la suite décroissante des E_j . La courbe Γ est construite par approximations successives et nous ne traçons ici qu'un quart de Γ . On part

du coin sud-ouest de D et l'on rejoint, par un segment, le coin sud-ouest du carré sud-ouest de E_1 . On échappe de ce carré et de E_1 par le nord-est et l'on rentre à nouveau dans E_1 par le coin sud-ouest du carré nord-ouest. On en sort par le nord-est du même carré et l'on visite de même les deux autres carrés de E_1 . On ne retouche plus à la partie de Γ qui est extérieure à E_1 et l'on précise alors ce qui se passe à l'intérieur de E_1 . On procède à l'intérieur de chaque carré de E_1 en adoptant une similarité parfaite avec ce que nous venons de faire et l'on continue indéfiniment. La courbe limite n'a pas de point double. On ne repasse jamais par un endroit déjà visité. En revanche la courbe limite contient E (FIG. 3). Elle a donc une mesure positive.

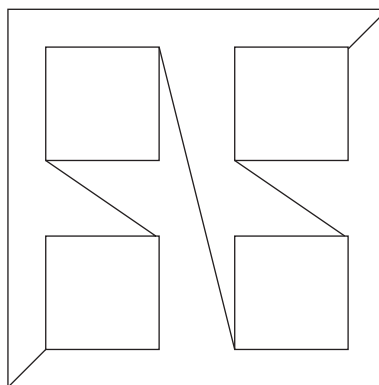


FIG. 3

4. Leonida Tonelli

Tonelli naquit à Gallipoli (Lecce), en 1885. Tonelli a fondé l'école italienne de calcul des variations et a contribué, par son énergie et son talent, à la renommée de l'École Normale Supérieure de Pise. Il mourut à Pise en 1946.

Tonelli répondit au problème posé par Jordan à Lebesgue en caractérisant l'espace BV des fonctions continues $f(x_1, x_2)$, définies dans le carré unité et dont le graphe Γ a, au sens de Lebesgue, une aire finie (notée $A(\Gamma)$). Ce graphe Γ est défini par $\{z = f(x, y), 0 \leq x, y \leq 1\}$. Tonelli réussit à donner un encadrement de $A(\Gamma)$ à l'aide de deux moyennes de longueurs de courbes tracées sur Γ . Plus précisément Tonelli démontra (Note aux CRAS du 10 mai 1926, référence [1]) que f appartient à BV si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies : (a) la variation totale $\beta(x_1)$ de la fonction $f(x_1, \cdot)$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, 1]$ et (b) la variation totale $\gamma(x_2)$ de la fonction $f(\cdot, x_2)$ est également intégrable sur $[0, 1]$. Tonelli ramena ainsi l'espace BV en deux variables à sa version unidimensionnelle. Écoutons Tonelli dans [1] :

« On a proposé plusieurs définitions pour l'aire d'une surface. La plus générale ... est la définition donnée par M. Lebesgue : L'aire d'une surface S est la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales dont S est la limite... Je me bornerai ici aux surfaces $z = f(x, y)$ où $f(x, y)$ est une fonction continue donnée dans le

carré $Q = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Je dirai qu'une fonction $f(x, y)$ est à variation bornée si :

(1) pour presque toutes les valeurs de $\bar{x}$ et $\bar{y}$ dans $(0, 1)$, $f(\bar{x}, y)$ et $f(x, \bar{y})$ sont des fonctions de y et de x , respectivement à variation bornée dans $(0, 1)$;

(2) les variations totales de $f(\bar{x}, y)$ et $f(x, \bar{y})$ dans $(0, 1)$ sont des fonctions intégrables (au sens de M. Lebesgue) de $\bar{x}$ et $\bar{y}$ dans $(0, 1)$.

La condition nécessaire et suffisante pour que la surface $z = f(x, y)$ soit quarrable est que la fonction $f(x, y)$ soit à variation bornée. »

Pendant longtemps l'espace BV s'est appelé « l'espace BV au sens de Tonelli », car de nombreux mathématiciens proposaient une définition différente et pensaient que les fonctions à variation bornée en deux variables devaient être définies comme des différences entre deux fonctions croissantes. L'espace BV a des caractérisations beaucoup plus simples. Parlons d'abord comme Tonelli l'aurait fait, sans utiliser le formalisme mathématique. Considérons une fonction f définie dans le plan, translatons f et donc son graphe Γ par une translation horizontale y et mesurons le volume $V(y)$ compris entre le graphe initial Γ et le graphe translaté Γ_y . Alors f est à variation bornée si et seulement si l'on a : $V(y) \leq C|y|$ pour toute translation y . En termes plus actuels on dira : Une fonction définie dans tout le plan appartient à BV si et seulement si il existe une constante C telle que, pour tout vecteur y , on ait

$$\int |f(x+y) - f(x)| dx \leq C|y|.$$

Ce résultat vaut en toute dimension. Dans le cas où la fonction f est la fonction indicatrice d'un ensemble E , l'opération à faire pour évaluer la norme BV est particulièrement simple. On déplace un peu E en le translatant par un vecteur y . On obtient ainsi un ensemble translaté E_y . On calcule la surface $\Delta(y)$ de la différence symétrique entre E et E_y . Finalement on divise cette aire $\Delta(y)$ par la longueur de y et l'on calcule le maximum de ces quotients. On obtient ainsi la norme BV de la fonction indicatrice de E , ce qui nous sert de transition avec l'œuvre de De Giorgi. Pensons à la surface extérieure d'une colonne de hauteur 1 dont E est la section. L'espace fonctionnel BV est le dual d'un autre espace fonctionnel. La boule unité de BV est donc faiblement compacte et la méthode directe du calcul des variations s'applique, comme le conjecturait Lebesgue.

5. Ennio De Giorgi

De Giorgi naquit à Lecce, en 1928, et mourut à Pise, en 1996. Il a éclairé ce débat de façon très originale en donnant raison, en un sens, à Lebesgue. Dans l'exemple, donné par Besicovitch, de l'ensemble ouvert Ω délimité par W , De Giorgi considère que l'on doit définir la « frontière » de Ω comme l'ensemble V des surfaces des tuyaux, en excluant l'ensemble D . Cette frontière réduite sera nommée « frontière distinguée » par De Giorgi. Pour définir la frontière distinguée, De Giorgi part du point de vue de la formule de Stokes. Il cherche donc à calculer l'intégrale de volume $I(g) = \int_{\Omega} \operatorname{div} g(x) dx$ à l'aide d'une intégrale de surface lorsque $g = (g_1, g_2, g_3)$ où g_1, g_2 et g_3 sont trois fonctions arbitraires de classe C^1 . Il s'attend à transformer

l'intégrale de volume en une intégrale de surface portant sur le bord $\Gamma = \partial\Omega$ de Ω et à obtenir $I(g) = \int_{\Gamma} g \cdot n \, d\sigma$ où n est le vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur et $d\sigma$ est l'élément de surface sur le bord Γ de Ω . Si l'on applique ce point de vue à l'exemple de Besicovitch, on obtient que $d\sigma$ est la mesure de surface sur V et ne charge donc pas l'ensemble D de mesure positive ; la formule de Stokes ignore la frontière topologique au profit de la frontière distinguée qui est beaucoup plus petite. La question suivante qui est posée est de savoir si, en toute généralité (l'ensemble Ω étant maintenant arbitraire) $d\sigma$ est une mesure, c'est-à-dire s'il existe une constante C telle que l'on ait $|I(g)| \leq C \sup\{|g(x)|; x \in \Gamma\}$. La frontière Γ est rectifiable au sens de De Giorgi si c'est le cas. De façon équivalente, il s'agit de savoir si la fonction indicatrice de Ω appartient à BV . Finalement De Giorgi définit dans [4] l'aire $A(\Gamma)$ du bord Γ de Ω comme la norme BV de la fonction indicatrice de Ω . La frontière distinguée de Ω est, par définition, le support de σ . La propriété de convergence imposée par Lebesgue a lieu : si une suite Ω_j converge vers Ω au sens de la convergence en mesure, alors on a bien $A(\Gamma) \leq \liminf A(\Gamma_j)$. Dans le texte qui suit, De Giorgi appelle « mesure de Carathéodory » ce que nous appelons aujourd'hui « mesure de Hausdorff ». De Giorgi écrit dans [4] :

« Per quanto riguarda la definizione di Carathéodory, si vede subito che essa fornisce in generale, per la misura della frontiera di un insieme, un valore maggiore del nostro, eventualmente infinito, quando il perimetro è finito, sicché tutte le frontiere di misura finita secondo Carathéodory sono tali secondo la nostra definizione e non viceversa. »

[En ce qui concerne la définition de Carathéodory, on voit tout de suite qu'en général elle fournit une valeur supérieure à la nôtre, éventuellement infinie, pour la mesure de la frontière d'un ensemble, alors même que le périmètre est fini ; de sorte que toute frontière de mesure finie au sens de Carathéodory est finie selon notre définition mais que la réciproque n'est pas vraie.]

6. Inégalités isopérimétriques

Les inégalités isopérimétriques répondent à un problème posé dès l'antiquité. Quelle est la plus grande surface que l'on puisse déployer à l'intérieur d'un contour de longueur donnée ? Une légende nous dit que la fondation de Carthage par Didon, la reine malheureuse, a été négociée en promettant de n'utiliser que la surface délimitée par une peau de bœuf. Didon a alors découpé cette peau de bœuf pour en faire une très fine lanière qui servit à entourer la surface de la ville. En trois dimensions nous voudrions savoir quel est le plus grand volume qui soit délimité par une surface d'aire donnée ? Ecrire ce problème nécessite de savoir ce que vaut une aire. De Giorgi nous apprend dans [4] que, si S est l'aire du « bord distingué » ∂^*E d'un ensemble borélien E , alors le volume $|E|$ de E vérifie toujours $|E| \leq cS^{3/2}$ où $c = \frac{1}{6\sqrt{\pi}}$. Ce résultat est remarquable parce qu'il est optimal : on ne peut faire mieux, car on a égalité si E est une boule. En outre dans le membre de droite ne figure que l'aire du bord distingué de E et non pas celle de la frontière de E . Cette dernière est bien plus grande et souvent infinie, ce qui affaiblirait le résultat.

Là encore, le point de vue des inégalités isopérimétriques donne raison à Lebesgue contre Besicovitch.

7. Le traitement de l'image

S. Osher, L. Rudin et E. Fatemi ont découvert une application aussi belle qu'inattendue des réflexions précédentes. Commençons par dire quelques mots des images digitales. Le niveau de gris en un point (x, y) d'une image en noir et blanc est un nombre compris entre 0 (noir) et 1 (blanc). Le plus souvent ce niveau de gris $f(x, y)$ est échantillonné sur 8 bits correspondant à 256 niveaux de gris. En outre le *pixel* (x, y) n'est pas un point arbitraire. Il appartient à une grille et les caméras numériques proposent, à l'heure actuelle, environ dix millions de pixels. Dans le cas d'une image en couleur, f devient un vecteur (f_1, f_2, f_3) utilisant trois couleurs primaires. Bien entendu, très peu de fonctions f proviennent d'images naturelles et le premier et le plus difficile problème du traitement de l'image consiste à en savoir plus : comment modéliser les images naturelles ? Le niveau de gris f est une fonction très structurée et cette structure n'est évidemment pas reliée à la régularité. L'éclairage est très irrégulier. Il y a une première source d'irrégularité dont l'origine vient de la géométrie du monde qui nous entoure ; l'éclairage des objets varie brutalement et ces variations sont dues aux bords des objets ou à des phénomènes d'occlusions. Une seconde source vient du bruit ou des fines textures que l'on rencontre dans toutes les images. Un second problème lui est apparenté : peut-on décomposer une image digitale f en la somme $f = u + v$ de deux composantes u et v de sorte que les objets contenus dans l'image constituent la première composante u tandis que v contienne les textures et le bruit ? Comment opérer cette décomposition ? Comment reconnaître et extraire les formes contenues dans l'image ? Osher, Rudin et Fatemi définissent la décomposition $f = u + v$ en minimisant la fonctionnelle $J(u) = \|u\|_{BV} + \lambda \|v\|_2^2$ où λ est un paramètre positif qui demande à être réglé avec soin. En effet les objets dont la taille est inférieure à $\frac{1}{2\lambda}$ sont incorporés dans la composante v par l'algorithme. Il est facile de justifier le rôle de l'espace BV dans ce problème. En fait les contours jouent un rôle essentiel en traitement de l'image. Faire un croquis revient à dessiner certains contours. Les contours doivent avoir une longueur finie sinon ils ne pourraient être dessinés. Si l'on considère le cas particulier d'une image dont l'éclairement ne prendrait qu'un nombre fini de valeurs, l'exigence que les contours soient de longueur finie signifie précisément que l'image digitale appartienne à BV .

Mumford et Shah proposèrent un autre modèle dont l'étude mathématique est conduite dans [6]. Dans le modèle de Mumford et Shah, l'image digitale est définie sur un carré Ω et la composante u appartient au sous-espace SBV de BV ; ce sous-espace se compose des fonctions u de BV qui représentent le mieux des images, au sens que u n'est « très irrégulière » que sur un ensemble singulier K de dimension de Hausdorff égale à 1. Alors les conditions imposées sur la composante $u(x)$ affectent deux termes. Le premier terme est la mesure de Hausdorff unidimensionnelle de K . Le second terme est la valeur quadratique moyenne du gradient de $u(x)$ calculé sur le complémentaire de K dans Ω . Le troisième terme composant la fonctionnelle $J(u)$ de Mumford et Shah est « la fidélité aux données », c'est-à-dire la valeur

quadratique moyenne de la différence v entre f et u . La fonctionnelle que l'on cherche à minimiser est donc

$$J(u) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \alpha H^1(K) + \beta \|v\|_{L^2}^2$$

où $H^1(K)$ est la mesure de Hausdorff uni-dimensionnelle.

Les deux paramètres α et β doivent être réglés avec soin. Comme c'est le cas pour le modèle d'Osher et Rudin, si α est trop petit, trop de morceaux de l'image seront pris pour des objets. Ce modèle pose des problèmes mathématiques très intéressants qui ont beaucoup de lien avec la théorie des surfaces minimales [6].

Je voudrais conclure cet exposé en reprenant à mon compte les propos d'Alain Aspect, médaille d'or du CNRS : des problèmes portant sur les fondements des sciences et qui pourraient sembler relever de la métaphysique peuvent avoir les applications les plus inattendues et les plus pratiques.

8. Références

1. La page qui a servi à définir cette conférence est la Note aux CRAS de Leonida Tonelli, présentée par Jacques Hadamard, le 10 mai 1926, et intitulée « Sur la quadrature des surfaces ». Cette note fournit la première définition de l'espace BV des fonctions à variation bornée. Pendant longtemps les analystes disaient encore « BV au sens de Tonelli. » La note de Tonelli répondait à un problème posé par Henri Lebesgue. Il s'agissait de généraliser aux surfaces le fait bien connu par Lebesgue qu'une courbe plane est de longueur finie si et seulement si elle est paramétrée par une fonction à variation bornée. Le piège qui a égaré les analystes est le fait que toute fonction, d'une variable réelle, à valeur réelle, qui est à variation bornée est la différence entre deux fonctions croissantes; c'est ce résultat qu'ils cherchèrent en vain à généraliser aux surfaces.
2. Le second texte fondateur est l'article de Felix Hausdorff intitulé « Dimension und äusseres Mass », Math. Ann. vol. 79 (1918) 157-179. Dans cet article Hausdorff définit la « mesure de Hausdorff » et la dimension d'un ensemble.
3. Le troisième héros de cette histoire est A. S. Besicovitch et l'article qui est discuté ici est « On the definition and value of the area of a surface », Quart. J. Math. vol 16 (1945) 86-102.
4. Le quatrième homme est Ennio De Giorgi et l'article fondateur est « Su una teoria generale della misura $(r-1)$ -dimensionale in uno spacio ad r dimensioni. » Annali di mat. pura e appl. Ser.4, vol. 36 (1954) 191-213.
5. David Mumford, Leonid Rudin, Stanley Osher et Emad Fatemi ont été les pionniers de l'introduction de l'espace BV en traitement de l'image. Les références sont : (1) David Mumford and Jayant Shah. *Boundary detection by minimizing functionals*. Proc. IEEE Conf. Comp. Vis. Pattern Recognition, 1985. (2) D. Mumford and J. Shah. *Optimal representations by piecewise smooth functions and associated variational problems*. Comm. Pure Applied Mathematics, 42 (5) (1989) 577-685. (3) Stanley Osher and Leonid Rudin. *Total variation based image restoration with free local constraints*. In Proc. IEEE ICIP, vol I, pages 31-35, Austin (Texas) USA, Nov.1994. (4) Stanley Osher, Leonid Rudin and Emad Fatemi. *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*. Physica D, 60 (1992) 259-268.

6. Le livre de référence sur la conjecture de Mumford-Shah est aujourd'hui le traité de Guy David, intitulé *Singular Sets of Minimizers for the Mumford-Shah Functional*, Birkhäuser, 2005.

7. Les amateurs de géométrie fractale doivent lire : *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, par Kenneth Falconer, John Wiley & Sons, 2000 ou bien : *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces : Fractals and Rectifiability*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **44**, par Pertti Mattila, Cambridge University Press (1995). On consultera aussi *Geometric Measure Theory, A beginner's guide* par Frank Morgan, Academic Press (1988).

8. Commentaires de Jean-Michel Morel :

« Je suis enchanté d'apprendre que Besicovitch avait conçu ses contre-exemples comme des systèmes de tuyauterie. C'est en partant de cet exemple, sans savoir qu'il était dû à Besicovitch, que Caselles et moi avons commencé à travailler sur les « ouverts irrigants ». Finalement on avait laissé cette voie pour le modèle d'irrigation simplifié que tu as vu dans la thèse de Bernot. J'adore les trois articles de Besicovich que j'ai lus dans le texte original, ils sont d'une astuce stupéfiante. Je peux t'en dire un peu plus sur BV et Mumford-Shah. C'est De Giorgi qui a diagnostiqué la présence de BV dans le modèle de Mumford-Shah. Mumford et Shah ignoraient complètement BV . Solimini et moi-même avons fait connaître à De Giorgi la conjecture de Mumford-Shah. Mais De Giorgi avait antérieurement formulé une conjecture plus générale. Il appelait ce type de problème « problème à discontinuité libre » et il s'inspirait de la fracturation et des cristaux liquides. Très élégamment il a adopté le nom de conjecture de Mumford-Shah alors que ce n'était qu'un cas particulier de son propre programme. Quant aux italiens ils étaient tellement saturés de conjectures de De Giorgi qu'ils étaient contents que l'une d'entre elles reçoive un nom venant d'ailleurs. C'est Leonid Rudin qui a eu le premier l'idée d'utiliser BV pour les images. Il s'inspirait d'un article de Kronrod qui contient la plupart des idées de la morphologie mathématique. »

9. Roger Temam a étudié, pour les besoins de la plasticité, les espaces $BD(\Omega)$ - pour bounded deformation - espaces introduits par Pierre Suquet pour ce qu'on appelle le modèle de plasticité de Hencky - qui est en fait un modèle d'élasticité non linéaire. Ces espaces sont des généralisations naturelles de l'espace BV . Les références sont :

G. Strang et R. Temam, *Existence de solutions relaxées pour les équations de la plasticité : étude d'un espace fonctionnel*, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, 287, 1978, 515-518.

G. Strang et R. Temam, *Functions of bounded deformations*, Arch. Rational Mech. Anal., 75, 1980, 7-21.

G. Strang et R. Temam, *Duality and relaxation in the variational problems of plasticity*, J. Mécanique, 19, 1980, 493-527. (Avec une préface de Paul Germain).

10. La critique adressée par Jordan à Lebesgue se trouve, page 163, de « Quelques remarques sur la définition de l'aire des surfaces », Fundamenta Mathematicae, VIII, 160-165, 2 octobre 1925. On consultera également « Sur la définition de l'aire des surfaces », H. Lebesgue, L'enseignement mathématique, (1908), 212-220.

Opérateurs géométriques et géométrie conforme

Zindine Djadli¹

1. Introduction

Dans ce survol nous présentons quelques résultats récents en géométrie conforme. L'origine de ce texte est un exposé au séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie de l'Université de Grenoble I donné par l'auteur en décembre 2004. Une version longue de ce texte sera publiée prochainement aux actes du séminaire de théorie spectrale et géométrie de Grenoble. Ce survol n'a pas vocation à être complètement exhaustif : il se présente comme une introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés et les problèmes de géométrie conforme sur les surfaces et sur les variétés de dimension 4.

Ce survol est divisé en quatre parties. Dans la première nous parlerons de l'inégalité de Moser-Trudinger (paragraphe 2) et son utilisation pour le traitement du problème de la courbure de Gauss prescrite (paragraphe 3). Dans la deuxième partie nous aborderons le problème de l'isospectralité sur les surfaces à travers l'inégalité de Polyakov qui est l'outil fondamental pour ce problème (paragraphe 4). Dans la troisième partie nous parlerons de la généralisation de ces outils et de ces problèmes au cas de la dimension 4 : l'opérateur de Paneitz (paragraphe 5) et l'existence de métriques extrémales pour la fonctionnelle log-déterminant sur les variétés de dimension 4 (paragraphe 6). La dernière partie sera consacrée aux applications et à l'utilisation de l'opérateur de Paneitz en géométrie conforme : l'existence de métriques à Q -courbure constante (paragraphe 7), l'étude d'une fonctionnelle quadratique à travers la recherche de métriques extrémales pour une fonctionnelle log-déterminant (paragraphe 8) et enfin l'étude de problèmes de rigidité en géométrie conforme (paragraphe 9).

Remerciements : Ma gratitude va à Gérard Besson et à Sylvain Gallot qui m'ont permis d'exposer mon travail au séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie de Grenoble et qui m'ont encouragé à écrire ce survol. Je les remercie également pour l'intérêt qu'ils n'ont cessé de manifester pour mon travail en géométrie conforme. Je voudrais également remercier Alice Chang et Paul Yang pour leur soutien constant.

2. Inégalité de Moser-Trudinger

L'un des outils fondamentaux pour l'étude de problèmes non linéaires sur les surfaces et plus particulièrement de problèmes elliptiques du type courbure de Gauss prescrite sur les surfaces, c'est-à-dire de problèmes elliptiques non linéaires avec non linéarité exponentielle est l'inégalité de Moser-Trudinger.

On notera dans toute la suite $W^{\alpha,q}$ (α entier et q réel plus grand que 1) l'ensemble des fonctions qui sont dans L^q et dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre α sont aussi dans L^q .

¹ Institut Fourier - Université Grenoble I

Rappelons que le théorème d'inclusion de Sobolev nous dit que pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on a (pour des réels α , p et q avec $q\alpha < n$)

$$W_0^{\alpha,q}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),$$

avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{n}$. Dans le cas $\alpha = 1$, $q < 2$ et $n = 2$ nous avons pour tout $p > 1$

$$W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega),$$

mais en général on ne peut pas passer à la limite sur p c'est-à-dire que l'inclusion $W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, est fautive en général. Pour s'en convaincre il suffit de considérer la fonction $u(x) = \log\left(1 + \log \frac{1}{|x|}\right)$ sur $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$. Malgré tout, Trudinger [Tru67] a obtenu l'intégrabilité L^2 de l'exponentielle dans le sens suivant

Théorème 1. *Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^2$. Il existe $C > 0$ et $\beta > 0$ ne dépendant que de Ω telles que pour toute fonction $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ vérifiant $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leq 1$, on a*

$$(1) \quad \int_\Omega e^{\beta u^2} dx \leq C \text{Vol}(\Omega, \text{euclidien}).$$

On écrit $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow e^{L^p(\Omega)}$.

Bien entendu il n'est pas très difficile de passer d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à une surface compacte et sans bord. Ce qui nous donne :

Théorème 2. *Soit (M^2, g) une surface compacte, sans bord et de classe C^∞ . Il existe $C > 0$ et $\beta > 0$ ne dépendant que de (M, g) telles que pour toute fonction $u \in W^{1,2}(M)$ vérifiant $\int_M u dv_g = 0$ et $\int_M |\nabla u|^2 dv_g \leq 1$, on a*

$$\int_M e^{\beta u^2} dx \leq C \text{Vol}(M, g).$$

On écrit $W^{1,2}(M) \hookrightarrow e^{L^p(M)}$.

Moser a montré que si (M, g) est la sphère standard $(\mathbb{S}^2, g_c)$ on peut prendre $\beta = 4\pi$ dans le théorème précédent et de plus cette valeur est optimale au sens où pour tout $\beta > 4\pi$ il existe une suite $(u_i)_i \subset W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$ telle que $\int_M |\nabla u_i|^2 dv_g \leq 1$ pour tout i et

$$\int_{\mathbb{S}^2} \exp(\beta u_i^2) dv_{g_c} \rightarrow +\infty$$

lorsque i tend vers l'infini. On peut énoncer le théorème :

Théorème 3. *Soit $(\mathbb{S}^2, g_c)$ la 2-sphère standard. Il existe $C > 0$ telle que pour toute fonction $u \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$ vérifiant $\int_{\mathbb{S}^2} u dv_{g_c} = 0$ et $\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 dv_{g_c} \leq 1$, on a*

$$\int_{\mathbb{S}^2} e^{4\pi u^2} dv_{g_c} \leq C.$$

Par conséquent, en posant $C_1 := \log C + \log \frac{1}{4\pi}$, on a pour tout $u \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$

$$(2) \quad \log \int_{\mathbb{S}^2} e^{2u} dv_{g_c} \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 dv_{g_c} + 2 \int_{\mathbb{S}^2} u dv_{g_c} + C_1.$$

Pour les fonctions qui sont symétriques Moser [Mos71] a amélioré cette inégalité en prouvant :

Théorème 4. *Soit $(\mathbb{S}^2, g_c)$ la 2-sphère standard. Il existe $C > 0$ telle que pour toute fonction $u \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$ vérifiant $u(\xi) = u(-\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{S}^2$, $\int_{\mathbb{S}^2} u dv_{g_c} = 0$ et $\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 dv_{g_c} \leq 1$, on a*

$$\int_{\mathbb{S}^2} e^{8\pi u^2} dv_{g_c} \leq C.$$

Par conséquent, en posant $C_1 := \log C + \log \frac{1}{4\pi}$, on a pour tout $u \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$

$$(3) \quad \log \int_{\mathbb{S}^2} e^{2u} dv_{g_c} \leq \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 dv_{g_c} + 2 \int_{\mathbb{S}^2} u dv_{g_c} + C_1.$$

Il existe une version optimale de l'inégalité (2) qui est due à Onofri [Ono82] :

Théorème 5. *Soit $(\mathbb{S}^2, g_c)$ la 2-sphère standard. On a pour tout $u \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$*

$$(4) \quad \log \int_{\mathbb{S}^2} e^{2u} dv_{g_c} \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u|^2 dv_{g_c} + 2 \int_{\mathbb{S}^2} u dv_{g_c}.$$

De plus on a égalité dans cette inégalité si et seulement si $e^{2u} g_c$ est isométrique à g_c .

Ce théorème joue un rôle fondamental dans l'étude de familles isospectrales sur la sphère dont nous reparlerons au paragraphe 4.

3. Courbure de Gauss et problèmes elliptiques associés

Considérons une surface compacte M^2 , sans bord équipée d'une métrique que l'on notera g_0 . A cette métrique est associée sa courbure de Gauss que nous noterons K_{g_0} . Dans cette partie nous nous pencherons sur le comportement de la courbure de Gauss lors d'un changement conforme de métrique, c'est-à-dire lorsque l'on considère une métrique de la forme

$$g_w := e^{2w} g_0,$$

où w est une fonction de classe C^∞ sur M . Il existe une relation très simple entre la courbure de Gauss pour la métrique g_0 et la courbure de Gauss pour la métrique g_w ; si on note Δ_{g_0} l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à g_0 , elle est donnée par la proposition suivante :

Proposition 1. *On a la relation*

$$(5) \quad \Delta_{g_0} w + K_{g_w} e^{2w} = K_{g_0}.$$

Cette équation est souvent appelée équation de courbure de Gauss prescrite. La preuve de cette relation est purement locale et utilise l'expression de la courbure en coordonnées locales. Une remarque importante découle directement de cette équation ; si on intègre celle-ci de chaque coté on obtient

$$\int_M K_{g_0} dv_{g_0} = \int_M K_{g_w} e^{2w} dv_{g_0} = \int_M K_{g_w} dv_{g_w},$$

autrement dit $\int_M K_{g_w} dv_{g_w}$ est un invariant conforme, i.e. indépendante de w . Nous verrons que cette quantité joue un rôle fondamental dans l'étude de l'équation

de courbure scalaire prescrite. En fait $\int_M K_g dv_g$ est bien mieux qu'un invariant conforme puisque la formule de Gauss-Bonnet nous indique que c'est même un invariant topologique

Proposition 2. (*Formule de Gauss-Bonnet pour les surfaces*) Soit (M^2, g_0) une surface compacte, sans bord et de classe C^∞ . Alors on a

$$\int_M K_{g_0} dv_{g_0} = 2\pi\chi(M),$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de M .

Un des problèmes centraux reliés à l'équation de courbure scalaire prescrite est le suivant : étant données une surface compacte, sans bord et de classe C^∞ , (M^2, g_0) , et une fonction $K \in C^\infty(M)$, peut-on trouver une métrique $\bar{g}$ conforme à la métrique g_0 telle que la courbure de Gauss associée à $\bar{g}$ soit exactement la fonction K ? Autrement dit est-ce que l'équation (5) admet une solution w dans $C^\infty(M)$? Ce problème est souvent appelé problème de courbure de Gauss prescrite. Un cas particulier de ce problème est celui où K est une fonction constante. Comme on le voit sur la formule de Gauss-Bonnet, (M^2, g_0) étant donnée, le signe de K ne peut pas être quelconque, il est déterminé par celui de $\chi(M)$. Ce problème, que l'on nomme communément problème d'uniformisation des surfaces, a été entièrement résolu par Weil en utilisant des techniques d'analyse complexe : sur toute surface (M^2, g_0) , compacte, sans bord et de classe C^∞ et étant donné un réel $\lambda > 0$, il existe une métrique conforme à g_0 dont la courbure de Gauss est $\text{signe}(\chi(M))\lambda$. A noter qu'une autre preuve de ce résultat a été obtenue par Osgood, Philips et Sarnak [OPS88a] et [OPS88b] en utilisant la fonctionnelle log-determinant dont nous parlerons dans la section 4.

Revenons maintenant au problème de courbure de Gauss prescrite dans le cas général. Dans [KW75a], Kazdan et Warner ont obtenu des conditions nécessaires et suffisantes pour la résolution de (5) dans certains cas

Théorème 6. Supposons $\chi(M) = 0$. Alors l'équation (5) possède une solution si et seulement l'une des deux situations suivantes se produit

- (i): $K \equiv 0$;
- (ii): K change de signe et vérifie $\int_M K e^{2f} dv_{g_0} < 0$ où f est une solution de l'équation $\Delta_{g_0} f = K_{g_0}$.

Ce théorème résout complètement le problème lorsque M est une surface à caractéristique d'Euler-Poincaré nulle. Lorsque celle-ci est strictement positive ou strictement négative nous n'avons que des résultats partiels. Commençons par le cas où $\chi(M) < 0$.

Le cas $\chi(M) < 0$ a également été étudié par Kazdan et Warner, mais pas complètement résolu. Dans [KW75a], Kazdan et Warner montrent une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction K soit la courbure de Gauss d'une métrique conforme à la métrique initiale mais cette condition n'est pas explicite et ne permet pas de caractériser les fonctions qui sont la courbure de Gauss d'une métrique conforme à la métrique initiale. On pourra se référer à Kazdan-Warner [KW75a] pour plus de détails (en particulier sur des exemples de fonctions qui ne sont pas courbure de Gauss d'une métrique conforme à la métrique initiale).

Lorsque $\chi(M) > 0$ alors soit $\chi(M) = 2$ et dans ce cas M est difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$, soit $\chi(M) = 1$ et dans ce cas M est difféomorphe au projectif réel $\mathbb{R}P^2$. Considérons le cas $(M, g) := (\mathbb{S}^2, g_c)$ la sphère standard munie de sa métrique canonique qui est à courbure de Gauss $K_{g_c} \equiv 1$. On a vu que si $g_w := e^{2w} g_c$ on a

$$(6) \quad \Delta_{g_c} w + K_{g_w} e^{2w} = 1$$

sur $\mathbb{S}^2$. Comme nous l'avons vu dans le cas $\chi(M) < 0$ il existe aussi des fonctions qui ne peuvent pas être réalisées comme courbure de Gauss d'une métrique conforme à la métrique canonique sur $\mathbb{S}^2$. Plus précisément

Théorème 7. (*Obstruction de Kazdan-Warner*) Soit $w \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2)$ une solution de (6). Alors, pour toute fonction propre φ de Δ_{g_c} associée à la valeur propre 2 on a

$$(7) \quad \int_{\mathbb{S}^2} \langle \nabla_{g_c} K, \nabla_{g_c} \varphi \rangle_{g_c} e^{2w} dv_{g_c} = 0.$$

Les conséquences de ce théorème sont importantes. En effet, puisque d'après la formule de Gauss-Bonnet nous savons que $\int_{\mathbb{S}^2} K e^{2w} dv_{g_c} = 4\pi$, on en déduit que K doit être strictement positive quelque part. Mais cela ne suffit pas ; si on considère une fonction propre φ de Δ_{g_c} associée à la valeur propre 2, on voit bien que $K := 1 + \varepsilon \varphi$ est strictement positive dès que ε est assez petit mais ne vérifie pas les conditions du théorème.

Un des premiers résultats remarquables sur le problème de la courbure de Gauss prescrite sur la sphère standard fut obtenu par Moser [Mos71]

Théorème 8. Soit $K \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ avec K strictement positive quelque part et $K(x) = K(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^2$. Alors l'équation (6) admet une solution $w \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$. De plus $w(x) = w(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^2$

L'ingrédient principal pour la preuve de ce théorème est l'inégalité de Moser-Trudinger dont nous avons parlé au paragraphe précédent. Pour montrer ce résultat Moser introduit la fonctionnelle

$$(8) \quad J_K[w] := \log \int_{\mathbb{S}^2} K e^{2w} dv_{g_c} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} |\nabla w|_{g_c}^2 dv_{g_c} - 2 \int_{\mathbb{S}^2} w dv_{g_c}.$$

Les points critiques de cette fonctionnelle sont exactement les solutions de

$$-\Delta_{g_c} w + 1 = \frac{K e^{2w}}{\int_{\mathbb{S}^2} K e^{2w} dv_{g_c}},$$

et si l'on pose $\tilde{w} := w - \frac{1}{2} \log \int_{\mathbb{S}^2} K e^{2w} dv_{g_c}$, $\tilde{w}$ sera solution de l'équation

$$(9) \quad \Delta_{g_c} w + K e^{2w} = 1.$$

En utilisant le Théorème 4 il est ensuite facile de montrer que la fonctionnelle J_K admet un maximum sur l'ensemble $\mathcal{C} := \{w \in W^{1,2}(\mathbb{S}^2) : w \text{ est paire et } \int_{\mathbb{S}^2} K e^{2w} dv_{g_c} > 0\}$. Il est important de signaler que l'amélioration de la valeur de la constante 4π entre le Théorème 3 et le Théorème 4 est cruciale pour montrer

l'existence d'un point critique sur $\mathcal{C}$ (à cause de la présence du facteur $\frac{1}{4\pi}$ dans l'expression de la fonctionnelle J_K).

D'autres résultats ont été obtenus pour des fonctions K qui ne sont pas supposées symétriques. Voir par exemple Chang-Yang [CY91a], Chang-Gursky-Yang [CGY93], Bahri-Coron [BC91] et Li [Li96] ainsi que les références contenues dans ces articles.

4. Formule de Polyakov sur les surfaces

Dans cette partie nous introduisons la fonctionnelle log-determinant associée à l'opérateur de Laplace-Beltrami. Considérons une variété riemannienne compacte de dimension n , (M^n, g) , sans bord et de classe C^∞ . On sait que le spectre du laplacien Δ_g constitue une suite croissante

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots,$$

qui tend vers $+\infty$ lorsque k tend vers l'infini. De surcroît, les fonctions propres $\{\varphi_j\}_j$ forment une base orthonormée de $L^2(M)$.

On peut définir la fonction ζ associée à Δ_g par

$$(10) \quad \zeta(s) = \sum_{\lambda_k \neq 0} \lambda_k^{-s}.$$

Pour le moment on ne se préoccupe pas de la convergence de cette série (convergence dont nous parlerons plus tard). Si on décide d'écrire cette série de manière formelle on obtient

$$\zeta'(s) = - \sum_{\lambda_k \neq 0} (\log \lambda_k) \lambda_k^{-s},$$

autrement dit, toujours formellement,

$$\zeta'(0) = - \sum_{\lambda_k \neq 0} \log \lambda_k = - \log \prod_{k=1}^{\infty} \lambda_k.$$

Cette écriture formelle fut celle qui a motivé la définition de la fonctionnelle log-determinant par Ray et Singer [RS71]

$$(11) \quad \log \det(\Delta_g) := \zeta'(0).$$

Nous justifions maintenant l'existence de $\zeta'(0)$. Si on note $N(\lambda) := \text{Card}\{j \in \mathbb{N} : \lambda_j \leq \lambda\}$ on a la formule asymptotique de Weyl

Proposition 3. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte, sans bord et de classe C^∞ . Alors*

$$(12) \quad N(\lambda) \sim \omega_n \text{Vol}(M, g) \frac{\lambda^{\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n},$$

lorsque λ tend vers l'infini. Ici ω_n désigne le volume de la boule unité standard de $\mathbb{R}^n$. En particulier lorsque $\lambda = \lambda_k$

$$(13) \quad (\lambda_k)^{\frac{n}{2}} \sim \frac{k(2\pi)^n}{\omega_n \text{Vol}(M, g)}$$

lorsque k tend vers l'infini.

Puisque λ_k se comporte asymptotiquement comme $k^{\frac{2}{n}}$, on en déduit que la fonction ζ est bien définie lorsque $\operatorname{Re}(s) > \frac{n}{2}$. Maintenant si on veut donner un sens à $\zeta'(0)$ on utilise, de manière classique, la transformée de Mellin

$$(14) \quad x^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_M e^{-xt} t^{s-1} dt,$$

où Γ est la fonction Gamma classique

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt.$$

La fonction Γ possède un pôle simple en 0 et on a

$$s\Gamma(s) \sim_{s \rightarrow 0} 1.$$

En utilisant la transformée de Mellin on peut écrire ζ en fonction de Γ lorsque $\operatorname{Re}(s) > \frac{n}{2}$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^\infty e^{-\lambda_j t} t^{s-1} dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty (Z(t) - 1) t^{s-1} dt,$$

où

$$Z(t) := \int_M H(x, x, t) d\nu_g(x) = \sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda_k t} = \operatorname{Trace}(e^{t\Delta_g})$$

est la trace du noyau de la chaleur

$$H(x, y, t) := \sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x) \varphi_k(y).$$

Rappelons que H est l'unique solution fondamentale de l'équation de la chaleur

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_g u = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x); \end{cases}$$

au sens où f étant donnée dans $C^\infty(M)$, le produit de convolution $u := H \star f$ est solution de (15).

Dans le cas où la variété est une surface de Riemann on peut obtenir une expression explicite pour ces développements. Nous les donnons ci-dessous

$$(16) \quad \begin{cases} H(x, x, t) = \frac{1}{4\pi t} + \frac{K_g(x)\pi}{12} + \frac{K_g^2(x)\pi t}{60} + O(t^2), \\ Z(t) = \frac{\operatorname{Vol}(M, g)}{4\pi t} + \frac{\chi(M)}{6} + \frac{\pi t}{60} \int_M K_g^2 d\nu_g + O(t^2). \end{cases}$$

Ainsi, lorsque la fonction ζ est bien définie, on a

$$(17) \quad \begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 (Z(t) - 1)t^{s-1} dt + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^\infty (Z(t) - 1)t^{s-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 t^{s-1} \left[\frac{\text{Vol}(M, g)}{4\pi t} + \frac{\chi(M)}{6} + \frac{\pi t}{60} \int_M K_g^2 dv_g + t^2 P(t) - 1 \right] dt \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^\infty \left(\sum_{k=1}^\infty e^{-\lambda_k t} \right) t^{s-1} dt, \end{aligned}$$

où P est une fonction bornée. La seconde quantité est holomorphe en s puisque la fonction Γ ne s'annule pas et puisque, pour t grand, $\sum_{k=1}^\infty e^{-\lambda_k t} \leq Ce^{-\lambda_1 t}$ grâce à la formule asymptotique de Weyl. La première quantité quant à elle peut s'écrire

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \left[\frac{t^{s-1}}{s-1} \frac{\text{Vol}(M, g)}{4\pi} + \frac{\chi(M)}{6s} t^s + \frac{\pi t^{s+1}}{60(s+1)} \int_M K_g^2 dv_g - \frac{t^s}{s} \right]_{t=0}^{t=1} + B(s),$$

avec $B(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 P(t) t^{s+1} dt$ qui est holomorphe sur $\text{Re}(s) > -1$. On observe facilement que l'expression précédente converge pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(s) > 1$ et possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier avec un pôle simple en $s = 1$.

Comme on le voit donc, ζ est holomorphe sur le demi-plan $\text{Re}(s) > 1$ et possède un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en $s = 1$ et on a de plus

$$\zeta(0) = \frac{\chi(M)}{6} - 1.$$

Notons que l'on peut obtenir une formule explicite de $\zeta(0)$ en dimension plus grande que 2 (voir Rosenberg [Ros97]). Puisque ζ est analytique en 0 on peut définir $\zeta'(0)$ (qui n'est rien d'autre que $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\zeta(s) - \zeta(0)}{s}$). Nous avons donc justifié rigoureusement (11).

Une question naturelle consiste à se demander ce qui se produit sur la fonction ζ lorsque l'on réalise un changement conforme de métrique. C'est à cette question que répond le théorème suivant :

Théorème 9. (Formule de Polyakov) Soit (M^2, g_0) une surface compacte, sans bord et de classe C^∞ . On considère le changement conforme de métrique $g_w := e^{2w} g_0$ avec $\text{Vol}(M, g_0) = \text{Vol}(M, g_w)$. Alors on a la formule suivante (dite formule de Polyakov [Pol81])

$$(18) \quad F[w] := \log \frac{\det(-\Delta_{g_w})}{\det(-\Delta_{g_0})} = -\frac{1}{12\pi} \int_M (|\nabla_{g_0} w|_{g_0}^2 + 2K_{g_0} w) dv_{g_0}.$$

La formule de Polyakov décrit donc le comportement de la fonctionnelle $g \mapsto \log \det(-\Delta_g)$ (que l'on appelle généralement la fonctionnelle log-déterminant) sous changement conforme de métrique qui preserve le volume. En fixant une métrique initiale g_0 , l'étude de la fonctionnelle log-déterminant dans la classe conforme de g_0 se réduit donc à l'étude de la fonctionnelle

$$w \in C^\infty(M) \mapsto -\frac{1}{12\pi} \int_M (|\nabla_{g_0} w|^2 + 2K_{g_0} w) dv_{g_0}.$$

Les points critiques de cette fonctionnelle possèdent des propriétés remarquables dans certains cas et c'est ce que nous allons illustrer à l'aide des résultats suivants

Proposition 4. *Considérons la 2-sphère standard $(\mathbb{S}^2, g_c)$. Alors pour tout $w \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ tel que $\text{Vol}(\mathbb{S}^2, g_w) = 4\pi$ on a $F[w] \leq F[0] = 0$. Autrement dit F est maximal pour la métrique standard g_c (ce qui correspond à $w \equiv 0$).*

Dans le cas des surfaces qui ne sont pas la sphère standard la situation est plus compliquée comme nous allons le voir. Toutefois en courbure constante négative nous avons

Proposition 5. *Soit (M^2, g_0) une surface compacte, sans bord et de classe C^∞ . On suppose que $K_{g_0} \equiv \text{constante} \leq 0$. Alors pour toute fonction $w \in C^\infty(M)$ telle que $\text{Vol}(M, g_w) = \text{Vol}(M, g_0)$ on a*

$$F[w] \leq 0,$$

et de plus on a l'égalité si et seulement si $w \equiv 0$.

Dans le cas de la 2-sphère standard, il est assez aisé de voir que l'inégalité d'Onofri (et son cas d'égalité) nous donne un analogue du théorème précédent. A notre connaissance il n'existe pas d'autres résultats d'existence et de caractérisation de métriques extrémales pour la fonctionnelle log-déterminant sur les surfaces.

Une autre application de la formule de Polyakov concerne l'étude des familles de métriques (conformes) isospectrales sur une surface. On considère une surface M compacte, lisse et sans bord. On dira qu'une famille de métriques (conformes) $\{g_i\}_i$ définies sur M est isospectrale lorsque toutes ces métriques possèdent le même spectre pour leur opérateur de Laplace-Beltrami respectif. En 1988, Osgood, Phillips et Sarnak [OPS88a] et [OPS88b] ont montré

Théorème 10. *Soit M^2 une surface compacte, sans bord et de classe C^∞ . Toute famille de métriques isospectrales sur cette surface forme une famille compacte pour la topologie C^∞ modulo la classe d'isométrie.*

Donnons une idée succincte de la preuve dans le cas de la sphère standard $(\mathbb{S}^2, g_c)$. D'après (16), on a

$$Z(t) \sim \frac{1}{4\pi t} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots)$$

lorsque t tend vers 0^+ , et où $a_0 = \text{Vol}(\mathbb{S}^2, g_c)$, $a_1 = \frac{4\pi}{3}$, $a_2 = \frac{\pi}{60} \int_{\mathbb{S}^2} K_{g_c}^2 dv_{g_c}$, et pour $k \geq 3$, $a_k = \int_{\mathbb{S}^2} B_{2k} dv_{g_c}$, B_{2k} étant un polynôme universel de degré $2k$ en K_{g_c} . Puisque la famille de métriques considérée est isospectrale, a_2 est constant sur toute cette famille et cela nous donne un contrôle sur $\Delta_{g_c} u_i$ (ici on a posé $g_i = e^{2u_i} g_c$). Si on veut obtenir un contrôle sur les dérivées premières des u_i on utilise la formule de Polyakov, qui permet directement de dominer $\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u_i| dv_{g_c}$. Ensuite par un argument de bootstrap et en utilisant les a_k pour $k \geq 3$ on parvient à contrôler toutes les dérivées des u_i . A noter que l'on utilise le théorème d'Onofri pour pouvoir dominer $\int_{\mathbb{S}^2} |\nabla u_i| dv_{g_c}$ dans ce cas (la sphère). Si la surface sous-jacente n'est pas la sphère (et puisque l'on peut toujours se ramener à une métrique à courbure de Gauss constante égale à -1 , 0 ou $+1$) on peut exercer un contrôle sur les dérivées premières des u_i directement à partir de la formule de Polyakov.

5. Opérateurs covariant conforme d'ordre 4

Sur une variété riemannienne de dimension 2, l'opérateur de Laplace-Beltrami est, comme on l'a vu, un opérateur géométrique naturel. Sous le changement conforme $\tilde{g} = e^{2w}g$, et lorsque la dimension est 2, le laplacien pour $\tilde{g}$ est relié au laplacien pour g par la relation

$$\Delta_{\tilde{g}}\varphi = e^{-2w}\Delta_g\varphi, \quad \forall \varphi \in C^\infty(M).$$

En dimension plus grande que 2, le même genre de relation d'invariance conforme est vraie mais pour un opérateur (d'ordre 2) légèrement différent du laplacien, opérateur appelé laplacien conforme $L_g = -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g + Scal_g$. On a, si $\tilde{g} = e^{2w}g$, pour tout $\varphi \in C^\infty(M)$

$$L_{\tilde{g}}(\varphi) = e^{-\frac{n+2}{2}w}L_g\left(e^{\frac{n-2}{2}w}\varphi\right).$$

D'une façon plus générale, on dira qu'un opérateur A_g dépendant de la métrique est conformément covariant de bi-degré (a, b) si, sous le changement conforme de métrique $\tilde{g} = e^{2w}g$, les opérateurs $A_{\tilde{g}}$ et A_g sont reliés par la relation

$$A_{\tilde{g}}(\varphi) = e^{-bw}A_g(e^{aw}\varphi), \quad \forall \varphi \in C^\infty(M).$$

Un opérateur d'ordre 4 particulièrement intéressant fut découvert en 1983 par S. Paneitz [Pan83]. Cet opérateur défini sur les variétés de dimension 4 est donné par

$$(19) \quad P_g\varphi = \Delta_g^2\varphi - \operatorname{div}_g\left(\frac{2}{3}Scal_g g - 2Ric_g\right)d\varphi.$$

Cet opérateur est conformément covariant de bidegré $(0, 4)$, i.e. si $\tilde{g} = e^{2w}g$

$$P_{\tilde{g}}(\varphi) = e^{-4w}P_g(\varphi), \quad \forall \varphi \in C^\infty(M).$$

L'opérateur de Paneitz sur les variétés de dimension 4 présente beaucoup de similitudes avec l'opérateur laplacien sur les surfaces. Nous allons les présenter ici.

(i) Sur une surface compacte, l'invariant de courbure naturel associé à Δ_g est la courbure de Gauss K_g . Sous le changement conforme $\tilde{g} = e^{2w}g$, on a

$$-\Delta_g w + K_g = K_{\tilde{g}}e^{2w}.$$

Sur une variété de dimension 4 on a

$$P_g w + 2Q_g = 2Q_{\tilde{g}}e^{4w},$$

où Q_g est l'invariant de courbure défini par (on appelle souvent Q_g la Q -courbure)

$$(20) \quad Q_g = \frac{1}{12}(-\Delta Scal_g + Scal_g^2 - 3|Ric_g|^2).$$

(ii) L'analogie entre K et Q est encore plus flagrante si on considère la formule de Gauss-Bonnet. Sur une surface on a

$$2\pi\chi(M) = \int_M K_g dV_g,$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de M . En dimension 4, on a

$$(21) \quad 4\pi^2 \chi(M) = \int_M \left(\frac{1}{8} |Weyl_g|^2 + Q_g \right) dv_g.$$

Il faut noter que, puisque $|Weyl_g|^2 dv_g$ est invariant par changement conforme, c'est le terme $Q_g dv_g$ qui mesure le changement conforme. Notons aussi que compte tenu de la formule de Gauss-Bonnet et de l'invariance conforme de $|Weyl_g|^2 dv_g$, la quantité $\int_M Q_g dv_g$ (que l'on note en général k_P) est un invariant conforme. Lorsque la dimension de la variété est supérieure ou égale à 3, on a vu que l'opérateur invariant conforme d'ordre 2 est le laplacien conforme L_g . Si on écrit le changement conforme $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ où u est une fonction lisse et strictement positive, comme on l'a vu, pour tout $\varphi \in C^\infty(M)$

$$L_{\tilde{g}}(\varphi) = u^{-\frac{n+2}{n-2}} L_g(u\varphi).$$

En prenant $\varphi \equiv 1$ dans cette égalité on obtient

$$(22) \quad L_g(u) = Scal_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Il existe aussi un opérateur d'ordre 4 naturel sur les variétés de dimension supérieure ou égale à 5. Celui-ci fut mis en évidence par Branson [Bra85]. Soit une variété (M, g) de dimension $n \geq 5$ et considérons

$$P_g^n(\varphi) = \Delta_g^2 \varphi - \operatorname{div}_g (a_n Scal_g g + b_n Ric_g) d\varphi + \frac{n-4}{2} Q_g^n,$$

où

$$Q_g^n = c_n |Ric_g|^2 + d_n Scal_g^2 - \frac{1}{2(n-1)} \Delta_g Scal_g,$$

$a_n = \frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)}$, $b_n = -\frac{4}{n-2}$, $c_n = -\frac{2}{(n-2)^2}$ et $d_n = \frac{n^3-4n^2+16n-16}{8(n-1)^2(n-2)^2}$. Cette opérateur est conformément covariant : si $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-4}} g$ alors $\forall \varphi \in C^\infty(M)$

$$P_{\tilde{g}}^n(\varphi) = u^{-\frac{n+4}{n-4}} P_g^n(u\varphi).$$

On a aussi l'analogue de l'équation (22)

$$P_g^n(u) = Q_{\tilde{g}} u^{\frac{n+4}{n-4}}.$$

Dans ce survol nous n'allons pas nous intéresser à l'opérateur P_g^n . Nous ne parlerons que de la dimension 4 et donc uniquement de l'opérateur de Paneitz

$$P_g \varphi = \Delta_g^2 \varphi - \operatorname{div}_g \left(\frac{2}{3} Scal_g g - 2 Ric_g \right) d\varphi.$$

L'une des premières questions que l'on peut se poser à propos de cet opérateur, surtout compte tenu de son expression un peu « compliquée », concerne ses propriétés d'opérateur, en particulier sur son noyau et sa positivité éventuelle. Ces questions ne sont pas simples et pour le moment il n'existe que des résultats très partiels. Le premier que nous donnons est dû à Gursky [Gur99] et [Gur98]

Théorème 11. Soit (M^4, g) une variété riemannienne compacte, sans bord, lisse et de dimension 4. Si l'invariant de Yamabe $Y(M, [g])$ est positif ou nul et si $\int_M Q_g dv_g$ est aussi positif ou nul alors P_g est un opérateur dont le noyau est réduit à $\mathbb{R}$. Si de plus on suppose que $0 \leq \int_M Q_g dv_g < 8\pi^2$ alors P_g est également un opérateur positif au sens où pour tout $\varphi \in C^\infty(M)$ on a $\int_M \varphi P_g \varphi dv_g \geq 0$.

La valeur $8\pi^2$ qui apparaît dans ce théorème n'est pas anodine ; c'est la valeur que prend la Q -courbure sur la sphère $\mathbb{S}^4$ munie de sa métrique standard. D'ailleurs Gursky [Gur99] a montré un résultat de rigidité suivant :

Théorème 12. Soit (M^4, g) une variété riemannienne compacte, sans bord, lisse et de dimension 4. Si l'invariant de Yamabe $Y(M, [g])$ est positif ou nul et si $\int_M Q_g dv_g$ est aussi positif ou nul alors $\int_M Q_g dv_g \leq 8\pi^2$ avec égalité si et seulement si (M, g) est conformément difféomorphe à la 4-sphère standard.

Très récemment Gursky et Viaclovsky [GV03] ont donné une version plus forte du Théorème 11

Théorème 13. Soit (M^4, g) une variété riemannienne compacte, sans bord, lisse et de dimension 4. On suppose que l'invariant de Yamabe $Y(M, [g])$ est strictement positif et que

$$\int_M Q_g dv_g + \frac{1}{6}(Y(M, [g]))^2 > 0.$$

Alors P_g est un opérateur positif dont le noyau est réduit à $\mathbb{R}$.

6. La fonctionnelle déterminant en dimension 4 et métriques extrémales

Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte, sans bord, lisse et de dimension $n \geq 3$. On considère un opérateur différentiel géométrique (au sens où il dépend de la métrique) A_g que l'on va supposer auto-adjoint, et de symbole principal positif et d'ordre 2ℓ , avec $\ell \in \mathbb{N}^*$. De plus on suppose que A_g se comporte de la même manière que son symbole principal sous l'action d'une homothétie sur la métrique, c'est-à-dire que si $\bar{g} := \lambda^2 g$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors

$$A_{\bar{g}} = \lambda^{-2\ell} A_g.$$

On peut prendre par exemple l'opérateur laplacien conforme $L_g = -\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g + \text{Scal}_g$.

Classiquement, on a le développement suivant pour le noyau de la chaleur associé à A_g pour tout $\varphi \in C^\infty(M)$

$$\text{Tr}(\varphi e^{tA_g}) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^{\frac{k-n}{2\ell}} a_k(\varphi, A_g), \quad a_k(\varphi, A_g) = \int_M \varphi(x) B_k(x, A_g) dv_g(x),$$

lorsque t tend vers 0, $t > 0$, où les fonctions B_k sont des invariants locaux de la métrique g .

Si on note $\{\lambda_0, \dots, \lambda_j, \dots\}$ les valeurs propres de A_g , on sait que seul un nombre fini de celles-ci sont négatives (car M est compacte), et on a là encore une formule asymptotique de Weyl donnée par

$$(23) \quad \lambda_j \sim c(g, A_g) j^{\frac{2\ell}{n}},$$

lorsque j tend vers l'infini. De manière analogue à ce que nous avons fait en (10), on peut définir la fonction ζ_A associée à l'opérateur A_g en posant

$$(24) \quad \zeta_A(s) := \sum_{\lambda_j \neq 0} |\lambda_j|^{-s},$$

pour $\operatorname{Re}(s) > \frac{n}{2\ell}$. On peut montrer, ainsi que nous l'avons fait précédemment, que la fonction ζ_A admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec des pôles simples, et que ce prolongement est analytique en 0. Dès lors, on définit le déterminant de A_g en posant

$$(25) \quad \det(A_g) := (-1)^{\operatorname{Card}\{j, \lambda_j < 0\}} \exp(-\zeta'(0)).$$

Il faut remarquer que cette définition n'est pas invariante par homothétie sur la métrique, ce qui est quelque peu problématique. Pour cette raison on introduit

$$(26) \quad P(A_g) := (\operatorname{Vol}(M, g))^{\frac{2\ell}{n}} \det(A_g),$$

et clairement $P(A_g)$ est invariant par homothétie sur la métrique, c'est-à-dire que si $\bar{g} := \mu^2 g$, avec $\mu \in \mathbb{R}^*$, alors $P(A_{\bar{g}}) = P(A_g)$.

Maintenant que nous avons défini un analogue du déterminant comme nous l'avons fait dans la section 4, nous pouvons essayer de comprendre de quelle façon se comporte $P(A_g)$ lors d'un changement conforme de métrique. Nous nous plaçons à partir de maintenant sur une variété riemannienne (M^4, g) , sans bord, compacte, lisse et de dimension 4. Introduisons, comme nous l'avons fait dans le cas de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les surfaces, la fonctionnelle log-déterminant pour l'opérateur A_g , que l'on note F_A . Soit $w \in C^\infty(M)$ et $g_w := e^{2w} g$, on définit

$$(27) \quad F_A[w] := -2 \log \frac{P(A_{g_w})}{P(A_g)}.$$

Branson et Orsted [BO91] ont remarqué que la fonctionnelle F_A peut se décomposer le long de trois fonctionnelles élémentaires :

Théorème 14. *Il existe γ_1, γ_2 et γ_3 réelles telles que pour tout $w \in C^\infty(M)$*

$$(28) \quad F_A[w] = \gamma_1 I[w] + \gamma_2 II[w] + \gamma_3 III[w],$$

où

$$(29) \quad \begin{aligned} I[w] &:= 4 \int_M w |Weyl_g|_g^2 dv_g - \left(\int_M |Weyl_g|_g^2 dv_g \right) \log \left(\int_M e^{4w} dv_g \right), \\ II[w] &:= \int_M (w P_g w + 4 w Q_g) dv_g - \left(\int_M Q_g dv_g \right) \log \left(\int_M e^{4w} dv_g \right), \\ III[w] &:= \frac{1}{3} \left(\int_M \operatorname{Scal}_{g_w}^2 dv_{g_w} - \int_M \operatorname{Scal}_g^2 dv_g \right). \end{aligned}$$

Le fait remarquable ici est que I , II et III ne dépendent pas de A_g mais sont universelles ; si on change A_g ce sont les constantes γ_1 , γ_2 et γ_3 qui changent. Par exemple, si A_g est l'opérateur laplacien conforme, alors $(4\pi)^2 180(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (1, -4, -\frac{2}{3})$.

Dans le cas de la sphère nous avons le Théorème suivant :

Théorème 15. (Branson-Chang-Yang [BCY92a]) *Sur la sphère standard $(\mathbb{S}^4, g_c)$, la fonctionnelle $g \mapsto \det L_{g_w}$ est minimale pour une métrique $g_w = e^{2w} g$ (avec $\text{Vol}(\mathbb{S}^4, g_w) = \text{Vol}(\mathbb{S}^4, g_c)$) si et seulement si $g_w = \varphi^*(g_c)$ où φ est une transformation conforme de la 4-sphère standard sur elle-même (autrement dit si et seulement si g_w et g_c sont isométriques).*

Ce théorème peut être vu comme un analogue en dimension 4 de l'inégalité d'Onofri que nous avons vue à la section 4.

Dans la suite nous nous pencherons sur la recherche de métriques extrémales sur des variétés autres que la sphère. Comme nous le verrons, c'est sur la sphère standard que nous avons le plus de résultats de « rigidité » des métriques extrémales. Dans le tableau qui suit nous récapitulons les résultats connus pour les sphères standards de dimension 2, 3, 4, 6, $2n+1$ avec $n \geq 3$, $4n+1$ et $4n+3$.

La métrique standard g_c sur	est un	pour l'opérateur	parmi les métriques où l'on fixe	résultat dû à
$\mathbb{S}^2$	maximum global	$\det(-\Delta)$	aire	Onofri [Ono82]
$\mathbb{S}^4$	minimum global	$\det L$	volume et classe conforme	Branson, Chang et Yang [BCY92a]
$\mathbb{S}^6$	maximum global	$\det L$	volume et classe conforme	Branson [Bra95]
$\mathbb{S}^3$	maximum local minimum local	$\det(-\Delta)$ $\det(-\Delta)$	volume et classe conforme volume	Richardson [Ric94] Okikiolu [Oki01]
$\mathbb{S}^{2n+1}$, $n \geq 3$	point selle	$\det(-\Delta)$	volume et classe conforme	Okikiolu [Oki01]
$\mathbb{S}^{4n+1}$ $\mathbb{S}^{4n+3}$	minimum local maximum local	$\det L$ $\det L$	volume	Okikiolu [Oki01]

Etudions maintenant l'existence de métriques extrémales pour la fonctionnelle F_A définie en (27). L'outil fondamental pour cette étude est une généralisation de l'inégalité de Moser (1) ; cette inégalité est due à Adams [Ada88]

Théorème 16. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et soit k un entier naturel tel que $k < n$. On pose $p := \frac{n}{k}$. Il existe une constante $C = C(k, n)$ et une constante $\beta_0 = \beta_0(k, n)$ telles que pour toute fonction $w \in C_0^k(\Omega)$ vérifiant $\|\nabla^k w\|_p \leq 1$*

$$(30) \quad \int_{\Omega} \exp(\beta |w(x)|^{p'}) dx \leq C \text{Vol}(\Omega, \text{euclidien}),$$

pour tout $\beta \leq \beta_0$ (ici $p' := \frac{p}{p-1}$).

Cette inégalité est optimale au sens où si $\beta > \beta_0$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe $u_\lambda \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\|\nabla^k u_\lambda\|_p \leq 1$ et $\int_{\Omega} \exp(\beta |u_\lambda(x)|^{p'}) dx \geq \lambda \text{Vol}(\Omega, \text{euclidien})$.

Lorsque $n = 4$ et $k = 2$ (dans ce cas $p = p' = 2$) on a (voir Adams [Ada88]) $\beta_0 = 32\pi^2$. À partir du théorème précédent on obtient facilement le lemme

Lemme 0.1. Soit (M^4, g_0) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. Il existe une constante $C = C(g_0)$ telle que pour toute fonction $w \in C^2(M)$ vérifiant $\|\Delta_{g_0} w\|_2 \leq 1$

$$(31) \quad \int_M \exp(32\pi^2 |w - \bar{w}|^2) dv_{g_0} \leq C.$$

Par conséquent pour toute fonction $w \in C^2(M)$

$$(32) \quad \log \int \exp(4(w - \bar{w})) dv_{g_0} \leq \log C + \frac{1}{8\pi^2} \|\Delta_{g_0} w\|_2^2.$$

Considérons trois réels γ_1 , γ_2 et γ_3 et la fonctionnelle

$$(33) \quad F[w] := \gamma_1 I[w] + \gamma_2 II[w] + \gamma_3 III[w],$$

où I , II et III sont définies en (29). On pose (où Q_g est la Q -courbure pour la métrique g telle que définie en (20))

$$(34) \quad k_P := \int_M Q_g dv_g,$$

dont nous avons vu que c'est un invariant conforme. Le résultat suivant est dû à Chang et Yang [CY95]

Théorème 17. Soit (M^4, g_0) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que $\gamma_2 < 0$, que $\gamma_3 < 0$ et que

$$(35) \quad k_P < 8\pi^2 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \int_M |Weyl_{g_0}|_{g_0}^2 dv_{g_0}.$$

Alors il existe une métrique $g_w := e^{2w} g_0$ conforme à g_0 (ce qui implique bien sûr que $w \in C^\infty(M)$) telle que

$$(36) \quad F[w] = \sup_{\varphi \in \mathcal{S}_{c_1, c_2}} F[\varphi],$$

où c_1 et $c_2 > 0$ sont deux réels et

$$\mathcal{S}_{c_1, c_2} := \{\varphi \in C^\infty(M), \text{signe}(\gamma_2)F[\varphi] \leq c_1, \text{Vol}(M, g_\varphi) = c_2 \text{Vol}(M, g_0)\}.$$

De plus la fonction w vérifie l'équation

$$(37) \quad \gamma_1 |Weyl_{g_w}|_{g_w}^2 + \gamma_2 Q_{g_w} - \gamma_3 \Delta_{g_w} \text{Scal}_{g_w} = \gamma_1 \int_M |Weyl_{g_w}|_{g_w}^2 dv_{g_w} + \gamma_2 \int_M Q_{g_w} dv_{g_w} \equiv \text{constante}$$

Remarque 1. A priori la fonction w qui maximise F sur $\mathcal{S}_{c_1, c_2}$ est dans $W^{2,2}(M)$. La preuve de la régularité C^∞ de w est un résultat de Uhlenbeck et Viaclovsky [UV00].

7. Variétés de dimension 4 à Q -courbure constante

Comme pour la courbure de Gauss pour les surfaces, il est naturel de se demander dans quelle mesure, sur une variété riemannienne (M, g) compacte, lisse, sans bord et de dimension 4, il existe une métrique conforme à la métrique g qui soit à Q -courbure constante.

Rappelons que sous le changement conforme $\tilde{g} = e^{2w}g$, on a (voir (19) pour la définition de P_g)

$$P_g w + 2Q_g = 2Q_{\tilde{g}} e^{4w},$$

où Q_g est l'invariant de courbure défini par

$$Q_g = \frac{1}{12} (-\Delta \text{Scal}_g + \text{Scal}_g^2 - 3|\text{Ric}_g|^2).$$

Ainsi d'après cette relation, le problème évoqué ci-dessus est équivalent à la résolution de l'équation (on rappelle que $k_P := \int_M Q_g dv_g$, voir paragraphe 5)

$$(38) \quad P_g u + 2Q_g = 2k_P e^{4u} \quad \text{sur } M.$$

Les solutions de (38) peuvent être recherchées comme points critiques de la fonctionnelle d'Euler

$$(39) \quad I[w] = \langle P_g w, w \rangle_g + 4 \int_M Q_g w dv_g - k_P \log \int_M e^{4w} dv_g; \quad w \in W^{2,2}(M).$$

Une première réponse a été apportée sur ce problème par Chang et Yang [CY95] sous la condition $k_P < 8\pi^2$ et en supposant que P_g est un opérateur positif dont le noyau est égal à $\mathbb{R}$:

Théorème 18. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que P_g est un opérateur positif et que $\ker P_g = \mathbb{R}$, et on suppose également que $k_P < 8\pi^2$. Alors il existe une métrique $\tilde{g}$ conforme à g qui soit à Q -courbure constante (i.e. $Q_{\tilde{g}} = \text{constante}$).*

L'outil principal pour montrer ce théorème est l'inégalité de Adams [Ada88] dont nous avons parlé au paragraphe 6

$$(40) \quad \log \int_M e^{4(u-\bar{u})} dv_g \leq C + \frac{1}{8\pi^2} \langle P_g u, u \rangle_g, \quad \forall u \in W^{2,2}(M).$$

Il est très facile de voir que sous l'hypothèse $k_P < 8\pi^2$ la fonctionnelle I est coercive sur les fonctions de $W^{2,2}(M)$ qui sont de moyenne nulle et ainsi, dans ce cas, les solutions peuvent s'obtenir par minimisation.

D'après le Théorème 13, les conditions du Théorème 18 sont vérifiées dès que la variété est à invariant de Yamabe strictement positif avec $k_P + \frac{1}{6}(Y(M, g))^2 > 0$.

Dans un papier récent, en collaboration avec A. Malchiodi, nous nous sommes intéressés au cas $k_P \in]8k\pi^2, 8(k+1)\pi^2[$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. D'autre part, nous considérons le cas où l'opérateur P_g peut avoir des valeurs propres strictement négatives. Il est très facile de construire des exemples de telles variétés. Prenons $M = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, où Σ_1, Σ_2 sont des surfaces de genre $g_1, g_2 \geq 2$, et équipées de la métrique de Poincaré. En utilisant la formule de Gauss-Bonnet, on trouve que

dans ce cas $k_P = \frac{16\pi^2}{3}(g_1 - 1)(g_2 - 1)$. Ainsi sous de petites perturbations de la métrique sur chacune des deux surfaces, et pour des valeurs adéquates de g_1, g_2 , on aura $\ker P_g = \mathbb{R}$ et $k_P \notin 8\pi^2\mathbb{N}^*$.

Le résultat principal de Djadli-Malchiodi [DMa] est le suivant

Théorème 19. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que $\ker P_g = \mathbb{R}$, et on suppose également que $k_P \notin 8\pi^2\mathbb{N}^*$. Alors il existe une métrique $\tilde{g}$ conforme à g qui soit à Q -courbure constante (i.e. $Q_{\tilde{g}} = \text{constante}$).*

La preuve de ce théorème est basée sur un argument de type minimax lié à celui développé dans [DJLW99].

8. Un résultat de classification

Dans cette partie nous allons nous intéresser à un des exemples d'utilisation de la Q -courbure, en l'occurrence à son application dans des problèmes de classification. Le point de départ est l'étude d'une fonctionnelle riemannienne (c'est-à-dire une fonctionnelle définie sur l'ensemble des métriques définies sur une variété M lisse et sans bord). L'exemple classique est la fonctionnelle de Einstein-Hilbert

$$(41) \quad g \mapsto \int_M \text{Scal}_g dv_g,$$

dont on sait que les points critiques (lorsqu'il en existe) sous la contrainte du volume égal à 1 sont d'Einstein. Une variante de ce problème consiste à rechercher les points critiques de cette fonctionnelle mais cette fois en se restreignant à une classe conforme : c'est ce que l'on appelle le problème de Yamabe (voir Lee-Parker [LP87] pour un panorama complet sur ce problème) qui fut entièrement résolu par Yamabe [Yam60], Trudinger [Tru68], Aubin [Aub76] et Schoen [Sch84].

D'autres fonctionnelles possèdent des propriétés intéressantes, en particulier celles qui sont quadratiques en la courbure (voir Besse [Bes87] page 133). Par exemple

$$(42) \quad g \mapsto \mathcal{R}[g] := \int_M \text{Scal}_g^2 dv_g,$$

et

$$(43) \quad g \mapsto \mathcal{W}[g] := \int_M |\text{Weyl}_g|_g^2 dv_g.$$

La fonctionnelle $\mathcal{R}$ fut introduite par Calabi en géométrie kählérienne. Ici nous allons nous pencher plus particulièrement sur la fonctionnelle de Weyl $\mathcal{W}$ en dimension 4. Supposons que M^4 est une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord et orientée. On sait qu'alors l'opérateur de Hodge $*$ induit une décomposition du fibré extérieur Λ^2 en deux composantes $\Lambda^2 = \Lambda_+^2 \oplus \Lambda_-^2$, où Λ_+^2 est l'espace des formes autoduales et Λ_-^2 est l'espace des formes anti-autoduales. Cette décomposition induit à son tour une décomposition du tenseur de Weyl (que l'on regarde comme un endomorphisme à trace nulle sur Λ^2) en une partie autoduale,

notée Weyl^+ , et une partie anti-autoduale, notée Weyl^- . Si on note $\sigma(M)$ la signature de M (voir Besse [Bes87]) on a la formule de Hirzebruch

$$(44) \quad 12\pi^2\sigma(M) = \int_M (|\text{Weyl}_g^+|^2 - |\text{Weyl}_g^-|^2) dv_g.$$

Par conséquent l'étude de la fonctionnelle $\mathcal{W}$ se résume à l'étude de la fonctionnelle

$$(45) \quad \mathcal{W}_+[g] := \int_M |\text{Weyl}_g^+|^2 dv_g.$$

que l'on appellera par commodité fonctionnelle de Weyl autoduale.

Cette fonctionnelle de Weyl autoduale est conformément invariante au sens où si $\bar{g}$ est une métrique conforme à g alors $\mathcal{W}_+[\bar{g}] = \mathcal{W}_+[g]$. De plus on peut calculer son gradient, que l'on appelle le tenseur de Bach, et celui-ci est également conformément invariant (voir Derdziński [Der83]). Nous verrons dans le paragraphe suivant que le tenseur de Bach joue un grand rôle en géométrie conforme.

Dans le cas général on ne sait pas dire grand chose sur les points critiques, s'il en existe, de la fonctionnelle de Weyl autoduale. Il est très simple de voir grâce à la formule de Hirzebruch que

$$\mathcal{W}_+[g] \geq \max \{12\pi^2\sigma(M), 0\},$$

avec égalité si et seulement si la variété est semi-conformément plate ($\text{Weyl}_g^+ \equiv 0$ ou $\text{Weyl}_g^- \equiv 0$).

D'un autre côté, en utilisant l'expression explicite du tenseur de Weyl, on peut voir assez aisément que les métriques d'Einstein sont aussi des points critiques de la fonctionnelle de Weyl autoduale. Et plus généralement, toute métrique qui est localement conforme à une métrique d'Einstein est aussi un point critique de la fonctionnelle de Weyl autoduale.

Dans un article récent, Gursky [Gur98] s'est intéressé à la minimisation de la fonctionnelle de Weyl autoduale sous une contrainte géométrique très naturelle : la positivité de l'invariant de Yamabe. Il faut tout de suite remarquer que cette contrainte est conformément invariante ce qui est primordial puisque la fonctionnelle de Weyl autoduale est elle-même conformément invariante.

Le premier résultat obtenu par Gursky est le suivant :

Théorème 20. *Soit M^4 une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord et orientée. On suppose que sa forme d'intersection possède au moins une valeur propre strictement positive. Alors pour toute métrique g définie sur M et telle que son invariant de Yamabe $Y(M, g)$ est positif ou nul, on a*

$$(46) \quad \mathcal{W}_+[g] \geq \frac{4\pi^2}{3} (2\chi(M) + 3\sigma(M)),$$

où $\chi(M)$ et $\sigma(M)$ sont respectivement la caractéristique d'Euler-Poincaré et la signature de M . De plus

(i) l'égalité est réalisée dans (46) par une métrique g_0 telle que $Y(M, g_0) > 0$ si et seulement si g_0 est conforme à une métrique de Kähler-Einstein.

(ii) l'égalité est réalisée dans (46) par une métrique g_0 telle que $Y(M, g_0) = 0$ si et seulement si g_0 est conforme à une métrique de Kähler-Einstein qui est Ricci-plate et anti-autoduale.

Ce théorème possède plusieurs corollaires. Nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article de Gursky [Gur98].

Une remarque que l'on peut faire sur ce résultat est que si une métrique g réalise l'égalité dans (46), alors elle est conforme à une métrique de Kähler-Einstein. En particulier son premier groupe de cohomologie de de Rham est non réduit à 0. D'un autre côté, Gursky [Gur98] a montré que si l'on suppose que le premier groupe de cohomologie de M , $H^1(M)$, est non réduit à 0 alors la borne inférieure dans (46) peut être améliorée. C'est l'objet du théorème suivant

Théorème 21. *Soit M^4 une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord et orientée. On suppose que $H^1(M) \neq 0$. Alors pour toute métrique g définie sur M et telle que son invariant de Yamabe $Y(M, g)$ est strictement positif, on a*

$$(47) \quad \mathcal{W}_+[g] \geq 2\pi^2 (2\chi(M) + 3\sigma(M)),$$

où $\chi(M)$ et $\sigma(M)$ sont respectivement la caractéristique d'Euler-Poincaré et la signature de M . De plus l'égalité est réalisée dans (47) par une métrique g_0 telle que $Y(M, g_0) > 0$ si et seulement si (M, g_0) est conformément difféomorphe à un quotient de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ muni de la métrique produit. En particulier g_0 est conformément plate et $\chi(M) = \sigma(M) = 0$.

Si on suppose que la métrique g est telle que $Y(M, g) = 0$ il n'est plus nécessaire de supposer que $H^1(M) \neq 0$. On a dans ce cas (Gursky [Gur98]) :

Théorème 22. *Soit M^4 une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord et orientée. Alors pour toute métrique g définie sur M et telle que son invariant de Yamabe $Y(M, g)$ est nul, on a*

$$(48) \quad \mathcal{W}_+[g] \geq 2\pi^2 (2\chi(M) + 3\sigma(M)),$$

où $\chi(M)$ et $\sigma(M)$ sont respectivement la caractéristique d'Euler-Poincaré et la signature de M . De plus l'égalité est réalisée dans (48) par une métrique g_0 telle que $Y(M, g_0) = 0$ si et seulement si g_0 est conforme à une métrique Ricci-plate.

On peut reformuler ces deux résultats en utilisant la Q -courbure. Rappelons que

$$Q_g = \frac{1}{12} \left(-\Delta_g \text{Sca}l_g - 3 |\text{Ric}_g|^2 + \text{Sca}l_g^2 \right).$$

On a vu que la formule de Gauss-Bonnet nous donne

$$\int_M Q_g d\nu_g = 4\pi^2 \chi(M) - \frac{1}{8} \int_M |\text{Weyl}_g|_g^2 d\nu_g.$$

De manière équivalente on peut énoncer les deux théorèmes précédents de la manière suivante :

Théorème 23.

(i) Soit M^4 une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord et orientée. On suppose que l'invariant de Yamabe de g_0 vérifie $Y(M, g_0) > 0$ et que $\int_M Q_{g_0} dv_{g_0} > 0$. Alors $H^1(M) = 0$.

(ii) Soit M^4 une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord et orientée. On suppose que l'invariant de Yamabe de g_0 vérifie $Y(M, g_0) > 0$ et que $\int_M Q_{g_0} dv_{g_0} = 0$. Alors $H^1(M) \neq 0$ si et seulement si (M, g_0) est conformément difféomorphe à un quotient de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ munie de la métrique produit standard. En particulier (M^4, g_0) est localement conformément plate et $\chi(M) = \sigma(M) = 0$.

On peut voir ce résultat comme une généralisation aux variétés de dimension 4 du résultat suivant sur les surfaces : soit (M^2, g_0) une surface compacte, lisse, sans bord telle que $\int_M K_{g_0} dv_{g_0} > 0$ alors $\chi(M) > 0$ et le genre de M est 0 ; si $\int_M K_{g_0} dv_{g_0} = 0$ alors $\chi(M) = 0$, le genre de M est 1 et par le théorème d'uniformisation M est conformément difféomorphe à un quotient de $\mathbb{R}^2$.

L'une des conséquences de ce théorème est de permettre de compléter la classification des variétés de dimension 4, lisses, compactes et sans bord qui sont localement conformément plates, à invariant de Yamabe strictement positif et à caractéristique d'Euler-Poncaré positive ou nulle. Dans un papier datant de 1994, Gursky [Gur94] avait classifié les variétés de dimension 4, lisses, compactes et sans bord qui sont localement conformément plates, à invariant de Yamabe strictement positif et à caractéristique d'Euler-Poncaré strictement positive. Il ne restait que le cas où la caractéristique d'Euler-Poincaré est nulle ; le théorème précédent permet de traiter ce cas et on a le résultat suivant :

Théorème 24. (Gursky [Gur94] et [Gur98]) Soit M^4 une variété de dimension 4, lisse, compacte, sans bord. On suppose qu'elle est localement conformément plate et à invariant de Yamabe strictement positif. Alors :

(i) si $\chi(M) > 0$ soit (M, g_0) est conformément difféomorphe à la 4-sphère standard (cas $\chi(M) = 2$) soit (M, g_0) est conformément difféomorphe à l'espace projectif réel muni de sa métrique standard ;

(ii) si $\chi(M) = 0$ (M, g_0) est conformément difféomorphe à un quotient de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ munie de la métrique produit standard.

Nous voudrions dire quelques mots sur la preuve du théorème 20. Cela nous permettra de montrer comment on peut utiliser la recherche de métriques extrémales pour obtenir des résultats de classification géométriques.

8.1. La preuve du Théorème 20

La preuve de ce théorème est basée sur l'étude d'une fonctionnelle de type log-déterminant que nous avons introduit en (27). Considérons donc γ_1 , γ_2 et γ_3 trois réels et considérons la fonctionnelle log-déterminant donnée par

$$(49) \quad F_A[w] = \gamma_1 I[w] + \gamma_2 II[w] + \gamma_3 III[w],$$

où

$$\begin{aligned}
 I[w] &:= 4 \int_M w |Weyl_g|^2_g dv_g - \left(\int_M |Weyl_g|^2_g dv_g \right) \log \left(\int_M e^{4w} dv_g \right), \\
 (50) \quad II[w] &:= \int_M (w P_g w + 4w Q_g) dv_g - \left(\int_M Q_g dv_g \right) \log \left(\int_M e^{4w} dv_g \right), \\
 III[w] &:= \frac{1}{3} \left(\int_M Scal_{g_w}^2 dv_{g_w} - \int_M Scal_g^2 dv_g \right).
 \end{aligned}$$

En fait, puisque l'on veut minorer la fonctionnelle $\mathcal{W}_+$ on va regarder une fonctionnelle légèrement différente :

$$(51) \quad F_A[w] = \gamma_1^+ I^+[w] + \gamma_1^- I^-[w] + \gamma_2 II[w] + \gamma_3 III[w],$$

où γ_1^+ et γ_1^- sont des réels et où

$$\begin{aligned}
 (52) \quad I^+[w] &:= 4 \int_M w |Weyl_g^+|^2_g dv_g - \left(\int_M |Weyl_g^+|^2_g dv_g \right) \log \left(\int_M e^{4w} dv_g \right), \\
 I^-[w] &:= 4 \int_M w |Weyl_g^-|^2_g dv_g - \left(\int_M |Weyl_g^-|^2_g dv_g \right) \log \left(\int_M e^{4w} dv_g \right).
 \end{aligned}$$

On posera dans toute la suite (notons que c'est un invariant conforme)

$$(53) \quad \tilde{k}_d = -\gamma_1^+ \int_M |Weyl_g^+|^2_g dv_g - \gamma_1^- \int_M |Weyl_g^-|^2_g dv_g - \gamma_2 \int_M Q_g dv_g.$$

La première étape de la preuve consiste à montrer un résultat d'existence d'une métrique extrémale pour la fonctionnelle F du type de celui obtenu au Théorème 17. C'est l'objet du lemme suivant

Lemme 0.2. *Soit (M^4, g_0) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que $\gamma_2 < 0$, que $\gamma_3 < 0$ et que*

$$(54) \quad \tilde{k}_d < (-\gamma_2)8\pi^2.$$

Alors il existe une métrique $g_w := e^{2w} g_0$ conforme à g_0 (ce qui implique bien sur que $w \in C^\infty(M)$) telle que

$$(55) \quad F[w] = \sup_{\varphi \in W^{2,2}(M)} F[\varphi],$$

De plus la fonction w vérifie l'équation

$$(56) \quad \gamma_1^+ |Weyl_{g_w}^+|^2_{g_w} + \gamma_1^- |Weyl_{g_w}^-|^2_{g_w} + \gamma_2 Q_{g_w} - \gamma_3 \Delta_{g_w} Scal_{g_w} = -\tilde{k}_d Vol(M, g_w)^{-1}.$$

On peut réécrire (56) un peu différemment. Si on pose

$$(57) \quad \begin{aligned} \lambda &= \left(\gamma_3 + \frac{1}{12} \gamma_2 \right)^{-1} \tilde{\kappa}_d \text{Vol}(M, g_w)^{-1} \\ \alpha_{\pm} &= -\gamma_1^{\pm} \left(\gamma_3 + \frac{1}{12} \gamma_2 \right)^{-1} \\ \beta &= \frac{1}{4} \gamma_2 \left(\gamma_3 + \frac{1}{12} \gamma_2 \right)^{-1}, \end{aligned}$$

alors (56) s'écrit, en utilisant l'expression de la Q -courbure

$$(58) \quad \Delta_{g_w} \text{Scal}_{g_w} = \lambda - \alpha_+ |Weyl_{g_w}^+|^2_{g_w} - \alpha_- |Weyl_{g_w}^-|^2_{g_w} - \beta \left| Ric_{g_w} - \frac{1}{4} \text{Scal}_{g_w} g_w \right|_{g_w}^2 + \frac{1}{12} \beta \text{Scal}_{g_w}^2.$$

La seconde étape de la preuve consiste à trouver une condition conforme sous laquelle on peut connaître le signe de la courbure scalaire. Le candidat naturel pour une telle condition est l'invariant de Yamabe, ce qu'illustre le lemme suivant (rappelons que l'on note $L_g := -\Delta_g + \frac{1}{6} \text{Scal}_g$ l'opérateur laplacien conforme associé à une métrique g)

Lemme 0.3. *Soit (M^4, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que Scal_g vérifie $L_g \text{Scal}_g \geq 0$ sur M . Alors*

(i) *si $Y(M, g) > 0$ on a $\text{Scal}_g > 0$ sur M ;*

(ii) *si $Y(M, g) = 0$ on a $\text{Scal}_g \equiv 0$ sur M .*

La preuve de ce lemme est très simple et n'utilise que le principe du maximum pour l'opérateur de Laplace-Beltrami (voir Gursky [Gur98]).

En mettant bout à bout ces deux lemmes on a la proposition :

Proposition 6. *Soit (M^4, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4.*

(i) *On suppose que*

$$(59) \quad 0 < \int_M |Weyl_{g_0}|_{g_0}^2 d\nu_{g_0} < \frac{4\pi^2}{3} (2\chi(M) + 3\sigma(M)).$$

Alors il existe une métrique $g_w := e^{2w}g$ et il existe $\varepsilon > 0$ tels que

$$(60) \quad \Delta_{g_w} \text{Scal}_{g_w} = -(4 + \varepsilon) |Weyl_{g_w}^+|^2_{g_w} - 2 \left| Ric_{g_w} - \frac{1}{4} \text{Scal}_{g_w} g_w \right|_{g_w}^2 + \frac{1}{6} \text{Scal}_{g_w}^2.$$

De plus si $Y(M, g_0) > 0$ alors $\text{Scal}_{g_w} > 0$ sur M et si $Y(M, g_0) = 0$ alors (59) ne peut pas se produire.

(ii) On suppose que

$$(61) \quad \int_M |Weyl_{g_0}|_{g_0}^2 dv_{g_0} = \frac{4\pi^2}{3} (2\chi(M) + 3\sigma(M)).$$

Alors il existe une métrique $g_w := e^{2w}g$ telle que

$$(62) \quad \Delta_{g_w} Scal_{g_w} = -4|Weyl_{g_w}^+|_{g_w}^2 - 2 \left| Ric_{g_w} - \frac{1}{4} Scal_{g_w} g_w \right|_{g_w}^2 + \frac{1}{6} Scal_{g_w}^2.$$

De plus si $Y(M, g_0) > 0$ alors $Scal_{g_w} > 0$ sur M et si $Y(M, g_0) = 0$ alors g_w est Ricci-plate et anti-autoduale.

PREUVE. La preuve de cette proposition est la suivante. Pour le point (i), on considère $\varepsilon > 0$ tel que

$$(1 + \varepsilon) \int_M |Weyl_{g_0}|_{g_0}^2 dv_{g_0} = \frac{4\pi^2}{3} (2\chi(M) + 3\sigma(M)).$$

On choisit $\gamma_1^- = 0$, $\gamma_2 = -12$ et $\gamma_3 = -\frac{1}{2}$ et $\gamma_1^+ = 6(1 + 3\varepsilon)$ dans le lemme 0.2. Alors on a clairement $\tilde{k}_d = 0$ et on peut appliquer le lemme 0.2 et on obtient l'existence de la métrique g_w qui vérifie (58). On calcule ensuite $L_{g_w} Scal_{g_w}$ et il est très facile de voir que $L_{g_w} Scal_{g_w} \geq 0$. On applique le lemme 0.3 pour conclure sur le signe de $Scal_{g_w}$ lorsque $Y(M, g_0) > 0$. Par contre si (59) se produit avec $Y(M, g_0) = 0$ on a, toujours d'après le lemme 0.3, $Scal_{g_w} = 0$ et cela implique que $|Ric_{g_w} - \frac{1}{4} Scal_{g_w} g_w|_{g_w}^2 = |Weyl_{g_w}^+|_{g_w}^2 \equiv 0$ ce qui est impossible.

La preuve de (ii) se fait de manière similaire. ■

Avec ces ingrédients on est en mesure de montrer le Théorème 20. On suppose donc que M admet une métrique g_0 telle que $Y(M, g_0) \geq 0$ et

$$(63) \quad \mathcal{W}_+[g_0] < \frac{4\pi^2}{3} (2\chi(M) + 3\sigma(M)).$$

Supposons tout d'abord que $\mathcal{W}_+[g_0] = 0$ et $Y(g_0) > 0$. D'après un résultat de Bourguignon [Bou81] on a forcément $H_+^2(M) = 0$ ce qui est une contradiction avec l'hypothèse du théorème. Donc on doit avoir $Y(M, g_0) = 0$. Mais on obtient facilement en manipulant la formule de Gauss-Bonnet et la formule de Hirzebruch (pour toute métrique g définie sur M)

$$2\pi^2 (2\chi(M) + 3\sigma(M)) = \mathcal{W}_+[g] - \frac{1}{4} \int_M \left| Ric_g - \frac{1}{4} Scal_g g \right|_g^2 dv_g + \frac{1}{48} \int_M Scal_g^2 dv_g.$$

Si $Y(M, g_0) = 0$ il existe une métrique g dans la classe conforme de g_0 telle que $Scal_g \equiv 0$. Et puisque que nous avons supposé que $\mathcal{W}_+[g_0] = \mathcal{W}_+[g] = 0$ la formule précédente nous dit que $2\chi(M) + 3\sigma(M) \leq 0$ ce qui est incompatible avec (63).

Ainsi on est forcément dans la situation où $\mathcal{W}_+[g_0] > 0$. D'après la Proposition 6 (point (i)) on doit avoir $Y(M, g_0) > 0$. Et par cette même proposition il existe une métrique $g_w := e^{2w} g_0$ telle que

$$(64) \quad \Delta_{g_w} \text{Scal}_{g_w} = -(4 + \varepsilon) |\text{Weyl}_{g_w}^+|^2_{g_w} - 2 \left| \text{Ric}_{g_w} - \frac{1}{4} \text{Scal}_{g_w} g_w \right|_{g_w}^2 + \frac{1}{6} \text{Scal}_{g_w}^2.$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. De surcroît $\text{Scal}_{g_w} > 0$ sur M .

Considérons maintenant une forme $u \in H_+^2(M)$ et posons $G := \frac{|u|_{g_w}}{\text{Scal}_{g_w}}$. Un petit calcul nous donne (là où u ne s'annule pas)

$$(65) \quad \Delta_{g_w} G + 2 \left\langle \nabla_{g_w} G, \frac{\nabla_{g_w} \text{Scal}_{g_w}}{\text{Scal}_{g_w}} \right\rangle_{g_w} \geq \varepsilon \frac{|\text{Weyl}_{g_w}^+|^2_{g_w}}{\text{Scal}_{g_w}} G \\ + 2 \frac{|\text{Ric}_{g_w} - \frac{1}{4} \text{Scal}_{g_w} g_w|_{g_w}^2}{\text{Scal}_{g_w}} G + 4 \frac{G}{\text{Scal}_{g_w}} \left(|\text{Weyl}_{g_w}^+|_{g_w} - \frac{\sqrt{6}}{12} \text{Scal}_{g_w} \right)^2 \\ + G |u|_{g_w}^{-2} (|\nabla_{g_w} u|_{g_w}^2 - |\nabla_{g_w} |u|_{g_w}|_{g_w}|_{g_w}^2).$$

Le second membre de cette inégalité est positif donc d'après le principe du maximum G doit être constante. Mais comme on a supposé $|\text{Weyl}_{g_w}^+|_{g_w} \neq 0$ cette constante doit être 0, mais cela contredit l'hypothèse $H_+^1(M) \neq 0$. Cela prouve la minoration du théorème.

Si on a l'égalité dans (63), alors par la Proposition 6 il existe une métrique $g_w := e^{2w} g_0$ telle que

$$(66) \quad \Delta_{g_w} \text{Scal}_{g_w} = -4 |\text{Weyl}_{g_w}^+|^2_{g_w} - 2 \left| \text{Ric}_{g_w} - \frac{1}{4} \text{Scal}_{g_w} g_w \right|_{g_w}^2 + \frac{1}{6} \text{Scal}_{g_w}^2.$$

Si $Y(M, g_0) = 0$ alors g_w est Ricci-plate et anti-autoduale. D'après un résultat de LeBrun [LeB86] g est alors une métrique de Kähler.

Maintenant si $Y(M, g_0) > 0$ alors $\text{Scal}_{g_w} > 0$ et comme précédemment, on a là où u ne s'annule pas

$$(67) \quad \Delta_{g_w} G + 2 \left\langle \nabla_{g_w} G, \frac{\nabla_{g_w} \text{Scal}_{g_w}}{\text{Scal}_{g_w}} \right\rangle_{g_w} \geq 2 \frac{|\text{Ric}_{g_w} - \frac{1}{4} \text{Scal}_{g_w} g_w|_{g_w}^2}{\text{Scal}_{g_w}} G \\ + 4 \frac{G}{\text{Scal}_{g_w}} \left(|\text{Weyl}_{g_w}^+|_{g_w} - \frac{\sqrt{6}}{12} \text{Scal}_{g_w} \right)^2 + G |u|_{g_w}^{-2} (|\nabla_{g_w} u|_{g_w}^2 - |\nabla_{g_w} |u|_{g_w}|_{g_w}|_{g_w}^2).$$

Le membre de droite est positif et donc G doit être constante d'après le principe du maximum. On en déduit que le membre de droite est nul sur M . Il vient immédiatement que g est Einstein, et donc Scal_{g_w} est constante. Puisque G est constant, $|u|_{g_w}$ l'est aussi et donc, toujours d'après LeBrun [LeB86], g_w est de Kähler.

Il reste à prouver que si g est de Kähler alors on a bien égalité dans (63). Cela découle du fait que (voir Besse [Bes87] page 319)

$$(68) \quad \int_M \text{Scal}_{g_w} d\nu_{g_w} = 32\pi^2 c_1^2(M) = 32\pi^2 (2\chi(M) + 3\sigma(M)),$$

où $c_1^2(M)$ est le carré de la première classe de Chern de M .

La preuve du Théorème 21 et celle du Théorème 22 se font de manière similaire. On pourra consulter Gursky [Gur98] pour des détails.

9. Fonctions symétriques géométriques

Dans sa thèse Jeff Viaclovsky [Via00] a étudié une famille d'équations totalement non linéaires et qui sont une généralisation des équations de type Yamabe. Nous allons, dans ce paragraphe, introduire ce type de problèmes et parler de quelques applications à la géométrie conforme.

Considérons une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension $n \geq 3$ que l'on notera (M, g) . On définit le tenseur de Schouten par

$$(69) \quad A_g := \text{Ric}_g - \frac{1}{2(n-1)} \text{Scal}_g g.$$

En dimension strictement plus grande que 2, ce tenseur joue un grand rôle à cause de la décomposition du tenseur riemannien

$$\text{Riem}_g = \text{Weyl}_g + A_g \odot g,$$

où $\odot$ est le produit de Kulkarni-Nomizu.

On peut voir A_g , en tout point x de M , comme un endomorphisme de l'espace tangent $T_x M$. Cette matrice est symétrique et on notera $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses n valeurs propres. On appellera alors (pour un entier naturel k , $1 \leq k \leq n$) k -ième fonction symétrique élémentaire associée à A_g la fonction définie par

$$(70) \quad \sigma_k(A_g) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}.$$

Il est facile de voir que $\sigma_1(A_g)$ est un multiple de la courbure scalaire associée à g et que $\sigma_n(A_g)$ n'est rien d'autre que le déterminant de la matrice A_g .

Nous allons nous intéresser ici au cas de la dimension 4. Ces fonctions $\sigma_k(A_g)$ ont de nombreuses applications en géométrie conforme en dimension 4.

Pour $k = 2$, on peut écrire $\sigma_2(A_g)$ en fonction de la norme de la courbure ; plus précisément :

$$(71) \quad \sigma_2(A_g) = -\frac{1}{2} \left| \text{Ric}_g - \frac{1}{4} \text{Scal}_g g \right|^2 + \frac{1}{24} \text{Scal}_g^2.$$

On voit ainsi en utilisant la formule de Gauss-Bonnet (21) que l'on a

$$(72) \quad \frac{1}{4} \int_M |Weyl_g|^2 dv_g + \int_M \sigma_2(A_g) dv_g = 8\pi^2 \chi(M),$$

puisque $Q_g = -\frac{1}{12} \Delta_g \text{Scal}_g + \frac{1}{2} \sigma_2(A_g)$. Ainsi, comme pour $\int_M Q_g dv_g$, $\int_M \sigma_2(A_g) dv_g$ est un invariant conforme en dimension 4.

Le premier résultat que nous citons est dû à Chang, Gursky et Yang [CGY02] :

Théorème 25. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que son invariant de Yamabe $Y(M, g)$ est strictement positif et que $\int_M \sigma_2(A_g) dv_g$ est aussi strictement positif. Alors, il existe une métrique $\tilde{g} = e^{2w} g$ conforme à la métrique g telle que*

$$\sigma_2(A_{\tilde{g}}) > 0.$$

En particulier, pour la métrique $\tilde{g}$, on a

$$0 < Ric_{\tilde{g}} < \frac{1}{2} \text{Scal}_{\tilde{g}} \tilde{g}.$$

Une conséquence de ce théorème est que les variétés de dimension 4 qui sont telles que $Y(M, g) > 0$ et $\int_M \sigma_2(A_g) dv_g > 0$ ont forcément un groupe fondamental fini. On pourra se reporter à Chang-Gursky-Yang [CGY02] pour des exemples de telles variétés.

La preuve du Théorème 25 nécessite de manière fondamentale la positivité de l'opérateur de Paneitz. La méthode utilisée dans celle-ci est la méthode de continuité pour la famille d'équation (où $g_w = e^{2w} g$)

$$(73) \quad \sigma_2(A_{g_w}) = \frac{\delta}{4} \Delta_{g_w} \text{Scal}_{g_w} - 2\gamma |Weyl_{g_w}|_{g_w}^2 dv_{g_w},$$

où γ est choisi tel que $\int_M \sigma_2(A_g) dv_g = -2\gamma \int_M |Weyl_g|^2 dv_g$ et où $\delta \in]0, 1]$. On suppose ici que $Weyl_g$ ne s'annule jamais. La méthode de continuité porte sur le paramètre δ : pour $\delta = 1$ on montre d'abord qu'il existe une solution $w_1 \in C^\infty(M)$ (autrement dit une métrique g_{w_1} conforme à g) qui vérifie (73) avec $\delta = 1$ et telle que $\sigma_2(A_{g_{w_1}}) > 0$. Ensuite, pour $\delta \in]0, 1]$, on montre des estimations a priori pour les solutions de (73), ce qui permet de prouver que l'ensemble des $\delta \in]0, 1]$ tels que (73) possède une solution $w_\delta \in C^\infty(M)$ vérifiant $\sigma_2(A_{g_{w_\delta}}) > 0$ est à la fois ouvert et fermé. L'obtention de ces estimations a priori est longue et délicate et se fait au prix d'un travail technique difficile. Par connexité on déduit alors que (73) possède une solution $w_0 \in C^\infty(M)$ telle que

$$(74) \quad \sigma_2(A_{g_{w_0}}) = -2\gamma |Weyl_{g_{w_0}}|_{g_{w_0}}^2 dv_{g_{w_0}},$$

ce qui montre le résultat voulu. Si $Weyl_g$ s'annule quelque part, on construit (très simplement) un 4-tenseur Z_g du même type que $Weyl_g$, qui se comporte de la même façon sous changement conforme de métrique, et on travaille avec la famille d'équations

$$(75) \quad \sigma_2(A_{g_w}) = \frac{\delta}{4} \Delta_{g_w} \text{Scal}_{g_w} - 2\gamma |Z_{g_w}|_{g_w}^2 dv_{g_w},$$

où γ est choisi tel que $\int_M \sigma_2(A_g) dv_g = -2\gamma \int_M |Z_g|^2 dv_g$ et où $\delta \in]0, 1]$.

Très récemment, Gursky et Viaclovsky [GV01] ont simplifié considérablement la preuve de Chang-Gursky-Yang [CGY02] en se servant toujours de la méthode de continuité mais à partir d'un autre type de déformation. Cela leur permet d'utiliser des estimations a priori qui s'obtiennent de manière plus directe.

Une autre application remarquable de $\sigma_2(A_g)$ (ou de manière équivalente de la Q -courbure) est le résultat suivant dû à Chang, Gursky et Yang [CGY03]

Théorème 26. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4.*

(i) *On suppose que son invariant de Yamabe $Y(M, g)$ est strictement positif et que*

$$(76) \quad \int_M \sigma_2(A_g) dv_g > \frac{1}{4} \int_M |Weyl_g|^2 dv_g.$$

Alors M est difféomorphe à la 4-sphère standard $(\mathbb{S}^4, g_c)$ ou au projectif réel de dimension 4 muni de sa métrique standard $(\mathbb{R}P^4, g_c)$.

(ii) *Si M n'est difféomorphe ni à la 4-sphère standard $(\mathbb{S}^4, g_c)$ ni au projectif réel de dimension 4 muni de sa métrique standard $(\mathbb{R}P^4, g_c)$ et si*

$$(77) \quad \int_M \sigma_2(A_g) dv_g = \frac{1}{4} \int_M |Weyl_g|^2 dv_g,$$

alors (M, g) est conformément difféomorphe soit au 2-projectif complexe muni de la métrique de Fubini-Study, soit à un quotient de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ muni de la métrique produit.

Ce théorème peut se voir comme la version conforme (puisque les quantités $\int_M \sigma_2(A_g) dv_g$ et $\int_M |Weyl_g|^2 dv_g$ sont des invariants conformes) du résultat suivant de Margerin [Mar98]

Théorème 27. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, lisse, sans bord et de dimension 4. On suppose que $Scal_g$ est partout strictement positive et que*

$$(78) \quad |Weyl_g|^2 + 2 \left| Ric_g - \frac{1}{4} Scal_g g \right|_g^2 < \frac{1}{6} Scal_g^2.$$

Alors M est difféomorphe à la 4-sphère $\mathbb{S}^4$ ou au projectif réel $\mathbb{R}P^4$.

(ii) *On suppose que $Scal_g$ est partout strictement positive et que*

$$(79) \quad |Weyl_g|^2 + 2 \left| Ric_g - \frac{1}{4} Scal_g g \right|_g^2 = \frac{1}{6} Scal_g^2$$

Alors (M, g) est conformément difféomorphe soit au 2-projectif complexe muni de la métrique de Fubini-Study, soit à un quotient de $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ muni de la métrique produit.

Pour se convaincre que le Théorème 26 est bien une version conforme du Théorème 27, il suffit d'intégrer sur M chaque coté de (78) pour obtenir exactement (76).

La preuve du point (i) de ce théorème s'inspire des méthodes développées dans Chang-Gursky-Yang [CGY02]. Là encore on utilise la résolution d'une famille d'équation du type de celles étudiées dans Chang-Gursky-Yang [CGY02] dont nous avons parlé plus haut (mais légèrement modifiées) pour montrer que sous les hypothèses $Y(M, g) > 0$ et (76), il existe une métrique g_w conforme à g telle que

$$(80) \quad |Weyl_{g_w}|_{g_w}^2 + 2 \left| Ric_{g_w} - \frac{1}{4} Scal_{g_w} g_w \right|_{g_w}^2 < \frac{1}{6} Scal_{g_w}^2,$$

puis on applique le résultat de Margerin. On renvoie à Chang-Gursky-Yang [CGY03] pour les détails.

La preuve du point (ii) de ce théorème se fait au prix d'une caractérisation des métriques qui sont Bach-plates (i.e. dont le tenseur de Bach dont nous avons parlé au paragraphe 8 est identiquement nul), à invariant de Yamabe strictement positif et dont le tenseur de Weyl vérifie

$$\int_M |Weyl_g|_g^2 dv_g = 16\pi^2 \chi(M).$$

Nous renvoyons à l'article original Chang-Gursky-Yang [CGY03] pour les détails.

10. Références

- [Ada88] D. R. ADAMS – « A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives », *Ann. of Math. (2)* **128** (1988), no. 2, p. 385–398.
- [AL99] T. AUBIN & Y. Y. LI – « On the best Sobolev inequality », *J. Math. Pures Appl. (9)* **78** (1999), no. 4, p. 353–387.
- [Aub76] T. AUBIN – « Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire », *J. Math. Pures Appl. (9)* **55** (1976), no. 3, p. 269–296.
- [BC91] A. BAHRI & J.-M. CORON – « The scalar-curvature problem on the standard three-dimensional sphere », *J. Funct. Anal.* **95** (1991), no. 1, p. 106–172.
- [BCY92a] T. P. BRANSON, S.-Y. A. CHANG & P. C. YANG – « Estimates and extremals for zeta function determinants on four-manifolds », *Comm. Math. Phys.* **149** (1992), no. 2, p. 241–262.
- [BCY92b] ———, « Estimates and extremals for zeta function determinants on four-manifolds », *Comm. Math. Phys.* **149** (1992), no. 2, p. 241–262.
- [Bes87] A. L. BESSE – *Einstein manifolds*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*, vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [BGM71] M. BERGER, P. GAUDUCHON & E. MAZET – *Le spectre d'une variété riemannienne*, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 194, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [BO91] T. P. BRANSON & B. ORSTED – « Explicit functional determinants in four dimensions », *Proc. Amer. Math. Soc.* **113** (1991), no. 3, p. 669–682.
- [Bou81] J.-P. BOURGUIGNON – « Les variétés de dimension 4 à signature non nulle dont la courbure est harmonique sont d'Einstein », *Invent. Math.* **63** (1981), no. 2, p. 263–286.
- [Bra85] T. P. BRANSON – « Differential operators canonically associated to a conformal structure », *Math. Scand.* **57** (1985), no. 2, p. 293–345.
- [Bra87] ———, « Group representations arising from Lorentz conformal geometry », *J. Funct. Anal.* **74** (1987), no. 2, p. 199–291.

- [Bra95] ———, « Sharp inequalities, the functional determinant, and the complementary series », *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), no. 10, p. 3671–3742.
- [CC86] L. CARLESON & S.-Y. A. CHANG – « On the existence of an extremal function for an inequality of J. Moser », *Bull. Sci. Math. (2)* **110** (1986), no. 2, p. 113–127.
- [CC01] S.-Y. A. CHANG & W. CHEN – « A note on a class of higher order conformally covariant equations », *Discrete Contin. Dynam. Systems* **7** (2001), no. 2, p. 275–281.
- [CGW94] S.-Y. A. CHANG, M. GURSKY & T. WOLFF – « Lack of compactness in conformal metrics with $L^{d/2}$ curvature », *J. Geom. Anal.* **4** (1994), no. 2, p. 143–153.
- [CGY93] S.-Y. A. CHANG, M. J. GURSKY & P. C. YANG – « The scalar curvature equation on 2- and 3-spheres », *Calc. Var. Partial Differential Equations* **1** (1993), no. 2, p. 205–229.
- [CGY99] ———, « Regularity of a fourth order nonlinear PDE with critical exponent », *Amer. J. Math.* **121** (1999), no. 2, p. 215–257.
- [CGY02] ———, « An equation of Monge-Ampère type in conformal geometry, and four-manifolds of positive Ricci curvature », *Ann. of Math. (2)* **155** (2002), no. 3, p. 709–787.
- [CGY03] ———, « A conformally invariant sphere theorem in four dimensions », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2003), no. 98, p. 105–143.
- [CGYre] ———, « A conformally invariant sphere theorem in four dimensions », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (A paraître).
- [Cha87] S.-Y. A. CHANG – « Extremal functions in a sharp form of Sobolev inequality », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)* (Providence, RI), Amer. Math. Soc., 1987, p. 715–723.
- [Cha96] S.-Y. A. CHANG – « The Moser-Trudinger inequality and applications to some problems in conformal geometry », in *Nonlinear partial differential equations in differential geometry (Park City, UT, 1992)*, IAS/Park City Math. Ser., vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, p. 65–125.
- [Cha97] ———, « On zeta functional determinant », in *Partial differential equations and their applications (Toronto, ON, 1995)*, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, With notes taken by Jie Qing, p. 25–50.
- [Cha99] S.-Y. A. CHANG – « On a fourth-order partial differential equation in conformal geometry », in *Harmonic analysis and partial differential equations (Chicago, IL, 1996)*, Chicago Lectures in Math., Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 1999, p. 127–150.
- [CQ96] S.-Y. A. CHANG & J. QING – « Zeta functional determinants on manifolds with boundary », *Math. Res. Lett.* **3** (1996), no. 1, p. 1–17.
- [CQ97a] ———, « The zeta functional determinants on manifolds with boundary. I. The formula », *J. Funct. Anal.* **147** (1997), no. 2, p. 327–362.
- [CQ97b] ———, « The zeta functional determinants on manifolds with boundary. II. Extremal metrics and compactness of isospectral set », *J. Funct. Anal.* **147** (1997), no. 2, p. 363–399.
- [CQY] S.-Y. A. CHANG, J. QING & P. C. YANG – « On the topology of conformally compact einstein 4-manifolds. », *J. Reine Angew. Math.* **A paraître**.
- [CQY00] ———, « Compactification of a class of conformally flat 4-manifold », *Invent. Math.* **142** (2000), no. 1, p. 65–93.
- [CXY98] S.-Y. A. CHANG, X. XU & P. C. YANG – « A perturbation result for prescribing mean curvature », *Math. Ann.* **310** (1998), no. 3, p. 473–496.
- [CY87] S.-Y. A. CHANG & P. C. YANG – « Prescribing Gaussian curvature on S^2 », *Acta Math.* **159** (1987), no. 3-4, p. 215–259.
- [CY88] S.-Y. A. CHANG & P. C. YANG – « Conformal deformation of metrics on S^2 », *J. Differential Geom.* **27** (1988), no. 2, p. 259–296.
- [CY89a] ———, « Compactness of isospectral conformal metrics on S^3 », *Comment. Math. Helv.* **64** (1989), no. 3, p. 363–374.
- [CY89b] ———, « The conformal deformation equation and isospectral set of conformal metrics », in *Recent developments in geometry (Los Angeles, CA, 1987)*, Contemp. Math., vol. 101, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, p. 165–178.

- [CY90] S.-Y. A. CHANG & P. C.-P. YANG – « Isospectral conformal metrics on 3-manifolds », *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), no. 1, p. 117–145.
- [CY91a] S.-Y. A. CHANG & P. C. YANG – « A perturbation result in prescribing scalar curvature on S^n », *Duke Math. J.* **64** (1991), no. 1, p. 27–69.
- [CY91b] ———, « Spectral invariants of conformal metrics », in *Harmonic analysis (Sendai, 1990)*, ICM-90 Satell. Conf. Proc., Springer, Tokyo, 1991, p. 51–60.
- [CY93] S.-Y. A. CHANG & P. C. YANG – « Addendum to : “A perturbation result in prescribing scalar curvature on S^n ” [Duke Math. J. **64** (1991), no. 1, 27–69; MR 92m :53063] », *Duke Math. J.* **71** (1993), no. 1, p. 333–335.
- [CY95] S.-Y. A. CHANG & P. C. YANG – « Extremal metrics of zeta function determinants on 4-manifolds », *Ann. of Math. (2)* **142** (1995), no. 1, p. 171–212.
- [CY97a] ———, « Determinants and extremal metrics in conformal geometry », in *Geometry from the Pacific Rim (Singapore, 1994)*, de Gruyter, Berlin, 1997, p. 37–57.
- [CY97b] ———, « On uniqueness of solutions of n th order differential equations in conformal geometry », *Math. Res. Lett.* **4** (1997), no. 1, p. 91–102.
- [CY99] ———, « On a fourth order curvature invariant », in *Spectral problems in geometry and arithmetic (Iowa City, IA, 1997)*, Contemp. Math., vol. 237, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, p. 9–28.
- [CY00] ———, « Fourth order equations in conformal geometry », in *Global analysis and harmonic analysis (Marseille-Luminy, 1999)*, Sémin. Congr., vol. 4, Soc. Math. France, Paris, 2000, p. 155–165.
- [DD01] Z. DJADLI & O. DRUET – « Extremal functions for optimal Sobolev inequalities on compact manifolds », *Calc. Var. Partial Differential Equations* **12** (2001), no. 1, p. 59–84.
- [Der83] A. DERDZIŃSKI – « Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four », *Compositio Math.* **49** (1983), no. 3, p. 405–433.
- [DHL00] Z. DJADLI, E. HEBEY & M. LEDOUX – « Paneitz-type operators and applications », *Duke Math. J.* **104** (2000), no. 1, p. 129–169.
- [DJ02] Z. DJADLI & A. JOURDAIN – « Nodal solutions for scalar curvature type equations with perturbation terms on compact Riemannian manifolds », *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8)* **5** (2002), no. 1, p. 205–226.
- [Dja] Z. DJADLI – « Existence result for the mean field problem on riemann surfaces of all genres », *Preprint*.
- [Dja99a] ———, « Nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent on compact Riemannian manifolds in presence of symmetries », *Rev. Mat. Complut.* **12** (1999), no. 1, p. 201–229.
- [Dja99b] ———, « Nonlinear elliptic equations with critical Sobolev exponent on compact Riemannian manifolds », *Calc. Var. Partial Differential Equations* **8** (1999), no. 4, p. 293–326.
- [DJLW99] W. DING, J. JOST, J. LI & G. WANG – « Existence results for mean field equations », *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **16** (1999), no. 5, p. 653–666.
- [DMa] Z. DJADLI & A. MALCHIODI – « Existence of conformal metrics with constant Q -curvature », *ArXiv : math.AP/0410141. A paraître dans Annals of Mathematics*.
- [DMb] ———, « A fourth order uniformization theorem on some four manifolds with large total Q -curvature », *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **340** (2005), 341–346.
- [DMA02] Z. DJADLI, A. MALCHIODI & M. O. AHMEDOU – « Prescribing a fourth order conformal invariant on the standard sphere. I. A perturbation result », *Commun. Contemp. Math.* **4** (2002), no. 3, p. 375–408.
- [DMOA] Z. DJADLI, A. MALCHIODI & M. OULD AHMEDOU – « The prescribed boundary men curvature problem on B^4 », *preprint*.
- [DMOA02] ———, « Prescribing a fourth order conformal invariant on the standard sphere, part ii : Blow-up analysis and applications », *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* **1** (2002), no. 2, p. 387–434.
- [DMOA03] ———, « Prescribing scalar and boundary mean curvature on the three dimensional half sphere », *J. Geom. Anal.* **13** (2003), no. 2, p. 233–267.
- [Gur94] M. J. GURSKY – « Locally conformally flat four- and six-manifolds of positive scalar

- curvature and positive Euler characteristic », *Indiana Univ. Math. J.* **43** (1994), no. 3, p. 747–774.
- [Gur98] ———, « The Weyl functional, de Rham cohomology, and Kähler-Einstein metrics », *Ann. of Math. (2)* **148** (1998), no. 1, p. 315–337.
- [Gur99] ———, « The principal eigenvalue of a conformally invariant differential operator, with an application to semilinear elliptic PDE », *Comm. Math. Phys.* **207** (1999), no. 1, p. 131–143.
- [Gur00] ———, « Four-manifolds with $\delta W^+ = 0$ and Einstein constants of the sphere », *Math. Ann.* **318** (2000), no. 3, p. 417–431.
- [GV01] M. J. GURSKY & J. A. VIACLOVSKY – « A new variational characterization of three-dimensional space forms », *Invent. Math.* **145** (2001), no. 2, p. 251–278.
- [GV03] ———, « A fully nonlinear equation on four-manifolds with positive scalar curvature », *J. Differential Geom.* **63** (2003), no. 1, p. 131–154.
- [KW74a] J. L. KAZDAN & F. W. WARNER – « Curvature functions for compact 2-manifolds », *Ann. of Math. (2)* **99** (1974), p. 14–47.
- [KW74b] ———, « Curvature functions for open 2-manifolds », *Ann. of Math. (2)* **99** (1974), p. 203–219.
- [KW75a] ———, « Existence and conformal deformation of metrics with prescribed Gaussian and scalar curvatures », *Ann. of Math. (2)* **101** (1975), p. 317–331.
- [KW75b] ———, « Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure », *J. Differential Geometry* **10** (1975), p. 113–134.
- [LeB86] C. LEBRUN – « On the topology of self-dual 4-manifolds », *Proc. Amer. Math. Soc.* **98** (1986), no. 4, p. 637–640.
- [LeB95] ———, « Einstein metrics and Mostow rigidity », *Math. Res. Lett.* **2** (1995), no. 1, p. 1–8.
- [Li93] Y. Y. LI – « Prescribing scalar curvature on S^3 , S^4 and related problems », *J. Funct. Anal.* **118** (1993), no. 1, p. 43–118.
- [Li95] ———, « Prescribing scalar curvature on S^n and related problems. I », *J. Differential Equations* **120** (1995), no. 2, p. 319–410.
- [Li96] Y. LI – « Prescribing scalar curvature on S^n and related problems. II. Existence and compactness », *Comm. Pure Appl. Math.* **49** (1996), no. 6, p. 541–597.
- [Li00] Y. Y. LI – « Best Sobolev inequalities on Riemannian manifolds », in *Differential equations and mathematical physics (Birmingham, AL, 1999)*, AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, p. 273–278.
- [LP87] J. M. LEE & T. H. PARKER – « The Yamabe problem », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **17** (1987), no. 1, p. 37–91.
- [Mal] A. MALCHIODI – « Compactness of solutions to some geometric fourth-order equations », *J. Reine Angew. Math., to appear*.
- [Mar98] C. MARGERIN – « A sharp characterization of the smooth 4-sphere in curvature terms », *Comm. Anal. Geom.* **6** (1998), no. 1, p. 21–65.
- [Mos71] J. MOSER – « A sharp form of an inequality by N. Trudinger », *Indiana Univ. Math. J.* **20** (1970/71), p. 1077–1092.
- [MP49] S. MINAKSHISUNDARAM & A. PLEIJEL – « Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-operator on Riemannian manifolds », *Canadian J. Math.* **1** (1949), p. 242–256.
- [MS67] H. P. MCKEAN, JR. & I. M. SINGER – « Curvature and the eigenvalues of the Laplacian », *J. Differential Geometry* **1** (1967), no. 1, p. 43–69.
- [Ok95a] K. OKIKIOLU – « The Campbell-Hausdorff theorem for elliptic operators and a related trace formula », *Duke Math. J.* **79** (1995), no. 3, p. 687–722.
- [Ok95b] ———, « The multiplicative anomaly for determinants of elliptic operators », *Duke Math. J.* **79** (1995), no. 3, p. 723–750.
- [Ok01] K. OKIKIOLU – « Critical metrics for the determinant of the Laplacian in odd dimensions », *Ann. of Math. (2)* **153** (2001), no. 2, p. 471–531.
- [Ono82] E. ONOFRI – « On the positivity of the effective action in a theory of random surfaces », *Comm. Math. Phys.* **86** (1982), no. 3, p. 321–326.
- [OPS88a] B. OSGOOD, R. PHILLIPS & P. SARNAK – « Compact isospectral sets of surfaces », *J. Funct. Anal.* **80** (1988), no. 1, p. 212–234.

- [OPS88b] ———, « Extremals of determinants of Laplacians », *J. Funct. Anal.* **80** (1988), no. 1, p. 148–211.
- [Pan83] S. PANEITZ – « A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary pseudo-riemannian manifolds », *Preprint* (1983).
- [Pol81] A. M. POLYAKOV – « Quantum geometry of bosonic strings », *Phys. Lett. B* **103** (1981), no. 3, p. 207–210.
- [Ric94] K. RICHARDSON – « Critical points of the determinant of the Laplace operator », *J. Funct. Anal.* **122** (1994), no. 1, p. 52–83.
- [Ros97] S. ROSENBERG – *The Laplacian on a Riemannian manifold*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 31, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, An introduction to analysis on manifolds.
- [RS71] D. B. RAY & I. M. SINGER – « R -torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds », *Advances in Math.* **7** (1971), p. 145–210.
- [Sch84] R. SCHOEN – « Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature », *J. Differential Geom.* **20** (1984), no. 2, p. 479–495.
- [Sob38] S. SOBOLEV – « Sur un théorème d'analyse fonctionnelle », *Math. Sb.* **46** (1938), p. 471–496.
- [Str90] M. STRUWE – *Variational methods*, Springer-Verlag, Berlin, 1990, Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.
- [SZ96] R. SCHOEN & D. ZHANG – « Prescribed scalar curvature on the n -sphere », *Calc. Var. Partial Differential Equations* **4** (1996), no. 1, p. 1–25.
- [Tru67] N. S. TRUDINGER – « On imbeddings into Orlicz spaces and some applications », *J. Math. Mech.* **17** (1967), p. 473–483.
- [Tru68] ———, « Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)* **22** (1968), p. 265–274.
- [UV00] K. K. UHLENBECK & J. A. VIACLOVSKY – « Regularity of weak solutions to critical exponent variational equations », *Math. Res. Lett.* **7** (2000), no. 5–6, p. 651–656.
- [Via00] J. A. VIACLOVSKY – « Conformal geometry, contact geometry, and the calculus of variations », *Duke Math. J.* **101** (2000), no. 2, p. 283–316.
- [Yam60] H. YAMABE – « On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds », *Osaka Math. J.* **12** (1960), p. 21–37.
- [YY80] P. C. YANG & S. T. YAU – « Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **7** (1980), no. 1, p. 55–63.

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

How the proof of the strong perfect graph conjecture was found

Paul Seymour¹

In 1961, Claude Berge proposed the “strong perfect graph conjecture”, probably the most beautiful open question in graph theory. It was answered just before his death in 2002. This is an overview of the solution, together with an account of some of the ideas that eventually brought us to the answer.

In the summer of 2002, Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Robin Thomas and I announced that we had settled the strong perfect graph conjecture. The proof is about 150 pages, and an overview can only give a vague idea of it. But I gave a talk on it in September 2002, and Vasek Chvátal told me afterwards that if I could put the talk on paper, he would like to have it for the slim and beautiful volume² that he and Adrian Bondy had in mind in honour of Claude Berge. So here it is, more or less. What he wanted was an account of the ideas that led us to the approach that finally worked (and some that did not), so I beg the reader’s indulgence in this respect; rather a lot of this paper is devoted to what we were thinking and when, rather than to the mathematics itself.

Three of us started on this problem in January 2000, and worked just about full-time on it (joined by Maria as my student from summer 2001 on) for two-and-a-half years, until we announced the result in May 2002. The start date is very clear, for a reason. In 1999 Peter Sarnak (who was chairman of the Princeton math department at that time) came to me and suggested that we try for a grant from AIM, the American Institute of Mathematics. This is a private organization, funded by Fry Electronics, a computer retail chain in California. Every year, AIM supports a group of about three people to work full-time on some project; or more precisely, AIM has an arrangement with some university departments, that AIM supports, say, two people to come to the department as visitors, and in return the department frees some faculty member from teaching. Anyway, this is a great way for a group of three people to work full-time on a project for six months or a year. Three of us, Robertson, Thomas and I, had worked together on several earlier projects, and wanted to do it again, so it seemed an ideal chance for us. The catch is, AIM doesn’t want the normal kind of proposal; they like proposals to

¹ Princeton University. Supported by ONR grant N00014-01-1-0608, and NSF grant DMS-0070912.

² To be published by Princeton University Press

work on “high-profile” problems, with a correspondingly small chance of success (at least that was what Sarnak told me.) So what should we propose to do?

There was always the Hadwiger conjecture, that graphs not contractible to K_{t+1} are t -colourable. For $t = 4$ that is equivalent to the four-colour theorem, and in [7] we had gone one step further and proved it for $t = 5$. People kept asking us “What about $t = 6$?”, and on a grant proposal this would look eminently plausible — except that we felt we had already reached our limits doing $t = 5$, and had no real hope of getting any further.

The other big open question in graph theory was Berge’s strong perfect graph conjecture. The group around Gérard Cornuéjols seemed to be making progress with this — they thought that every Berge graph could be built from a few basic classes by some reasonable constructions — and if that could be true, then we ought to be in on it, because that kind of theorem was what we did best, we had had a lot of successes on other problems with the same approach. It seemed a natural topic for us, except for the small difficulty that none of us knew anything about perfect graphs.

Those were two world-class problems, except that on the first we had no hope, and on the second we had no experience. So we decided to put down both problems on the proposal — half a page on perfect graphs and half a page on Hadwiger. (That was a great grant proposal to write, incidentally; it really was about a page long in total.) And AIM accepted the proposal, and gave us the grant. I am dwelling on this at some length, because I am very grateful to AIM; they are just a small private organization, but they gave us a lot of help, and without their grant we might never have had the incentive or the opportunity to get started on perfect graphs. AIM funded us through the essential phase of trying out dozens of bad ideas that don’t work, and I’d like them to have some credit for it.

Anyway, in January 2000 Neil and Robin arrived in Princeton for a six-month visit supported by AIM, so now we had to bite the bullet and actually start thinking about perfect graphs.

Berge and perfection

The *chromatic number* $\chi(G)$ of a graph G is the minimum number of colours needed to colour the vertices so that every two adjacent vertices get different colours. Determining the chromatic number of a graph is a notoriously hard problem, in practice and in theory, and it’s hard even to get decent lower bounds. One obvious lower bound is $\omega(G)$, the size of the biggest clique (= complete subgraph) of G ; because if a graph has six pairwise adjacent vertices, you certainly need at least six colours to colour it. And there are some interesting graphs for which $\chi(G) = \omega(G)$, for instance the following:

- **Bipartite graphs.** If G is bipartite then $\chi(G) = \omega(G) = 2$, unless G has no edges. (This is admittedly not a very deep fact.)
- **Complements of bipartite graphs.** If H is bipartite and $G = \overline{H}$, then $\chi(G)$ is the size of the smallest set of vertices and edges of H whose union is $V(H)$; and $\omega(G)$ is the maximum size of a stable set of vertices of H . That these are equal is a theorem of König.

– **Line graphs of bipartite graphs.** If H is bipartite and G is its line graph $L(H)$, then $\chi(G)$ is the edge-chromatic number of H , the minimum number of colours needed to colour the edges so that any two edges that meet get different colours; and $\omega(G)$ is the maximum number of edges that pairwise share an end, which (since H is bipartite) is the same as the biggest vertex-degree in H . That these are equal is the well-known theorem of König on edge-colouring bipartite graphs.

– **Complements of line graphs of bipartite graphs.** If H is bipartite, and $G = \overline{L(H)}$, then $\chi(G)$ is the minimum number of vertices of H that together hit all edges, and $\omega(G)$ is the maximum size of a matching in H . That these are equal is an even more well-known theorem of König, the min-max characterization of maximum matchings in bipartite graphs.

– **Comparability graphs.** If $(P, \leq)$ is a partial order, let G be the graph with $V(G) = P$, in which two vertices are adjacent if one is less than the other in the partial order. Then $\chi(G)$ is the minimum number of antichains in the poset with union P , and $\omega(G)$ is the maximum size of a chain. That these are equal is a rather easy theorem, that can be proved by partitioning the elements of P into antichains by their height. But still, it's another example.

– **Complements of comparability graphs.** If $(P, \leq)$ is a partial order, let G be the complement of the graph defined above. Then $\chi(G)$ is the minimum number of chains with union P , and $\omega(G)$ is the maximum size of an antichain. That these are equal is Dilworth's theorem, and is much less obvious.

And there are many more examples, but that is enough for our purposes. (Note that the fifth class contains the first, and the sixth contains the second, so one might not bother to list the first and second classes. As it turns out, that would be a mistake; the first four classes are the important ones.)

These could perhaps all claim to be interesting, but not every graph satisfying $\chi(G) = \omega(G)$ is interesting. For instance, take any graph with at most 100 vertices, and take the disjoint union of this and K_{100} . The graph we construct satisfies $\chi(G) = \omega(G)$, but it is definitely not interesting in general. We would like to somehow define a class of graphs satisfying $\chi(G) = \omega(G)$, containing the interesting graphs mentioned above, and not the uninteresting ones.

A nice way to do this is Berge's definition [1]; we make the property hereditary. Let us say a graph G is *perfect* if $\chi(H) = \omega(H)$ for every induced subgraph H of G . All the graphs listed above are perfect, except for the one we wanted to exclude, so that works. And this turns out to be an inspired definition. Perfect graphs have pretty theoretical properties; for instance, Lovász proved that the complement of any perfect graph is also perfect (which explains why the examples listed above all come in complementary pairs). And they have important connections with linear and integer programming; for instance, if A is a $(0,1)$ -matrix with n columns, all vertices of the polyhedron $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, A\mathbf{x} \leq \mathbf{1}\}$ are integral if and only if A arises from a perfect graph (more precisely, the non-dominated rows of A form the incidence matrix of the maximal cliques of a perfect graph). Perfect graphs have come to be recognized as having a natural place in the world.

Not all graphs satisfy $\chi(G) = \omega(G)$. For instance, if G is a cycle of odd length (at least five), then $\chi(G) = 3$ and $\omega(G) = 2$; or if G is the complement of an odd cycle of length $2n + 1 \geq 5$, then $\chi(G) = n + 1$ and $\omega(G) = n$. So if G

is perfect then no induced subgraph is an odd hole or antihole (a *hole* means an induced subgraph which is a cycle of length at least four, and an *antihole* is the complement). Let us say G is *Berge* if it contains no odd hole or antihole; so every perfect graph is Berge. In 1961, Berge proposed two excellent conjectures about perfect graphs:

- (The weak perfect graph conjecture, later Lovász's theorem.) *The complement of every perfect graph is perfect.*
- (The strong perfect graph conjecture, SPGC.) *G is perfect if and only if G is Berge.*

We have now proved the SPGC [3].

Decomposition theorems

We spent a year or more experimenting with different ideas, trying to get familiar with methods that might work and those that would not. Very early we realized that our only chance of success was to try to prove that every Berge graph is either of some familiar type, or admits some kind of decomposition. There were several reasons why we focussed on this approach — it was what came naturally to us, and we had been quite successful at this kind of theorem, in other contexts; Conforti, Cornuéjols and Vušković had been looking at this approach and thought it was promising; and yet it was a relatively new approach, while the only other approach that we knew (looking at the linear programming implications for a minimum counterexample) had been exhaustively studied, and we didn't think we could contribute any more to that. (Incidentally, Chvátal hotly denies, with references, that trying for a decomposition theorem was a new approach. But at least we thought it was new.)

What do we want to prove? Ideally we would like a set of construction rules such that every Berge graph (and no non-Berge graph) can be constructed via these rules starting from some basic types. Then we could prove the SPGC by assuming there is a smallest counterexample G to the SPGC, and applying this construction theorem to it. We would have to check that basic graphs are perfect, and any graph built from smaller graphs by means of our constructions could not be a minimum counterexample to the SPGC.

As a warm-up, we tried to find a construction for the Berge graphs with no K_4 subgraph. Tucker had already shown that all such graphs are perfect [12], but the structure of such graphs was not known, and we thought this would be a good place to try for construction theorems before we started on the general problem. But it was terrible, we got nowhere — we could find nothing to do with these graphs that we couldn't equally well do with general Berge graphs. Excluding K_4 seemed more like a distraction than a help; it seemed to mask what was really going on, without giving much simplification. (At least that was our excuse for eventually giving up on this problem.) Even now there is no construction known for these graphs.

So we had to reduce our expectations, and try for something weaker. To prove the SPGC it would be enough to show that for every Berge graph, either it lies in some basic class, or it has some feature that proves it is not a minimum counterexample to the conjecture; and this turns out to be a much more fruitful line of research. The advantage is that the “feature” does not have to be a way of

constructing the graph from smaller graphs. In fact we used four types of feature; three of them do correspond to such constructions, while the fourth is a special kind of partition of the vertex set (a “balanced skew partition”) that cannot occur in a minimum counterexample to the SPGC, but does not correspond to a construction. All four correspond to *decompositions*, ways of breaking up the graph, so from now on let us confine ourselves to features that are decompositions.

At that stage we could still be a little vague about what we wanted to prove. Since we were not trying to do an inductive proof, the precise statement of the theorem didn’t really matter; we could go by trial and error, and try to discover the right formulation by experiment. There was a conjecture of Cornuéjols et al. [5], that every Berge graph either is one of the first four types listed above (bipartite graphs, line graphs of bipartite graphs, and their complements), or admits one of a few kinds of decomposition. Certainly we had no objection to calling these four classes basic, and if experience showed that we needed more basic classes we could add them later.

What about the decompositions? Those were more open to debate; it was crucial only that whatever decompositions we used, we had to be able to prove that the smallest counterexample to the SPGC did not admit any such decompositions. Our final list of decompositions was a little different from that proposed in [5]. For aesthetic reasons it would be best to keep the list of decompositions as small as possible, but this was not a prime consideration; all we really wanted to do was to prove the SPGC, so if more decompositions seemed to be useful we would happily throw them into the pot. But we found that all we needed were the same few kinds of decomposition, over and over again. The first is a “2-join”. Let A, B be a partition of $V(G)$, let A_1, A_2 be disjoint subsets of A , and let B_1, B_2 be disjoint subsets of B . If for $i = 1, 2$, every vertex of A_i is adjacent to every vertex of B_i , and there are no other edges between A and B , we say that G admits a 2-join. (Not quite, because we want a 2-join to be a useful thing to have. So we had better insist that A, B are nonempty, and perhaps insist that $|A|, |B| \geq 3$ or something like that. The details are not important here.) 2-joins work well for this problem. There is a corresponding construction (G admits a 2-join if and only if it can be built from two smaller graphs by piecing them together appropriately), and this construction preserves both being Berge and being perfect (that is, the two smaller graphs are perfect if and only if the big graph is); so if there is a smallest counterexample to Berge’s conjecture, it cannot admit a 2-join. (Yes, there also exist 1-joins, but it turns out that we don’t need them.) In addition, a graph might admit a *complement 2-join*, that is, its complement might admit a 2-join.

In the paper [3] we used — once only — a third kind of decomposition, called an *M-join*. I won’t bother to talk about it here, because in her thesis, Maria Chudnovsky showed that we don’t need M-joins; the theorem is still true without them. (They are a mild variant of 2-joins, with the same desirable properties.)

But these are not enough; there are Berge graphs that do not admit 2-joins, complement 2-joins or M-joins that don’t fall into any familiar classes. We need at least one more kind of decomposition. What seemed the natural candidate was Chvátal’s concept of a *skew partition*, that is, a partition (A, B) of $V(G)$ such that A is not connected (that is, the restriction of G to A is not connected) and B is not anticonnected (that is, the restriction of $\overline{G}$ to B is not connected). In a way these

are prettier than 2-joins, because a skew partition of G is also a skew partition of $\overline{G}$. And they are useful — for instance, every comparability graph is either bipartite, or a clique, or admits a skew partition (take a point u of the poset which is neither a maximum nor a minimum point, and which is incomparable with some other point v ; then the set of its neighbours is not anticonnected, and separates u from v .)

But there was a big difficulty with skew partitions; they didn't satisfy the one crucial condition. It was a heavily-investigated open conjecture (due to Chvátal) that there could be no skew partition in a minimum counterexample to the SPGC. This was a great blight on our hopes, for a long time, because we couldn't prove Chvátal's conjecture, and it does seem that skew partitions are what you get; Berge graphs that do not lie in the basic classes seem to be full of skew partitions, and it's difficult to see anything better in them.

Then we had a good thought — “balanced” skew partitions. A skew partition (A, B) is *balanced* if every induced path (of length at least 2) with ends in B and interior in A has even length, and vice versa for antipaths. These have the same advantages as general skew partitions (that is, they seem to be present in Berge graphs when you need them), and the big disadvantage goes away; we could prove that no minimum counterexample to the SPGC admits a balanced skew partition.

There is another unpleasant feature of skew partitions — unlike 2-joins and M-joins, there is no corresponding composition operation (at least, not one that I would call a composition). This feature does not disappear when we move to balanced skew partitions, but it does not matter for the application to the SPGC. It *does* matter if we want to use the decomposition theorem to get a polynomial-time algorithm to test if a graph is perfect, but that is another story. (Maria and I eventually found such an algorithm, not using the decomposition theorem at all, which was a big surprise [2].)

That was our working conjecture, for more than a year; that for every Berge graph, either it belongs to one of the four basic classes, or it admits a 2-join, complement 2-join, M-join, or balanced skew partition. (Actually, I am not sure where this conjecture originated. It seemed to come to me from nowhere in a moment of inspiration, but apparently Cornuéjols' group made it first, and I had been listening to talks by Cornuéjols, so perhaps I just regurgitated it.) Eventually we worked out what looked like a proof, and for a couple of months last summer we were claiming to have proved it; which was a little embarrassing, because the conjecture is false. (There was an oversight in our proof — we never bothered to verify that one of the skew partitions we found was balanced, and it wasn't.)

We found counterexamples that, for want of a better name, we called *double split graphs*. (They are obtained from split graphs by doubling the vertices.) A *split graph* is a graph whose vertex set can be partitioned into a stable set and a clique. Let H be a split graph, with stable set A and clique B . For each $v \in V(H)$ let v_1, v_2 be two new vertices; the graph G we are constructing will have vertex set these new vertices. For each $a \in A$ let a_1a_2 be an edge of G , so the set of new vertices corresponding to A induces a matching in G . Do the same in the complement for B ; that is, all the new vertices corresponding to B are mutually adjacent except for the nonedges b_1b_2 for $b \in B$. For each $a \in A$ and $b \in B$, if $ab \in E(H)$ let a_1b_1, a_2b_2 be edges of G , and otherwise let a_1b_2, a_2b_1 be edges of G . Then the graph G is a double split graph.

It is easy to see that double split graphs are perfect, and in general they do not fall into the four basic classes, and don't admit 2-joins or complement 2-joins or M-joins. They also do not admit balanced skew partitions (they admit skew partitions, but not balanced ones). So we had better call them a fifth basic class, and hope that they are not precursors of anything worse.

Happily, the error in our proof could be fixed now; at the cost of this fifth class, it all works again. We proved the following.

0.1. *Let G be a Berge graph. Then either:*

- *G belongs to a basic class; that is, either*
 - *G or its complement is bipartite, or*
 - *G or its complement is a line graph of a bipartite graph, or*
 - *G is a double split graph,*

or

- *G admits one of the following:*
 - *a 2-join,*
 - *a complement 2-join,*
 - *an M-join,*
 - *a balanced skew partition.*

If we can prove 0.1, then the SPGC follows; for suppose the SPGC is false. Then there is a smallest counterexample G . But G does not lie in any of the basic classes, since those graphs are all perfect; and G does not admit any of the four types of decomposition listed in 0.1; and so 0.1 is violated, a contradiction.

Getting started

How can we set about proving something like 0.1? There are several other theorems in graph theory (if you think a matrix is a bipartite graph with weights on the edges) of the same flavour, for instance:

- To prove that graphs not contractible to K_5 are 4-colourable, Wagner [14] proved that all such graphs could be constructed from planar graphs and one exceptional graph, by glueing them together at low order cutsets.

- A matrix of reals is *totally unimodular* if every square submatrix has determinant 1, 0 or -1 . To get a polynomial algorithm to test if a matrix is totally unimodular, I proved [11] that every such matrix can be constructed from matrices arising from paths in trees, and their transposes, and one exceptional matrix, by assembling them in near-diagonal constructions.

- Tutte [13] conjectured that any 3-connected cubic graph not containing the Petersen graph as a minor was 3-edge-colourable. To prove that, we proved [9] that it was enough to show it for cubic graphs with high cyclic connectivity, and that every such graph could be constructed from cubic graphs that were almost planar, by glueing them together on small edge-cutsets.

- Pólya [6] asked, given a square $(0, 1)$ -matrix, when can we change some 1's to -1 's so that the determinant of the new matrix equals the permanent of the original? To get a polynomial algorithm to decide this, we proved [8] that every such matrix could be constructed from matrices whose associated bipartite graphs

(rows versus columns) were planar, and one exceptional graph, by glueing them together appropriately.

These are just a few examples, but there are two things to be learned from them. One is that sometimes it helps to find an explicit construction for a set of graphs, in order to solve some other question. The second point is, the proofs of most of these theorems follow the same pattern, and perhaps we can follow the pattern again to get decomposition theorems for Berge graphs.

We are trying to prove that all graphs with some property either lie in a few basic classes, or admit one of a few types of decomposition. The paradigm proof is, take some carefully-selected small graph H with the property, that does not fall into any of the basic classes. Then it must admit one of the decompositions. Now examine how H can be contained in a larger graph G with the property, and prove that the decomposition of H extends to a decomposition of G . Then we have proved what we wanted for all graphs G with the property, that contain H ; so now we focus on the graphs that don't contain H , pick some new H' , and do it again. Eventually the process stops because the graphs that remain can be proved to lie in one of the basic classes. We decided to try to apply the same proof method to Berge graphs.

So what is the right graph H to start with? We want a Berge graph that we can prove induces a decomposition in any bigger Berge graph containing it. And very likely we are going to need several such graphs, not just one. This was a little ambitious, because at that time there were no such theorems known; there were no results at all that said "Any Berge graph containing this particular graph admits a decomposition". And we went most of a year without finding any.

Where should we look? Here we made a big mistake. A *wheel* in G means a subgraph of G consisting of a hole C of length at least six, plus a *hub* X , a nonempty anticonnected set that has several common neighbours on the hole. (It is negotiable exactly how many; but at least three, and at least one edge of common neighbours, and preferably more.) Wheels are very interesting, for several reasons:

- They do not lie in any of the basic classes (with a couple of exceptions).
- Conforti, Cornuéjols, Vušković and Zambelli were proving a sequence of steadily improving theorems (extensions of [4]) that said that any counterexample to the strong perfect graph conjecture contains a wheel or something similar. So if we could prove that wheels induce decompositions, that would come close to proving the SPGC.
- Wheels almost do what we want, in the following sense. One can show that in any Berge wheel (C, X) , there is an even number of edges of C with both ends X -complete (that is, adjacent to all vertices in X) – call such an edge an *X -complete edge*. So the X -complete edges make an edge-cut of C , dividing $V(C)$ naturally into two parts (say left and right). This in general gives a skew partition of the wheel; the set of left and right vertices that are not incident with X -complete edges is not connected, and its complement (X and the ends of the X -complete edges) is not anticonnected. We need to show that however we enlarge H to a larger Berge graph G , this skew partition of H extends to a skew partition of G . This is not true, but it's almost true; enough of the cases work that one feels there is a theorem hiding here somewhere.

We put a huge amount of effort (about a year of full-time work) into trying to prove that wheels in Berge graphs induce skew partitions, but it was a mistake, it was the wrong way to go; this is not the correct stage of the proof to try to handle wheels.

Nevertheless, thinking about wheels was not a complete waste of time, because it led us to a result that became a fundamental lemma used many times in the final proof, although it does not concern wheels. Suppose that we have an anticonnected set X of vertices in a Berge graph, and we are trying to show that X and its common neighbours separate two given vertices, say L and R (thereby producing a skew partition). We need to prove that every path from L to R either meets X or contains an X -complete vertex. To prove something like this, we need a lemma that says that in the appropriate circumstances, a path can be guaranteed to contain an X -complete vertex. There is a lemma of this kind, and very often it was exactly what we needed, the following. (The *interior* of a path means the subpath obtained by deleting its ends.)

0.2. *Let G be Berge, and let $X \subseteq V(G)$ be anticonnected. Let P be an induced path in $G \setminus X$, of odd length at least five, with both ends X -complete. Then either some internal vertex of P is X -complete, or there is an induced path between two members of X with the same interior as P .*

This was the only decent result about Berge graphs that we proved in the first six months, and we were rather proud of it (it's actually a very elegant result, though one might need a little time to appreciate it). But then we saw an unpublished manuscript of Roussel and Rubio (later published as [10]) with our pet result in it; they had found it before us. So much for the fruits of our six months of AIM-supported labour! We were starting to think we should have worked on the Hadwiger conjecture after all.

Fortunately the AIM people had more faith than we did, and they were kind enough to support Robin to stay for another six months (supported jointly by Princeton). Neil had to go back home, but Robin and I kept on battling with wheels, trying to show that they induce skew partitions. We still couldn't do it, but that autumn we did hit on a significant fact. Let (C, X) be a wheel H say, where C is a hole of length six, with vertices $c_1, \dots, c_6$ in order; and c_1, c_2, c_4, c_5 are X -complete and c_3, c_6 are not. Suppose H is contained in some larger Berge graph G . (This is the simplest interesting example of a wheel, so we thought about it a lot.) We may assume that X is maximal; so any vertex that is adjacent to c_1, c_2, c_4, c_5 either already belongs to X , or is X -complete (because otherwise we could add it to X , keeping the set anticonnected). Say c_2, c_3, c_4 are the *right* vertices, and the other three are the *left* vertices. To show that the natural skew partition of H extends to a skew partition of G , we would like to show that for any connected subset F disjoint from $V(H)$, if no vertices in F are X -complete, then not both c_3, c_6 have neighbours in F . If this is false, then there is an induced path between c_3, c_6 with interior in F , and there is a minimal subpath P of this path so that both left and right vertices have neighbours in P . This subpath seems to be where the action is, so we investigated it closely. There are three possible kinds of such paths P , and all three are interesting. Let P have vertices $p_1 - \dots - p_k$ say. The difference between the cases lies in the edges between $V(C)$ and $V(P)$.

– p_1 is adjacent to c_1, c_6 ; p_k is adjacent to c_3, c_4 ; and there are no other edges between C and P . And some $x \in X$ has no neighbours in $C \cup P$ except c_1, c_2, c_5, c_6 . In this case, the subgraph of G induced on $V(C \cup P) \cup \{x\}$ is a line graph, the line graph of a bipartite subdivision of K_4 . We get this problem because the wheel we started with was still in a basic class, it wasn't complicated enough; and we thought we could get around it by starting with a better wheel. (A mistake! Producing the line graph of a bipartite subdivision of K_4 is a good thing, not a bad thing; we should have valued it.)

– p_1 is adjacent to c_1, c_5 and possibly c_6 ; p_k is adjacent to c_2, c_4 and possibly c_3 ; and there are no other edges between C and P . This was the big problem; the same kind of thing happened for more complicated wheels as well. We wrestled with this for ages, but couldn't get around it.

– p_1 is adjacent to c_1 ; p_k is adjacent to c_2 ; and there are no other edges between C and P . This was just an annoyance, we thought; it's not really violating the skew partition, it's just making our lives difficult. But here is a nice result: if this happens, then G admits a skew partition, in a different place! One can show that X and its common neighbours separate $V(P)$ from $\{c_3, c_6\}$.

This last was a great theorem for us, because it was the first of its kind; the first result that said that if a Berge graph contains a certain subgraph, then it admits a skew partition. For me at least, this was a great morale booster; it showed that there were theorems waiting to be discovered, of the kind we needed for our strategy to work. (This result is in the paper [3], though only its parents would recognize it now.)

A better approach

Anyway, wheels were a learning experience, but not as profitable as we had hoped. The AIM largesse finally dried up, Robin went home at the end of 2000, and we continued wheel-battling separately, generating huge files of notes on myriads of cases, but not really getting anywhere. Neil came back to Princeton for a month around the end of August 2001, and we were joined by my graduate student Maria Chudnovsky, who was ready to start research for her PhD. In desperation we finally gave up on wheels and started trying other things.

Earlier that spring, we had had an interesting conversation with Kristina Vušković, during the Baton Rouge conference. (Nearly everyone else was off on the Mardi Gras excursion, and they had a great time viewing the attractions there, so I'm glad the conversation with Kristina was worthwhile.) She was convinced that there was something going on, to do with line graphs of bipartite graphs (say H) contained in bigger Berge graphs G ; that if you grow H inside G , keeping it decently connected, then when it stops being a line graph, it induces a decomposition of G . The seeds of that conversation took some time to germinate, but finally in August we started thinking about maximal line graphs. More precisely, let G be Berge, and let H be an induced subgraph of G , maximal with the property that H is a line graph of a bipartite subdivision of a 3-connected graph; then how can the remainder of G attach to H ? This turned out to be a great question — suddenly there was a theorem that wanted to be proved, which made a big change from our wheel experiences. This is what we showed. Let G be Berge, and let J be a bipartite subdivision of a 3-connected graph J_0 , with J_0 as large as possible such

that the line graph H of J is an induced subgraph of G . So J has *branch-vertices* of degree ≥ 3 , and others vertices of degree 2, the latter falling into paths between branch-vertices, called *branches*. The branch-vertices of J become cliques (called *potatoes*) in the line graph H , and the branches become paths of H between potatoes. The first question is, suppose v is a vertex of G not in $V(H)$; what can its set of neighbours in H look like? It turns out that there are only three possibilities for v . Say v is *minor* if all its neighbours in H lie in one potato, or in one of the paths between potatoes; and *major* if it has at most one non-neighbour in every potato. It would be nice if every v was either minor or major, but there is a third possibility; for instance, v could have exactly the same neighbours as some vertex of a potato. To get rid of this third kind of vertex, let us add any such vertex to H . When we do this, the paths between potatoes thicken up into *strips* between potatoes. Consequently H stops being a line graph, but this does not matter much; H still has an overall shape determined by J_0 , and we can argue using this thickened-up object just as we did when H was a genuine line graph. We make the union of these strips maximal, and again look at how other vertices can attach to it; and now we can prove that every vertex is either minor or major.

But the really nice thing is that for any connected set F of minor vertices, the set of vertices of H with a neighbour in F looks like the set of neighbours of a single minor vertex (that is, it is contained in a potato or in a strip between potatoes); and for every anticonnected set X of major vertices, the set of vertices of H with a non-neighbour in X looks like the set of non-neighbours of a single major vertex (for each potato, all these non-neighbours in the potato belong to one strip incident with the potato). That's not quite true, but we can analyze all the ways in which it can fail, and handle them all. (The problems only arise when J_0 is very small, and mostly when J is also very small.) And given that, now we can decompose G . If there is a major vertex, take a maximal anticonnected set of them; then it and its common neighbours break H up into its constituent strips, so it is easy to find a skew partition. Now assume there are no major vertices. If there is a component of minor vertices attaching onto a potato, again it is easy to find a skew partition; and if not, and either some component of minor vertices is attaching on a strip, or some strip has more than a couple of vertices, then G admits a 2-join. If none of these happen, then G itself equals H and is a line graph of a bipartite graph.

So we win if we can find a large, decently-connected line graph of a bipartite graph contained in G . We said earlier that we hoped to use the paradigm proof technique that was used for most of the other graph decomposition theorems, which involved finding a small subgraph H of G that did *not* lie in any basic classes, and proving it induced a decomposition of G . Note that we haven't done that, and we are doing something like the opposite. We are finding a big, indeed maximal, subgraph H of G that *does* lie in one of the basic classes; and proving that either G itself lies in the same basic class, or H induces a decomposition of G . This method actually seems more powerful, and I don't know why it took us so long to think of applying it here.

The division of the remaining vertices of G into major and minor, and the phenomenon that connected sets of minor vertices attach like one minor vertex, and anticonnected sets of major vertices attach like one major vertex, might seem amazingly lucky; but a similar thing happened several times in the course of the

rest of the proof of 0.1, so often that we came to expect it. I don't know if there is a deep reason behind it.

What happens when J is small? Very small line graphs of bipartite graphs can be complements of line graphs. (We care about two such graphs: the line graph of $K_{3,3}$, and the line graph of $K_{3,3} \setminus e$, the graph obtained by deleting one edge from $K_{3,3}$. These are isomorphic to their own complements). Suppose G is a big Berge graph, containing a subgraph H which is the line graph of $K_{3,3}$, and this is maximal in the sense we considered. We hope to deduce that G has a decomposition. But it is possible that G is the complement of a line graph of a bipartite graph, with no useful decomposition, so the proof sketched above cannot work when J is this small. The best we can hope is to prove that either G or its complement is a line graph of a bipartite graph, or G has a decomposition, and in fact that works when $J = K_{3,3}$ (we need to use the fact that H is a maximal line graph both in G and in the complement). For the line graph of $K_{3,3} \setminus e$ things are even worse, because this is basic in *three* ways; it is also a double split graph. The proof is therefore going to become even more complicated, and it is not worth sketching here.

But in the end, we were able to prove that 0.1 was true for any Berge graph G containing the line graph of a bipartite subdivision of K_4 . Fantastic timing too; I was organizing a conference on perfect graphs at Princeton, and we held the conference and announced the theorem, just a couple of days after we found the result. Fortunately the proof still more or less held together when we had time to examine it later. (The timing of the end of the meeting was not so great, however — the final day was September 11, the day of the World Trade Center attack, and not a good day for travelling.)

Now at last we were getting somewhere; our decomposition approach was working, and if there was any justice then there was a proof of the SPGC to be discovered along these lines. Neil had to go home, but Maria and I just needed to prove more of the same.

The rest of the proof

Now we can concentrate on Berge graphs that do not contain the line graph of a bipartite subdivision of K_4 (and if it helps, we can also assume the same for the complement of G). What should be the next step? A *prism* means an induced subgraph formed by two disjoint triangles, joined by three vertex-disjoint paths, and prisms suddenly look much more inviting. Suppose that our Berge graph G contains a prism. A prism is a line graph of a bipartite graph, and since we can assume that G contains no richer line graphs of bipartite graphs, perhaps we can now understand how the remainder of G can attach onto the prism. There are two cases, depending whether the three paths of the prism have even length or odd (they clearly all have even length or all have odd length). For the even case, things work as we would hope; the arguments that we used for analyzing maximal line graphs (major vertices and minor ones, strips and potatoes) can be used in this context as well, and it all works nicely. For the odd prism, it doesn't work nicely at all, it becomes very difficult — we were stuck here for three months, until December 2001. Indeed, we were persuaded that the odd prism was hopeless, and we had better look elsewhere, and we tried a whole lot of other things, without success. Until finally we worked on another graph (three disjoint K_4 's, joined by

three sets of two paths; this is much bigger than a prism, of course, but it's easier, because not so many things can go wrong at once) and had a good idea that still had some merit when transferred back to a prism. I don't want to talk about the proof for the odd prism here any more, but we proved that 0.1 was true for graphs that contained any prism, except for the prism in which all three paths have length 1. (Call all prisms except this one *long* prisms.)

So now we only need think about Berge graphs that do not contain long prisms or line graphs of bipartite subdivisions of K_4 , and nor do their complements. Next there was a cascade of easy, pretty theorems, that we proved in a great flurry of excitement in a matter of a few days; for instance

- A *double diamond* means a graph formed by two copies of $K_4 \setminus e$, joined by a perfect matching joining corresponding vertices. We proved 0.1 for graphs containing a double diamond. (Again, minor vertices and major ones, and it's very pretty this time, because taking complements exchanges the two.)

- We proved that if G is Berge, admitting a skew partition, then either it contains a long prism, or a line graph of a bipartite subdivision of K_4 , or a double diamond, or it admits a balanced skew partition. Consequently we proved Chvátal's conjecture that no minimum counterexample to the SPGC contains a skew partition.

- An *odd wheel* is a wheel (C, X) such that there are vertices $u, v \in V(C)$, not X -complete, joined by a path in C containing an odd number of X -complete edges. We proved that any Berge graph containing an odd wheel satisfies 0.1 (minor vertices and major ones again).

That was the end of December 2001. I wrote in my Princeton summary of research for the past year — my claim for a pay-raise — that we had settled the SPGC, because I really thought we would have it in a few days. But it turned out that I cut that corner a little too closely. We only have to consider Berge graphs that contain no long prisms, no line graphs of bipartite subdivisions of K_4 , no double diamonds, and no odd wheels, and nor do their complements; and we thought that surely we were over the worst of the proof now, that Berge graphs must be easier to handle when we can exclude so much. But that was not so, and in fact we were just coming to the most difficult part. We made absolutely no further progress, despite working full-time on it, until May 2002.

What one would like to do next is the “hole with a hat” — a hole C of length at least six, and a vertex with exactly two neighbours in C , adjacent. This type of subgraph comes up all the time now, and one can almost handle it. We battled with it for a long time, but failed. Maybe this can be done, and if so it would improve our proof a great deal.

We switched instead to trying to handle general wheels (C, X) . Since we have already handled odd wheels, we can assume that every maximal subpath of C consisting only of X -complete vertices has even length; but what can we do with such a wheel? The trick is to choose a wheel (C, X) with X maximal *over all wheels*. That gives more power than just assuming that X is maximal for the given wheel. We prove then that X and its common neighbours disconnect the graph and therefore make a skew partition (unless other good things happen instead); but the proof is tremendously long and complicated, and I'll skip it here.

Now we can exclude wheels in general, as well as everything else, both in G and in its complement, and it does get easier from here on. There are just four more steps. If there are a hole and an antihole in G both of length at least six, then either some vertex of the antihole would be adjacent to more than half the hole, or some vertex of the hole would be nonadjacent to more than half the antihole, and so either G or its complement contains a wheel, a contradiction. (There is a case missed here – perhaps every vertex of the hole is adjacent to exactly half of the antihole, and vice versa – but then G contains a double diamond.) So we can assume there are no antiholes of length at least six. Second, suppose there is a hole of length at least six and a vertex with three consecutive neighbours in the hole. Then we can produce a skew partition, using basically the same machinery that we used for wheels, with a little coaxing; having done wheels this was not difficult. So we can exclude this too. Third, with these excluded, we did the hole with a hat; and fourth we could exclude this too, and do all the graphs that were left. These last two steps together just took a page, and it is not worth describing them in any more detail. That completes the proof.

What's left?

Having worked in Berge graphs for three years now, we have developed intuitions and skills that took a long time to grow, and also a great fondness for the graphs themselves. Unfortunately the main problem is solved, and there is a cold wind blowing, almost as if it's time to go and work in a new area. Isn't there something else we can work on in the perfect world instead?

Of course, one might still hope for a short proof of the SPGC itself, without proving 0.1, though I have no idea how to do that. There was one other really nice question — what about a polynomial-time recognition algorithm? Can one decide in polynomial time whether a graph is Berge? Is the question in NP? These were still open. One would expect that the decomposition theorem 0.1 would immediately lead to such an algorithm, because such structure theorems usually do; one simply tests whether the graph has the structure described by the theorem. But our decomposition theorem would not cooperate, and in particular the skew partition part of it gave us major difficulties. We thought it would last us for another three happy years, but sadly its resistance collapsed after just a couple of months, and Maria and I managed to twist it into an algorithm. It didn't feel natural, though, and eventually, to our great surprise, we noticed that we were not really using the decomposition theorem at all; in all the places that we used it, we could do without it, and the algorithm became simpler. Then Cornuéjols, Liu and Vušković found a big simplification to one of the steps (they had also discovered some of our algorithm independently), and we wrote it all up jointly with them [2]. So that's done — what else?

As far as I can see there are only two other good questions left. One is, what about constructions? We have not yet found what one could reasonably call a construction for Berge graphs; the algorithm above is far from a construction. It's not clear whether this exists at all, and certainly we seem to be a long way from it still. I have a few half-baked ideas, but they are not worth detailing here. The other question is, what about a polynomial time algorithm to find an optimal colouring of a perfect graph? This can be done using the ellipsoid method, but that

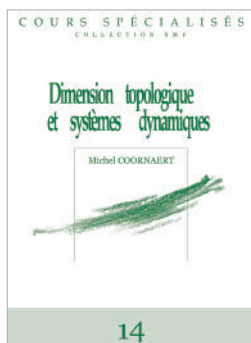
uses polyhedral methods and real numbers, and there should be a “combinatorial” algorithm; it seems a little paradoxical that one can test in polynomial time if a graph is perfect, and still not be able to colour it. So that’s a nice question.

There is one other avenue — what about a better proof of 0.1? Does the proof really have to be so long? I don’t think there will be a short proof; the theorem itself is too complicated. Over the years I have authored or co-authored a number of similar decomposition theorems, all with long and complicated proofs (though none were as long as this one), and so far no-one has come up with a significant shortening. So I predict that we are stuck permanently with this proof, or something like it.

On the other hand, possibly some parts of the proof could be improved. The first half (up to excluding prisms) of the proof feels right to me; I think that here we are following the bones of the mathematics, and it can’t be made much better. But for the second half, there could be some big improvements, and conceivably this half could become quite short, with the right new idea. It needs to be looked at more.

References

- [1] C. Berge, “Färbung von Graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind”, *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe* 10 (1961), 114.
- [2] M. Chudnovsky, G. Cornuéjols, X. Liu, P. Seymour, and K. Vušković, “Recognizing Berge graphs”, *Combinatorica*, 25 (2005), 143-186.
- [3] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, “The strong perfect graph theorem”, manuscript, June 2002.
- [4] M. Conforti and G. Cornuéjols, “Graphs without odd holes, parachutes or proper wheels: a generalization of Meyniel graphs and of line graphs of bipartite graphs”, *J. Combinatorial Theory, Ser. B*, 87 (2003), 300-330.
- [5] M. Conforti, G. Cornuéjols and K. Vušković, “Square-free perfect graphs”, manuscript, February 2001.
- [6] G. Pólya, Aufgabe 424, *Arch. Math. Phys.* 20 (1913), 271.
- [7] N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, “Hadwiger’s conjecture for K_6 -free graphs”, *Combinatorica* 13 (1993), 279-361.
- [8] N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, “Permanents, Pfaffian orientations, and even directed circuits”, *Annals of Math.*, 150 (1999), 929-975.
- [9] N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, “Tutte’s edge-colouring conjecture”, *J. Combinatorial Theory, Ser. B* 70 (1997), 166 - 183.
- [10] F. Roussel and P. Rubio, “About skew partitions in minimal imperfect graphs”, *J. Combinatorial Theory, Ser. B* 83 (2001), 171-190.
- [11] P. Seymour, “Decomposition of regular matroids”, *J. Combinatorial Theory, Ser. B* 28 (1980), 305-359.
- [12] A.C. Tucker, “Critical perfect graphs and perfect 3-chromatic graphs”, *J. Combinatorial Theory, Ser. B* 23, 143-149.
- [13] W.T. Tutte, “On the algebraic theory of graph colorings”, *J. Combinatorial Theory* 1 (1966), 15-50.
- [14] K. Wagner, “Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe”, *Math. Ann.* 114 (1937), 570-590.



Cours spécialisés **Dimension topologique et systèmes dynamiques**

Michel Coornaert

Ce livre expose de manière détaillée certains éléments de la théorie de la dimension pour les espaces topologiques et les systèmes dynamiques : dimension de Cech-Lebesgue, dimension des espaces normaux, espaces topologiques de dimension nulle, dimension des polyèdres, théorème de plongement de Menger-Nöbeling, dimension topologique moyenne de Gromov, théorème de plongement de Jaworski, contre-exemples de Lindenstrauss-Weiss. Il s'adresse aux étudiants de maîtrise, aux chercheurs débutants et aux mathématiciens confirmés qui s'intéressent à la topologie et à la théorie des systèmes dynamiques. Certains des sujets traités dans l'ouvrage conduisent directement à des thèmes de recherche qui restent à être explorés.

This book gives a detailed exposition of some elements of dimension theory for topological spaces and dynamical systems: Cech-Lebesgue dimension, dimension of normal spaces, zero-dimensional topological spaces, dimension of polyhedra, Menger-Nöbeling embedding theorem, Gromov mean topological dimension, Jaworski embedding theorem, Lindenstrauss-Weiss StS. It is intended for graduate students, beginning, and mature researchers interested in topology and dynamical systems. Some of the topics treated in the book directly lead to research areas that remain to be explored.

prix public* : 26 € - prix membre* : 18 €

* frais de port non compris



Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

ENSEIGNEMENT

Du bon usage de « l'indisciplinarité »

Nathalie Delprat¹, Laurent Mazliak²

« L'esprit hyperdisciplinaire est devenu un esprit de propriétaire qui interdit toute incursion étrangère dans sa parcelle de savoir. »

(E. Morin)

Le but de cet article est de présenter une expérience pédagogique originale que nous avons développée depuis trois ans à l'université Paris VI autour de la thématique « Sciences et Musique ». Au-delà de la description sommaire des contenus, nous voudrions que cet exposé soit l'occasion d'une réflexion sur la notion d'interdisciplinarité et sur les conséquences de sa mise en œuvre tant sur le plan pédagogique qu'institutionnel. La possibilité de pouvoir choisir des modules hors parcours ou communs à plusieurs d'entre eux, devait être facilitée par la réforme du LMD et l'aspect trans, inter ou pluri disciplinaire a été fortement incité lors de sa mise en place. Ainsi des unités d'ouverture, de culture générale et de projets se sont ajoutées à celles de méthodologie qui existaient déjà depuis quelques années. Donnons pour commencer une très brève description de la spécificité attendue, ou supposée telle, de chacun de ces types :

- les cours de culture générale doivent permettre un premier contact avec un vaste domaine de la connaissance sous une forme évoquant un cycle de conférences ; les intervenants extérieurs y sont spécialement bienvenus ;
- les unités de projet sont l'occasion pour les étudiants de réaliser un travail personnel, seuls ou en petit groupe, sur un sujet choisi après discussion avec l'enseignant responsable ;
- enfin, les unités d'ouverture, qui en pratique concernent le L2 (alors que les deux autres sont présentes en L1), sont destinées à faire découvrir des domaines plus spécifiques de la recherche scientifique.

Voilà en quelques mots les objectifs théoriques affichés. C'est en s'appuyant sur eux que nous avons décidé de mettre en place plusieurs modules en première et deuxième année³ autour de *l'approche scientifique du son musical*.

¹ Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Laboratoire de Modélisation en Mécanique

² Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires

³ notamment en L2 avec la collaboration d'Edouard Kierlik et Richard Wilson, physiciens

Des liens complexes ont fait se mêler sciences et musique à toutes les époques de notre histoire et dans de nombreuses civilisations. Leur étude est par essence propice à l'alliance de connaissances et de méthodologies provenant d'horizons divers. D'autre part, la rencontre de plusieurs corpus scientifiques apparaît très naturellement dans la description et la modélisation du son. Ces multiples points d'intersection sont donc l'occasion idéale de faire expérimenter la complémentarité des différentes disciplines à des étudiants trop souvent habitués à découper le savoir en tranches indépendantes. L'initiation à l'étude du phénomène sonore nécessite bien entendu d'introduire tout l'arrière-plan de culture scientifique qui s'y rapporte (la décomposition spectrale, les phénomènes vibratoires, la biophysique de la réception du son), mais aussi de faire réfléchir à ce phénomène dans le contexte très particulier d'une exploitation musicale. C'est pourquoi nous avons toujours mis en avant l'adjectif musical et défendu cette spécificité. Pour prendre un exemple concret : si l'on se pose la question de distinguer un bon instrument (par exemple un violon) d'un «mauvais», on ne peut se contenter de considérations strictement physiques au sens où il faut encore chercher à définir ce qui caractérise la qualité du son. Ceci se fait à l'aide de l'étude de la physique de l'instrument, des propriétés du matériau, des spécificités du signal produit mais aussi à partir de critères psycho-acoustiques liés en partie au fonctionnement de notre oreille et en partie à nos habitudes culturelles. On pourrait bien sûr aussi évoquer la musique de notre temps qui exploite en permanence de nouvelles voies de création sonore, les questions liées à la manière d'ordonner et de choisir les sons, depuis les constructions pythagoriciennes donnant une place de choix aux relations sur les nombres entiers à celles liées aux tempéraments, l'utilisation des résonances, des micro-intervalles ? En ce qui concerne plus précisément l'aspect mathématique, l'essentiel de l'enseignement porte naturellement sur la théorie de Fourier de façon plus ou moins développée suivant le niveau. En L1, où la notion de série n'est pas au programme, il faut se contenter d'une approche partant de la forme obtenue pour les coefficients dans le cas d'un polynôme trigonométrique, forme qui permet de définir des suites de coefficients de Fourier pour des fonctions continues et d'admettre ensuite un théorème de convergence. En L2 il est possible de faire la démonstration complète. Mais ce qui est très intéressant, c'est que l'utilisation d'outils pédagogiques comme certains applets très bien faits qu'on trouve à disposition sur le web permet d'illustrer la convergence non seulement de façon visuelle, en montrant comment les courbes représentatives des sommes partielles convergent vers la fonction, mais aussi en faisant entendre la contrepartie sonore : on *entend* la convergence vers le son complexe en ajoutant des harmoniques. Cette adéquation entre approche mathématique et expérimentation physique au sens premier du terme est une arme efficace pour convaincre les plus réticents et mène tout naturellement et de façon bien plus interactive à l'étude des propriétés et des limites de l'outil mathématique. Nous pourrions aussi évoquer des problèmes musicaux historiquement très anciens, tel celui du choix d'un tempérament (division de l'octave). Une étude scientifique fondée sur la résolution de l'équation des cordes vibrantes aide à leur donner une consistance qui nous a semblé emporter l'adhésion des étudiants, y compris de ceux qui en connaissaient quelques fragments appris lors de leurs études musicales.

Nous avons été confortés dans ces impressions par la demande très forte des étudiants pour s'inscrire à ces modules optionnels. Il est clair que ce succès a été aussi partiellement causé par un malentendu que nous nous sommes efforcés

de lever le plus vite possible : certains ont cru qu'ils allaient pouvoir obtenir des crédits en écoutant du rap pendant six mois ! Mais ce n'était pas, loin s'en faut, la majorité d'entre eux. Le cours où il a été le plus difficile de faire passer le message fut sans surprise celui de « culture générale ». De tels cours, plus ou moins imités de ce qui se pratique dans les Grandes Écoles, nécessiteraient des moyens considérables pour atteindre leur but, c'est-à-dire ouvrir les étudiants à des horizons culturels nouveaux. Or ils sont plutôt traités comme des variables d'ajustement, avec des moyens infinitésimaux, qui font surtout ressortir l'incroyable misère de l'université en France. Comment illustrer un cours sur la résonance sans aucun appareil d'écoute de qualité, dans une ancienne salle de biologie revêtue jusqu'au plafond de carreaux en faïence ? Le domaine d'étude des unités de projets et d'ouverture étant par définition plus ciblé, les choses se sont révélées plus faciles à mettre en œuvre. Le fait le plus marquant est que des étudiants qui semblaient peu concernés au départ, ont été entraînés par la motivation des plus passionnés et se sont vraiment investis dans un travail intellectuel, parfois d'un niveau technique non négligeable. Sans doute pour une bonne part réagissent-ils à un domaine qui les interpelle parce qu'ils pratiquent eux-mêmes (dans des styles et à des niveaux très différents) un instrument ou sont simplement curieux d'explorer un phénomène riche et complexe qui semble d'un abord facile. Les amener à prendre conscience de cette complexité et de la nécessité d'augmenter leurs connaissances ouvre une perspective sur les programmes des années suivantes, souvent motivante. L'approche scientifique et musicale permet d'aller encore plus loin et des expériences de diffusion d'extrait d'œuvres contemporaines (Boulez, Xénakis, Ligeti...) ou de musiques extra-européennes (Japon, Inde...) pour illustrer un problème scientifique précis se sont révélées être suivies avec beaucoup d'intérêt et ont suscité de nombreuses questions (à notre grand étonnement, il faut le préciser !). Pouvoir confronter en direct diverses façons d'aborder une notion, étudier un même thème par des angles d'attaque différents, participent au choix de chacun pour le parcours qui l'attire le plus ou donne des idées d'autres croisements possibles dans les années suivantes (biologie et mathématiques, informatique et cognition...). Ces modules sont donc par définition ouverts (ne sont-ils pas identifiés comme tels ?) et ne doivent en aucun cas servir les intérêts d'un parcours spécifique. C'est ce qui fait leur richesse d'un point de vue pédagogique et leur faiblesse d'un point de vue institutionnel.

En effet, il y a bien d'autres thèmes susceptibles de servir de base à une approche transversale. Alors pourquoi y-a-t-il si peu d'unités d'enseignement transverses, en tout cas dans notre université ? Pourquoi l'expérience tente-t-elle aussi peu de collègues alors qu'elle est très enrichissante pour tous ? La réponse est simple : si l'interdisciplinarité apparaît souvent comme un concept intéressant, un bel outil de communication pour l'extérieur, sa mise en œuvre nécessite un geste d'indiscipline et une volonté d'objectifs communs, apparemment incompatibles avec l'état d'esprit et le système universitaire français. Lorsque l'on décide quand même de tenter l'aventure, il faut donc s'attendre à beaucoup d'incompréhension et parfois même à une franche hostilité ! Comment faire fonctionner un module transversal si chaque parcours le programme à des heures ou à des jours différents ? Comment expliquer au parcours qui gère administrativement l'unité d'enseignement que « ses » étudiants ne sont pas prioritaires ? Comment faire face aux accusations de bricolage, de fourre tout, et d'illégitimité académique ? Où le bât blesse-t-il et

pourquoi une telle résistance ? Certes, il y a le conservatisme inhérent à la citadelle universitaire et au cloisonnement des disciplines. Certes, il y a les difficultés d'organisation des plannings, renforcées dans notre cas par le déficit en salles dû aux travaux de désamiantage. Enfin, il y a l'inquiétude peut-être plus légitime que le temps occupé par ce type de module se fera au détriment d'autres savoirs plus fondamentaux. Mais en fait, nous pensons que la raison principale qui conduit les UFR à se replier sur elles-mêmes toutes griffes dehors, c'est qu'un module de ce type n'enferme pas le plus tôt possible les étudiants dans une spécialité et essaye de leur donner à la fois le recul et la curiosité d'esprit, pour les aider à faire des choix professionnels pouvant correspondre au mieux à leurs goûts et à leurs envies. Naturellement, cette affirmation a parfois du mal à faire bon ménage avec une pensée trop comptable, notamment sur les effectifs d'un parcours et donc sur la demande correspondante de postes d'enseignants-chercheurs. Or c'est là non seulement à notre sens une erreur de jugement, mais aussi un choix absolument contre-productif. Qu'on le veuille ou non, les étudiants que nous formons ne seront pas en majorité des chercheurs ou enseignants en mathématiques, en physique, ou en chimie ? Notre rôle est donc aussi de transmettre la culture scientifique sous sa forme la plus générale, en espérant qu'il en reste quelque chose du côté de l'esprit critique et de la connaissance. Cette nécessité recouvre des réalités diverses et mouvantes qui ne peuvent se couler dans le moule d'une unique discipline (fût-elle elle-même aussi vaste que le champ mathématique).

L'interdisciplinarité bien comprise, concernant des sujets où elle est intellectuellement indiscutable et restant dans le cadre optionnel est une voie très prometteuse, et ce d'autant plus qu'elle correspond mieux à la demande de plus en plus marquée de polyvalence dans le monde du travail. Il ne s'agit aucunement de remettre en cause les disciplines ou la nécessité de la spécialisation. Mais simplement de pouvoir donner en même temps que la formation dans des compétences particulières, l'occasion de les mettre en pratique en dehors du cadre habituel, et surtout de pouvoir les confronter à d'autres. Nous avons peut-être mieux à faire que garder constamment nos frontières et l'exploration commune de nouveaux territoires ou le choix de nouvelles alliances est une réponse possible pour motiver les étudiants à retourner vers les filières scientifiques. Cette démarche est fragile et souvent éphémère car elle repose en grande partie sur le désir et la bonne volonté de quelques-uns. Les ponts suspendus qu'elle emprunte sont donc faciles à détruire et rien ne semble indiquer que le système universitaire soit décidé à les renforcer. Bien au contraire, nous avons l'impression que l'aspect interdisciplinaire, en particulier bi-disciplinaire, va devenir le prétexte idéal pour développer des filières hyper-sélectives, au moment où nous avons de plus en plus de mal à faire face à la disparité des étudiants. Le projet qui se met en place à Paris 6 autour d'un parcours « sciences et musique » du L1 au L3 (destiné à 25 étudiants sur-sélectionnés) en collaboration avec l'IRCAM et la Sorbonne nous conforte malheureusement dans cette impression et représente la parfaite antithèse de ce que nous avons essayé de décrire ici. Nous ne sommes pas contre l'idée de sélection qui permettrait d'éviter bien des échecs par une meilleure orientation mais contre l'utilisation d'un mot-clé très attractif pour produire cette sélection de manière détournée et avec une visée disciplinaire. Est-ce en développant encore un peu plus la parcellisation du savoir que nous résoudrons le problème ? L'indisciplinarité serait-elle pire que la bataille rangée ?

HISTOIRE

Le livre *Geometry and Dioptrics in Classical Islam* de Roshdi Rashed

Erwan Penchèvre¹

Le livre *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*² nous offre à présent une image plus nette du développement de la géométrie dans la deuxième moitié du X^e siècle, image centrée autour d'un groupe de mathématiciens actifs principalement à Bagdad, Ibn Sahl (actif de 968 à 983), al-Qūhī (actif de 943 à 988) et al-Sijzī (actif de 963 à 998). Il nous offre aussi l'édition critique de nombreux textes originaux en arabe, accompagnée d'une traduction anglaise. Les commentaires de R. Rashed occupent un peu plus du tiers de l'ouvrage ; le reste consiste en l'édition et la traduction des textes originaux. R. Rashed n'hésite pas à comparer, à plusieurs reprises, les grands mathématiciens du X^e siècle à ceux, européens, du XVII^e siècle. Se pose même en filigrane la question de la continuité historique dans le développement d'un des sujets de géométrie apparus au X^e siècle. Mais l'historien se méfie peut-être, comme l'écrivait Fernand Braudel, « *de qui reconnaît trop bien les bagages ou de ceux qui, par réaction, nient en bloc les emprunts de civilisation à civilisation* ». Et il organise son ouvrage autour de questions plus spécifiques : qu'est-ce, écrit-il, qu'être un géomètre de premier rang *dans* la seconde moitié du X^e siècle³ ? Ou encore, question plus délicate : pourquoi Ibn al-Haytham⁴ (actif au Caire dans la première moitié du XI^e siècle), mathématicien célèbre, astronome et fondateur de l'optique physique à la fin du X^e siècle, n'a-t-il pas mis à profit la loi de réfraction dite « de Snell-Descartes » découverte peu auparavant par Ibn Sahl⁵ ? Il s'appuie d'abord, pour répondre à ces questions, sur les traces matérielles de l'activité scientifique, sur l'historiographie et autant que faire se peut sur la connaissance du milieu scientifique et des modes d'acquisition et de transmission du savoir à cette époque, pour ensuite seulement, par une analyse mathématique et épistémologique précise des textes qui nous sont parvenus, déterminer les caractéristiques objectives de la science du X^e siècle. Il remarque ainsi le paradoxe

¹ Université Paris VII.

² Ce livre, paru en 2005 (Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, Londres, 1178 pages), est né du projet d'une seconde édition de *Géométrie et dioptrique au X^e siècle* (1993, Les Belles Lettres). Mais tout en reprenant le contenu de cet ouvrage, R. Rashed y ajoute beaucoup ; le volume a plus que doublé.

³ cf. R. Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, p. 295.

⁴ Aussi connu sous le nom latin d'Alhazen. Sur ce personnage, cf. l'étude biobibliographique faite par R. Rashed dans *Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. II (1993), Londres, p. 1–19, étude complétée dans les volumes suivants : vol. III (2000) p. 937–941, vol. IV (2002) p. 957–959.

⁵ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 180.

d'un renouveau scientifique en un siècle d'éclatement du pouvoir, le rôle de la compétition entre savants, l'importance des réseaux d'échanges au sein des salons et des cours, et la connaissance approfondie des textes mathématiques de l'antiquité grâce au courant massif des traductions. Mais il insiste sur l'insuffisance de ces conditions pour expliquer la genèse de certaines traditions de recherche. Il faut aussi tenir compte de la naissance d'une science expérimentale, de l'importance des applications d'un domaine scientifique à l'autre (voire de la science aux techniques), ou de certaines configurations conceptuelles qui traversent l'ensemble de la production mathématique de l'époque. Nous en décrirons ci-dessous quelques exemples. De l'idée ancienne, déjà battue en brèche par les historiens, selon laquelle les mathématiques arabes n'auraient fait que transmettre la science grecque, survit parfois encore aujourd'hui une opinion confinant le mérite des mathématiciens arabes à la création de l'algèbre ; le livre de R. Rashed montre combien cette opinion est en deçà de la réalité.

Des chapitres non hellénistiques en géométrie

R. Rashed est parvenu à reconstituer le portrait d'un grand mathématicien longtemps inconnu : Ibn Sahl. Bien que son œuvre en géométrie infinitésimale soit perdue, ses recherches sur les coniques le montrent actif à la constitution de plusieurs « chapitres non hellénistiques » en géométrie : la résolution des problèmes de constructions géométriques par intersection de coniques, la théorie des projections, le tracé continu des sections coniques. Enfin, Ibn Sahl fonde la dioptrique – nous y reviendrons. C'est aussi selon ces différents domaines que s'organise l'ouvrage de R. Rashed.

En ce qui concerne le premier domaine, la résolution des problèmes de constructions géométriques par intersection de coniques, R. Rashed édite un manuscrit anonyme, le *Livre sur la synthèse des problèmes analysés par Ibn Sahl*. Corrigé d'une opinion antérieure, il identifie son auteur : un certain al-Shannī⁶. Mais c'est surtout chez al-Qūhī, puis chez Ibn al-Haytham, que l'on voit les signes les plus probants de la constitution d'un chapitre sur les constructions géométriques. R. Rashed avait déjà édité les textes sur la construction de l'heptagone régulier⁷, il y ajoute tous les textes connus sur l'extraction d'une moyenne proportionnelle et la trisection de l'angle écrits par al-Qūhī, les textes de certains de ses prédécesseurs sur ce sujet, un texte d'al-Qūhī sur le « lemme à la division de la droite » d'Archimède (nous y reviendrons) et un texte sur la construction d'un certain pentagone équilatéral inscrit dans un carré, problème nouveau particulièrement difficile, qui conduirait en termes algébriques à la résolution d'une équation du quatrième degré. Chez tous ces auteurs et surtout à partir d'al-Khāzin (mort vers 960), on remarque une préférence pour la méthode de résolution par intersection de coniques vis-à-vis

⁶ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 7–9.

⁷ cf. R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. III, Londres, 2000.

de la méthode par *neusis* héritée des grecs⁸. R. Rashed trouve ici l'une des caractéristique de la science du X^e siècle : les mathématiciens « cessent d'accepter des choses qui semblent évidentes par le simple fait qu'elles existent »⁹.

Il fallait aussi, pour rendre légitime les constructions par intersection de coniques, justifier l'existence même des sections coniques au sein d'une nouvelle classification des courbes, les mettant à pied d'égalité avec droite et cercle. C'est pourquoi ces méthodes semblent appeler le développement d'un autre chapitre, celui du tracé continu des sections coniques. Mais des raisons pratiques président aussi à la naissance de ce chapitre. Al-Qūhī décrit son « compas parfait », dans un traité qui fera encore autorité au début du XII^e siècle et qu'il destinait en particulier à la construction des astrolabes et des cadrans solaires¹⁰. Cet instrument est formé d'un crayon glissant le long d'une droite (AC) en rotation autour d'un axe fixe (AB). La pointe du crayon en C trace alors une section conique sur un plan passant par B (ou une droite si $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$). Notons α et β les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ du triangle ABC lorsque celui-ci est dans un plan perpendiculaire au plan de la section. On se pose alors le problème de déterminer les angles α et β en fonction de la section conique à tracer (donnée par ses diamètre et côté droit)¹¹. Al-Qūhī utilise, dans ses démonstrations, des lemmes dont la démonstration est donnée dans un autre traité sur *La génération de points sur des lignes selon des rapports dont les termes sont des surfaces*, traité qui semble avoir été perdu assez tôt, puisque Ibn 'Irāq envoya à son élève al-Bīrūnī (973–1050) la démonstration de ces lemmes, ce dernier n'ayant pu trouver l'ouvrage en question¹². Ibn Sahl, peut-être rebuté¹³ par la complexité des calculs de α et β , opte pour un mécanisme de tracé plus adapté à la fabrication des miroirs et lentilles qu'il a en vue, au moyen d'un système de fils et de poulies, et reposant sur la description focale des sections coniques¹⁴. Par exemple, pour une hyperbole $\mathcal{M}$ de foyer F et F' , son système revient essentiellement à faire tourner une règle $[SF]$ de longueur constante autour de F , et à utiliser la propriété focale pour le point $M = \mathcal{M} \cap [SF]$,

$$MF' + MS = MF' + FS - FM = \text{constante}$$

Al-Sijzī qualifie les courbes traçables au compas parfait (droite, cercle, sections coniques) de « mesurables » en tant qu'elles sont « soumises à la théorie des proportions », et distingue parmi les autres courbes l'hélice cylindrique qui, bien que

⁸ Chez al-Khāzin, cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 403. On trouve cette préférence même parfois pour des problèmes plans, ainsi chez Ibn Sahl, cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 1054. Quant à la méthode de *neusis*, voir *ibid.* p. 339–440. Cette méthode pouvait être employée dans des solutions mécaniques de problèmes de constructions géométriques ; un exemple célèbre de *neusis* consiste à placer (empiriquement) entre deux droites données un segment passant par un point donné et de longueur donnée.

⁹ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 402.

¹⁰ cf. dernier paragraphe du *Traité sur le compas parfait* d'al-Qūhī, cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 796.

¹¹ Ce problème ressemble aux problèmes traités par Apollonius à la fin du livre I des *Coniques*, sauf qu'ici AB est constante, et qu'al-Qūhī applique la théorie du compas parfait au tracé continu de la courbe qu'Apollonius se contentait de déterminer comme section de cône.

¹² cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 677.

¹³ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 635.

¹⁴ Bien que ses instruments garantissent de manière évidente que les courbes tracées vérifient les propriétés focales, Ibn Sahl ne démontre pas que les propriétés focales caractérisent les sections coniques (il démontre en fait seulement la réciproque).

non-mesurable, n'en possède pas moins « ordre et régularité ». R. Rashed trouve des précédents à cette classification des courbes¹⁵, en particulier chez Geminus (I^{er} siècle av. J.-C.) qui avait remarqué que le caractère composé du mouvement décrivant l'hélice (rotation et translation) n'empêchait pas que celle-ci possède certaines propriétés géométriques, conséquences de l'existence d'un groupe transitif de déplacements de la courbe sur elle-même ; l'on ne pouvait plus désormais se suffire d'un critère mécanique (la composition des mouvements) pour classer les courbes. A cet égard, le geste d'al-Sijzī au X^e siècle, ralliant les sections coniques aux « courbes simples » non seulement parce qu'elles sont, au même titre que droite et cercle, traçables par le mouvement du compas parfait, mais aussi parce qu'elles sont « soumises à la théorie des proportions » (ce sont, dirions-nous aujourd'hui, des courbes algébriques de degré 2), et excluant ainsi de la géométrie les courbes transcendentes, marque un pas important dans la direction suivie plus tard par Descartes qui qualifiera de « géométriques » toutes les courbes algébriques.

Mais si la théorie du tracé continu donne un sens nouveau à la question de l'existence des objets géométriques, elle n'y répond pas entièrement : comment en effet démontrer l'existence d'un point d'intersection de deux courbes, en l'absence du concept topologique de continuité ? R. Rashed remarque en tout cas que ces deux préoccupations, existence des points d'intersection et tracé continu, étaient encore vivantes au XIII^e s., chez des auteurs qui se côtoyaient, Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī pour l'existence des points d'intersection, et un groupe de mathématiciens dans l'entourage d'Ibn Yūnus pour le tracé continu des courbes¹⁶. Et la notion même de section semble acquérir, dès le X^e s., un statut toujours plus légitime : al-Sijzī fonde à cette époque un nouveau chapitre de la géométrie, l'étude des surfaces quadratiques au moyen de leurs sections planes. Il n'est donc pas surprenant de le voir imaginer, dans un court texte à la lecture difficile, un compas parfait d'axe AB variable afin de tracer plusieurs sections (semblables) d'un même cône. R. Rashed édite deux autres textes d'al-Sijzī sur ce sujet, *Sur les propriétés du dôme hyperbolique et du dôme parabolique* et *Sur les propriétés des solides elliptiques, hyperboliques et paraboliques*, où l'auteur collecte et étend les résultats des Banū Mūsā, Ibn Qurra, al-Qūhī et Ibn Sahl qui avaient étudié certaines surfaces quadratiques pour en chercher le volume ou pour faire des miroirs et des lentilles. Al-Sijzī fait une étude purement géométrique des sections planes de ces surfaces. On pourrait déjà parler d'une « théorie des intersections » qui débouche, chez al-Sijzī, sur une classification des surfaces ; il se limite cependant aux surfaces construites par rotation ou translation d'une section conique (prismes de base une section conique, droites ou obliques, et surfaces de révolution d'une section conique autour de son axe – seulement autour de l'axe transverse pour l'hyperbole).¹⁷

¹⁵ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 670–677.

¹⁶ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 692.

¹⁷ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 418. Ajoutons qu'à l'occasion de ces recherches, al-Sijzī est amené à utiliser la notion de puissance d'un point par rapport à une section conique (cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 412, conséquence d'Apollonius, *Coniques* III.17, et aussi présente en filigrane dans un autre texte édité par R. Rashed, *Les propriétés des trois sections coniques*, dans lequel al-Sijzī étudie certaines propriétés harmoniques des coniques, invariantes par projection). Indiquons aussi la publication récente par R. Rashed du premier volume de l'*Œuvre mathématique d'al-Sijzī*, intitulé *Géométrie des coniques et théorie des nombres* (Louvain, 2004).

Quant au domaine des transformations géométriques, il offre des procédés démonstratifs nouveaux comme on peut le voir dans le *Traité sur le compas parfait* d'al-Qūhī (usage des similitudes) ou dans les travaux sur les surfaces d'al-Sijzī (translations). Le *Traité sur l'art de l'astrolabe* d'al-Qūhī commence par un chapitre théorique sur les projections coniques et cylindriques; la lecture de ce chapitre est facilitée par l'important commentaire contemporain d'Ibn Sahl. Al-Qūhī y énonce que l'image d'un cercle d'une sphère par une projection conique de centre situé sur un axe de la sphère (ou cylindrique de direction parallèle à l'axe) sur un plan perpendiculaire à l'axe est une section conique. Dans le cas particulier de la projection stéréographique cher aux astrolabistes, il démontre que l'image d'un cercle est un cercle, et étudie tout particulièrement, dans le premier livre de ce traité, la construction de l'image des cercles parallèles à un horizon donné de la sphère et des « cercles de hauteur » qui leur sont perpendiculaires, sur le plan de l'équateur, image formant deux faisceaux de cercles conjugués. Pour démontrer ces résultats, al-Qūhī développe un recours systématique à des « rabattements », le plan des figures qu'il construit représentant à la fois le plan du méridien du lieu et le plan image de la projection stéréographique (c'est-à-dire le plan de l'équateur) rabattu sur ce dernier. En étudiant des problèmes inverses dans le second livre, al-Qūhī cherche une caractérisation plus étroite de la projection stéréographique. Par exemple, étant donné, dans le plan de la figure, le pôle de la sphère, un point image d'un point situé sur le méridien du lieu, et la distance angulaire de son antécédent au pôle de la sphère, il se pose le problème de « construire l'astrolabe », c'est-à-dire, ici, de trouver le centre de la sphère.

Une certaine « conception synthétique » de l'objet mathématique¹⁸ est peut-être une autre caractéristique des mathématiques arabes du X^e siècle. En rédigeant la solution d'un problème de géométrie, le mathématicien doit préciser les conditions de possibilité des constructions qu'il décrit, selon les valeurs des données du problème, ce qui l'amène à distinguer plusieurs cas (on dit qu'il y a alors « diorisme »¹⁹), dans chacun desquels il doit démontrer que la construction est possible et qu'elle fournit la solution. La solution d'un cas ne suffit pas : la démonstration doit être valable dans tous les cas. Ainsi le « lemme à la division de la droite », dû à Archimède (*La sphère et le cylindre* II.4, sans démonstration), est généralisé par al-Qūhī en l'énoncé suivant²⁰ :

Soient deux segments AB et C , trouver sur la droite (AB) , entre A et B ou au-delà de B , un point D tel que $\frac{AD}{C} = \frac{C^2}{BD^2}$.

Al-Qūhī résout ce problème par intersection d'une parabole $\mathcal{P}$ et d'une hyperbole $\mathcal{H}$, en distinguant le cas où D est entre A et B de celui où D est au-delà de B . Dans le premier cas, il distingue encore des sous-cas, l'existence d'un point d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{H}$ dépendant alors du signe de l'expression $\frac{4}{27}AB^3 - C^3$. Autre exemple, un problème plan attribué à Apollonius²¹ :

¹⁸ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 403.

¹⁹ cf. R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au X^e siècle*, Leiden : E. J. Brill, 2000, p. 39.

²⁰ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 383–389.

²¹ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 314–324.

Soit un angle xAy et un point D de sa bissectrice, construire une droite passant par D et coupant les côtés de l'angle en B et C tels que BC soit égal à une longueur donnée EG .

Al-Shannī en rédige la synthèse à partir de l'analyse qu'en donne Ibn Sahl. Le diorisme consiste ici à déterminer la valeur minimale de EG pour laquelle ce problème a une solution.²²

À la même époque, on observe cette attitude chez les algébristes qui, pour classer les équations, prennent pour critère ce que l'on appellerait aujourd'hui le signe des coefficients. Ils se proposent de donner un algorithme de résolution pour chaque classe d'équations, en précisant aussi les conditions d'existence des solutions au moyen du discriminant. En ce qui concerne les problèmes de constructions géométriques, il est certes impossible de donner une telle classification *a priori* de tous les problèmes, à moins de sortir du cadre de la géométrie et de les interpréter justement comme problèmes d'algèbre, ce que certains tentèrent, aussi bien pour les problèmes solides que pour les problèmes plans, dès le IX^e siècle²³. Mais dans le cadre strict de la géométrie, il était toutefois possible de distinguer de grandes classes de problèmes, comme celle des problèmes solides, voire de procéder avec méthode en faisant varier l'énoncé d'un problème (peut-être à un niveau purement formel) afin d'en dériver plusieurs énoncés distincts²⁴, ou même de classer les problèmes en reliant le nombre de leurs « solutions » au nombre de leurs « hypothèses »²⁵.

La naissance de la dioptrique

Penchons-nous à présent sur les textes et les commentaires de R. Rashed concernant la naissance de la dioptrique et la différence de style entre Ibn Sahl et Ibn al-Haytham. R. Rashed a réussi à reconstituer l'ordre du traité *Sur les instruments ardents* d'Ibn Sahl, qui nous est parvenu sous forme fragmentaire²⁶. Ibn Sahl était au confluent de deux traditions distinctes : celle des catoptriciens grecs et arabes

²² On pourrait encore donner, comme troisième exemple, un problème de lieu sur la construction d'un triangle acutangle (cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 334–335), dont R. Rashed pense qu'il peut appartenir au traité perdu d'Ibn Sahl *Sur les lignes de diorisme*. Le lieu solution, qui est une partie d'une ellipse, possède 0, 1 ou 2 composantes connexes suivant la valeur des données du problème.

²³ Par exemple al-Māhānī, cf. R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien* (Paris, Albert Blanchard, 1999), p. 254. Ces tentatives consistaient toujours, à notre connaissance, à ramener la résolution d'un problème de construction géométrique à la résolution d'une équation polynomiale à une inconnue. Il a donc fallu attendre jusqu'au XVII^e siècle l'interprétation de problèmes de géométrie à plusieurs grandeurs inconnues comme systèmes d'équations algébriques à plusieurs inconnues (cf. *Histoire de la théorie de l'élimination*, Thèse de doctorat, Université Paris VII, Erwan Penchèvre).

²⁴ Ibn Sahl dans son étude sur la projection stéréographique (*Geometry and Dioptrics* p. 873) ; Al-Qūhī dans un texte de mathématiques appliquées (cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 1002). Nous pourrions également citer un passage de la correspondance entre Al-Qūhī et al-Ṣābi' éditée par Philippe Abgrall, *Le développement de la géométrie aux IX^e–XI^e siècles : Abū Sahl al-Qūhī*, Albert Blanchard, Paris, 2004, p. 62–66 et 106–120 ; ainsi que le traité de Thābit ibn Qurra étudié par Hélène Bellosta dans « Le traité de Thābit ibn Qurra sur *La figure secteur* », *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 14 (2004) p. 145–168.

²⁵ cf. R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān*, p. 24–30.

²⁶ *Geometry and Dioptrics* p. 12–15 et 44–46.

(par exemple al-Kindī au IX^e s.) construisant des miroirs ardents de forme parabolique ou ellipsoïdale, et celle de l'optique de Ptolémée qui offrait une étude de la réfraction sans toutefois connaître la loi de Snell-Descartes. Les instruments ardents considérés par Ibn Sahl sont les miroirs parabolique et ellipsoïdal, la lentille plan-convexe et la lentille biconvexe hyperboloïdales.

R. Rashed qualifie Ibn Sahl de « géomètre doublé d'un artisan », ce qui le conduit, dans son étude des lentilles, outre la découverte d'une propriété géométrique de l'hyperbole (conséquence simple de sa caractérisation focale), à *modéliser* le phénomène de la réfraction en énonçant la loi de Snell-Descartes. Ibn Sahl, en effet, commence ainsi la dioptrique, discipline « riche en matériel technique, et en fait très pauvre par son contenu physique », excluant aussi bien la question physique de la nature de la lumière que l'étude de la vision²⁷.

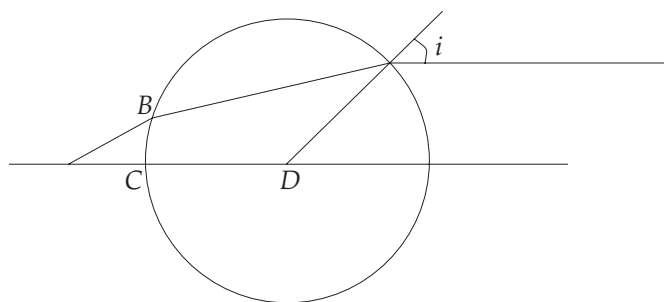
Ibn Sahl démontre que les trois sections coniques (définies par leurs *symptomata*) vérifient les propriétés focales. Il se doit, comme ses prédécesseurs, d'expliquer la construction des courbes intervenant dans les instruments ardents ; il décrit donc un mécanisme pour le tracé continu des trois sections, que nous avons déjà mentionné. Les solides obtenus par rotation de ces courbes autour de leurs axes sont les instruments ardents, miroirs ou lentilles, dont Ibn Sahl étudie ensuite le plan tangent en chaque point pour démontrer que ces instruments atteignent le but qu'il s'était fixé, de concentrer un certain faisceau de rayons en un point après réflexion ou réfraction.

Alors que dans un premier travail sur la « transparence de la sphère céleste » Ibn Sahl attribuait à chaque milieu transparent une certaine opacité spécifique, il franchit un pas de plus dans son travail sur les lentilles en caractérisant le milieu par un rapport de segments constant, qui n'est autre que le rapport $\frac{1}{n}$ des sinus des angles d'incidence et de réfraction, inverse de l'indice de réfraction du milieu par rapport à l'air. Il ne donne aucune justification physique de la constance du rapport $\frac{1}{n}$, ni même explique-t-il jamais comment il a découvert cette loi. Peut-être faut-il y voir d'abord une découverte géométrique (avant même la loi physique), la découverte de la propriété géométrique de l'hyperbole d'excentricité $\frac{1}{n}$ et de foyers A et L , conséquence simple de la caractérisation focale :

$$\frac{C_g C_l}{C_g C_v} = \frac{AC_l}{AL} = \frac{AC_g - C_g L}{AL} = \text{constante}.$$

²⁷ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 178.

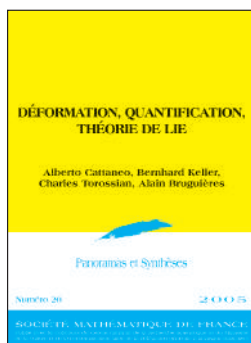
A après avoir subi deux réfractions, avec K , O , D et A alignés. Alors en tout point de $[KO]$ il existe un rayon qui passe par A après avoir subi deux réfractions. L'oeil en A perçoit donc un objet placé le long de $[KO]$ sous la forme d'un anneau à la surface de la sphère. Dans un texte ultérieur, le *Traité sur la sphère ardente*, Ibn al-Haytham utilise la lentille sphérique comme instrument ardent. Il faut alors placer la source lumineuse en A . Il étudie le cas où A est à l'infini (rayons parallèles), et tente de déterminer le segment $[OK]$ maximal, c'est-à-dire le lieu de tous les points de (AD) en lesquels convergent des rayons du faisceau issu de A après deux réfractions.



Il étudie à cet effet la variation de l'arc $\widehat{CB} = i - 2d$ en fonction de i au moyen de données expérimentales, et il repère l'existence d'un maximum sur l'intervalle $40^\circ < i < 50^\circ$ (i est l'angle d'incidence et d l'« angle de déviation » lors de la première réfraction à la surface de la lentille sphérique). Trois siècles plus tard, al-Fārisī (mort en 1319) tentera de préciser cette étude dans un commentaire déjà célèbre, en construisant une représentation approchée de la fonction $f(i) = \frac{d}{i}$ au moyen d'une formule d'interpolation de degré 2 (qu'utilisaient déjà les astronomes au X^e siècle) pour $i \in [0, 40^\circ]$. Cette méthode d'interpolation, qui faisait l'objet de conjectures de la part des historiens, a été retrouvée par R. Rashed dans une glose à l'un des manuscrits³³.

Nous espérons l'avoir montré, le livre *Geometry and Dioptrics in Classical Islam* est un excellent ouvrage, non seulement pour la précision des analyses de R. Rashed et le corpus en langue arabe auquel il nous donne accès, mais aussi pour les vues globales, encore en chantier, qu'il nous offre sur l'histoire de la géométrie : il n'est désormais plus possible de confiner les mathématiques arabes médiévales dans un étroit territoire disciplinaire en réduisant leur domaine de recherche à l'algèbre, alors qu'elles accueilleraient au sein de la géométrie plusieurs branches nouvelles et fécondes.

³³ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 170–177 et 288–291.



Panoramas et Synthèses 20

Déformation, quantification, théorie de Lie

A. Cattaneo, B. Keller,
C. Torossian, A. Bruguières

En 1997, M. Kontsevitch démontra que toute variété de Poisson admet une quantification formelle, canonique à équivalence près, résolvant ainsi un problème ancien de physique mathématique. Par sa démonstration, et l'interprétation qu'il fit d'une démonstration ultérieure due à Tamarkin, M. Kontsevitch a ouvert des voies de recherche nouvelles en théorie de Lie, groupes quantiques, théorie des déformations, théorie des opérades... et révélé des liens fascinants entre ces sujets et la théorie des nombres, la théorie des nœuds et la théorie des motifs. Ce travail sur la quantification par déformation va continuer à influencer ces domaines dans les années à venir. Dans les trois parties de ce volume, nous allons 1) présenter les résultats principaux de la prépublication de 1997 de Kontsevitch et esquisser son interprétation de l'approche de Tamarkin, 2) montrer la pertinence du théorème de Kontsevitch pour la théorie de Lie et 3) expliquer l'idée provenant de la théorie des cordes topologiques qui a inspiré l'approche de Kontsevitch.

In 1997, M. Kontsevich proved that every Poisson manifold admits a formal quantization, canonical up to equivalence. In doing so he solved a longstanding problem in mathematical physics. Through his proof and his interpretation of a later proof given by Tamarkin, he also opened up new research avenues in Lie theory, quantum group theory, deformation theory and the study of operads... and uncovered fascinating links of these topics with number theory, knot theory and the theory of motives. Without doubt, his work on deformation quantization will continue to influence these fields for many years to come. In the three parts of this volume, we will 1) present the main results of Kontsevich's 1997 preprint and sketch his interpretation of Tamarkin's approach, 2) show the relevance of Kontsevich's theorem for Lie theory and 3) explain the idea from topological string theory which inspired Kontsevich's proof.

prix public* : 26 € - prix membre* : 18 €
* frais de port non compris



Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05

INFORMATIONS

Enquête sur les chercheurs en mathématiques recrutés par le CNRS entre 1992 et 1999

Stéphane Cordier¹

Nous présentons ici un résumé des informations extraites d'une enquête faite par courrier électronique auprès des chercheurs CNRS recrutés entre les années 1992-1999 suivi d'une analyse de l'évolution des effectifs des chercheurs de la section 01 (Mathématiques et interactions des mathématiques) du Comité national du CNRS et des enseignants-chercheurs relevant des sections du Conseil national des universités (CNU) 25 et 26 depuis 1992.

L'idée de cette enquête a germé lors de la journée d'accueil des nouveaux maîtres de conférences et chargés de recherche (CR) en mathématiques le 28 janvier 2005 à l'Institut Henri Poincaré (<http://postes.smai.emath.fr/accueil/>) lors du débat. À une question, Fabrice Planchon, président du Comité national du CNRS (section 01) a répondu qu'il ne fallait pas juger des choix du Comité national dans l'immédiat mais l'analyser avec du recul et il a proposé de se donner « rendez-vous dans 10 ans ». Rebondissant sur cette idée, j'ai proposé de réaliser une enquête sur la situation actuelle des personnes recrutées comme chargé de recherche (CR) par le Comité national de la section 01 sur la période 1992-1999.

Cette période correspond aux recrutements faits par deux commissions du Comité national qui ont respectivement siégé de 1992 à 1995 et de 1996 à 1999. Les arrêtés de concours, parus au JO, sur cette période, pour les concours CR en section 01, sont reproduits en annexe. La liste des personnes recrutées m'a été fournie par la DRH (Direction des Ressources Humaines) du CNRS à partir de la base de paie qui constitue une information assez fiable. J'ai choisi de ne pas aller au delà de 1999 puisqu'il s'agissait d'analyser les recrutements avec du recul et, par ailleurs, parmi les personnes recrutées depuis 2000, il n'y a eu, d'après les informations obtenues que 2 départs et la situation des recrutés est donc bien connue. La méthode utilisée repose sur une enquête par courrier électronique avec deux relances.

Le nombre total de personnes recrutées sur cette période est de 133. Le nombre de réponses à l'enquête est de 116, soit un excellent score de 87 %. Il manque 17 réponses (dont un décès). L'analyse qui suit ne porte bien sûr que sur l'ensemble des réponses.

Cette enquête a été menée en février et mars 2006 avec le soutien de Christian Peskine (directeur scientifique adjoint pour les mathématiques au CNRS) et de Fabrice Planchon (président de la section 01 du Comité national du CNRS). Le questionnaire portait sur les points suivants :

¹ MAPMO UMR 6628 CNRS-Université d'Orléans

- thème de recherche (quelques mots clef généralistes, maxi 80 caractères),
- laboratoire de première affectation en tant que CR (UMR, ville),
- situation professionnelle actuelle : (corps d'exercice, depuis quand),
- laboratoire d'exercice actuel (UMR, ville),
- HdR : (si oui, année, établissement et titre),
- qualification professeur par CNU : (dans quelle(s) section(s) et année(s)).

Résultats de l'enquête

Répartition nationale et mobilité géographique

Sur les 116 recrutés ayant répondu, 50 ont été affectés en Ile-de-France (IdF) et 46 y sont encore actuellement, soit donc une apparente stabilité. En fait, l'analyse des résultats fait apparaître les chiffres suivants :

- *mobilité IdF vers Province : 11,*
- *mobilité Province vers IdF : 8,*
- *mobilité Province vers Province : 30,*
- *mobilité IdF vers IdF (Paris intra muros vers banlieue ou l'inverse) : 10,*
- *mobilité vers d'autres pays : 10.*

Au total 59 chercheurs ont fait preuve de mobilité géographique. Dans la plupart des cas, ceci est associé à une promotion au grade de Directeur de Recherche (DR), à une nomination comme Professeur des universités (PU) ou à un départ à l'étranger sur un poste de Professeur.

En effet 48 CR sont devenus PU (y compris les 10 émigrations) dont 36 en changeant d'université. Par ailleurs, 8 CR sont devenus DR dont 4 ont réalisé une mobilité géographique. Ceci fait apparaître le chiffre de 16 nominations PU ou DR sans changement d'affectation, soit un peu moins d'un tiers.

Enfin, parmi les 60 chercheurs qui sont encore CR, 19 ont fait preuve de mobilité géographique.

Habilitation à Diriger les Recherche (HDR) et nomination en université

Pour les chercheurs qui ont poursuivi leur carrière scientifique en France, l'Habilitation à Diriger les Recherches (HDR), suivie d'une qualification auprès de l'un des CNU est un passage obligé pour devenir PU. Les mathématiciens désirant devenir PU demandent donc leur qualification au CNU 25 ou au CNU 26 (ou aux deux), voire au CNU 27 (Informatique).

Il y a 87 chercheurs titulaires d'une HDR, soit un pourcentage élevé de 76%, chiffre à rapprocher des 56 qui sont devenus PU ou DR. Il faut sans doute ajouter les 4 émigrants qui n'ont pas d'habilitation qui n'est pas toujours nécessaire pour obtenir un poste de PU à l'étranger, ce qui donne un pourcentage de 79%.

Sur l'ensemble de l'enquête, presque tous les titulaires d'une habilitation se sont fait qualifier. Seuls s'en sont abstenus 4 des promus DR et 13 CR.

L'un des résultats de cette enquête est le nombre d'années écoulées entre l'entrée au CNRS et la soutenance d'une HDR : le temps moyen est de 5,31 années (voir figure 1).

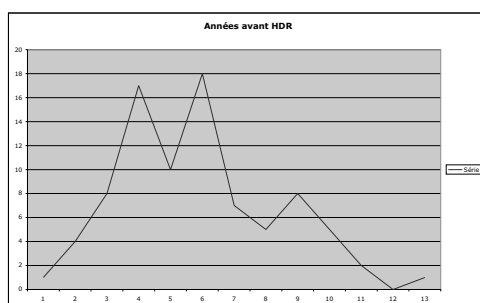


FIG. 1. Nombre d'années entre recrutement et passage HDR

L'autre donnée qui résulte de cette enquête est le nombre d'années écoulées entre l'entrée au CNRS et la nomination comme PU (Professeur des universités). Le temps moyen est de 5,85 années (voir figure 2).

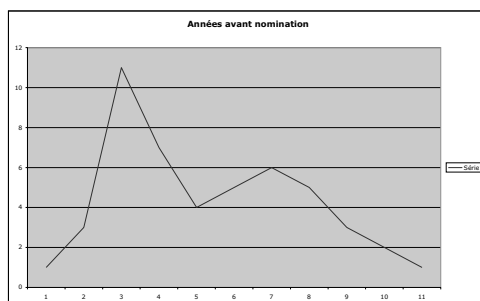


FIG. 2. Nombre d'années entre recrutement et passage PU

Rattachement aux sections du Conseil national des universités (CNU)

Le choix du rattachement au CNU 25 ou au CNU 26 est parfois lié au sentiment d'appartenance à l'une des deux communautés qui sont assez différentes tant par le choix des sujets de recherche que par les liens extérieurs (industrie, physiciens, informaticiens, ...). Les résultats de l'enquête sont les suivants :

- 28 CR qualifiés au CNU 25 seulement, dont 16 sont devenus PU,
- 29 CR qualifiés au CNU 26 seulement, dont 18 sont devenus PU,
- 11 CR qualifiés au CNU 25 et au CNU 26 dont 9 sont devenus PU.

La qualification 25 ou 26 apparaît donc être un critère de classification assez intéressant puisqu'il permet de séparer l'échantillon de façon assez nette (seules 11 sur les 68 personnes qualifiées ont une double qualification). On notera que la répartition des qualifications sur la période étudiée est très équilibrée.

Nous présentons divers graphiques sur la durée d'obtention de la HDR (soit le nombre d'années écoulées entre l'entrée au CNRS et la soutenance d'une HDR) en fonction de la section de qualification. Le temps moyen est de 6,18 années

pour ceux/celles qui ont été qualifiés en section 25 uniquement (figure 3), de 5,16 années pour ceux de la section 26 (figure 4) et de 4,36 années pour ceux qui ont obtenu une double qualification (figure 5).

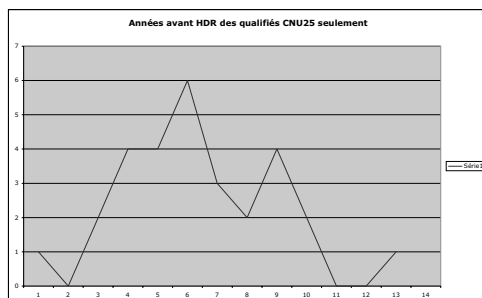


FIG. 3. CNU 25 uniquement

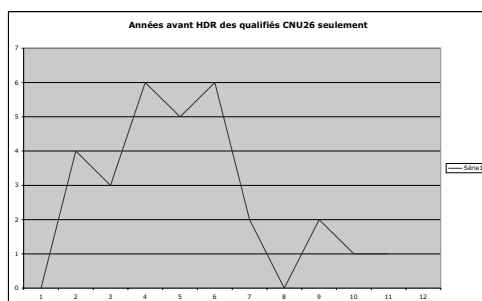


FIG. 4. CNU 26 uniquement

Évolution des effectifs chercheurs et enseignants chercheurs depuis 1992

Effectifs enseignants-chercheurs (EC) CNU 25 et 26

La très grande majorité des mathématiciens enseignants dans les universités sont rattachés à l'une des deux sections suivantes du Conseil national des universités : le CNU 25 et le CNU 26. Le CNU 25 gère actuellement 1523 EC (enseignants-chercheurs) tandis que le CNU 26 en gère 1730. Le total est donc de 3253 EC.

Nous donnons ci-joint un graphique de l'évolution de ces effectifs depuis 1992. Il fait apparaître une évolution en croissance régulière des deux communautés entre 1992 et 2000, puis une évolution différenciée à partir de l'année 2000 où la section

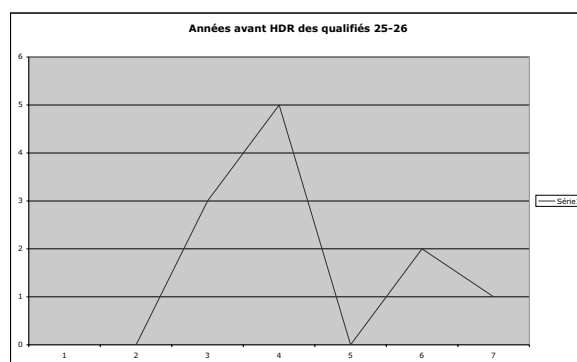


FIG. 5. CNU 25 et 26

CNU 26 continue d'augmenter. Les effectifs totaux sur cette période ont crû de 2311 à 3253, soit 41%. Plus précisément :

- l'effectif d'EC du CNU 25 passe de 1160 en 1992 à 1523 en 2005 soit +31%,
- l'effectif d'EC du CNU 26 passe de 1151 en 1992 à 1730 en 2005 soit +50%.

L'effectif global des enseignants-chercheurs de l'université, toutes sections confondues est de 52610 en 2005 et la part des mathématiques est stable depuis 1992 aux alentours de 6,2%.

Le tableau ci-dessous présente quelques chiffres sur les effectifs homme-femme suivant le grade et la section CNU. Pour le CNU 25 :

	PU1-PU0	PU2	MC
Femmes	21	20	217
Hommes	348	207	796

Le pourcentage de femmes est de 16 % (21 % pour les MC mais moins de 9% pour les PU de seconde classe et moins de 6% pour les PU de première classe ou de classe exceptionnelle). Pour le CNU 26 :

	PU1-PU0	PU2	MC
Femmes	43	39	380
Hommes	276	252	850

Le pourcentage de femmes est de 25 % (plus de 30% pour les MC et plus de 13% pour les PU). Il apparaît donc que le CNU 26 est plus féminisé que le CNU 25.

L'analyse de la pyramide des âges donne des informations sur le pourcentage de PU25, PU26, MC 25, MC 26 ayant 60 ans et plus : 26%, 21 %, 18%, 16 % et pour ceux ayant entre 50 et 59 ans de 39%, 35 %, 20%, 19 %. L'âge moyen des EC est de 48 ans (48 ans et 10 mois pour le CNU 25, 47 ans et 5 mois pour le CNU 26).

Effectif chercheurs CNRS section 01

Les effectifs des chercheurs relevant de la section 01 du CNRS sur la même période sont passés de 274 à 345 soit une augmentation de 25%. Dans le même temps, les effectifs des chercheurs du CNRS passaient de 11197 en 1992 à 11667

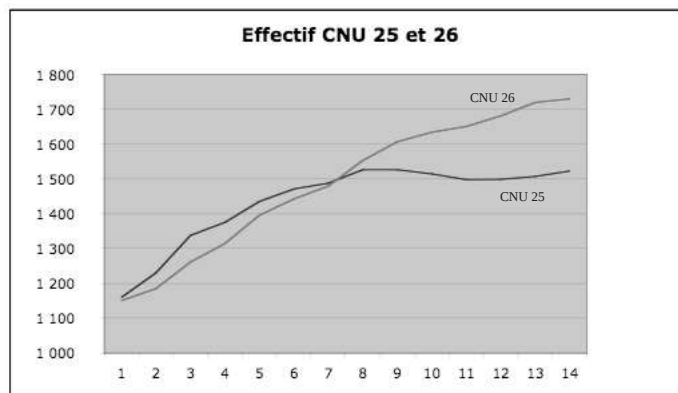


FIG. 6. Effectif des EC relevant des CNU 25 et 26

en 2005. C'est-à-dire que la part des effectifs des chercheurs de la section 01 dans l'ensemble du CNRS est passée de 2,5% à 2,9%.

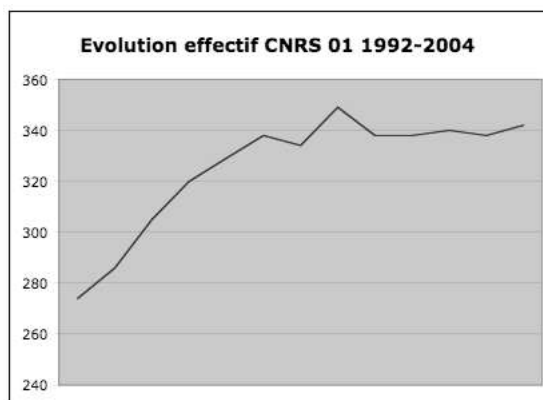


FIG. 7. Effectif des chercheurs du CNRS - section 01

On note sur ce graphique une évolution assez similaire à celle des effectifs universitaires du CNU 25 avec une augmentation assez sensible sur la période 1992-1999 et une stabilisation à partir de 2000.

On notera que la part des chercheurs sur la population chercheurs et EC est passée de 274 sur 2585 en 1992 à 345 sur 3598, soit de 10,5% à 9,5%. Ainsi, même si les effectifs du CNRS ont augmenté pendant la période, la part du CNRS a légèrement diminué.

Une autre information est à noter à partir des données obtenues. L'âge moyen augmente régulièrement de 37,5 à 43 ans entre 1992 et 2004 soit un vieillissement de 5,5 ans sur 12 ans. Le rapport du nombre de CR sur celui de DR passe sur la même période de 2,26 à 1,65, ce qui représente une évolution notable que l'on

va détailler. La répartition par grade montre des évolutions très différentes pour le nombre de CR (qui est stable) et celui des DR (qui augmente). Plus précisément

- le nombre de CR2 est stable (actuellement 71 comme en 1992), ce qui correspond aux recrutements des 4 années précédentes;
- le nombre de CR1 passe de 119 à 143 avec un pic à 174 entre 1999 et 2001, ce qui correspond à des années où le nombre de postes au concours CR1 était plus important;
- le nombre de DR2 passe de 55 à 86, soit une augmentation de 56%;
- le nombre de DR1 passe de 18 à 38, soit une augmentation de plus de 100% et le nombre de DRCE passe de 11 à 7.

De plus, l'âge moyen au moment du recrutement des CR de la section 01 est stable, à environ 31 ans et demi, et il apparaît donc que le vieillissement soit lié principalement à l'augmentation de la proportion de DR.

La proportion de femmes au CNRS est de 16% et ce chiffre est assez stable. Il est intéressant de noter que les mathématiques au CNRS représentent une des seules sinon la seule communauté scientifique où la proportion de femmes ne diminue pas avec le grade. En effet, il y a 16% de femmes, tous grades et corps confondus, mais 14% de femmes parmi les DR2, 17% parmi les DR1 et DRCE.

Conclusions

En conclusion, sur 133 personnes recrutées qui ont été contactées, 116 ont répondu. 59 ont fait preuve d'une mobilité géographique. 87 ont obtenu une HDR, en moyenne 5,3 années après leur recrutement. 68 personnes ont été qualifiées par le CNU (28 en section 25, 29 en section 26 et 11 par les 2 sections), 48 sont devenues professeurs dont 10 à l'étranger (et 5 aux USA).

Les effectifs des EC des CNU 25 et 26 ont augmenté de 41% depuis 1992 avec une augmentation plus importante en section 26 depuis 2000. Les effectifs des chercheurs CNRS ont augmenté de 25 % surtout avant 2000. L'âge moyen des chercheurs a augmenté de 5,5 ans en 12 ans, ce qui s'explique en partie par le fait que le nombre de CR est resté stable alors que le nombre de DR a fortement augmenté.

Remerciements.

Je tiens à remercier Christian Peskine et Fabrice Planchon pour leur soutien à cette initiative, l'ensemble des 116 personnes qui ont répondu à l'enquête et également toutes celles et ceux qui m'ont aidé à collecter et à analyser les données, en particulier Laurent Boudin, Stéphanie Burel, Michèle Crance, Françoise Godefroy et Jean-Claude Nédélec.

Annexe, les textes du JO de 1992 à 1999

Arrêtés du Journal Officiel du CNRS - concours chercheur CR - section 1

- 1992 [6 décembre 1991] - 289 CR2 et 92 CR1 dont 19 en section 01
- 17 CR2, 1 CR2 « mathématiques discrètes »
- et 1 CR2 topologie et système dynamiques

– 1993 [4 décembre 1992] - 289 CR2 et 71 CR1 dont 20 en section 01
2 CR1, 15 CR2, 1 CR2 « mathématiques de l'informatique »
et 2 CR2 « EDP et modélisation »

– 1994 [3 décembre 1993] - 256 CR2 et 79 CR1 dont 18 en section 01
1 CR1, 1 CR1 EDP appliquée ou calcul scientifique et modélisation
11 CR2, 1 CR2 interaction des mathématiques et
4 CR2 en calcul scientifique et modélisation

– 1995 [28 décembre 1994] - 268 CR2 et 60 CR1 dont 13 en section 01
1 CR1 et 1 CR1 calcul scientifique et modélisation
11 CR2

Soit 70 postes mis au concours, il y a eu sur cette période 75 personnes recrutées d'après les données obtenues de la DRH.

– 1996 [27 décembre 1995] - 185 CR2 - 63 CR1 dont 14 en section 01
1 CR1
1 CR1 interactions des mathématiques
8 CR2
4 CR2 Calcul scientifique, calcul stochastique et modélisation

– 1997 [16 décembre 1996] 206 CR2 - 68 CR1 dont 13 en section 01
1 CR1
9 CR2
2 CR2 modélisation mathématique et numérique
1 CR2 : calcul scientifique

– 1998 [1 décembre 1997] 268 CR2 - 70 CR1 dont 15 en section 01
1 CR1
1 CR1 histoire des mathématiques
9 CR2
3 CR2 modélisation numérique ou stochastique
1 CR2 calcul scientifique

– 1999 [7 décembre 1998] 254 CR2 - 85 CR1 dont 14 en section 01
1 CR1 méthode mathématique pour l'analyse du génome affecté au laboratoire
génomique à Versailles,
9 CR2
3 CR2 : applications et interactions des mathématiques
1 CR2 arithmétique et informatique affecté à Lyon, ou à l'ENS Paris ou au LIF
Lille.

Bien que 56 postes aient été ouverts aux concours pendant cette période, 58 personnes ont pu être recrutées dans la section 01 grâce notamment au redéploiement de certains postes non pourvus dans d'autres sections (source : DRH).

L'état des « Masters de mathématiques »

Marie-Françoise Roy, Yvon Maday

Tenue à l'initiative de la SMF et de la SMAI à Grenoble le 17 mars dernier, une réunion¹ a permis un échange d'informations et d'opinions sur l'état des Masters de mathématiques et leur évolution, entre des responsables de laboratoires ou de masters de la « vague A », en cours de contractualisation, des membres de l'équipe de la MSTP² chargée des mathématiques et de l'informatique, et des représentants des sociétés savantes.

Après quelques mots d'introduction de P. Bérard, vice-président de l'université Grenoble I, Y. Maday et M.-F. Roy, A. Bonami informe les participants qu'elle pourra relayer certains messages en direction du ministère.

La discussion a abordé les points suivants :

Situation dans les différents établissements

Baisse des effectifs

Les participants évoquent la situation dans leur établissement. Elle varie d'un établissement à l'autre, mais un point commun ressort : les effectifs ont baissé significativement (de 20% à 50%) sur les dernières années, en M1 et en M2, mais se sont maintenus dans les cycles de préparation à l'agrégation. Dans certains cas, la baisse des effectifs a été partiellement compensée par une hausse du pourcentage de reçus, amenant à un maintien approximatif du nombre de diplômés. Cette baisse a pu entraîner l'impossibilité d'ouvrir des cours, voire des spécialités de Master. En M2 spécialité professionnelle, la baisse des effectifs est parfois liée à une situation peu claire du marché de l'emploi (par exemple, pour les formations tournées vers l'analyse numérique et le calcul scientifique), alors qu'elle atteint beaucoup moins des secteurs recrutant davantage (statistiques, finance, économétrie...). Le recrutement est quelquefois maintenu par un apport massif d'étudiants étrangers. Les Masters professionnels recrutant sur dossier avec un effectif limité semblent paradoxalement bénéficier de l'existence d'une sélection à l'entrée (nombreux dossiers, crédibilité accrue). Des établissements dans des villes d'importance moyenne parviennent à maintenir leurs formations par une stratégie d'association avec des écoles d'ingénieur locales, et des établissements de la région. D'autres, qui avaient

¹ Participant-e-s : M. Amara, université de Pau, M. Arcostanzo, université d'Avignon, P. Arnoux, MSTP, DSTP1, P. Bérard, vice-président de l'université Grenoble I, G. Biau, université Montpellier II, A. Bonami, MSTP, directrice scientifique DSTP1, E. Bonnetier, université Grenoble I, J.-P. Borel, responsable commission enseignement de la SMF, L. Boudin, MSTP, DSTP1, B. Cadre, université Montpellier II, F. Clarke, université Lyon I, J.-M. Couveignes, invité par la SMF, C. Danthony, ENS de Lyon, J.-P. Demailly, université Grenoble I, L. Desbat, université Grenoble I, R. Eymard, MSTP, DSTP1, T. Fack, université Lyon I, T. Gallay, université Grenoble I, I. Ionescu, université de Savoie, M. Madaune-Tort, université de Pau, Y. Maday, président de la SMAI, G. Panasencko, université de Saint-Etienne, M. Pontier, université Toulouse III, M.-F. Roy, présidente de la SMF, B. Rozoy, MSTP, DSTP9, J.-M. Schlenker, université Toulouse III, D. Serre, ENS de Lyon, J.-C. Sikorav, ENS de Lyon.

² Mission Scientifique Technique et Pédagogique du ministère délégué à l'Enseignement Supérieur et à la Recherche

un DESS qui marchait bien et recrutait sur toute la France, ont vu leurs effectifs s'effondrer avec la multiplication des offres de formation professionnelles.

Lien entre M1 et M2

Dans certains établissements, il y a une cassure importante entre le M1 et le M2, les étudiants sortant du M1 ne poursuivant pas sur place, et les étudiants du M2 étant recrutés, de plus en plus difficilement, à l'extérieur. Une discussion a porté sur la difficulté d'adaptation d'anciens cursus spécialisés de M2 conçus pour une durée d'un an (par exemple, cryptographie), au nouveau format de deux ans, qui peut impliquer un recrutement anticipé. L'articulation M1-M2 demande donc une réflexion spécifique qui prenne en compte le couplage entre recrutement et sélection (même si celle-ci n'est pas supposée exister officiellement).

Spécialisation ou spectre large ?

Une autre question abordée a été la largeur du spectre de formation couvert par le M2, suivant le devenir des étudiants : des M2 accueillant des agrégés qui ne poursuivront pas en thèse devront rester assez ouverts, alors qu'au contraire, des M2 pourront avoir un très haut niveau théorique dans un spectre plus étroit, pour être au niveau de la recherche contemporaine.

Nécessité de réflexion sur les débouchés

Certains étudiants trouvent du travail comme ingénieurs mathématiciens, alors qu'ils n'auraient pas eu le niveau pour faire une année L3 classique, avec son contenu de mathématiques fondamentales. Il y a donc maintenant au niveau BAC + 5 des étudiants qui auparavant suivaient les cursus d'IUP s'arrêtant à BAC + 4. Ces formations semblent donner un niveau de mathématiques supérieur à celui reçu dans certaines formations d'ingénieur, au moins lorsqu'il s'agit de réagir à des situations concrètes dans les entreprises. On observe le même phénomène pour les étudiants qui s'orientent vers des recherches interdisciplinaires (MASS, bio-mathématiques et bio-statistiques,...) sans que les débouchés soient assurés nécessairement, et sans que l'on sache quel est le recrutement en mathématiciens d'organismes de recherche hors mathématiques.

Points principaux soulignés dans les rapports d'expertise

R. Eymard présente de manière succincte les points revenant le plus souvent dans les commentaires des experts de la MSTP :

- lisibilité du dossier, des schémas de formation,
- cohabilitation, convention, mutualisation formalisées et reprises par toutes les parties, prise en compte des offres concurrentes ou complémentaires de l'établissement ou des établissements voisins,
- origine détaillée du recrutement,
- débouchés identifiés et fournis, partenaires professionnels explicites, intervenants identifiés,
- adossement recherche réel, stages de recherche et encadrement identifiés,
- offre de cours adaptée aux effectifs.

Liaison entre Master et agrégation

La préparation à l'agrégation a été mentionnée par la plupart des participants comme une formation importante, à fort taux de succès. Son articulation avec l'année M1 est donc en général facilitée. En revanche, l'articulation entre l'agrégation et les Masters de mathématiques n'est pas toujours facile :

- Certains participants souhaitent que la préparation à l'agrégation permette une validation d'un nombre significatif d'ECTS.
- Ils souhaitent aussi que les difficultés éventuelles d'accès aux cours de M2 pour les agrégés en année de stage soient levées par concertation avec les IUFM.
- Des solutions d'aménagement du M2 sur une durée de deux années peut aussi faciliter l'accès des agrégés à la formation.
- Certains estiment que l'agrégation pourrait n'être passée qu'au niveau bac+5.

A. Bonami rappelle que les agrégés restent éligibles pour une allocation de recherche dans la limite des 27 ans, quelle que soit la date d'obtention du Master.

Master recherche et Master professionnalisé, rôle du ministère

On évoque en réunion le projet probable d'un rapprochement entre les labels recherche et professionnel pour les Masters. Certains participants le déplorent, craignant une perte de lisibilité. La plupart s'accordent à remarquer que cette distinction n'a pas beaucoup de sens au niveau du M1.

Un intervenant désapprouve l'action du ministère sur les Masters et souhaite plus d'autonomie pour les universités. Il est alors remarqué que l'absence de cadrage était volontaire, dans la perspective de l'autonomie des universités.

Les arguments en faveur du rapprochement des deux labels sont d'une part, le fait que dans certaines disciplines éloignées des mathématiques, la visibilité en recherche des Masters professionnels est plus grande que celle des Masters recherche, et d'autre part qu'en mathématiques, l'existence de thèses industrielles rend difficile la démarcation entre les deux types de formation.

Réflexions autour des problèmes d'effectifs

B. Rozoy rappelle que la baisse des effectifs, mesurée au niveau national à 12,6% pour les sciences dures, a été évaluée en incluant les classes préparatoires et les écoles d'ingénieurs, qui, elles, ont maintenu ou accru leurs effectifs. Ceci implique que l'on peut s'attendre à une poursuite de cette évolution à la baisse.

Des raisons de cette baisse sont évoquées : choix des lycéens déterminés par les notes mises au bac plus sévères en spécialité mathématiques, et par une faible connaissance des débouchés de la discipline. Cette baisse d'effectifs s'accompagne d'un recrutement de bacheliers sans mention au bac, les meilleurs semblant s'orienter vers d'autres filières.

Il est donc essentiel de maintenir le potentiel d'enseignement et de recherche, dans la perspective d'un accroissement des effectifs qui n'interviendra qu'à moyen terme. Plusieurs mesures sont évoquées :

Au niveau des Masters,

- valoriser davantage la qualité des connaissances en mathématiques des étudiants formés en Master, par comparaison avec les formations d'ingénieur ;

- améliorer le suivi individuel des étudiants, pour leur permettre plus de souplesse dans leur choix, et leur ouvrir des perspectives plus attrayantes ;
- utiliser les limites d'effectifs possibles pour introduire une sélection positive ;
- aménager les formes pédagogiques des cours à trop faible effectif, pour aboutir à des coûts recevables par l'établissement tout en maintenant une offre de formation suffisamment diversifiée (travail personnel encadré par exemple) ;
- formaliser en conventions les partenariats entre établissements, pour regrouper les effectifs de diverses provenances et pour faciliter la cohérence de l'offre de formation ;
- développer l'attractivité de nos Masters pour les étudiants étrangers ;
- adapter les contenus à la réalité des acquis à l'entrée en Master.

Plus généralement,

- accroître l'enseignement des mathématiques à l'extérieur des UFR et des départements de mathématiques ; un obstacle semble être la diminution du nombre d'heures d'enseignement dans les autres cursus ;
- développer des formations pluridisciplinaires avec l'informatique, la biologie, l'économie, la gestion...
- argumenter le maintien voire la création de postes là où le contexte scientifique le permet ;
- faire appel aux sociétés savantes pour la promotion de la discipline et de ses débouchés professionnels. Une brochure « Les métiers des mathématiques » est en cours d'élaboration par la SMF, la SMAI, la SFDS et femmes et mathématiques, en collaboration avec l'ONISEP.

Que sont nos étudiants devenus ?

Jean-Marie Morvan¹

J'ai voulu savoir ce que sont devenu(e)s mes étudiant(e)s ... J'ai pris mon bâton de pèlerin et fait ma propre enquête en utilisant les données fournies par les services administratifs². Je me suis focalisé sur une promotion d'étudiants inscrits en Licence de Mathématiques il y a 7 ans, et j'ai cherché comment chacun d'entre eux s'en est sorti. J'ai choisi la troisième année d'études universitaires parce qu'elle est une année pivot : elle correspond à un réel choix disciplinaire. Dans notre cas, il s'agit d'étudiants qui viennent de DEUG ou des classes préparatoires, et qui font le choix d'étudier les mathématiques.

Tout ceci devait rester « entre nous », c'est-à-dire à destination des collègues mathématiciens de Lyon I, et nos tutelles au ministère. Ainsi, le recueil des informations comme leur traitement a été très artisanal, et ne prétend aucunement être représentatif de comportements nationaux. Il apparaît cependant que cette enquête peut intéresser un plus large public. Je me suis laissé convaincre de la publier ici.

Voici donc les résultats de l'enquête que j'ai menée auprès des étudiants inscrits en Licence de Mathématiques à Lyon 1 en 1999, (actuel L3). Je précise qu'il s'agit des *inscrits* et non des *reçus* à la licence.

Il y avait 279 étudiants inscrits en Licence de Mathématiques en 1999, dont 65 inscrits parallèlement à l'Ecole Nationale des Travaux Publics de Lyon ou l'École Centrale de Lyon. Parmi ces 65 étudiants en double inscription, tous ceux que j'ai pu joindre sont maintenant ingénieurs et n'ont pas utilisé leur licence. Il s'agit essentiellement d'inscriptions formelles.

Je me suis donc intéressé aux 214 étudiants restants.

Les chiffres officiels

Voici ce que nous apprennent les statistiques de l'université. Sur ces 214 étudiants,

- 108 ont été admis à la Licence de Mathématiques en 1999-2000, soit un peu plus de 50%,
- 71 se sont réinscrits en Licence de Mathématiques à Lyon I en 2000-2001, et 46 ont été admis, soit un peu plus de 21% des 214,
- 15 se sont réinscrits une troisième fois en Licence de Mathématiques à Lyon I en 2001-2002, et 8 ont été admis, soit un peu plus de 3% des 214.

Ainsi, 75% des étudiants qui étaient inscrits en Licence de Mathématiques en 1999 avaient leur licence de Mathématiques en 2002³.

J'ai pu retrouver 145 de ces étudiants, grâce aux numéros de téléphone que l'administration avait conservés. J'ai discuté personnellement avec chacun d'entre eux

¹ Université Claude Bernard Lyon I

² Je remercie à cette occasion Mme Biguet qui m'a donné les informations techniques nécessaires.

³ Attention, ceci ne signifie pas qu'un peu plus de 50% des étudiants ont eu leur licence en une fois, 21% en deux fois et 3% en trois fois, puisque certains étaient déjà inscrits en licence de Mathématiques en 98-99...

(ou avec son père ou sa mère, parce que bien souvent le numéro de téléphone est celui des parents). Une seule communication a été coupée brusquement pour une raison que j'ignore ... et je n'ai pas osé rappeler ...

Voici grossièrement ce qui ressort de cette étude :

- **Provenance** - Parmi ces 145 étudiants,
 - 101 proviennent d'un DEUG,
 - 34 proviennent des Classes Préparatoires, et
 - 10 ont eu un parcours mixte, *i.e.* Classes Préparatoires + DEUG.
- **Professions actuelles** -
 - 86 étudiants sont enseignants (au sens large). Parmi eux,
 - 12 ont l'Agrégation de Mathématiques ;
 - 35 ont le CAPES de Mathématiques ;
 - 20 sont Professeurs des Écoles titulaires ;
 - 19 sont vacataires ou contractuels dans le public ou le privé, (professeurs de mathématiques en collège ou lycée, surveillants, assistante maternelle, éducatrice spécialisée ...).⁴ Certains travaillent dans des structures comme Acadomia...
 - 12 étudiants sont en fin de thèse ;
 - 42 étudiants ont trouvé un emploi dans le public ou le privé, hors enseignement ;
 - 5 étudiants sont en situation précaire difficile, (ils n'ont pas encore démarré de carrière professionnelle).
- **Quelques précisions supplémentaires** - ... qu'on peut commenter à l'infini...
 - La quasi-totalité des Agrégés provient d'une Classe Préparatoire.
 - Parmi les étudiants qui ont le CAPES,
 - 16 proviennent d'un DEUG,
 - 11 proviennent d'une Classe Préparatoire,
 - les autres ont un parcours mixte.
 - La quasi-totalité des Professeurs des Écoles provient du DEUG.
 - Il ressort que sur les 101 étudiants provenant du DEUG, 54 sont enseignants, (1 est Agrégé, 16 ont le CAPES, 19 sont Professeurs des Écoles, 18 sont non titulaires).
 - La quasi-totalité des thésards provient d'un DEUG.
 - Parmi les thésards, deux font une thèse de maths pures, (l'un vient du DEUG, l'autre d'une classe préparatoire).
- **Quelques remarques** -
 - Voici comment on peut devenir Professeur des Écoles : succès au DEUG + échec à la licence de mathématiques + succès à la licence des sciences de l'éducation + succès au concours de Professeur des Ecoles. C'est un parcours que j'ai rencontré plusieurs fois ...

⁴ Cette catégorie est de plus en plus précarisée à la suite de la nouvelle politique du ministère qui supprime les contractuels (payés au mois), pour les remplacer par des vacataires, (payés à l'heure).

- Il ressort que parmi les étudiants provenant d'un DEUG et qui se sont destinés à l'enseignement, il y a plus d'étudiants qui sont devenus Professeurs des Écoles que d'étudiants qui ont le CAPES ou l'Agrégation.

- Beaucoup d'étudiants ont choisi avec succès le parcours - Licence de Math -Maitrise-DESS Stat-Info, et ont trouvé ensuite un emploi sans trop de difficultés.

- Un étudiant a intégré l'École Centrale de Lyon avec un parcours DEUG-Licence de Maths.

– **Quelques parcours atypiques particulièrement intéressants -**

- Un de nos étudiants a monté 3 auto-écoles, après un parcours MIM-DESS.

- Un de nos étudiants a vendu l'entreprise qu'il avait créée pour reprendre des études de mathématiques dans le but précis de devenir enseignant. Il a ensuite passé l'agrégation interne. Il est maintenant PRAG.

Il ne faut évidemment pas donner trop d'importance à ces chiffres, qui indiquent tout de même une tendance.

Tout commentaire est bienvenu...

Sur le programme franco-brésilien

Bernard Helffer, Harold Rosenberg

À l'initiative de mathématiciens français et brésiliens désireux d'étendre et de renforcer une coopération exemplaire entre leurs écoles mathématiques, un accord franco-brésilien a été signé il y a un peu plus de quatre ans entre les deux pays par les ministres Roger-Gérard Schwartzberg et Ronaldo Mota Sardenberg. C'est sans doute l'unique accord de ce type qui ait été signé au niveau des ministres de la Recherche en ciblant comme unique sujet le domaine des mathématiques. Les ministres de la Recherche des deux pays viennent d'approuver le renouvellement pour quatre ans de l'accord et il est sans doute utile à la communauté mathématique d'en faire un court bilan et de lui donner plus de publicité pour développer dans son cadre de nouvelles orientations scientifiques.

Un peu d'histoire

Nous reprenons ici les grandes lignes d'un texte de J. Palis. Durant la période 1946-1960 de nombreux français ont visité le Brésil pour des périodes de un à deux ans. Citons : André Weil, Jean Dieudonné, Jean Delsarte, Laurent Schwartz, Charles Ehresman, Alexander Grothendieck, Georges Reeb, Jean-Louis Koszul, Roger Godement, François Bruhat... Parmi les mathématiciens brésiliens qui ont particulièrement bénéficié de ces visites, on peut citer Leopoldo Nachbin et Mauricio Peixoto. Georges Reeb présenta un cours sur les feuilletages en 1957 lors du premier colloque brésilien de mathématiques. Peu de temps après M. Peixoto commence une collaboration avec G. Reeb et R. Thom. On peut dire que cela marqua la genèse

de l'école brésilienne en systèmes dynamiques, qui est devenue l'une des toutes premières au monde. Pour donner une indication sur l'évolution des mathématiques au Brésil, il n'est pas inutile de mentionner que ce premier colloque réunissait une soixantaine de participants. Depuis, il se tient tous les deux ans et sa dernière tenue en 2005 rassemblait près de 1200 participants, comprenant en particulier de nombreux étudiants.

La collaboration de M. Peixoto et R. Thom a stimulé de nombreuses visites dans les années 70. Citons : Marcel Berger, Alain Chenciner, Gilbert Hector, Michel Herman, Jean Martinet, Robert Moussu, Harold Rosenberg, Robert Roussarie.... Sur d'autres thèmes scientifiques, il faut aussi citer durant cette période Laurent Schwartz, Jacques-Louis Lions, David Ruelle, Pierre Collet et Haim Brésis...

Pendant une quinzaine d'années à partir de 1978, de nombreux jeunes mathématiciens passent un ou deux ans comme scientifique du contingent. Cela va avoir une très grande influence sur l'évolution de la coopération franco-brésilienne. La liste de ces coopérants comprend : Pierre Bérard, Etienne Ghys, Michel Hilsum, Jean-Pierre Francoise, Jean-Christophe Yoccoz, Patrick Cattiaux, Christian Bonnatti, Claude Danthony, Alain Albouy, Emmanuel Ullmo, Pierre Mathieu, Alain Soyer, Thierry Barbot et Gilles Carron.

Un premier bilan de l'accord

Les principaux objectifs étaient au départ de développer les échanges ou séjours de doctorants et de postdoctorants et de soutenir des projets de recherche. Pour réaliser ces objectifs, le projet s'est structuré en un réseau de laboratoires français et brésiliens dont des correspondants¹ sont chargés de développer les échanges. Un conseil scientifique² franco-brésilien est chargé du pilotage du projet.

Sur la période 2001-2004, une centaine de chercheurs résidant en France se sont déplacés vers le Brésil dans le cadre de cet accord et une soixantaine de résidents brésiliens sont venus en France. Dans les deux sens, le programme a aussi permis de financer des séjours d'un an de PostDoc.

La coopération s'est principalement développée dans les secteurs suivants : Systèmes dynamiques, Probabilités, Géométrie, Équations aux Dérivées Partielles, Algèbre et Optimisation.

Il est bien sûr impossible de citer tous les noms, mais citons tout de même deux noms de jeunes brésiliens très prometteurs : M. Viana et A. Avila, dont les travaux en systèmes dynamiques sont exceptionnels.

Le conseil scientifique a aussi suscité des cours d'été pour développer de nouvelles directions. Dans cet esprit, des chercheurs comme S. Sorin, J. Bertoin et A. Albouy ont été invités à aller donner des minicours sur place de plusieurs semaines.

¹ Pour la France, ces correspondants, qui représentent tantôt un sujet tantôt un laboratoire sont (par ordre alphabétique) : V. Baladi, C. Bavard, G. Besson, A. Chenciner, A. Cohen, M. Esteban, M. Hindry, S. Olla, F. Loray, P. Mathieu, J.F. Mattei, F. Pacard, P. Picco, J.P. Puel, M. Soret, J.-P. Thouvenot.

² Le nouveau conseil scientifique est constitué côté français de J. Bertoin, E. Ghys, B. Helffer, P.-L. Lions, H. Rosenberg, J.-C. Yoccoz et côté brésilien de C. Camacho, P. Ferrari, D. Figueiredo, J. Palis et A. Simis.

Si bien sûr l'IMPA joue un rôle très important côté brésilien (il est même devenu associé comme formation CNRS), le conseil scientifique, sous l'impulsion de H. Rosenberg et J. Palis, s'est efforcé de développer les contacts dans toutes les grandes universités brésiliennes et au niveau de la France de dépasser le cadre des équipes initialement les plus impliquées.

Les financements côté français proviennent principalement du ministère de la Recherche, du ministère des Affaires étrangères et du CNRS (via un PICS) et côté brésilien du CNPQ.

Malgré un budget limité (ou plutôt les incertitudes récurrentes dans le passé sur l'obtention effective de crédits annoncés) et des difficultés pour organiser les échanges de PostDoc dans un programme spécifique (ce qui avait été possible et fructueux sur la période 2002-2004), le programme vient de se voir garanti, grâce aux efforts de M. Martin-Deschamps (conseillère scientifique pour les mathématiques à la direction de la recherche) un financement quadriennal qui va lui permettre un développement plus régulier.

Comment bénéficier de cet accord

Le conseil scientifique engage donc les chercheurs travaillant en France ou au Brésil à présenter des projets de recherche. Bien sûr, il ne s'agit pas de financer juste une participation à un colloque mais d'encourager des collaborations effectives correspondant à des séjours de durée significative (typiquement entre quinze jours et un mois) ou de favoriser les échanges doctoraux ou postdoctoraux.

Concrètement, le dossier doit être soumis en suivant la procédure suivante :

- Présenter un dossier en donnant les dates, en précisant le projet de recherche envisagé et avec qui vous envisagez de travailler au Brésil.
 - Joindre aussi votre Curriculum Vitae
 - Envoyer votre dossier aux deux adresses : fr.br@math.jussieu.fr et br.fr@impa.br
- Bien entendu la même procédure s'applique aux brésiliens qui désirent travailler en France.

Le conseil scientifique examinera la demande et répondra dans les délais les plus rapides.

Maurice Audin 1932–1957

Gérard Tronel

Le 10 juin 1957, Maurice Audin, assistant de mathématiques à l'université d'Alger est arrêté à son domicile par des parachutistes français, il est torturé, puis assassiné probablement quelques jours après son arrestation. Henri Alleg, journaliste à Alger Républicain, arrêté et torturé lui aussi, a croisé son camarade Maurice Audin dans ces lieux où l'on torturait ; Henri Alleg est peut-être l'un des derniers témoins à avoir vu Maurice Audin vivant. Josette Audin, dès qu'elle a le pressentiment de la mort de son mari, alerte Laurent Schwartz qui cherche à s'informer du sort de son jeune collègue, mais les réponses qu'il arrive à obtenir font état de la disparition ou de l'évasion de Maurice Audin. Pour connaître la vérité sur l'« Affaire Audin », un comité est créé. L'un des membres actifs de ce Comité Audin, l'historien Pierre Vidal-Naquet, après de longues enquêtes, arrivera à la conclusion que Maurice Audin a été assassiné par ses tortionnaires. Mais, près de cinquante ans après ces événements, la vérité officielle reste celle de l'évasion ; cette thèse est peu crédible comme le prouve certaines attitudes des autorités de tutelle de Maurice Audin, notamment le ministère de l'Education nationale qui a continué à le considérer comme fonctionnaire, jusqu'à la fin de la guerre d'Algérie et semble l'avoir rayé des cadres à la suite de l'absence de réponse à un questionnaire lui proposant le choix de rester en Algérie ou d'être rapatrié en France. Par ailleurs, en 1963, un tribunal d'Alger a entériné par un jugement la mort de Maurice Audin, quelques années plus tard, en France, ce jugement a été confirmé.

La guerre d'Algérie terminée, l'affaire Audin a été mise en sommeil. Des procès intentés par la famille aboutissent à la reconnaissance officielle de la mort de Maurice ; mais récemment, des mathématiciens, et des jeunes historiennes ont repris cette affaire. Il est temps de chercher à connaître la vérité sur la mort de Maurice Audin car, dans quelque temps, tous les témoins auront disparu. Il reste la possibilité d'un accès aux archives afin que les autorités politiques, civiles et militaires soient amenées aujourd'hui à faire la lumière sur les zones d'ombres de la guerre d'Algérie, notamment sur les disparitions. Maurice Audin est un cas symbole, il n'est pas le seul citoyen, placé sous la protection des lois de la République, à avoir « disparu ».

Des mathématiciens, rejoints aujourd'hui par des personnalités de la société civile, ont créé l'Association Maurice Audin dont l'un des objectifs est de rappeler le souvenir de notre collègue et de chercher à connaître enfin la vérité sur sa « disparition ». Depuis 2004, un prix Audin de mathématiques décerné, chaque année, à deux lauréats, l'un exerçant en Algérie, l'autre en France, donne l'occasion de reparler de l'affaire Audin. Une session du prix Audin est prévue pour 2006, mais l'association souhaiterait que 2007, année qui marquera le cinquantenaire de la mort de Maurice Audin, fasse l'objet d'une attention particulière. Il est envisagé à l'occasion de la cérémonie de remise du prix 2007, d'organiser un colloque auquel participeraient des historiens, des juristes, des témoins de l'époque de la guerre d'Algérie, des mathématiciens ; ce colloque tenterait de faire le point sur l'affaire Audin et sur la recherche de la vérité. Il faut souhaiter que cette initiative rencontre

un écho favorable auprès de la communauté mathématique, écho qui devrait avoir un impact en France et en Algérie.

Le prix Audin de mathématiques compte déjà quatre lauréats :

- Pour la session de 2004 :
 - Anne de Bouard, CNRS, Orsay ;
 - Mohamed Sidi Bouguima, Université de Tlemcen.
- Pour la session de 2005 :
 - Brahim Mezerdi, Université de Biskra ;
 - Didier Smets, Université Pierre et Marie Curie.

Pour ce qui concerne les deux prochaines sessions, 2006 et 2007, les modalités se trouvent sur le site de l'Association Maurice Audin <http://www.ann.jussieu.fr/AUDIN/web/cand.htm>

Émile Borel (1871–1956), Membre de l'Académie des sciences

Académie des sciences – DISC¹

Dans l'histoire des mathématiques, le trio qu'Émile Borel forma avec René Baire et Henri Lebesgue est d'une importance considérable. Son nom est également inséparable de celui de Jacques Hadamard. Le cinquantième anniversaire de la mort d'Émile Borel est l'occasion d'explorer son dossier à l'Académie des sciences où il fut élu en 1921 et dont il fut le Président en 1934. Le dossier numérisé réalisé à partir des archives de l'Académie permet de retracer les étapes de l'œuvre scientifique d'Émile Borel : rappelons par exemple que, dès 1898, ses travaux en analyse sur la théorie générale des fonctions de variables réelles, sur la théorie des fonctions et sur les séries divergentes retinrent l'attention de l'Académie des sciences qui lui décerna plusieurs Prix. Le dossier présente la liste de ses travaux publiés dans les Comptes rendus de l'Académie avec un lien électronique vers chaque article disponible en texte intégral sur le site de la Bibliothèque Nationale de France. Il contient ses discours prononcés lors de sa présidence de l'Académie, notamment celui rendant hommage à Marie Curie ainsi que, mais de façon plus parcellaire, des informations sur son rôle dans les réformes de l'enseignement de mathématiques et son action politique. Il permet enfin de retrouver l'éloge funèbre d'Émile Borel prononcé par Louis de Broglie dans le cadre de l'Institut de France. Le dossier numérisé se termine par la présentation du fonds d'archives d'Émile Borel, conservé par l'Académie et composé principalement de la correspondance qui lui fut adressée par divers mathématiciens français et étrangers entre 1897 et 1922. Ce fonds, transmis par l'Institut Henri Poincaré, contient notamment 52 lettres de René Baire, 230 lettres de Henri Lebesgue et 400 lettres d'autres mathématiciens.



© Académie des sciences – Institut de France

Le dossier est consultable sur le site Internet de l'Académie des sciences :
http://www.academie-sciences.fr/membres/in_memoriam/Borel/Borel_oeuvre.htm

Contact : Anne Bernard et Natacha Oliveira – disc@academie-sciences.fr

¹ Délégation à l'information scientifique et à la communication de l'Académie des sciences.

LIVRES

Arithmetic Noncommutative Geometry

M. MARCOLLI

American Mathematical Society, 2005. 136 p. ISBN : 0-8218-3833-4. \$ 29

L'ouvrage de M. Marcolli fait le bilan de ses travaux récents sur les interactions entre la géométrie non commutative « à la Connes » et la géométrie arithmétique. Le théorème de Gel'fand-Naimark donne une équivalence de catégories entre les espaces topologiques séparés localement compacts et les C^* -algèbres abéliennes. Cette dualité entre espaces géométriques et algèbres commutatives de fonctions a aussi été une des sources des travaux de Grothendieck qui a refondé la géométrie algébrique et la géométrie arithmétique sur cette base.

Depuis les années 80, Connes a développé des concepts et des outils pour appliquer les intuitions géométriques à des algèbres d'opérateurs non commutatives. Parmi ces derniers, on peut citer la K -théorie, la cohomologie cyclique, le caractère de Chern... Il a aussi introduit toute une famille d'exemples de telles algèbres qui apparaissent naturellement dans divers domaines des mathématiques. Tous ces exemples sont basés sur le fait que certaines relations d'équivalence sur des espaces (topologiques, mesurés ou lisses) ont un mauvais comportement du point de vue topologique, ce qui fait que l'espace topologique quotient ne possède pas suffisamment de fonctions (typiquement uniquement les constantes) pour décrire le comportement fin de la relation d'équivalence. L'idée est alors de remplacer l'algèbre des fonctions sur le « mauvais » quotient par une algèbre de convolution non commutative, qui contient les fonctions sur l'espace de départ mais aussi les opérateurs fournissant les identifications. C'est l'algèbre de convolution des fonctions sur le graphe de la relation d'équivalence considérée (on considère aussi diverses complétions de cette dernière). La force des travaux de Connes est de transposer de nombreux raisonnements de nature géométrique à ce nouveau type d'algèbres non commutatives.

Une des premières situations où ce type de mauvais quotient apparaît en théorie des nombres est dans le cadre de la théorie encore ouverte du corps de classe explicite pour les corps quadratiques réels (douzième problème de Hilbert). En effet, la théorie de la multiplication complexe affirme essentiellement que les extensions abéliennes des corps quadratiques *imaginaires* sont engendrées par des valeurs spéciales de certaines fonctions analytiques, appelées fonctions elliptiques. Ces nombres complexes peuvent aussi être considérés comme des coordonnées de points de torsion sur des courbes elliptiques complexes de la forme $\mathbb{C}/\alpha$, où α est un idéal de l'anneau des entiers du corps quadratique considéré. Si on cherche à transposer cette construction au cas des corps quadratiques réels, on se heurte immédiatement au problème que l'analogue $\mathbb{R}/\alpha$ de la courbe elliptique est un mauvais quotient au sens ci-dessus. Manin a proposé dans son programme de multiplication réelle d'utiliser les outils de la géométrie non commutative pour faire

malgré tout de la géométrie avec cet objet étrange. La première bonne nouvelle dans cette direction est qu'il existe un analogue de la construction de la jacobienne dans ce contexte non commutatif (qui était déjà connu par Connes). Manin a grandement approfondi cette analogie entre courbes elliptiques et tores non commutatifs.

Les travaux de Matilde Marcolli exposés dans cet ouvrage permettent de mieux comprendre les interactions entre la géométrie arithmétique, la théorie des algèbres d'opérateurs, et certains aspects de la physique théorique. Ils ouvrent de larges perspectives et donnent un point de vue complètement nouveau dans l'étude géométrique d'un certain nombre d'objets dynamiques apparaissant en arithmétique comme les fractions continues, les orbites des opérateurs de Hecke sur les réseaux, les systèmes dynamiques associés par Deninger à la « fibre spéciale archimédienne » d'une variété algébrique sur un corps de nombres. Ces nouvelles constructions permettent de comprendre très concrètement la nature dynamique des constructions des facteurs eulériens des fonctions L des variétés algébriques qui apparaissent dans le programme de Deninger, dans le cas de la réduction totalement dégénérée.

Le premier chapitre donne une introduction aux concepts et aux outils de base de la géométrie non commutative « à la Connes ».

Le deuxième chapitre porte sur la courbe modulaire non commutative, ou en d'autres termes, sur l'étude en termes d'algèbres d'opérateurs de l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur le bord $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ du disque de Poincaré. L'auteur y construit des symboles modulaires limites, étudie la fonction zêta de Selberg de la courbe modulaire et le complexe modulaire en termes qui ne font intervenir que la géométrie de ce bord.

Le troisième chapitre porte sur la mécanique statistique quantique sur les $\mathbb{Q}$ -réseaux, qui est une généralisation à $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{Q}}$ de travaux de Bost et Connes sur $\mathrm{GL}_{1,\mathbb{Q}}$ (95). Elle y présente un bel exemple de système dynamique quantique tiré de la théorie des nombres et dont le comportement peut être étudié de manière très complète. Le système dynamique en rang 2, dont la construction est due à Connes et à l'auteur de cet ouvrage, fournit un cadre agréable pour traduire des résultats de théorie des nombres (étude des orbites de Hecke sur la courbe modulaire) dans le formalisme très compact et intuitif de la mécanique statistique quantique. Ces beaux systèmes présentent des transitions de phases liées aux pôles de leurs fonctions de répartitions, qui sont des fonctions zêtas de nature arithmétique. On regrettera cependant le fait que les places finies et infinies soient traitées différemment. Ce tort source de difficultés et très répandu en géométrie arithmétique semble d'ailleurs disparaître dans les travaux plus récents en rang 1 de Connes, Marcolli et Consani, mais le cas du rang 2 est de l'avis de tous beaucoup plus difficile à comprendre dans un cadre où toutes les places sont traitées de manière uniforme. Ce chapitre se termine par une explication des relations de ces systèmes avec la théorie du corps de classe explicite.

Le quatrième chapitre est un superbe patchwork des connaissances actuelles de l'interprétation en termes dynamiques des facteurs locaux archimédiens et totalement dégénérés des courbes sur les corps de nombres, i.e. de leur écriture à la Deninger. Précisons ce dernier point : C. Deninger a proposé un formalisme cohomologique qui permet de traiter les places archimédiennes et non archimédiennes de manière uniforme dans la description des facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques. Il en a ensuite déduit un formalisme conjectural pour traiter

des problèmes difficiles de théorie des nombres. M. Marcolli, prolongeant des travaux de Manin, utilise l'espace des géodésiques sur l'espace hyperbolique contenu dans la surface d'une courbe complexe pour donner un modèle de la réduction modulo l'infini de la courbe, ou plutôt du graphe dual de cette réduction. Elle montre que le facteur local archimédien peut-être calculé à partir du triplet spectral (variété riemannienne non commutative) que porte ce modèle du graphe dual de la réduction. Pour étayer son argumentation, elle considère aussi les courbes de Mumford (courbes p -adiques admettant une uniformisation analogue à l'uniformisation de Schottky) et donne une correspondance très précise entre ses constructions archimédiennes et les constructions usuelles du graphe dual de la réduction pour une courbe de Mumford (travaux joints avec K. Consani). Ce chapitre se termine par une étude précise de la cohomologie archimédienne (dont la construction est due à Consani), et de ses relations avec la théorie de la renormalisation, qui permettent de donner un éclairage nouveau sur la monodromie archimédienne.

Pour conclure, on dira que ce livre passionnant donne une belle introduction aux interactions entre géométrie arithmétique, géométrie non commutative et physique mathématique. Cette introduction permettra d'aborder sereinement et avec des exemples concrets en tête les problématiques posées par le programme de Deninger, la description des facteurs locaux archimédiens, certains aspects dynamiques de la théorie des opérateurs de Hecke, et la théorie de la renormalisation dans son expression par Connes, Kreimer, et Marcolli. Le chapitre Vista donne un aperçu des possibles développements de ce travail interdisciplinaire et plein d'originalité, qui ne manquera pas d'intéresser les chercheurs sensibles aux interactions actuelles entre mathématiques fondamentales et physique théorique.

*Frédéric Paugam,
Institut de Mathématiques de Jussieu*

A Geometric Approach to Free Boundary Problems

L. CAFFARELLI, S. SALSA

American Mathematical Society, 2005. 270 p. ISBN : 0-8218-3784-2-. \$ 49

Cet ouvrage est principalement consacré à l'étude de la régularité des solutions de problèmes à frontière libre elliptiques et paraboliques. Il est destiné en priorité à des chercheurs ayant une certaine familiarité avec les équations aux dérivées partielles non linéaires; cependant, mise à part quelques propriétés élémentaires des fonctions harmoniques (principe du maximum, inégalité de Harnack. . .), aucune connaissance a priori n'est requise pour la lecture de ce livre.

Bien que les démonstrations soient parfois très techniques, cet ouvrage est rédigé très clairement et est très agréable à lire, les auteurs ayant apporté un soin particulier à la présentation heuristique des arguments. De nombreuses méthodes utilisées sont de natures géométriques et les auteurs n'hésitent pas à souligner les similarités avec la théorie des surfaces minimales. Tous les résultats et toutes les démonstrations sont présentées en détails, ce qui fait de ce livre une référence précieuse pour l'étude des problèmes à frontière libre.

Un problème à frontière libre typique est le suivant : Trouver une fonction $u(x) \geq 0$ définie sur un ensemble Ω telle que

$$\Delta u = 0 \quad \text{lorsque } u > 0,$$

et satisfaisant la condition suivante (condition de frontière libre) :

$$|u_\nu| = 1 \quad \text{sur } \partial\{u > 0\} \cap \Omega$$

(où u_ν est la dérivée de u dans la direction normale à $\partial\{u > 0\}$). On dira que u est une solution classique si, entre autre, $\partial\{u > 0\} \cap \Omega$ est une hypersurface de classe C^1 et u est C^1 dans $\overline{\{u > 0\}} \cap \Omega$. Malheureusement, l'existence d'une telle solution est rarement assurée. Il existe différentes méthodes (variationnelle, limite singulière, viscosité) permettant de construire des solutions dans un sens faible. La difficulté consiste alors à déterminer la régularité de ces solutions et de leur frontière libre. C'est cette question qui est au centre de ce livre. En d'autres mots, les auteurs étudient le lien entre solutions faibles et solutions classiques des problèmes à frontière libre.

Le livre est organisé en trois parties. Dans la première partie, les auteurs montrent l'existence et la régularité des solutions de viscosité pour une large classe de problèmes elliptiques. La deuxième partie aborde le cas des problèmes paraboliques à frontière libre. Des outils importants de la théorie des fonctions harmoniques et caloriques sont présentés dans la troisième partie.

Première Partie : problèmes elliptiques

La première partie est consacrée à l'étude du problème à frontière libre suivant :

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{dans } \{u > 0\} \cup \{u \leq 0\}^\circ \cap \Omega \\ G(u_\nu^+, u_\nu^-) &= 0 && \text{sur } \partial\{u > 0\} \cap \Omega, \end{aligned}$$

lorsque $G(a, b)$ est une fonction strictement croissante par rapport à a et strictement décroissante par rapport à b (on dit aussi que G est elliptique).

Les auteurs construisent une théorie complète des solutions de viscosité pour ce type d'équation (existence et régularité des solutions).

– **Régularité** : lorsque l'on étudie la régularité de la surface libre, on distingue les résultats de régularité faible (régularité en mesure) et forte (régularité $C^{1,\alpha}$).

Dans les trois premiers chapitres, les auteurs introduisent la notion de solutions de viscosité et discutent les résultats de régularité faible. Le cas bien connu des solutions variationnelles est présenté dans le premier chapitre. Le point le plus important, qui est repris dans le chapitre 3 dans un cadre plus général est le fait que si une solution faible est (1) uniformément Lipschitz (donc en particulier croît de façon au plus linéaire au voisinage de la frontière libre), et (2) non-dégénérée (croît de façon exactement linéaire au voisinage de la frontière libre) alors la frontière libre est de mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^{n-1}$ finie. En particulier, $\{u > 0\}$ est un ensemble de périmètre fini (au sens du calcul des variations), ce qui permet de donner un sens à la condition de frontière libre en mesure : Δu est une mesure de Dirac dont le support est concentré le long de la frontière libre.

Dans les chapitres 4 et 5, qui constituent le cœur de cette première partie, les résultats de régularité forte sont démontrés. Les résultats principaux sont les suivants :

- (i) si la frontière libre est Lipschitz, alors elle est $C^{1,\alpha}$ (chapitre 4),
- (ii) au voisinage des points “plats”, la frontière libre est Lipschitz (chapitre 5).

Notons que ce type de résultats (amélioration de la régularité) sont tout à fait dans l'esprit de la théorie de De Giorgi pour l'étude des surfaces minimales.

– **Existence** : pour conclure cette première partie, le chapitre 6 est dédié à l'existence de solutions faibles. Les auteurs montrent l'existence de solutions de viscosité qui vérifient les conditions nécessaires à l'application des résultats de régularité établis dans les chapitres précédents. La construction de telles solutions repose essentiellement sur la méthode de Perron (plus petite supersolution). Il faut cependant noter qu'une telle construction est loin d'être immédiate. En effet, il est bien connu qu'il existe des solutions de viscosité qui sont dégénérées, ou dont la frontière libre est non régulière (rappelons qu'il n'y a pas, en général, unicité de la solution, même classique). Les auteurs considèrent donc une classe de supersolutions admissibles construite avec soin afin d'éviter ces solutions indésirables : Ils imposent que ces supersolutions soient régulières “à gauche” (c'est-à-dire telle qu'il existe une boule tangente à la frontière libre dans $\{u \leq 0\}^\circ$ en tout point de la frontière libre) et qu'elles aient un comportement linéaire approprié au voisinage de la frontière libre.

Grâce aux résultats de régularité de la première partie, la frontière libre de la solution ainsi construite est régulière ($C^{1,\alpha}$) $\mathcal{H}^{n-1}$ -presque partout. En particulier, la condition de frontière libre est satisfaite au sens classique sauf peut-être sur un ensemble de dimension de Hausdorff strictement inférieure à $n - 1$.

Deuxième Partie : problèmes d'évolution

Un des exemples les plus connu (et les plus étudié) de problème d'évolution à frontière libre est le problème de Stefan. Celui-ci peut être vu comme un cas particulier du problème suivant, qui fait l'objet de cette deuxième partie : Trouver une fonction $u(x, t)$, continue dans $\Omega = B_1 \times (-1, 1)$, telle que

$$\begin{aligned} \Delta u - a_1 u_t &= 0 && \text{dans } \{u > 0\} \cap \Omega \\ \Delta u - a_2 u_t &= 0 && \text{dans } \{u \leq 0\}^\circ \cap \Omega \end{aligned}$$

et telle que la condition de frontière libre suivante soit satisfaite :

$$V_\nu = -G(u_\nu^+, u_\nu^-) \quad \text{le long de } \partial\{u > 0\} \cap \Omega$$

où V_ν est la vitesse de la surface $\partial\{u > 0\} \cap \{t = \tau\}$ dans la direction $\nu = \nabla u^+ / |\nabla u^+|$.

Comme dans le cas elliptique, les auteurs introduisent la notion de solutions de viscosité (chapitre 7), puis s'intéressent à la régularité de ces solutions.

Tout d'abord, la régularité optimale (Lipschitz) des solutions ayant une frontière libre Lipschitz en espace et en temps est établie dans le chapitre 8.

Concernant la régularité de la frontière libre, notons que contrairement au cas elliptique, on ne peut pas espérer montrer, en général, que si la frontière libre est

Lipschitz, alors celle-ci est en fait C^1 . Des contre-exemples sont présentés dans le chapitre 8.

Donc pour obtenir mieux que la régularité Lipschitz, il faut faire des hypothèses supplémentaires sur la solution. C'est l'objet du chapitre 9, dans lequel les auteurs étudient les propriétés des solutions vérifiant une condition de non-dégénérescence supplémentaire. Sous cette condition, il est en particulier démontré que les solutions de viscosité avec frontière libre Lipschitz sont en fait des solutions classiques (frontière libre C^1).

Enfin, les auteurs montrent que cette condition de non-dégénérescence est la conséquence d'une condition géométrique sur la frontière libre similaire à la condition de platitude dans le cas elliptique : l' ε -monotonie. Dans le chapitre 10, il est ainsi établi que si une solution de viscosité est ε -monotone, alors la frontière libre est C^1 et la solution est une solution classique.

Troisième partie

Dans cette dernière partie, les auteurs ont regroupé des résultats importants de la théorie des fonctions harmoniques et caloriques qui sont utilisés dans les deux premières parties.

Le chapitre 11 est dédié à l'étude du comportement au bord des fonctions harmoniques : Lemme de DeGiorgi, inégalité de Harnack au bord, ainsi que quelques résultats sur les mesures harmoniques. Il est en particulier démontré que les fonctions harmoniques qui s'annulent au bord ont un comportement asymptotique linéaire au voisinage des points réguliers du bord, résultat fondamental qui permet aux auteurs de caractériser les solutions de viscosité en fonction de leur développement asymptotique au voisinage des points réguliers.

Dans le chapitre 12, les formules de monotonies, outils importants pour l'étude des problèmes à frontière libre, sont rappelées et démontrées.

Le chapitre 13 traite du comportement au bord des fonctions caloriques.

*Antoine Mellet,
University of Texas at Austin*

Resolution of singularities

STEVEN DALE CUTKOSKY

American Mathematical Society, 2004. 390 p. ISBN : 0-8218-3555-6. \$ 39

Pendant une bonne vingtaine d'années après sa parution, le grand article de Hironaka sur la résolution des singularités des variétés algébriques sur un corps de caractéristique zéro (Annals of Math., vol. 79, No.1 et No.2, Janvier et Mars 1964) a été considéré comme un sommet de la difficulté mathématique, impossible à gravir sans une longue préparation et un très fort engagement. Et voici un ouvrage de la collection « Graduate Studies in Mathematics », qui prétend offrir aux étudiants en Master une preuve de ce résultat, et aussi d'une bonne partie de ce qui est connu en caractéristique positive. Qu'en est-il ? Disons tout de suite que l'ouvrage tient ses promesses ; il donne une introduction élégante à l'ensemble du sujet, avec des preuves complètes et cependant accessibles aux doctorants.

Rappelons que les résultats sont les suivants : Etant donnée une variété algébrique X , (disons géométriquement réduite et irréductible, mais on peut énoncer et prouver un résultat tout à fait général) sur un corps de caractéristique zéro k , il existe un k -morphisme $\pi: X' \rightarrow X$ propre et birationnel, tel que X' soit sans singularités. De plus π est un isomorphisme en dehors du lieu singulier de X et est composé d'éclatements de centre lisse. On peut aussi faire en sorte que l'image réciproque du lieu singulier de X soit un diviseur à croisements normaux dans X' . Cela signifie que toutes ses composantes, une fois réduites, sont des hypersurfaces non singulières dans X' qui en chaque point de X' se rencontrent comme des hyperplans de coordonnées en nombre $\leq \dim X'$.

Le théorème de *résolution plongée* dit que si X est une sous-variété fermée d'une variété non singulière Z , il existe un morphisme propre et birationnel $\Pi: Z' \rightarrow Z$ tel que la *transformée stricte* X' de X , c'est à dire la composante irréductible de $\Pi^{-1}(X)$ qui s'envoie birationnellement sur X par Π , soit non singulière et transverse au diviseur exceptionnel de Π , qui est lui-même un diviseur à croisements normaux dans Z' .

Le principe de la démonstration de Hironaka, qui est repris dans toutes les preuves ultérieures, était de démontrer par récurrence sur la dimension l'existence de suites finies d'éclatements « permis », en particulier de centre lisse et telles que l'espace obtenu à la fin soit sans singularités. L'idée de la récurrence était qu'il suffit de prouver l'existence de telles suites ayant la propriété que le maximum pris sur les points de la variété d'un invariant local des singularités a strictement diminué pour l'ordre produit. L'invariant local est ici la fonction de Hilbert-Samuel $H_{X,x}: N \rightarrow N$ qui à chaque anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ associe la suite des $H_{X,x}(i) = \dim_k \mathcal{O}_{X,x} / m_{X,x}^i$. La fonction de Hilbert-Samuel ne peut que diminuer au sens large lors d'un éclatement permis $p: X_1 \rightarrow X$, c'est à dire que pour tout point $x_1 \in X_1$ on a pour tout $i \geq 1$ l'inégalité $H_{X_1,x_1}(i) \leq H_{X,p(x_1)}(i)$ (si $\dim p(x_1) < \dim x_1$ il faut compliquer un peu). Par ailleurs les éclatements permis sont exactement les éclatements de centre lisse $S \subset X$ le long duquel la fonction de Hilbert-Samuel reste la même ; $H_{X,x}$ ne dépend pas de $x \in S$.

L'idée suivante, celle du *contact maximal*, est la partie qui fait défaut en caractéristique positive. En caractéristique zéro on montre l'existence, en chaque point $x \in X$, de sous-variétés non singulières W de dimension $\leq \dim X$ d'un espace ambiant lisse local Z , qu'une suite d'éclatements permis de Z ne peut séparer de X au sens des transformées strictes que si la fonction de Hilbert-Samuel a diminué strictement. Le pas suivant est de coder cette séparation comme conséquence de la résolution des singularités d'une donnée nouvelle, un *exposant idéliste*, qui est une paire formée d'un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I}$ sur W et d'un entier b , la « singularité » étant mesurée par le quotient $\frac{\nu_x(\mathcal{I})}{b}$, où $\nu_x(\mathcal{I}) = \max\{i \mid \mathcal{I} \subset m_{X,x}^i\}$. Enfin, la résolution des singularités de l'exposant idéliste résulte de la résolution des singularités des sous-espaces de W . Cette présentation rapide est malheureusement approximative, la réalité de la récurrence étant plus compliquée. En outre les problèmes techniques sont considérables, en particulier à cause de la non-unicité des espaces ayant le contact maximal.

La démonstration a été passée au crible fin dans l'espoir de l'adapter en caractéristique positive mais sans succès jusqu'à présent, les progrès en dimension quelconque étant dus à des méthodes entièrement différentes (voir [dJ], [A-dJ], [K])

mais avec des résultats plus faibles que la résolution. Pour l'état de l'art en caractéristique positive, je renvoie à [Ab]. Il faut mentionner aussi les résultats récents de Cossart-Piltant sur la résolution en dimension 3 sur un corps quelconque.

Depuis une quinzaine d'années le désir de donner des méthodes algorithmiques de résolution ou de prouver l'existence de résolutions « canoniques » a fait faire des progrès importants dans la compréhension de la résolution en caractéristique zéro.

L'idée de base (voir [V], [B-M], [H], [W]) est de produire des invariants des singularités beaucoup plus fins que la fonction d'Hilbert-Samuel, à valeurs dans un ensemble ordonné et possédant la propriété que la « strate » des points de X où cet invariant est maximum est non-singulière (ou presque) et que l'éclatement de cette strate fait nécessairement baisser l'invariant. La fonction $H_{X,x}$ n'a aucune de ces deux propriétés. De plus, cet invariant n'est plus directement un invariant de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ mais se complique progressivement à mesure que l'on « monte » dans une suite d'éclatements de X .

Une idée nouvelle due à O. Villamayor est d'exprimer la résolution des singularités elle-même en termes de « basic objects », qui sont essentiellement des exposants idéalistes auxquels on a ajouté des diviseurs à croisements normaux dans W , ce qui fait que l'on n'a plus qu'un seul type de donnée à résoudre, et la fonction $H_{X,x}$ disparaît du paysage. Bien sûr, il faut définir le contact maximal pour de tels objets et prouver son existence, mais la récurrence se trouve épurée. De plus Włodarczyk a prouvé [W] que l'on pouvait choisir les « basic objects » de manière à surmonter les difficultés de non-unicité des espaces ayant le contact maximal, ce qui permet d'autres importantes simplifications.

Pour revenir au livre de Cutkosky, il présente réellement une introduction accessible à tous les aspects de la résolution. Il commence (Chapitre 1) par la définition des singularités en géométrie algébrique, puis explique à partir de l'exemple de la paramétrisation locale des courbes singulières par Newton ce que signifie la résolution et les liens avec la théorie des valuations et l'uniformisation locale, sans oublier la monomialisation, un sujet de prédilection de l'auteur.

Le chapitre 3 est consacré à la résolution plongée des courbes planes, source d'inspiration pour la méthode de Hironaka. Le lecteur pourra si nécessaire apprendre ici ce qu'est l'éclatement d'un point dans le plan.

Le Chapitre 4 est une courte présentation des éclatements en général et de résultats annexes de la résolution.

Le Chapitre 5 est consacré à une présentation très claire de la résolution des singularités des surfaces en caractéristique zéro par la méthode des « good points » d'Abhyankar.

Le Chapitre 6 est la démonstration de la résolution des singularités en général selon les algorithmes d'Encinas et Villamayor. La rédaction est très claire et détaillée.

Le Chapitre 7 concerne la résolution des singularités des surfaces en caractéristique positive, selon une méthode due à Hironaka qui généralise la méthode du polygone de Newton.

Le Chapitre 8 est consacrée à l'approche valuative de la résolution, conçue par Zariski, qui l'a menée à terme en caractéristique zéro en dimensions deux et trois en ce qui concerne la résolution, et en toute dimension pour le résultat « local » appelé uniformisation locale. Cette approche est tout à fait naturelle puisque une k -valuation du corps des fonctions rationnelles d'une variété algébrique X propre

sur un corps k est une manière de choisir de manière cohérente un point (non nécessairement fermé) dans chaque variété X' propre sur k et birationnellement équivalente à X , par exemple un éclatement de X . L'énoncé du théorème d'uniformisation locale ne portant que sur une seule valuation à la fois, le passage de cet énoncé à la résolution pose des problèmes de recollement redoutables. Aussi l'approche valuative a-t-elle été abandonnée après la démonstration de Hironaka, qui ne l'utilisait absolument pas, mais certains pensent qu'elle recèle des trésors en caractéristique positive. En tous cas on trouve ici la démonstration valuative de la résolution des surfaces, d'après Zariski, qui présente très bien les difficultés de « recollement des uniformisations locales ».

Le Chapitre 9 parle de la ramification des valuations dans une extension de corps de fonctions algébriques. La ramification des valuations est un vénérable sujet en théorie des nombres et dans la théorie des corps de fonctions cette ramification a fait l'objet d'études approfondies, en particulier par Abhyankar, et plus récemment dans une approche de l'uniformisation locale par F.-V. Kuhlmann (voir [K]). Ici le point essentiel, est la possibilité de rendre « visible » la ramification des valuations au moyen de morphismes d'anneaux locaux bien choisis dans les corps de fonctions. Un résultat de cette nature est le Théorème de Cutkosky-Piltant cité dans le Chapitre 9, qui comprend une généralisation de résultats de ramification de valuations entre anneaux de Dedekind.

Le style du livre est très agréable, les indispensables calculs sont éclairés par des explications géométriques et de nombreux exercices permettent au lecteur d'approfondir des points particuliers. C'est vraiment l'introduction qui manquait à un cercle d'idées dont beaucoup de géomètres, même parmi ceux qui en utilisaient les résultats, pensaient qu'il était réservé à un petit groupe d'experts.

[Ab] S. Abhyankar, *Resolution of singularities and modular Galois Theory*, Bull. AMS, **38**, 2, 131-169, 2001.

[A-dJ] D. Abramovich et A.J. de Jong, *Smoothness, semistability and toroidal geometry*, Journal of algebraic Geometry, **6**, (1997), 789-801.

[B-M] E. Bierstone et P. Milman, *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing-up the maximal strata of a local invariant*, Inv. Math., **128** (1997), 207-302.

[dJ] A.J. de Jong, *Smoothness, semistability and alterations*, Publ. Math. IHES., **83** (1996), 51-93.

[H] H. Hauser, *The Hironaka theorem on resolution of singularities (or : a proof we always wanted to understand)*, Bull. AMS., **40** (2003), 323-348.

[K-K] H. Knaf et F.-V. Kuhlmann, *Abhyankar places admit local uniformization in any characteristic*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., **38**, 2005, 833-846.

[V] O. Villamayor, *Constructiveness of Hironaka resolution*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., **22**, 1989, 1-32.

[W] J. Włodarczyk, *Simple Hironaka resolution*, Journ. Amer. Math. Soc., **18** (2005), No.4, 779-822.

Bernard Teissier,
Institut mathématique de Jussieu, CNRS

Un cours de théorie analytique des nombres

EMMANUEL KOWALSKI

Société Mathématique de France, 2004. 228 p. ISBN : 2-85629-161-9. 41 €

Ce livre est le fruit de la rédaction d'un cours de DEA donné par l'auteur au second semestre de l'année 2001-2002. L'objet de ce cours est de démontrer l'équirépartition des racines modulo p d'un polynôme irréductible de degré 2.¹ Pour p fixé, il y a évidemment au plus deux racines et il s'agit donc de considérer l'ensemble de ces racines lorsque l'on fait varier p . On considère donc un ensemble $\{(p, \nu) : p \leq x, \nu \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ } P(\nu) = 0\}$.

Quand x tend vers $+\infty$, le cardinal de cet ensemble, noté $\varrho(x)$, est équivalent à $\pi(x)$, le nombre des nombres premiers $\leq x$. Pour mesurer l'équirépartition de ces racines, on regarde les parties fractionnaires $\{\nu/p\}$ et on montre qu'elles se répartissent harmonieusement dans les sous-intervalles de $[0, 1]$. Il s'agit donc d'établir pour tous $0 \leq a < b \leq 1$ l'équivalent asymptotique

$$(*) \text{ card}\{(p, \nu) : p \leq x, \nu \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ } P(\nu) = 0, a \leq \{\nu/p\} \leq b\} \sim (b - a)\varrho(x)$$

lorsque x tend vers l'infini. Ce résultat d'énoncé très simple n'a été établi qu'il y a dix ans par Duke, Friedlander, Iwaniec dans un article à *Annals of Mathematics*. Ce très joli résultat de théorie analytique des nombres est intéressant parce qu'il mêle techniques de crible et utilisation de la théorie des formes automorphes.

Un livre de 228 pages ne peut évidemment pas être exhaustif ni même complet sur un sujet aussi riche. Il reflète les partis pris de l'auteur. La démarche originale de démontrer un résultat d'énoncé fort simple pour illustrer la richesse de la théorie analytique des nombres fournit l'occasion de rappels de résultats classiques concernant l'existence des racines modulo p de $X^2 + 1$, les séries de Dirichlet, l'approximation d'un réel par un rationnel. Cela permet de donner des indications historiques intéressantes. Cela permet également à Emmanuel Kowalski de nous livrer des heuristiques sur des problèmes subtils. Il est certain que ces notes de cours seront très utiles d'une part aux étudiants recherchant une présentation succincte de la théorie analytique des nombres et d'autre part aux nombreux chercheurs français travaillant sur les formes automorphes désireux de découvrir la richesse et la puissance des méthodes de théorie analytique des nombres.

Par le choix même du sujet, ce livre n'a pas vocation à être un livre de référence : le livre de Tenenbaum *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres* qui est le premier volume dans cette collection de la SMF ou les livres d'Iwaniec *Introduction to the spectral Theory of Automorphic Forms* et *Topics in classical modular forms* remplissent depuis une dizaine d'années parfaitement ce rôle. Ici, la présentation est ordonnée de manière moins systématique. Le lecteur met parfois beaucoup de temps à trouver l'énoncé recherché ; de plus, certains énoncés n'ont pas toujours la précision requise (Au lemme 5.4.1, on doit remplacer z par $2z$ pour qu'il soit juste pour $z = \sqrt{x}$). C'est plutôt un livre que l'on lit chronologiquement pour découvrir un domaine.

Détaillons maintenant le contenu des différents chapitres. Les cinq premiers présentent les résultats classiques liés au théorème des nombres premiers en progression arithmétique et à l'utilisation du crible tandis que les trois suivants présentent

¹ Ici, et dans toute la suite, la lettre p est réservée pour désigner un nombre premier.

rapidement les outils nécessaires de la théorie des formes automorphes nécessaires pour démontrer le théorème d'équirépartition et ses applications.

Dans le chapitre introductif, l'auteur présente le théorème qu'il veut démontrer avec les préliminaires nécessaires à la compréhension de l'énoncé. Il décrit ensuite les deux thèmes principaux de ce livre : le crible et les formes modulaires.

Le deuxième chapitre expose des résultats classiques sur les séries de Dirichlet et en particulier les fonctions L de Dirichlet. Ainsi au lieu d'estimer la somme $\sum_{n \leq x} f(n)$ où f est une fonction arithmétique, il est souvent utile de considérer les sommes pondérées $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)g_{\Delta}(n/x)$ où g_{Δ} est une fonction de support inclus dans $[0, \Delta]$ avec $\Delta > 1$ à valeur dans $[0, 1]$. En ajustant la valeur de Δ , on peut retrouver en règle générale une estimation de la fonction sommatoire de f qui peut être moins précise. Ces sommes sont appelées lisses par l'auteur. Lorsque g_{Δ} est une fonction de Schwartz, on a sous des conditions très générales la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)g_{\Delta}(n/x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} D_f(s)\widehat{g}_{\Delta}(s)x^s ds.$$

où $D_f(s)$ est la série de Dirichlet associée à f et $\widehat{g}_{\Delta}$ est la transformée de Mellin de g_{Δ} . L'abscisse c est ici positive et supérieure à l'abscisse de convergence absolue de $D_f(s)$. Ce développement sur les sommes lisses se justifie par leur utilisation dans la preuve du théorème. L'avantage des sommes lisses réside dans leur représentation sous forme d'intégrales complexes absolument convergentes.

Le chapitre 3 est consacré au théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques c'est-à-dire une estimation de

$$\psi(x; a, q) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n)$$

lorsque a et q sont premiers entre eux où $\Lambda(n)$ est la fonction de von Mangoldt qui vaut $\log p$ aux puissances d'un nombre premier p et 0 aux entiers ayant au moins deux facteurs premiers distincts. Le terme principal attendu est de la forme $x/\varphi(q)$ où φ est la fonction d'Euler. Une sommation d'Abel permet de passer facilement d'une estimation de cette somme à celle du cardinal des nombres premiers dans la progression arithmétique $a \pmod{q}$. L'auteur démontre d'abord une estimation de sommes lisses associées pour en déduire l'équivalent sans estimation effective du terme d'erreur ni recherche d'uniformité par rapport à la taille de q . Le lecteur trouvera une estimation uniforme par rapport à q au Corollaire 4.3.4 du chapitre suivant. L'exercice 3.4.5 fournit aussi une démonstration classique de ce type d'estimation. Dans un énoncé caché à la fin de ce chapitre, l'auteur démontre un équivalent de la fonction $\varrho(x)$ apparaissant dans (*).

Dans le chapitre 4, sont exposés les problèmes d'uniformité en q de l'estimation de $\psi(x; a, q)$. On y démontre le théorème de Siegel–Walfisz, qui fournit une estimation uniforme de $\psi(x; a, q)$ lorsque q est plus petit qu'une puissance de $\log x$. Le théorème de Bombieri–Vinogradov, qui peut être vu comme le théorème des nombres premiers en moyenne sur les progressions arithmétiques de module plus petit qu'une borne de la forme $\sqrt{x}/(\log x)^B$, est énoncé. Son utilité est motivée par un exemple : l'estimation asymptotique de la somme $\sum_{p \leq x} \tau(p-1)$ où $\tau(n)$ compte le nombre des diviseurs de l'entier n . À la remarque 4.1.5, l'auteur introduit

la notion de sous-borne de convexité. Le principe de Phragmén-Lindelöf appliqué à une série de Dirichlet admettant une équation fonctionnelle permet d'obtenir une majoration de cette série dans la bande critique. C'est ce que l'on appelle une borne de convexité. Une sous-borne de convexité est une majoration améliorant l'exposant intervenant dans l'écriture de la borne de convexité. Cette notion qui s'affirme comme de plus en plus fondamentale actuellement aurait sans doute mérité une meilleure visibilité. Contrairement à ce que certains reprochent à la théorie analytique des nombres, il ne s'agit pas là d'améliorer des exposants pour le plaisir. Battre les bornes de convexité permet des bonds qualitatifs dans certains problèmes de nature arithmétique : voir par exemple l'équirépartition des points entiers sur la sphère de rayon n dans l'espace de dimension 3 et la preuve donnée par Iwaniec.

Le chapitre 5 est une présentation du crible qui débouche sur le *crible oscillant* de Duke–Friedlander–Iwaniec nécessaire à la preuve de (*). Les méthodes classiques de crible permettent de majorer un cardinal des nombres premiers appartenant à un ensemble fini à partir de la bonne répartition des éléments de cet ensemble dans les progressions arithmétiques de la forme $0 \pmod{d}$. Si on veut étendre cette méthode à des sommes de la forme $\sum_n a_n$, il faut veiller au caractère positif des coefficients a_n . Le crible oscillant s'affranchit de cette restriction en permettant que les a_n soient complexes. Nous avons particulièrement apprécié dans ce chapitre, d'une part, la présentation heuristique du terme principal que l'on doit obtenir grâce au crible et, d'autre part, la démonstration complète d'une version simple d'un crible oscillant. Emmanuel Kowalski a choisi ici de manière très pertinente d'illustrer son propos en détaillant le cas de l'estimation de la somme $\sum_{p \leq x} e(\alpha p)$ où $e(t) = \exp(2\pi i t)$. C'est une très bonne préparation à la démonstration du théorème de Duke–Friedlander–Iwaniec.

Les chapitres 6 et 7 introduisant les notions nécessaires concernant les formes automorphes nécessitent de connaître le sujet. Leur lecture devient alors enrichissante puisque de nombreuses heuristiques sont présentées. Dans certains cas, les preuves nécessitant de longs développements sont omises ; à d'autres endroits, seul un schéma de la démonstration est donné.

Nous décrivons maintenant les étapes de la preuve du théorème de Duke–Friedlander–Iwaniec. Grâce au critère de Weyl, il s'agit de montrer que pour tout $h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ on a

$$\sum_{p \leq x} \varrho_h(p) = o\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

où $\varrho_h(n) = \sum_{P(\nu) \equiv 0 \pmod{n}} e(h\nu/n)$ et P est un polynôme irréductible de degré 2. En fait, on peut considérer des sommes pondérées où le coefficient de pondération est de la forme $g(p/x)$.

Le crible oscillant de Duke–Friedlander–Iwaniec permet de se ramener à majorer des sommes dites linéaires

$$\sum_m \sum_d \alpha_d a_{md}$$

et bilinéaires

$$\sum_m \sum_n \beta_n \gamma_m a_{mn}$$

où $a_n = \varrho_h(n)g(n/x)$ et les $\alpha_d, \beta_n, \gamma_m$ sont des complexes de module ≤ 1 . Or $\varrho_h(n)$ peut s'exprimer comme une somme sur certains quotients de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Apparaissent

donc des séries de Poincaré. Elles sont introduites au corollaire 6.1.12 mais leur nom n'est mentionné qu'au début de l'introduction du chapitre 7. Le lien avec les formes automorphes est donc ainsi fait.

Le chapitre 8 permet de rassembler les estimations obtenues au chapitre 7 pour démontrer le théorème de Duke–Friedlander–Iwaniec.

Ce livre, dont nous conseillons la lecture à tous, enrichira la bibliothèque des arithméticiens. On peut toutefois regretter la difficulté de se retrouver dans certains endroits de ce cours avec une politique de renvoi discutable. L'auteur a mis en ligne une liste d'erreurs et de coquilles que nous invitons à consulter à l'adresse [http ://www.math.u-bordeaux1.fr/~ kowalski/dea/corrections.pdf](http://www.math.u-bordeaux1.fr/~kowalski/dea/corrections.pdf).

*Régis de la Bretèche,
Université Paris Sud–Orsay*

Les mathématiques dans le monde scientifique contemporain - Rapport sur la Science et la Technologie n° 20, novembre 2005

ACADÉMIE DES SCIENCES

Editions TEC & DOC, 2005. 330 p. ISBN : 2-7430-0825-3. 65 €

Présentation générale du rapport

La lecture du rapport, issu d'un groupe de travail mis en place par l'Académie des Sciences et animé par Jean-Christophe Yoccoz est passionnante pour un-e mathématicien-ne car des scientifiques de disciplines variées y décrivent l'importance des mathématiques pour leur développement propre. Il ne s'agit aucunement dans de nombreux cas de « mathématiques de service », mais bien de mathématiques vivantes, à la pointe du progrès des connaissances actuelles, voire de problèmes ouverts venant de la demande d'autres disciplines.

Pour brosser quelques grandes lignes de l'intervention des mathématiques dans le paysage scientifique contemporain tel que les décrit le rapport : les interactions des mathématiques avec la physique et l'astronomie restent un moteur fondamental du progrès de ces disciplines, les relations des mathématiques avec les sciences chimiques, biologiques et économiques se développent et se diversifient, et le développement de cette discipline sœur qu'est l'informatique crée une révolution dans le paysage scientifique. Le rapport ne prétend aucunement à l'exhaustivité : tout ce qui concerne les mathématiques dans les industries et les services n'a pas pu être traité et une autre étude spécifique à cette question est prévue.

Liens entre mathématiques et neurosciences

Il est évidemment impossible de résumer un document très riche de plus de 300 pages en quelques lignes. J'ai choisi d'évoquer rapidement le chapitre coordonné par Alain Berthoz sur les liens entre mathématiques et neurosciences, mais ce choix est arbitraire et tous les chapitres mériteraient un traitement analogue.

Alain Berthoz aborde trois sujets : l'implication de plus en plus profonde des mathématiques dans les neurosciences intégratives et cognitives, la manière dont selon lui les progrès dans ces disciplines sont en train d'enrichir les conceptions

classiques de l'origine, des fondements et de la nature des mathématiques et les avancées nouvelles qu'elles suscitent en mathématiques.

« En physique les mathématiques énoncent des lois simples et servent à construire des expériences testant les conséquences de ces lois....On isole des phénomènes, on leur donne un sens grâce aux mathématiques, en proposant des entités (des invariants) et une organisation globale. » Rien de tel en sciences du vivant, dont font partie les sciences cognitives. « L'individu vivant, de la cellule au mammifère, s'impose par son unité, sa structure et son organisation, la richesse de ses fonctions. Tout modèle mathématique ne saisit que quelques aspects de cette unité; en général il est nettement plus pauvre et moins structuré que le sujet d'étude : tout découpage mathématique, jusqu'à présent, casse l'unité de l'individu et de l'écosystème. » S'agit-il d'un état d'avancement différent de la connaissance ou d'une différence de nature ? Il y a un défi intellectuel à relever : trouver un cadre mathématique adapté aux neurosciences.

Les résultats à l'interface des mathématiques et des sciences du vivant sont déjà nombreux, faisant appel à des mathématiques très variées, et pour beaucoup développées au départ en interface avec la physique : physique statistique, géométrie des systèmes dynamiques, équations différentielles non linéaires, traitement du signal et méthodes numériques. Onze domaines dans lesquels les mathématiques ont joué un rôle clé en neurosciences sont identifiés, des équations de l'influx nerveux à la géométrie de l'architecture fonctionnelle du cortex, de l'évaluation des activités collectives de populations de neurones dans la magnéto-encéphalographie au traitement d'images. C'est à une description de cet état des lieux que se consacre la première partie du chapitre.

La deuxième partie du chapitre s'interroge à partir de ce que nous enseignent les cognoscences en matière de perception des objets, de géométrie et contrôle du geste et de la posture sur le rôle de la constitution de l'espace des actions et du traitement des images dans l'origine de la géométrie. Quels rapports entre construction géométrique conceptuelle et structures sensorimotrices ? Le questionnement est dual : quels outils géométriques peuvent aider à comprendre et organiser les structures cérébrales intégrées ? Quels principes de construction géométrique trouvent leur genèse dans la construction des références spatiales dues à l'intégration cérébrale multisensorielle ?

La troisième partie du chapitre contient quelques éléments de prospective. Pour favoriser les développements utiles, il faut une meilleure formation et de meilleurs échanges entre les deux communautés, les résultats obtenus parmi les uns et les autres étant mal connus, et l'accès à la littérature publiée difficile par incompréhension de la terminologie et de la méthodologie adoptée de part et d'autre. Au delà de la poursuite des travaux pluridisciplinaires qui ont déjà fait leurs preuves, les équipes du futur devraient rassembler des neurobiologistes avec des mathématiciens de nature variés, du géomètre à l'algébriste, du roboticien au statisticien. « Le cerveau sépare les données sensorielles en groupes organisés., il les travaille localement dynamiquement, puis il retravaille sur son propre travail, en élaborant des groupes dynamiques de plus en plus abstraits. Il construit ses commandes d'action dans des repères multiples. D'où un problème de compatibilité des recollements et de cohérence des prévisions. » Une association entre la topologie algébrique et la théorie de l'information et les probabilités est donc à l'ordre du jour.

Le chapitre se termine par une page stimulante intellectuellement, qui d'ailleurs –comme le signale Alain Connes dans sa présentation à l'Académie, donnée en fin de volume– ne fait pas l'unanimité des académiciens et qui traite de l'enseignement et de l'épistémologie des mathématiques. Enseignement de type grammatical, calcul dénué de signification, reçu comme une punition par tout élève, tel seraient les conséquences de l'approche formaliste de Frege et Hilbert, qui ne rend pas compte de l'enracinement des mathématiques dans notre expérience sensorielle. Raconter que « la pensée est un calcul », c'est vouloir modéliser le fonctionnement cognitif sur celui d'un ordinateur. « Or la mémoire humaine (et animale) est tout sauf une base de donnée numérique : l'oubli intentionnel, conscient et inconscient, par exemple, en est au cœur, car il contribue à constituer les invariants de l'action mémorisée, et, par ce biais, à la catégorisation conceptuelle du monde, voire à son organisation mathématique »

Développer les interfaces entre les mathématiques et les cognisciences ce serait donc aussi se donner les moyens de donner une autre approche des mathématiques aux jeunes générations, qui passerait également par le corps. « Si on arrive à communiquer comment la construction des concepts et des structures mathématiques s'enracine dans notre histoire évolutive et notre vécu, on aura « du sens » à communiquer. Et l'on pourra même contribuer à réinsérer l'analyse fondationnelle des mathématiques dans les débats internes aux autres sciences comme la physique et la biologie, débat duquel le logicisme et le formalisme l'ont écarté pendant près d'un siècle. » Les mathématiques : langage certes mais aussi geste, mouvement.

Les recommandations du rapport

Il me semble important d'inclure, en conclusion, l'intégralité des recommandations du rapport.

« Les recommandations qui suivent tendent à deux catégories d'objectifs :

- créer de nouveaux liens et renforcer les liens existants entre la communauté des chercheurs en sciences mathématiques et les autres communautés scientifiques ;*
- transmettre dans la formation générale et scientifique une vision intégrée du paysage scientifique contemporain, et en particulier des mathématiques comme science bien vivante se nourrissant de problématiques très variées.*

L'organisation de la recherche, comme celle de l'enseignement supérieur dans sa composante de formation à et par la recherche, est concernée par le premier point. Quant au second, nous ne considérerons ici que l'enseignement supérieur, mais ces recommandations, à travers la formation initiale et continue des enseignants, pourraient bénéficier à l'ensemble du système éducatif.

Une très grande partie de la recherche dans les sciences mathématiques est effectuée dans les établissements d'enseignement supérieur par des universitaires, avec le soutien financier des organismes de recherches, CNRS en tête. La perméabilité entre universités et organismes de recherche est bien meilleure que dans d'autres disciplines scientifiques, pour des raisons pratiques (pas de gros équipements à gérer) mais aussi historiques. Une grande majorité de la communauté mathématique souhaiterait d'ailleurs renforcer encore les possibilités d'alterner des périodes de recherche pure avec d'autres où la recherche se nourrit de l'enseignement.

(1) *Il est indispensable que les organismes de recherche, mais aussi les établissements d'enseignement supérieur, développent une politique scientifique pluriannuelle de ces interfaces entre mathématiques et autres disciplines scientifiques et assurent les moyens humains et financiers de cette politique. Une telle politique est tout le contraire d'un saupoudrage uniforme et aléatoire, devant au contraire s'appuyer sur les forces spécifiques de l'environnement scientifique local. Si, dans certains domaines (physique, chimie, économie, informatique) il s'agit de maintenir et renforcer des collaborations déjà très actives, dans d'autres un effort particulier doit être fourni; c'est ainsi que le programme américain NBIC (Nanotechnology, Biotechnology, Information technology, Cognitive science), dont de nombreux projets se nourrissent de modélisation mathématique, n'a pas d'équivalent en France ou en Europe.*

(2) *Pour favoriser le recrutement d'enseignants-chercheurs ou de chercheurs dans ces domaines d'interface, une politique d'affichage des postes est nécessaire. On prendra garde cependant que la dénomination des postes doit rester suffisamment ouverte pour qu'une compétition large et garante d'excellence puisse s'exercer. A titre d'exemple, un profil tel que "biologie mathématique" semble adéquat.*

(3) *Pour recruter ces chercheurs ou enseignants-chercheurs, et pour gérer ensuite leur carrière, tout au moins pour les changements de corps, des commissions de spécialistes mixtes, constituées à parité de mathématiciens et de scientifiques de la (les) discipline(s) concernée(s) par l'interface doivent être mises en place.*

(4) *Nous distinguons dans ce qui suit les formations doctorales destinées à un public restreint de futurs chercheurs des cycles Licence et Mastère destinés à un plus large public. Nous distinguons aussi les filières à dominante mathématique des autres filières scientifiques.*

(a) *Cycles L, M scientifiques autres que mathématiques*

– *Adapter aux publics concernés le contenu et la présentation des mathématiques enseignées aux étudiants scientifiques. Ces cours doivent être effectués par des enseignants-chercheurs mathématiciens, mais ceux-ci doivent fournir un effort considérable pour rendre abordables et attractifs les sujets traités. Transposer la démarche pyramidale destinée aux étudiants mathématiciens ne saurait être la solution.*

– *Offrir dans le domaine des sciences de la vie une filière optionnelle caractérisée par un contenu renforcé en mathématiques (ce qui existe déjà pour les sciences de la nature ou l'économie), pour entre autres buts créer les conditions d'un dialogue ultérieur entre les communautés scientifiques.*

(b) *Cycles L, M à dominante mathématique*

– *Maintenir, voire renforcer l'ouverture des cycles L vers les autres disciplines scientifiques.*

– *Prolonger cette ouverture dans le cycle M en imposant un contenu pluridisciplinaire à ces diplômes, en particulier ceux s'adressant aux futurs enseignants de mathématiques dans les écoles, collèges et lycées. Il est absolument nécessaire de favoriser le dialogue et les actions concertées entre enseignants scientifiques dans les collèges et lycées.*

– *Étudier la possibilité d'une composante pluridisciplinaire dans les concours de recrutement des enseignants.*

(c) *Formation doctorale.*

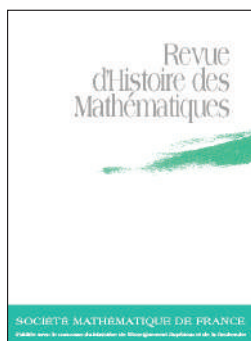
– Il existe, en France et dans le monde, une communauté extrêmement active de physique mathématique qui est le milieu continu où s'effectue l'interface si fécond entre les deux disciplines. Tout doit être fait pour favoriser l'émergence d'une communauté de même nature réalisant l'interface entre mathématiques et sciences de la vie, interface qui implique aussi informatique et physique. Les écoles doctorales en sciences de la vie et en mathématiques doivent s'impliquer activement dans ce processus, prolongeant l'ouverture des cycles précédents. À nouveau, l'adaptation du discours aux publics concernés est essentielle. Il s'agit avant tout de présenter des idées plutôt que d'assimiler des techniques.

– Renforcer l'ouverture des écoles d'ingénieurs à la recherche mathématique.

– Favoriser les doubles cursus en permettant par exemple à un étudiant titulaire d'un doctorat en mathématiques l'accès direct à un DEA de biologie.

Ces changements nécessaires dans les modalités et les contenus de l'enseignement supérieur scientifique ne doivent pas représenter un alourdissement des horaires. Si l'on crée ou renforce dans toutes ou certaines filières les enseignements en physique, biologie ou économie, il faut alléger ceux en mathématiques ; inversement une filière en sciences de la vie à contenu renforcé en mathématiques aurait un programme allégé en biologie. »

Marie-Françoise Roy,
Université Rennes I



Revue d'Histoire des Mathématiques

Tome 11 - Fascicule 2

Sommaire

B. Maurey, J.-P. Tacchi

La genèse du théorème de recouvrement de Borel

C. Brezinski

La méthode de Cholesky

S. Lamassé

Une utilisation précoce de l'algèbre en France au XV^e siècle (Note sur le manuscrit 1339 de la Bibliothèque Nationale de France)

M.-H. Labarthe

Les règles de compagnie, dans les premières arithmétiques imprimées des Espagnes : de la règle marchande à l'outil mathématique

prix public* : 36 € - prix membre* : 25 €

* frais de port non compris



Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F - 75231 PARIS CEDEX 05