

SOMMAIRE DU N° 108

SMF

Mot de la Présidente et vie de la société	3
---	---

MATHÉMATIQUES

Du <i>Courant & Hilbert</i> aux simulations numériques, <i>P.-L. Lions</i>	5
--	---

MATHÉMATIQUES

Hommage à Serge Lang (1920-2005)

La géométrie diophantienne, selon Serge Lang, <i>M. Hindry</i>	17
Serge Lang, <i>D. E. Rohrlich</i>	33
Les contributions de Serge Lang à la théorie des nombres transcendants, <i>M. Waldschmidt</i>	35

ENSEIGNEMENT

Autour du colloque PISA

Un aperçu du système éducatif finlandais, <i>O. Pekonen</i>	49
Un point de vue sur PISA, <i>A. Bodin</i>	54
What are the reasons behind the success of Finland in PISA ?, <i>G. Malaty</i>	59

HISTOIRE

Mathématiques au primaire de la Troisième République aux années 1960, <i>R. d'Enfert</i>	67
---	----

INFORMATIONS

À propos de l'édition mathématique

Publier des revues mathématiques, <i>R. Kirby</i>	83
L'édition sans drame, <i>T. Bouche, Y. Laurent & C. Sabbah</i>	86
Les publications de la Société Mathématique de France, <i>J.-P. Allouche</i>	89

INFORMATIONS

Industrial Problem Solving Workshop :

aperçu d'une expérience canadienne, <i>B. Monthubert</i>	93
Sessions États de la recherche, <i>S. Cantat, Z. Djadli</i>	98

TRIBUNE LIBRE

La constitution de l'écriture symbolique mathématique, <i>M. Serfati</i>	101
Mathématiques et culture : le cas de l'agrégation , <i>J. Lafontaine</i>	119
Qu'est-il possible de digérer en douze semaines ? <i>E. Lesigne</i>	120

LIVRES	123
--------------	-----

Éditorial

Vous recevez avec ce fascicule de la Gazette un numéro spécial consacré à l'histoire du CIRM pour les 25 ans de son ouverture. Michel Zisman a accompli là un travail d'historien remarquable et passionnant. Le CIRM n'aurait en effet pas vu le jour sans un travail collectif déterminé que cet ouvrage décrit bien.

La *Gazette des Mathématiciens* a maintenant une version électronique et sont déjà accessibles sur le site de la SMF les fascicules d'octobre 2005 et de janvier 2006. Les numéros antérieurs seront progressivement installés, au gré des disponibilités du secrétariat de la SMF. Cette mise en ligne, qui permettra d'accroître la visibilité de la SMF et de soutenir sa position de porte parole de la communauté mathématique française, est aussi un pari.

— Colette Anné

Mot de la Présidente

La liste des conférenciers de Madrid met une nouvelle fois en évidence que l'école mathématique française est bien la deuxième du monde, si on se fie à l'indicateur du nombre de conférenciers invités. L'écart se creuse toutefois avec les Etats-Unis dont la domination s'affirme. Les déclarations de Catherine Brechignac en début d'année avaient déjà donné un coup de projecteur bien venu sur l'excellence des mathématiques françaises, même si l'annonce de 4% d'augmentation des crédits de base du CNRS représentait une somme plutôt minime.

Ces bonnes nouvelles du point de vue de la recherche, vont de pair avec une situation très préoccupante du côté de l'enseignement. C'est ainsi que lors de la réunion des responsables de masters de la vague A, tenue à Grenoble le 17 mars à l'initiative de la SMF et de la SMAI, il est apparu que la baisse des effectifs en masters de mathématiques est inquiétante, atteignant souvent 20% à 50% en cinq ans. Le nombre de diplômés a peut-être tendance à baisser moins, mais des éléments qualitatifs relevés par les collègues laissent penser que la baisse des acquis et des compétences accompagne la baisse des effectifs.

Dans ces conditions la publication des postes de 2006 fait l'effet d'une bonne surprise puisque 124 postes de maîtres de conférences et 59 postes de professeurs sont mis au concours, ce qui semble être légèrement supérieur au nombre de maître de conférences et professeurs de mathématiques partis à la retraite cette année. Ce nombre assez important de postes est dû à la superposition de deux phénomènes antagonistes : redéploiements de nombreux postes de mathématiques vers les autres disciplines, à cause des baisses d'effectifs étudiants, et création de postes étiquetés recherche. Autant dire que si l'effort actuel de création de postes recherche ne se poursuit pas, et si la baisse des effectifs étudiants continue, la situation risque de s'aggraver très sérieusement.

La réalisation en 2006 de la brochure « Les Métiers des Mathématiques » fruit d'un partenariat entre la SMF, la SMAI, la SFDS, femmes et mathématique et l'ONISEP, permettra de présenter la variété des situations professionnelles où sont employés les diplômés de mathématiques. Elle sera un des outils à la disposition de la communauté mathématique pour tenter de redresser la situation.

Le 20 mars 2006
Marie-Françoise Roy

Vie de la société

Adhésions 2006

Les docteurs de mathématiques qui ont passé leur thèse en 2005 peuvent bénéficier d'une année d'adhésion gratuite à la SMF. Faites circuler cette information !

<http://smf.emath.fr/Adhesions/JeunesDocteurs/>

L'adhésion au tarif jeunes est possible cette année jusqu'à 32 ans,

<http://smf.emath.fr/Adhesions/AdhesionIndividuelle/>

Colloques et rencontres

De nombreux rencontres et colloques liés à la SMF sont prévus dans les mois qui viennent.

Le cycle des conférences BNF-SMF se poursuit, et, dans son prolongement, plusieurs événements culturels sont prévus autour du cas de Sophie K. Le tiré à part joint à cette Gazette en est un exemple.

Nous organisons en 2006 deux sessions « États de la Recherche ». La première « Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux », organisée par Jean-Yves Briend, Serge Cantat et Charles Favre aura lieu à Rennes, du 22 au 24 mai. La seconde « Géométrie conforme et opérateurs géométriques » organisée par Zidine Djadli, Colin Guillarmou et Marc Herzlich, se tiendra à l'Université de Cergy-Pontoise, du 12 au 14 juin 2006.

Une nouvelle initiative est la journée « Autour des Prix de l'Académie des Sciences en mathématiques » du 12 mai 2006, à l'Institut Henri Poincaré, Paris, organisée conjointement par la SMF, l'Académie des Sciences et l'IHP. Le but est de mieux faire connaître les travaux distinguée par l'Académie, en donnant aux lauréats la possibilité d'exposer leur travail dans la maison des mathématiciens.

La série des journées de dialogue entre mathématiciens et industriels se poursuit, avec une rencontre en province. Le CNRS, la SMAI et la SMF sont à l'initiative de la journée « Math-Industrie Aéronautique et Espace » organisée sous l'égide de l'Institut de Mathématiques de Toulouse, et soutenue la ROADEF ¹, qui aura lieu le 9 juin à Toulouse.

Un weekend mathématique de l'EMS aura lieu à Nantes du 16 au 18 juin, organisé par les collègues nantais et angevins avec le soutien de la SMF et de la SMAI. Une table-ronde consacrée à l'Europe mathématique sera organisée à cette occasion.

La journée annuelle de la SMF consacrée au thème « Mathématique et vision » se tiendra de nouveau à Paris, le 24 juin, à l'IHP, et le prix d'Alembert y sera décerné.

Enfin un congrès franco-italien, commun aux quatre sociétés savantes SIMAI, SMAI, SMF, UMI, « Mathematics and its applications » aura lieu à Turin du 3 au 7 juillet 2006.

¹ Société française de recherche opérationnelle et d'aide à la décision

MATHÉMATIQUES

Du *Courant & Hilbert* aux simulations numériques

Pierre-Louis Lions¹

Cette conférence qui a eu lieu le 18 mai 2005 fait partie du cycle « Un texte, un mathématicien » organisé par la BnF et la SMF, les notes en ont été prises par Gérard Tronel.

Dans le cadre de ce cycle, la prochaine conférence « Hermann Minkowski, grand prix de l'Académie des sciences à 18 ans » sera donnée par Eva Bayer-Fluckiger le 10 mai 2006.

Monsieur Jean-Noël Jeannenay, Président de la Bibliothèque nationale de France, dans son allocution de bienvenue, rappelle que la bibliothèque possède un fonds important, mais mal connu de documentation scientifique. Il évoque les propositions faites pour créer, à l'échelon européen, un organisme chargé de la numérisation des ressources réparties dans les grandes bibliothèques. Il évoque la collaboration entre la bibliothèque et la cellule Mathdoc et le projet NUMDAM.

Martin Andler présente la conférence en situant dans le temps la parution du livre « Méthodes mathématiques de la physique », publié pour la première fois en allemand, par l'éditeur Springer, sous le titre « Methoden des mathematischen Physik ». Après une rapide évocation de la personnalité et de la carrière de Hilbert, l'un des plus grands mathématiciens de la première partie du XX^e siècle, il parle de la carrière de Courant, élève de Hilbert, fondateur d'un institut de mathématiques à Göttingen. Obligé de quitter l'Allemagne nazi, Courant créera, à New York, le très célèbre « Courant Institute of Mathematics ». Martin Andler rappelle que le conférencier Pierre-Louis Lions est professeur au Collège de France. Il est ancien élève de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm ; il a commencé sa carrière de chercheur comme chargé de recherches au CNRS, puis il a été nommé professeur à l'université Paris-Dauphine. Il est lauréat de la médaille Fields et il est auteur de plus de trois cents publications. Pierre-Louis Lions prend la parole.

Cette conférence n'est pas dédiée à un grand mathématicien, mais plutôt à un livre dont les auteurs sont incontestablement de grandes figures des mathématiques du XX^e siècle, Courant et Hilbert. Une anecdote personnelle justifie le choix du titre de la conférence. À l'École normale supérieure, au cours de l'année de DEA, je parcours quelques livres considérés comme des « bibles » de mathématiques. Au nombre de ces livres fondamentaux pour un analyste, figure le *Courant & Hilbert*, énorme pavé en deux volumes. Je le feuillette et mon attention est attirée par un

¹ Professeur au Collège de France

sujet qui contient des idées qui me semblent intéressantes, c'est à partir de ces idées et de réflexions personnelles sur le sujet que je suis conduit à rédiger un gros paquet de notes. Il est difficile de vous expliquer ces idées mais je peux dire qu'elles me permettent de mettre en œuvre des connaissances acquises au cours d'une double formation en analyse mathématique et en informatique. À partir de ces notes j'expose mes idées aux professeurs dont je suivais les enseignements du DEA ; l'accueil est plutôt mitigé. Mais, je ne me décourage pas et pour ne pas laisser perdre le fruit de mon travail je rédige un résumé qui sera mon premier article de recherche : une Note aux comptes rendus de l'Académie des sciences. Puis j'oublie ces notes et même je les égare, mais quelques années plus tard, alors que je suis déjà un chercheur à temps plein, un des professeurs que j'avais contacté me demande mes notes que j'ai égarées. Je retrouve de mémoire les grandes idées de mon travail. Il s'avère que certaines de ces idées ont permis de développer une branche des mathématiques qui est connue et utilisée sous le nom de : « méthode de décomposition de domaines ». Comme aperçu de cette méthode on peut dire que son principe consiste à décomposer un grand domaine en petits morceaux, à faire l'analyse de chacun des morceaux, puis à faire tourner simultanément plusieurs ordinateurs et à faire la synthèse des résultats numériques obtenus. En fait, l'histoire des notes perdues n'est pas terminée puisque je les ai finalement retrouvées chez un de mes collègues lors d'un voyage à l'université de Pise, en Italie. Ce collègue, Alfio Quarteroni, s'est illustré récemment par une participation active aux simulations numériques qui ont permis au voilier le « Défi suisse » de gagner l'America's Cup.

Pourquoi vous avoir raconté cette anecdote ? Pour vous donner une idée de mes premiers contacts avec la recherche et tirer quelques enseignements de cette première expérience :

Premièrement, des livres ; en général les chercheurs aiment bien les livres.

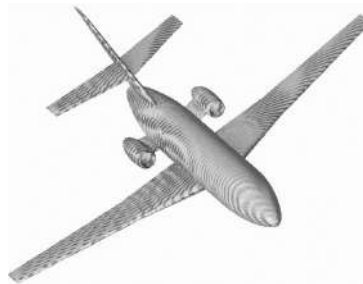
Deuxièmement, de la curiosité, de l'intuition, des rencontres. La recherche est rarement une aventure individuelle.

Troisièmement, un peu de chance.

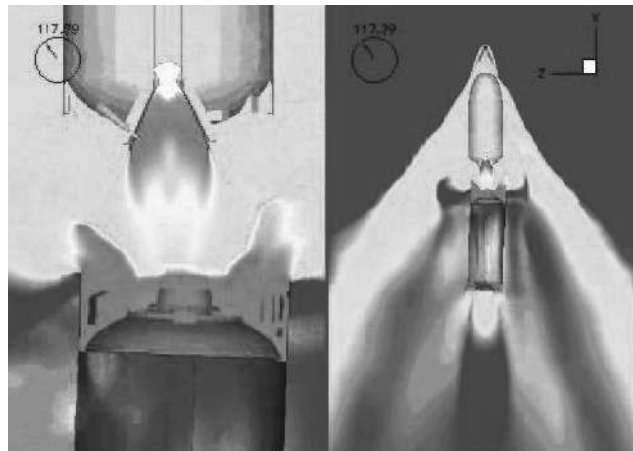
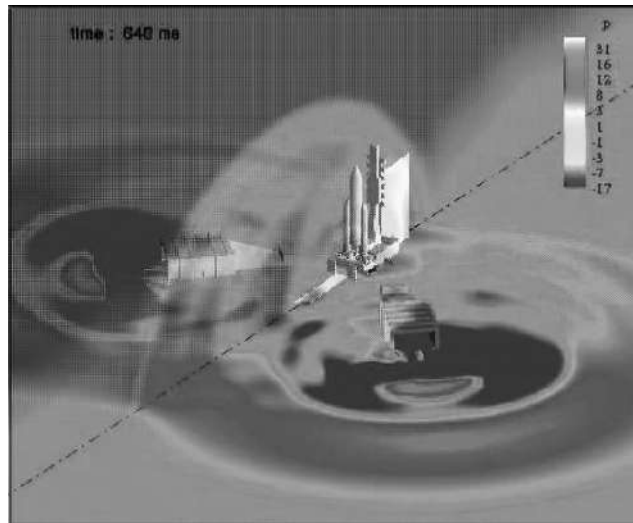
Cette anecdote peut aussi donner une idée du quotidien de la vie d'un chercheur en mathématiques, idée que l'on retrouve dans d'autres disciplines, mais surtout en mathématiques on rencontre des a priori qui ont la vie dure !

Des exemples de problèmes et des simulations numériques, en voici quelques uns tirés de différents domaines de la technologie :

Tout d'abord voici une analyse des effets d'ondes électromagnétiques sur un avion Falcon. Sur cette représentation on fait figurer les résultats de simulations numériques.



Autre exemple : une étude de deux phases particulièrement importantes du vol d'une navette ou d'une fusée, ici la fusée Ariane 5. Au moment du décollage, lorsque la fusée quitte le pas de tir, le bruit est assourdissant, les ondes acoustiques produites peuvent avoir des effets destructeurs qui risquent de compromettre le fonctionnement de la fusée et détériorer sa charge utile, en général des satellites. Une autre étape critique du vol est la séparation du premier étage : des accidents graves peuvent se produire à ce moment particulièrement important. On se souvient des catastrophes survenues au cours du lancement de la navette américaine. Dans le même ordre d'idée la rentrée dans l'atmosphère d'une capsule ou d'une navette pose des problèmes difficiles qui doivent faire l'objet d'analyses poussées pour éviter que se reproduisent les accidents qui ont aussi provoqués des victimes.



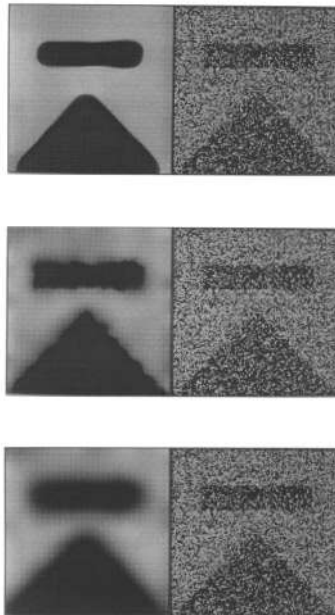
Pour un système aussi complexe, il est en général impossible de faire des essais en vraie grandeur, de plus ces essais seraient très coûteux. Les problèmes rencontrés par la mise au point des lanceurs ne peuvent être abordés et partiellement résolus

qu'à partir de modélisations et de simulations numériques. Il est facile d'imaginer les difficultés : au cours des phases critiques les mesures sont impossibles, par exemple, au cours de la rentrée dans l'atmosphère, pendant la phase de « black-out » les communications sont interrompues et il est impossible de faire des mesures et de récolter des informations sur ce qui se produit réellement.

Un autre exemple est extrait de la fabrication de l'aluminium. Comme vous le savez les procédés de fabrication de l'aluminium reposent sur l'électrolyse d'un bain liquide dans une cuve. Cette cuve est un système infernal : dans un bain liquide à 2000° circulent des courants de 500.000 ampères. Les mesures de grandeurs intéressantes, vitesses des fluides du bain, températures, champs magnétiques internes sont techniquement impossibles. Ce n'est pratiquement qu'à partir de quelques données techniques sur la cuve et de quelques mesures faites à l'extérieur qu'il est possible de construire des modèles qui vont servir de base à des simulations numériques. Ces simulations numériques sont destinées à une meilleure compréhension des phénomènes qui se produisent au cours de la fabrication de l'aluminium et à une amélioration du fonctionnement de la cuve à électrolyse.

Pour changer de registre, arrêtons-nous maintenant au traitement des images. Il s'agit là d'un sujet très important dans notre monde d'images réelles ou virtuelles ; ce sujet touche à la photographie numérique, au cinéma pour les effets spéciaux, à l'imagerie médicale et à une quantité de problèmes liés à la communication et à la transmission de l'information.

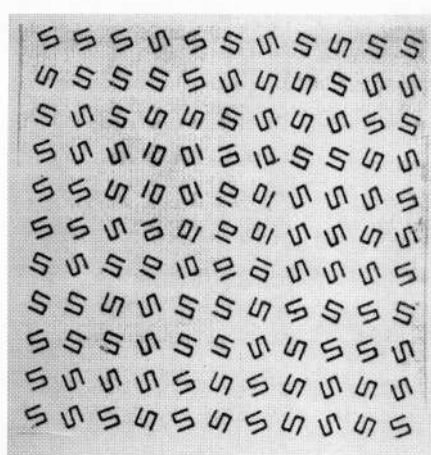
Pour commencer, voici un problème qui peut paraître simple mais dont la solution cache une forte utilisation de mathématiques et de simulations numériques. Il s'agit de la mise au point d'un procédé de retraitement de photos prises avec des appareils de piètre qualité, des appareils jetables.



Une start-up créée par un de mes anciens élèves a résolu ce problème de l'amélioration de la qualité des images par un procédé automatisé, rapide et à faible coût. L'amélioration est telle que les laboratoires spécialisés de la Fnac ont reconnu que les photos retraitées présentaient des qualités comparables à celles de clichés pris, à partir de mêmes sujets, par des professionnels de la photo équipés d'appareils hauts de gamme et très chers ! Cette start-up s'attaque maintenant aux problèmes des téléphones portables devenus des objets à usages multiples et grands producteurs et consommateurs d'images.

Un autre exemple intéressant traite de l'identification du mouvement d'un objet difficilement identifiable dans une série d'images bruitées : il s'agit de fabriquer des espèces de filtres qui permettent d'extraire des informations pertinentes au milieu d'images et des bruits parasites. Les différents niveaux de traitement de ce problème exigent des mathématiques de plus en plus sophistiquées, en particulier beaucoup de géométrie !

Un dernier exemple est emprunté à une expérience sur la vision. On reconnaît sur ce transparent des 10 et des 5 ; comme vous pouvez le remarquer dans cette représentation on peut passer aisément des 10 aux 5, l'œil reconnaît instantanément ces représentations, mais il ne distingue pas immédiatement que la répartition des 10 et des 5 n'est pas faite au hasard. Le test de vision n'est pas de distinguer les 10 des 5, mais de remarquer l'organisation de ces figures et de noter que l'on a une série de 10 disposés en carré au milieu d'une image remplie de 5.



L'analyse des résultats de ce test visuel doit beaucoup aux mathématiques. On pourrait même dire que, lorsqu'on connaît le résultat, il est très simple, mais si la répartition des 10 avait eu une forme plus compliquée, une forme de lunule par exemple, la reconnaissance aurait été beaucoup plus difficile.

Ces exemples ont été choisis pour nous amener à réfléchir sur l'utilisation des mathématiques. Dans chacun des exemples donnés les résultats présentés sont obtenus par des simulations numériques faites à partir de modèles qui sont sensés donner une représentation de la réalité que l'on veut étudier. Dans cette démarche on se trouve immédiatement confronté à la construction de modèles et à l'usage que l'on peut en faire. Déjà se profile les étapes de cette démarche : analyser de

manière la plus précise possible les phénomènes que l'on veut étudier, construire des modèles, puis se lancer dans une analyse mathématique qui va nous conduire à des équations, en général des équations aux dérivées partielles non linéaires, et c'est à partir de ces équations que l'on pourra faire des simulations numériques. Dans cette partie sont introduits plusieurs termes qu'il faut préciser afin de mettre en évidence la place des mathématiques.

Essayons tout d'abord de préciser la notion de modèle. Il n'existe malheureusement pas de bonnes définitions, on peut essayer seulement de mettre en évidence les qualités que devraient présenter les modèles. C'est peut-être Italo Calvino, dans un texte intitulé « Le modèle des modèles », qui donne les meilleures idées :

« Construire un modèle le plus parfait, géométrique, le plus logique possible ; vérifier si le modèle s'adapte bien au cas pratique que l'on peut observer dans l'expérience ; apporter les corrections nécessaires pour que le modèle et la réalité coïncident ». Pour Italo Calvino la construction d'un modèle doit être un miracle d'équilibre entre des principes insaisissables et l'expérience laissée dans l'ombre. Mais, par ailleurs, Italo Calvino nous met en garde : un modèle ne doit pas être une forteresse inviolable, qui cacherait la réalité extérieure. Il faut toujours avoir à l'esprit qu'un modèle est une espèce de mensonge, une image déformée de la réalité que l'on veut représenter ; notre vigilance et notre esprit critique doivent constamment rester en éveil et nous ne devons pas hésiter à remettre nos modèles en question.

Sans entrer dans les détails, revenons aux exemples. Les simulations montrées reposent le plus souvent sur des modèles qui sont sensés traduire la réalité sous forme d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Essayons maintenant de préciser les mots qui ont un contenu mathématique. Vous connaissez pour une fonction d'une variable la définition de la dérivée ; ici nous avons des fonctions de plusieurs variables et à chacune de ces variables on peut associer une dérivée que l'on appellera dérivée partielle. A partir de là on va écrire des équations traduisant des lois entre des grandeurs physiques, des principes de mécanique, des lois de la chimie, des lois de la finance et de plus en plus des lois de la biologie. Les équations étudiées sont tirées de pratiquement tous les champs du savoir.

Pour vous rassurer il faut tout de même dire que les notions mathématiques précédentes, notions qui ne sont pas toujours faciles à assimiler, ont mis très longtemps avant d'émerger. L'histoire des dérivées et du calcul différentiel commence par une bataille sordide entre Leibniz et Newton. Cette création du calcul différentiel se perpétue et se rigidifie au cours du XIX^e siècle. L'étude des équations aux dérivées partielles, après avoir suscité bien des controverses, se poursuit néanmoins. Rappelons que l'équation des ondes, étudiée par d'Alembert, continue à poser des problèmes et on propose de nouveaux modèles pour l'étude de la propagation des ondes sonores. De même c'est Fourier, éminent personnage de la science et de bien d'autres activités, notamment administratives, qui est à l'origine de l'équation de la propagation de la chaleur. Fourier propose une méthode de résolution de cette équation en utilisant des séries de fonctions simples, des sinus et des cosinus. Les séries de Fourier ont, elles aussi, déclenché bien des controverses et elles recèlent encore des mystères loin d'être élucidés. Aujourd'hui l'étude des séries de Fourier a donné naissance à deux branches des mathématiques ; l'analyse harmonique et les méthodes spectrales particulièrement utiles en calcul scientifique et en simulations numériques.

L'histoire des mathématiques n'est pas exempte d'erreurs ; Riemann, surtout connu pour ses contributions fondamentales en mathématiques pures s'est également intéressé aux applications des mathématiques, il a commis au moins une erreur dans l'étude des ondes de choc ; cette erreur a été rectifiée quelques années plus tard par Rankine et Hugoniot. Tout au long de l'histoire, les erreurs, les controverses sont génératrices de progrès : ainsi les espaces de Sobolev, les contributions de Leray, la théorie des distributions de Laurent Schwartz vont bien au-delà des notions classiques qui restent fondamentales, mais tous ces outils mathématiques nouveaux prolongent naturellement les outils de l'analyse classique.

Pour illustrer ce qui précède, comme exemple voici un système d'équations, les équations de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) + u(t, x)\nabla u(t, x) - \Delta u(t, x) = -\text{grad}p(t, x),$$

$$\text{div}u(t, x) = 0,$$

$$u(0, x) = u_0(x).$$

Il n'est pas question de commenter ces équations, elles modélisent l'écoulement de certains fluides. Toutefois l'histoire de ce modèle est intéressante. En effet, à l'origine on trouve un autre génie des mathématiques, Euler. Un roi, sans doute un roi de Prusse, commande une fontaine à Euler. Que fait celui-ci ? Il construit un modèle et il écrit dans un article sur le sujet que du point de vue de la physique et de la mécanique, le problème est réglé, mais qu'il subsiste une légère difficulté analytique. Il faut souligner que Euler s'est trompé, car son modèle ne permettait pas de représenter et d'expliquer le vol des oiseaux ! C'est d'Alembert qui explique ce paradoxe dans un article primé par l'Académie des sciences de Dijon. Ce n'est que plus tard que Navier et Stokes établiront un modèle plus conforme à la réalité physique, puisqu'il conduit à une explication plausible du vol des oiseaux. Mais la « légère difficulté analytique » décelée par Euler résiste encore aujourd'hui et figure dans une liste de sept problèmes difficiles proposés à la sagacité des mathématiciens du XXI^e siècle. En fait l'histoire du modèle de Navier-Stokes ne s'arrête pas là puisque Boltzmann, à partir des idées fondamentales de Maxwell, donnera un modèle pour les écoulements des gaz raréfiés.

Ainsi l'histoire ne s'est pas achevée au XIX^e siècle, elle est actuelle, elle n'est jamais finie, sinon les modèles obtenus constitueraient des forteresses inviolables qui ne serviraient plus à rien. Pour revenir au sujet de cette conférence, les simulations numériques, on peut souligner qu'elles interviennent partout, en mécanique des fluides, notamment en aérodynamique. Aujourd'hui on ne dessine plus un avion, une automobile sans faire de simulations numériques. La météorologie, c'est aussi de la mécanique des fluides, de même que les écoulements sanguins, les flots de polymères, mais la mécanique des fluides se retrouve aussi dans des domaines aussi inattendus que le trafic routier et les effets spéciaux au cinéma ! Vous avez sans doute vu le film « Titanic » ; la mer que vous avez vu est une mer numérique, virtuelle, obtenue à partir d'effets spéciaux utilisant des modèles plus simples que celui de Navier-Stokes, mais pour « Titanic 2 » nous auront sans doute des effets spéciaux obtenus à partir des équations de Navier-Stokes.

Comment peut-on justifier la présence des dérivées partielles dans les modèles ? Dans les exemples présentés, on s'aperçoit que les équations aux dérivées partielles apparaissent chaque fois que l'on modélise des phénomènes dans lesquels interviennent de nombreux agents. Vous rencontrez cette situation en physique, en chimie, en traitements des images. Par exemple en chimie, dans une mole, le nombre de molécules est considérable ; en traitement de l'image, le nombre de pixels est très grand et d'autant plus grand que l'image est précise et de qualité. En finance si le nombre d'agents qui interagissent est très grand, pour traduire le comportement de cet ensemble, les modèles utilisant des dérivées partielles sont pertinents.

La complexité de ces phénomènes conduit à des modèles non linéaires. Pour expliquer très grossièrement ce qu'est la non linéarité on peut donner l'exemple de la fabrication d'un gâteau. Pour cuire un gâteau d'un kilo, il faut un certain temps, mais si avec la même recette vous voulez faire cuire un gâteau de deux kilos, en doublant le temps de cuisson vous aurez de mauvaises surprises. Un exemple historique moins prosaïque est la vision de la Terre qu'avaient nos ancêtres : il voyait la Terre plate comme une galette et, localement, cette conception de leur environnement était suffisante et correspondait à leur intuition, mais évidemment elle n'a plus de sens à l'échelle cosmique. La notion d'échelle est également fondamentale dans la modélisation des phénomènes physiques. Etudier l'air à l'échelle qui nous occupe, ici centimétrique, voire métrique, n'a rien à voir avec une étude à l'échelle de l'angström où l'on va commencer à voir les atomes, sans parler de l'échelle subatomique où on « verra » les quarks. On peut dire que la modélisation est intrinsèquement liée à la notion de loupe utilisée pour voir et représenter les phénomènes. Pour revenir sur un des exemples précédents, le vol d'un engin spatial, les différentes étapes du vol ne sont pas modélisées de la même façon suivant les différentes phases du vol : au départ nous sommes dans les conditions atmosphériques normales, mais lorsque les vitesses atteignent des valeurs élevées et que les altitudes dépassent plusieurs dizaines de kilomètres c'est-à-dire lorsqu'on atteint les couches raréfiées de l'atmosphère, il faut changer de modèles, car on change d'échelles.

Dans la première partie vous n'avez peut-être pas bien vu le rôle joué par les mathématiques, aussi à partir d'un cas très simple, on peut se rendre compte des problèmes posés par les simulations numériques. Voici un exemple, sans justification de son origine physique :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} u(t, x),$$

$$u(0, x) = u_0(x).$$

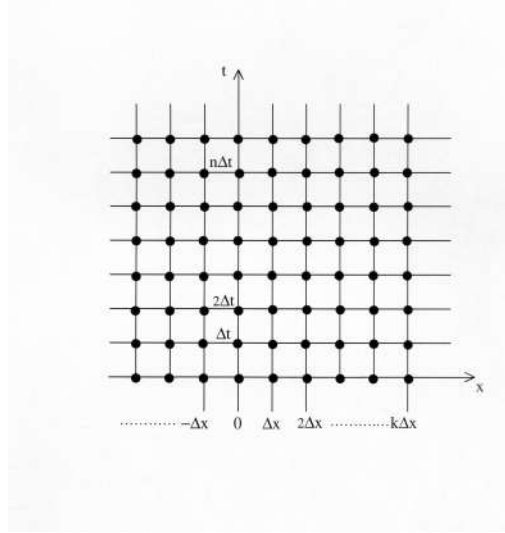
On connaît la solution exacte de ce problème :

$$u(t, x) = u_0(x + t).$$

L'interprétation de cette solution est simple : elle représente le déplacement du profil donné $u_0(x)$ vers la gauche dans un plan rapporté aux axes orthogonaux Ox, Ot . Pour tester nos méthodes de simulations numériques nous allons utiliser un ordinateur qui va nous permettre de calculer la valeur de la solution u aux points d'un maillage que nous allons définir. On choisit des pas $\Delta t, \Delta x$ et on va calculer des valeurs approchées $u_{k,n}$ de la solution u aux différents points du

maillage $(k\Delta t, n\Delta x)$. Dans les calculs numériques on part de l'équation et on approche la dérivée temporelle, en t , $\frac{\partial}{\partial t}u(k\Delta t, n\Delta x)$ par le quotient différentiel :

$$\frac{u_{k+1,n} - u_{k,n}}{\Delta t}.$$



Pour la dérivée spatiale, en x , on a le choix entre trois possibilités :

$$\frac{u_{k,n+1} - u_{k,n}}{\Delta x}, \quad (I)$$

$$\frac{u_{k,n-1} - u_{k,n}}{-\Delta x}, \quad (II)$$

$$\frac{u_{k,n+1} - u_{k,n-1}}{2\Delta x}. \quad (III)$$

On est donc ramené à calculer les valeurs de $u_{k,n}$ en résolvant, avec un ordinateur, le système d'équations :

$$\frac{u_{k+1,n} - u_{k,n}}{\Delta t} = \frac{u_{k,n+1} - u_{k,n}}{\Delta x},$$

ou bien

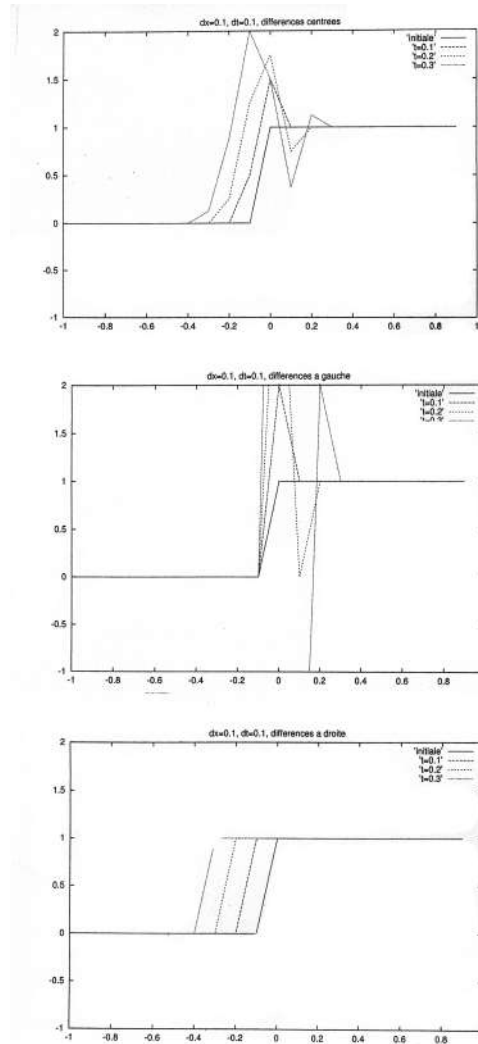
$$\frac{u_{k+1,n} - u_{k,n}}{\Delta t} = \frac{u_{k,n-1} - u_{k,n}}{-\Delta x},$$

ou encore

$$\frac{u_{k+1,n} - u_{k,n}}{\Delta t} = \frac{u_{k,n+1} - u_{k,n-1}}{2\Delta x},$$

chacune des équations doit être complétées par la donnée :

$$u_{0,n} = u_0(n\Delta x).$$



Il n'est pas possible de détailler le calcul, mais je vous montre une représentation des résultats obtenus. Il est facile de voir qu'en fonction du choix du quotient différentiel spatial on obtient des résultats suivants : soit le profil représentant u_0 se propage vers la gauche, sans se déformer, soit, dès les premiers calculs, le profil initial se déforme et le résultat obtenu s'écarte considérablement du résultat cherché ! Si on adopte un point de vue un peu simpliste on note que les résultats numériques varient considérablement, alors que dans l'approximation de la dérivée spatiale on passe du schéma (I) au schéma (II) en changeant $n+1$ en $n-1$. D'où l'importance du choix du modèle discrétisé. L'exemple donné est simple et vous pouvez imaginer, facilement, que si nous étions partis des équations de Navier-Stokes, - elles sont non linéaires, - le problème du choix des approximations aurait été beaucoup plus compliqué ; de plus, dans le cas général, il subsisterait des problèmes théoriques non résolus. Des gardes fous reposant sur l'intuition, la connaissance de cas analogues,

la validation des codes de calcul, sont indispensables pour justifier les simulations.

Pour conclure, je voudrais revenir au livre, le *Courant & Hilbert*. En relisant la table des matières j'ai été frappé par le grand nombre de sujets introduits, sujets qui sont encore exploités actuellement dans l'analyse et l'utilisation des modèles à la base de nombreuses simulations numériques.

Les questions du public

Question 1 : La télévision a montré le premier essai raté de la fusée Ariane 5. S'agissait-il de mauvaises simulations ? Comment fait-on pour s'assurer de la validité d'une simulation quand c'est très compliqué et très cher ?

P.-L. Lions : Pas du tout ! Cet échec est dû à des erreurs provenant du logiciel de vol. Il est clair que, lorsqu'on fait des simulations sur des systèmes complexes, il est indispensable de les faire avec différents codes de calculs. Il faut aussi s'appuyer sur l'intuition, sur l'expérience, sur le bon sens. La validation des simulations pose toujours des problèmes difficiles.

Question 2 : Sur les 23 problèmes proposés par Hilbert, en 1900, Combien sont-ils résolus ?

P.-L. Lions : Je ne le sais pas exactement ; une quinzaine peut-être. Mais en mathématiques, même les problèmes résolus continuent à intéresser les mathématiciens. Il n'y a pas de bons problèmes et pas de bonnes solutions définitives !

Question 3 : Que se passe-t-il dans votre tête lorsque vous vous posez des problèmes de mathématiques ?

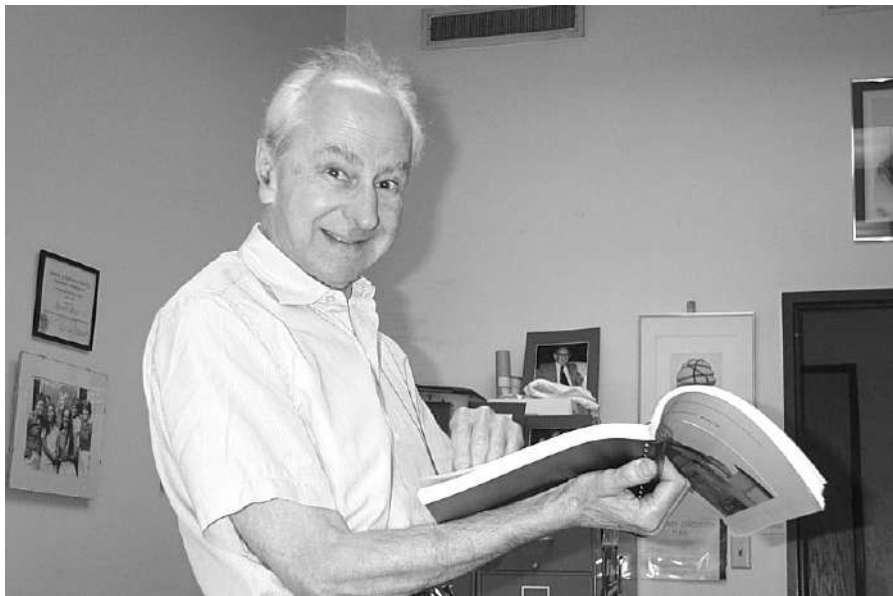
P.-L. Lions : C'est une question compliquée ! Mais en gros on peut dire que la démarche des mathématiciens est un peu différente de celle des physiciens ou des ingénieurs. Nous acceptons des simplifications, mais nous cherchons toujours à conserver la rigueur. Si le problème est trop gros, trop compliqué, nous cherchons à le comprendre et à le résoudre par morceaux, mais cette démarche n'est pas unique, elle varie d'un problème à l'autre.

Question 4 : Jusqu'à quel point dépendez-vous de la puissance des ordinateurs ?

P.-L. Lions : C'est un problème fondamental. Il est clair que l'évolution de la capacité et de la vitesse de calcul des ordinateurs est un facteur de progrès dans la modélisation et dans les simulations numériques. Pour revenir à l'histoire, même si les informaticiens ont des points de vue différents sur la naissance de l'informatique qu'ils font remonter à Babbage et à Turing, c'est sans doute à von Neumann qu'il faut revenir. Von Neumann voulait comprendre et résoudre les équations de la dynamique des gaz et pour ce faire il a inventé l'ordinateur.

Question 5 : Quelles différences faites-vous entre mathématiques pures et mathématiques appliquées ?

P.-L. Lions : Il n'y a pas de frontières entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées ; si on considère la discipline dans son ensemble on peut la comparer à un arc-en-ciel avec toute la palette des couleurs. Parmi les chercheurs en mathématiques appliquées certains s'attaquent à des problèmes théoriques relevant des mathématiques appliquées. Les choix dépendent des motivations et des intérêts des uns et des autres.



© Ken Ribet

Serge Lang, Université de Berkeley, 13 juillet 2000

MATHÉMATIQUES

HOMMAGE À SERGE LANG (1927-2005)

Serge Lang est né à Paris et a émigré à Los Angeles pendant l'adolescence. Il passe sa thèse en 1951 sous la direction d'Emil Artin. Il est nommé professeur à l'Université de Columbia en 1955, position dont il démissionne en 1971 pour protester contre l'attitude de l'Université face aux manifestants opposés à la guerre du Viet-Nam. Il trouve un travail à l'Université de Yale début 1972 et y restera jusqu'à la fin de sa carrière. Il s'était retiré de l'Université de Yale au printemps 2005. Il est mort le 12 Septembre 2005 dans son appartement de Berkeley. Serge Lang a reçu en 1959 le prix Nelson Cole pour son travail de recherche et en 1999 le prix Steele pour ses écrits. Il était membre de la National Academy of Sciences depuis 1985.

La géométrie diophantienne, selon Serge Lang

Marc Hindry

« Diophantine problems represent some of the strongest aesthetic attractions to algebraic geometry. They consist in giving criteria for the existence of solutions of algebraic equations in rings and fields, and eventually for the number of such solutions.

The fundamental ring of interest is the ring of ordinary integers $\mathbf{Z}$, and the fundamental field of interest is the field $\mathbf{Q}$ of rational numbers. One discovers rapidly that to have all the technical freedom needed in handling general problems, one must consider rings and fields of finite type over the integers and the rationals. Furthermore, one is led to consider also finite fields, p -adic fields (including the real and complex numbers) as representing a localization of the problems under consideration. » (Lang [L12])

Ces premiers mots de la préface du livre visionnaire (1962) de Serge Lang *Diophantine Geometry* fournissent une bonne présentation du sujet. En fait le terme « géométrie diophantienne » a été, sinon inventé, au moins popularisé par Serge Lang pour désigner une branche féconde des mathématiques qu'il a énormément irriguée, par ses travaux, sa vision et, le mot est un peu inévitable quand on parle de Serge Lang, ses conjectures. Je vais essayer dans ce court texte de donner un échantillon des résultats de Serge Lang et de faire un petit panorama de quelques magnifiques problèmes qu'ils nous a laissés. Toute l'œuvre de Serge Lang tend à regrouper, croiser de multiples domaines, théorie des nombres, géométrie algébrique, analyse et géométrie complexe, théorie des groupes, etc, etc. Je me concentrerai sur l'aspect « diophantien » et laisserai de côté ses travaux modulaires ou liés à

la théorie d'Iwasawa, je renvoie également à l'article de Michel Waldschmidt pour l'aspect « approximations rationnelles et nombres transcendants » qui est pourtant intimement lié aux thèmes abordés. Le lecteur désirant en savoir davantage pourra se délecter en se plongeant dans le volume de l'encyclopédie russe « *Survey of Diophantine Geometry* » alias « *Number Theory III* » écrit par Serge Lang [L25].

1. Serge Lang et la géométrie diophantienne

Ainsi le problème originel de la géométrie diophantienne est la détermination des points rationnels ou entiers sur une variété algébrique V définie sur un corps de nombres k . Une fois qu'on s'est posé la question pour un corps de nombres k ou sur $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers algébriques de k (par exemple sur $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Q}$), on est rapidement amené à réduire modulo un idéal premier $\wp$ et considérer donc des variétés sur un corps fini $\mathbf{F}_q = \mathcal{O}_k/\wp$; on a envie de compléter selon une place $\wp$ -adique ou archimédienne, ce qui amène à regarder la situation sur un corps $\wp$ -adique ou les corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On notera k_v le complété d'un corps de nombres pour une place v . Les célèbres analogies entre corps de nombres et corps de fonctions amènent aussi à considérer les corps comme $k[T]$ ou $k[T_1, \dots, T_n]$ ou plus généralement $k(V)$ le corps de fonctions d'une variété algébrique V ainsi que ses complétés du type $k[[T_1, \dots, T_n]]$. Pour mesurer l'intérêt d'une telle généralisation il est important d'observer avec Lang que toute variété algébrique V définie *a priori* sur un corps K quelconque (par exemple $K = \mathbf{C}$) peut être définie *a posteriori* sur une extension de type fini du sous-corps premier, i.e. sur $\mathbf{F}_p[t_1, \dots, t_n]$ ou $\mathbf{Q}[t_1, \dots, t_n]$ (avec des t_i non nécessairement algébriquement indépendants). Dans ce mariage entre arithmétique et géométrie (algébrique pour le moment), on dira qu'une propriété est géométrique si elle peut être regardée sur la clôture algébrique $\bar{k}$ (ou sur $\mathbf{C}$, ce qui revient souvent au même d'après le principe de Lefschetz classique). Les questions posées peuvent être dans l'ordre :

- (a) A-t-on $V(k) \neq \emptyset$?
- (b) L'ensemble $V(k)$ est-il infini ?
- (c) Décrire une paramétrisation ou la répartition de $V(k)$, densité, etc.

En fait la question (b) n'est vraiment pertinente que si V est une courbe ; si $\dim(V) > 1$ il est plus naturel de demander :

- (b') L'ensemble $V(k)$ est-il dense pour la topologie de Zariski ?

Rappelons que la *topologie de Zariski* sur une variété algébrique est ainsi définie : les *fermés* sont les sous-ensembles algébriques, i.e. les zéros communs d'une famille (ou d'un idéal) de polynômes dans V . Ainsi un ensemble infini de points de V est dense si V est une courbe, mais dans le cas général un ensemble de points de V est dense s'il n'est contenu dans aucune hypersurface de V .

La question (c) peut être rendue plus précise de plusieurs façons ; les deux variantes les plus intéressantes sont :

- (c') On choisit un ensemble fini S de places de k (par exemple un plongement de k dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ ou dans un corps $\wp$ -adique), on note k_v le complété de k en v et on demande si

$$V(k) \hookrightarrow \prod_{v \in S} V(k_v) \quad \text{est une inclusion dense ?}$$

Ici on considère à droite la topologie produit de la topologie usuelle sur la variété analytique $V(k_v)$.

(c'') On choisit une *fonction de comptage* $H : V(k) \rightarrow \mathbf{R}$ et on demande une estimation asymptotique de la fonction

$$N(V(k), H, B) := \text{card}\{x \in V(k) \mid H(x) \leq B\}$$

On choisit généralement H une fonction *hauteur* (voir le paragraphe suivant pour des définitions).

Remarque. Un invariant important de V est son *corps de fonctions* qu'on notera $k(V)$; on dit que V et V' sont *birationnelles* (ou *k-birationnelles*) s'il existe $f : V \rightarrow V'$ application rationnelle qui induise un isomorphisme $f^* : k(V') \rightarrow k(V)$. Il revient au même de demander que f induise un isomorphisme $U \rightarrow U'$ entre deux ouverts de Zariski de V et V' . Notons que la propriété (b') est invariante birationnellement, la propriété (a) ne l'est pas sauf si on se restreint aux variétés projectives lisses (voir plus loin), la propriété (c') l'est également mais une transformation birationnelle peut changer les estimations dans (c''). Plus loin nous utiliserons un autre invariant géométrique : le *groupe de Picard* de V noté $\text{Pic}(V)$, c'est-à-dire le groupe des fibrés en droites inversibles modulo isomorphismes (muni du produit tensoriel).

On sait répondre aujourd'hui à ces questions de façon (presque) totalement satisfaisante dans le cas où V est une courbe algébrique. Rappelons qu'une courbe algébrique est birationnellement équivalente à une unique courbe lisse et projective, donc on peut supposer V lisse et complète (ou projective). L'invariant crucial est alors le *genre* et la courbe a un comportement différent suivant que $g = 0$, $g = 1$ ou $g \geq 2$. On dispose dans le cas des courbes d'un merveilleux dictionnaire entre courbes algébriques (disons lisses et projectives sur $\mathbf{C}$), corps de type fini et degré de transcendance 1 sur $\mathbf{C}$ et surfaces de Riemann compactes.

Si V est de genre 0, elle est k -isomorphe à une conique; de plus cette conique est isomorphe à la droite projective $\mathbf{P}^1$ si et seulement si $V(k) \neq \emptyset$. Enfin, d'après le théorème de Hasse-Minkowski, on a $V(k) \neq \emptyset$ si et seulement si $\prod_v V(k_v) \neq \emptyset$. Si H_k est la hauteur usuelle sur $\mathbf{P}^1$ (voir plus loin) on a $N(\mathbf{P}^1(k), H_k, B) \sim cB^2$. Par exemple, pour $k = \mathbf{Q}$, la constante c vaut $12/\pi^2$.

Si V est de genre 1 et si $V(k) \neq \emptyset$ alors V est k -isomorphe à une cubique projective plane, on peut définir une loi de groupe (c'est une courbe elliptique) et $V(k)$ est alors un groupe de type fini (théorème de Mordell-Weil) et $N(V(k), H_k, B) \sim c(\log B)^{r/2}$ où r est le rang de $V(k)$ (théorème de Néron). Ainsi une courbe elliptique peut posséder une infinité de points rationnels, mais ceux-ci sont « beaucoup moins nombreux » que sur une courbe de genre 0.

Si V est de genre $g \geq 2$ alors $V(k)$ est fini; c'est la célèbre conjecture de Mordell démontrée en 1983 par Faltings [Fa1], et dont Vojta [Vo2] a donné une deuxième démonstration sur laquelle nous reviendrons.

On dispose d'une description qualitativement complète des points rationnels sur une courbe. Cependant indiquons que c'est seulement pour les courbes de genre 0 que l'on a des solutions *effectives* (i.e. que l'on peut calculer par un algorithme donnant les solutions en un temps déterminé).

Pour une courbe affine V (qu'on peut voir comme une courbe projective $\bar{V}$ privée de s points), la question des points entiers a été résolue par Siegel (1929) :

si la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(V) := 2 - 2g - s$ vérifie $\chi(V) < 0$, alors l'ensemble des points entiers est fini. Ainsi aussi bien un ouvert affine d'une courbe elliptique que la droite projective privée de trois points ou plus n'ont qu'un nombre fini de points entiers.

Siegel démontrait son résultat en utilisant un théorème d'approximation diophantienne (démontré par lui-même). Rappelons quelques étapes historiques de ces questions d'approximation diophantienne pour un nombre réel α algébrique (non rationnel) de degré d (i.e. $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}] = d$).

(i) En 1844 Liouville démontre que, pour tout rationnel p/q , on a (avec $c = c(\alpha)$ constante adéquate) :

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^d}$$

(ii) Thue (1909) montre qu'on peut remplacer l'exposant d par $\frac{d}{2} + 1 + \varepsilon$ (pour tout $\varepsilon > 0$ avec $c = c(\alpha, \varepsilon)$).

(iii) Siegel (1921) montre qu'on peut remplacer l'exposant d par $2\sqrt{d} + \varepsilon$.

(iv) Gelfond et Dyson (1947) montrent qu'on peut remplacer l'exposant d par $\sqrt{2d} + \varepsilon$.

(v) Roth (1954) montre qu'on peut remplacer l'exposant d par $2 + \varepsilon$, ce qui est optimal.

Le résultat ultérieur le plus important est le théorème du sous-espace de Schmidt [Sch1, Sch2]. Réécrivons le théorème de Roth sous la forme $|q(q\alpha - p)| \geq q^{-\varepsilon}$ sauf pour un nombre fini d'exceptions. Une des généralisations de Schmidt s'écrit en prenant $L_1, \dots, L_n$ formes linéaires en n variables, à coefficients algébriques et indépendantes; on obtient alors

$$\prod_i |L_i(x_1, \dots, x_n)| \geq \max_i |x_i|^{-\varepsilon}$$

pour $x \in \mathbf{Z}^n$ situé hors d'une réunion finie de sous-espaces vectoriels propres.

L'idée de départ sous-jacente à la méthode de Siegel est très simple, expliquons-la pour $k = \mathbf{Q}$ et $\mathcal{O}_k = \mathbf{Z}$. On peut tout d'abord se ramener au cas d'une courbe plane d'équation

$$f(x, y) = f_d(x, y) + \dots + f_1(x, y) + f_0 = 0,$$

où $f_j(x, y)$ est homogène de degré j et disons $f_d(x, y) = \prod_{i=1}^d (x - \alpha_i y)$. Si l'on trouve une suite de points entiers $P_n = (x_n, y_n) \in \mathbf{Z}^2$, alors cette suite tend vers l'infini et une sous-suite se rapprochera d'une des asymptotes $x - \alpha_i y = 0$; c'est-à-dire en particulier que les x_n/y_n fournissent de très bonnes approximations rationnelles de α_i . Dans le cas où le genre de la courbe est ≥ 1 Siegel montre par un argument transcendant (utilisant des fonctions thêta et leurs lois d'addition) que l'on peut encore améliorer la qualité des approximations à l'aide de transformations. La version moderne, due à Serge Lang, utilise plutôt la jacobienne de la courbe et les revêtements non ramifiés d'icelle. La présentation du théorème de Siegel par Lang dans [L9], reprise dans [L12], est bien sûr simplifiée par l'utilisation du théorème de Roth mais aussi par l'utilisation de la géométrie de la jacobienne de la courbe, ce qui lui permet de généraliser le théorème aux anneaux de S -entiers d'un corps de

nombre et aux anneaux de type fini. La version géométrique des inégalités d'approximation rationnelle donnée par Lang est la suivante (voir le paragraphe suivant pour la définition des valeurs absolues normalisées $\|\cdot\|_v$ et de la hauteur H) :

Proposition. — (Lang-Siegel, [L9]) *Soit V une courbe projective lisse définie sur k , soit $f \in k(V)$ non constante.*

(i) *Si r est la plus grande multiplicité d'un pôle de f , si S est un ensemble fini de places de k , l'ensemble des points $P \in V(k)$ vérifiant*

$$\prod_{v \in S} \max(1, \|f(P)\|_v) \geq H_k(P)^{(2+\varepsilon)r}$$

est fini (de hauteur bornée).

(ii) *Si la courbe est de genre $g \geq 1$ on peut remplacer l'exposant $(2 + \varepsilon)r$ par ε en gardant la même conclusion.*

Comme il découle aisément de la définition de H_k que, si $f(P)$ est S -entier et S contient les places archimédiennes, on a $H_k(f(P)) = \prod_{v \in S} \max(1, \|f(P)\|_v)$, le théorème de Siegel s'ensuit immédiatement pour les courbes de genre $g \geq 1$. Tout comme les théorèmes de Mordell-Weil et Faltings, le théorème de Siegel n'est pas effectif, cependant les travaux de Baker ont permis de rendre effective la détermination des points entiers pour $g \leq 1$ et dans un certain nombre de cas en genre supérieur. On peut noter qu'on a longtemps cru que la méthode de Siegel ne permettait pas d'attaquer la question des points rationnels. En effet on se heurte à une difficulté : si $P_n = (x_n, y_n)$ est maintenant une suite de points rationnels, on peut en extraire un sous-suite convergente (au sens archimédien ou p -adique) mais alors cette limite sera en général un point (α, β) avec des coordonnées transcendentes ! Néanmoins Vojta [Vo2], huit ans après la preuve de Faltings, soixante ans après l'article de Siegel, a trouvé un moyen de contourner cette difficulté et d'utiliser l'approximation rationnelle pour les points rationnels.

Ces travaux phares du XX^e siècle se poursuivent grosso modo dans deux directions.

(A) Tenter de rendre *effectifs* ces résultats (Mordell-Weil, Siegel, Roth, Faltings). C'est l'objet notamment des travaux de Baker et plus récemment de Masser-Wüstholz et de manière générale des « méthodes de transcendance ». Je renvoie à l'article de Michel Waldschmidt [ce volume] pour une description de la contribution de Lang à ces questions.

(B) Tenter d'étendre ces résultats *qualitatifs* aux variétés algébriques de dimension > 1 . Cette question est discutée dans le paragraphe suivant.

Avant d'aborder les généralisations (pour la plupart conjecturales), je clos ce paragraphe avec un échantillon à la Prévert de quelques théorèmes de Serge Lang en géométrie diophantienne.

La propriété d'avoir un point k -rationnel est k -birationnelle parmi les variétés lisses et projectives et peut donc être lue sur $k(V)$ le corps de fonctions de la variété [L1].

Deux groupes algébriques isogènes sur un corps fini $\mathbf{F}_q$ ont le même nombre de points sur $\mathbf{F}_q$; un espace homogène sous un groupe algébrique possède un point rationnel sur $\mathbf{F}_q$ (Cf [L3], [LT6]). Le dernier énoncé était connu pour une

courbe C de genre 1 ; on peut en fait le déduire de la majoration de Hasse $|\text{card } C(\mathbf{F}_q) - (q + 1)| \leq 2\sqrt{q}$ (c'est l'« hypothèse de Riemann » pour les courbes de genre 1 sur $\mathbf{F}_q$).

Le décompte approché du nombre de points d'une variété algébrique V sur $\mathbf{F}_q$ obtenu en collaboration avec Weil [LW2] s'énonce ainsi. Si V est fermée dans $\mathbf{P}^n$, et $r = \dim V$, $d = \deg V$

$$|\text{card } V(\mathbf{F}_q) - q^r| \leq (d - 1)(d - 2)q^{r-1/2} + C(n, d, r)q^{r-1}$$

que l'on peut réécrire de manière peut-être plus suggestive

$$|\text{card } V(\mathbf{F}_q) - \text{card } \mathbf{P}^r(\mathbf{F}_q)| \leq (d - 1)(d - 2)q^{r-1/2} + C'(n, d, r)q^{r-1}.$$

Cette estimation peut-être améliorée dans le cas où V est lisse et on a des renseignements sur les nombres de Betti de V , grâce aux conjectures de Weil (démontrées par Grothendieck et Deligne), mais reste extrêmement utile dans le cas général.

Tout revêtement d'une courbe algébrique lisse projective s'obtient par image réciproque via une isogénie de sa jacobienne ; c'est une belle formulation géométrique de la théorie du corps de classes non ramifié d'une courbe [L4]. Les extensions abéliennes ramifiées s'obtiennent en utilisant les « jacobiniennes généralisées » construites par Rosenlicht. Cette théorie, due à Lang, est exposée dans le livre de Serre [Se1]. Dans un article aussi court que remarquable [L5],

Lang montre comment l'énoncé sur les revêtements abéliens peut être démontré à partir du cas des courbes définies sur un corps fini (cas que Lang avait déjà traité). Ainsi le « principe de Lefschetz » devient un mode de voyage entre corps finis, corps de type fini sur $\mathbf{F}_p$ ou $\mathbf{Q}$, et le corps des complexes $\mathbf{C}$. Cette idée a été reprise dans un contexte différent et de façon spectaculaire par Mori et son fameux « *bend-and-break lemma* » (Cf [Mo]).

2. Les conjectures et la vision de Serge Lang

Dans son livre fondateur [L12] Lang met en avant quatre résultats diophantiens : les théorèmes de Mordell-Weil, Siegel, Roth et le théorème d'irréductibilité de Hilbert. Ce dernier affirme que si un polynôme $P(X_1, \dots, X_n)$ dans $k[X_1, \dots, X_n]$ est irréductible, les spécialisations $P(X_1, \dots, X_m, t_{m+1}, \dots, t_n)$ dans $k[X_1, \dots, X_m]$ restent irréductibles pour une infinité de valeurs des paramètres $t_i \in k$. Les outils fondamentaux sont la théorie des hauteurs et l'utilisation systématique de la géométrie algébrique. Je commencerai donc par des préliminaires sur ces deux aspects (les spécialistes sauteront sans hésiter cette liste de définitions).

2.1. Géométrie et hauteurs

Donnons maintenant un peu de vocabulaire issue de la géométrie algébrique et de la géométrie complexe. Le *fibré canonique* sur une variété V de dimension r est le fibré en droites dont les sections sont les r -formes différentielles algébriques ; on le note ω_V . C'est un invariant important habitant dans le groupe de Picard $\text{Pic}(V)$ de la variété. Soit L un fibré en droites sur une variété projective V , alors pour chaque $m \geq 1$ l'espace vectoriel des sections globales $H^0(X, L^{\otimes m})$ permet de définir une application rationnelle $\Phi_m : V \dashrightarrow \mathbf{P}H^0(X, L^{\otimes m})$. On note $\kappa(V, L) = \max \dim \Phi_m(V)$ et, si $L = \omega_V$ on pose $\kappa(V) = \kappa(V, \omega_V)$ qu'on

appelle *dimension de Kodaira* de V . Un fibré en droites L est dit *très ample* (resp. *ample*) si L (resp. une puissance de celui-ci) fournit un plongement, autrement dit si $\Phi_L : V \hookrightarrow \mathbf{P}^n$, resp. si pour un certain $m \geq 1$, on a $\Phi_{L^{\otimes m}} : V \hookrightarrow \mathbf{P}^n$. Un fibré en droites L est dit *gros* (« *big* » en anglais) si $\kappa(V, L) = \dim(V)$. On peut montrer (lemme de Kodaira) que, quitte à tensoriser par $\mathbf{Q}$, un fibré gros est produit tensoriel d'un fibré ample par un fibré effectif (i.e. admettant une section globale non nulle). Suivant Lang une variété est dite *canonique* (resp. *pseudo-canonique*) si son fibré canonique est ample (resp. son fibré canonique est gros). Du côté analytique la notion de fibré en droites ample correspond à la notion de fibré positif. La définition suivante est importante dans la philosophie de Lang.

Définition. — Une variété complexe $V(\mathbf{C})$ est dite *hyperbolique* (au sens de Brody) si toute application holomorphe de $\mathbf{C}$ vers $V(\mathbf{C})$ est constante.

Note. Si la variété est projective (compacte) cette définition coïncide avec celle donnée par Kobayashi, mais pas en général.

La théorie des hauteurs, associées à un diviseur, avait été développée par Weil. Sur les variétés abéliennes Néron et Tate en ont donné une version plus canonique et jolie. On note respectivement H , $h = \log H$, $\hat{h}$ ces objets. Serge Lang prêtait beaucoup d'attention aux notations dont il estimait qu'elles devaient être « fonctorielles avec les idées »¹. Pour la théorie des hauteurs on peut consulter bien sûr l'ouvrage de Lang [L12] ou encore [Se2], [H-S2] et [B-G]. Considérons donc un corps k muni d'une famille de valeurs absolues M_k normalisées de sorte que la *formule du produit* soit vérifiée :

$$\forall \lambda \in k^*, \quad \prod_{v \in M_k} \|\lambda\|_v = 1.$$

Donnons deux exemples typiques. Tout d'abord $k = \mathbf{Q}$ avec $M_{\mathbf{Q}}$ l'ensemble constitué par la valeur absolue « usuelle » (c'est-à-dire archimédienne) et des valeurs absolues p -adiques normalisées par $\|p\|_p = 1/p$; autrement dit si $x = p^m a/b \in \mathbf{Q}$ avec $m \in \mathbf{Z}$ et a, b non divisibles par p , on a $\|x\|_p = p^{-m}$. Ensuite, si K est un corps algébriquement clos et $k = K(T)$ on peut choisir $M_k = \mathbf{P}^1(K)$ avec $\|f\|_v := \exp(\text{ord}_v(f))$. Une fois qu'on a une normalisation avec formule du produit sur un corps k , on peut en tirer une normalisation avec formule du produit sur toute extension finie k' de sorte que $\prod_{w|v} \|\alpha\|_w = \|N_k^{k'}(\alpha)\|_v$.

On pose alors :

$$H_k(P) = \prod_{v \in M_k} \max \{ \|x_0(P)\|_v, \dots, \|x_n(P)\|_v \} \quad \text{ou} \quad h_k(P) := \log H_k(P).$$

On peut montrer que si $P \in \mathbf{P}^n(k)$ et $k \subset k'$ alors $H_{k'}(P) = H_k(P)^{[k':k]}$ d'où l'on tire que

$$H(P) := H_k(P)^{\frac{1}{[k:\mathbf{Q}]}} \quad \text{et} \quad h(P) := \log H(P) = \frac{1}{[k:\mathbf{Q}]} h_k(P)$$

¹ Il est connu pour avoir effacé systématiquement, dans le dos d'un orateur réputé parlant au tableau de hauteurs, des « h » pour les remplacer par des « H » et avoir émis, à une autre occasion l'affirmation péremptoire « *Your notation stinks!* », d'autres m'ont rapporté un sonore « *Your notation sucks!* »

est une hauteur *absolue* indépendante du corps de définition du point ; on obtient ainsi une fonction $h = \log H : \mathbf{P}^n(\bar{\mathbf{Q}}) \rightarrow \mathbf{R}$ dont la principale propriété est que les ensembles $\{P \in \mathbf{P}^n(\bar{\mathbf{Q}}) \mid h(P) \leq B, [\mathbf{Q}(P) : \mathbf{Q}] \leq d\}$ sont finis.

Si L est un fibré en droites très ample sur V et $\Phi_L : V \rightarrow \mathbf{P}H^0(V, L) \cong \mathbf{P}^n$ est le plongement associé on pose

$$H_L(P) := H(\Phi_L(P)).$$

Comme ce plongement est unique à un automorphisme linéaire près (un élément α de $\mathrm{PGL}(n+1)$), la hauteur ainsi définie dépend du plongement. Cependant on a $H \circ \alpha \gg H$, ce qui veut dire $h_L \circ \alpha - h_L$ est bornée sur $V(\bar{k})$. Ces hauteurs jouissent de bonnes propriétés fonctorielles par rapport au groupe de Picard de V , par exemple

$$h_{L \otimes M}(P) = h_L(P) + h_M(P) + O(1), \quad \text{et} \quad h_L(\varphi(P)) = h_{\varphi^*L}(P) + O(1),$$

pour L, M fibrés en droites et $\varphi : W \rightarrow V$ morphisme de variétés projectives. La première formule permet de définir la hauteur associée à n'importe quel fibré en droites L en le décomposant $L = L_1 \otimes (L_2)^{-1}$, où L_1, L_2 sont très amples, et en posant $h_L := h_{L_1} - h_{L_2} + O(1)$.

2.2. Hauteurs de Néron-Tate et théorème de Mordell-Weil

Dans le cas d'une variété abélienne on peut faire un choix plus canonique de hauteurs, en posant, pour un fibré symétrique (i.e. tel que $[-1]^*L \cong L$) :

$$\hat{h}_L(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_L([2^n](P))}{4^n}.$$

Cette hauteur diffère de la hauteur initiale par une fonction bornée : $\hat{h}_L(P) - h_L(P) = O(1)$. La hauteur $\hat{h}_L : A(\bar{k}) \rightarrow \mathbf{R}$, associée à un fibré ample et symétrique, est alors une forme quadratique définie positive au sens que la forme

$$\hat{h}_{L, \mathbf{R}} : A(\bar{k}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

est définie positive. Ainsi la positivité analytique du fibré se traduit par une positivité arithmétique de la hauteur associée. On définit de même le produit scalaire de Néron-Tate :

$$\langle P, Q \rangle_L := \frac{1}{2} \left(\hat{h}_L(P + Q) - \hat{h}_L(P) - \hat{h}_L(Q) \right).$$

En particulier on peut voir $A(k)$ ou plutôt $A(k)/A(k)_{\mathrm{tor}}$ comme un réseau dans l'espace euclidien $A(k) \otimes \mathbf{R}$ (le théorème de Mordell-Weil dit que $A(k)$ est un groupe de type fini donc $A(k) \otimes \mathbf{R}$ est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie).

Une question fondamentale est de donner une borne pour la hauteur de générateurs de la partie infinie de $A(k) = \mathbf{Z}P_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}P_r \oplus A(k)_{\mathrm{tor}}$. Au vu de ce qui précède, en utilisant un peu de géométrie euclidienne des réseaux, on voit que le problème se réduit à donner une *minoration* de la hauteur d'un point d'ordre infini de $A(k)$ et une *majoration* du volume de la maille du réseau ou encore une majoration du régulateur $\mathrm{Reg}(A/k) := \det(\langle P_i, P_j \rangle)$. Serge Lang a proposé deux conjectures dans cette direction que je formule sous leur forme la plus élémentaire sur les courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$ (les généralisations aux corps de nombres et

variétés abéliennes de dimension quelconque sont données en commentaires).

Conjecture. — (Lang [L17], [L18]) *Il existe une constante absolue $c > 0$ vérifiant l'énoncé suivant. Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$, soit $y^2 = x^3 + ax + b$ un modèle de Weierstrass entier minimal (i.e. $a, b \in \mathbf{Z}$ et, pour tout p premier, ou bien p^4 ne divise pas a , ou bien p^6 ne divise pas b) et soit $\Delta_E := |4a^3 + 27b^2|$ la valeur absolue de son discriminant, si $P \in E(\mathbf{Q})$ est d'ordre infini :*

$$\hat{h}(P) \geq c \log \Delta_E.$$

On dispose d'un certain nombre de résultats positifs en direction de cette conjecture (voir [H-S1] et [Da]); une généralisation aux variétés abéliennes A/k a été proposée par Joe Silverman, l'inégalité s'écrivant alors $\hat{h}_L(P) \geq ch(A)$ où $h(A)$ est une hauteur pour les variétés abéliennes, par exemple la hauteur de Faltings définie dans [Fa1] et où l'on suppose que le point P est non seulement d'ordre infini, mais reste d'ordre infini dans A modulo toute sous-variété abélienne propre de A .

Conjecture. — (Lang [L18]) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c_\varepsilon > 0$ vérifiant l'énoncé suivant. Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$, soit $y^2 = x^3 + ax + b$ un modèle de Weierstrass entier minimal, il existe $P_1, \dots, P_r$ générateurs de la partie infinie de $E(\mathbf{Q})$ tels que*

$$\max \{ \hat{h}(P_1), \dots, \hat{h}(P_r) \} \leq c_\varepsilon \Delta_E^{\frac{1}{2} + \varepsilon}.$$

Cette dernière conjecture est motivée par la conjecture de Birch & Swinnerton-Dyer qui fait apparaître le régulateur $\text{Reg}(E/\mathbf{Q})$ dans le terme dominant du développement de Taylor de la série de Dirichlet $L(E, s)$ associée à E , en $s = 1$. J'ai omis un terme c^r présent dans [L18], mais qui n'a que peu d'intérêt tant qu'on ignore même si r est borné ou non. La majoration dans le cas d'une variété abélienne devrait s'écrire $c_\varepsilon H(A)^{1+\varepsilon}$ avec $H(A) = \exp h(A)$. Les théorèmes en direction de la majoration du régulateur sont inexistants aujourd'hui, ce qui est dommage car ils permettraient un calcul effectif de $E(\mathbf{Q})$.

Le théorème de Mordell-Weil – Mordell (1922) pour les courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$, Weil (1929) pour les jacobiniennes sur les corps de nombres – a été clarifié et étendu par Serge Lang aux variétés abéliennes. Le résultat vraiment nouveau est le théorème de Lang-Néron [LN7] que nous énonçons ci-dessous. Pour cela rappelons la définition de la K/k -trace de Chow (voir [L8]) : si K/k est une extension régulière (i.e. k est algébriquement clos dans K ou encore, si K est de type fini sur k , on a $K = k(V)$ avec V variété définie sur k) et si A est une variété abélienne définie sur K , il existe une « plus grande sous-variété abélienne définie sur k » ; plus précisément il existe B , variété abélienne définie sur k et $\tau : B_K \rightarrow A$ morphisme universel, tels que tout homomorphisme $\varphi : C_K \rightarrow A$ à partir d'une variété abélienne C définie sur k se factorise à travers τ .

Théorème. — (Lang-Néron) Soit K une extension régulière de type fini de k , soit A une variété abélienne sur K , soit B sa K/k -trace et $\tau : B_K \rightarrow A$ l'application universelle. Alors

$$A(K)/\tau(B(K)) \text{ est un groupe de type fini.}$$

En particulier si $K = F(t_1, \dots, t_r)$ est une extension de type fini de F , si A est une variété abélienne sur K ne contenant pas de partie constante sur F , alors $A(K)$ est un groupe de type fini.

2.3. Intersection d'une sous-variété avec un sous-groupe

Dans un effort pour aborder la conjecture de Mordell et la généraliser, Lang a été amené à considérer l'intersection d'un sous-groupe de type (ou rang) fini de A avec une courbe.

La conjecture suivante (parfois dite de Manin-Mumford-Lang ou Mordell-Lang) est aujourd'hui un théorème grâce principalement aux travaux de Faltings [Fa2], complétés par [H], [Vo3] et [McQ]. Elle (ou ses analogues) a été et continue à être la source de travaux intéressants comme par exemple la théorie différentielle algébrique des jets (Cf Buïum [Bu]) elle-même inspirée des travaux pionniers de Manin [Ma], l'apparition surprenante (au moins pour certains) de la théorie des modèles dans ces questions (Cf Hrushovski [HR]) ou des simplifications (dans le cas où Γ est le groupe de torsion, Cf Pink-Roessler [P-R]), voir aussi les travaux de Raynaud [Ra] et Rémond [Ré].

Conjecture. — (Lang). Soit A une variété semi-abélienne définie sur $\mathbf{C}$, soit Γ un sous-groupe de $A(\mathbf{C})$ de rang fini et V une sous-variété fermée de A alors il existe un ensemble fini de $\gamma_i \in \Gamma$ et de sous-groupes algébriques B_i tels que $\gamma_i + B_i \subset V$ et

$$V(\mathbf{C}) \cap \Gamma = \cup_{i=1}^s \gamma_i + (B_i(\mathbf{C}) \cap \Gamma).$$

En particulier si $V(\mathbf{C}) \cap \Gamma$ est Zariski dense dans V alors V est le translaté d'un sous-groupe algébrique par un élément de Γ .

Rappelons qu'un groupe abélien Γ est de rang fini r si $\Gamma \otimes \mathbf{Q}$ est un $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel de dimension r . Pour l'énoncé de Lang, on peut penser au cas où l'on part d'un groupe de type fini Γ_0 et on prend le saturé $\Gamma := \{x \in A(\mathbf{C}) \mid \exists m \geq 1, mx \in \Gamma_0\}$.

Cet énoncé généralise la conjecture de Mordell : prendre pour V une courbe dans sa jacobienne J et pour Γ le groupe de Mordell-Weil $J(k)$. Dans [L14] est énoncée la conjecture de Lang pour les courbes ; dans [L13] il prouve l'analogue pour une courbe dans un tore $(\mathbf{G}_m)^n$.

Serge Lang était friand de l'énoncé suivant que l'on peut voir comme un énoncé purement d'analyse complexe dont la preuve est en fait essentiellement équivalente à celle de la conjecture de Mordell et passe par l'utilisation massive d'arithmétique.

Corollaire. — Soit S une surface de Riemann compacte de genre g , soit $T := \mathbf{C}^n/\Lambda$ un tore complexe ($\Lambda \cong \mathbf{Z}^{2n}$ sous-groupe discret de rang maximal dans $\mathbf{C}^n$) et $f : S \rightarrow T$ une application holomorphe, soit Γ un sous-groupe de type fini (ou même de rang fini) de T , alors l'ensemble $\{z \in S \mid f(z) \in \Gamma\}$ est

fini, sauf si $f(S)$ est un translaté par un élément de Γ d'un sous-tore complexe, i.e. si il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma + f(S) = \mathbf{C}/(\Lambda \cap \mathbf{C})$ pour une droite complexe $\mathbf{C} \subset \mathbf{C}^n$.

L'énoncé a de multiples applications arithmétiques mais aussi géométriques. Ainsi, par exemple, l'article de Cutkosky et Srinivas [C-S], concernant le problème de Zariski sur la dimension des systèmes linéaires sur les surfaces, utilise le cas particulier $r = 1$ de la conjecture de Lang.

2.4. Arithmétique et géométrie algébrique et analytique

Un des problèmes les plus fondamentaux soulevés par Serge Lang est l'existence d'un dictionnaire entre propriétés arithmétiques d'une variété, propriétés géométriques et propriétés analytiques. Les livres et articles [L19], [L20], [L21] y sont consacrés; le livre [L22] développe la géométrie hyperbolique en introduisant le point de vue qui intéressait Lang.

L'observation suivante est frappante. Il existe des applications holomorphes non constantes de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{P}^1$, $\mathbf{P}^1 \setminus \{\text{un point}\}$ ou même $\mathbf{P}^1 \setminus \{\text{deux points}\}$ (prendre $\exp(z) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$) et vers une surface de Riemann de genre 1 (prendre $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}/\Lambda$). Cependant il n'existe aucune application holomorphe non constante de $\mathbf{C}$ vers une surface de Riemann de genre ≥ 2 (car son revêtement universel est le disque $\mathbf{D}$), vers une surface de Riemann de genre 1 privée d'un point ou vers $\mathbf{P}^1 \setminus \{a, b, c\}$ d'après le théorème de Picard. En termes différentiels, les surfaces de Riemann (algébriques) n'admettant pas de fonctions entières non constantes sont celles qui ont une courbure constante négative. En comparant avec les théorèmes diophantiens, on voit apparaître une remarquable correspondance entre propriétés arithmétiques, géométriques et analytiques.

Ainsi, si une variété contient une courbe rationnelle $\mathbf{P}^1 \rightarrow V$, ou une application non constante d'un groupe algébrique $G \rightarrow V$, on obtient donc une infinité de points rationnels. Dans ce cadre, Lang a proposé la conjecture élégante suivante (voir [L15]).

Conjecture. — (Lang) *Soit V une variété algébrique projective et lisse définie sur un corps de nombres k ; les énoncés suivants sont équivalents :*

- (i) *Pour tout corps de nombres K contenant k , l'ensemble des points rationnels $V(K)$ est fini (on dit que la variété est mordellique²).*
- (ii) *La variété V ainsi que toutes ses sous-variétés sont pseudo-canoniques³ (i.e. de dimension de Kodaira maximale).*
- (iii) *La variété $V(\mathbf{C})$ est hyperbolique (au sens de Brody, i.e. toute application holomorphe $\mathbf{C} \rightarrow V(\mathbf{C})$ est constante).*

Le *lieu spécial* d'une variété est l'adhérence de Zariski de l'union de ses sous-variétés images par un morphisme non constant d'un groupe algébrique (on peut se restreindre aux variétés abéliennes). Cette définition est due à Serge Lang qui demande au passage s'il est nécessaire de prendre la clôture de Zariski (autrement

² La dissonance du mot (au moins en français) est une pointe d'humour qui n'a vraisemblablement rien d'involontaire chez Serge Lang.

³ Dans la littérature, ces variétés sont appelées « de type général », le terme « pseudo-canonique » a été proposé par Serge Lang et est utilisé ici en son honneur. Je pense que le terme « log-canonique », utilisé plus loin, lui aurait fait plaisir.

dit si l'union des sous-variétés images par un morphisme d'un groupe algébrique n'est pas automatiquement fermée). On notera ce lieu $\text{spéc}(V)$. Une autre question purement géométrique est de savoir si $\text{spéc}(V)$ est un sous-ensemble propre de V quand on suppose que celle-ci est pseudo-canonique. D'un point de vue analytique, on peut définir un *lieu spécial analytique* : c'est l'adhérence de Zariski de l'union de toutes les images d'applications holomorphes non constantes $\mathbf{C} \rightarrow V(\mathbf{C})$; les conjectures de Lang suggèrent que le lieu spécial (algébrique) coïncide avec le lieu spécial analytique (ce qui n'est pas connu).

Conjecture. — (Lang) *La variété quasi-projective $V \setminus \text{spéc}(V)$ est mordellique.*

Ces conjectures ont été formulées comme des généralisations de la trichotomie pour les courbes algébriques, appelées aussi (sur $\mathbf{C}$) surfaces de Riemann... Une courbe de genre 0 est isomorphe à la droite projective $\mathbf{P}^1$ (dès qu'elle a un point rationnel) et a donc beaucoup de point rationnels ; une courbe de genre 1 est isomorphe à une cubique plane (dès qu'elle a un point rationnel) et a donc « peu » de point rationnels même s'ils sont en nombre infini (Mordell-Weil). Une courbe de genre $g \geq 2$ n'a qu'un nombre fini de point rationnels (conjecture de Mordell, théorème de Faltings). Ces conjectures générales ne sont connues en dimension supérieure essentiellement que pour les sous-variétés de variétés abéliennes [Fa2]. En effet on sait que si V est une sous-variété d'une variété abélienne A , alors $\text{spéc}(V)$ est l'union des translatées de sous-variétés abéliennes $t + B$ contenues dans V et de plus on sait que l'union est fermée. On peut ajouter aussi l'exemple des variétés de Shimura qui, comme l'a remarqué Ullmo [UI], peuvent être traitées en utilisant les travaux de Faltings. Ainsi tous les exemples connus passent par les variétés abéliennes.

Il est relativement aisé de formuler une conjecture plus générale à condition d'introduire le *bord* d'une variété algébrique non nécessairement complète. Une façon « économique » de faire cela est, partant d'une variété quasi-projective lisse V , de la compactifier en une variété complète $V \subset \bar{V}$, puis, quitte à éclater le bord $\bar{V} \setminus V$ et utiliser le théorème de résolution des singularités d'Hironaka (cela force à laisser le monde de la caractéristique p dans le conditionnel) on peut supposer que $\partial V := \bar{V} \setminus V$ est un diviseur à croisements normaux. La variété sera alors dite *log-canonique* si $\omega_{\bar{V}}(\partial V)$ est « gros » (observer que la définition ne dépend que de V et pas de la compactification choisie).

Conjecture. — (Lang) *Soit V une variété algébrique affine lisse définie sur un corps de nombres k ; les énoncés suivants sont équivalents :*

- (i) *Pour tout corps de nombres K contenant k , l'ensemble des points entiers $V(\mathcal{O}_K)$ est fini.*⁴
- (ii) *La variété V ainsi que toutes ses sous-variétés sont log-canoniques.*
- (iii) *La variété $V(\mathbf{C})$ est hyperbolique (i.e. toute application holomorphe $\mathbf{C} \rightarrow V(\mathbf{C})$ est constante).*

On pourrait formuler cette conjecture de manière à ce qu'elle contienne la précédente puisque, si V est projective, points rationnels et points entiers

⁴ Lang aurait pu appeler *siegelienne* ou *siegelsche* une telle variété affine mais il ne l'a, semble-t-il, pas fait.

coïncident, cependant la restriction aux variétés affines est assez naturelle et, pour les variétés quasi-projectives générales, il y a plusieurs définitions non équivalentes d'hyperbolicité. Hormis le cas des courbes où elle équivaut au théorème de Siegel, cette conjecture est démontrée par Faltings dans le cas d'un ouvert affine d'une variété abélienne [Fa2], ce qui avait été conjecturé depuis longtemps ... par Serge Lang [L10].

Caporaso, Harris et Mazur [C-H-M] ont montré une conséquence surprenante de la conjecture de Lang sur les variétés pseudo-canoniques : elle entraîne que pour $g \geq 2$ et k corps de nombres, il existe une constante $c(k, g)$ telle que pour toute courbe V de genre g définie sur k on a $\text{card } V(k) \leq c(k, g)$. La force de cette conclusion (dont la fausseté n'est pas démontrée) fait douter certains de la validité de la conjecture de Lang ; on peut aussi dire que cela renforce l'intérêt évident de la conjecture de Lang.

Lang a fait beaucoup de publicité pour les travaux de Vojta, qui développent une analogie remarquable entre théorie de Nevanlinna (appartenant donc à la théorie de la variable complexe) et approximations rationnelles (appartenant donc à la théorie des nombres). Par exemple le théorème du sous-espace de Schmidt en approximation diophantienne correspond au théorème de Cartan en théorie de Nevanlinna. Je renvoie au livre de Vojta [Vo1] et aux exposés de Lang dans [L19], [L22], [L24] et [L25] pour l'énoncé des conjectures que Vojta tire de cette analogie. Indiquons simplement ici qu'elles fournissent une sorte de version quantitative des conjectures de Lang.

3. Conclusion avec quelques souvenirs personnels.

Il est difficile de parler de Serge Lang en évoquant seulement ses mathématiques et sans évoquer quelques touches vertes ou rouges du personnage haut en couleurs. J'ai d'abord connu Lang par ses livres, son *Algebra* m'accompagne depuis la maîtrise et, préparant ma thèse, j'ai appris mes mathématiques dans ses livres *Abelian varieties*, *Diophantine Geometry*, *Elliptic curves*, *Elliptic functions*. Il m'a fait le plaisir et l'honneur de participer au jury de ma thèse. Comme tous ceux qui l'ont connu ne serait-ce qu'un peu, j'ai été frappé par son intensité, son exigence, voire son incandescence qui ne laissaient personne indifférent. Son exigence n'était pas que dureté, je ne suis pas le seul jeune mathématicien à avoir été encouragé par Lang. Et puis évidemment ... ses fameuses polémiques ont égayé, stimulé, parfois effrayé ou irrité beaucoup d'entre nous. Je ne citerai que la polémique directement en rapport avec la géométrie diophantienne, celle qui l'opposa à Mordell et Siegel. Mordell publia en effet une recension fort critique du livre *Diophantine Geometry* [L12] et reçut un soutien de la part de Siegel, dans une lettre au langage étonnamment virulent. Lang se régala d'ailleurs un peu plus tard à écrire une recension d'un livre de Mordell (les deux reviews cités sont reproduits dans la réédition de [L12]). L'histoire a totalement donné raison à Lang et celui-ci s'est de nouveau régalé en publiant il y a quelques années un texte [L26] dans la *Gazette* relatant la polémique, les idées, l'histoire (il m'avait écrit à cette occasion « *on va bien s'amuser* »). Serge était toujours prompt à réagir et dégainer, ainsi une lettre d'Arnold publiée dans la *Gazette* citant une phrase de Landau « *les nombres premiers sont fait pour être multipliés, pas additionnés* » l'avait fait bondir et ils nous envoya donc une missive « de représailles »

qui fut aussi publiée dans la *Gazette* et contient une très jolie présentation de la conjecture de Bateman-Horn [L27] décrivant les valeurs premières prises par un ou plusieurs polynômes. Lang aimait les mathématiques nouvelles et avait un flair remarquable pour voir ce qui allait devenir important. Ainsi, bien qu'il ait lui-même plutôt écrit la géométrie algébrique dans le langage des *foundations* de Weil, il salua l'arrivée de la géométrie des schémas de Grothendieck avec un *review* très intéressant [L11] et suivit avec passion les développements de la théorie d'Arakelov (Szpiro, Faltings ... et Gillet-Soulé) écrivant même un ouvrage de référence sur les bases du sujet [L23]. Parmi les buts multiples poursuivis par Serge Lang, j'ai insisté sur celui qui consiste à établir un dictionnaire entre les propriétés arithmétiques (l'ensemble $V(k)$) et géométriques (la variété algébrique $V(\mathbf{C})$) et analytiques (la variété complexe analytique ou différentielle $V(\mathbf{C})$). Ce croisement d'idées venues de l'approximation rationnelle, de l'analyse complexe, de la géométrie différentielle analytique s'est déjà montré très fécond, renouvelant même les problématiques de tous ces domaines. L'avenir dira si le dictionnaire proposé par Serge Lang devra être rectifié ou modifié; il a d'ores et déjà éclairé le chemin à suivre.

Je conclus avec une autre citation de Serge Lang extraite de l'ouvrage [L25] (page 206) qui se réfère en fait à des travaux et conjectures de Vojta (utilisant la géométrie d'Arakelov et s'inspirant d'analogies avec la théorie de Nevanlinna), mais décrit assez bien la conception du Graal mathématique selon Serge Lang. Sa grande ombre sur ces mathématiques va nous manquer.

« *Thus we behold the grand unification of algebraic geometry, analysis and PDE, Diophantine approximation, Nevanlinna theory and classical Diophantine problems about rational and integral points.* »

4. Références.

4.1. Références citées de Serge Lang

- [L1] *Some applications of the local uniformization theorem.* Amer. J. Math. 76, 1954, 362-374.
- [LW2] (avec A. Weil) *Number of points of varieties in finite fields.* Amer. J. Math. 76, 1954, 819-827.
- [L3] *Algebraic groups over finite fields.* Amer. J. Math. 78, 1956, 555-563.
- [L4] *Unramified class field theory over function fields in several variables.* Annals of Math. 64, 1956, 39-330.
- [L5] *On the Lefschetz principle.* Annals of Math. 64, 1956, 326-327.
- [LT6] (avec J. Tate) *Principal homogeneous spaces over abelian varieties.* Amer. J. Math. LXXX, 1958, 659-684.
- [LN7] (avec A. Néron) *Rational points of abelian varieties over function fields.* Amer. J. Math. 81, 1959, 95-118.
- [L8] *Abelian varieties.* Interscience, New York 1959, réédité par Springer-Verlag, 1983.
- [L9] *Integral points on curves.* Pub. Math. IHES, 1960, 319-335.
- [L10] *Some theorems and conjectures in diophantine equations,* Bull. Amer. Math. Soc. 66, 1960, 240-249.
- [L11] *Review of Eléments de géométrie algébrique (par Grothendieck et Dieudonné).* Bull. Amer. Math. Soc. 67, 1961, 239-246.

- [L12] *Diophantine geometry*. Wiley, Interscience, 1962. Une ré-édition fortement augmentée *Fundamentals of Diophantine Geometry*, a été publié par Springer en 1983.
 - [L13] *Diophantine approximations on toruses*. Amer. J. Math. 86, 1964, 521–533.
 - [L14] *Division points on curves*. Ann. Mat. Pura Appl. LXX, 1965, 229–234.
 - [L15] *Higher dimensional diophantine problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 80, 1974, 770–787.
 - [L16] *Division points of elliptic curves and abelian functions over number fields*. Amer. J. Math. 97, 1975, 124–132.
 - [L17] *Elliptic curves : Diophantine analysis*. Springer-Verlag 1978.
 - [L18] *Conjectured diophantine estimates on elliptic curves*. In *Arithmetic geometry*, dédié à Shafarevic, Birkhäuser, 1983, 155–171.
 - [L19] *Variétés hyperboliques et analyse diophantienne*. Séminaire de théorie des nombres de Paris 1984–85, Birkhäuser PM 63, 1986, 177–184.
 - [L20] *Hyperbolic and diophantine analysis*. Bull. Amer. Math. Soc. 14, 1986, 159–205.
 - [L21] *Diophantine problems in complex hyperbolic analysis*. Contemporary Math. 67, 1987, 229–246.
 - [L22] *Introduction to complex hyperbolic spaces*. Springer-Verlag 1987.
 - [L23] *Introduction to Arakelov theory*. Springer-Verlag 1988.
 - [L24] *Old and new conjectures in diophantine inequalities*. Bull. Amer. Math. Soc. 23, 1990, 37–75.
 - [L25] *Number Theory III. Diophantine Geometry*. Volume 60 (Teoriya Chisel 3) de l'encyclopédie russe. Springer-Verlag, 1991. [réédité sous le titre *Survey of Diophantine Geometry*, 1997].
 - [L26] *Mordell's review, Siegel's letter to Mordell, diophantine geometry, and 20th century mathematics*. Gazette Math., S.M.F. 63, 17–36 (1995).
 - [L27] *La conjecture de Bateman-Horn*. Gazette Math., S.M.F. 67, 82–84 (1996).
- (Hormis les livres [L8], [L12], [L17], [L22], [L23] et [L25], tous ces textes figurent dans les *Collected Papers* de Serge Lang publiés par Springer).

4.2. Autres références.

- [B-G] E. Bombieri, W. Gubler. *Heights in Diophantine Geometry*. Cambridge University Press, 2006.
- [Bu] A. Buium. *Intersections in jet spaces and a conjecture of S. Lang*. Annals of Math. 136, 1992, 557–567.
- [C-H-M] L. Caporaso, J. Harris, B. Mazur. *Uniformity of rational points*. J. Am. Math. Soc. 10, 1997, 1–35.
- [C-S] S. Cutkosky ; V. Srinivas. *On a problem of Zariski on dimensions of linear systems*. Annals of Math. 137, 1993, 531–559.
- [Da] S. David. *Autour d'une conjecture de S. Lang*. In *Approximations diophantiennes et nombres transcendants* (Luminy, 1990), 65–98, de Gruyter, Berlin, 1992.
- [Fa1] G. Faltings. *Endlichkeitssätze für abelschen Varietäten Über Zahlkörpern*. Inventiones math. 73, 1983, 9–27.
- [Fa2] G. Faltings. *Diophantine approximations on abelian varieties*. Annals of Math. 133, 1991), 549–576.
- [H] M. Hindry. *Autour d'une conjecture de Serge Lang*. Inventiones Math. 94, 1988, 575–603.
- [H-S1] M. Hindry, J. Silverman. *The canonical height and integral points on elliptic curves*. Inventiones Math. 93, 1988, 419–450.
- [H-S2] M. Hindry, J. Silverman. *Diophantine Geometry. An introduction*. GTM 201, Springer, 2000.

- [HR] E. Hrushovski. *The Mordell-Lang conjecture for function fields*. J. Am. Math. Soc. 9, 1996, 667–690.
- [Ma] Y. Manin. *A proof of the analog of the Mordell conjecture for algebraic curves over function fields* (en russe) Dokl. Akad. Nauk SSSR 152, 1963, 1061–1063 ; (traduction anglaise) Sov. Math., Dokl. 4, 1963, 1505–1507.
- [McQ] M. McQuillan. *Division points on semi-abelian varieties*. Inventiones Math. 120, 1995, 143–159.
- [Mo] S. Mori. *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective*. Annals of Math. 116, 1982, 133–176.
- [P-R] R. Pink, D. Roessler. *On Hrushovski's proof of the Manin-Mumford conjecture*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Beijing), Vol. I, Higher Ed. Press, 2002, 539–546.
- [Ra] M. Raynaud. *Around the Mordell conjecture for function fields and a conjecture of Serge Lang*. In Algebraic geometry, Springer LN 1016, 1983, 1–19.
- [Ré] G. Rémond. *Décompte dans une conjecture de Lang*. Inventiones Math. 142, 2000, 513–545.
- [Sch1] W. Schmidt. *Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals*. Acta Math. 125, 1970, 189–201.
- [Sch2] W. Schmidt. *The subspace theorem in diophantine approximations*. Compos. Math. 69, 1989, 121–173.
- [Se1] J.-P. Serre. *Groupe algébriques et corps de classes*. Herman, 1959.
- [Se2] J.-P. Serre. *Lectures on the Mordell-Weil theorem*. Vieweg, 1989.
- [Ul] E. Ullmo. *Points rationnels des variétés de Shimura*. Int. Math. Res. Not. 76, 2004, 4109–4125.
- [Vo1] P. Vojta. *Diophantine approximations and value distribution theory*. Springer LN 1239, 1987.
- [Vo2] P. Vojta. *Siegel's theorem in the compact case*. Annals of Math. 133, 1991, 509–548.
- [Vo3] P. Vojta. *Integral points on subvarieties of semiabelian varieties I*. Inventiones Math. 126, 1996, 133–181.

Serge Lang

David E. Rohrlich¹

Serge Lang was a man of exceptional generosity. If you happened to be taking one of his afternoon courses then after almost every class you were treated to a snack at a local café, where your mathematical education continued in a more informal setting. If you were one of Serge's research students then he would shower you with complimentary copies of his books and do everything in his power to advance your career. If you were not one of his students but simply a young mathematician whose research had excited his interest then he would likewise champion your efforts and do what he could to help you. On occasion Serge's generosity appears to have taken the form of direct financial assistance to impecunious members of the mathematical community. These subventions were discreet and their scope is unknown to me.

Serge was also a man of intense interests and strong convictions, and his occasionally unconventional reactions to conventional situations were in part an uncensored expression of his intensity. When I went to his office one day to request a thesis problem, his immediate response was something like this: "Well, of course there are always hopeless problems, for example – [a problem is mentioned in a flash of lightning] – I don't recommend that you work on that." I suspect that the problem in question was something that he had been thinking about very hard, and apparently he felt that he had not gained any insight that could be passed on to a graduate student. But such was the hold of the problem on his imagination that he could not help alluding to it anyway. Uttered by anybody else, his words to me might have sounded discouraging, but coming from Serge their effect was if anything inspiring. I did not leave his office with a thesis problem that day, but perhaps I left in greater awe of mathematics itself.

The problem, by the way, was not something that I grasped at the time, but in retrospect it amounted to this: which smooth projective curves defined over $\mathbb{Q}$ arise as quotients of the upper half-plane by arithmetic subgroups of $SL(2, \mathbb{Q})$? The conversation occurred around 1974, and five years later Belyi published his remarkable discovery: they all do. The episode illustrates Lang's knack for asking prescient questions, but it also represents an atypical failure to make the appropriate conjecture. More emblematic of Lang's career are the many conjectures – in particular those pertaining to diophantine properties of varieties over number fields – which stimulated research and received at least partial validation in his lifetime. For example there is the conjectured lower bound for heights of nontorsion points on elliptic curves (proved for elliptic curves with integral j -invariant by Silverman in 1981, and reduced to Szpiro's conjecture by Silverman and Hindry in 1988), or the conjecture that if a subvariety of an abelian variety contains infinitely many rational points then it contains a translate of an abelian subvariety of dimension > 0 (proved by Faltings in 1990), or the conjecture that the set of rational points on a variety of general type is not Zariski-dense (explored from a geometric as well as an arithmetic standpoint

¹ Université de Boston

in work of Caporaso-Harris-Mazur, Abramovich, Pacelli, Abramovich-Voloch, Hassett, and others). As Lang was well aware, this last conjecture has a striking application to $\mathcal{M}_g$, the moduli space of curves of genus g : since $\mathcal{M}_g$ is of general type for large g (Harris-Mumford), it would follow that certain algebraic identities are forced on a curve of genus g simply by virtue of its being defined over a given number field.

The conjectures just mentioned pertain to refinements of Siegel's theorem on the finiteness of integral points on curves of genus ≥ 1 and generalizations of Mordell's conjecture (now Faltings's theorem) on the finiteness of rational points on curves of genus ≥ 2 . But as dear as such matters were to Lang's heart, and as prominently as they must figure in an appraisal of his legacy, the fact remains that many of Lang's best-known results and conjectures lie outside the domain of diophantine geometry. Consider for instance the theorem on the triviality of principal homogeneous spaces over finite fields, or the formulas for orders of cuspidal divisor class groups on modular curves (joint work with Kubert), or the conjectures on Frobenius distributions in $GL(2)$ extensions (joint work with Trotter). There are also substantial portions of Lang's work, such as the forays into Nevanlinna theory or into complex hyperbolic geometry, which lie outside of number theory altogether, even if the motivation is number-theoretic. In any case, however broad his interests as a research mathematician, Lang's interests as a mathematical educator were broader: his graduate and undergraduate textbooks and his talks for high school students and the general public span much of mathematics, making him a "one-man Bourbaki," in the words of a German reviewer of one of his books. There are not many figures in mathematics to whom this epithet could be applied.

I last saw Serge on May 2, 2005, when he gave a talk in the algebra seminar at Boston University. He was his usual lively self, excited not only about his lecture topic ("The error term in the *abc* conjecture and diophantine approximation") but also about what he saw as an impending reorientation of algebraic geometry toward closer connections with analysis and toward a reduction of general theories to fundamental special cases. In part the issue that concerned him seemed to be pedagogical, for he stressed the need to rewrite the textbooks in the field, adding in the same breath that he could not be the one to do it. But he had more than pedagogy in mind, and given his prescience I do not doubt that he was on to something, even if he was unable to formulate it precisely. Perhaps subsequent developments in mathematics will confirm the soundness of his instincts. Be that as it may, his seminar talk was well received, and as so often in the past, the name Serge Lang had drawn a good crowd. After the seminar dinner we adjourned to my house for coffee and ice cream, but I don't recall that Serge had either: It seemed that he was standing by the piano the whole evening, engaged in animated conversation with one person after another, or with several at once.

There is a lot more to say about Serge, but at some point the reminiscences of those who knew him may be less evocative than the lyrics of a songwriter who didn't. Serge loved a variety of genres of music, and at Yale he even performed as the lutenist in a recital of Elizabethan songs. Here the final word will be left not to John Dowland but rather to another of Serge's favorites, the folksinger Phil Ochs, whose death in 1976 affected him deeply. If you never knew Serge, then listen to the song *When I'm gone*. It captures some of his spirit.

Les contributions de Serge Lang à la théorie des nombres transcendants¹

Michel Waldschmidt²

Présenter l'ensemble des travaux de Serge Lang, même sans parler de ses fameuses controverses, nécessiterait plusieurs auteurs pour couvrir tous les domaines concernés. Dans cette présentation je vais limiter mon propos à un aspect bien particulier de son œuvre, qui est la partie concernant la théorie des nombres transcendants. Ses premières contributions remontent au début des années 1960. Depuis près d'un demi siècle le sujet a connu un développement incontestable ; S. Lang n'est certainement pas le seul à l'origine de ce renouveau du sujet, mais il y a joué un rôle de premier plan de diverses manières, comme nous allons le voir.

1. Présentation des travaux de Serge Lang

Quand S. Lang a commencé à s'intéresser à la théorie des nombres transcendants, dans les années 1960, ce sujet n'était pas encore à la mode. Il ne le deviendra que quelques années plus tard, à la suite des travaux de S. Lang certainement, mais aussi de ceux d'autres mathématiciens comme A. Baker. En dehors d'un petit nombre de spécialistes, peu de gens s'intéressaient à ces questions souvent jugées marginales et abominablement techniques. Les idées sous-jacentes n'étaient pas dégagées, les preuves restaient entourées d'un voile mystérieux : pourquoi arrivait-on à démontrer certains énoncés et pas d'autres ?

Armé d'une formidable intuition et d'un sens aigu de la clarté, S. Lang intervient alors et explique de façon limpide la stratégie des démonstrations. Il les simplifie (parfois excessivement), il simplifie aussi les énoncés, en même temps il introduit dans le sujet la théorie des groupes algébriques commutatifs. Il y avait déjà, bien sûr, des résultats sur les courbes elliptiques, et même sur les variétés abéliennes (dus à C.L. Siegel [51] et Th. Schneider [43, 44, 45] notamment), mais c'est vraiment S. Lang qui a permis le développement de la transcendance sur les groupes algébriques, qui jouent maintenant un rôle tellement important.

La source de ce travail, comme le précise S. Lang dans [14], est une conjecture de P. Cartier. S. Lang m'a raconté qu'au début des années 1960, lors d'une rencontre des membres de Bourbaki à laquelle il avait été invité (il n'en restera pas longtemps membre), P. Cartier lui avait posé deux questions. La première portait sur le théorème de Hermite-Lindemann qui concerne l'exponentielle usuelle e^z , ou si on préfère — et P. Cartier préfère — l'application exponentielle du groupe multiplicatif. Ce théorème affirme que 0 est le seul point algébrique en lequel la fonction

¹ Cette rédaction est celle d'un exposé de colloquium donné à l'Université de Caen le 15 novembre 2005. L'auteur remercie ses collègues caennais, et particulièrement Francesco Amoroso, pour leur invitation et leur accueil.

² Université P. et M. Curie (Paris VI), Institut de Mathématiques de Jussieu

exponentielle prenne une valeur algébrique. Est-il possible de l'étendre à l'application exponentielle d'une variété en groupe ? C'est cette question que S. Lang résout (théorème 1, voir [14]), ouvrant ainsi la voie à des développements qui ne sont pas encore épuisés. L'autre question de P. Cartier à S. Lang est un mystère : S. Lang m'en a parlé en me disant qu'elle concernait le théorème de C.L. Siegel [50, 52] sur la transcendance des valeurs de fonctions de Bessel (théorème 2), mais qu'il ne se souvenait plus de la suggestion que faisait P. Cartier pour le généraliser - qu'il ait oublié était exceptionnel chez Lang, il avait une mémoire impressionnante. Malheureusement P. Cartier ne s'en souvient plus non plus !

Un exemple spectaculaire de simplification apportée par S. Lang à la théorie des nombres transcendants est le théorème appelé *critère de Schneider-Lang* (théorème 3). Le premier énoncé dans cette direction [46] a été publié par Th. Schneider en 1949. Il porte sur les valeurs algébriques de fonctions algébriquement indépendantes : sous des hypothèses techniques convenables, ces valeurs algébriques ne peuvent pas être trop nombreuses. L'énoncé de Schneider est puissant, il contient un grand nombre de résultats antérieurs. Son principal défaut est la complication de l'énoncé : il prend une page complète des *Mathematische Annalen* [46]. Un énoncé légèrement simplifié de ce résultat est donné par Th. Schneider dans son livre [47], mais ce deuxième énoncé reste encore assez technique.

S. Lang a trouvé des hypothèses élégantes qui donnent un énoncé simple, profond, qui a de multiples corollaires. Il l'a d'ailleurs publié non seulement dans un de ses premiers articles [16] et dans son livre [19] sur les nombres transcendants (Chap. III, § 1), mais aussi en appendice de son livre *Algebra* [35].

Un des corollaires que l'on peut déduire de l'énoncé initial de Th. Schneider en 1949 est le *théorème des six exponentielles* (théorème 4 ; voir [20]). La simplification qu'a apportée S. Lang a un coût : le critère de Schneider-Lang ne contient pas le théorème des six exponentielles. C'est un petit paradoxe, étant donné que Th. Schneider n'a pas formulé explicitement le théorème des six exponentielles ; qu'il en ait connu l'existence est plausible, car le premier des 8 problèmes qu'il pose dans son livre [47] sur les nombres transcendants (conjecture 6) est équivalent à la conjecture des quatre exponentielles (conjecture 5). Le théorème des six exponentielles était aussi apparemment connu de C.L. Siegel : il en a communiqué un cas particulier à L. Alaoglu et P. Erdős [2] qui auraient eu besoin de la conjecture des quatre exponentielles pour préciser un argument de S. Ramanujan. A. Selberg m'a dit qu'il avait cherché à résoudre le problème des quatre exponentielles dans les années 1940, qu'il savait alors démontrer le théorème des six exponentielles, mais qu'il estimait que cela ne méritait pas d'être publié. S. Lang a été le premier à publier l'énoncé et la démonstration de ce théorème, suivi peu après par K. Ramachandra [42] (notons que K. Ramachandra remercie C.L. Siegel dans son article). Aussi bien S. Lang que K. Ramachandra ont formulé la conjecture des quatre exponentielles, qui reste un des défis majeurs de la théorie.

La démonstration par S. Lang ([19], Chap. II, § 1 et [20] du théorème des six exponentielles reste une des plus simples de la théorie des nombres transcendants. Elle permet d'expliquer clairement la stratégie, de voir quels sont les arguments qui permettent d'aboutir à la conclusion. Cette simplicité peut expliquer, au moins

en partie, que les personnes qui connaissaient le résultat avant S. Lang et K. Ramachandra n'aient pas daigné publié leur preuve – ils n'avaient sans doute pas anticipé les développements ultérieurs, dont les plus récents se trouvent dans les travaux de D. Roy [54].

Une version ultramétrique du théorème des six exponentielles a été établie par J-P. Serre (avec une extension en plusieurs variables), qui l'applique à une question de représentation ℓ -adique de courbes elliptiques [48, 49].

Le critère de Schneider-Lang ne contient pas le théorème des six exponentielles, mais une variante, ne faisant pas intervenir d'équations différentielles, le contient. Cela a fait l'objet aussi bien de travaux de S. Lang [18] que de K. Ramachandra [42].

Il existe une version du critère de Schneider-Lang en plusieurs variables, énoncée encore une fois par S. Lang [16], reposant sur la démonstration par Th. Schneider en 1948 de la transcendance des valeurs de la fonction Beta aux points rationnels [45]. Ce critère de Schneider-Lang en plusieurs variables concerne les produits cartésiens (théorème 7 ; voir [16] et [19] Chap. IV). S. Lang dit dans [19] (Chap. IV, historical note) que M. Nagata a suggéré un énoncé plus fort faisant intervenir des hypersurfaces algébriques. Formuler une telle conjecture aurait été difficilement envisageable avec l'énoncé antérieur de Th. Schneider. Cette conjecture de Nagata a été résolue par E. Bombieri en 1970 (théorème 8). La démonstration de E. Bombieri [5] utilise la méthode des estimations L^2 de Hörmander. Elle utilise aussi une extension en plusieurs variables du lemme de Schwarz, obtenue dans un travail en commun antérieur de E. Bombieri et S. Lang [6], où la masse moyenne des zéros de Lelong est l'outil essentiel.

Un second paradoxe est que le théorème de E. Bombieri ne contient pas, dans l'état actuel des connaissances des spécialistes, de résultat concret de transcendance nouveau par rapport au critère sur les produits cartésiens, alors que les outils intervenant dans sa démonstration sont pourtant beaucoup plus sophistiqués. Une des conséquences inattendues du critère en plusieurs variables a été trouvée en 1980 par D. Bertrand et D.W. Masser [4] : ils ont montré que ce critère avec les produits cartésiens contient le théorème de Baker (théorème 9) sur l'indépendance linéaire de logarithmes de nombres algébriques, puis ont étendu ce théorème de Baker aux logarithmes elliptiques (théorème 10). Seul le cas d'une courbe elliptique à multiplication complexe avait été obtenu par D.W. Masser [37], grâce à une extension de la méthode de Baker. La généralisation du théorème de Baker aux groupes algébriques (théorème 11), après avoir fait l'objet de nombreux travaux, notamment par D.W. Masser, a finalement été obtenue par G. Wüstholz [55]. Notons que D.W. Masser d'une part [38, 39, 40], S. Lang [23], J. Coates et S. Lang [8] d'autre part, ont contribué au développement de la théorie dans le cas particulier des variétés abéliennes de type CM.

Une autre conjecture, qui est née dans les mêmes conditions que celle de Nagata, mais qui en revanche n'est toujours pas résolue, est celle de Schanuel (conjecture 12). M. Nagata comme S. Schanuel assistaient au cours que donnait à Yale S. Lang sur les nombres transcendants, c'est alors qu'ils ont formulé ces suggestions. Ont-ils deviné l'importance de la contribution qu'ils apportaient à la théorie en proposant ces énoncés ? En tout cas ils ne les ont pas publiés eux-même, laissant à S. Lang le soin de le faire [19], et de donner à ce que devrait être la théorie

un éclairage nouveau. La conjecture de Schanuel contient la conjecture selon laquelle *des logarithmes de nombres algébriques linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ sont algébriquement indépendants*. Les conjectures de Y. André [3] vont plus loin : elles contiennent aussi la conjecture de Grothendieck ([19] Chap. IV, historical note).

J'ai affirmé que les simplifications apportées par S. Lang étaient parfois excessives. En voici un exemple (voir en haut de la page 49 du livre de S. Lang [19] sur les nombres transcendants). On définit la hauteur (*usuelle* ou *naïve*) $H(P)$ d'un polynôme à coefficients entiers $P \in \mathbb{Z}[X]$ comme étant le maximum des valeurs absolues de ses coefficients. Il est tentant de dire qu'une fraction rationnelle $R \in \mathbb{Q}(X)$ a une hauteur $\leq H$ si on peut écrire R comme quotient $R = P/Q$ de deux polynômes P et Q dans $\mathbb{Z}[X]$ qui sont tous deux de hauteur $\leq H$. Mais une telle définition n'est pas licite : le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est de hauteur 2, pourtant il est quotient de deux polynômes de hauteur 1 :

$$(X - 1)^2 = \frac{X^3 - X^2 - X + 1}{X + 1}.$$

De nos jours on utilise plutôt la *mesure de Mahler* que la hauteur usuelle (voir par exemple [10]), ce qui permet d'éviter cet écueil.

S. Lang utilise le même type de considérations pour définir l'ordre d'une fonction méromorphe : il a le droit de le faire dans ce cas, car si une fonction entière f peut s'écrire comme quotient de deux fonctions entières d'ordre $\leq \varrho$, alors f elle-même est d'ordre $\leq \varrho$.

L'intuition de S. Lang était spécialement bonne. Parmi les nombreuses conjectures qu'il a émises il faut bien chercher pour en trouver qui se soient révélées fausses. Voici un exemple, concernant des questions d'indépendance algébrique, où son optimisme a été excessif. Un critère de Gel'fond (théorème 13) affirme qu'il n'y a pas de suite de polynômes en une variable à coefficients entiers, qui, en un point donné $\theta \in \mathbb{C}$, prennent des valeurs suffisamment petites. Cela permet d'établir des énoncés d'indépendance algébrique de deux nombres (souvent parmi une collection de nombres). Par exemple A.O. Gel'fond a utilisé cet argument pour montrer que si α est un nombre algébrique différent de 0 et 1 et si β est un nombre algébrique de degré $d \geq 3$, alors parmi les nombres

$$\alpha^\beta, \alpha^{\beta^2}, \dots, \alpha^{\beta^{d-1}},$$

il y en a au moins 2 qui sont algébriquement indépendants. C'est un des exemples de théorèmes portant le qualificatif *petit degré de transcendance*. Pour obtenir de *grands degrés de transcendance*, il suffirait d'étendre le critère de Gel'fond en plusieurs variables. S. Lang a proposé un énoncé dans cette direction. Mais, comme le lui a fait remarquer E. Bombieri [21], un exemple trouvé antérieurement par A.Ya. Khintchine [12] et cité dans le livre de J.W.S. Cassels [7] - cf. théorème 14) montre qu'en dimension supérieure il faut introduire une hypothèse supplémentaire. Après les travaux de W.D. Brownawell et G.V. Čudnovs'kiĭ, la question a été résolue par P. Philippon [41] (voir le théorème 15) ; il convient de citer aussi les contributions de Yu.V. Nesterenko et G. Diaz notamment (voir par exemple [10]).

S. Lang se plaisait à imaginer quelle devait être la théorie, sans se limiter, ni aux résultats connus, ni aux méthodes existantes, même si publier des résultats

numériques ne le rebutait pas [1, 36]. En théorie des approximations diophantiennes comme en transcendance, il y a un gouffre entre ce qui est connu et ce qui est attendu. Partir de l'état de ses connaissances et des méthodes disponibles pour essayer d'anticiper n'est pas forcément ce qui éclaire le mieux le sujet. S. Lang a su s'affranchir de ces limitations, ce qui lui a permis de prédire avec assurance ce que devrait être la situation. C'est spécialement évident en géométrie diophantienne : nous ne traitons pas cet aspect de son œuvre (nous renvoyons au texte de Marc Hindry dans ce numéro de La Gazette), malgré ses liens étroits avec les questions d'approximation diophantienne (il n'y a pas vraiment de frontière entre les deux sujets). Prenons l'exemple de sa conjecture sur les mesures d'indépendance linéaire des logarithmes de points algébriques sur une courbe elliptique. Elle a fait l'objet de travaux de N. Hirata, puis M. Ably, avant d'être complètement résolue (même dans le cadre des groupes algébriques) par S. David et N. Hirata d'une part [9], É. Gaudron [11] d'autre part (théorème 19). Cette question était initialement motivée par un algorithme original de S. Lang [15] pour trouver les points entiers sur une courbe elliptique.

L'analogie entre les corps de fonctions et les corps de nombres est l'une de celles qui l'ont guidé. Une autre est l'analogie entre la théorie de Nevanlinna et les fonctions complexes d'une part, la théorie des nombres d'autre part (P. Vojta a beaucoup contribué à développer ce point de vue, et l'influence qu'a eue S. Lang sur ses travaux est indéniable).

S. Lang a contribué à de nombreuses conjectures : celle de Bateman-Horn [30] sur les nombres premiers et les polynômes en plusieurs variables, celle de Rohrlich [26] (voir aussi [24] p. 66) sur les relations entre les valeurs de la fonction Γ d'Euler, celle de Grothendieck [3]. . .

Les conjectures de l'introduction des chapitres X et XI de [25] ont été formulées avant la conjecture *abc* ; les versions raffinées des conjectures de Pillai et Hall (conjectures 16 et 17) qu'elles impliquent peuvent aussi être déduites de la conjecture *abc* (conjecture 18, voir [29] Chap. II § 1), ce qui est un indice de la cohérence de la présentation qu'il suggère.

S. Lang a écrit plusieurs articles de synthèse, le premier dès 1960 [13], puis en 1965 [17], en 1971 [21], en 1974 [22], en 1983 [27], en 1990 [28]. On peut ajouter à cette liste le volume *Number Theory III* [29] qu'il a écrit en 1992 pour l'encyclopédie des sciences mathématiques de Springer-Verlag.

Ces textes étaient l'occasion pour lui de proposer des conjectures qui fournissaient un éclairage original du sujet. S. Lang est probablement un des mathématiciens qui a le mieux su deviner ce que devrait être la théorie — les pistes qu'il a proposées ouvrent des perspectives qui ne sont pas prêtes d'être épuisées.

2. Théorèmes et conjectures

Dans cette section nous énonçons, en donnant des références, les théorèmes et conjectures auxquels il a été fait allusion dans la première partie.

Voici pour commencer la généralisation par S. Lang du théorème de Hermite-Lindemann aux groupes algébriques [14], [19] Chap. III, § 4, Th. 2.

Théorème 1 (Lang). *Soit G un groupe algébrique commutatif connexe défini sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques. Notons $T_G(\mathbb{C})$ l'algèbre de Lie à l'origine du*

groupe de Lie $G(\mathbb{C})$ (T_G est aussi l'espace tangent de G à l'origine), muni de sa $\overline{\mathbb{Q}}$ -structure $T_G(\overline{\mathbb{Q}})$ et $\exp_G : T_G(\mathbb{C}) \rightarrow G(\mathbb{C})$ l'application exponentielle de $G(\mathbb{C})$. Soit $\alpha \in T_G(\overline{\mathbb{Q}})$ tel que $\exp(\alpha)$ soit dans $G(\overline{\mathbb{Q}})$. Alors l'application $t \rightarrow G(t\alpha)$ de $\mathbb{C}$ dans $G(\mathbb{C})$ est algébrique.

Le théorème suivant, dû à C.L. Siegel [50, 52] concerne les valeurs des fonctions

$$K_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

qui sont reliées aux fonctions de Bessel par

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda K_\lambda(x).$$

Théorème 2 (Siegel). *Soit α un nombre algébrique non nul. Soit λ un nombre rationnel différent de $\pm 1/2, -1, \pm 3/2, -2, \dots$. Alors les deux nombres $K_\lambda(\alpha)$ et $K'_\lambda(\alpha)$ sont algébriquement indépendants.*

Voici un énoncé légèrement simplifié du critère de Schneider-Lang [19] Chap. III, § 2, [35] appendix.

Théorème 3 (Critère de Schneider-Lang). *Soient $f_1, \dots, f_m$ des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$. On suppose que f_1 et f_2 sont algébriquement indépendantes et d'ordre fini. Soit K un corps de nombres. On suppose que chacune des dérivées $(d/dz)f_i$ ($1 \leq i \leq m$) appartient à l'algèbre $K[f_1, \dots, f_m]$. Alors l'ensemble S des éléments w de $\mathbb{C}$ où chacune des fonctions f_i est définie et prend une valeur $f_i(w)$ dans K est fini.*

Le critère de Schneider-Lang ne contient pas le théorème des six exponentielles [20, 42], mais il existe des variantes du théorème 3 (voir notamment [18, 42]) qui n'imposent pas que les fonctions considérées satisfassent des équation différentielles à coefficients algébriques.

Théorème 4 (Théorème des six exponentielles). *Soient x_1, x_2 deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et soient y_1, y_2, y_3 trois nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors l'un au moins des six nombres*

$$e^{x_1 y_1}, e^{x_1 y_2}, e^{x_1 y_3}, e^{x_2 y_1}, e^{x_2 y_2}, e^{x_2 y_3}$$

est transcendant.

La conjecture des quatre exponentielles a été proposée par S. Lang [19], Chap. II, § 1, [20], puis K. Ramachandra [42].

Conjecture 5 (Conjecture des quatre exponentielles). *Soient x_1, x_2 deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et soient y_1, y_2 deux nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors l'un au moins des quatre nombres*

$$e^{x_1 y_1}, e^{x_1 y_2}, e^{x_2 y_1}, e^{x_2 y_2}$$

est transcendant.

Le premier des 8 problèmes du livre de Th. Schneider sur les nombres transcendants [47] est équivalent à la conjecture 5.

Conjecture 6 (Premier problème de Schneider). *On considère quatre logarithmes de nombres algébriques $\log \alpha_1, \log \alpha_2, \log \beta_1, \log \beta_2$. On suppose d'une part que $\log \alpha_1$ et $\log \alpha_2$ sont $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants et d'autre part que $\log \alpha_1$ et $\log \beta_1$ sont aussi $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants. Alors*

$$(\log \alpha_1)(\log \beta_2) \neq (\log \alpha_2)(\log \beta_1).$$

Le critère de Schneider-Lang a été étendu en plusieurs variables par S. Lang [16], [19], Chap. IV, grâce à un développement des arguments que Th. Schneider [45] avaient utilisés pour démontrer la transcendance de $B(a, b)$ quand a et b sont deux nombres rationnels.

Théorème 7 (Critère de Schneider-Lang pour les produits cartésiens). *Soient $f_1, \dots, f_m$ des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}^n$ et K un corps de nombres. On suppose que les $n + 1$ fonctions $f_1, \dots, f_{n+1}$ sont algébriquement indépendantes d'ordre fini et que chacune des dérivées partielles $(\partial/\partial z_j)f_i$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) appartient à l'algèbre $K[f_1, \dots, f_m]$. Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de $\mathbb{C}^n$. Alors l'ensemble S des éléments w de $\mathbb{C}$ où chacune des fonctions f_i est définie et prend une valeur $f_i(w)$ dans K ne contient pas de produit cartésien*

$$\{s_1 e_1 + \dots + s_n e_n; (s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n\},$$

où chaque S_i est infini.

La conjecture de Nagata [19], Chap. IV, historical note, a été résolue par E. Bombieri [5].

Théorème 8 (Bombieri). *Soient $f_1, \dots, f_m$ des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}^n$ et K un corps de nombres. On suppose que $f_1, \dots, f_{n+1}$ sont algébriquement indépendantes d'ordre fini et que chacune des dérivées partielles $(\partial/\partial z_j)f_i$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) appartient à l'algèbre $K[f_1, \dots, f_m]$. Alors l'ensemble S des éléments w de $\mathbb{C}$ où chacune des fonctions f_i est définie et prend une valeur $f_i(w)$ dans K est contenu dans une hypersurface algébrique.*

Une des sources importantes du renouveau de la théorie des nombres transcendants à partir des années 1970 est le développement de la méthode de Baker (voir par exemple [10]).

Théorème 9 (Baker). *Soient $\log \alpha_1, \dots, \log \alpha_n$ des logarithmes $\mathbb{Q}$ -linéairement indépendants de nombres algébriques. Alors les nombres $1, \log \alpha_1, \dots, \log \alpha_n$ sont $\overline{\mathbb{Q}}$ -linéairement indépendants.*

Le théorème de Baker a été déduit du critère de Schneider-Lang pour les produits cartésiens (théorème 7) par D. Bertrand et D.W. Masser [4], qui obtiennent par le même argument l'analogue elliptique.

Théorème 10 (Bertrand-Masser). *Soit E une courbe elliptique définie sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques, soient $u_1, \dots, u_n$ des éléments de $T_E(\overline{\mathbb{Q}})$, linéairement indépendants sur le corps des endomorphismes de E . On suppose que $\exp_E(u_1), \dots, \exp_E(u_n)$ sont des points algébriques de E . Alors $1, u_1, \dots, u_n$ sont linéairement indépendants sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$.*

L'extension du théorème de Baker aux groupes algébriques a fait l'objet de nombreux travaux, qui ont abouti au résultat suivant :

Théorème 11 (Wüstholz). *Soit G un groupe algébrique commutatif défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, $u_1, \dots, u_r$ des éléments de $T_G(\mathbb{C})$ tels que $\exp_G(u_j) \in G(\overline{\mathbb{Q}})$, ($1 \leq j \leq r$), $V = \mathbb{C}u_1 + \dots + \mathbb{C}u_r$ le sous-espace de $T_G(\mathbb{C})$ qu'ils engendrent, n la dimension du plus petit sous-espace vectoriel de $T_G(\mathbb{C})$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ contenant V . Alors $\exp_G V$ est contenu dans un sous-groupe algébrique de G de dimension $\leq n$.*

La conjecture de Schanuel ([19], Chap. III, historical note), contient essentiellement tous les énoncés de transcendance (et d'indépendance algébrique) que l'on peut espérer concernant les nombres liés à la fonction exponentielle.

Conjecture 12 (Conjecture de Schanuel). *Si $x_1, \dots, x_m$ sont des nombres complexes qui sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors le degré de transcendance de*

$$x_1, \dots, x_m, e^{x_1}, \dots, e^{x_m}$$

est au moins m .

L'inégalité de la taille (ou celle de Liouville) est un outil essentiel pour démontrer la transcendance de certains nombres. Quand on veut des énoncés d'indépendance algébrique de deux nombres on la remplace par le critère de Gel'fond [10]. L'énoncé simplifié que voici est dû à R. Tijdeman [53], lemma 6.

Théorème 13 (Critère de Gel'fond). *Soit $\theta \in \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe une suite de polynômes P_N non nuls de $\mathbb{Z}[X]$, où P_N a un degré $\leq N$ et une hauteur (naïve) $\leq e^N$, tel que*

$$|P_N(\theta)| \leq e^{-7N^2}.$$

Alors θ est algébrique et $P_N(\theta) = 0$ pour tout $N \geq N_0$.

L'extension [41] en dimension supérieure du critère de Gel'fond, permettant de démontrer des résultats d'indépendance algébrique de plusieurs nombres, demande de la prudence (qui a manqué à S. Lang et plus tard à G.V. Čudnovs'kiĭ), comme le montre l'exemple de A.Ya. Khintchine (voir [7, 21] ainsi que l'appendice de [41]). Noter que les nombres x_1 et x_2 , dont l'existence est affirmée par le théorème 14, sont algébriquement indépendants dès que la fonction ψ décroît suffisamment vite : cela résulte du critère 13 de Gel'fond.

Théorème 14 (Exemple de Khintchine et Cassels). *Soient $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ une fonction arithmétique à valeurs positives et m un entier ≥ 2 . Il existe des nombres réels $\theta_1, \dots, \theta_m$ algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$ tels que, pour tout entier positif N , il existe $m-1$ formes linéaires en trois variables*

$$L_i(X_0, X_1, X_i) = a_i X_0 + b_i X_1 + c_i X_i \in \mathbb{Z}[X_0, X_1, X_i] \quad (2 \leq i \leq m)$$

à coefficients entiers rationnels de valeurs absolues majorées par N , avec $c_i \neq 0$, telles que

$$|L_i(1, \theta_1, \theta_i)| \leq \varphi(N) \quad (2 \leq i \leq m).$$

Le critère de transcendance de Gel'fond a été étendu par P. Philippon [41] en un énoncé qui permet d'obtenir de grands degrés de transcendance. Voici un exemple de tel critère.

Théorème 15 (Critère pour l'indépendance algébrique). *Soient n un entier suffisamment grand, C un nombre réel suffisamment grand, $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ un élément de $\mathbb{C}^n$ et η un nombre réel positif. On suppose que pour tout entier N suffisamment grand, il existe un entier $m = m(N) \geq 1$ et des polynômes $Q_1, \dots, Q_m$ dans $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ satisfaisant*

$$\max_{1 \leq j \leq m} \deg Q_j \leq N, \quad \max_{1 \leq j \leq m} H(Q_j) \leq e^N$$

et

$$0 < \max_{1 \leq j \leq m} |Q_j(\theta_1, \dots, \theta_n)| \leq e^{-CN^\eta},$$

tels que l'ensemble des zéros communs des polynômes $Q_1, \dots, Q_m$ dans la boule

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^n; \max_{1 \leq i \leq n} |z_i - \theta_i| \leq e^{-3CN^\eta} \right\}$$

est fini. Alors le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps $\mathbb{Q}(\theta_1, \dots, \theta_n)$ est $> \eta - 1$.

L'énoncé conjectural de Pillai que voici signifie que la distance entre deux éléments consécutifs de la suite

$$1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, 36, 49, 64, 75, 81, \dots$$

des puissances parfaites tend vers l'infini.

Conjecture 16 (Conjecture de Pillai). *Soit k un entier rationnel non nul. Il n'existe qu'un nombre fini de quadruplets (x, y, p, q) formés d'entiers ≥ 2 tels que $x^p - y^q = k$.*

Les conjectures de l'introduction des chapitres X et XI de [25] contiennent, entre autre, un raffinement de la conjecture de Pillai.

Conjecture 17 (Raffinement quantitatif de la conjecture de Pillai). *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une constante $\kappa(\varepsilon) > 0$ telle que si (x, y, p, q) sont des entiers ≥ 2 pour lesquels $x^p \neq y^q$, alors*

$$|x^p - y^q| \geq \kappa(\varepsilon) \max\{x^p, y^q\}^{1-(1/p)-(1/q)-\varepsilon}.$$

On peut aussi déduire la conjecture 17 de la conjecture *abc* de Masser-Æsterlé (voir par exemple [29] Chap. II § 1).

Conjecture 18 (Conjecture **abc** de Masser-Æsterlé). *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une constante $\kappa(\varepsilon) > 0$ telle que si a, b, c sont des entiers rationnels positifs premiers entre eux satisfaisant $a + b = c$, alors le radical*

$$R(abc) = \prod_{p|abc} p$$

du produit *abc* satisfait

$$c \geq \kappa(\varepsilon) R(abc)^{1-\varepsilon}.$$

Les estimations diophantiennes conjecturées par S. Lang sur les logarithmes elliptiques ont été établies par É. Gaudron [11] d'une part, S. David et N. Hirata [9] d'autre part. Leur énoncé est valable pour des logarithmes de points algébriques sur un groupe algébrique commutatif.

Théorème 19 (Gaudron, David-Hirata). *Soient G un groupe algébrique défini sur un corps de nombres K et $u_1, \dots, u_n$ des éléments de $T_G(\mathbb{C})$ tels que $\exp_G(u_j) \in G(K)$ pour $1 \leq j \leq n$. Il existe un nombre positif $C = C(G, K, u_1, \dots, u_n)$ tel que, pour tout $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in K^n$ satisfaisant*

$$\beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n \neq 0,$$

on ait

$$|\beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n| \geq B^{-C},$$

avec $B = \max\{2, H(\beta_1), \dots, H(\beta_n)\}$ et $H(\beta)$ est la hauteur (naïve) du polynôme minimal de β .

3. En guise de conclusion

L'influence qu'a eue Serge Lang sur le développement de la théorie des nombres transcendants ne se limite pas à ses publications. Certes, les résultats originaux qu'il a démontrés ont certainement été parmi les plus importants du XX^e siècle dans ce domaine. Il est indéniable également que ses publications, à commencer par son livre sur les nombres transcendants en 1966, ont permis à de nombreux mathématiciens de pénétrer le sujet et de comprendre la stratégie des démonstrations. Mais ce n'est pas tout : il a également contribué d'une façon moins visible (pour ceux qui ne l'ont pas connu) par ses encouragements enthousiastes aux jeunes chercheurs. Nous sommes nombreux à en avoir bénéficié et à lui en être redevables.

4. Références

- [1] W. ADAMS & S. LANG – « Some computations in diophantine approximations », *J. reine angew. Math.* **220** (1965), p. 163–173 (= [31] p. 373–383).
- [2] L. ALAOGU & P. ERDÖS – « On highly composite and similar numbers », *Trans. Amer. Math. Soc.* **56** (1944), p. 448–469.
- [3] Y. ANDRÉ – *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 17, Société Mathématique de France, Paris, 2004.
- [4] D. BERTRAND & D. MASSER – « Linear forms in elliptic integrals », *Invent. Math.* **58** (1980), no. 3, p. 283–288.
- [5] E. BOMBIERI – « Algebraic values of meromorphic maps », *Invent. Math.* **10** (1970), p. 267–287 (Addendum, *ibid.*, **11** (1970), 163–166).
- [6] E. BOMBIERI & S. LANG – « Analytic subgroups of group varieties », *Invent. Math.* **11** (1970), p. 1–14 (= [31] p. 507–520).
- [7] J. CASSELS – *An introduction to diophantine approximation.*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. No. 45. Cambridge : At the University Press 1957, X, 166 p, 1957.
- [8] J. COATES & S. LANG – « Diophantine approximation on Abelian varieties with complex multiplication », *Invent. Math.* **34** (1976), no. 2, p. 129–133 (= [32] p. 236–240).
- [9] S. DAVID & N. HIRATA-KOHNO – « Recent progress on linear forms in elliptic logarithms », in *A panorama of number theory or the view from Baker's garden (Zürich, 1999)*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002, p. 26–37.
- [10] N. I. FEL'DMAN & Y. V. NESTERENKO – « Transcendental numbers », in *Number theory, IV*, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 44, Springer, Berlin, 1998, p. 1–345.
- [11] É. GAUDRON – « Mesure d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **333** (2001), no. 12, p. 1059–1064.
- [12] A. KHINTCHINE – « Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen », *Rendiconti Palermo*, **50** (1926), p. 170–195.

- [13] S. LANG – « Some theorems and conjectures in diophantine equations », *Bull. Amer. Math. Soc.* **66** (1960), p. 240–249 (= [31] p. 273–283).
- [14] ———, « Transcendental points on group varieties », *Topology* **1** (1962), p. 313–318 (= [31] p. 299–304).
- [15] ———, « Diophantine approximations on toruses », *Amer. J. Math.* **86** (1964), p. 521–533 (= [31] p. 313–325).
- [16] ———, « Algebraic values of meromorphic functions », *Topology* **3** (1965), p. 183–191 (= [31] p. 348–356).
- [17] ———, « Report on diophantine approximations », *Bull. Soc. Math. France* **93** (1965), p. 177–192 (= [31] p. 326–341).
- [18] ———, « Algebraic values of meromorphic functions. II », *Topology* **5** (1966), p. 363–370 (= [31] p. 384–391).
- [19] ———, *Introduction to transcendental numbers*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1966 (= [31] p. 396–506).
- [20] ———, « Nombres transcendants », in *Séminaire Bourbaki*, Vol. 9, Exp. No. 305, Soc. Math. France, Paris, 1966, p. 407–414 (publié en 1995, oublié dans [31]).
- [21] ———, « Transcendental numbers and diophantine approximations », *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971), p. 635–677 (= [32] p. 1–43).
- [22] ———, « Higher dimensional diophantine problems », *Bull. Amer. Math. Soc.* **80** (1974), p. 779–787 (= [32] p. 102–110).
- [23] ———, « Diophantine approximation on abelian varieties with complex multiplication », *Advances in Math.* **17** (1975), no. 3, p. 281–336 (= [32] p. 113–168).
- [24] ———, *Cyclotomic fields*, Springer-Verlag, New York, 1978, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 59.
- [25] ———, *Elliptic curves : Diophantine analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 231, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [26] ———, « Relations de distributions et exemples classiques », in *Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 19e année : 1977/78, Théorie des nombres, Fasc. 2*, Secrétariat Math., Paris, 1978, p. Exp. No. 40, 6 (= [33] p. 59–65).
- [27] ———, « Conjectured Diophantine estimates on elliptic curves », in *Arithmetic and geometry, Vol. I*, Progr. Math., vol. 35, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, p. 155–171 (= [33] p. 212–228).
- [28] ———, « Old and new conjectured Diophantine inequalities », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **23** (1990), no. 1, p. 37–75 (= [33] p. 355–393).
- [29] ———, *Number theory. III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 60, Springer-Verlag, Berlin, 1991, Diophantine geometry.
- [30] ———, « La conjecture de Bateman-Horn », *Gaz. Math.* (1996), no. 67, p. 82–84 (= [34] p. 213–216).
- [31] ———, *Collected papers. Vol. I*, Springer-Verlag, New York, 2000, 1952–1970.
- [32] ———, *Collected papers. Vol. II*, Springer-Verlag, New York, 2000, 1971–1977.
- [33] ———, *Collected papers. Vol. III*, Springer-Verlag, New York, 2000, 1978–1990.
- [34] ———, *Collected papers. Vol. IV*, Springer-Verlag, New York, 2000, 1990–1996.
- [35] ———, *Algebra*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [36] S. LANG & H. TROTTER – « Continued fractions for some algebraic numbers », *J. reine angew. Math.* **255** (1972), p. 112–134 ; addendum, *ibid.* **267** (1974), 219–220 (= [32] p. 69–92).
- [37] D. W. MASSER – *Elliptic functions and transcendence*, Springer-Verlag, Berlin, 1975, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 437.
- [38] ———, « Linear forms in algebraic points of Abelian functions. I », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **77** (1975), p. 499–513.
- [39] ———, « Linear forms in algebraic points of Abelian functions. II », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **79** (1976), no. 1, p. 55–70.
- [40] ———, « Linear forms in algebraic points of Abelian functions. III », *Proc. London Math. Soc.* **33** (1976), no. 3, p. 549–564.

- [41] P. PHILIPPON – « Critères pour l'indépendance algébrique », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1986), no. 64, p. 5–52.
- [42] K. RAMACHANDRA – « Contributions to the theory of transcendental numbers. I, II », *Acta Arith.* **14** (1967/68), 65–72; *ibid.* **14** (1967/1968), p. 73–88.
- [43] T. SCHNEIDER – « Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. II. Transzendenz-eigenschaften elliptischer Funktionen », *J. reine angew. Math.* **172** (1934), p. 70–74.
- [44] ———, « Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale », *Math. Ann.* **113** (1936), p. 1–13.
- [45] ———, « Zur Theorie der Abelschen Funktionen und Integrale », *J. reine angew. Math.* **183** (1941), p. 110–128.
- [46] ———, « Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise », *Math. Ann.* **121** (1949), p. 131–140.
- [47] ———, *Introduction aux nombres transcendents*, Traduit de l'allemand par P. Eymard, Gauthier-Villars, Paris, 1959.
- [48] J-P. SERRE – « Dépendance d'exponentielles p -adiques », in *Théorie des Nombres, Sém. Delange-Pisot-Poitou* 7(1965/66), No.15, 14 p., IHP, 1967.
- [49] ———, *Abelian l -adic representations and elliptic curves*, Research Notes in Mathematics, vol. 7, A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1998, With the collaboration of Willem Kuyk and John Labute, Revised reprint of the 1968 original.
- [50] C. L. SIEGEL – « Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen », *Abhandlungen Akad. Berlin* Nr. 1, 70 S (1929), p. 1–70 (see *Gesammelte Abhandlungen*, Springer-Verlag, Berlin-New York 1966 Band I, 209–266).
- [51] ———, « Über die Perioden elliptischer Funktionen », *J. reine angew. Math.* **167** (1932), p. 62–69.
- [52] ———, *Transcendental Numbers*, Annals of Mathematics Studies, no. 16, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1949.
- [53] R. TIJDEMAN – « On the algebraic independence of certain numbers », *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **74**=*Indag. Math.* **33** (1971), p. 146–162.
- [54] M. WALDSCHMIDT – *Diophantine approximation on linear algebraic groups. transcendence properties of the exponential function in several variables*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 326, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [55] G. WÜSTHOLZ – « Algebraische Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischer Gruppen », *Ann. of Math.* (2) **129** (1989), no. 3, p. 501–517.



Serge Lang, Université de Berkeley, 20 septembre 2004

ENSEIGNEMENT

AUTOUR DU COLLOQUE PISA

Les résultats de l'enquête PISA (Programme International de Suivi des Acquis) réalisée en 2003 ont été publiés en décembre 2004. Ce travail a été mené par l'OCDE (Organisation de Coopération et de Développement Économiques), organisation internationale qui regroupe 30 pays dans le monde auprès d'un échantillon de 275000 élèves de 15 ans de ces pays. L'objet de cette initiative consistait à mesurer la « culture mathématique » (traduction assez approximative de l'anglais « mathematical literacy ») des élèves concernés. Le dépouillement des résultats conduit à un classement des pays concernés. La Finlande arrive en tête (suivie par la Corée, les Pays Bas, le Japon), la France et l'Allemagne en milieu de peloton et des pays comme l'Espagne, les États-Unis ou l'Italie en queue.

En France, la question de l'enseignement est l'objet de beaucoup de débats passionnés. En particulier l'enseignement des mathématiques a souvent retenu l'attention des citoyens comme des enseignants et des responsables politiques. Dans la société, beaucoup de gens ignorent encore que les mathématiques ne sont pas seulement une discipline scolaire mais un domaine où se mène une recherche très active. L'école française de mathématiques est considérée comme l'une des premières du monde. L'état du système d'enseignement dans son ensemble ne peut donc laisser indifférent quiconque cherche à préserver la qualité de cette recherche d'autant plus que les retombées sur l'ensemble de la société sont primordiales. C'est une préoccupation commune de tous les mathématiciens de s'intéresser à ce qui fonde l'enseignement de leur discipline. Les initiatives sont nombreuses dans ce sens.

La Société Mathématique de France (SMF), la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI) ne pouvaient rester indifférentes à ces problèmes. Elles ont organisé avec leur homologue finlandaise la SMY (Suomen Matemaattinen Yhdistys : Société Mathématique Finlandaise) un colloque sur l'enseignement des mathématiques dans les deux pays à partir des résultats de PISA¹.

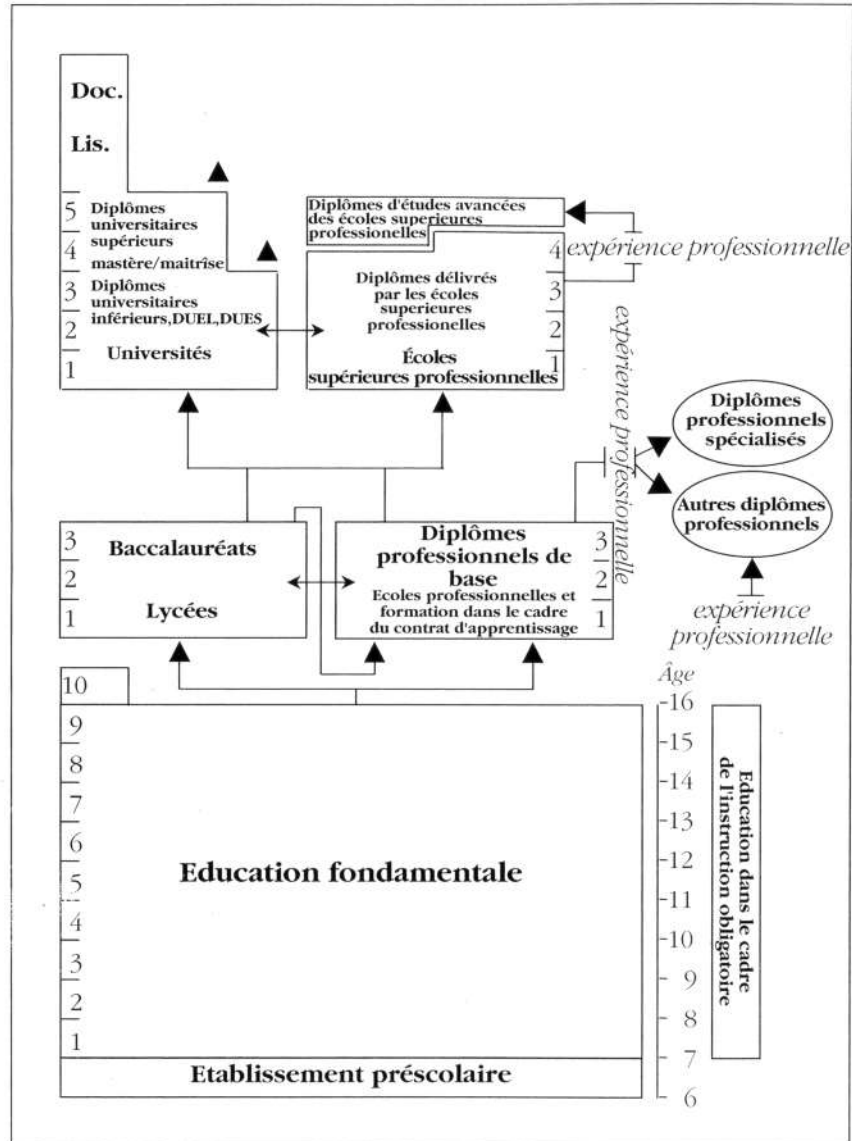
À cette occasion de nombreux textes destinés à alimenter la réflexion ont été écrits et mis à la disposition de tous sur le site de la SMF² que nous vous invitons à consulter.

La Gazette ne pouvait se faire l'écho de ces très nombreuses contributions et a donc choisi d'essayer de présenter aux lecteurs trois textes présentant à la fois un aperçu du système éducatif finlandais et une explication de la réussite de la Finlande.

¹ Colloque franco-finlandais « L'enseignement des mathématiques à partir de l'enquête PISA », 6-8 octobre 2006, Paris

² <http://smf.emath.fr/VieSociete/Rencontres/France-Finlande-2005/ResumeConferences.html>

Le système éducatif finlandais



Un aperçu du système éducatif finlandais

Osmo Pekonen¹

Pour introduire le colloque franco-finlandais, il sera utile de parler en termes très généraux du système éducatif finlandais et de son histoire, peu connue en France.

Tout d'abord, il faut énoncer le grand principe qui, selon la constitution finlandaise, domine notre système éducatif et qui est celui de l'égalité des chances. Indépendamment du sexe, de la classe sociale ou du domicile, tous les élèves finlandais doivent avoir les mêmes chances de réussir dans la vie. Un enseignement élitiste n'existe pas en Finlande, le mot même étant banni, sauf peut-être en quelques matières très spéciales comme la musique et le sport².

Depuis les années 1970, il y a en Finlande essentiellement un système éducatif unique qui est un service public. Sa structure est simple et peut être résumée par un organigramme. Chaque enfant finlandais de 6 ans a la possibilité de fréquenter pendant une année une classe de maternelle, gérée par la commune, et la majorité des enfants y participent, mais la vraie scolarité ne commence qu'à l'âge de 7 ans. L'enseignement préscolaire a pour objectif de renforcer, surtout par l'activité ludique, les aptitudes à l'acquisition de nouvelles connaissances, et de travailler ensemble.

La scolarité obligatoire dure neuf ans, de 7 à 16 ans; on l'appelle l'école fondamentale. Ensuite, il y a le lycée et l'université ou bien les diverses écoles professionnelles de niveau secondaire et tertiaire. Toutes les écoles sont mixtes. L'enseignement est gratuit à tous les niveaux.

Pratiquement tous les établissements scolaires appartiennent à l'État. L'école privée, comme alternatif, est de portée très limitée³. Les établissements privés fonctionnent sous contrat et dispensent un enseignement conforme aux programmes de l'école fondamentale. Avant la réforme des années 1970, votée sous un gouvernement de centre-gauche, le rôle du secteur privé était pourtant beaucoup plus important.

L'école dite fondamentale n'a pas de filières, elle est obligatoire et elle est la même pour tout le monde. Il n'y a pas de frais de scolarité, les manuels et les fournitures sont gratuits, les repas scolaires chauds à la cantine sont gratuits, et si nécessaire, les transports à l'école sont gratuits eux aussi. Le niveau moyen de l'école fondamentale est uniformément très bon partout dans le pays, au nord comme au sud, dans les villes comme à la campagne. La réussite d'un service public égalitaire se traduit par les très bons scores obtenus par les écoliers finlandais au programme de l'OCDE pour le suivi des acquis des élèves, au fameux PISA. L'état finlandais,

¹ L'auteur est mathématicien à l'université de Jyväskylä en Finlande. Il a fait une partie de ses études supérieures en France.

² En effet, c'est bien en *musique* où le système éducatif finlandais produit actuellement ses plus belles réussites. Grâce à un repérage des talents à un âge précoce, grâce à un réseau de classes spéciales qui couvre tout le pays et grâce à une grande tradition qui remonte, notamment, à Jean Sibelius (1865-1957), la Finlande est actuellement un gros fournisseur de compositeurs, de chanteurs d'opéra, de chefs d'orchestre...

³ Il s'agit de lycées à vocation très spéciale (Lycée juif, par exemple) ou bien dans certains cas, de pédagogies alternatives (de Rudolf Steiner, notamment).

par la Direction Nationale de l'Enseignement, organise périodiquement ses propres évaluations, veille attentivement sur les résultats et définit les normes à appliquer. Mais ce sont les 450 communes de la Finlande qui organisent l'enseignement et qui établissent ensemble avec les enseignants, les plans d'enseignement détaillés à appliquer. Pour chaque discipline, il y a plusieurs manuels possibles, préparés selon les normes par des maisons d'édition privées, que les enseignants peuvent choisir comme ils le veulent.

La liberté de l'enseignant de façonner les cours qu'il ou elle donne est considérable; le professeur individuel est l'ultime pivot du fonctionnement du système. Il règne, en général, une ambiance de confiance et de respect. Les enseignants de l'école finlandaise ont une formation plutôt excellente, sur le plan pédagogique et dans chaque discipline. Les instituteurs et les institutrices se spécialisent en au moins deux disciplines et enseignent toutes les disciplines à toutes les élèves d'une classe jusqu'à l'âge de 12 ans; après cet âge, l'élève aura des professeurs spécialisés dans chaque discipline.

Le bon niveau de formation du corps enseignant doit être la principale explication pour les bons résultats que l'école finlandaise produit. Le métier de professeur ou d'instituteur est respecté dans la société finlandaise. Il y a beaucoup d'hommes et de femmes politiques qui ont exercé ce métier et qui le comprennent; c'est même une tradition dans la vie politique finlandaise. L'importance de l'école est souvent au cœur des débats, mais des guerres scolaires (à la française?), on ne connaît guère. Un grand consensus règne autour des questions scolaires. La notation aux épreuves va de 4 (pour signifier un échec) à 10 pour récompenser la meilleure réussite. Pour le passage d'une classe à une autre il ne faut pas avoir de 4. En général, l'élève très faible sera suivi, il aura des cours de soutien par son propre professeur ou par un professeur spécialisé, et s'il progresse selon ses possibilités, il passera de classe en classe. Le redoublement est, en fait, très exceptionnel: pour avoir lieu, il doit être demandé par les parents et accepté par le corps professoral. Les élèves souffrant de dyslexie font l'objet d'une attention toute particulière dès le début de leur scolarité. Au pays de Nokia, on est en train de développer des jeux virtuels, éventuellement utilisables sur portable, qui leur permettront de maîtriser l'orthographe plus facilement.

La scolarité annuelle dure 190 jours. On travaille du lundi au vendredi et, typiquement, de 8 heures à 14 heures. La pause déjeuner à midi ne dure qu'une demi-heure. Il y a les vacances d'été, de Noël, et en février-mars les vacances de ski.

On insiste beaucoup sur l'enseignement des langues modernes, hélas, souvent au détriment des mathématiques. On apprend jusqu'à quatre langues étrangères à l'école (ce fut le cas de l'auteur de cet article). La Finlande est un pays officiellement bilingue. La langue de la majorité, c'est le finnois, celle de la minorité, le suédois. Ces deux langues sont très différentes. La majorité doit pourtant prendre la peine d'apprendre la langue de la minorité, et inversement. Les autres langues, par ordre de leur importance, sont: l'anglais, l'allemand, le français et le russe, voire même l'italien et l'espagnol. Les langues classiques, par contre, sont relativement peu pratiquées en Finlande, sauf au niveau universitaire⁴.

⁴ Mentionnons, cependant, une des fiertés de la civilisation finlandaise: les émissions hebdomadaires des informations en latin, *Nuntii latini*, diffusée par la radio finlandaise (chaîne 1).

Après l'école dite fondamentale, à l'âge de 16 ans, les jeunes sont confrontés à un choix difficile : continuer dans l'enseignement de culture générale, c'est-à-dire au lycée, ou bien s'orienter vers les écoles professionnelles. À cette étape, la génération se divise en deux moitiés. Les lycées sélectionnent eux-mêmes leurs élèves sur la base des résultats obtenus à l'école fondamentale. Le lycée dure normalement trois ans ; le finlandais moyen, donc, décroche son bac à l'âge de 19 ans.

Au lycée, chacun peut composer son programme assez librement. Le lycée se présente sous forme de modules à l'intérieur de chaque discipline que le lycéen peut choisir selon ses affinités. Il existe des modules de base obligatoires dans chaque discipline enseignée, mais en plus, le lycéen peut se spécialiser et choisir des modules supplémentaires, par exemple en mathématiques. Il faut réussir au minimum 75 modules en 3 ans pour se présenter aux épreuves du baccalauréat. Le baccalauréat comporte une seule matière obligatoire, c'est la langue maternelle, selon le cas, le finnois ou le suédois. À l'épreuve, de la langue maternelle qui dure 6 heures, il s'agit d'écrire un essai sur un sujet donné. On peut essayer deux fois. Il faut aussi passer trois autres examens dont on peut choisir les matières parmi les langues, les mathématiques, où il existe deux options : le programme court ou long, les sciences humaines ou les sciences naturelles. Les plus motivés peuvent passer plus de quatre épreuves ; six n'est pas inhabituel. Chaque épreuve dure 6 heures et il s'agit d'une épreuve écrite. En langue, il existe aussi une épreuve orale.

Depuis peu de temps, on remarque une certaine spécialisation des lycées. Il existe déjà des lycées à vocation artistique, musicale ou sportive mais, hormis quelques tentatives, nous n'avons pas vraiment de lycées spécialisés en mathématiques comme en France. Les classes préparatoires n'existent pas, et les grandes écoles à la française non plus.

Le lycée finlandais est assez exigeant et il crée des différences entre les élèves. Réussir les 75 modules nécessaires en trois ans n'est pas possible pour tout le monde. Certains ont besoin d'une année supplémentaire pour y arriver. Les plus ambitieux, par contre, raflent des modules supplémentaires, typiquement en choisissant une cinquième langue. Les surdoués font le lycée en deux ans.

Pratiquement tous les lycéens sont finalement reçus au baccalauréat, mais avec des mentions variables. Comme mentions, on utilise sept expressions en latin qui vont d'*improbatur* (échec) à *laudatur* (la meilleure note). Chaque année, dans chaque discipline, on maintient une répartition des mentions à peu près identique. La notion de « bachelier à six *laudatur* » veut dire une brillante réussite scolaire ; c'est le cas de quelques 2 % des bacheliers. Fait rarissime : réussir même plus de six *laudatur*. Le baccalauréat est une grande institution de la société finlandaise. Sa structure manifeste une remarquable stabilité depuis sa création en 1852. En Finlande, comme en Suède, on reçoit une *casquette blanche* pour marquer la réussite au bac. La casquette blanche, c'est aussi un symbole fort du patriotisme finlandais, des valeurs civiques et de la jeunesse éternelle...

Dans la plupart des cas, on entre à l'université sur concours. Toutes les universités pratiquent à tous les niveaux un *numerus clausus*. Il y a dix villes universitaires en Finlande : Helsinki, Turku (=Åbo, en suédois), Tampere, Jyväskylä, Lappeenranta, Kuopio, Joensuu, Vaasa, Oulu et même Rovaniemi sur le cercle polaire. On compte un total de 21 établissements de niveau universitaire (dans un pays de 5,2

millions d'habitants...)⁵. Le système universitaire a été décentralisé, même trop, et actuellement on cherche le moyen de sortir de cette situation.

La société finlandaise est extrêmement homogène : des communautés importantes issues de l'immigration vivant en banlieues misérables, il n'y en a pas vraiment. À Helsinki, où il y a le plus d'étrangers, le nombre total d'écoliers issus de l'immigration n'est que de 2500. L'école finlandaise leur offre une partie de l'éducation élémentaire en leur langue maternelle ce qui veut dire l'usage de 40 langues d'enseignement du vietnamien à l'arabe dans les seules écoles d'Helsinki. On exige quand même l'apprentissage du finnois, et l'intégration se passe plutôt bien. Aux fonds du Grand Nord, il existe aussi une minorité laponne qui bénéficie d'un enseignement en langue *sami* mais le nombre des enfants de cette minorité n'est que de quelques centaines.

Il sera utile d'ajouter quelques mots sur l'histoire de l'école finlandaise et même de l'histoire de la Finlande en général.

Les finlandais sont un peuple ancien avec sa langue, sa culture et sa mythologie dont les origines ne sont pas indo-européennes. Ils ont été christianisés par des croisés suédois à partir du XII^e siècle. L'apport suédophone, germanique et scandinave a été déterminant pour la naissance des institutions occidentales du pays. Au Moyen âge, la Finlande était un pays catholique. Ses évêques étaient souvent formés à la Sorbonne ; le finlandais Olavi Magni fut même recteur de la Sorbonne en 1435-36. Après la Réforme luthérienne du XVI^e siècle, la Finlande s'éloigna de la culture française et se rattacha définitivement à la sphère allemande. Encore aujourd'hui, la grande majorité des finlandais sont luthériens et la pratique religieuse revêt une ampleur considérable. La toute première école de la Finlande fut fondée par l'Ordre des Frères Prêcheurs à Turku en 1249. La première université, une création de la reine Christine de Suède, date de 1640. Autrefois située à Turku, elle fut transférée à Helsinki en 1827⁶.

La Finlande fut pendant sept siècles une possession suédoise et cela jusqu'à 1809 où, comme une conséquence de l'accord de Tilsitt entre Napoléon Bonaparte et Alexandre 1^{er}, le pays passa de la domination suédoise à celle des russes. La période de la domination russe n'était pourtant pas une tragédie pure parce que le tzar a accordé à la Finlande le statut d'un Grand-duché autonome au sein de l'Empire russe. La Finlande a ainsi pu conserver ses institutions, ses anciennes lois suédoises et sa religion luthérienne. C'est pendant le XIX^e siècle, sous domination russe, que le sentiment national finlandais a pris forme. L'école, où la langue d'enseignement n'était pas le russe mais soit le finnois, soit le suédois, a joué un très grand rôle pour maintenir le sentiment national et une identité occidentale et pour préparer l'indépendance qui a été déclarée en 1917. La France fut le premier pays occidental à reconnaître la Finlande indépendante.

⁵ À savoir : Académie d'art et d'esthétique d'Helsinki, Académie de théâtre, Académie des Beaux-Arts, Académie nationale de la défense, Académie Sibelius, Académie d'Åbo, L'École d'économie et de commerce de Turku, L'École d'économie et de commerce d'Helsinki, École suédoise d'Economie et d'administration, Université de technologie de Lappeenranta, Université de technologie de Tampere, Institut universitaire de technologie d'Helsinki, Université d'Helsinki, Université de Joensuu, Université de Jyväskylä, Université de Kuopio, Université de Laponie, Université d'Oulu, Université de Tampere, Université de Turku, Université de Vaasa.

⁶ Pour une histoire de l'Université d'Helsinki (en allemand), voir : Matti Klinge, *Eine nordische Universität : die Universität Helsinki 1640-1990*. 800 pages. Helsinki : Otava, 1992.

Le père du système éducatif finlandais est Uno Cygnaeus (1810-1888), un pasteur luthérien qui exerça la fonction d'inspecteur supérieur des écoles. Il contribua à fonder des centaines de nouvelles écoles primaires en Finlande rurale. Ce pasteur éclairé est à l'origine de l'idée d'une école primaire unique, mixte et obligatoire pour tout le monde, indépendamment de la classe sociale. D'ailleurs, l'alphabétisation des campagnes fut achevée dans les pays protestants de l'Europe du nord beaucoup plus tôt qu'en France parce que l'église insistait beaucoup dessus depuis le XVI^e siècle, comme une pré-condition du mariage.

Le grand homme finlandais Uno Cygnaeus combinait en sa personnalité deux facettes : celle d'un pasteur et celle d'un scientifique curieux de tout. C'était un grand naturaliste qui avait fait le tour du monde, en bateau et en traversant l'Asie à cheval. Il a beaucoup insisté sur l'importance des sciences naturelles comme matières d'enseignement. D'autre part, une formation religieuse et morale devait aussi avoir sa place à l'école qu'il a fondée, et cette tradition continue encore aujourd'hui. Il y a un enseignement important de la tradition chrétienne à l'école en Finlande. Bien sûr, en même temps, c'est une école respectueuse de toutes les traditions religieuses. Par exemple, le foulard islamique n'y est pas interdit. Il convient d'insister sur les origines *chrétiennes* de l'école de la République finlandaise. Il faut comprendre que dans le paysage spirituel des campagnes finlandaises au XIX^e siècle, quand la Nation finlandaise a pris forme, les figures du curé et de l'instituteur n'étaient pas antagonistes, comme en France. Au contraire, c'étaient des alliés et parfois ils étaient la même personne ; c'était le cas de Cygnaeus.



© droits réservés

*Le pasteur Uno Cygnaeus (1810-1888),
père de l'école en Finlande*

En Finlande, il n'y a donc pas « les deux Finlande » qui s'affrontent. En effet, l'Église et l'État, jusqu'à aujourd'hui, n'ont jamais été séparés. Certes, la Finlande est une république mais elle n'est pas une république laïque à la française. L'église y joue un rôle social et culturel important et elle participe à la vie de l'école.

Nous n'avons pas beaucoup parlé des *mathématiques* dans ce texte. Contentons nous de signaler que l'histoire des mathématiques en Finlande est tout à fait vénérable : notamment, en analyse complexe, les Finlandais ont créé une école à réputation mondiale. Quelques grands noms : Ahlfors, Lindelöf, Mellin, Nevanlinna...⁷ Le Prix Nevanlinna, qui a été créé en 1981 par l'Union internationale mathématique et par l'Université d'Helsinki, récompense une contribution majeure dans le domaine des mathématiques, dans son aspect informatique.

⁷ Pour une histoire des mathématiques en Finlande (en anglais), voir : *Gustav Elfving, The history of mathematics in Finland 1828-1918*. 195 pages. Helsinki : Societas scientiarum Fennica, 1981. Une suite, écrite par Olli Lehto, est à paraître.

Un point de vue sur PISA¹

Antoine Bodin²

Le programme PISA est un programme d'évaluation international imposant par le nombre de systèmes éducatifs concernés (une cinquantaine), par le nombre d'élèves interrogés, et par la masse des données recueillies. Il s'agit d'un programme triennal développé par l'OCDE pour évaluer les acquis des jeunes de 15 ans. De ce fait, en France, plus de la moitié des élèves de l'échantillon étudié se trouvaient en seconde au moment de l'évaluation, tandis que d'autres se trouvaient déjà en première, d'autres encore... en quatrième. La raison essentielle qui a conduit l'OCDE à mettre en place cette étude est la conviction déclarée que l'instruction est la clef du développement. L'évaluation porte sur ce que l'OCDE identifie comme constituant l'ensemble des connaissances et des compétences indispensables à l'homme d'aujourd'hui, quelle que soit la place qu'il (ou elle) occupe dans la cité. Les domaines évalués sont le « savoir lire », « les mathématiques pour tous », « les sciences pour tous » et la « résolution de problèmes ».³

PISA recueille des informations sur les acquis des élèves, mais aussi sur les relations entre les acquis observés et de nombreuses données contextuelles : données socio-économiques et culturelles relatives aux pays et aux familles, données relatives aux établissements, aux classes et aux pédagogies mises en œuvre, et, enfin, données personnelles relatives aux élèves.

La fiabilité des conclusions qu'il est possible de tirer de l'étude dépend à l'évidence de la qualité des procédures de recueil de l'information (échantillonnage en particulier), de la qualité du questionnement, et de la qualité des procédures de traitement des données. Toutefois, les premières questions qui se posent sont relatives à la pertinence de l'étude et à sa validité. La validité de l'évaluation proprement dite, c'est-à-dire, pour une part l'adéquation du cadre de référence de l'étude à l'objet évalué et, d'autre part, l'adéquation des questions d'évaluation à ce cadre, ne fait pas nécessairement l'unanimité. Dans cette communication, je suis parti de l'idée que la pertinence et la validité interne de l'étude ne posaient pas de problème. Si l'on admet ce point, au moins temporairement, les questions les plus importantes pour la communauté mathématique sont celles de la qualité du cadre de référence à partir duquel les questions de l'évaluation sont construites et interprétées, puis de la validité des questions elles-mêmes.

Dans ce court résumé, je n'évoquerai qu'incidemment le cadre de référence lui-même, renvoyant à un document de synthèse sur la question (cf. références).

À propos de validité, il convient de distinguer plusieurs aspects : validité interne, validité curriculaire (qui varie selon les systèmes éducatifs), validité épistémologique, validité didactique. Ce sont ces derniers points que j'ai tenté de

¹ Résumé d'une communication faite lors du colloque franco-finlandais.

² IREM de Franche-Comté.

³ Aucune de ces expressions n'est cependant une traduction correcte des expressions anglaises « reading literacy » ; « mathematical literacy », « science literacy » et « problem solving ». La traduction officielle, en français, de literacy par « culture » ne fait que conduire à de profonds malentendus.

développer dans le texte de ma communication (cf. références) ; ce que je résume rapidement ici.

Validité interne du questionnaire

Il s'agit de la cohérence globale entre les intentions affichées, le cadre de référence et le questionnaire proprement dit. Cette validité me semble assez bien assurée. Ce qui signifie en particulier que si l'on rejette la pertinence de l'étude ou la validité du cadre de référence, ce qui suit est sans objet.

Validité curriculaire

Une mise à plat du questionnaire de PISA a permis d'étudier les rapports entre ce questionnaire et le curriculum français (programmes officiels, mais aussi expériences rencontrées par les élèves). On peut déjà se demander si les élèves concernés ont reçu un enseignement leur permettant de traiter les questions posées. Pour 75% des questions, la réponse est plutôt « oui ». Toutefois, par leur forme et leur contenu, les questions sont souvent plus proches de ce que les élèves ont l'habitude de rencontrer à l'école primaire ou au début du collège que dans les classes ultérieures (habillage aussi concret que possible, mathématisation à la charge de l'élève mais se satisfaisant de mathématisations pauvres).

Simultanément, environ 25% des questions de PISA ne correspondent pas à ce que les élèves étudient au collège. C'est en particulier le cas pour les questions du domaine « incertitude » et pour certaines questions de combinatoire. Environ la moitié des questions sont des QCM à réponse unique incitant à répondre au hasard lorsque l'on ne sait pas. Cela défavorise les élèves français, peu habitués à cette forme de questionnaire et, heureusement, moins enclins à répondre n'importe quoi qu'on ne le dit parfois (les taux de non-réponse aux QCM sont supérieurs en France à ce qu'ils sont dans la plupart des autres pays). On peut ensuite se demander dans quelle mesure les questions posées recouvrent les contenus et méthodes enseignées dans notre système éducatif.

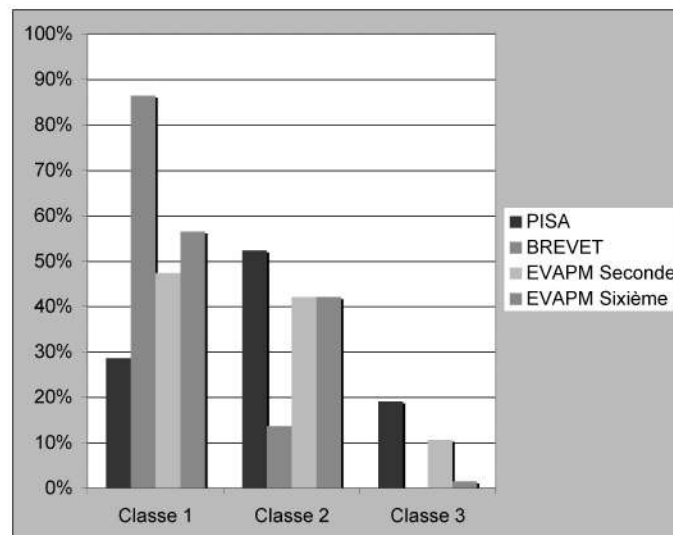
La comparaison entre les contenus sollicités par l'ensemble des questions de PISA et l'ensemble des contenus enseignés au niveau du collège montre un recouvrement curriculaire de l'ordre de 15%. C'est-à-dire qu'environ 85% des contenus enseignés au collège ne sont pas abordés par PISA. Il est cependant exact que ces 15% concernés relèvent des mathématiques utiles à tous et, dans une certaine mesure, de ce qu'il est convenu d'appeler « les bases ». Les indicateurs tirés de PISA concernent donc la capacité qu'a notre système éducatif à doter tous les jeunes d'une formation mathématique minimum, celle dont ils ne devraient pas pouvoir se passer quelle que soit leur vie future. PISA montre à l'évidence que, sur ce point, les élèves français ne sont pas bons ; cela n'est pas nouveau, l'étude TIMSS de 1995 le montrait déjà amplement. Mais les contenus, pour importants qu'ils soient, renseignent mal sur le niveau de complexité des situations proposées et des traitements attendus.

Il est courant en matière d'évaluation de distinguer différents niveaux de complexité (complexité cognitive). Nous utilisons ici la classification en 3 classes de PISA :

Classe 1 : reproduction : « ...consiste en calculs simples et définitions du type le plus habituel dans les évaluations. ».

Classe 2 : connexions : « ...demande que des connexions soient faites pour résoudre des problèmes »

Classe 3 : réflexion : « ... demande pensée mathématique, généralisation et initiatives... demande que les élèves s'engagent dans l'analyse, qu'ils identifient les éléments de la situation proposée et qu'ils posent leurs propres problèmes. »



Le graphique montre que les questions de PISA se répartissent dans les trois classes, alors qu'une épreuve de Brevet des collèges (Sud-Ouest 2005 – choisie pour représenter les épreuves de cet examen) concentre la plupart des questions dans la classe 1 (reproduction). On constate en effet que les questions de PISA relèvent à plus de 70% des niveaux 2 et 3, alors que seules 15% des questions du brevet relèvent de ces niveaux.

La comparaison avec le questionnement des études de l'Observatoire EVAPM montre, comme on le voit sur ce graphique, que, lorsqu'ils le peuvent, les enseignants essaient aussi de se placer aux différents niveaux taxonomiques. Toutefois, ils sont nombreux à dire que, dans les conditions qui leur sont faites, ils ne peuvent que rarement le faire.

Validité épistémologique

Le domaine mathématique peut être étendu ou restreint à volonté. Si de nombreuses questions sont facilement considérées comme relevant du champ mathématique, cela est moins évident pour d'autres. PISA, dans son souci de coller au réel, et même à la vie quotidienne, ne peut éviter d'utiliser abondamment le langage courant pour présenter ses questions. Dans certains cas, la compréhension d'énoncés qui peuvent difficilement être qualifiés de textes mathématiques, devient la principale difficulté que les élèves ont à affronter. Bien sûr, cela peut faire partie de l'activité mathématique normale, mais il n'est jamais sûr que l'habillage des

questions où le type de langage utilisé ne soit pas ce qui empêche nombre d'élèves de résoudre des questions qui, sur le plan mathématique, peuvent apparaître comme tout à fait triviales. Pour certaines questions, le bon sens et la possibilité de compter sur ses doigts suffit à résoudre la problème (une fois compris); la moindre expérience de bricolage suffit pour répondre à la plupart des questions de géométrie. Ajoutons la faible importance que l'étude PISA accorde à la question de la preuve. Sans aller jusqu'à l'idée de démonstration (totalement absente), les processus d'explication et de justification sont très peu pris en compte. Cela fait évidemment, une grande différence avec les conceptions françaises habituelles concernant les acquis mathématiques.

Des questions dites « de probabilité » ne font en réalité appel qu'au sens commun et aux préconceptions du type, justement, de celles qui ont fait longtemps obstacle à l'émergence du calcul des probabilités. Dans tous ces cas, s'agit-il encore de mathématiques? Une bonne préparation aux questions concrètes est-elle aussi une bonne préparation à l'accès aux mathématiques plus abstraites? Alors que de nombreux systèmes éducatifs incitent les enseignants à mettre l'accent sur le concret et la « vie réelle » (certains, dans le but non dissimulé d'obtenir de meilleurs résultats dans les études internationales), la question mérite d'être posée.

Validité didactique

Quelles situations d'enseignement peuvent aider les élèves à acquérir, simultanément, des compétences dans les mathématiques du quotidien (qui sont pour une part les mathématiques du sens commun) et dans des niveaux mathématiques davantage abstraits et symboliques? Certains objecteront que la question n'est pas pertinente et qu'il y a continuité entre les savoirs communs et le savoir théorique. À l'opposé, comme les recherches de l'école française de didactique nous ont aidés à le comprendre, nous pensons que nombre de ruptures sont nécessaires et sont constitutives de la construction du savoir. Nous pouvons donc craindre que l'accent trop fort mis sur la vie réelle et sur les situations concrètes puisse, en retour, avoir des effets négatifs sur les apprentissages.

À propos des différences entre la Finlande et la France

Les remarques précédentes ne pouvaient être faites qu'à partir d'une analyse approfondie des questions d'évaluation et de l'observation des résultats question par question (ce qui m'a obligé à passer par Melbourne, compte tenu du secret d'état que ces données semblent représenter dans notre pays). Commençons donc par dénoncer la mystification habituelle qui consiste à communiquer des résultats relatifs à un questionnement inconnu en utilisant des échelles quasiment ésotériques.

En ce qui concerne, par exemple, les différences observées entre la Finlande et la France, les scores annoncés officiellement pour les mathématiques (511 pour la France, 548 pour la Finlande) cachent joliment le fait que cette différence signifie une différence de 0,33 écart-type sur l'échelle normale réduite (moyenne 0, écart-type 1), cela il est vrai au voisinage d'un point de distribution où la densité de probabilité est maximale. Peu de gens savent cela, et encore moins sont en mesure de le comprendre (dans le public, mais aussi parmi les journalistes spécialisés et chez les politiques!).

En ce qui concerne l'amplitude des différences, selon les items étudiés les différences s'étalent entre +30% en faveur des élèves finlandais et +25% en faveur des élèves français. La moyenne des différences étant de + 3,5% en faveur des élèves finlandais.

Voilà de quoi relativiser le « miracle finlandais ». Ce miracle, s'il se confirmait, devrait plutôt conduire à regarder du côté de la qualité des rapports des élèves et des enseignants entre eux, et avec le système scolaire, ainsi que du côté du rapport au savoir et de la motivation des élèves, ce qui ferait déjà beaucoup et justifierait que l'on s'y arrêât, que du côté d'une supériorité absolue dans la maîtrise des savoirs⁴.

En guise de conclusion

Ce qui précède ne constitue pas une mise en cause de PISA, de son intérêt, et de la qualité de ses résultats (résultats facilement accessibles par ailleurs), mais seulement une tentative d'en délimiter la signification et la portée. Dans cette communication, nous avons essayé de démontrer que des précautions étaient nécessaires, mais aussi que les études PISA méritaient d'être prises au sérieux. Elles peuvent en particulier conduire les enseignants à de nouvelles questions et à de nouvelles idées susceptibles de les aider à mener un enseignement de nature à satisfaire les besoins de notre société tout en préservant les valeurs dont nous sommes dépositaires. Les études internationales sont une bonne occasion de s'interroger sur la solidité et sur la qualité de notre système. Elles fournissent des indicateurs objectifs indépendants dont il serait bien dommage de se priver. Elles sont aussi une occasion d'échanges et de partage à travers pays et cultures qui ne peut qu'enrichir notre propre vision de l'enseignement des mathématiques comme, d'une façon plus générale, de la culture de notre temps.

On constate que la participation de la France à ces études est très erratique. D'une façon assez logique moins la France participe et moins son influence s'y fait sentir, et réciproquement. De ce simple point de vue, il serait hautement souhaitable que notre pays reprenne sa participation aux études TIMSS et, en particulier, qu'il participe, enfin, aux études portant sur l'élémentaire (TIMSS 2007) et qu'il participe à la réplication de l'étude portant sur le niveau terminale scientifique (TIMSS 2008). D'une façon générale, les différentes évaluations sont complémentaires : évaluations nationales officielles ou non, évaluations internationales PISA et TIMSS, etc. Des analyses prenant en compte ces diverses évaluations devraient être conduites par des équipes au sein desquelles l'institution pourrait avoir sa place, sans pour autant avoir le monopole de l'interprétation. Des recherches indépendantes devraient être conduites sur les études déjà faites. Des enquêtes complémentaires devraient être suscitées et menées au niveau national et au niveau européen.

⁴ Ce point de vue fait écho aux échanges que nous avons eus avec des collègues finlandais lors du colloque.

Références

- [1] Bodin, A. (2005) *Ce qui est vraiment évalué par PISA en mathématiques. Ce qui ne l'est pas. Un point de vue français. Communication faite à la conférence franco finlandaise sur PISA. Aussi en anglais : » What does PISA really assess ? What it doesn't ? A French view. »* Sites Web de la SMF et de l'APMEP.
- [2] Bodin, A. (2005) *Les mathématiques face aux évaluations nationales et internationales. De la première étude menée en 1960 aux études TIMSS et PISA ... en passant par les études de la DEP et d'EVAPM* Communication séminaire de l'EHESS (à paraître).
- [3] Dupé, C. & Olivier, Y. (2005) *Ce que l'évaluation PISA 2003 peut nous apprendre.* Bulletin de l'APMEP N°460 - octobre 2005.

Adresses

Cadre de référence officiel et rapports internationaux : <http://www.pisa.oecd.org/>
 Sur le site de l'APMEP (et partiellement sur le site du colloque) : articles cités ci-dessus, présentation condensée du cadre de référence (framework) diaporamas et présentation des questions libérées avec des résultats (en français et en anglais)
http://www.apmep.asso.fr/rubrique.php3id_rubrique=114

What are the reasons behind the success of Finland in PISA ?

George Malaty¹

The success of Finland in PISA has surprised mathematicians and mathematics educators both in and outside Finland, myself among them. Nevertheless, because of my background and experience, it was easy for me to understand the reasons behind this success. The five main reasons are the success of pre-service teacher education, the culture of the teaching profession, the success of in-service teacher education, the different efforts which have been made to develop mathematics education and the daily traditions of school life in Finland.

The success of pre-service teacher education

The success of pre-service teacher education in Finland has mainly two aspects:

- keeping the level of teacher education qualification high
- being able to recruit motivated students.

As regards the teaching qualification, every schoolteacher must achieve a Masters degree: an M. Ed. for a primary school teacher (Grades 1 - 6) and an M.A. or M.Sc. for a secondary school teacher (Grades 7 - 12). Regarding the recruitment of teachers, although entry to secondary mathematics teacher education in Finland is at a satisfactory level, primary teacher education (Grades 1-6) is one of the most popular studies in higher education. Whereas we are able to recruit enough students to fill most of the places available for secondary mathematics teacher

¹ University of Joensuu, Finland

education, the number of applicants for primary teacher education is 5-6 times the number of places available. Those who fail to obtain a place normally apply again one or more times in the following years. Note that in Finland primary teachers are known as class teachers because they must be able to teach all subjects to a class.

Why is primary teacher education so popular?

One of the main reasons is the special status of primary school teachers in Finnish society. For about 150 years, the teaching of reading and writing has been the responsibility of primary school teachers, a task previously undertaken by a holy organisation, the church. Because of the *1921 Primary School Compulsory Education Act*, a primary school was established in every village and the Primary teacher became an 'enlightening candle' for the community. After that time, beside Church Street, there was a School Street in each town. By 1974, primary school teacher education had been completely transferred to universities, generating further interest in primary teacher education. From an affective point of view, Finnish youth remembers their time spent in Primary school, especially the early years, with great warmth. During these years, it is quite common to end the school day by shaking hands with the teacher and not uncommon to give the teacher a hug.

What about secondary teacher education?

The main reason for the relative popularity of secondary teacher education is related to more general factors beyond secondary school. These factors can be divided into four inter-related groups:

- a- the welfare of schools
- b- the pleasant work environment in schools
- c- the daily traditions of school life
- d- the school principles of care, comfort and equality.

These factors add a special meaning to our discussions but I will deal with them towards the end of this paper.

The Culture of the Teaching Profession

For the majority of Finnish teachers, teaching is a mission in which there has been a long tradition of teachers 'interest in students' learning. This can be seen from two aspects: one is the interest of teachers in developing themselves, and the other is their intimate approach to helping individual students, for instance in solving a mathematical problem. It is common to see the teacher sitting on his or her knees in front of a student's desk in order to have a face to face quiet discussion.

In Finnish schools there are no inspections. This not only saves money but also makes each teacher feel free and responsible. Every teacher can develop his or her own curriculum, building on the basic curriculum published by the National Board of Education and the more detailed curriculum accepted by the school, in which every teacher has played a part in developing. Teachers are also involved in writing the core National Curriculum. In addition, every teacher has the freedom to choose the textbooks needed for his or her class from those made available by different publishers. All this freedom gives every teacher an active role in the profession,

making them highly interested in their work and offering them an opportunity to develop their experiences.

The Success of In-service Teacher Education

The in-service education of teachers is well organized in Finland, with different organisations providing different types of courses. For example, the National Board of Education provides different types of in-service education in mathematics teaching and local education authorities provide in-service courses for primary and secondary school teachers.

Teachers' associations also provide in-service education on mathematics teaching both locally and nationally. The main associations are Mathematical Subjects Teachers Association, Class Teachers Association, Teachers of Early School Grades Association (Grades 1 and 2) and Specialist Teachers Association.

Each university has a centre for continuing education and each province has a Summer University. Both provide different types of education, including in-service education for teachers. Also, 'Free Institutes' and 'Civil Institutes' can provide in-service education for teachers.

In this brief survey, I have mentioned the main organisations providing in-service education for teachers but this is not a complete list of providers. In-service education is sometimes provided free, otherwise teachers have to obtain funding from their schools. It is remarkable that in some cases teachers themselves pay for participation on in-service courses of interest to them ! An indication of how interested teachers in Finland are in their profession and its development. I must also mention that in some cases teachers can have an influence on the content of in-service courses, increasing teachers' motivation to attend such programmes.

The Different Efforts Made to Develop Mathematics Education Case study: the role of the University of Joensuu

We have made different efforts to develop mathematics education in Finland, especially during the 1990s when different organisations were involved. Let me now tell you about the role of the University of Joensuu.

One of the main problems we had in mathematics education was the lack of primary school teachers who were mathematics specialists. Although as a minimum, half of the programme of study for an M.Ed. is devoted to education, a modest obligatory part is allocated to mathematics and mathematics education. The study programme for primary teacher education consisted of 160 credits while the minimum part of educational studies was 75 credits. The obligatory part of mathematics and mathematics education together was 3-4 credits. A credit relates to 20 teaching hours and each teaching hour is 45 minutes (Malaty 2004). As a result of the Bologna Declaration, changes have taken place in teacher education programmes for the 2005 quota but these changes have not affected the structure or the content of teacher education programmes so there have been no changes to mathematics and mathematics education programmes.

Indeed, there had always been an opportunity to choose one or two school subjects in which to specialise or to choose elective educational studies, but mathematics had not been a popular choice.

Less than 2% of students chose mathematics as a specialisation and this remained the case until 1992, when the work done at the University of Joensuu led to radical changes. At the moment, mathematics is one of the most popular specialist subjects on the Primary teacher education course at the University of Joensuu, with more than 80% of students specialising in mathematics (15 credits) and half of them continuing their studies to 35 credits. The study for 35 credits offers a secondary school mathematics teacher qualification.

The story of the University of Joensuu

What follows is personal experience and therefore I have some reservations in writing about it but nevertheless this experience may indicate, for some readers, a possible approach for trialling such developments in mathematics education in their own institutions.

In Finland, each department of teacher education has a practice school, in most cases within the University campus. This school is called a 'Normal School'. During mathematics teaching practice, supervision is provided in the primary school of the Normal School by class teacher and the mathematics educator from the university. Our efforts in Joensuu to improve mathematics education started mainly from this supervision.

In the year 1986-1987, I had a chance to observe 135 lessons of 45 students. This supervision included supervision of lesson planning. In this supervision, I asked my students to teach more systematic mathematical content than that provided by textbooks. In addition, I asked them to put emphasis on understanding and to use discovery strategies. These guidelines reflect some of our main teaching principles. In addition, to assist my students in lesson planning, I took part in teaching school classes. The success we gained from this work led us to propose setting up Mathematics Clubs in the Normal School and the first mathematics club was established in autumn 1988. Five teachers from the Normal School joined me in working in these clubs.

In 1989, in response to a request from my university students, I established an evening mathematics club just for them. More than 50 students attended this club, which took place once a week between 18.00 and 19.30. The following year, 1990, this club was changed to an elective course 'Mathematical Thinking' (2 credits). Since 1993, this course has been split into two courses, 'Geometric Thinking' (1 credit) and 'Algebraic Thinking' (1 credit).

In 1993, more than 50 students chose mathematics as their specialist subject. This number represented more than half of the yearly quota of primary teacher students and was more than triple the number of students specialising in mathematics in all the other 10 Finnish teacher education departments. Since that time, this success has continued and the number of students specialising in mathematics has increased to more than 80% of the quota.

In 1994, the Higher Education Evaluation Council nominated the University of Joensuu as the 'Centre of Excellence in Mathematics Teacher Education'. In the same year the international committee, which evaluated the faculties of education of Helsinki, Joensuu and Oulu Universities, wrote in its report that "... *The University of Joensuu has been successful in developing a study program for teachers specialising in mathematics education, that can serve as a model for other faculties and other content domains... the program seems to help in freeing future*

teachers from the frequently observed anxiety for (the teaching of) mathematics." (Buchberger 1994, 13). Personally, that same year I was nominated 'Teacher of the year', which was offered by the Finnish Summer Universities.

Details of some other activities undertaken by my university

In 1990, the Joensuu Board of Education asked me to organise a mathematics club for those teachers who were interested in establishing their own mathematics clubs. 39 teachers attended this club. Most of them were class teachers or specialist teachers and some were Junior (Grades 7-9) or Senior (Grades 10 - 12) secondary school teachers. Because of this group of teachers, mathematics clubs spread to all the primary schools and to some secondary schools in Joensuu.

In the first half of the 1990s, mathematics clubs spread all over the country through in-service education of teachers. The publishing of some of the clubs' materials and a teacher book gave support to teachers' work (Malaty 1992, Malaty 1993, Malaty 1994).

During the 1990s, I was involved in more than 300 in-service education programmes in more than 75 municipalities, including all the major cities, reaching more than 12 000 teachers from kindergartens to senior secondary schools. The content of these in-service programmes was not always related to mathematics clubs but the success of mathematical clubs brought credibility to these programmes. Some colleagues who are mathematics educators attended some of these in-service education programmes.

Since 1992, similar activities to those of spreading mathematics clubs have been done to bring mathematics teaching to kindergartens. This has given a relevant grounding for the preschool education act of 1998.

Different teachers associations have invited me to give talks at their conferences, especially the Association of Mathematical Subjects Teachers. At their 1993 conference I gave a talk on the need for developing Geometric Teaching. Two years later, in 1995, after there had been no textbooks in geometry for more than 20 years, a geometry textbook was published for senior secondary schools.

Finally, may I mention that our work has attracted the interest of different people, among them politicians and the media. Mathematics clubs became a topic for daily newspapers and weekly magazines. One of the magazines was distributed to every home in the country (1989). Also the TV channels 1 and 3 showed an interest in mathematics clubs and it was an item of the main news of the most popular channel: Channel 3. In 1994, I had the chance to speak directly to the public in a lecture for Channel 3 MTV-akatemia. The topic of the lecture was 'Developing Mathematics Teaching: What? Why? And How?' This publicity has supported other official efforts to develop mathematics education, including The National Joint Action Programme for Developing Science and Mathematics, 1996 - 2002 (The Ministry of Education 1999).

The University of Joensuu and PISA results

One of the most important achievements we can mention is that our region (Eastern Finland) now has more qualified teachers of mathematics. This we can see from the PISA results and also from our National Assessment Studies. Our efforts in developing teacher education in our region are not only related to class

teacher education. In conjunction with the efforts made in class teacher education mentioned earlier, similar efforts have been made in special teacher education. At the University of Joensuu, there is a Department of Specialist Teacher Education, where mathematics and mathematics education is just the same as that for class teacher education. Lectures on mathematics and mathematics education have been provided for both types of students combined in one group. This gave specialist teacher education students the chance to attend class teacher students' mathematics clubs in 1989. Since 1993 the majority of specialist teacher education students in our university have attended the same mathematics specialised programmes of the class teacher education students (15/35 credits.) This education has provided Primary Schools (Grades 1-6), and Junior Secondary Schools (Grades 7-9) in Eastern Finland with more qualified special teachers in mathematics teaching. In addition, some of the kindergarten teacher education students in our university have received the same education in mathematics and mathematics education as that for primary school teachers and specialist teachers, including the specialised courses mentioned above (15/35 credits).

Back to the Background for Success

In fact, these are the main factors without which all the efforts made in Finland to develop mathematics education could not succeed.

The welfare of schools

Traditionally, children and young people have special status in Finnish society. As Finland represents a type of welfare state, the government offers, mostly free of charge, all types of services, particularly to children and young people.

This interest in children's and young people's development brings to teachers a remarkable respect. All types of education in Finland are not only free but also well supported: schools offer free healthcare; students and teachers receive free daily hot meals; there is free access to computers and printers, with all computers linked to the internet; students from Grade 1 onwards have the opportunity to access computers for email and other uses; comprehensive school students (grades 1-9) are provided with free textbooks, notebooks, pencils, etc.; for school journeys exceeding five kilometres, taxis are provided free of charge.

The pleasant work environment in schools

Finnish schools are well furnished and well equipped. Schools are open places, both physically and socially. On the one hand, schools are open so that visitors can enter through any open door. On the other hand, teachers' work is not subject to any type of regular inspection. In Finnish schools, there is no formality in either clothing or in teachers' and students' communications. Nevertheless, respect for teachers, especially in the case of primary schools, is obvious.

Every morning the teacher finds the blackboard and/or other type of boards well cleaned. Finnish schools are relatively quiet, especially inside the classrooms. This gives the teacher a chance to take care of students and their learning, and in return it increases the teacher's interest in his or her work. There are no restrictions on the number of photocopies a teacher can make for distribution to children as learning materials. These materials and others like them are given out freely. Each

classroom has a washbasin and paper towels for washing hands and other purposes. Classrooms, corridors, auditoriums, halls and bathrooms are always clean and warm and that is why most children walk about in socks or slippers inside school, giving them the feeling of being at home.

The traditions of daily school life

Every teaching hour is 45 minutes. In the 15 minutes break between lessons, the teacher opens a classroom window to refresh the air, even in winter. At break time students, especially those in Grades 1-6, must leave the classroom and go into the school yard. Teachers take it in turns to observe the children while they are outside. Each class and its teacher go to the dining room together for their daily hot meal. Rectors of schools are able to contact all children and teachers through loudspeakers in each classroom. This means that from time to time the rector can ask children and teachers to stop their activities for a while to hear to some urgent information but this happens rarely.

School principles of care, comfort and equality

The care of each student in Finnish schools is obvious and can be seen from the relatively low number of students in a class, normally between 15 and 25. This has an impact on social relations in the class and on the learning of each individual child.

From the social aspect, the low number of students ensures an intimacy between the teacher and students. The class lunch with the teacher is like having lunch as a large family and the food provided is similar to an ordinary family lunch, consisting of a hot dish and bread, salads, dessert and drinks, especially milk. The food is always fresh and served with care in a pleasant dining room. That is why students like school lunches.

From the learning aspect, the low number of class students offers teachers the opportunity to take care of each learner. When a student shows some weakness, for example in mathematics, both the student's teacher and a specialist teacher (M.Ed) soon take care of him or her. This care includes, among others, organising 'support classes' and providing individual support. The results of this support care can be seen from PISA results. The small number of class students allows everyone to know each other better, therefore some students also receive help in their learning from other students in the class.

Schools arrange parents' evenings to discuss general issues. These evenings are normally organised so that each student's parents can meet, in private, their child's teacher but some teachers, especially those teaching the first two grades, visit each child's home at least once a year.

What about comfort? In Finnish schools, there is no need to think about punishing students. Physical punishment does not enter a teacher's head, even shouting is unnecessary. Punishment and control are not characteristics of the Finnish teaching profession; the aim of a teacher's work is to support students' development. For example, if a student in a comprehensive school leaves his exercise book at home, the teacher offers him a new one without any blame.

What about the principle of equality? The dispersion of Finnish students is less than in other countries, as has been shown not only in the PISA studies but also in other earlier comparative studies. This can be seen as the result of implementing

the principle of equality accepted by comprehensive schools, but the equality of the comprehensive school law of 1998 is just a reflection of traditions in Finnish society. The results of PISA show that there is no significant effect of different socio-economical backgrounds on students' learning. This is not an unexpected result as in Finland there is no interest in so-called private schools and private lessons are unknown. This is because there has been a long tradition of trust in public schools and in teachers.

Parents send their children to school so that they will not only learn but also receive support in their development. Homework is not stressed and no homework is set before holidays or weekends. The limited amount of homework means that students are able to participate in hobbies and activities which interest them, especially music and sport, at the end of school day. Students are grateful to schools for offering delicious lunches and a place to meet their friends.

Schools not only prepare children for the future but ensure that they have a good life in the present. Learning subjects is not the main objective of schooling and that is one of the reasons why it is difficult to see cheating in examinations in Finnish schools. Parents trust teachers to take care of their children and teachers are indeed interested in assisting the growth of every student, especially those who have weaknesses. That is why the dispersion of Finnish students' performance is less than in other countries. On the other hand, this also reflects one of our main problems in mathematics education, the need for more care of gifted students.

General Information on Higher Education

Higher education is free and well supported. For 9 months student receives a monthly bursary, currently 259 euros. He or she receives a monthly housing support of about 170 euros. Students are allowed to earn up to 505 euros per month and this sum is tripled to 1 515 euros in the three months summer holiday. In addition, a student can get a monthly loan of up to 220 euros per month.

All course books are freely available on loan from university libraries along with access to on-line electronic literature.

References

- [1] Buchberger, F. et al. 1994, *Educational studies and teacher education in Finnish universities*. Helsinki. Ministry of Education, Department for Higher Education and Research.
- [2] Malaty, G. 1992. *Geometrinen ajattelu I [Geometric Thinking I]*. Porvoo: Weilin + Göös.
- [3] Malaty, G. 1993. *Geometrinen ajattelu I [Geometric Thinking I]*. *Didaktiikka [Didactics]*. Porvoo: Weilin + Göös.
- [4] Malaty, G. 1994. *Algebrallinen ajattelu I [Algebraic Thinking I]*. Porvoo: Weilin+ Göös.
- [5] Malaty, G. 2004. *Mathematics Teacher Training in Finland*. In: Series of International Monographs on Mathematics Teaching Worldwide. Monograph 2. Teacher Training. Budapest: Műszaki Könyvkiadó, A WoltersKluwer Company.
- [6] Ministry of Education 1999. *Finnish Knowledge in Mathematics and Sciences in 2002*. Revision of the National Joint Programme (LUMA). Helsinki: Ministry of Education.

HISTOIRE

L'enseignement mathématique à l'école primaire de la Troisième République aux années 1960 : enjeux sociaux et culturels d'une scolarisation « de masse »

Renaud d'Enfert¹

Depuis plusieurs années, des voix s'élèvent pour déplorer les transformations disciplinaires qu'a connues l'école ces quatre dernières décennies et pour proposer un retour aux principes qui auraient guidé l'école de la Troisième République. La tribune libre publiée récemment par Laurent Lafforgue dans ces colonnes en est un exemple : les responsables de l'Éducation nationale et leur bras armé que sont, selon lui, les IUFM seraient en effet les principaux fossoyeurs de la « grande culture léguée par les siècles² » que le modèle lycéen des humanités était chargé de transmettre. Les modalités actuelles de l'enseignement des « savoirs fondamentaux » – les mathématiques sont notamment concernées – sont également questionnées. Dans un texte publié en 2004 sous le titre « Les savoirs fondamentaux au service de l'avenir scientifique et technique : comment les réenseigner », Laurent Lafforgue et plusieurs de ses collègues scientifiques contestent la validité des programmes actuels sur la base de témoignages recueillis dans leur entourage, de constats effectués auprès de quelques futurs ou jeunes bacheliers, ou encore de livres s'alarmant d'une hypothétique « faillite programmée de l'école française³ ». Ils suggèrent en conséquence de revenir aux pratiques d'enseignement en vigueur (ou supposées comme telles) avant les années 1960 afin de « mettre les élèves en situation d'appréhender des notions fondamentales à partir de la culture et du savoir tels qu'ils ont été patiemment construits et reconstruits au cours des siècles⁴ ».

Afin de prendre toute la mesure d'une telle proposition, l'analyse historique s'impose. Car si l'école du XXI^e siècle a l'ambition d'offrir une « culture commune »

¹ IUFM de l'académie de Versailles et Groupe d'histoire et de diffusion des sciences d'Orsay – Université Paris XI.

² L. Lafforgue, « De l'école et de ce qui fonde la valeur de la culture et du savoir », *Gazette des mathématiciens*, n° 105, juillet 2005, p. 77.

³ C'est du moins ce qu'annonce le service de presse de l'éditeur de Marc Le Bris, *Et vos enfants ne sauront pas lire... ni compter*, Paris, Stock, 2004 (www.editions-stock.fr/media/docs/avantprog03-042004.pdf), dont le livre constitue une référence pour les auteurs de ce texte. Venant de scientifiques éminents, l'unilatéralisme des sources comme l'absence d'explicitation des modalités de la collecte des témoignages apparaissent d'ailleurs surprenants.

⁴ R. Balian et al., *Les Savoirs fondamentaux au service de l'avenir scientifique et technique : comment les réenseigner*, Les Cahiers du débat, Fondation pour l'innovation politique, novembre 2004, p. 22.

à tous ceux qui la fréquentent, tel n'était pas le cas avant les années 1960 où les cultures scolaires étaient – et depuis longtemps – largement déterminées par l'origine et le supposé destin social des élèves. Laissant à d'autres le soin d'évoquer le cas de la formation littéraire⁵, je voudrais, pour ma part, esquisser les principaux caractères de l'acculturation mathématique effectuée dans le cadre de l'école primaire – l'école du peuple – depuis l'avènement de la Troisième République jusqu'au début des années 1960⁶. Compte tenu des critiques adressées aux programmes actuels de mathématiques de l'école primaire, je voudrais également tenter d'expliquer les raisons pour lesquelles l'enseignement mathématique a connu, à ce niveau, une profonde mutation dans le dernier tiers du XX^e siècle : les programmes scolaires et les contenus enseignés à l'école comme les méthodes pédagogiques sont en effet largement dépendants de son organisation interne et des fonctions qui lui sont assignées.

Primaire et secondaire : les deux écoles

Contrairement à la situation qui prévaut aujourd'hui, l'école de la Troisième République est une école duale : deux systèmes d'enseignement coexistent, qui sont clairement différenciés par leurs publics, par la longueur des études proposées, par leurs finalités. D'un côté, l'enseignement primaire constitue « l'école du peuple » : gratuit depuis 1881, il scolarise les enfants jusqu'à l'âge de 12 ou 13 ans dans des écoles primaires élémentaires, mais permet également des scolarités prolongées dans des cours complémentaires ou dans des écoles primaires supérieures, voire dans les écoles normales d'instituteurs ou d'institutrices⁷. D'un autre côté, l'enseignement secondaire forme « l'école des notables » : payant jusqu'à la fin des années 1920, il est dispensé dans des lycées et des collèges communaux qui, outre les classes allant de la 6^e aux sections terminales, comportent des classes primaires (avant la 8^e) et élémentaires (8^e et 7^e) qui favorisent l'autorecrutement. Supprimées par une ordonnance de 1945, ces dernières subsisteront jusqu'aux années 1960 dans certains lycées. Enfin, c'est également au cours de la décennie 1920 que l'enseignement secondaire féminin, de création plus récente (1880), est identifié à son homologue masculin.

Outre la question de la gratuité, plusieurs caractéristiques distinguent ces deux « ordres » d'enseignement. La dissymétrie des effectifs doit tout d'abord être soulignée : vers 1900, le nombre d'élèves, garçons et filles, scolarisés dans les lycées et collèges publics ne dépasse guère 100 000, quand les écoles primaires

⁵ Voir notamment M. Jey, *La Littérature au lycée : invention d'une discipline (1880-1925)*, Paris, Klincksieck, 1998 ; P. Boutan, *La Langue des Messieurs. Histoire de l'enseignement du français à l'école primaire*, Paris, Colin, 1996 ; A. Chervel, *La Culture scolaire. Une approche historique*, Paris, Belin, 1998.

⁶ R. d'Enfert, *L'Enseignement mathématique à l'école primaire, de la Révolution à nos jours. Textes officiels. Tome 1 : 1791-1914*, Paris, INRP, 2003 (avec la collaboration d'H. Gispert et de J. Hélayel). Afin de ne pas alourdir les notes, nous renvoyons à cet ouvrage où figurent les textes officiels antérieurs à 1914 ici mentionnés.

⁷ Au risque de la simplification, nous n'évoquerons pas les établissements d'enseignement technique, et notamment les écoles pratiques de commerce et d'industrie qui, faisant pendant aux écoles primaires supérieures, se développent sous la Troisième République.

élémentaires et leurs filières de scolarisation prolongée en accueillent plus de 4 millions. Bien que l'établissement de la gratuité du secondaire, mais aussi la conjoncture démographique, permette une croissance massive de ses effectifs à partir des années 1930, la très grande majorité des enfants ne fréquente pas d'autre école que l'école primaire à la veille de la Deuxième Guerre mondiale. Les classes primaires et élémentaires des lycées et collèges, qui sont restées payantes, ne scolarisent que quelques dizaines de milliers d'élèves⁸, et seulement 6,3% d'une génération de garçons entre en classe de 6^e vers 1933 quand le taux d'accès à l'enseignement primaire supérieur masculin (écoles primaires supérieures et cours complémentaires) est de 10,4%⁹. Ensuite, les études dispensées dans l'un et l'autre ordre d'enseignement sont d'inégale longueur : alors que l'enseignement primaire dispense des études courtes débouchant sur la vie active, l'enseignement secondaire engage ses élèves dans un cursus long (7 ans à partir de la 6^e) dont l'enseignement supérieur constitue l'issue naturelle. En 1902, une importante réforme organisera bien la scolarité secondaire en deux cycles, de façon à ménager une porte de sortie à l'issue de la classe de 3^e, mais cette mesure sera abandonnée au milieu des années 1920. La sanction des études elles-mêmes diffère entre les deux ordres d'enseignement. Le baccalauréat, acquis par environ 5% d'une génération à la veille de la Deuxième Guerre mondiale et qui permet d'accéder à l'enseignement supérieur, se prépare au lycée ou au collège. De leur côté, les établissements primaires conduisent leurs (meilleurs) élèves au certificat d'études primaires, lequel n'est même pas obtenu par la moitié d'une classe d'âge¹⁰, voire au brevet élémentaire ou d'études primaires supérieures. Certes, le système des bourses constitue une passerelle vers le secondaire. Mais ces dernières sont distribuées avec parcimonie avant le milieu des années 1920, et l'instauration en 1926 d'un concours commun des bourses d'enseignement secondaire et primaire supérieur n'empêche pas la grande majorité des reçus (environ 80%) d'opter pour l'enseignement primaire supérieur. Même après l'établissement de la gratuité du secondaire, les parents des milieux populaires hésitent encore à diriger leurs enfants vers celui-ci car ils en saisissent mal les finalités¹¹.

Car s'ils suivent des logiques de fonctionnement différenciées, les deux réseaux d'enseignement s'opposent également dans leurs finalités. On l'a dit, l'école primaire débouche *a priori* sur la vie active tandis que l'enseignement secondaire vise le baccalauréat puis l'enseignement supérieur. Aussi l'enseignement primaire est-il essentiellement pratique, voire « utilitaire », quand le secondaire se veut théorique et « désintéressé » : « Il ne lui appartient pas de préparer les élèves qui s'adressent à lui à une profession déterminée [...] Il fait plus et mieux : sa tâche est, sans les

⁸ A. Prost, *Histoire de l'enseignement en France, 1800-1967*, Paris, A. Colin, 1968, p. 294, 327, 346; J.-P. Briand et al., *L'Enseignement primaire et ses extensions, XIX^e-XX^e siècle. Annuaire statistique*, Paris, INRP/CNRS, 1987, p. 150 pour les « petites classes » du secondaire.

⁹ Pour l'enseignement féminin, ces taux sont respectivement de 3,4% et de 10,8%. Cf. J.-P. Briand et J.-M. Chapoulie, *Les Collèges du peuple. L'enseignement primaire supérieur et le développement de la scolarisation prolongée sous la Troisième République*, INRP/CNRS/ENS Fontenay-Saint Cloud, 1992, p. 174 et 304.

¹⁰ P. Cabanel, *La République du certificat d'études. Histoire et anthropologie d'un examen (XIX^e-XX^e siècles)*, Paris, Belin, 2002, pp. 56-57.

¹¹ J.-P. Briand et J.-M. Chapoulie, *Les Collèges du peuple, op. cit.*, pp. 426-427.

préparer à rien, de les rendre aptes à tout¹² ». La formule, énoncée dans les instructions de 1925, pourrait bien être la devise de l'enseignement secondaire dont la filière classique, où prévaut l'étude des langues anciennes, symbolise pleinement ce caractère désintéressé : le latin et le grec, et plus généralement les « humanités classiques », sont la marque d'une « vraie » culture secondaire car dénués d'utilité immédiate. L'enseignement primaire, en revanche, se préoccupe de former aussi bien le producteur que l'homme et le citoyen. Tel est le sens, par exemple, de l'inscription en 1882 du travail manuel au programme de l'enseignement primaire qui, sans négliger le fait que l'école est avant tout un « établissement d'éducation », vise à préparer les garçons aux activités ouvrières. Tel est le sens, également, du caractère « usuel » imprimé à l'enseignement scientifique. Comme le soulignent les instructions du 20 juin 1923 : « Nous n'oublions pas que la plupart de nos élèves devront, dès qu'ils nous auront quittés, gagner leur vie par leur travail, et nous voulons les munir de connaissances pratiques qui, dès demain, leur serviront dans leur métier¹³ ». Certes, il n'y a pas, dans l'esprit des principaux responsables de l'enseignement primaire, d'antinomie *a priori* entre le caractère utilitaire et la dimension éducative de l'école primaire, nous y reviendrons. Il n'empêche : c'est bien son aspect utilitaire qui caractérise, aux yeux des élites notamment, l'enseignement primaire et qui l'oppose, dans son principe même, aux études secondaires.

Un enseignement mathématique « utilitaire » et pratique

Sous la Troisième République, c'est donc l'école primaire, et non l'enseignement secondaire, qui assure la scolarisation de la très grande majorité des enfants. Mais si les contenus enseignés sont largement commandés par le fait que ces derniers entrent tôt dans la vie active, l'école de Jules Ferry et de ses successeurs n'est pas, pour autant, l'école du « lire-écrire-compter », comme on le dit trop souvent. Rompant largement avec le régime scolaire du Second Empire, elle propose au contraire une approche encyclopédique des savoirs dont témoigne la multiplicité des matières qui figurent à son programme : les sciences physiques et naturelles, le travail manuel, le dessin, le chant, la gymnastique sont autant de disciplines rendues obligatoires au début des années 1880 et qui viennent s'ajouter dans l'emploi du temps des classes. De même, la loi du 28 mars 1882 sur l'enseignement primaire substitue les sciences « mathématiques » au « calcul » de la loi Falloux du 15 mars 1850 : au-delà du symbole, cette mesure trouve sa traduction concrète dans l'introduction d'un enseignement de géométrie dans les écoles élémentaires d'où il était quasiment exclu avant cette date¹⁴.

Cette volonté d'encyclopédisme comme la nécessité, compte tenu de la brièveté des scolarités, d'une acquisition rapide des connaissances jugées nécessaires pour entrer dans la vie sont des déterminants essentiels de l'enseignement primaire. À cet effet, les républicains retiennent le principe de l'enseignement « concentrique » : à l'école élémentaire, la scolarité est divisée en trois cours – élémentaire, moyen,

¹² *Instructions du 2 septembre 1925 relatives aux programmes de l'enseignement secondaire*, Paris, Vuibert 1928, p. 10.

¹³ Instructions du 20 juin 1923 relatives au nouveau plan d'études des écoles primaires élémentaires, *Bulletin administratif du ministère de l'instruction publique*, tome 114, p. 83.

¹⁴ Inscrite au programme des écoles primaires supérieures en 1833 mais exclue par la loi Falloux en 1850, la géométrie devient une matière facultative de l'enseignement primaire en 1865.

supérieur¹⁵ – où l'on étudie le même programme mais à chaque fois de façon plus étendue de telle sorte que les élèves revoient en les approfondissant les connaissances déjà acquises au cours de leur scolarité. Quel que soit le temps passé à l'école, les élèves auront ainsi étudié, certes de façon plus ou moins complète, l'ensemble des notions inscrites au programme. Dans les premières décennies de la Troisième République, cette formule de l'enseignement concentrique constitue une spécificité de l'ordre primaire, qui le différencie nettement du secondaire. Certes, le ministre Victor Duruy l'avait adoptée pour l'enseignement secondaire spécial, cet enseignement court, sans latin et à dominante scientifique créé en 1865. Mais la réforme de cette filière, menée en 1882 par les républicains, lui substitue un système d'études graduées sur le modèle de l'enseignement secondaire classique afin de mieux le démarquer des écoles primaires supérieures qui optent, elles aussi, pour l'enseignement concentrique¹⁶.

Ce choix d'un enseignement concentrique n'est pas sans répercussions sur l'économie interne des programmes de l'école élémentaire publiés en 1882 (et confirmés en 1887), quitte à bouleverser parfois certaines pratiques enseignantes jusqu'alors en vigueur. Désormais, l'enseignement du calcul commence dès l'entrée à l'école, en même temps que la lecture et l'écriture : cette mesure, qui postule la simultanéité des apprentissages « fondamentaux », marque l'achèvement d'un processus de longue durée dont on relève les prémices dans les années 1830 mais qui commence véritablement sous le Second Empire. Mais surtout, le système adopté conduit à mener de front l'apprentissage de notions mathématiques qui autrefois se succédaient et donc à rendre certains apprentissages plus précoces. C'est ainsi que l'étude de la division est déplacée vers l'amont de la scolarité, de telle sorte que les quatre opérations sont inscrites non seulement au programme des cours élémentaire, moyen et supérieur, mais aussi à celui de la section enfantine qui accueille les enfants de 5 à 7 ans. De la même façon, l'apprentissage du système métrique, autrefois rejeté en fin de cursus car lié à l'étude des fractions, est entrepris dès l'entrée à l'école et sera poursuivi tout au long de la scolarité. Enfin, la concentricité des programmes modifie la façon d'envisager l'enseignement de la géométrie. Celui-ci commence dès le cours élémentaire : il n'est donc plus besoin, comme c'est souvent l'usage, d'avoir parcouru l'ensemble du cours d'arithmétique avant d'accéder à la géométrie. De plus, les élèves sont initiés quasi simultanément à la géométrie plane et à la géométrie dans l'espace, et non successivement comme le voudrait l'ordre géométrique classique.

Commandé par la brièveté des études primaires, le principe de l'enseignement concentrique contribue donc à modifier en profondeur l'ordre d'exposition des connaissances mathématiques enseignées à l'école primaire. Il est officiellement abandonné en 1923 au profit d'un enseignement « progressif », de telle sorte que « la graduation des programmes apportera à chaque âge ce qui lui convient¹⁷ ». Il s'agit de mieux adapter l'enseignement au développement de l'enfant mais aussi d'éviter la monotonie des répétitions trop nombreuses. Peut-être s'agit-il aussi de

¹⁵ Le cours préparatoire, qui remplace la section enfantine, n'est officiellement organisé qu'en 1922.

¹⁶ Sur l'enseignement scientifique dans le secondaire, voir B. Belhoste, *Les Sciences dans l'enseignement secondaire français. Textes officiels. Tome 1 : 1789-1914*, Paris, INRP/Économica, Paris, 1995.

¹⁷ Instructions du 20 juin 1923, p. 80.

rapprocher les méthodes pédagogiques en vigueur de celles du secondaire, alors que le ministère de l'Instruction publique aligne les programmes des petites classes des lycées et collèges sur ceux de l'école primaire, et cherche à ouvrir les classes de 6^e aux élèves de la communale. En réalité, les programmes de 1923, qui resteront en vigueur jusqu'à la Deuxième Guerre mondiale, et, dans une moindre mesure, ceux de 1945 ensuite, conservent une large dose de concentricité. Celle-ci apparaît pourtant moins nécessaire, du fait de l'allongement des scolarités, que ce soit en direction du secondaire, du primaire supérieur ou des classes de fin d'études primaires créées après 1936 pour recevoir les élèves jusqu'à 14 ans. Comme le remarque Antoine Prost, aucun texte ne vient « débarrasser les programmes du cours élémentaire et moyen d'éléments que la prolongation de la scolarité rend superflus à ce niveau¹⁸ ».

Pour autant, les programmes de l'école primaire élémentaire ne restent pas totalement figés dans leurs contenus. Comme le note Charles Bayet, directeur de l'enseignement primaire au ministère de l'Instruction publique, « il faut les simplifier sans cesse, afin que l'enseignement soit mieux à la portée des jeunes esprits¹⁹ ». Certes, on peut y relever des points fixes. Tel est le cas de la règle de trois qui, invariablement enseignée dès le cours moyen depuis 1882, constitue pour de nombreux élèves le point culminant de leur éducation arithmétique. Mais au cours de la période qui nous occupe, on assiste à des aménagements ou à des allègements de programme. L'ordre de certains apprentissages change, et des notions disparaissent tandis que de nouvelles apparaissent. Les programmes de 1923, par exemple, font évoluer l'enseignement de la numération de telle sorte que les élèves n'étudient plus les fractions décimales comme des cas particuliers des fractions « ordinaires », mais comme une écriture particulière des nombres décimaux. L'importance des fractions ordinaires, étudiées ensuite mais dont la manipulation semble moins primordiale depuis que l'usage des mesures décimales s'est définitivement imposé, s'en trouve du même coup minorée et les opérations sur ces dernières restreintes à des cas « numériquement très simples » (programme de 1923), et plus tard à des fractions dont le dénominateur est un multiple de 2, 3 ou 5 (programme de 1941). Corrélativement, le programme du cours supérieur (11-13 ans) est déchargé de ce que les instructions du 20 juin 1923 appellent « l'arithmologie pure » – nombres premiers, caractères de divisibilité, décomposition en facteurs premiers, plus grand commun diviseur qui sont considérés comme autant d'« enseignements de luxe »²⁰ –, ce qui permet en retour l'introduction de quelques notions d'algèbre et des représentations graphiques, lesquelles doivent permettre de résoudre rapidement certains types de problèmes. On a gagné ici ce qu'on a perdu là.

Parce qu'elle prépare ses élèves à entrer dans la vie, l'école primaire dispense un enseignement essentiellement pratique, concret, usuel, répondant aux nécessités de la vie quotidienne et de leur activité professionnelle future, que ce soit à l'atelier, au comptoir ou dans l'exploitation familiale. Plus que les instructions officielles, qui

¹⁸ A. Prost, *Histoire de l'enseignement en France*, op. cit. p. 278. Seuls les programmes du cours supérieur sont révisés en 1938. C'est également en 1938 que sont définis les programmes des classes de fin d'études primaires élémentaires. Notons que, des années 1880 à la Deuxième Guerre mondiale, les programmes de l'enseignement primaire supérieur sont plus fréquemment révisés (1893, 1909, 1920, 1937-38) que ceux de l'école élémentaire.

¹⁹ Ministère de l'Instruction publique et des Beaux-Arts, *Rapport sur l'organisation et la situation de l'enseignement primaire public en France*, Paris, Imprimerie nationale, 1900, pp. x-xi.

²⁰ Instructions du 20 juin 1923, p. 110. L'étude des caractères de divisibilité est rétablie à ce niveau en 1938.

s'en tiennent le plus souvent à des points de vue très généraux, les discours tenus (ou implicitement soutenus) par la hiérarchie de l'instruction primaire renseignent sur la mise en musique de la partition ministérielle. L'inspecteur général de l'enseignement primaire Pierre Leyssenne rappelle ainsi que l'écopier doit avant tout « savoir calculer sûrement et rapidement et résoudre toutes les questions pratiques qu'il peut être amené à rencontrer sur sa route pendant sa vie²¹ ». Dans la *Revue pédagogique*, publication patronnée par le ministère de l'Instruction publique, François Vintéjoux ne dit pas autre chose lorsqu'il demande aux instituteurs de « rendre les enfants capables de faire plus tard avec intelligence et avec sûreté toutes les opérations pratiques qui se présentent journellement dans le cours ordinaire de la vie²² ». Aussi la résolution de « problèmes usuels » forme-t-elle un pan essentiel de l'éducation mathématique des écoliers du primaire. Le mot « usuel » doit cependant s'entendre dans un double sens. D'une part, les problèmes proposés doivent mettre en jeu des nombres et des pratiques opératoires dont l'usage est avéré : si les additions « peuvent être longues, parce qu'on en rencontre de telles dans la pratique », les soustractions, les multiplications et les divisions doivent au contraire être « simples et courtes, comme elles le sont dans le monde des affaires²³ ». D'autre part, ces problèmes doivent rendre compte de situations réelles, susceptibles d'être rencontrées dans la vie courante²⁴. « Les problèmes sur le temps que mettent des robinets ou à remplir ou à vider un bassin, sur l'heure à laquelle se rencontrent les aiguilles d'une montre, sur le nombre de sauts que doit faire un lévrier pour atteindre un renard, sur des mélanges ou des alliages qu'on se garderait bien de composer ou que la loi interdit [...] ne sont pas des exercices pratiques », estime ainsi l'inspection générale de l'enseignement primaire avant de proposer que ces derniers soient interdits aux examens²⁵. L'actualité du sujet comme la véracité des données numériques (le bon sens permettant alors de contrôler la pertinence des résultats) constituent un enjeu d'importance : résoudre un problème, c'est aussi, par delà l'aspect strictement mathématique, apprendre des choses « utiles » concernant la vie domestique, le commerce, l'industrie ou l'agriculture. Certains recueils de problèmes sont d'ailleurs spécialisés dans telle ou telle branche d'activité, tel ce *Recueil de problèmes sur les engrais et l'alimentation du bétail* publié en 1899 à l'intention des élèves des cours moyen et supérieur. Reste la question – essentielle – de la mise à jour des données numériques. En 1915, un inspecteur primaire, soucieux de voir les instituteurs de sa circonscription composer des problèmes « ayant trait à la vie actuelle », recommande à ces derniers de « se méfier [...] des prix anciens d'avant-guerre donnés dans les livres²⁶ ».

²¹ P. Leyssenne, « Problème », in F. Buisson (dir.), *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, 1^{re} partie, tome 2, Paris, Hachette, 1887, p. 2441.

²² F. Vintéjoux, « L'enseignement de l'arithmétique et de la géométrie à l'école primaire », *Revue pédagogique*, 15 mars 1887, p. 223. Ce texte est publié dans R. d'Enfert, *L'Enseignement mathématique*, op. cit., pp. 240-248.

²³ P. Leyssenne, « Problème », art. cit., p. 2442.

²⁴ Cet appel à l'expérience de la vie courante est encore requis au lendemain de la Deuxième Guerre mondiale. Cf. Instructions du 7 décembre 1945 sur les horaires et les programmes de l'école primaire, *Bulletin officiel du ministère de l'éducation nationale* (désormais BOEN) n° 3, 10 janvier 1946, pp. 91-104.

²⁵ Ministère de l'Instruction publique et des Beaux-Arts, *Rapport*, op. cit., p. 392.

²⁶ Conférence pédagogique du canton de Montmorency, 19 mars 1915, Musée départemental de l'éducation de Saint-Ouen l'Aumône.

Former des « hommes de bon sens »

Cette dimension pratique invalide-t-elle toute ambition éducative ? S'il s'agit, à un premier niveau, de la formation morale et civique du futur citoyen, nul doute alors que l'enseignement mathématique est partie prenante de l'éducation des écoliers et répond aux objectifs généraux d'une institution scolaire qui structure les classes sociales et « s'efforce de les faire admettre dans leur hiérarchie²⁷ ». Non seulement celui-ci, on l'a vu, est en phase avec leur probable destination sociale et professionnelle, mais il énonce implicitement les normes et les valeurs qui règlent les comportements et les rapports sociaux et garantissent ainsi l'ordre établi. Grands classiques du certificat d'études, les problèmes relatifs à l'épargne sont « indéfiniment déclinables, avec leur moralisme implicite²⁸ » : outre leur dimension proprement mathématique, ils familiarisent les élèves avec le fonctionnement de la caisse d'épargne où ces derniers devenus adultes déposeront probablement leurs économies, et incitent à l'économie et à la prévoyance, érigées en vertus morales²⁹. Au cours de la période, l'enseignement mathématique est également mis au service de quelques grandes causes, ainsi lors de la campagne organisée à la fin du XIX^e siècle pour faire face aux « ravages de l'alcoolisme » ou dans le cadre de la « semaine du doryphore » programmée au début des années 1930 dans certains départements où les cultures sont menacées par cet insecte.

À un second niveau, le caractère éducatif de l'enseignement mathématique réside dans sa contribution à ce que les instructions de 1882 appellent la « culture de l'esprit », c'est-à-dire le développement de la réflexion et de l'esprit critique, du sens de la rigueur et de l'exactitude. C'est ainsi que François Vintéjoux, déjà cité, voit dans l'enseignement de l'arithmétique et de la géométrie le moyen de « donner de bonne heure aux enfants l'habitude de réfléchir et de ne risquer une réponse qu'à bon escient » et donc de former « des hommes de bon sens »³⁰. Le fait que les règles d'alliage, pourtant d'un usage restreint, fournissent « un grand nombre de questions qui sont d'excellents exercices de calcul et de raisonnement » suffit à ses yeux pour justifier leur inscription au programme. Toutefois, cette finalité proprement éducative de l'enseignement mathématique n'est pas unanimement approuvée. Plus exactement, on observe, chez les acteurs de l'instruction primaire, une tension permanente entre finalité utilitaire et finalité éducative. L'examen des différents articles du *Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire* (1887) relatifs à l'enseignement mathématique permet d'en rendre compte. L'ouvrage, quasi mythique aujourd'hui, ne peut en effet être considéré comme une sorte de manuel officiel déclinant fidèlement la politique scolaire de la Troisième République, tant des points de vue contrastés, voire antagonistes, peuvent y cohabiter et parfois s'y confronter³¹. Si l'article « Arithmétique », signé Hippolyte Sonnet, place ces deux

²⁷ A. Prost, *Histoire de l'enseignement en France*, op. cit. p. 334.

²⁸ P. Cabanel, *La République du certificat d'études*, op. cit., p. 144.

²⁹ Sur la portée idéologique de l'enseignement mathématique à l'école primaire, voir notamment Guy Vincent, *L'École primaire française, étude sociologique*, Lyon, PUL, 1980, pp. 129-186, ainsi que André Harlé, *L'Arithmétique dans les manuels de l'enseignement élémentaire français au début du XX^e siècle*, Thèse de didactique de l'Université Paris VII, 1984.

³⁰ F. Vintéjoux, « L'enseignement de l'arithmétique et de la géométrie... », art. cit., p. 225.

³¹ T. Assude et H. Gispert, « Les mathématiques et le recours à la pratique : une finalité ou une démarche d'enseignement ? », in D. Denis et P. Kahn (dir.), *L'École républicaine et la question des savoirs. Enquête au cœur du Dictionnaire de pédagogie de F. Buisson*, Paris, CNRS, 2003,

finalités sur un pied d'égalité en voyant dans cet enseignement « une discipline incomparable pour l'intelligence³² », l'article « Problème » rédigé par Pierre Leyssenne s'inscrit dans une perspective radicalement opposée : l'enseignement primaire devant privilégier « l'acquisition la plus prompte et la plus solide des éléments indispensables de chaque science », la contribution de l'enseignement mathématique à l'éducation générale de l'esprit semble à son auteur une « grave illusion »³³.

C'est que, derrière la « culture de l'esprit », se profile le risque d'une secondarisation de l'enseignement primaire, c'est-à-dire de sa transformation en un enseignement plus spéculatif qu'utilitaire, au risque de détourner les élèves de la vie pratique et des professions auxquelles ils sont *a priori* destinés. L'opposition utilitaire/éducatif renvoie en effet à la dualité scolaire, qui concerne principalement, il est vrai, l'enseignement post-élémentaire. « Plus ces finalités éducatives sont affirmées, plus les frontières institutionnelles qui séparent le primaire du secondaire tendent à être remises en cause », estime Pierre Kahn à propos des articles du *Dictionnaire de pédagogie* relatifs aux sciences physiques et naturelles³⁴. La réflexion pourrait aussi valoir pour l'enseignement mathématique. Examinons l'article « Géométrie » du même *Dictionnaire*, également rédigé par Leyssenne³⁵. Ce dernier distingue entre l'école élémentaire d'une part, et l'école primaire supérieure d'autre part. À l'école élémentaire, l'enseignement de la géométrie doit éveiller chez les plus jeunes « leur attention, leur intelligence et leur sagacité », mais présenter des « avantages immédiats » dans les classes plus élevées (cours moyen et cours supérieur) : maîtrise du système métrique et de l'évaluation des surfaces et des volumes notamment. À l'école primaire supérieure (ou à l'école normale primaire), en revanche, la géométrie doit « reprendre tous ses droits » et l'ensemble des énoncés faire l'objet de démonstrations rigoureuses et méthodiques³⁶. Mais si l'auteur reconnaît là une identité de méthode avec l'enseignement secondaire, c'est pour mieux caractériser ce qui fait la spécificité du primaire : « c'est qu'il ne faut admettre dans cet enseignement que deux sortes de propositions : celles qui peuvent donner lieu à des applications pratiques directes et immédiates, et celles qui sont indispensables à la démonstration rigoureuse des premières. Tout le reste doit être

pp. 175-196. Les mathématiques ne sont pas seules concernées par ce type d'analyse, comme le montrent les différentes études publiées dans cet ouvrage, qu'elles concernent le français, les sciences, le travail manuel ou la gymnastique. La thèse soutenue en 1994 par Patrick Dubois a largement contribué à renouveler l'intérêt pour le *Dictionnaire*. Cf. P. Dubois, *Le Dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire de Ferdinand Buisson. Unité et disparités d'une pédagogie pour l'école primaire (1876-1911)*, Thèse de doctorat en sciences de l'éducation de l'Université L. Lumière-Lyon II, 1994.

³² H. Sonnet, « Arithmétique » in F. Buisson (dir.), *Dictionnaire de pédagogie, op. cit.*, 1^{re} partie, tome 1, p. 114.

³³ P. Leyssenne, « Problème », art. cit., p. 2441.

³⁴ P. Kahn, « Les sciences : trois modèles pour un enseignement nouveau », in D. Denis et P. Kahn (dir.), *L'École républicaine, op. cit.*, p. 165.

³⁵ P. Leyssenne, « Géométrie » in F. Buisson, (dir.), *Dictionnaire de pédagogie, op. cit.*, 1^{re} partie, tome 1, pp. 1162-1166, et plus particulièrement pp. 1163-1164. Cf. Teresa Assude et Hélène Gispert, « Les mathématiques et le recours à la pratique », art. cit., pp. 188-190.

³⁶ Cette différenciation entre enseignement primaire élémentaire et primaire supérieur prévaut encore au début des années 1930. Voir A. Marijon et T. Leconte, « Rapport sur les conférences pédagogiques de 1928 (L'arithmétique et la géométrie à l'école primaire) », *Bulletin de l'instruction primaire du département de la Seine*, janvier-février 1930, p. 104.

écarté, comme oiseux, inutile ou nuisible³⁷ ». Aussi recommande-t-il d'abandonner les ouvrages classiques, composés « pour des besoins scolaires tout autres » : ni leurs plans, ni leurs démonstrations ne conviennent à l'enseignement primaire.

Des élèves actifs

On l'a vu, l'ancrage de l'enseignement primaire dans la vie courante, quotidienne, constitue un élément essentiel de son identité. Cette dimension pratique peut se décliner en un deuxième sens : l'appel à l'activité des élèves, à leur expérience sensible, à l'observation, constitue une autre caractéristique de cet enseignement, qui n'est pas sans connexion avec les ambitions éducatives de l'école primaire et qui le distingue assez largement, une fois encore, de l'ordre secondaire. C'est à l'école primaire, en effet, que se développe une approche concrète et expérimentale des objets mathématiques et de leurs propriétés : nombres, mais aussi figures géométriques planes ou spatiales. Sous la Troisième République, l'institution de l'enseignement mathématique comme discipline d'observation et d'action, voire comme discipline proprement expérimentale, est partie prenante d'un projet pédagogique global qui rejette des pratiques scolaires jugées trop souvent livresques et routinières : à l'école primaire, l'enseignement doit être intuitif et inductif et recourir à des méthodes actives. Pour utiliser un langage actuel, il s'agit de rendre l'élève « acteur de ses apprentissages ». Entretenant avec les élèves « un continuuel échange d'idées », indiquent les programmes de 1882, le maître doit partir de ce que les enfants savent et les amener à découvrir de nouvelles notions en procédant « du connu à l'inconnu ». La démarche préconisée – observer, comparer, généraliser –, participe de la construction d'une véritable culture primaire où la pratique fait partie intégrante de la formation générale. Dans les premières leçons de calcul, le maniement et l'observation d'objets matériels tels que bâchettes, boulier, etc., visent à réduire l'usage souvent trop exclusif de la mémoire au profit des capacités d'intuition des élèves. Comme le rappellent les instructions de 1923, « l'opération manuelle précède l'opération arithmétique³⁸ ». En géométrie, le dessin – dessin linéaire ou dessin géométrique – comme le travail manuel sont mis à contribution : ils permettent des vérifications expérimentales et des justifications intuitives, et rendent plus tangible un enseignement qui, rappelons-le, commence désormais dès l'entrée à l'école. De fait, les exercices de pliage, de découpage ou de cartonnage sont envisagés comme la partie expérimentale – ou appliquée – de l'enseignement mathématique, à l'instar des manipulations ou des travaux agricoles dans l'enseignement des sciences physiques et naturelles³⁹. Appartenant à la tradition déjà ancienne de la géométrie pratique, les activités de mesurage sont également encouragées. En milieu rural, notamment, les instituteurs sont invités à exercer leurs élèves du cours supérieur à la mesure des terrains : « Aucun exercice sur les évaluations de surface ne vaut ceux qu'on aura à résoudre après une séance d'arpentage⁴⁰ ».

³⁷ P. Leyssenne, « Géométrie », art. cit., p. 1164.

³⁸ Instruction du 20 juin 1923, p. 108.

³⁹ R. d'Enfert, « "Manuel (Travail)" : préparer au métier ou éduquer ? », in Daniel Denis et Pierre Kahn (dir.), *L'École républicaine*, op. cit., pp. 199-222. Voir également R. d'Enfert, « L'introduction du travail manuel dans les écoles primaires de garçons, 1880-1900 », *Histoire de l'éducation*, janvier 2007, à paraître.

⁴⁰ A. Marijon et T. Leconte, « Rapport sur les conférences pédagogiques de 1928 », art. cit., p. 104.

Au reste, cette conception expérimentale de la discipline ne se limite pas à la seule école élémentaire. Elle se développe aussi dans le cadre de l'enseignement primaire supérieur pour lequel les programmes de 1909 recommandent aux maîtres de « relier entre eux les enseignements de la géométrie, du dessin et du travail manuel » : « Bien des vérités géométriques essentielles peuvent être mises en évidence au moyen d'exercices de "géométrie expérimentale" figurant au programme de travaux manuels ». C'est que, enseignement court oblige, il faut « suppléer, par l'application et des expériences répétées, aux raisonnements rigoureux et abstraits pour lesquels le temps et l'attention font également défaut⁴¹ ». Au début du XX^e siècle, l'enseignement secondaire est également concerné. Les instructions de 1905 relatives au premier cycle (6^e à 3^e) des lycées et collèges affirment ainsi le caractère expérimental de la géométrie⁴². Cette approche, particulièrement novatrice dans le cadre secondaire, est soutenue par des mathématiciens comme Paul Appell, Émile Borel, Jacques Hadamard ou Jules Tannery. « En traitant la géométrie comme une science physique – ce qu'elle est véritablement –, on fera disparaître ce que son enseignement a présenté jusqu'ici d'artificiel et de rebutant⁴³ », déclare par exemple Jacques Hadamard. Dans une conférence intitulée de façon significative « Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire », Émile Borel va même jusqu'à proposer la création, dans les lycées et collèges, d'un « laboratoire de mathématiques » sous forme d'un atelier de menuiserie où les élèves confectionneraient des solides géométriques ou des appareils simples de mécanique. Répondant par avance à l'objection d'une éventuelle primarisation du secondaire, qui perdrait ainsi sa valeur éducative, Borel ajoute : « la valeur éducative de l'enseignement ne pourra être qu'augmentée si la théorie y est, le plus souvent possible, mêlée à la pratique⁴⁴ ». Mais il n'est pas entendu et les instructions de 1905 ne font pas référence au travail manuel qui constitue donc une spécificité de l'enseignement primaire. Plus généralement, et contrairement au primaire où l'on observe une certaine pérennité, cette veine expérimentale et pratique qui se développe dans le secondaire au début du XX^e siècle résiste difficilement à la réforme menée par le ministre Léon Bérard en 1923 et à ses aménagements ultérieurs⁴⁵. Les mesures d'alignement des programmes des deux ordres d'enseignement, prises ensuite dans le cadre de la réalisation de l'école unique, conduiront à renouer avec cette dimension expérimentale, tant dans les classes élémentaires que dans les classes du

⁴¹ Exposé des motifs du projet de programme de l'enseignement primaire supérieur, juillet 1908, publié dans R. d'Enfert, *L'Enseignement mathématique*, op. cit., pp. 312-315, ainsi que les programmes de 1909 cités plus haut.

⁴² Ces instructions sont publiées par B. Belhoste, *Les Sciences dans l'enseignement secondaire*, op. cit., pp. 658-671.

⁴³ Cité par B. Belhoste, *Les Sciences dans l'enseignement secondaire*, op. cit., p. 57. S'inscrivant dans la même veine, le point de vue exprimé par Carlo Bourlet dans l'article « Mathématiques » du *Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire*, Paris, Hachette, 1911, dirigé par F. Buisson est analysé dans l'article de T. Assude et H. Gispert mentionné plus haut.

⁴⁴ É. Borel, « Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire, conférence faite le 3 mars 1904 au Musée pédagogique », *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 1904, p. 439. Ce texte a été publié par Hélène Gispert dans la *Gazette des mathématiciens*, n° 93, juillet 2002, pp. 47-64.

⁴⁵ Selon les *Instructions du 2 septembre 1925 relatives aux programmes de l'enseignement secondaire*, op. cit., p. 162, « il n'y a pas lieu d'encourager, au début tout au moins, l'emploi des constructions qui conduiraient à une sorte de découverte ou de vérification et introduiraient l'expérience là où elle n'a rien à faire ».

premier cycle secondaire. Il faut néanmoins attendre 1957 pour que des « travaux pratiques » intégrant des exercices manuels soient inscrits au programme de mathématiques des classes de 6^e et de 5^e.

Les années 1960 : l'école élémentaire change de fonction

Nous n'évoquerons pas la politique scolaire de Vichy qui transforme les écoles primaires supérieures en collèges modernes, modifie l'organisation des études primaires et y remanie les programmes de calcul. À la Libération, en effet, l'enseignement élémentaire (et plus généralement l'enseignement du premier degré qui inclut toujours les cours complémentaires) retrouve à peu près la configuration qui prévalait avant 1940, tandis que de nouveaux programmes sont publiés, non sans emprunts, du reste, à ceux de 1941. Les programmes de 1945 visent à recentrer l'enseignement sur les matières fondamentales : lecture, écriture, français, calcul. Les options pédagogiques qui régissaient l'enseignement mathématique avant-guerre sont réaffirmées avec force : « Les principes, énoncés dans les instructions de 1923 et repris dans celles de 1938 (pour le cours supérieur) restent valables [...] Les modifications apportées au programme ne font que confirmer ces principes et en préciser l'application⁴⁶ ». Ces programmes resteront en vigueur jusqu'en 1970 : date majeure qui marque l'avènement des « mathématiques modernes » à l'école, mais correspond également à un changement de perspective plus général qui vise à prendre en compte la démocratisation de l'accès à l'enseignement secondaire.

La question de la généralisation des scolarisations prolongées et de la rénovation de l'enseignement est posée au lendemain de la Deuxième Guerre mondiale au niveau national, avec le plan Langevin-Wallon notamment, comme à l'échelle internationale avec des organismes tels que l'Organisation européenne de coopération économique (OECE, future OCDE) et l'UNESCO ou encore l'Union mathématique internationale qui, tout juste refondée, permet la renaissance de la Commission internationale de l'enseignement mathématique (CIEM). Lors de sa première assemblée générale en 1952, son président Marshall H. Stone souligne ainsi la nécessité pour de nombreux pays de généraliser l'« instruction populaire obligatoire » – entendons la scolarisation post-élémentaire de niveau « moyen » – au lieu de la réserver à un petit nombre de privilégiés, et d'y donner une place significative aux mathématiques compte tenu des besoins engendrés par une industrialisation accélérée, en ayant soin néanmoins d'en rénover les méthodes pédagogiques afin d'en rendre l'enseignement plus accessible à un public désormais élargi⁴⁷. En France, le mouvement de démocratisation commence dès la fin des années 1950 avec l'organisation des cycles d'observation au niveau des classes de 6^e et 5^e – les cours complémentaires sont alors rebaptisés collèges d'enseignement général – et la prolongation à 16 ans de la scolarité obligatoire (1959) puis la création des collèges d'enseignement secondaire (1963). L'élargissement du recrutement des classes de sixième à tous les élèves bouleverse l'architecture générale du système

⁴⁶ Instructions du 7 décembre 1945, p. 94.

⁴⁷ M. H. Stone, « L'Union mathématique internationale et ses activités. Rapport sur la première assemblée générale (Rome, 6-8 mars 1952) », *L'Enseignement mathématique*, tome 39, 1942-1950, pp. 156-161. Sur l'activité de la CIEM dans cette période, voir H. Gispert, « Applications : les mathématiques comme discipline de service dans les années 1950-1960 » in D. Coray et al., *One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique. Moments of Mathematics Education in the Twentieth Century*, Genève, L'Enseignement mathématique, 2003, pp. 253-270.

scolaire et modifie en profondeur les fonctions mêmes de l'école primaire. L'enseignement élémentaire ne constitue plus un enseignement terminal mais un enseignement préparatoire à un secondaire diversifié (long, court, pratique) dont il forme désormais la base et aux exigences duquel il doit s'adapter. Dès 1960, une circulaire ministérielle invite les maîtres de l'enseignement élémentaire à « établir les fondations solides et durables de tout l'édifice scolaire » : « On est en droit d'attendre des enfants de 10 ou 12 ans d'intelligence normale [...] qu'ils n'hésitent pas sur le sens d'une opération arithmétique, qu'ils ne commettent pas des erreurs dues à une connaissance imparfaite des tables⁴⁸ ».

La réforme de l'enseignement mathématique, dite des « maths modernes », n'intervient qu'à la fin de la décennie 1960. Elle résulte des travaux d'une commission ministérielle présidée par André Lichnerowicz et qui publie un premier rapport en mars 1967. Elle est très largement soutenue par l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public qui propose quelques mois plus tard un projet de programmes pour les écoles maternelles et primaires tenant compte du fait que « la dernière année d'école primaire n'est plus pour aucun élève sa dernière année d'école⁴⁹ ». L'année suivante, la « Charte de Chambéry » élaborée au sein de l'Association prône une réforme associant actualisation des contenus et renouvellement des méthodes « de la maternelle aux Facultés » : l'acquisition des notions mathématiques est affaire de long terme⁵⁰. Partie prenante d'une rénovation générale de l'enseignement mathématique depuis la maternelle jusqu'à l'université, la révision des programmes de l'école primaire en 1970 est largement motivée par la démocratisation de l'enseignement : « Il s'agit dès lors de faire en sorte que cet enseignement contribue efficacement au meilleur développement intellectuel de tous les enfants de six à onze ans afin qu'ils entrent dans le second degré avec les meilleures chances de succès. L'ambition d'un tel enseignement n'est donc plus essentiellement de préparer les élèves à la vie active et professionnelle en leur faisant acquérir des techniques de résolution de problèmes catalogués et suggérés par la "vie courante", mais bien de leur assurer une approche correcte et une compréhension réelle des notions mathématiques liées à ces techniques⁵¹ ». Le programme de 1970 est substantiellement allégé. Les écoliers n'ayant plus besoin d'être rapidement préparés à résoudre les problèmes de la vie courante ou professionnelle, il devient en effet possible, en les étalant dans le temps, de proposer des apprentissages mieux adaptés aux différentes étapes du développement de l'enfant, et de reporter l'enseignement de certaines connaissances aux classes du premier cycle secondaire : au cours préparatoire, l'apprentissage arithmétique ne va pas plus loin que l'addition de deux nombres entiers, tandis qu'au cours moyen les pourcentages et les calculs d'intérêts n'apparaissent plus explicitement.

⁴⁸ Circulaire du 19 octobre 1960 relative à l'enseignement du français et calcul dans les classes primaires, *BOEN* n° 37, 24 octobre 1960, p. 3109.

⁴⁹ « Projet de programme pour les écoles maternelles et primaires. Rapport élaboré par la commission R.R. de l'APMEP », *Bulletin de l'APMEP*, n° 258, mai-septembre 1967, p. 279.

⁵⁰ « Charte de Chambéry. Étapes et perspectives de la réforme de l'enseignement des mathématiques », *Bulletin de l'APMEP*, n° 261, mars-avril 1968 pp. 167-189.

⁵¹ Circulaire du 2 janvier 1970 concernant le programme de mathématiques à l'école élémentaire, *BOEN* n° 5, 29 janvier 1970, p. 349.

Au demeurant, le programme de 1970 ne présente pas en lui-même de rupture majeure avec celui de 1945 : sa rédaction, simplifiée à l'extrême, pouvait sembler familière aux maîtres de l'époque. Dans l'esprit de ses concepteurs, il ne s'agit d'ailleurs que d'un texte de transition, préalable à une rénovation plus complète, laquelle n'interviendra qu'à partir de 1977. Les transformations n'en apparaissent pas moins profondes, et les instructions qui accompagnent le programme de 1970 ont probablement dérouté plus d'un instituteur avec leurs définitions plus abstraites, leurs tableaux de nombres et leurs chaînes d'opérateurs. La nouvelle dénomination du programme – « Mathématiques » – vise à signifier que le calcul ne constitue qu'une partie de l'enseignement mathématique des élèves, qui doit aussi inclure l'observation de l'espace et des objets géométriques, ainsi que des exercices pratiques de mesure. L'accent est mis sur l'élaboration des concepts sous-tendus par l'activité mathématique des élèves, de façon à leur permettre une meilleure compréhension des notions de base. L'apprentissage des techniques opératoires n'est pas minoré pour autant : au lieu d'être apprises de façon purement mécanique, elles seront découvertes par les élèves eux-mêmes, « comme synthèse d'expériences effectivement réalisées, nombreuses et variées ». Le caractère « résolument concret » de l'enseignement est affirmé et les élèves sont appelés à « manipuler effectivement » de façon à découvrir progressivement des notions abstraites et générales.

L'école primaire d'avant 1960 apparaît donc bien différente de celle d'aujourd'hui. Recrutant dans les milieux populaires, elle propose une culture scolaire – et notamment mathématique – bien spécifique qui se démarque du modèle secondaire. La rénovation pédagogique menée dans les premières années de la Troisième République en a largement dessiné les contours : soutenue par un enseignement à la fois intuitif et actif, l'école primaire donne des connaissances pratiques, concrètes, usuelles, qui répondent aux besoins de la vie quotidienne et professionnelle. Passé ce moment fondateur de ce qu'il est convenu d'appeler « l'école républicaine », les programmes scolaires n'échappent pas aux réformes qui, moins souvent qu'aujourd'hui il est vrai, visent tout à la fois à adapter l'enseignement aux évolutions de la société, à promouvoir certaines conceptions didactiques ou épistémologiques, à intégrer les réflexions psychopédagogiques, ou encore à rénover des pratiques enseignantes jugées trop routinières. Enfin, la démocratisation de l'accès à l'enseignement secondaire, commencée dès la fin de la décennie 1950, n'est pas sans effet sur l'enseignement du premier degré. Si l'école élémentaire reste une école de masse, ce qui change, en revanche, c'est sa fonction : d'école du peuple, elle devient l'école de tous ; d'une préparation à la vie, elle devient une préparation aux études longues. Ce changement de perspective, joint à la volonté de rénovation des disciplines d'enseignement et des méthodes pédagogiques, explique très largement la transformation en profondeur de l'enseignement mathématique qui s'opère alors, et dont les programmes scolaires actuels portent encore la marque malgré le reflux des « mathématiques modernes ».

Mais si la transformation des méthodes et des contenus enseignés à l'école élémentaire est le résultat d'une véritable réflexion sur la mission assignée à cette dernière, tel n'est pas le cas, en revanche, de l'enseignement dispensé au sein du « collège unique » issu de la fusion, en 1975, des collèges d'enseignement général

héritiers des cours complémentaires d'une part, et des collèges d'enseignement secondaire d'autre part⁵². Car l'unification des structures du premier cycle ne s'est pas traduite par une synthèse réfléchie des deux cultures primaire et secondaire, intégrant les atouts de l'une comme de l'autre. À ce niveau, en effet, le modèle secondaire, entendons ses contenus, ses méthodes, ses pratiques, ses valeurs, son corps enseignant même, s'est imposé comme un horizon naturel et indépassable, sans que soit véritablement discutée la pertinence de ce non-choix. Aussi l'enseignement du second degré, et plus particulièrement le collège, est-il devenu une école « de masse » tout en restant largement fidèle aux conceptions qui ont fondé, depuis le XIXe siècle au moins, la formation d'une élite sociale restreinte et homogène destinée à occuper les positions les plus élevées. Seule une réflexion de fond sur la « culture commune » délivrée par l'école, mais aussi sur ses méthodes pédagogiques, pourra permettre de tenter de résoudre ce paradoxe.

⁵² Voir A. Prost, *Éducation, société et politiques. Une histoire de l'enseignement de 1945 à nos jours*, Paris, Seuil, 1997, et plus particulièrement le chapitre intitulé « École et stratification sociale. Le paradoxe de la réforme des collèges en France au XXe siècle », pp. 47-62.



Revue de l'Institut Elie Cartan

Singularités

avec les contributions de

C. Hertling, D. Barlet, C. Sabbah,
A. Douai, P. Maisonobe, T. Torrelli



C. HERTLING - Formes bilinéaires et hermitiennes pour des singularités : un aperçu

D. BARLET - Modules de Brieskorn et formes hermitiennes pour une singularité isolée d'hypersurface

C. HERTLING - Structures tt^*

C. SABBABH - Aspects métriques de la semi-simplicité

A. DOUAI - Construction de variétés de Frobenius via les polynômes de Laurent : une autre approche

P. MAISONOBE ET T. TORRELLI - D-Modules relatifs et cycles évanescents

Autres fascicules disponibles :
<http://smf.emath.fr/CatalogueCommandes/>

prix* : 24 €

* frais de port non compris



Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré

11 rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris cedex 05

<http://smf.emath.fr>

INFORMATIONS

À PROPOS DE L'ÉDITION MATHÉMATIQUE

Publier des revues mathématiques¹

Rob Kirby²

Mathematical Sciences Publishers (MSP) est une nouvelle organisation, à but non lucratif, fondée et tenue par et pour des mathématiciens et des bibliothécaires. Son site web est mathscipub.org où vous pourrez trouver certaines des informations qui suivent.

Mais discutons d'abord du côté économique de la publication de journaux mathématiques ou scientifiques. D'abord les responsables éditoriaux du journal X peuvent recevoir un salaire ou une rétribution pour l'aide au travail de secrétariat. Ce montant peut varier de 0 à 10 ou 20\$ par page publiée. Ces chiffres ne sont pas vraiment publics, il est donc difficile de connaître les valeurs supérieures, mais la somme de 20\$ a été mentionnée.

Une fois qu'un papier est accepté et tapé dans une variété de $\text{\TeX}$, il doit être transformé en un bon fichier pdf qui peut être donné à un imprimeur. Le prix de ceci peut là encore beaucoup varier, de quelques dollars jusqu'à 30\$ la page et même plus. La variation est due en partie à la qualité du travail de composition. Les références peuvent être vérifiées pour leur exactitude et elles peuvent renvoyer par des liens hypertextuels à des revues, aux Math Reviews et à Zentralblatt. Des liens internes peuvent être introduits, comme « d'après le lemme 3.7 » qui est relié au véritable lemme 3.7. L'introduction peut être vérifiée pour sa grammaire et sa clarté d'exposition. Ou tout le papier peut être vérifié sur ces points. Ceci n'explique qu'une partie de la variation des coûts. Si le papier n'est pas tapé en $\text{\TeX}$ il y a des coûts supplémentaires. Remarquons que tous ces coûts sont indépendants du nombre d'exemplaires imprimés.

Pour une publication électronique, il manque encore la maintenance d'un site web, la gestion des abonnements si le journal n'est pas gratuit, ainsi que les frais de structure. Si le journal est gratuit et hébergé par une université, alors, avec un peu de travail bénévole, les coûts restant peuvent être minimes.

Pour une publication imprimée, les coûts dépendent du nombre d'exemplaires imprimés. Imprimer et envoyer ajoutent typiquement au moins 5 cents par page. L'impression peut être faite à moins de 3 cents la page et encore moins pour de gros tirages, et le routage varie selon la distance et le type de courrier (par ex. par avion); il y a toujours quelques dépenses à négocier avec l'imprimeur ou le routeur.

De cette discussion il ressort qu'il est difficile de savoir précisément quels sont les coûts. *Geometry & Topology (G&T)*, mis en place il y a 9 ans et géré par les

¹ Traduit de l'anglais par Colette Anné.

² Université de Californie, Berkeley.

prédécesseurs de MSP, a été publié avec des recettes inférieures à 10\$ la page. Cela a été rendu possible en grande partie grâce à Colin Rourke de l'université de Warwick dont l'effort volontaire et l'expertise technique ont été remarquables. Aucune aide en secrétariat n'était nécessaire et il assemblait les pages web lui-même. Les auteurs étaient en général experts en $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ et étaient incités par Colin à améliorer encore plus leur $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, ainsi pratiquement aucun argent n'était dépensé pour le travail de composition. Il n'y eut pas de tentative importante pour des campagnes d'abonnements, le nombre d'abonnements payés était donc inférieur à 200 et ainsi peu d'argent fut dépensé en impression et gestion des abonnements. Le journal était électroniquement libre, mais les bibliothèques qui affichaient le lien étaient censées payer un abonnement électronique.

D'un autre côté, une revue ne peut pas s'attendre à fonctionner pendant des décennies sur le travail bénévole. Le groupe G&T a fondé un nouveau journal, *Algebraic & Geometric Topology (AGT)* il y a 5 ans, et ça a été aussi un succès en termes de qualité et de quantité. Mais il devint plus évident qu'une fondation institutionnelle plus ferme était nécessaire, ainsi fut créée MSP au début 2004. Formellement c'est une entreprise californienne à but non-lucratif, et une partie de ses bureaux et de son site web sont localisés à l'université de Californie à Berkeley, et une autre partie toujours à l'université de Warwick. Le responsable éditorial de G&T est maintenant Walter Neumann de Columbia University, et les responsables éditoriaux de AGT restent Bob Oliver de l'université Paris-Nord et Martin Scharlemann de l'université de Californie à Santa Barbara.

MSP est devenu le producteur de *Pacific Journal of Mathematics* (qui est aussi une entreprise californienne à but non-lucratif) dans le sens où MSP fait le travail de composition, organise l'impression et le routage et fournit de l'aide pour la gestion informatique de la liste des abonnements, les abonnements et les responsabilités éditoriales étant gérées par PJM.

Cette année MSP a créé deux nouveaux journaux : *Communications in Applied Mathematics and Computational Science* (voir : camcos.org) et *Journal of Mechanics of Materials and Structures* (voir : jomms.org).

MSP n'a pas de relations formelles avec une université ni avec des organisations telles que le projet Euclid, bien que MSP partage la plupart des principes de ces organisations.

MSP a l'intention de garder des prix d'abonnement bas, précisément 10 cents par page pour un abonnement électronique et 15 cents par page pour la version papier (JOMMS est plus cher à cause des coûts supplémentaires des journaux en ingénierie). Pour retrouver les coûts anciens de G&T, avec tout son travail bénévole, il suffirait de 100 abonnements. Mais qu'est-ce qui est réaliste sur le long terme ?

Il est instructif de regarder les recettes par page d'autres journaux. J'ai utilisé les résultats d'une base de données d'abonnements des bibliothèques aux journaux mathématiques. Ce n'est pas parfait mais ça donne une bonne estimation des abonnements actuels. Les prix³ par page exprimés en dollars sont tirés de l'excellent site web : http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~rehmann/BIB/AMS/Price_per_Page.html

³ Prix 2003 : les prix peuvent avoir beaucoup varié depuis, par exemple augmentations très fortes, ~ 44%, pour *J. of Algebra* ou *Advances Math*, prix inchangés pour *Commentarii* ou *Amer. J. of Maths (NDLT)*.

Journal (Éditeur en 2003)	Prix 2003 en \$	Prix/page	Abonnés (estimation)	Recette/page
Comm. Pure Appl. Math (Wiley)	2295	1.27	700	~ 900
Math Annalen (Spr)	2689	1.09	700	~ 750
Inventiones (Spr)	2909	1.07	600	~ 600
Topology (Elsevier)	1400	0.99	600	~ 600
Advances Math (Els)	2402	0.74	700	~ 500
J of Algebra (Els)	4620	0.59	800	~ 480
J. Reine Angew. Math.(de Gruyter)	2295	0.82	500	~ 410
Linear Alg & Appl.(Els)	3910	0.64	600	~ 380
Duke Journal	1390	0.47	800	~ 370
Selecta Math (Spr)	870	1.33	250	~ 330
Proc London Math Soc.	834	0.51	650	~ 325
Math Proc Camb Phil Soc.	582	0.51	650	~ 325
Publ. Math.IHES (Spr)	315	0.64	500	~ 320
Acta Math	288	0.48	600	~ 290
Bulletin de la SMF	245	0.59	500	~ 290
Journal AMS	246	0.24	900	~ 220
American J. Math.	275	0.20	1000	~ 200
J. Diff. Geometry	606	0.38	500	~ 190
Comm Math Helv. (Birk)	332	0.37	500	~ 190
Annales Scientifiques de L'ENS (Els)	408	0.40	450	~ 180
Pacific J Math	340	0.20	800	~ 160
Disc & Comp Geom (Spr)	665	0.50	300	~ 150
Michigan Math J.	150	0.22	700	~ 150
J of Geometric Analysis	458	0.83	150	~ 120
Annals of Math	245	0.12	900	~ 110
Indiana Math J	285	0.17	600	~ 100
Illinois J Math	135	0.10	700	~ 70

Même pour obtenir des recettes de l'ordre de 150\$ la page pour ses journaux (papiers), MSP aurait besoin de 1000 abonnements à 15 cents la page. Cela n'arrivera pas. Pour obtenir la moitié, c'est à dire 75\$, il faudrait 500 abonnements et cela est très difficile à atteindre pour un nouveau journal dans le climat actuel de restriction budgétaire des bibliothèques.

En conséquence MSP vise comme efficacité d'être capable de survivre avec des recettes de l'ordre de 50\$ par page. De plus MSP a l'intention de ne promouvoir que des journaux dont le rang se situe dans le premier tiers des journaux de leur domaine; autrement il devient trop difficile de convaincre des bibliothèques de s'abonner. Jusqu'à présent notre production est efficace et nos journaux de haut niveau, mais il reste à voir comment nous serons soutenus pas les bibliothèques.

Commentaires supplémentaires :

1. La préservation est une question importante. En plus des tirages papier, MSP dépose aussi tous les articles sur arXiv, et aussi archive les fichiers $\text{\LaTeX}$ au format mis à jour. Les fichiers sont régulièrement recompilés afin que les sorties pdf puissent être lues par les derniers lecteurs pdf. La technologie continue de changer, mais $\text{\TeX}$ semble être la source la plus stable (des fichiers $\text{\TeX}$ d'il y a 20 ans sont toujours utilisables mais certains fichiers pdf vieux de 5 ans posent des problèmes).
2. La pose de liens devient plus importante. MSP garde trois versions de chaque article, la version papier, une version électronique identique, et une version électronique enrichie. Cette dernière est mise à jour dès que des prépublications

deviennent des papiers publiés, que des erreurs sont découvertes, et aussi par des liens externes (lorsque de futurs papiers se réfèrent au papier en question, alors un lien dans le papier original vers le papier référant est créé). Bien sûr il y a plein de liens internes dans chaque article.

3. MSP améliore sa gestion informatique pour la communication dans le travail éditorial, l'interaction avec les rapporteurs et les auteurs, la collecte automatique de métadonnées, la correction bibliographique et la distribution de métadonnées vers des fédérateurs de bases de données comme MathSciNet, Zentralblatt, CrossRef, Project Euclid et JStor.

L'édition sans drame

Thierry Bouche, Yves Laurent & Claude Sabbah¹

Un pôle pour les revues de mathématiques

Après plusieurs réunions préparatoires réunissant l'ensemble des responsables de revues françaises et les représentants du ministère de la Recherche et du CNRS pour les mathématiques, il a été décidé de créer à Grenoble un pôle d'édition et de diffusion pour les revues de mathématiques. Ce pôle, baptisé CEDRAM², est organisé au sein de la Cellule MathDoc³ en collaboration avec les *Annales de l'institut Fourier*. Il doit bénéficier de l'expérience en édition électronique acquise par la Cellule MathDoc au cours de la réalisation du programme de numérisation NUMDAM⁴ et de l'expérience en édition traditionnelle et diffusion des *Annales de l'institut Fourier*.

Le Centre d'édition et de diffusion des revues académiques de mathématiques (CEDRAM) s'adresse en premier lieu aux revues françaises de mathématiques soutenues par le CNRS. Au-delà, le projet pourrait être amené à se développer, notamment à l'échelon européen.

Évolution de l'édition scientifique

On observe depuis une quinzaine d'années une évolution rapide du mode de fabrication et de diffusion des revues. L'édition électronique bouleverse l'édition elle-même et les habitudes des lecteurs. Si elle n'a pas encore supplanté l'édition traditionnelle, elle oblige à concevoir toute la chaîne de production dans l'optique de l'existence d'une version électronique de qualité, qui est une condition impérative de développement, peut-être de survie. Les éditeurs de revues sont ainsi confrontés à de nouveaux problèmes : développer le mode de diffusion électronique

¹ T.B. (Institut Fourier, Grenoble) est directeur du programme CEDRAM au sein de MathDoc. Y.L. (Institut Fourier, Grenoble) est directeur de l'UMS MathDoc. C.S. (École polytechnique, Palaiseau) est président du comité de pilotage du CEDRAM.

² Centre d'édition et de diffusion des revues académiques de mathématiques, www.cedram.org

³ www-mathdoc.ujf-grenoble.fr

⁴ Numérisation de documents anciens mathématiques, www.numdam.org

et, corrélativement, les moyens de conservation et d'archivage à long terme des articles électroniques, même si cet archivage ne remplace pas pour le moment l'archivage traditionnel effectué par les bibliothèques. Cette conservation doit être organisée rigoureusement et surtout doit être évolutive, donc gérée en permanence.

Ce développement, par l'investissement important qu'il nécessite, creuse l'écart entre les petites sociétés d'édition à but non lucratif (éditions universitaires isolées, sociétés savantes) et les sociétés commerciales. Celles-ci ont été en mesure de développer leur chaîne de production en privilégiant la primauté de la version électronique, souvent par le maintien d'un taux important de croissance des tarifs d'abonnement. Leur politique a parfois donné lieu à des conflits avec les associations scientifiques qui leur ont confié l'édition de revues.

Les éditeurs isolés se trouvent souvent dans une position difficile face à cette mutation. Ils déploient chacun une stratégie sans beaucoup de concertation avec les autres éditeurs dans la même situation, d'où l'impression d'un certain gâchis des ressources et des savoir-faire, malgré l'existence de revues qui ont développé des approches originales. Mais le travail artisanal, avec des personnels bénévoles, est fragile et instable. Les revues isolées n'ont pas, en général, les moyens, financiers et humains, de se mettre à jour au sein d'une évolution rapide.

Face à ce problème, la mutualisation des ressources d'édition, de fabrication et de diffusion électronique devient une nécessité pour les éditeurs non commerciaux, afin de se donner les moyens d'un développement répondant aux besoins de la communauté et de garder une diffusion et une visibilité à la mesure de la qualité de leurs publications. Cette nouvelle organisation devrait aussi permettre d'accueillir des revues actuellement diffusées par des sociétés commerciales.

Cette mutualisation peut se réaliser au sein d'un portail commun d'accès électronique, doublé de l'infrastructure nécessaire pour donner aux revues présentes sur ce portail les moyens réels d'une évolution à long terme.

Qu'est-ce qu'un portail d'accès ? Un exemple en est NUMDAM, portail d'accès aux archives numérisées des revues académiques françaises de mathématiques ; il a démontré par son succès que l'accès aux textes fondamentaux qu'il diffuse peut être décuplé et attire des revues européennes.

Le portail du Projet Euclid⁵ est un exemple de portail de diffusion « modulable », où les revues participantes restent maîtresses de leur politique de diffusion et de tarifs, et peuvent s'associer à d'autres revues pour des accords tarifaires (bouquets).

Cependant, les véritables portails d'accès à la littérature mathématique vivante sont les grandes bases de données MathSciNet et Zentralblatt (à quoi il faut peut-être ajouter l'incontournable Google...). Pour qu'une revue se développe, il faut qu'elle y soit référencée, et que ses articles y soient atteignables d'un clic.

Ce qui différencie un portail spécialisé d'un site isolé, c'est l'étendue des outils de navigation fournis. En dehors de l'efficacité de ces modes de promotion et de diffusion, un tel portail implique plus largement la création d'un pôle fédérateur où les modes de production et d'archivage seront aussi améliorés de par la mise à disposition de services et d'outils particulièrement adaptés aux exigences des revues de mathématiques.

⁵ projecteuclid.org

Le Centre d'édition et de diffusion des revues académiques de mathématiques (CEDRAM)

L'ambition du projet est d'augmenter la visibilité et l'impact (édition électronique sur un serveur commun ; gestion, promotion et échanges des abonnements papier) des revues participantes. Il met aussi en avant le rôle de service public pour garantir la conservation et l'accès sur le long terme à la production scientifique.

Pour soutenir cette ambition, ce pôle doit être complet, c'est-à-dire aborder tous les aspects de l'édition, et flexible, c'est-à-dire qu'il doit offrir des services modulaires que chaque revue doit pouvoir choisir à la carte. Dans un premier temps, le CEDRAM offre aux revues un certain nombre de ressources :

- ressources d'aide à la gestion éditoriale (outils de gestion du secrétariat et des flux éditoriaux) ;
- ressources d'aide à la composition (standards de métadonnées, formats $\text{\LaTeX}$ souples),
- ressources d'aide à la fabrication électronique,
- ressources d'aide à la diffusion électronique (mise en place de la revue sur un serveur avec les fonctionnalités existant dans NUMDAM, référencement sur les grandes bases de données, possibilité de contrôle d'accès pour les articles récents),
- ressources d'aide à l'archivage des fichiers sur le long terme.

D'autres modules sont à l'étude :

- composition proprement dite ;
- diffusion papier (impression, routage) ;
- promotion et gestion des abonnements.

Par ailleurs, le serveur du CEDRAM inclura les données de NUMDAM pour offrir aux utilisateurs sous une même interface les documents anciens et récents. Un moteur de recherche commun permettra d'interroger tous les articles diffusés par la Cellule MathDoc.

Le niveau d'intégration des revues dans le pôle pourra être variable. Celles-ci garderont la maîtrise scientifique de leur contenu, c'est-à-dire qu'elles conserveront leur indépendance éditoriale (comité de rédaction, secrétariat, relations avec les auteurs et les rapporteurs) et collaboreront au sein du pôle pour définir la mise aux normes des articles et la chaîne de production qui aboutira à la publication électronique et imprimée. Les modèles économiques seront divers, ils dépendront de l'ampleur des tâches prises en charge par le pôle, et nécessiteront la signature de conventions entre la Cellule MathDoc et les revues.

Les premières revues qui vont intégrer le CEDRAM sont les suivantes :

- *Annales de l'institut Fourier* ;
- *Annales mathématiques Blaise-Pascal* ;
- *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*.

Un comité de pilotage du programme CEDRAM a été mis en place en octobre 2005. La SMF et la SMAI y participent en tant qu'émanations de la communauté mathématique française et comme éditeurs de revues.

Les publications de la Société Mathématique de France

Jean-Paul Allouche¹

Ce texte est une brève description d'une activité importante de la Société Mathématique de France : la publication de revues internationales, de séries et d'ouvrages. Il propose aussi des pistes pour une réflexion sur l'avenir de ces publications.

Revues, Séries et Ouvrages publiés par la SMF

Les publications de la SMF comprennent des revues internationales périodiques, des séries, et d'autres publications, dont voici la liste.

- Revues internationales
 - *Astérisque*
 - *Bulletin de la Société Mathématique de France*
 - *Mémoires de la Société Mathématique de France*
 - *Panoramas et Synthèses*
 - *Revue d'Histoire des Mathématiques*
- Séries
 - *Cours Spécialisés*
 - *Documents Mathématiques*
 - *Séminaires et Congrès*
 - *SMF/AMS Texts and Monographs*
- Autres publications
 - *Réédition du séminaire Bourbaki*
 - *Réédition des œuvres scientifiques de Jean Leray*
 - *Où en sont les mathématiques ?* (co-édition Vuibert)
 - *L'explosion des mathématiques*
 - *Gazette des Mathématiciens* (et ses numéros spéciaux)
 - *Fascicules "Journée Annuelle"*
 - *Officiel des Mathématiques*

Il y a pour chaque revue, série, publication, un *comité de rédaction*. Le Conseil Scientifique de la SMF émet un avis sur les propositions de nomination à ces comités de rédaction. De plus il y a un *secrétariat général* des publications et un *comité des publications*. Enfin, l'un des vice-présidents de la SMF est exclusivement chargé des éditions de la SMF.

¹ Vice-président de la SMF chargé des publications

Qualité et service

Une exigence unanime pour nos publications est l'excellence du contenu. Les textes et articles sont écrits le plus souvent en français ou en anglais, le prix par page est largement en-dessous de celui de la plupart des revues ou ouvrages publiés par des éditeurs commerciaux (de nombreux abonnés institutionnels ou individuels ont une réduction de 30% en tant que membres de la SMF) : nous bénéficions de quelques subventions (en particulier du CNRS), mais nous essayons de tendre vers l'autonomie, tout en gardant l'idée que nous rendons un service aux mathématiciens et que c'est l'une de nos vocations que ce service soit de très grande qualité tout en restant d'un coût raisonnable.

Une partie des publications est disponible en ligne (pour les revues : le Bulletin, les Mémoires et la Revue d'Histoire des Mathématiques), voir

<http://smf.emath.fr>

et nous avons décidé que l'accès aux articles ne serait payant que pour ceux parus pendant les cinq années (sauf exceptions) précédant l'année de consultation.

Un effort particulier est consacré aux questions d'archivage et de maintenance des formats. Les revues de plus de dix ans d'âge (Bulletin et Mémoires) ont été numérisées par Numdam, lorsqu'elles n'étaient pas sous forme électronique native : elles sont disponibles sur le site

<http://www.numdam.org>

(l'accès est gratuit).

Les publications de la SMF veulent en particulier montrer que les mathématiques sont vivantes, de plus elles renforcent la visibilité de la SMF comme les autres activités renforcent celle des publications. Enfin ces publications permettent de tisser ou de développer de nombreux liens :

- liens avec les sociétés sœurs d'autres pays, avec les unions internationales, ainsi qu'avec les laboratoires de renom par le biais des échanges,
- maintien de liens avec les éditeurs privés français et, ponctuellement avec des éditeurs privés étrangers,
- liens privilégiés avec certaines publications académiques,
- liens solidaires avec certains laboratoires étrangers.

Perspectives

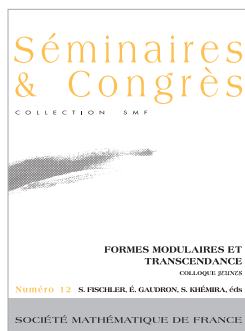
Quel sera l'avenir des publications de la SMF et quelles évolutions devons nous prévoir ?

La SMF doit d'abord maintenir et développer sa remarquable activité d'édition qui n'a rien à envier à celle d'autres éditeurs, avec une équipe non pléthorique et des tarifs bas (comme indiqué précédemment il serait ingrat d'oublier les subventions, en particulier du CNRS, mais il serait imprudent de les considérer comme éternelles).

Ensuite le tournant électronique que nous avons déjà mentionné pose de nouvelles questions. La SMF étudie en particulier : les relations avec les serveurs de prétrages, les contrôles d'accès, les références électroniques croisées aussi bien entre ses propres publications qu'entre ses publications et celles d'autres éditeurs, les identifiants universels (par exemple les DOI), la facturation (faut-il mettre en

place la possibilité de micropaiement ou paiement à l'article [*pay per view*]), la continuation de la numérisation des volumes qui ne sont pas en version électronique native. Font aussi partie de nos préoccupations : la veille technologique, l'évolution de nos compétences, mais aussi l'archivage électronique pérenne (en collaboration par exemple avec Cedram) et la question du maintien des versions papier auxquelles nous sommes bien sûr attachés. Nous pensons, contrairement à certains courants de pensée actuels, pas nécessairement majoritaires d'ailleurs, que les revues de qualité qui proposent aussi une version électronique, existeront (au moins pendant encore de très longues décennies) aussi bien sous forme papier que sous forme électronique et que ce n'est pas parce que l'on imagine ou que l'on craint une évolution (la disparition du papier) qu'il faut l'anticiper et précipiter sa réalisation. Les versions électroniques offrent des fonctionnalités extraordinairement utiles qui en font un atout important voire indispensable, mais elles ne sont que complémentaires des versions papier dont les qualités sont bien établies.

Enfin les concentrations et les pratiques d'éditeurs commerciaux auxquels la SMF a toujours su résister par le passé sont un défi auquel nous devons être attentifs. Nous devons maintenir et renforcer les liens indiqués ci-dessus, en particulier avec des publications académiques, mais avec deux idées fortes : d'une part la SMF ne doit laisser échapper aucune de ses compétences propres pour conserver sa totale indépendance éditoriale, d'autre part ni la SMF ni ses partenaires éventuels ne doivent perdre leur âme ni leur image quel que soit le type de rapprochement ou de collaboration envisagé.



Séminaires et Congrès
**Formes modulaires et
 Transcendance**
 Colloque Jeunes

S. Fischler, E. Gaudron,
 S. Khémira

Ce livre présente un état des lieux précis des (rares) preuves de transcendance ou d'indépendance algébrique de nombres provenant de la théorie des formes modulaires. Il dresse en outre un tableau de techniques plus générales (théorie des périodes, crochets de Rankin-Cohen, méthode des pentes, formes modulaires de Hilbert...), offrant ainsi de nouvelles perspectives. Le recueil rassemble les actes du colloque JEUNES qui s'est tenu au C.I.R.M. du 26 au 30 mai 2003. Il est composé de quatre textes rédigés sous forme de mini-cours, incluant de nombreux rappels. Bien que les développements les plus récents soient aussi traités, la majeure partie du volume reste accessible au non-spécialiste.

The present volume arises from a conference on the links between modular forms and transcendence held at the C.I.R.M. (Marseille) from May 26th to May 30th 2003. It includes an overview of the few existing proofs of transcendence or algebraic independence of numbers coming from modular forms theory as well as more general techniques offering new perspectives (periods, Rankin-Cohen brackets, slope method, Hilbert modular forms...). The book is divided into four independent chapters; although the most recent developments are studied, it remains mostly accessible to non-specialists.

prix public* : 41 € - prix membre* : 29 €
 * frais de port non compris



Société Mathématique de France
 Institut Henri Poincaré
 11 rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris cedex 05

[http : //smf.math.fr](http://smf.math.fr)

INFORMATIONS

Industrial Problem Solving Workshop : aperçu d'une expérience canadienne

Bertrand Monthebert¹

Depuis 8 ans, le Pacific Institute of Mathematics organise un programme visant à soutenir les relations entre industriels et mathématiciens [3].

Lors de sessions d'une à deux semaines par an, un groupe de mathématiciens de tous horizons, de tous statuts (du doctorant au professeur confirmé), se regroupent pour travailler sur des sujets variés. Ceux-ci ont été choisis par un petit comité de mathématiciens qui collectent des problèmes qui se posent dans des entreprises. Des membres des entreprises sont aussi présents lors de la session. Les participants se séparent en petits groupes, chacun travaillant sur un sujet, et mélangeant les compétences. À la fin de la session, généralement une partie des problèmes ont été résolus. Les sessions sont précédées d'une semaine de cours accélérés, à destination des doctorants. Ceux-ci ne peuvent y participer qu'à condition de participer à la session entièrement. Ces sessions ont plusieurs atouts :

- elles sont un lieu de rencontre entre mathématiciens et entreprises,
- elles montrent que les qualités développées par la recherche mathématique peuvent être mises à profit pour des problèmes très éloignés de ceux dont on est spécialiste,
- elles peuvent ainsi déboucher sur des embauches de docteurs dans les entreprises.

En France, une des motivations pour mettre en place une telle initiative est de répondre au problème des débouchés des doctorants dans le secteur privé. Les faibles débouchés existant à l'heure actuelle viennent d'une part de la méconnaissance par les entreprises de l'intérêt d'employer des docteurs ayant une formation mathématique, d'autre part des doctorants eux-mêmes qui le plus souvent n'imaginent pas que de tels débouchés sont possibles.

Objectifs du programme

Le programme est centré sur les doctorants. Il s'agit d'amener ceux-ci à se placer en situation de réflexion sur des problèmes impliquant des mathématiques, sans que les aspects mathématiques soient bien définis. Il s'agit de leur montrer que leur bagage scientifique peut leur permettre de participer à la résolution de problèmes concrets a priori éloignés de ceux qu'ils font au quotidien. Par ailleurs les entreprises ont ainsi la possibilité de voir comment des personnes formées mathématiquement

¹ Université Paul-Sabatier, Toulouse

peuvent apporter des contributions originales à leurs problèmes. Cela contribue donc à instaurer des contacts fructueux avec des entreprises, pouvant déboucher sur des embauches.

Toutefois, ce programme n'a pas pour but de fournir des solutions complètes aux problèmes. Ce serait irréaliste dans le délai imparti. Par ailleurs, il ne s'agit pas non plus de réunir des spécialistes autour d'un problème hautement spécialisé, à la pointe de la recherche. Ce dernier aspect est pris en charge par un programme fortement lié, le MITACS [5].

Profil des participants

Cette année il y avait environ 40 doctorants participant, une douzaine de chercheurs, et 5 industriels. Le nombre de doctorants varie en fonction des possibilités budgétaires. Il y avait 85 candidats. Les doctorants sont sélectionnés en fonction de leur CV, ils ne sont pas nécessairement mathématiciens mais doivent avoir fait pas mal de maths. Ils peuvent donc être physiciens, ingénieurs, économistes, etc. à condition d'utiliser fortement les maths dans leur activité. Cette année, la moitié des doctorants étaient mathématiciens au sens strict. Tous les champs des mathématiques peuvent contribuer, mais la grande majorité vient spontanément des maths appliquées. Leur motivation est généralement liée au fait de rencontrer d'autres chercheurs, et des entreprises dans la perspective de chercher un emploi.

Les chercheurs sont essentiellement des mathématiciens appliqués, même si c'est ouvert à tous. Le mélange des compétences est fondamental dans ce type d'exercice. La motivation est l'intérêt pour l'activité elle-même, mais aussi la possibilité de rencontrer des doctorants d'autres universités.

Les industriels sont des cadres venant d'entreprises allant de la PME au grand groupe type Boeing. Ils doivent être suffisamment proches du problème pour pouvoir l'exposer précisément et interagir favorablement.

Déroulement

Le programme comporte deux phases de 5 jours chacune : le Graduate Mathematical Modelling Camp (GMMC), et l'Industrial Problem Solving Workshop (IPSW).

- Le GMMC réunit quelques dizaines de doctorants, et a pour but de les familiariser avec les méthodes de modélisation. Les doctorants sont répartis en 4 à 5 groupes, aléatoirement, autour d'un *mentor*, un chercheur qui les fait travailler sur un problème du même type de ceux qui sont posés dans l'IPSW, mais dont ils connaissent la solution complète. Il s'agit d'amener les doctorants à se connaître entre eux, à apprendre à travailler collectivement, au-delà des bases mathématiques qu'ils pourront être amenés à utiliser par la suite du programme.

- L'IPSW réunit ces doctorants, leurs mentors, quelques chercheurs supplémentaires, et les industriels qui ont posé les problèmes.

- Les problèmes (5 ou 6) sont exposés pendant la première matinée, par les industriels, afin que les participants puissent se faire une première idée de celui qu'ils vont choisir.

- Une réunion des mentors permet d'affecter 2 ou 3 mentors à chaque groupe. Il ne s'agit pas nécessairement de spécialistes du sujet en question, mais ils doivent pouvoir aiguiller les travaux du groupe.
- Puis les participants se répartissent en groupes. Au début, ils naviguent éventuellement entre plusieurs groupes pour voir ce qui leur plaît le plus.
- Chaque jour une courte réunion des mentors permet de faire le point sur l'avancement des groupes.
- Le dernier jour, chaque groupe doit présenter ce qu'il a obtenu. Il n'y a généralement pas de solution complète, mais des avancées significatives sont faites dans la plupart des cas.
- Les présentations feront l'objet d'une publication de type rapport, disponible sur Internet [6]. Par ailleurs, un numéro spécial d'une revue de mathématiques est consacré chaque année à la publication d'articles issus de l'IPSW. Ces articles sont des résultats complets de recherche, donc vont au-delà de la présentation initiale, et sont référés.

Relations avec d'autres initiatives

Le programme du PIMS est inspiré de celui de l' « Oxford Study Group in Industry » [1], créé en 1968. Ce programme a été reproduit dans de nombreux endroits dans le monde. Toutefois il semble que le programme canadien est plus centré sur les doctorants que d'autres programmes, qui semblent faire intervenir plus de spécialistes. La composante formatrice est très importante.

En France, un programme voisin existe depuis 10 ans, le CEMRACS [4]. Toutefois ce programme s'adresse à des chercheurs spécialisés, pour faire progresser fortement une thématique donnée; il y a moins de doctorants. De plus, la durée du programme (6 semaines) nécessite un investissement important, qui n'est pas à la portée de doctorants qui ne sont pas directement impliqués dans la thématique. Le format IPSW n'est donc en aucun cas concurrent de celui du CEMRACS.

Une initiative transposable en France ?

La tentation naturelle d'un étudiant qui envisage des débouchés dans le secteur privé est de faire un Master Professionnel, plutôt que de s'engager dans la recherche. Il est donc important de mettre en place des initiatives permettant d'améliorer les contacts avec le secteur privé, qui pourront par ricochet motiver des étudiants pour faire des études doctorales, dans des domaines divers. Le programme IPSW pourrait être un jalon à cet effet.

Pour transposer cette initiative en France, il est nécessaire de trouver les fonds pour l'organisation, mais surtout trouver la personne « facilitatrice » en charge de la recherche de problèmes. Ce travail essentiel prend beaucoup de temps, et nécessite donc au minimum une décharge d'enseignement.

Toutefois, la recherche de problèmes est naturellement facilitée par les contacts déjà existants entre les laboratoires et les industries, et les initiatives comme le CEMRACS ou les rencontres Math-Industrie organisées par la SMAI.

Annexe : quelques succès obtenus lors des IPSW

Ce rapport succinct a été établi par le PIMS.

INDUSTRIAL PROBLEM SOLVING WORKSHOP (IPSW)

– IPSW 6 - The problem that Edward Keyes of Semiconductor Insights, Ottawa brought was quickly solved and they implemented the algorithm into their production. Semiconductor Insights was so pleased they signed up the following year for Calgary IPSW 7.

– In IPSW 7 - Orisar Inc. (formerly Semiconductor Insights) was able to have another problem reconstruction problem solved dealing with integrated circuit photomicrographs. As with the first problem at IPSW6, Orisar implemented this algorithm into their production.

– In IPSW 7 - Lockheed Martin posed a problem to identify the tracking of multiple targets. Concurrent with the workshop, the mentor for this problem began a start up company utilizing many of the algorithms that were implemented.

– IPSW 6 - MacMillian-McGee returned with a problem in resistance monitoring. This is a testament to their success in IPSW4. They then returned once again in IPSW 7 to pose a problem concerning in-situ thermal remediation of contaminated soil. This work was later presented at an international conference of thermal remediation in Monterey California.

– IPSW 5 - Semi-conductor materials are essential for today's fast growing electronic and computer industries. The workshop problem brought by Bill Mickelthwaite of Firebird Semiconductors of Trail, BC spawned a MITACS (Network Centre of Excellence) project involving researchers from York, UBC, Penn State and others. The IPSW success story is that this PIMS event developed a seed project for MITACS supplying significant funding for the project. The collaboration between researchers continues to this day, even after the project has been completed.

– MacMillian-McGee Corporation brought a problem to IPSW 4 concerning electromagnetic wellbore heating. One of the goals of the project was to estimate the yield of a processed well. Subsequent to the workshop, Bruce McGee built a horizontal test well to verify the predictions of the model. He has subsequently used this model to accurately estimate viability of various well sites.

– Michelin Engineer Bill Mawbry came from Michelin's research group in South Carolina to spend the week with an IPSW 4 team. The team which worked on this one, ably led by mentor Professor Michael Lamoureux of the University of Calgary, made significant progress in solving this problem. Bill said that he could see direct savings of up to \$500,000 a year from their work. Michelin was so pleased with the results that they returned to a subsequent IPSW with a new set of four problems. Again they met with great success, having three of the four problems solved within the week.

– Random Knowledge brought the problem of identifying the activity of malicious hackers. The inception of this company was also result of the group that worked on the Lockheed Martin project at IPSW7.

– There have been many financial problems at IPSW. One of the more popular dealt with efficient portfolio selection and was posed by Merak Projects Limited out of Calgary.

– IPSW 3 - Searle corporation presented a pharmaceutical classification problem to identify pharmacophore structures. The idea is to measure the structural

diversity of the chemical stores at Searle. This was a unique opportunity for the industry participant to combine the talents of chemists and mathematicians in an environment focussed on their problem.

– The most popular IPSW problem ever was the Boeing problem in IPSW 2 with over 20 participants. The problem was to devise a financial strategy to deal with demand fluctuations (causing expensive layoffs) so as to maximize the long term profit of the company. IPSW actually produced two industrial reports from the one market fluctuation management problem.

Références

- [1] About study groups [online]. Available from : <http://www.maths.ox.ac.uk/ociam/Study-Groups/about.shtml>.
- [2] The european consortium for mathematics in industry [online]. Available from : <http://www.ecmi.dk/>.
- [3] Industrial problem solving workshops [online]. Available from : <http://www.pims.math.ca/industrial/ipsw.html>.
- [4] Le centre d'été mathématique de recherche avancée en calcul scientifique [online]. Available from : http://smai.emath.fr/article.php3?id_article=51.
- [5] Mathematics of information technology and complex systems [online]. Available from : <http://www.mitacs.math.ca/>.
- [6] Proceedings of the industrial problem solving workshops (ipsw) and the graduate industrial math modelling camps (gimmc) [online]. Available from : http://www.pims.math.ca/Publications_and_Videos/PIMS_Proceedings/.

Sessions États de la recherche

Serge Cantat, Zindine Djadli

Session de mai 2006 :

« Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux »

La prochaine session, organisée par Serge Cantat aura lieu du 22 au 24 mai 2006 à l'Université de Rennes I.

La session sera articulée autour de quatre mini cours :

- Transformations rationnelles; exemples et rigidité par S. Cantat
- Hauteurs, dynamique et équirépartition par A. Chambert-Loir
- Théorie ergodique des transformations rationnelles par V. Guedj
- Dynamique des fractions rationnelles sur un corps p -adique par J.-C. Yoccoz

Quelques aspects des systèmes dynamiques obtenus par itération d'une transformation rationnelle dépendant d'une ou plusieurs variables seront présentés. S. Cantat présentera les exemples principaux de telles transformations en cherchant à caractériser certaines d'entre elles par leurs propriétés dynamiques particulières. V. Guedj décrira leurs propriétés ergodiques, lorsque les variables vivent dans le corps des nombres complexes. Les exposés d'A. Chambert-Loir permettront de relier les aspects ergodiques à des problèmes de nature arithmétique. Enfin, J.-C. Yoccoz s'intéressera à la dynamique des transformations rationnelles d'une seule variable sur les corps p -adiques.

<http://name.math.univ-rennes1.fr/serge.cantat/Etats.html>

Session de juin 2006 :

« Géométrie conforme et opérateurs géométriques »

La deuxième Session, organisée par Zindine Djadli, aura lieu du 12 au 14 juin 2006 à l'université de Cergy-Pontoise.

L'édition de juin 2006 portera sur la géométrie conforme et l'analyse sur les variétés. Au cours des dernières années de nombreux travaux novateurs et de grande importance ont été obtenus, en particulier sur l'étude de la géométrie des variétés de dimension 4.

Pour situer la problématique, on pourrait dire que l'une des questions majeures en géométrie concerne le lien entre les propriétés algébriques du tenseur de courbure et la topologie (ou la géométrie) d'une variété. Une des questions (parmi tant d'autres) est la suivante : sous quelle(s) condition(s) sur son tenseur de courbure une variété riemannienne est compacte ou homéomorphe à une variété à courbure sectionnelle constante ? Pour étudier ce type de questions de nombreux outils ont été introduits, et l'un d'entre eux, le flot de Hamilton-Ricci, connaît en ce moment un vif succès en dimension 3. En dimension plus grande, la situation topologique et géométrique est plus complexe, et il est avantageux d'étudier dans un premier temps ces questions de rigidité dans une classe conforme fixée. Il y a une dizaine d'années un certain nombre d'outils nouveaux sont apparus pour l'étude de ce

genre de problèmes. Nous nous proposons, au cours de ces États de la Recherche, de donner une introduction à ces outils.

Le public visé est constitué des thésards en géométrie effectuant leur thèse en France, des post-docs en géométrie présents actuellement en France ou qui le seront dans un avenir très proche, ainsi que des chercheurs dans ce domaine en poste en France.

La rencontre s'articulera autour de trois axes :

Mini-cours sur les opérateurs d'ordre 4 et l'étude de la géométrie conforme en dimension 4 :

Ce mini-cours sera donné par Zidine Djadli, maître de conférences à l'Université de Cergy-Pontoise. Le but de ce cours est d'aborder l'étude des opérateurs d'ordre 4 ayant des propriétés de stabilité par l'action du groupe conforme et de montrer, à travers des exemples, comment ceux-ci peuvent être utilisés pour obtenir des résultats de rigidité géométrique (du type pincement sur la courbure) pour les variétés fermées de dimension 4.

Mini-cours sur les variétés compactes à bord qui sont asymptotiquement Einstein :

Ce mini-cours sera donné par Marc Herzlich, professeur à l'Université de Montpellier 2. Le but de ce cours est l'étude des variétés compactes à bord qui sont asymptotiquement d'Einstein. En particulier on s'intéressera aux invariants conformes liés à ces variétés (par exemple le volume renormalisé introduit par Fefferman et Graham) et là encore on montrera comment ceux-ci peuvent être utilisés dans l'étude de problèmes de rigidité géométrique.

Mini-cours sur les paires conformes :

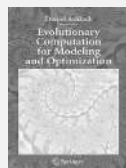
Ce mini-cours sera donné par Colin Guillarmou, chercheur à l'Université de Nice. Le but de ce cours est de donner une introduction aux travaux très récents de Fefferman et Graham sur les paires conformes (opérateurs et courbure associée) à travers un prisme plus analytique. En particulier l'accent sera mis sur l'interprétation en terme de scattering de ces objets, ainsi que sur la « construction » de ces paires conformes.

Cinq conférences d'une heure seront données par Laurent Bessières (Université Grenoble I), Olivier Biquard (Université de Strasbourg, sous réserve), Gilles Carron (Université de Nantes), Thierry Coulhon (Université de Cergy-Pontoise) et Jean-Marc Schlenker (Université Toulouse III).

Les organisateurs seront en mesure, normalement, de financer tous les participants. Pour tout renseignements complémentaires et pour une inscription on pourra se rendre sur la page :

<http://www.u-cergy.fr/rubrique1266.html>

Applied Mathematics in Focus



Evolutionary Computation for Modeling and Optimization

D. Ashlock, University of Guelph, ON, Canada

This book is an introduction to evolutionary computation, selectionist algorithms that operate on populations of structures. It includes over 100 experiments and over 700 homework problems that introduce the topic with an application-oriented approach.

2006. XX, 572 p. 163 illus. Hardcover
 ISBN 0-387-22196-4 ► € 62,95 | £ 48,50



Modeling and Simulation in Scilab/Scicos

S. Campbell, North Carolina State University, NC, USA; J.-P. Chancelier, CERMICS ENPC, France; R. Nikoukhan, INRIA, France

The book is based on the new Scilab 3.0. While the book will provide useful information to experienced users it is designed to be accessible to beginning users from a variety of disciplines.

2005. X, 313 p. 103 illus. Hardcover
 ISBN 0-387-27802-8 ► € 42,95 | £ 33,00

Visualization and Processing of Tensor Fields

J. Weickert, Saarland University, Saarbrücken, Germany; H. Hagen, Technical University of Kaiserslautern, Germany (Eds.)

This book is the first edited volume that presents the state of the art in the visualization and processing of tensor fields.

2006. XV, 481 p. (Mathematics and Visualization) Hardcover
 ISBN 3-540-25032-8 ► € 89,95 | £ 69,00



Stochastic Tools in Mathematics and Science

A. Chorin, O. H. Hald, University of California, Berkeley, CA, USA

Stochastic Tools in Mathematics and Science is an introductory book on probability-based

modeling. It covers basic stochastic tools used in physics, chemistry, engineering and the life sciences.

The book is based on the new Scilab 3.0. While the book will provide useful information to experienced users it is designed to be accessible to beginning users from a variety of disciplines.

2006. VIII, 152 p. (Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, Vol. 1) Softcover
 ISBN 0-387-28080-4 ► € 34,95 | £ 27,00



Python Scripting for Computational Science

H. P. Langtangen, Simula Research Laboratory, Lysaker, and University of Oslo, Norway

The goal of this book is to teach computational scientists how to develop tailored, flexible, and human-efficient working

environments built from small programs (scripts) written in the easy-to-learn, high-level language Python. The focus is on examples and applications of relevance to computational scientists. The second edition features new material, reorganization of text, improved examples and tools, updated information, and correction of errors.

2nd ed. 2006. XXIV, 736 p. 62 illus. (Texts in Computational Science and Engineering, Vol. 3) Hardcover
 ISBN 3-540-29415-5 ► € 49,95 | £ 38,50

Easy Ways to Order for the Americas ► **Write:** Springer Order Department, PO Box 2485, Secaucus, NJ 07096-2485, USA
 ► **Call:** (toll free) 1-800-SPRINGER ► **Fax:** +1(201)348-4505 ► **Email:** orders-ny@springer.com or **for outside the Americas**
 ► **Write:** Springer Distribution Center GmbH, Haberstrasse 7, 69126 Heidelberg, Germany ► **Call:** +49 (0) 6221-345-4301
 ► **Fax:** +49 (0) 6221-345-4229 ► **Email:** SDC-bookorder@springer.com ► Prices are subject to change without notice.
 All prices are net prices.

012269x

La constitution de l'écriture symbolique mathématique. Symbolique et invention

Michel Serfati¹

Cet article de philosophie et d'histoire des mathématiques est d'abord consacré à la constitution de l'écriture symbolique mathématique au cours du dix-septième siècle, les trois protagonistes essentiels étant Viète, Descartes, et Leibniz. Il s'efforce ainsi de résumer (brièvement !) quelques-unes des conclusions de l'ouvrage de philosophie et d'épistémologie que je viens de publier [22] – lui-même construit autour de ma thèse de philosophie [28].

Je tiens à remercier ici le comité de rédaction de la Gazette de m'avoir permis d'exprimer mes conclusions, tant épistémologiques que philosophiques, sur un sujet situé à la racine même de l'histoire moderne de notre discipline.

On pourrait être surpris de voir faire coïncider la fin de la constitution de l'écriture symbolique avec la *Géométrie* de 1637, et non pas avec la *Begriffsschrift* de 1879 ou les *Principes de l'arithmétique* de Peano de 1889. Une réponse est d'ordre strictement historique : à notre sens, tous les éléments constitutifs véritablement décisifs de l'écriture symbolique étaient en place dès 1637, même si la théorie n'en était pas faite, et ne viendra qu'aux XIX^e et XX^e siècles. Durant deux siècles et demi, les géomètres ont donc largement continué d'inventer, ce qui nous intéressait ici – ce point est essentiel – sans se référer à une théorie alors inexistante de l'écriture symbolique.

Le premier objectif est de cerner les conditions du passage entre les périodes grecque et médiévale, où tout s'écrit et se calcule dans la langue naturelle, aux écritures symboliques semblables aux écritures modernes de la fin du XVII^e siècle, comme dans les correspondances entre Leibniz et Jean Bernoulli ou l'*Algebra Universalis* de Newton.

On peut introduire très naturellement à la problématique des signes par la simple mise en regard de deux textes mathématiques. D'une part un extrait de l'*Ars Magna* de Cardan², archaïque, illisible pour nous, et cependant très représentatif du XVI^e siècle mathématique (dont il fut l'un des textes majeurs)

¹ IREM, Université Paris VII

² Extrait de la page 255 de l'*Ars Magna*, de Jérôme Cardan[7] dans l'édition des œuvres de 1663. Les motifs de l'illisibilité du texte ne sont pas conjoncturels, mais bien de structure (texte non ponctué).

operationis. Probatio est, vt in exemp.o,
 cubus & quadrata 3. æquantur 21: æstima-
 tio ex his regulis est, R. v. cubica $9\frac{1}{4}$ p.
 R. $89\frac{1}{4}$ p. R. v. cubica $9\frac{1}{2}$ m. R. $89\frac{1}{2}$ m.
 1. cubus igitur est hic constans ex septem
 partibus,

et de la *Géométrie* de Descartes d'autre part ([9] VI, 473) de facture quasi-
 moderne :

Or si on a $x^3 \propto^* - px + q$, la reigle dont Cardan at-
 tribue l'inuention a vn nommé Scipio Ferreus, nous ap-
 prent que la racine est,

$$\sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{C. - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$$

Comme aussy lorsqu'on a $x^3 \propto^* + px + q$, & que le
 quarré de la moitié du dernier terme est plus grand que
 le cube du tiers de la quantité conuë du penultiesme,
 vne pareille reigle nous apprend que la racine est,

$$\sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{C. + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$$

Avec plus de précision, on repère le moment de la coupure entre 1591 (l'*Isagoge* de Viète) et 1637 (la *Géométrie* de Descartes³). Après 1637, certes le texte se modifie et se perfectionne, mais il a définitivement acquis l'essentiel des constituants de sa forme actuelle, autorisant les développements à venir de l'écriture mathématique. La *Géométrie* de 1637 ([9] VI, 367-485) est ainsi le premier des textes de l'histoire directement lisible par les mathématiciens d'aujourd'hui.

Comment et pourquoi pareil bouleversement ? On se trouve ici, situation insolite, en des temps historiques (le XVII^e siècle européen), au moment de la création d'une langue écrite : la langue mathématique, avec abondance de textes et d'auteurs. Comment : c'est-à-dire en quoi précisément, dans la matérialité du texte, réside ce que nous reconnaissons aujourd'hui, entre Cardan et Descartes, comme des différences majeures ? À cette question, on proposera d'abord des réponses historiques et épistémologiques, avant de conclure philosophiquement. Car l'analyse de la constitution de l'écriture symbolique dépasse, largement à notre sens, la démarche purement historique qui se résume à décrire et inventorier les diverses occurrences des signes – une tâche remarquablement effectuée par Florian Cajori dans *A History of mathematical notations*, dont les deux volumes [5] constituent une entreprise demeurée unique en son genre, la tentative d'un inventaire exhaustif de tous les signes et notations mathématiques, européens et orientaux, depuis les Antiquités grecque et égyptienne, jusqu'au début du XX^e siècle, époque où écrivit Cajori (1859-1930). Ce texte irremplaçable, d'une exceptionnelle érudition, accumule les références d'occurrences de signes divers, tant dans les manuscrits que les imprimés. Les présents travaux lui doivent bien des exemples. Tel qu'il est cependant, le texte de Cajori n'offre aucune ouverture vers une quelconque interprétation philosophique ou épistémologique.

La question de la constitution de l'écriture symbolique concerne directement par contre la philosophie des mathématiques, et à un double titre : d'une part,

³ Chez Descartes même, on peut, plus précisément encore, le situer entre 1619 (les *Cogitationes Privatae*) et 1637 (la *Géométrie*). Cf. notre étude [30].

c'est en effet une tâche proprement philosophique que d'analyser pas à pas la constitution d'une langue écrite, non pas certes en référence à un prétendu schéma d'« idéalisés mathématiques », éternelles, supposées exister abstraitement et en soi, mais bien en fonction de ce que furent concrètement les intérêts et les motivations des mathématiciens du temps (les « géomètres », comme on disait) et des contraintes que la réalité leur opposa. Le cas des signes de ponctuation (signes aussi dits d'*agrégation*, ou encore *délimitants* c'est-à-dire parenthèses, crochets, points, *vinculum*, etc.) est ici éclairant : si indispensables qu'ils soient pour le déchiffrement de tout texte symbolique⁴, la nécessité de leur introduction n'en apparut pourtant aucunement à Cardan qui produisit en conséquence un texte bien difficile à déchiffrer, même si les lecteurs du temps étaient plus familiers que nous avec cette forme d'écriture des mathématiques. D'autre part et surtout, nos conclusions montrent que l'avènement de l'écriture symbolique a constitué, non pas simplement un « changement de notations » sur un fond mathématique qui serait demeuré inchangé, mais bien une révolution conceptuelle, « symbolique », décisive et historiquement datée. Et cet aspect de l'histoire des idées est, nous semble-t-il, davantage encore s'il est possible, proprement philosophique. Avec l'objectif de *démontrer* sur ce point, on a, partout dans [22], fait appel à ce questionnement décisif, épistémologiquement essentiel : qu'a-t-on pu faire en mathématiques avec l'écriture symbolique qu'on ne pouvait certes pas faire auparavant ? Or, à cette interrogation-clé, les exemples en réponse sont, dès le XVII^e siècle même, si abondants et si divers qu'il est dérisoire de se mettre en devoir de les inventorier. En vérité, nous (c'est-à-dire les mathématiciens d'aujourd'hui) sommes désormais si habitués à l'écriture symbolique – elle constitue dans les faits un cadre épistémologique intériorisé – que nous avons beaucoup de peine à imaginer que certaines méthodes auraient pu ne pas être ou qu'il ait fallu si longtemps pour y parvenir. Pour mieux prendre conscience de ces difficultés des siècles passés, le lecteur (s'il est mathématicien) pourra peut-être s'imaginer devoir expliquer la pratique des mathématiciens à une part de son entourage constituée de non mathématiciens.

Les figures de la représentation symbolique

L'organisation achevée de l'écriture symbolique s'est élaborée autour de six figures. Telle est une de nos premières conclusions dans [22]. On trouvera d'abord la représentation du « *requis* » (la ou les inconnues), ensuite celle du « *donné* », aussi celle des *instructions opératoires élémentaires*. Celle ensuite de l'*enchevêtrement* de ces mêmes instructions (quatrième figure), corrélatrice de la ponctuation du texte symbolique ([22], chap.V). Cette dernière étude se conclut, d'une façon naturelle, par la mise en avant d'une arborescence « combinatoire » sous-jacente (avatar d'un diagramme de parenthésage) associée à tout texte symbolique. En un temps second, on distingue les deux modes de déplacement sur cette arborescence (depuis la racine ou depuis les feuilles) qui sont ensuite identifiés comme deux positions (théoriques) du sujet mathématicien, dites de l'auteur et du lecteur. Historiquement, c'est, croyons nous chez Bombelli (*Algebra*, 1572) qu'on repère une des premières véritables prises en compte de la ponctuation.

⁴ Sans que la structure de leur fonctionnement soit aucunement modifiée, ces signes peuvent cependant être à l'occasion omis en fonction de règles hiérarchiques implicites ou explicites (cf. [22], 102).

Il s'y ajoutera une cinquième figure, la représentation de la *mise à égalité* qui fut le fait de Recorde (1557), puis de Descartes (1637) et dont on ne dira ici que quelques mots ([22], chap. VI). Ce fut une représentation tardive, qui rendit cependant dès lors impossible tout maintien dans le texte de la structure de la langue naturelle. Dans la phrase mathématique rhétorique, le groupe verbal associé au concept d'égalité occupait évidemment la place centrale. Dans l'écriture symbolique naissante, sa représentation par une « figure » donna aussi à celle-ci le rôle « combinatoire » central. Mais en même temps, elle rendit en fait impossible le maintien de la structure rhétorique dans le reste de la phrase. Avec la suppression du verbe « égalitaire », disparurent en effet ses formes et ses temps de conjugaison, et avec eux les déclinaisons grammaticales, qu'en latin ou en allemand, il commandait. Comment dans ce cas décliner les fragments rhétoriques restants ? D'un autre côté, le signe nouveau créait, dans la ligne, deux places fixes et distinctes, situation qui ne pouvait toujours coïncider avec la syntaxe de la rhétorique. Comment maintenir celle-ci dans une phrase commandée par une figure symbolique centrale ? On découvre ici les mêmes points de discordance entre rhétorique et symbolique observés à propos de la représentation d'un enchevêtrement d'instructions.

La sixième figure enfin est celle de la représentation des *concepts composés*. Elle fut complètement traitée et résolue par Descartes dans la Règle XVI de ses Règles pour la Direction de l'Esprit (*Regulae*), bulletin de naissance de toute la notation moderne.

La conjonction de ces six figures allait se révéler entièrement constitutive de la structure de l'écriture nouvelle⁵. Dans le cadre de cet article, nous nous limiterons à évoquer (brièvement) la problématique de deux seulement d'entre elles, d'une part la représentation du « donné » (aussi appelée *dialectique de l'indéterminé*), d'autre part la représentation des concepts composés.

La dialectique de l'indéterminé (l'« arbitraire, mais fixé ») (deuxième figure)

La représentation du « donné » dans le texte symbolique fut une innovation majeure de la fin du XVI^e siècle, due à François Viète, qui introduisit un nouveau système de signes, entièrement constitué de lettres, et dont la fonction véritable consista, en dernière analyse, à faire prendre en charge par l'écriture symbolique deux concepts jusqu'alors considérés comme opposés, l'arbitraire et le fixé, l'un et le multiple ou, plus significativement encore, le quelconque et le singulier. Cette assomption dans le symbolique de ce qui aurait incontestablement constitué une contradiction rhétorique, se subsuma par la création, dans les modes de connaissance mathématique, d'une catégorie absolument inédite dans le calcul, l'« indéterminé ».

Pour introduire à la problématique, on fera d'abord observer qu'au XVI^e siècle (avant Viète), si les figures géométriques étaient regardées (depuis l'Antiquité) comme « quelconques », c'est-à-dire génériques et « emblématiques » (d'une situation géométrique donnée)⁶, il n'y avait pas, symétriquement, de représentation des

⁵ On montre en effet par exemple ([22], 266) que la notation fonctionnelle s'inscrit bien dans le schéma précédent.

⁶ La figure géométrique avait sans doute une singularité, mais qui était postulée être non signifiante. Tout le commentaire sur l'antiquité mathématique grecque s'accorde à reconnaître cette conception platonicienne. Heath par exemple note que la figure représentait en fait une *classe* de

nombres « quelconques ». Rappelons aussi que pour représenter l'inconnu dans le calcul, un symbole primitif non chiffré (par exemple lettre ou signe cossique) avait été nécessaire, précisément parce qu'il était inconnu. Viète introduisit alors des lettres pour *représenter aussi* le donné. Celles qu'il se proposa d'employer étaient cependant de type alphabétique différent, selon la nature du représenté. Voici Viète sur ce point fondateur ([32], 47) :

« or afin que ceci soit aidé par l'art, les grandeurs données seront distinguées des requises par un symbole constant perpétuel et apparent, en signifiant les grandeurs requises par l'élément Alphabétique A, ou quelques autres voyelles, E, I, O, U, Y, et les données par les éléments B, C, D, ou quelque autre des consonnes. » Viète prend certes bien soin de réclamer un « symbole perpétuel et apparent » pour « distinguer les grandeurs données des requises ». Cette même définition cependant, comprise par les géomètres de son temps, et selon les règles alors en vigueur, ne manquait pas de receler une possible contradiction, due à ce fait simple : dans tout calcul à cette époque, le « donné » était cela seulement qui était susceptible d'une représentation explicite par chiffres. Dire, comme Viète, que la consonne *B* par exemple représentait une grandeur donnée, signifiait donc, en principe, que, par le signe *B*, était représenté un nombre fixe, à la valeur connue de l'auteur du texte. Dans ces conditions cependant, le lecteur n'en avait certes pas la connaissance ! Comment dans ce cas Viète pouvait-il affirmer que *B* était le signe d'une donnée ? Si nous inclinons aujourd'hui à les juger inconsistantes (?), les objections du temps à une telle conception de la connaissance et de la représentation ne peuvent être négligées et rejoignent celles qu'ultérieurement les protagonistes de l'affaire de l'axiome du choix s'adressèrent dans leurs correspondances : comment deux lecteurs qui s'ignorent sont-ils sûrs de « penser » toujours à la même valeur⁷ ? Comment l'auteur lui-même est-il certain de « penser » toujours au même élément ? Il ne s'agit pas ici, comme l'écrivait Lebesgue à propos de Zermelo, d'un contradicteur possible, mais d'être cohérent avec soi-même : comment Zermelo peut-il être sûr que Zermelo « pense » toujours au même élément, puisqu'il ne le caractérise en rien pour lui-même ? Cette apparente contradiction et ces objections méthodologiques furent donc autant d'obstacles épistémologiques respectables, qui expliquent à notre sens pourquoi, alors qu'il est aujourd'hui éclatant que la représentation du donné par lettres a été un élément décisif dans le développement des mathématiques modernes et contemporaines, cette découverte majeure, qui n'avait aucunement accompagné la première algèbre de Diophante, n'ait vu le jour que treize siècles après lui.

Que le système des lettres de Viète fut en vérité la représentation d'une convention quant au donné, et non l'explicitation de ce même donné, doit cependant être regardé après coup, comme un moyen, en quelque sorte nécessaire, de dépasser la contradiction initialement inscrite. Cependant, cette disparition de l'explicite dans la symbolisation du donné, pour « nécessaire » qu'elle fût, allait à son tour mécaniquement entraîner, au moment de l'interprétation, cette faculté et cette obligation nouvelles : devoir considérer ce donné comme arbitraire. Si en effet la seule information fournie par la lettre comme signe, était d'indiquer une convention

figures « *The conclusion can, of course, be stated in as general terms as the enunciation, since it does not depend on the particular figure drawn ; that figure is only an illustration, a type of the class of figure and it is legitimate therefore, in stating the conclusion, to pass from the particular to the general* » ([12], vol.1, 370).

⁷ Cf. M. Serfati, 'Infini « nouveau ». Principes de choix effectifs' ([29], 223).

portant sur la catégorie du représenté (le « donné ») et non d'expliciter sa valeur, alors celle-ci, bien que fixée, était libre d'être arbitrairement choisie. En d'autres termes encore, le B de l'énoncé de Viète était bien le signe d'une quantité donnée au sens précédemment défini, mais d'une donnée *quelconque*. Ce point central de l'arbitraire, nullement explicite dans l'*Isagoge* fondateur, fut cependant opératoire dès l'examen de son premier exemple et découla incontestablement de l'interprétation que, dans sa pratique, Viète fit de sa propre notation. Ainsi, en dernière analyse, Viète demandait-il à son lecteur l'adhésion à une certaine convention, à savoir : d'une part il existe de l'« arbitraire mais fixé », d'autre part cette existence est gagée par l'écriture symbolique. On doit alors considérer que, depuis cette époque, put prétendre se reconnaître comme « mathématicien », celui-là qui, après Viète, accepta de se reconnaître dans ce faisceau de conventions éminemment contingentes.

Immédiatement accepté par la communauté savante, en particulier par Descartes, le système de lettres de Viète se répandit dans toute l'Europe. Quoi qu'il en fût en effet de sa légitimité ontologique, il autorisait spontanément l'usage des *formules littérales* pour la résolution des problèmes – ce que tout le XVII^e siècle appellera des *canons* – une procédure à laquelle l'emploi des lettres est évidemment une condition *sine qua non*. Dès lors et jusqu'à aujourd'hui, les formules viendront remplacer les anciennes comptines (règles rhétoriques, pièces de vers ou sonnets) qui, du Moyen Âge à la Renaissance, décrivaient dans la langue naturelle la résolution des problèmes ([22], 161). Un peu plus tard, le concept (pseudo concept ?) d'indéterminé fut simplement habillé d'un terme commode, mais ambigu, apparu à la fin du XVII^e siècle avec Leibniz, celui de « la variable », un terme aussi employé adjectivement dans une expression comme la grandeur « variable » ; ainsi opposé à « constante », le terme connut dès lors (et connaît encore) un succès considérable, sans doute lié au fait qu'il est naturellement accompagné d'une connotation cinématique intuitive forte, celle d'une quantité qui pourrait par hypothèse « prendre toutes ses valeurs » à l'intérieur d'un certain champ.

Nous revenons *in fine* sur ce que nous avons considéré ci-dessus comme une *contradiction* (inaugurale) soulevée par Viète, et sur le statut corrélatif de la « variable ». Le début du XX^e siècle allait en effet susciter d'importantes réflexions et controverses sur ce point, de la part de mathématiciens, de logiciens, et de philosophes ([22], 189). Ainsi un logicien comme Russell considérait-il explicitement le terme de « variable » comme bien difficile à analyser. D'une part, dans les *Principes des mathématiques*, il considérait le concept comme central⁸ : « The variable is, from the formal standpoint, the characteristic notion of Mathematics ». D'un autre côté, plus loin dans le même texte [p. 93], il reconnaissait : « It appears from the above discussion that the variable is a very complicated logical entity, by no means easy to analyze correctly ». L'argumentation de Russell dans ce texte de 1903 revient dans les faits à écarter toute interprétation de type cinématique inscrite dans le terme « variable » (sans quoi, ironise Russell à juste titre, le signe n serait un « Protée » mathématique⁹) et à la tentative d'assumer rhétoriquement la contradiction : une « variable » de signe « n » par exemple, n'est pour Russell, ni un élément fixé, ni tous les éléments, mais seulement la représentation du « any »

⁸ *The principles of mathematics* ([21], Chapitre VIII), *The variable*, 90.

⁹ « If a theorem is proved concerning n , it must not be supposed that n is a kind of arithmetical Proteus, which is 1 on Sundays and 2 on Mondays, and so on. Nor must it be supposed that n simultaneously assumes all its values ».

(c'est-à-dire l'une des formes anglaises du « quelconque »), lequel, en dernière analyse, est, pour lui, l'un des « indéfinissables ».

La position de Frege fut au contraire de reconnaître qu'il se trouvait devant une contradiction rhétoriquement irréductible, et de refuser de la dissimuler en la recouvrant d'un terme vague, si commode soit-il, comme « variable ». Ainsi s'oppose-t-il vigoureusement au Russell du texte précédent, et il écrit : « Le mieux ne serait-il pas d'éviter de parler de variables, parce qu'il est à peu près impossible d'élucider la signification de ce mot ».

L'exponentielle cartésienne et la représentation des concepts composés (sixième figure)

Placés devant une grandeur inconnue, telle la « Chose »¹⁰ du système cossique ou l'arithme diophantien, les géomètres estimèrent très vite indispensable de concevoir le « Carré », et aussi le « Cube ». Au-delà du « Cube », il était des espèces supérieures dénommées le « Carré-Carré » (ou « Bicarré », selon les auteurs), puis le « Sursolide », bref une « lignée » de puissances. Le plus simple des calculs entremêlant la « Chose », le « Carré », et le « Cube », il devint nécessaire de représenter dans l'écriture symbolique d'abord le « Carré », puis toute la lignée. Si la nécessité de cette représentation ne fut mise en doute par aucun géomètre, les solutions proposées, en dépit de l'apparente simplicité de la question, furent étonnamment diverses non seulement sur le plan du choix du type des signes (chiffre, lettre, ou « figure »), mais surtout quant à la procédure même de représentation. Nous donnons dans ([22], chap. VIII) cinq exemples épistémologiquement significatifs des systèmes proposés, de Diophante à Descartes. Il y eut bien d'autres tentatives et d'autres auteurs, inventoriés et examinés par Cajori¹¹. C'est Descartes, qui, par son exposant, mit fin à des siècles de notations éparées, quelquefois insolites, mais jamais cependant opératoirement achevées avant lui. On fera mieux comprendre l'importance conceptuelle centrale de la représentation des espèces de puissances en montrant *in fine*, qu'essentielle sur le plan de la technique mathématique, elle fut en même temps la première, historiquement parlant, qui conduisit à la représentation dans l'écriture symbolique d'un concept composé¹².

On reviendra d'abord à Diophante, en soulignant qu'une des spécificités de l'écriture symbolique chez lui tenait en la coexistence d'un signe ζ pour l'arithme (c'est-à-dire l'inconnue) conjointement à d'autres, radicalement distincts, pour le « Carré » Δ^γ , et aussi pour le « Cube » K^γ . Une batterie de signes divers complétait alors la représentation du « Bicarré » $\Delta^\gamma\Delta$, du « Carré-Cube » ΔK^γ , et du « Cubo-Cube » $K^\gamma K$. Diophante exhibait en outre un signe nouveau S^x , pour ce qu'on appellerait aujourd'hui l'inverse de l'arithme, et un autre enfin, Δ^{ν^x} , pour le carré de ce dernier. Un inventaire analogue était en vigueur dans le système cossique¹³, avec

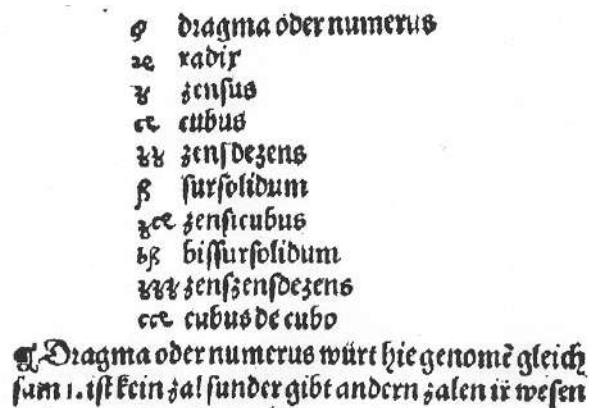
¹⁰ C'est la dénomination de l'inconnue dans ce système. Cf. note 13 *infra*.

¹¹ « Signs of Powers » dans ([5], vol. 1, 335-360).

¹² Nous avons développé certaines de ces conclusions dans 'Descartes et la constitution de l'écriture symbolique mathématique' [27].

¹³ Le terme de *coossique* renvoie à ce que fut au XVI^e siècle la dénomination du « requis », c'est-à-dire de l'objet de la recherche en mathématiques. Ce que l'on recherchait avait certes été bien souvent ce que l'on désirait. Et donc, en des temps naïfs, on le désigna comme le bien, l'héritage,

toutefois des signes différents des précédents : la « Chose » avait pour symbole $\mathfrak{C}$, le « Carré », ou *Census* était usuellement représenté, chez Stiefel ou Rudolff par exemple par $\mathfrak{Z}$, et le « Cube » par $\mathfrak{C}$. De même, le « bicarré » avait pour signe $\mathfrak{ZZ}$, etc. La *Coss* (1525), de Rudolff, expose ainsi un des premiers inventaires de tels signes, avec dix niveaux[5] :



Un système qui pourrait certes paraître satisfaisant, hier comme aujourd'hui. On va pourtant en exposer sur un exemple (une équation chez Stiefel) les insuffisances structurelles considérables. Dans l'*Arithmetica Integra*, Stiefel se propose en effet de résoudre :

$$1\mathfrak{ZZ} + 2\mathfrak{C} + 6\mathfrak{Z} + 5\mathfrak{C} + 6\mathfrak{C} = 5550$$

Entremêlant ainsi la « Chose », le « Carré », le « Cube » et le « Bicarré », la question est ce qu'on appelle anachroniquement aujourd'hui (depuis Descartes !) une équation numérique du quatrième degré¹⁴. Elle était à l'époque considérée comme une relation entre des espèces (« Chose », « Carré », etc.) qu'il fallait résoudre, c'est-à-dire démêler. C'était un problème difficile, aucune méthode générale n'étant alors connue¹⁵. Pour ce faire, Stiefel introduisit, sans explications, l'expression nouvelle :

$$1\mathfrak{Z} + 1\mathfrak{C} + 2$$

la possession (les Arabes), la couleur (les Hindous), dénominations qui, au bout d'un temps, parurent trop spécifiques, au regard de la profonde analogie entre les procédés de recherche. En Europe, au Moyen-Âge et à la Renaissance, se substitua ce mot-valise, porteur d'images ambiguës et multiples, qui rapidement trouva sa place en latin, puis dans les langues communes : *res*, la « Chose », *cosa* en italien, germanisée en *coss* chez les géomètres allemands, puis, à la suite de Rudolff, l'écriture *cossique*, qu'utilisèrent entre autres Clavius et le jeune Descartes. Le système *cossique* de notations dirigea la pensée de bon nombre de mathématiciens au XVI^e siècle et au début du XVII^e (cf.[30]).

¹⁴ Texte extrait de l'*Arithmetica Integra* ([31], fol. 307 b). Exemple reproduit dans ([5], Vol. 1, 139-140).

¹⁵ Le traité de Stiefel parut à Nuremberg en 1544, un an avant la publication de l'*Ars Magna*, de Cardan, toujours à Nuremberg, lequel contenait la première des méthodes connues pour la résolution des équations générales du 4^e degré (due à Ferrari).

et constata – sans aucun calcul explicite – que si on ajoutait à cette dernière son propre carré, on obtenait le premier membre de l'équation initiale¹⁶. Ceci demande commentaire : il s'agit d'abord de calculer le carré de $1\mathfrak{Z} + 1\mathfrak{C} + 2$. Or ce carré *ne peut s'écrire symboliquement* dans le système cossique, la représentation au moyen du signe $\mathfrak{Z}$ ne permettant en effet que l'écriture du carré de la seule « Chose » initiale. Pour évoquer le carré de l'expression nouvelle, Stiefel aura donc été contraint d'abandonner la représentation symbolique directe des puissances et de multiplier l'expression par elle-même. Dans ces conditions cependant, et pour continuer le calcul, il aura alors impérativement dû savoir faire son affaire d'expressions comme : $1\mathfrak{C} \cdot 1\mathfrak{Z}$ par exemple. À cet effet, il aura aussi été dans l'obligation de faire intervenir quatre des règles multiplicatives élémentaires régissant les signes cossiques, dont voici les deux premières occurrences¹⁷ :

$1\mathfrak{C} \cdot 1\mathfrak{C}$ égal à $1\mathfrak{Z}$ (de la « Chose » par de la « Chose » fait du « Carré »)

$1\mathfrak{C} \cdot 1\mathfrak{Z}$ égal à $1\mathfrak{C}$ (de la « Chose » par de la « Chose » fait du « Carré »)

Et en vérité, depuis Diophante et jusqu'à Viète, la liste de ces règles dut être apprise par cœur (*règles-comptines*) et, sous des formes diverses, fit partie du bagage obligé de tout mathématicien ([22], 208) – soulignons qu'elles ne furent *aucunement perçues* par les protagonistes du temps comme nous les considérerions naturellement aujourd'hui, c'est-à-dire de simples instances d'une table de multiplication. D'un autre côté, le point clé de la preuve chez Stiefel est le changement d'inconnues, comme on le montre au moyen de notations cartésiennes¹⁸ (entièrement anachroniques !). Cette méthode en effet permet la décomposition de l'équation du quatrième degré en la *succession* de deux équations du second. Sur ce point crucial cependant, le texte de Stiefel est muet, en fait incompréhensible. La résolution finale dans l'*Arithmetica Integra*, néanmoins exacte, s'offre ici avec une complexité, une obscurité et une incomplétude difficilement supportables pour le lecteur, et en tout cas impossible à transcrire et adapter à un exemple d'équation voisin. On atteignait ici les limites de ce qui pouvait être rhétoriquement compris.

Une obscurité et une complexité qui ne sont cependant pas conjoncturelles, mais résultent d'impossibilités structurelles. Répétons le : Stiefel savait bien écrire $\mathfrak{Z}$ comme le carré de la chose. Il ne pouvait par contre pas écrire le carré de $1\mathfrak{Z} + 1\mathfrak{C} + 2$ d'une façon structurellement analogue, comme nous le faisons aujourd'hui dans le système cartésien, en remplaçant très simplement A par A^2 . En d'autres termes

¹⁶ En termes anachroniques, on a : $(x^2 + x + 2)^2 + (x^2 + x + 2) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 5x + 6$. Stiefel ne commente pas ce fait véritablement très spécifique, qui permet la résolution. Il nous paraît vraisemblable, compte tenu du contexte, que pour contruire son exemple, il soit parti en sens inverse à partir de la solution ($x = 8$), en construisant pas à pas directement les équations successives.

¹⁷ Restent évidemment deux autres comptines : de la « Chose » par du « Cube » fait du Bicarré et : du « Carré » par du « Carré » fait du Bicarré.

¹⁸ Pour résoudre l'équation proposée : $x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 5x + 6 = 5550$ (1), Stiefel a effectué un changement d'inconnue, en posant (en substance) $x^2 + x + 2 = A$ (2) En calculant $A^2 + A$, nous avons $A^2 + A = (x^2 + x + 2)^2 + x^2 + x + 2$. Donc : $A^2 + A = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 5x + 6$, c'est-à-dire le premier membre de l'équation proposée ! On mesure bien ici à quel point l'exemple est *ad hoc*. Résolvant alors l'équation $A^2 + A = 5550$ (3), on a ainsi ramené l'équation proposée, du quatrième degré, à la résolution successive de deux équations du second, pour lesquelles les résultats étaient bien connus à l'époque : chaque solution de (3) fournit ainsi chaque fois un second membre de (2). Stiefel ne retient de l'équation (3) que la solution $A = 74$. Injectée dans le second membre de (2), il vient $x^2 + x = 72$, dont il ne retient à nouveau que la solution positive $x = 8$.

encore, les autres « formes » cossiques $2e$ et $1z + 1e + 2$ ne pouvaient être librement substituées l'une à l'autre dans l'expression symbolique d'un « Carré ». Naturellement, ceci était tout aussi impossible pour une « forme¹⁹ » quelconque, telle $3e + 5$. En fait, le cossique ne permettait en aucun cas l'écriture symbolique du carré d'une « forme » arbitraire. Ce point est essentiel. Stiefel ne pouvait donc évoquer dans le texte le carré de $1z + 1e + 2$ – qui lui était indispensable – que par l'explicitation de son développement, c'est-à-dire en le calculant. Développer, cependant, n'est pas représenter ; développer, d'autre part, demandera au géomètre diverses règles-comptines, et donc un appel à des éléments de signification étrangers au système symbolique. Cet exemple montre bien l'impossibilité pour Stiefel de changer d'inconnue à l'intérieur de son système.

Nos premières conclusions se résument ainsi à un inventaire des déficiences et inconvénients du système cossique, digne héritier sur ce point de celui de Diophante : impossibilité de changer d'inconnue à l'intérieur du système ; nécessité absolue de l'emploi de comptines pour effectuer le moindre calcul. L'analyse de ces insuffisances montre l'importance rétrospective majeure, dans la lignée des puissances, de la prise en compte de deux prédicats, substance (c'est-à-dire ici la « Chose ») et relation. Si un système symbolique avait décidé de les représenter tous deux, la règle d'univocité exigeait alors, non plus un signe, mais deux. Un tel concept aurait alors été regardé comme composé. Et, c'est ce que Descartes fit le premier avec son « $2a^3$ » dans la Règle XVI des *Regulae*, où a est le signe de la substance et 3 celui de la relation. On doit ainsi saluer ([22], 240-241) la pertinence et la force de l'analyse (et du système) de Descartes, en même temps que regretter certaines de ses insuffisances symboliques, particulièrement sur le plan de la substituabilité.

Pour divers motifs ([30]), le système cossique avait, quant à lui, « choisi » de n'utiliser qu'un seul signe, impliquant ainsi que le concept de puissance était pour lui simple, et non composé. En fait, le signe cossique ne représenta en vérité *aucun* des deux prédicats. Bien entendu, ceci ne constituait aucune faute logique, le système continuant en effet d'être gouverné par les règles d'univocité de la représentation et d'arbitraire du signe. En une démarche qui peut sembler naturelle, le cossique fonctionnait dans le registre de l'inventaire : à chaque objet distinct nouvellement apparu, il assignait tout simplement une représentation distincte. Il se trouve pourtant, qu'en mathématiques tout au moins, une telle procédure est sans avenir. L'avènement de l'exposant cartésien signa donc la disparition de la symbolique diophanto-cossique qui, des siècles durant, avait gouverné la pensée mathématique sur la question des puissances. Avec lui disparurent ses principales limitations. Nous ferons ainsi nôtre la conclusion de Cajori : « Peut-être n'y a-t-il pas eu, dans l'algèbre ordinaire, de symbolisme qui ait été aussi bien choisi et aussi élastique que les exposants cartésiens » ([5], vol. 1, 360).

Ainsi aura-t-il été indispensable à l'avancement de la mathématique de représenter initialement la lignée des puissances au moyen de *deux* signes, et non pas d'un seul : nous résumons ainsi la leçon de cette première partie de l'histoire des puissances. Des siècles durant cependant, cette nécessité n'était pas apparue. Cette simple conclusion initiale dut naturellement être ensuite corrigée, car il était en vérité désormais *trois* aspects à prendre en compte, d'abord évidemment les deux prédicats, mais aussi la façon dont ils étaient mutuellement organisés pour

¹⁹ Dans ([22], 93) on a mis en forme une distinction (importante à notre sens) entre « forme » et « assemblage ». Son étude excède cependant le cadre du présent article.

précisément créer une « puissance » (ici symbolisé par l'assembleur sans signe contenu dans l'exponentielle) – un point qui échappa à la sagacité de Descartes. Ainsi la représentation des espèces de puissances fut-elle la première, historiquement parlant, qui conduisit au mode de représentation aujourd'hui universel dans l'écriture symbolique (assembleur et places ouvertes) d'un concept composé. A la fin du siècle, une des leçons épistémologiques tirée par la postérité du dénouement, par Descartes, de la question des « puissances », fut sans conteste ([22], 274) la création analogique, par Leibniz, de son « Nouveau Calcul »²⁰.

La Géométrie de Descartes, ou la « pierre de Rosette »

De la représentation effective des divers concepts ci-dessus, se dégagait l'essentiel du système symbolique nouveau ; leur codification achevée (autour de 1640) vient expliquer la profonde différence observée dans la matérialité du texte mathématique, entre les XVI^e et XVII^e siècles. Ainsi, de Viète à Descartes, l'écriture symbolique mathématique s'est-elle constituée, revêtant les aspects principaux de sa structure actuelle. Elle apportait aux géomètres diverses facultés neuves et essentielles. D'abord, au moyen des signes assembleurs, délimitants, et constitutifs²¹, l'écriture de formes symboliques, interprétées par l'exécution successive dans un ordre (partiel) prescrit, d'un nombre parfois considérable d'opérations, inexprimable en fait par l'écriture rhétorique, dont l'incapacité définitive à décrire sans ambiguïté, ne fût-ce qu'une succession de trois instructions, s'était traduite au XVI^e siècle par les difficultés observées chez Cardan. Utilisant à plein un jeu de conventions hiérarchiques implicites, une ligne de calcul de la fin du XVII^e siècle pouvait par contre usuellement comporter vingt-cinq résultats partiels, au déchiffrement néanmoins facile. Ainsi, apparemment seulement quantitative, cette différence entre rhétorique et symbolique, portant sur le nombre d'opérations effectuelles, se transforma-t-elle en une différence de nature²².

Toutes ces modifications et ces bouleversements symboliques accumulés allaient se trouver mis en acte dans la *Géométrie* de 1637. À cet égard, placée sur le devant de la scène par la richesse de son contenu autant que par l'autorité de Descartes philosophe, la *Géométrie*, en dépit de l'absence complète d'indications symboliques de la part de son auteur (!), servit néanmoins de modèle incontesté tout au long du XVII^e siècle pour le déchiffrement des textes symboliques (la « pierre de Rosette »), non seulement donc pour les signes et formes symboliques qu'elle apportait avec elle au lecteur neuf du XVII^e siècle, mais aussi par ce qu'elle ne contenait pas, par exemple des signes délimitants.

Les contributions des trois protagonistes, Viète, Descartes et Leibniz furent de nature bien différentes, et souvent le produit de préoccupations fort éloignées de leurs réalisations effectives sur le terrain. Ainsi, animé par un souci juridique primordial de mettre en forme une distinction entre le mathématique et le physique, Viète créa l'« indéterminé », et sa représentation par lettres, bouleversant les principes antiques, jusque-là intangibles, de l'écriture mathématique. D'un autre côté, comme prétendu corollaire de sa Méthode, et alors qu'il était bien étranger aux

²⁰ Une démarche qu'on peut aisément commenter à partir des *Considérations sur la Différence qu'il y a entre l'Analyse Ordinaire et le « Nouveau Calcul » des Transcendantes*. (Journal des Scavans (1694) [14], vol. 5, 308).

²¹ Par exemple le « deux-trait » (=) de Recorde.

²² Cf. notre étude dans 'Descartes et la constitution de l'écriture symbolique mathématique' [27].

questions symboliques, Descartes, dans la *Géométrie*, allait faire, presque malgré lui, la première vraie démonstration de la force de l'écriture symbolique, de son aisance et sa fluidité. Leibniz enfin, qui n'avait rien inventé (!) de la structure de l'appareil symbolique dont il héritait²³ – même s'il y ajouta nombre d'assembleurs et signes de son cru – fut le premier à en comprendre l'extraordinaire puissance et à en développer, dans un registre véritablement moderne, des applications proprement inconcevables pour ses prédécesseurs.

Sur le plan des contenus, on notera le rôle historique décisif de la résolution des équations du troisième degré dans l'avènement de l'écriture symbolique. Si cette théorie est aujourd'hui une rubrique subalterne de celle des équations algébriques, il n'en était certes pas de même au temps de Viète, Descartes et Leibniz, où elle représentait au contraire le bouleversement récent et majeur que le XVI^e siècle venait d'apporter, en une notable rupture avec les vingt siècles qui précédaient, durant lesquels l'étude n'avait jamais dépassé le cas quadratique. D'un autre côté, il se trouva – c'était dans la nature des choses – que la solution de ces équations était tout à fait difficile à *communiquer*, c'est-à-dire à exprimer rhétoriquement, même sous forme de comptine²⁴, alors que, comme chacun pouvait le constater, la « règle de Cardan », symboliquement réécrite par Descartes dans le livre III de la *Géométrie*, fournissait le résultat en une ligne. Ainsi, cet accident de l'histoire – les difficultés de l'écriture des solutions des équations cubiques – fit-il grandement progresser la constitution de l'écriture symbolique au début du XVII^e siècle. Sur un autre plan, mais pareillement crucial, ces mêmes équations du troisième degré furent aussi les premières à placer devant le géomètre la « forme » sans signification $\sqrt{-1}$.

Pour conclure provisoirement sur la création de l'écriture, on observera d'abord que notre étude fournit l'appareil conceptuel et terminologique indispensable à la description de certaines des modalités de l'invention mathématique (cf. ci-dessous) qui serait inconcevable sans elle. D'un autre côté, l'histoire et l'épistémologie des concepts centraux qu'on propose (comme l'« indéterminé ») fournissent cadre, structure, et terminologie décisifs pour une analyse didactique conséquente des méthodes d'enseignement des mathématiques, quel qu'en soit le niveau, universitaire ou scolaire. Dans cette perspective, on renverra à [2]²⁵. Cette thèse de didactique des mathématiques, qui prend pour appui épistémologique la division en six figures de la représentation *supra* développe en particulier certains exercices à soumettre à des élèves et qui visent à illustrer concrètement tant certaines de ces figures que la nature des problèmes que certains élèves se posent au sujet de leur compréhension et de leur emploi.

²³ Il nous faut ici redresser quelque peu l'idée d'un Leibniz « maître d'œuvre (master-builder) des notations mathématiques », selon l'expression de Florian Cajori. ('Leibniz, the master-builder of Mathematical Notations' [6]) ou encore « fondateur du système symbolique », selon celle de Mahnke ('Leibniz als Begründer der symbolischen Mathematik' [16]).

²⁴ Ainsi de l'entrevue entre Tartaglia et Cardan en 1545 ([25], 45). Cardan n'avait pas trop bien compris l'emploi de la pièce de vers par laquelle Tartaglia lui communiquait sa solution. Faute d'une écriture symbolique appropriée, il commença en effet par confondre le tiers du cube et le cube du tiers. Il envoya à Tartaglia un contre-exemple où, ainsi mal comprise, la « règle » ne fonctionnait pas.

²⁵ Cette thèse de didactique des mathématiques, soutenue par Caroline Bardini sous la co-direction de Michèle Artigue et moi-même, offre une excellente compréhension des ressorts épistémologiques fondamentaux de la constitution de l'écriture symbolique mathématique tels que développés dans le présent article. Ces conceptualisations sont ensuite utilisées dans la thèse comme le cadre théorique à partir duquel construire des expérimentations didactiques.

L'avènement de la substitution

De l'exemple de Stiefel ci-dessus, on retiendra d'abord qu'une substitution aussi simple pour nous à écrire et à opérer que celle de $A = x^2 + x + 2$ dans $A^2 + A$ demeura une opération inconcevable – elle ne pouvait *se penser* – dans le cadre de l'écriture médiévale des mathématiques. Avec Leibniz, la substitution devint par contre un élément quotidien essentiel. L'examen de l'avenir de l'exponentielle après Descartes permet d'introduire ce sujet à un niveau élémentaire. On évoquera la création des exponentielles à exposants fractionnaires sous la plume de Newton dans une lettre célèbre de juin 1676, l'*Epistola Prior*²⁶ adressée à Leibniz. Rien dans l'expérience préalable de Leibniz à cette époque, ni dans la définition cartésienne des exponentielles – la seule évidemment qu'il connût – ne pouvait lui laisser pressentir dès l'abord quelle signification Newton pouvait bien apporter à des formes symboliques comme $3^{\frac{1}{2}}$ ou $(x+3)^{\frac{1}{2}}$ ou bien $5^{\frac{2}{3}}$, ou bien encore $(\sqrt{2})^{-\frac{6}{7}}$ dont le caractère interprétable aurait pourtant dû découler de la formule donnée par Newton. Tout essai de traduction rhétorique sur le mode cartésien conduisait droit à des absurdités : si la procédure de la « forme » 3^5 peut en effet être décrite par « multiplier le nombre de signe 3 cinq fois par lui-même », que pouvait bien signifier à propos de $3^{\frac{1}{2}}$: « multiplier ce nombre une demi fois par lui-même » ? Il y eut donc un temps (momentané) d'incompréhension de la part de Leibniz devant des formes symboliques sans signification, qui fut dissipé par la suite de la lettre de Newton. Ce fut néanmoins un aspect qu'il est important de souligner. Dans l'*Epistola Posterior*²⁷ qui suivit, Newton persévéra allègrement, introduisant – cette fois, sans aucune tentative de définition – des exposants irrationnels, comme dans son exemple :

$$\frac{\sqrt{(3)^{\frac{2}{3}}}}{x\sqrt{2} + x\sqrt{7}}$$

Fin 1676, la situation de Leibniz était ainsi la suivante : tout juste sorti de l'écriture rhétorique des mathématiques de sa jeunesse, grecque et scolastique, il avait rencontré, deux ans auparavant seulement, dans la *Géométrie* de Descartes, l'écriture mathématique nouvelle, et aussi l'exposant cartésien, d'un emploi tout récent à cette époque. Or, dans la conception cartésienne, il avait été impératif qu'à la place de l'exposant vienne un chiffre simple. Ainsi Leibniz avait-il été tenu de se familiariser, rapidement et grandement, avec la symbolique nouvelle, fort éloignée pourtant des considérations de sa jeunesse. Or voici que deux ans après sa rencontre avec la *Géométrie*, et en moins de quatre mois (juillet-octobre 1676) il se trouva, du fait de Newton cette fois, devant la nécessité d'intégrer dans ses conceptions deux formes exponentielles encore nouvelles, obtenues par deux extensions de champ successives (rompus, puis sourds²⁸) à partir de la même forme cartésienne initiale – de surcroît *littérialisée*²⁹ par les soins de Newton. Que la première version

²⁶ Au moment de la querelle entre Leibniz et Newton, certaines des pièces importantes du procès furent spécifiquement dénommées. Ainsi distingue-t-on classiquement l'*Epistola Prior* de juin 1676 (= [15], 179-192) adressée par Newton à Leibniz par l'intermédiaire d'Oldenbourg, et l'*Epistola Posterior*, toujours de Newton à Oldenbourg, du 24 octobre 1676 (= [15], 203-225).

²⁷ Newton à Leibniz, d'octobre 1676 ([15], 225)).

²⁸ C'est à dire rationnel (rompu) ou irrationnel quadratique (sourd).

²⁹ Descartes avait écrit a^3 , a^4 , etc. Newton fut le premier qui « passa à l'indéterminé » et écrivit a^p . Ce fut, pour le temps, un saut épistémologique considérable ([22], 255), corrélatif de celui de Viète, et dont nous avons peine à imaginer la difficulté qu'il suscita (un enfant demandera : que vaut p ?). En témoignent encore aujourd'hui certains travaux didactiques.

de l'exponentielle newtonienne, *rompue*, dans l'*Epistola Prior*, fut correctement et complètement définie, alors que la seconde, *sourde*, dans l'*Epistola Posterior* ne le fut aucunement, ne constitua guère un motif de préoccupation pour Leibniz, qui en tira par contre cette double conclusion : d'une part, que la morphologie de l'exponentielle cartésienne n'était certes pas figée, contrairement à ce que la force d'une tradition toute récente tendait à faire croire. D'autre part, que toutes les questions de signification étaient en vérité subalternes au regard de la puissance des réalités combinatoires (le primat de la « forme » exponentielle). Saisissant alors l'essence même du procédé newtonien, Leibniz s'employa dès ce moment à construire – par mimétisme – une exponentielle complètement neuve, a^z ou x^z , dont l'importance dépasserait ainsi, espérait-il naïvement, celles de Descartes et Newton à la fois (!). La question était alors cependant : quelle pouvait bien être à ce moment la signification d'une forme symbolique où, à la place de l'exposant, venait le signe d'un nombre *quelconque, indéterminé*? Une exponentielle que nous dirons « leibnizienne », qui constitua pour lui le premier et le plus important des trois volets de ce qu'il dénomma ensuite la transcendance, au sens mathématique³⁰. Comme on sait, on a aujourd'hui davantage encore exploré cette voie des substitutions en exposant, en y faisant par exemple venir une matrice carrée, selon

$$_a \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 14 \\ 4 & 3 & 38 \end{bmatrix}$$

Une exponentielle certes bien éloignée des intentions cartésiennes initiales³¹ ! La question, évidemment cruciale, de l'origine, et surtout de la pertinence et de la *fécondité*³² des définitions de ces nouveaux objets, doit être évidemment chaque fois posée, puis réexaminée. Quoi qu'il en soit, ces diverses opérations s'analysent naturellement comme des *substitutions à la place de l'exposant* dans l'exponentielle cartésienne. D'une autre nature, d'autres exemples leibniziens de substitutions³³ vinrent conforter l'importance de la substituabilité. Ainsi, dans sa démonstration de ce qu'il appela la Quadrature Arithmétique du Cercle (cf.[13]), Leibniz, utilisa, en la modifiant, la démonstration que Mercator avait donnée pour la quadrature de l'hyperbole ([17]). En termes modernes, pour « quarrer l'hyperbole », Mercator avait développé en série $\frac{1}{1+x}$ et intégré terme à terme. Pour « quarrer le cercle », Leibniz substitua x^2 à x et intégra terme à terme le développement de $\frac{1}{1+x^2}$. Une substitution qui va certes pour nous complètement de soi (!) mais était à

³⁰ Ainsi Leibniz qui était philosophe, aura-t-il ici importé en mathématiques un terme du vocabulaire philosophique (transcendans : qui dépasse le champ de l'expérience simple), mais dans son sens littéral et sans aucunement le charger des connotations philosophiques dont il était porteur. (Sur ce point, cf. [3], 125, note 36). À le lire en détail, on ne peut s'empêcher de penser que c'est à lui-même, se comparant à Descartes et Newton, que Leibniz voulait en vérité appliquer ce terme de *transcendans*.

³¹ De même, dans la construction des « cartesian closed categories », l'exponentielle A^B de deux objets quelconques A et B d'une catégorie est, si elle est possible, un concept central (cf. par exemple F. William Lawvere, *Adjointness in foundations*, *Dialectica*, 23, N° 3/4, 1969). La définition se fait comme on sait, usuellement par foncteurs adjoints, en « décontextualisant » le cas de la catégorie « Sets » des ensembles.

³² Deux termes qui demandent impérativement à être préalablement mieux définis, puis analysés. Ce que nous ferons dans une prochaine étude.

³³ Leibniz glorifia la substituabilité sous le nom d'*Art Combinatoire*, un terme qui fut mal très compris, tant par les contemporains que par la postérité.

l'époque profondément nouvelle. On a peine à imaginer aujourd'hui la somme des difficultés rencontrées par les esprits savants du temps, encore tout imprégnés de vérités géométriques « concrètes », pour concevoir une telle substitution portant sur le seul matériel symbolique. Elle fut, à notre connaissance, le premier exemple historique de substitution opératoire en calcul intégral. Il est à peine besoin de préciser à quel point une telle procédure nécessite le recours à l'écriture symbolique ! Ainsi se découvrit peu à peu l'émergence de cette nécessité : l'exécution d'une opération appelée substitution, dont l'importance et le rôle prééminents dans le registre « combinatoire »³⁴ vont demeurer sans équivalent aucun dans le registre des significations. Alors que le registre signifiant verra en effet se découvrir une diversité d'opérations chaque jour plus étendue (addition, quotient, différentiation, sommation, passage à la limite, clôture topologique, etc.), le registre combinatoire, ne connaîtra guère en effet³⁵, qu'une seule opération : la substitution.

Écriture symbolique et création d'objets mathématiques

On conclura sur un autre aspect de l'écriture symbolique, en décrivant l'émergence historique d'un procédé de construction de certains objets mathématiques à partir d'elle. On l'analysera *in statu nascendi* en retournant aux correspondances de 1676 entre Leibniz et Newton, et en revenant aux exponentielles « rompues » avec cette question : comment fournir une signification à la forme symbolique $a^{\frac{1}{2}}$ qui, pour Descartes ou Leibniz, n'en avait certainement aucune ? Une (reconstruction de la) méthode est alors celle-ci : le géomètre fait choix d'une formule valide pour l'exponentielle (cartésienne), parmi toutes celles que cette dernière était connue pour vérifier. Ce sera ici la « formule multiplicative »

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

valide si r et s sont les signes d'entiers naturels et a le signe d'un nombre positif quelconque. Une formule qui sera dite *élective* dans la suite. Si cependant r est interprété comme un nombre rationnel quelconque, soit $r = \frac{p}{q}$, alors « $a^{\frac{p}{q}}$ » est sans signification (c'est l'*assembleur* qui en est dépourvu). La méthode consiste alors à *définir*, si c'est possible, la substance de $a^r = a^{\frac{p}{q}}$ comme un nombre *tel* que la *même formule* reste vraie pour toute valeur du couple de rationnels, de signes r et s . Pour ce faire, on commencera par en affirmer la validité dans le cas particulier où le rationnel r est l'inverse d'un entier naturel, soit $r = \frac{1}{q}$. On montre alors simplement que la seule substance possible pour $a^{\frac{p}{q}}$ est ainsi celle de $(\sqrt[q]{a})^p$,

³⁴ *Roughly speaking*, l'adjectif « combinatoire » connotera dans cet article le registre de la *matérialité des signes* – il recouvre certes l'aspect syntaxique, mais ne coïncide pas avec lui. Sur l'opposition registre signifiant/registre combinatoire ([22], 34) Sur une distinction entre combinatoire et formel ([22], 402).

³⁵ À l'exception sans doute de la concaténation et des embranchements. La création de l'embranchement haut, attaché à l'exponentielle cartésienne, est en effet une opération combinatoire spécifique, commandant une syntaxe précise. De même pour l'embranchement bas, aujourd'hui associé à la notation indicielle, introduit au cours du XVIII^e siècle. Cf. notre étude 'Mathématiques et pensée symbolique chez Leibniz' [24]. La concaténation est de son côté, réductible à une certaine substitution.

c'est-à-dire celle proposée par Newton dans sa lettre³⁶. Il y a donc au plus une solution satisfaisant l'extension de la formule.

Dans cet exemple pourtant bien modeste, le géomètre peut sans doute croire avoir gagné sur deux tableaux : en premier lieu, il a fourni une signification à une forme symbolique qui n'en avait pas. En même temps, il a étendu *extra muros* (i.e aux rationnels) le champ de validité de la formule multiplicative, qui peut ainsi apparaître comme dépositaire *per se* d'une forme supérieure de vérité, à la fois intrinsèque et élargie, et qui pourrait, par hypothèse, ainsi constituer l'essence d'un concept général d'« Exponentielle »—supposée préexister. Une position encore raffermie par l'examen des bénéfices de la procédure : le géomètre peut constater par le calcul que la « formule exponentielle » $a^z a^t = a^{z+t}$ qui n'avait pas été visée par l'extension, était encore valide au regard de celle-ci, renforçant sans doute encore le sentiment (tout platonicien !) des protagonistes d'être en présence d'un concept « naturel ». Cette forme d'illusion se fonde en vérité sur l'*occultation* momentanée de la solidarité indissoluble de la méthode de la formule élective d'une part, de l'apport de significations d'autre part. Dans une autre étude — ce point excède en effet le cadre du présent article — nous examinerons le rôle, complexe et ambigu, que le schéma joue ainsi, au-delà des apparences psychologisantes, à l'égard du platonisme mathématique.

Nous avons certes bien conscience de la modestie de notre exemple exponentiel. Il fut pourtant décisif pour l'abstraction d'une méthode. On vérifie en effet ([22], 366-376) que ce même schéma épistémologique (avec formules électives et extensions) fut à l'œuvre dans diverses créations d'objets, tant au XVIII^e siècle chez Euler (exponentielle complexe ou « factorielle » neuve) que plus récentes (pseudo inverses de Moore-Penrose, dérivation au sens des distributions, etc.). De telles instances de construction sont en vérité à la fois exemplaires du schéma, mais aussi contingentes par leur abondance même³⁷. On met ainsi en lumière une procédure de création d'objet par *extension analogique*, sur un mode qui demeure à notre connaissance entièrement spécifique de la mathématique, en même temps que consubstantiel à l'écriture symbolique. Un point que nous ne pourrions développer ici davantage (cf. [23]). En dernière analyse, la procédure est gouvernée par cette exigence primordiale, transcendant les réquisits de toute signification immédiate, de *permanence de certaines écritures symboliques mathématiques* (les formules électives), que rien, en soi, dans les fondements et les principes proclamés de la mathématique effective³⁸,

³⁶ On doit bien souligner la contingence de la définition de Newton : la substance de $a^{\frac{p}{q}}$ pouvait ne pas être, ou bien différente de celle qu'il proposait, comme nous le soulignons par la qualification d'*élective* que nous avons attribuée à la formule. Cependant, et dès lors que Newton affichait une définition, quelle qu'elle fût, il était nécessaire que les substances de a^3 et $a^{\frac{6}{2}}$ fussent dans tous les cas les mêmes. Dès 1676 donc, et avec la force de sa simplicité, l'exemple newtonien exposait ainsi à l'endroit de Leibniz cette leçon de philosophie concrète qui vient articuler une distinction véritable entre nécessité et contingence.

³⁷ On mettra très utilement en regard nos présentes considérations sur la possible « gestion » par les mathématiciens de certaines formes d'absence de signification en mathématiques, avec quelques-uns des aspects du non sens dans des énoncés de la langue naturelle, mis en particulier en évidence par Frege et Wittgenstein, et tels qu'analysés par J. Bouveresse dans *Dire et ne rien dire* ([4]). Je tiens à remercier ici à nouveau grandement Jacques Bouveresse, directeur de ma thèse, pour ses critiques et suggestions attentives durant la préparation de celle-ci.

³⁸ Cette permanence des formes avait été évoquée par certains mathématiciens anglais (cf. [1] et [18]), mais de façon bien imprécise. C'est à Peacock (*A Treatise on Algebra*. 1830 (1^o ed.)) qu'on doit, dans une acception très limitée, le terme de « permanence des formes équivalentes. ».

ne requiert pourtant *a priori* ([22], 376). Erigé ensuite en « principe » (c'est-à-dire en guide méthodologique contingent dans la recherche) le schéma montre ainsi à nouveau un des aspects sous lesquels l'avènement de l'écriture symbolique a contribué, dès le XVII^e siècle, à l'invention en mathématiques même, tâchant ainsi d'éclairer pour une part la nature intime de ce « pouvoir de créer » chez les mathématiciens qu'évoque Dedekind et que relève Cavaillès³⁹.

Références

- [1] BABBAGE Charles, 'On the influence of signs in mathematical reasoning', *Transactions of Cambridge Philosophical Society*, 1827, vol. II.
- [2] BARDINI Caroline, *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique*. Thèse doct. didactique des mathématiques. Université Paris VII. 2003.
- [3] BREGER Herbert, 'Leibniz Einführung der Transzendenten', *300 Jahre « Nova Methodus » von G.-W. Leibniz (1684- 1984) in Studia Leibnitiana*, Sonderheft 14, Stuttgart, 1986.
- [4] BOUVERESSE Jacques, *Dire et ne rien dire. L'illogisme, l'impossibilité et le non sens*. Chambon. Nîmes. 2002.
- [5] CAJORI Florian, *A History of Mathematical Notations* (Vol. I et II). The Open Court Publishing Company. La Salle. Illinois. 1928. Réimpress (un seul vol.). Dover. 1993.
- [6] CAJORI Florian, 'Leibniz, the master-builder of mathematical notations', *ISIS*, 23 (1925), 412-429.
- [7] CARDAN Jérôme, *Ars Magna, sive de regulis algebraicis liber unus*. Nuremberg 1545 = Cevres, IV, Leyde. 1663. Traduction anglaise de R. Witmer, *Ars Magna or the Rules of Algebra*. Dover. New York. 1968.
- [8] CAVAILLÈS Jean, *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques*. Hermann. Paris. 1981.
- [9] DESCARTES René, *œuvres* (13 vol.), édition Adam-Tannery. Cerf. Paris. 1897-1913. Réédition des 11 premiers volumes à partir de 1964. Vrin. Paris (éd. de poche à partir de 1996). Les textes seront référencés par le numéro du volume en chiffres romains suivi de celui de la page en chiffres arabes. Une édition (française) de la *Géométrie* de 1637 est reproduite dans VI, 367-485.
- [10] DESCARTES René, *Règles utiles et claires pour la Direction de l'Esprit et la Recherche de la Vérité*. Martinus Nijhoff. La Haye. 1977. On a référencé [Regulae] cette traduction par J.-L. Marion des *Regulae ad Directionem Ingenii* X, 349-469, avec des notes mathématiques de P. Costabel. On notera la publication récente en livre de poche de deux traductions françaises des *Regulae* – de Jacques Brunschwig. Livre de Poche. Paris. 1997 – de Joseph Sirven. Vrin. Paris. 2003.
- [11] FREGE Gottlob, *Écrits logiques et philosophiques*. Traduction de dix textes de Frege publiés entre 1879 et 1925 par Claude Imbert (avec une introduction). Seuil. Paris. 1971.
- [12] HEATH Thomas, *A History of Greek Mathematics* (2 vol.). Clarendon Press. Oxford. 1921. Réimpress. Dover. New York. 1981.
- [13] HOFMANN Joseph, *Leibniz in Paris. 1672-1676. His Growth to Mathematical Maturity*, Cambridge University Press. 1974. Traduction anglaise de *Die Entwicklungsgeschichte Mathematik während des Aufenthalts in Paris (1672-1676)*. Oldenbourg. Munich. 1949.
- [14] LEIBNIZ Gottfried Wilhelm, *Mathematische Schriften* (7 vol.). C.I. Gerhardt. Berlin-Halle. 1849-1863. Réimpress. Olms. Hildesheim. 1962.
- [15] LEIBNIZ Gottfried Wilhelm, *Der Briefwechsel von G.W. Leibniz mit Mathematikern*. C.I. Gerhardt. Berlin. 1899. Réimpress. Olms. Hildesheim. 1962.
- [16] MAHNKE Dietrich, 'Leibniz als Begründer der symbolischen Mathematik', *ISIS*, 30, IX/2 (1926), 279-293.

³⁹ ([8]), 57. Dedekind attribue toutefois ce « pouvoir » à une prétendue « race divine » à laquelle appartiendraient selon lui les mathématiciens. Est-il besoin de préciser que nous ne pouvons nous inscrire dans cette perspective ? En tâchant de cerner certaines des conditions historiques et humaines de la création mathématique, l'un des objets du présent travail pourrait précisément être au contraire de démontrer la vanité d'une telle affirmation.

- [17] MERCATOR Nicolaus, *Logarithmotechnia ; sive methodus construendi logarithmos nova, accurata et facilis ; scripto antehac communicata, anno sc. 1667 nonis Augusti : cui nunc accedit vera quadratura hyperbolae, & inventio summae logarithmorum*. Londres. 1668.
- [18] PEACOCK George, 'Recent progress and present state of certain branches of analysis', *Report of the British Association for the Advancement of Sciences for 1833*. Richard Taylor. Londres. 1834.
- [19] RECORDE Robert, *The Whetstone of Witte*. Londres. 1557.
- [20] RUDOLFF Christoff, *Behend und hübsch Rechnung durch die künstreichen Regeln Algebre so gemeincklich die Coss genent werden*. Strasbourg. 1525. Le titre sera abrégé en « La Coss ».
- [21] RUSSELL Bertrand, *The Principles of Mathematics*. Cambridge University Press. Cambridge-U. K. 1903. Réimpr. Norton. New York and London. 1986.
- [22] SERFATI Michel, *La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Préface de Jacques Bouveresse. Paris. Pétra. 2005.
- [23] SERFATI Michel, 'Analogies et « prolongements »'. Écriture symbolique et constitution d'objets mathématiques', *De la méthode* (M. Serfati ed.). Presses Universitaires Franc-Comtoises. Besançon. 2002, 271-318.
- [24] SERFATI Michel, 'Mathématiques et pensée symbolique chez Leibniz', *Mathématiques et physique leibniziennes* (1ère partie) (M. Blay et M. Serfati dirs.), *Revue d'Histoire des Sciences*, 54-2 (2001), 165-222.
- [25] SERFATI Michel, 'Le secret et la règle', *La recherche de la vérité* (M. Serfati dir.). A.C.L.-Kangourou. Paris. 1999, 31-71.
- [26] SERFATI Michel, 'La dialectique de l'indéterminé, de Viète à Frege et Russell', *La recherche de la vérité* (M. Serfati dir.). A.C.L.-Kangourou. Paris. 1999, 145-174.
- [27] SERFATI Michel, 'Descartes et la constitution de l'écriture symbolique mathématique', Pour Descartes (M. Serfati dir.), *Revue d'Histoire des Sciences* 51-2/3 (1988), 237-290.
- [28] SERFATI Michel, 'La constitution de l'écriture symbolique mathématique'. Thèse de doctorat de philosophie. Université Paris I. 1997.
- [29] SERFATI Michel, 'Infini « nouveau »'. Principes de choix effectifs', *Infini des philosophes, infini des astronomes* (F. Monnoyeur dir.) Belin. Paris. 1995, 207-238.
- [30] SERFATI Michel, 'Regulae et Mathématiques', *Theoria* (San Sebastián). Segunda Epoca IX, n° 21 (1994), 61-108.
- [31] STIEFEL Michael, *Arithmetica Integra*. Nuremberg. 1544 (il y eut d'autres éditions à Nuremberg même en 1545, 1546, 1548, 1586).
- [32] VIÈTE François, *In artem analyticem Isagoge sursim excussa ex opere restitutae mathematicae analyseos seu Algebra nova*. Mettayer. Tours. 1591. On a référencé [Isagoge] la traduction française de J.-L. de Vaulézard (Jacquin. Paris. 1630) sous le titre *Introduction en l'art analytic ou nouvelle algèbre de François Viète*. Réimpress. Corpus des œuvres de philosophie en langue française. Fayard. Paris. 1986.

Mathématiques et culture : le cas de l'agrégation

Jacques Lafontaine¹

J'ai réalisé, en parcourant le rapport du concours 2004, que le président du jury de l'agrégation a décidé d'interdire, pour la préparation des leçons d'oral, les livres écrits en une autre langue que le français ou l'anglais. Cette disposition ne joue qu'à la marge, j'en suis parfaitement conscient. Mais, en tant que scientifique comme en tant que citoyen, je ne puis rester indifférent. Une telle décision, prise par un responsable ministériel à propos d'un concours de recrutement d'enseignants, n'est pas seulement un exemple de « gestion tatillonne du quotidien » (expression employée par un personnage de Jorge Semprun² à propos de l'URSS de Brejnev) Elle donne une caution « officielle » à une conception néfaste et dangereuse de la science, de l'enseignement, et de la société.

Elle témoigne d'une vision tronquée de la science, coupée de son environnement historique et culturel. L'une des beautés des mathématiques est justement leur caractère multiculturel. Il est important de le garder en vue, à une époque où la haine et la peur de l'autre se développent si dangereusement. Combien d'entre nous enseignent aujourd'hui que le signe $\sqrt{}$ est d'origine arabe, que le **Z** qui désigne les entiers relatifs est l'initiale de l'allemand « Zahlen » (nombres), ou que « nombre rationnel » est le nom savant de « fraction », le latin « ratio » étant pris au sens de « rapport » ?

Quelques mots rapides sur les conséquences concrètes de cette interdiction. La traduction anglaise du livre de Courant-Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, figure à la bibliothèque de l'agrégation, mais sa version originale est donc interdite. Les livres de V.I. Arnold. sont dans le même cas. Pourtant, nous savons tous qu'un (bon) texte mathématique n'est pas une suite de formules. Ce qui importe, ce sont les motivations, l'heuristique, les rapprochements entre différents points de vue (ce qu'on demande, par exemple, à un candidat à l'agrégation !) Quand on connaît les limites et les insuffisances de toute traduction, on se dit qu'il est dommage de dissuader de la lecture de ces immenses mathématiciens dans leur langue originale.

Il faut aussi évoquer la francophonie. Elle fait couler beaucoup d'encre. Le fantasme de certains de nos dirigeants, qui rêvent de remplacer le globbish par un équivalent français, est pitoyable. La pratique de quelques prétendus scientifiques qui, pour faire croire qu'ils sont bons, organisent dans de lointaines provinces des congrès dont la seule langue est l'anglais, ne l'est pas moins. Mais il est important de combattre l'uniformité et l'uniformisation, en pratiquant quand nous le pouvons la langue de nos partenaires scientifiques. C'est la meilleure façon de les inciter à pratiquer la nôtre. Toute atteinte à la diversité linguistique est aussi une atteinte à la pratique du français.

Enfin, il n'y a pas lieu ici de rentrer dans le débat sur la discrimination positive. Mais, sachant que l'agrégation est maintenant ouverte à tous les ressortissants de la Communauté Européenne, est-il vraiment nécessaire d'instituer, parmi les candidats

¹ Université Montpellier II.

² La seconde mort de Ramon Mercader. J. Semprun, Gallimard, 1984

d'origine non francophone, une discrimination positive au bénéfice de ceux dont la langue maternelle est l'anglais (ils n'en demandent certainement pas tant) ?

Encore une fois, certains pourraient trouver que je prends trop à cœur une interdiction qui n'aura que peu d'effets concrets. J'ai la faiblesse de penser que le recrutement des enseignants et des enseignants-chercheurs est une chose sérieuse. Pratiquer une ou plusieurs langues autres que le globbish est signe d'ouverture très positif pour un futur enseignant ou un futur scientifique. On ne peut que regretter que ce genre d'aptitude soit aujourd'hui si peu répandu. Mais obliger les candidats à l'agrégation à se limiter aux livres écrits en français ou en anglais, c'est décider que cette aptitude n'a aucune importance. Un peu de hauteur de vue serait bienvenu.

NB. Avant d'écrire cette tribune, j'ai développé tous ces arguments, avec un peu plus de diplomatie, dans un courrier à l'actuel président du jury. J'ai transcrit sa réponse (dans laquelle les questions évoquées ci-dessus sont complètement ignorées) sur mon site <http://www.math.univ-montp2.fr/~lafontaine/lettrejury.pdf>. Je n'ai pas jugé utile d'en expurger les fautes d'orthographe.

Qu'est-il possible de digérer en douze semaines ?

ou Le hachage temporel facilite-t-il la digestion ?

Emmanuel Lesigne¹

La « semestrialisation » des enseignements universitaires est une tendance lourde qui a été menée à terme avec la mise en place du LMD (Licence-Master-Doctorat). De quoi s'agit-il ? Les unités d'enseignement sont organisées par semestres (en général une douzaine de semaines d'enseignement) et validées par des examens en cours et en fin de semestre. Le diplôme terminal est délivré par capitalisation (avec compensations) des résultats d'un certain nombre de semestres (six pour la licence et quatre pour le master). Les programmes d'enseignement disciplinaires sont donc organisés en séquences assez courtes, suivies très rapidement par les examens censés déterminer si le contenu de l'enseignement a été retenu et compris.

Cette organisation temporelle est-elle adaptée à l'apprentissage d'un savoir universitaire ? Sans doute oui quand ce savoir est fait d'une accumulation d'informations directement compréhensibles. Mais une part importante de la connaissance que nous cherchons à communiquer aux étudiants repose sur la compréhension et l'appropriation de concepts. En mathématiques, une définition nouvelle, un outil de calcul, un argument fondamental ne sont en général pas directement compréhensibles et assimilables. Il faut les travailler assez longuement et les mettre en œuvre dans des situations diverses pour les « apprivoiser ». Qui peut croire que la notion de structure quotient, définie en novembre devant un amphithéâtre peut faire l'objet d'un examen sérieux en décembre ou janvier ? Les exemples abondent, de la notion de continuité à celle de différentielle, de la notion de

¹ Université François Rabelais, Tours.

mesure au formalisme du calcul des probabilités, des structures algébriques fondamentales à leurs applications en théorie des nombres, de domaines de la connaissance dans lesquels on n'entre pas sans prendre son temps. Bien sûr les catalogues de primitives de fonctions usuelles, les règles de calcul élémentaires sur les systèmes linéaires, et d'autres chapitres d'un cours de maths peuvent être rapidement « intégrés » par les étudiants studieux. Mais l'appropriation de concepts nouveaux, avec le développement de sa propre intuition, nécessite une autre échelle de temps. Cette critique n'est évidemment pas propre aux mathématiques. Que penser de la mécanique quantique, de la philosophie kantienne, ou de l'apprentissage d'une architecture informatique complexe ?

Je considère que l'organisation semestrielle des enseignements universitaires est une évolution nuisible des conditions d'apprentissage de nos étudiants. Cette organisation illustre une vision très réductrice de la connaissance scientifique, limitée à une collection de savoirs rapidement assimilables.

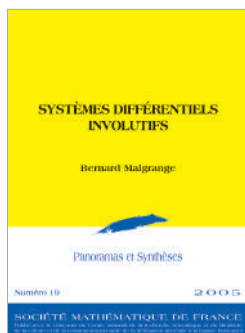
Je souhaite que ce texte soit étoffé par les personnes qui en partagent le message, et que la SMF puisse s'en faire le relais.

J'ajouterai une autre critique fondamentale de notre organisation pédagogique universitaire : le nombre global de semaines d'enseignement est ridiculement faible. Il y a en général deux douzaines de semaines consacrées à l'enseignement. (Pour un nombre proche de douze semaines bloquées par l'organisation d'examens. Quel équilibre !) Est-il raisonnable de consacrer si peu de temps à l'enseignement ? Est-ce compréhensible hors de l'université ? Une année universitaire basée sur 36 à 40 semaines d'enseignement (et des horaires hebdomadaires largement allégés, pour faciliter le travail individuel) serait un immense progrès pédagogique. On a souvent opposé à cette proposition la nécessité pour les enseignants-chercheurs de disposer de temps pour leur recherche. Mais il n'y a aucune raison de justifier une mauvaise organisation de l'enseignement par la nécessité de la recherche, ou alors c'est l'ensemble du système universitaire que l'on condamne. Dans une année universitaire basée sur 40 semaines, il serait facile pour un enseignant-chercheur de regrouper son service d'enseignement sur une demi-année, afin de consacrer une longue période à ses travaux de recherche, avec en particulier des déplacements et l'accueil d'invités. Secondairement, mais de façon non négligeable, on notera que cela entraînerait une utilisation plus rationnelle des bâtiments universitaires. L'allongement de l'année universitaire est l'objet d'un autre reproche ; il rendrait plus difficile le travail saisonnier des étudiants qui doivent financer leurs propres études. C'est un argument sérieux. Il est certain que l'aide sociale aux étudiants doit être étendue et dirigée vers ceux qui en ont besoin. La possibilité de mener de front études et activité professionnelle doit aussi être facilitée.

★ ★ ★

Rappel : la rubrique « tribune libre » permet à toute personne de notre communauté d'y exprimer une opinion personnelle qui n'engage ni le comité de rédaction, ni la Société Mathématique de France.

Les réactions à ces textes (gazette@dma.ens.fr) sont publiées dans le courrier des lecteurs.



Panoramas et Synthèses 19
Systèmes différentiels involutifs

Bernard Malgrange

La première partie est une exposition de la théorie des «systèmes en involution» d'É. Cartan, du point de vue homologique de Spencer, Sternberg et al. Le point de vue de Cartan lui-même est aussi rappelé, et comparé au précédent, à l'appendice B. La seconde partie démontre l'involutivité générique des systèmes différentiels analytiques, ce qui est une version précise d'une assertion de Cartan suivant laquelle, grosso modo, « en prolongeant un système différentiel, on finit par obtenir un système en involution ».

The first part is an exposition of the theory of "systèmes en involution" of É. Cartan, from the homological point of view of Spencer, Sternberg et al. The point of view of Cartan himself is also recalled, and compared to the preceding one, in Appendix B. The second part proves the generic involutiveness of analytic differential systems, which is a precise version of an assertion of Cartan saying roughly that, "by prolongation, a differential system becomes eventually involutive".

prix public* : 26 € - prix membre* : 18 €

* frais de port non compris



Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré

11 rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris cedex 05

[http : //smf.emath.fr](http://smf.emath.fr)

LIVRES

Tauberian Theory A Century of Developments

J. KOREVAAR

Springer Verlag, 2004. xv+483 p. ISBN : 3-540-21058-X. \$ 109.00

Le contenu du livre de Jacob Korevaar « Tauberian Theory A Century of Developments » passe les promesses du titre, puisque débutant en 1897 avec le résultat fondateur de Tauber $\sum a_n x^n \rightarrow l$ quand $x \rightarrow 1$ et $na_n \rightarrow 0$ implique $S_n = \sum_0^n a_k \rightarrow l$ (il démarre même en 1821 avec le théorème de Cauchy sur les moyennes arithmétiques) et continuant par le célèbre théorème de Littlewood de 1911 (on peut chez Tauber supposer seulement na_n borné), ce livre visite (presque) tous les développements de la théorie taubérienne dans la première moitié du 20^e siècle (Hardy, Littlewood, Wiener, etc...) pour continuer par des résultats allant jusqu'au début des années 2000, avec au passage des applications à la théorie des nombres (bien sûr...), aux fonctions entières, aux probabilités... L'ouvrage, de 420 pages, est divisé en sept chapitres que nous allons analyser un par un.

Le chapitre 1 porte sur les théorèmes taubériens réels du type Hardy-Littlewood pour des séries entières, de Dirichlet, de Lambert (ou des transformées de Laplace) qui relie le comportement de la série génératrice d'une suite a_n pour des valeurs réelles de la variable au comportement de la série $\sum a_n$ elle-même; ce chapitre, comme le reste du livre, est extrêmement fouillé, et laisse dans l'ombre très peu d'aspects : les procédés de sommation sont comparés, les grands théorèmes sont démontrés en détail (comme celui de Littlewood par la méthode de Karamata ou celle de Wielandt), et leur optimalité est souvent établie, par exemple celle de la condition $a_n = O(1/n)$ dans le théorème de Littlewood, par une méthode différente de la méthode initiale (sommations d'exponentielles), mais qui revient souvent dans la suite. On trouve aussi le théorème des « high indices » (si $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq q > 1$, aucune condition sur les coefficients a_n n'est requise dans le théorème taubérien correspondant à la série $\sum a_n \exp(-\lambda_n x)$, et l'optimalité de ce nouveau théorème (Rudin 1966) est également prouvée.

Le chapitre 2 développe surtout le monumental papier de N. Wiener à Annals of Maths (1932), avec sa théorie des noyaux $K \in L^1$ « réguliers », i.e. ceux qui vérifient

$$(1) \quad K * \varphi = 0 \text{ et } \varphi \text{ continue bornée} \implies \varphi = 0.$$

Le célèbre critère de régularité par la non-annulation de la transformée de Fourier de K est établi par une méthode utilisant un minimum de théorie des algèbres de Banach, et très proche de la méthode de Wiener pour les séries de Fourier absolument convergentes. De nombreuses formulations équivalentes à (1) sont données, et surtout des applications aux théorèmes taubériens, incluant celle au procédé de Lambert, rendue possible par l'absence de zéros de la fonction zêta sur la droite $\Re s = 1$, qui elle-même conduit à une preuve simple du théorème des nombres premiers, via la convergence de la série $\sum \frac{\Lambda(n)-1}{n}$. L'auteur donne aussi une preuve,

due à lui-même, du théorème de Wiener (pour des familles de noyaux), qui utilise le langage et le formalisme des distributions. Ce chapitre se clôt par une jolie application (Rudin 1978) de la théorie taubérienne aux fonctions harmoniques positives, sous forme de la réciproque du théorème de convergence non-tangentielle de Fatou.

Le chapitre 3 est consacré aux théorèmes taubériens complexes, en commençant par le résultat fondateur de Fatou (et son extension par Riesz aux séries de Dirichlet) :

Si $f(z) = \sum a_n z^n$ se prolonge analytiquement en 1 et $a_n \rightarrow 0$, alors $\sum a_n$ converge.

Le grand résultat de ce chapitre est bien sûr le théorème de Wiener-Ikehara, qui est prouvé de deux façons : l'une essentiellement due à Bochner, et l'autre à Graham et Vaaler, qui utilise un encadrement de la fonction exponentielle négative (prolongée par zéro aux réels négatifs) par des restrictions à l'axe réel de fonctions entières de type exponentiel, ce qui permet de donner une version localisée du théorème. Mais on trouve aussi le théorème taubérien de Newman (1980), qui donne une preuve plus simple du théorème précédent quand on fait une hypothèse plus forte (mais souvent vérifiée) sur le prolongement de la fonction génératrice ; la preuve initiale est légèrement épurée par le choix de contours plus simples, ce qui est typique du soin et de la maîtrise manifestés par l'auteur tout au long de l'ouvrage. On regrettera juste l'absence d'un énoncé (à défaut d'une preuve) du théorème taubérien de Delange (1954) qui est l'extension naturelle (et très utile !) du théorème de Wiener-Ikehara au cas d'un pôle multiple, ou d'une singularité logarithmique. Mentionnons pour finir des versions très fines du théorème de Fatou, avec une jolie application à la théorie des opérateurs (Esterle 1983, Katznelson-Tzafriri 1986) :

Si l'opérateur L est à puissances bornées et $\sigma(L) \cap C(0, 1) = \{1\}$, alors $\|L^n - L^{n+1}\| \rightarrow 0$

Le chapitre 4 est un chapitre très spécialisé de la théorie de Karamata sur les fonctions L à variation lente ($\frac{L(\lambda u)}{L(u)} \rightarrow 1$ quand $u \rightarrow \infty$, $\forall \lambda > 1$) ou α -régulières ($L(u) = u^\alpha L_0(u)$, L_0 à variation lente, α réel) ; deux caractérisations (par représentation intégrale ou par comportement asymptotique) de ces fonctions sont données, ainsi que le théorème taubérien de Karamata pour les transformées de Laplace de fonctions croissantes S :

$\varepsilon \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} S(t) dt \sim A\Gamma(\alpha + 1)\Phi(\frac{1}{\varepsilon})$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et Φ α -régulière impliquent $S(x) \sim A\Phi(x)$, quand $x \rightarrow \infty$.

D'innombrables variantes sont données (variation lente de Beurling, transformée de Stieltjes, etc...) ainsi qu'un autre théorème taubérien reliant (dans le cadre de la variation régulière) le comportement du logarithme d'une fonction croissante et du logarithme de sa transformée de Laplace, comportement qui lui-même entraîne un équivalent (dû à Hardy et Ramanujan) du logarithme de la fonction de partition $p(n)$ quand n tend vers ∞ . Le comportement asymptotique de la fonction de partition elle-même (toujours dû à Hardy et Ramanujan) est également donné, comme conséquence d'un théorème taubérien délicat d'Ingham. On voit que l'auteur n'esquive pas les difficultés !

Le chapitre 5 est assez court, et présente des extensions de la théorie classique. Il contient notamment une application assez convaincante de la théorie de Gelfand à un théorème difficile de Beurling (1938), extension aux algèbres à poids $L^1(\omega)$

du résultat de Wiener dans le cas où le poids est non quasi-analytique (de façon équivalente où l'algèbre est régulière). Ce théorème peut s'énoncer ainsi de façon abrégée

Si un idéal I de $L^1(\omega)$ n'a pas de zéros réels, il contient l'idéal J des fonctions dont la transformée de Fourier (sur $\mathbb{R}$) a un support compact.

L'auteur prouve aussi le théorème de Wiener sur les inverses de séries de Fourier absolument convergentes, qui sert lui-même à prouver un théorème probabiliste d'Erdős-Feller-Pollard dans le cas d'une espérance finie (à vrai dire, les choses sont exprimées ici d'une façon non- probabiliste). L'autre application de l'analyse fonctionnelle abstraite (espaces de Fréchet de suites) est moins convaincante, puisqu'il faut subir un très grand nombre de définitions pour arriver au théorème des « high indices » de Hardy-Littlewood, dont on a vu une preuve simple et directe au chapitre 1.

Le chapitre 6 est difficile, et presque entièrement consacré à la méthode de sommabilité de Borel et à ses variantes :

$$e^{-x} \sum_0^{\infty} S_n \frac{x^n}{n!} \rightarrow A \text{ quand } x \rightarrow \infty.$$

Ici, la condition taubérienne est $|a_n| \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$, ou plus généralement (condition de Valiron) $S_m - S_n \rightarrow 0$ si $\sqrt{m} - \sqrt{n} \rightarrow 0$. Cette méthode de Borel est incluse dans une catégorie de méthodes Γ_λ dépendant d'un paramètre $\lambda > 0$, dites méthodes de cercle, et qui moyennant des efforts se ramènent aux méthodes de Wiener du chapitre 2 pour un noyau gaussien $K_\lambda(x, y) = e^{-\lambda(x-y)^2}$. Mais Korevaar donne une preuve indépendante du théorème taubérien de Valiron, par un argument de famille normale. On retrouve le canevas du chapitre 1, avec un théorème des « high indices » :

Si $\sqrt{p_{k+1}} - \sqrt{p_k} \geq \delta$ et $\sum a_k x^{p_k}$ est B -sommable, alors $\sum a_k$ converge, lui aussi optimal. Deux jolies applications de ces théorèmes sont données, l'une à la comparaison des croissances sur deux demi-droites des fonctions entières à spectre de Fourier lacunaire, l'autre (Tenenbaum 1980) à la comparaison des densités (respectivement au sens de Borel et au sens ordinaire) de deux ensembles d'entiers. Enfin, le procédé de sommation d'Euler (qui implique celui de Borel) est également mentionné, avec une application (Sondow 1994) au prolongement méromorphe de la fonction ζ à tout le plan complexe.

Le long et difficile chapitre 7 est entièrement consacré aux théorèmes taubériens avec reste, en commençant par le résultat fondateur (et optimal!) de G. Freud au début des années 50 :

$$f(x) = \sum a_n x^n = A + O((1-x)^\beta), \quad \beta > 0 \text{ et } na_n \geq -C \text{ impliquent } S_N = A + O\left(\frac{1}{\log N}\right).$$

L'optimalité de ce résultat est établie ici avec $\beta = 2$, $|a_n| \leq \frac{1}{n}$, par une variante de la méthode d'optimalité du chapitre 1. Ensuite, des théorèmes taubériens avec reste pour les transformées de Laplace, trop techniques pour être énoncés ici, sont établis, avec pour base un résultat difficile d'approximation L^1 unilatérale pondérée :

Si f est à variation bornée V sur $[-1, 1]$ et si k est un entier ≥ 1 , on peut encadrer f ($p \leq f \leq P$) par deux polynômes de degré $\leq k$, la norme L^1 pondérée de $(P - p)$ étant $O(V/k)$ et la somme des modules de leurs coefficients étant contrôlée.

Ce chapitre suit lui aussi la logique des chapitres 1 et 2 : on y trouve un théorème des « high indices » qui s' énonce ainsi :

Si $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq q > 1$ et si $\sum a_n e^{-\lambda_n x} \rightarrow A$ vite, alors $S_N = \sum_1^N a_n \rightarrow A$ vite, sans condition taubérienne.

La preuve, assez compliquée, utilise la variable complexe, et s'inspire d'un travail de Halász (1967). De même, si le noyau K d'intégrale 1 a une transformée de Fourier qui, non seulement ne s'annule pas, mais encore ne s'approche pas trop vite de zéro, on a un théorème de Wiener de la forme :

*$K * S(x) \rightarrow A$ vite et S oscille peu impliquent $S(x) \rightarrow A$ vite, quand $x \rightarrow \infty$.*

Les principaux contributeurs sont Freud, Ganelius (avec une application probabiliste à la vitesse de convergence dans le théorème limite central due initialement à Berry et Esséen), et Korevaar, avec des résultats de l'auteur allant jusqu'au début des années 2000. J'ai simplement regretté, s'agissant de Freud, l'absence de son théorème taubérien sur la dérivabilité des sommes de séries de Fourier lacunaires (ici ou au chapitre 5).

Pour conclure : l'ouvrage de Korevaar est d'une richesse incroyable, dont le résumé nécessairement tronqué qui précède ne donne qu'une très faible idée : il démontre en détail un très grand nombre de théorèmes taubériens fort difficiles, réels, complexes, ou avec restes, avec parfois plusieurs approches différentes, et en établissant souvent l'optimalité de ces théorèmes. Sur un sujet devenu aussi encyclopédique, il fallait faire des choix : l'auteur a évité le piège du catalogue sans preuves autres que rares et triviales, et ses preuves sont au contraire nombreuses et hautement non-triviales, avec un style assez particulier, mais auquel on s'habitue très bien : quand des propositions auxiliaires sont nécessaires pour démontrer un théorème, on les admet et on continue, quitte à y revenir assez longtemps après, une dizaine de pages plus loin par exemple. Cela ne nuit en rien (bien au contraire) à la compréhension, et comme je l'ai déjà dit, ce livre a été écrit avec beaucoup de soin et de maîtrise du sujet, il réalise une synthèse assez impressionnante, et devrait rendre de grands services aux chercheurs en théorie des nombres, probabilités, analyse complexe et harmonique, etc... N'oublions pas une composante « histoire des mathématiques de la fin du 19^e et du 20^e siècle » (voir par exemple les allusions à Cauchy, Abel, Cesàro, Frobenius, Littlewood, Hardy, etc... au chapitre 1, ou à Freud, Erdős, Turan, au chapitre 7) qui rend encore plus attrayante la lecture de l'ouvrage. On ne peut que recommander vivement cette lecture à tous les abonnés de la Gazette, et l'achat du livre à toutes les bibliothèques des universités !

Hervé Queffélec
Université Paul Sabatier, Toulouse

When least is best

PAUL J. NAHIN

Princeton University Press, 2003. 328 p. ISBN : 0-691-07078-4. 24 €

Le sous-titre de ce livre donne le ton : « how mathematicians discovered many clever ways to make things as small (or as large) as possible »... Peu de livres popularisent le calcul différentiel de base, les raisons pour lesquelles son étude commença au XVII^e siècle, c'est-à-dire essentiellement la nécessité de résoudre des problèmes d'extremum, d'optimisation dirions-nous aujourd'hui. L'ouvrage de

Paul Nahin est une solide contribution nous montrant comment les concepts de dérivation, maximisation ou minimisation ont évolué avec le temps. Dès les Grecs, des problèmes d'optimisation géométrique étaient posés (et résolus, notamment dans le plan) ; des problèmes de nature géométrique, parfois fort compliqués, continuent d'ailleurs à être formulés de nos jours ; comme l'écrivait C. MacLaurin (celui des développements, en 1742) : « *There are hardly any speculations in geometry more useful or more entertaining than those which relate to maxima and minima* ». Le XVII^e siècle est celui de la mathématisation du mouvement, il verra la naissance et les premiers balbutiements de ce qui s'appellera le calcul différentiel, avec Fermat dans le rôle de pionnier. À vrai dire, l'évolution du concept de « changement » (qui donnera *in fine* la dérivée) ne s'est pas faite de manière linéaire ; comme l'a excellemment analysé J. V. Grabiner en 1983 : « *First the derivative was used, then discovered, explored and developed, and only then, defined* » ; soulignons que c'est exactement dans l'ordre inverse que nous l'enseignons aujourd'hui, mais ça c'est une autre histoire... L'ouvrage de P. Nahin est très bien documenté sur cette évolution, aucune des références (mathématiques ou historiques) importantes n'est occultée. Voici son déroulement en chapitres : 1. minimums, maximums, derivatives and computers ; 2. the first external problems ; 3. medieval maximization and some modern twists ; 4. the forgotten war of Descartes and Fermat ; 5. calculus steps forward, center stage ; 6. beyond calculus ; 7. the modern age begins ; huit annexes complètent le tout ; pas de bibliographie finale (ce qui est dommage), elle est intégrée au fur et à mesure dans le texte.

L'ouvrage intéressera les étudiants, enseignants, enseignants-chercheurs, qui ont du goût pour l'évolution historique des concepts mathématiques, plus précisément ici ceux relatifs au calcul différentiel et à l'optimisation élémentaires.

Pour terminer je voudrais indiquer que j'ai retrouvé dans le livre de P. Nahin un exemple de problème variationnel qui m'a servi de fil rouge dans certains de mes enseignements en deuxième cycle universitaire ; il illustre assez bien le Calcul variationnel et les questions qui s'y posent. Je ne résiste pas au plaisir de le soumettre à la sagacité des lecteurs de la *Gazette*.

Un bateau, perdu en mer, sait qu'il est à une distance de 1 km d'un long rivage rectiligne (ce que lui indiquent ses instruments de mesure), mais le brouillard est si épais qu'il ignore la direction du rivage. Le bateau, avançant à vitesse constante, voudrait toucher le rivage le plus vite possible. La question est donc : quelle est le chemin de longueur minimale que le bateau doit suivre afin d'être sûr de toucher terre ?

Toutes les questions du Calcul variationnel peuvent être posées à propos de cet exemple : l'objet optimal recherché n'est pas un objet simple, c'est une trajectoire (= une courbe du plan)... Y a-t-il des solutions (une trajectoire vraiment plus courte que toutes les autres) ? Y en a-t-il plusieurs ? Comment caractériser (mathématiquement) les trajectoires optimales ? Comment en approcher une par un procédé numérique ?

En termes mathématiques : soit le plan avec une origine 0 (la position de départ du bateau) ; il s'agit de trouver *une courbe du plan démarrant en 0, de longueur minimale et qui touche (ou coupe) toute droite du plan à distance 1 km de l'origine.*

La solution, si solution il y a, ne saurait être unique ; en effet, une trajectoire optimale, tournée d'un angle quelconque autour de l'origine est encore optimale.

Une première tentative, montrant au moins la faisabilité de ce qui est demandé sur la trajectoire recherchée est de considérer ceci : le bateau part de l'origine O en suivant un rayon (pris dans une direction au hasard) du cercle de rayon 1 km ; au bout du rayon il fait le tour complet du cercle (voir figures ci-dessous). Il est ainsi sûr de toucher toute droite du plan à distance de 1 km de l'origine ; il aura parcouru au total $(2\pi + 1) \approx 7,2832\text{ km}$. Mais il y a sans doute mieux à faire... Comment ? J'ai posé la question sous forme de défi à un groupe de jeunes ingénieurs travaillant dans la sous-traitance aéronautique à Toulouse. Leur réponse fut comme cela est décrit dans la deuxième figure au-dessous : le bateau se déplace d'abord au-delà de l'extrémité du rayon de départ, revient vers le cercle le long d'un segment tangent au cercle, fait la moitié du tour du cercle, et complète par un nouveau segment de droite tangent au cercle ; l'ouverture angulaire du secteur S (délimité par le rayon de départ et le rayon dirigé vers le point d'arrivée) étant de (deux fois) 45° . Ce n'est pas si mal ! En effet, un bateau suivant cette trajectoire est sûr de couper (ou de toucher) le rivage rectiligne situé à 1 km de l'origine (point de départ), où qu'il soit ! Et la longueur parcourue est de $(\pi + 2 + \sqrt{2}) \approx 6,5556\text{ km}$.

Mais il y a encore mieux à faire dans le même registre. Considérons une ouverture angulaire du secteur S_θ d'angle θ compris entre 0 et 45° (cf. la troisième figure au-dessous) et cherchons la valeur de θ qui minimiserait la trajectoire correspondante C_θ . La longueur $L(\theta)$ de la trajectoire C_θ est $(2\pi - 4\theta + 2 \cdot \tan(\theta) + \frac{1}{\cos(\theta)})$ km. Cette fonction convexe est minimisée pour une valeur de θ_{opt} intérieure à l'intervalle $[0, 45^\circ]$, en le seul point d'annulation de la dérivée de $L(\theta)$; cela donne $\theta_{opt} \approx 36,37^\circ$ et $L(\theta_{opt}) \approx 6,4589\text{ km}$. La première tentative correspondait à l'ouverture angulaire de $\theta = 0$, tandis que la courbe proposée par les jeunes ingénieurs correspondait à l'ouverture angulaire de $\theta = 45^\circ$.

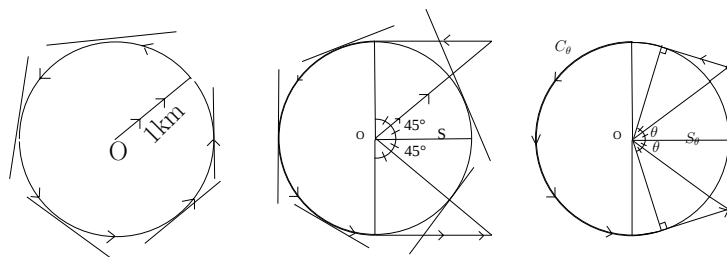


FIG. 1. Figures

Il n'empêche que le mathématicien reste insatisfait : qui nous dit qu'on ne peut pas encore faire plus court, bref que la trajectoire trouvée au-dessus est vraiment la plus courte possible ? Dans son livre, P. Nahin parle de C_{opt} mais ne donne pas la réponse à cette question. Pour ma part je mets de côté une bonne bouteille d'Irroléguy rouge pour qui apportera la conclusion.

Le livre de P. Nahin, de présentation très soignée (couverture cartonnée et jaquette), est plutôt un livre qu'on consulte dans une bibliothèque, il est néanmoins peu coûteux.

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty,
Université Paul Sabatier de Toulouse

The Ricci flow : an introduction

BENNETT CHOW ET DAN KNOF

American Mathematical Society, 2004. 325 p. ISBN : 0-8218-3515-7. \$ 84

L'idée d'utiliser le flot de la courbure de Ricci pour construire des métriques riemanniennes spéciales est due à R. Hamilton qui prouva en 1982 un résultat très important. Il a montré qu'une variété compacte de dimension 3 qui admet une métrique de courbure de Ricci strictement positive possède également une métrique de courbure sectionnelle constante strictement positive ; en particulier, c'est un quotient fini de la sphère canonique. À partir de ce résultat séminal toute une série de théorèmes furent obtenus par R. Hamilton lui-même ainsi que par d'autres mathématiciens. Cette activité a culminé dans les deux dernières années avec la mise en ligne, par G. Perelman, de trois prépublications dont le but est de donner une preuve de la conjecture de géométrisation de W. Thurston (incluant la preuve de la conjecture de H. Poincaré) qui utilise cette technique. Au moment où ce rapport est écrit il est très probable que cette preuve soit juste ; notons qu'il s'agissait de la motivation originelle de R. Hamilton. Ce remarquable succès ouvre un vaste champ d'applications parmi lesquelles la recherche de métriques d'Einstein en dimension quelconque. Le flot de la courbure de Ricci, ou plus simplement flot de Ricci, peut être vu comme une équation différentielle ordinaire sur l'espace des métriques riemanniennes ; ce point de vue est toutefois difficile à mettre en œuvre et il lui est préféré l'approche qui consiste à le considérer comme une équation aux dérivées partielles paraboliques semblable en bien des points à l'équation de la chaleur. La méthode est une splendide combinaison d'analyse et de géométrie et sa compréhension nécessite des connaissances pointues en géométrie riemannienne : théorèmes de comparaison, théorèmes de compacité à la Gromov, classification des variétés de courbure positive ou nulle, opérateurs naturels sur les variétés, etc. C'est donc un important sujet d'étude pour quiconque désire apprendre la géométrie, qu'il soit débutant ou confirmé. Le livre intitulé « The Ricci Flow : an introduction », par B. Chow et D. Knopf en est de loin la meilleure introduction disponible à ce jour. Il se compose de 9 chapitres et 2 appendices que je décris brièvement dans les lignes qui suivent.

Les deux premiers chapitres pourraient seuls faire l'objet d'une monographie : ils sont consacrés aux exemples. C'est un fait maintenant bien connu qu'en dimension 3 il y a huit « géométries » modèles, c'est-à-dire huit géométries homogènes, et que toute variété de dimension 3 doit se décomposer en pièces élémentaires portant chacune une de ces géométries (c'est la conjecture de géométrisation de Thurston). Le chapitre 1 décrit le flot de Ricci sur ces espaces modèles ; il s'agit d'un problème plus algébrique que géométrique et il est de toute première importance de comprendre ces situations. Le chapitre 2 concerne les solutions spéciales qui sont des modèles pour les singularités que l'on rencontre dans les travaux de Hamilton et Perelman, en particulier celle qui ont un temps de vie infini dans le passé, le futur ou bien les deux. L'exemple crucial étudié ensuite est appelé le « neckpinch » : c'est une métrique sur une variété qui se pince (petit rayon d'injectivité) le long d'une région cylindrique. Il joue un rôle central dans la preuve de la conjecture de géométrisation (en dimension 3) car c'est dans ces cylindres que doit se pratiquer la chirurgie lorsqu'une métrique évoluant par le flot de Ricci atteint

une singularité. La description de cet exemple est faite en toute dimension. Ces deux chapitres constituent un très bon échauffement pour la suite et permettent de développer une intuition des phénomènes en jeu. La question de savoir si la métrique, évoluant par le flot de Ricci, s'effondre ou non est également discutée. Il faut insister sur le fait qu'il n'est pas si fréquent qu'un livre de ce niveau débute par 60 pages d'exemples et c'est certainement le meilleur moyen d'apprendre un sujet.

Les deux chapitres suivants (3 et 4) sont consacrés aux bases de l'analyse des équations aux dérivées partielles paraboliques. Le chapitre 3 concerne l'existence en temps petits des solutions de cette équation ; ce n'est pas aussi facile que pour le cas scalaire, même sur une variété compacte, car l'équation parabolique n'est pas fortement parabolique. Ce phénomène classique en géométrie est dû à son invariance par l'action du groupe des difféomorphismes. C'est une difficulté majeure résolue par R. Hamilton dans son premier article. Plus tard, fort heureusement, D. Deturck a proposé une modification de l'équation qui la rend fortement parabolique. C'est cette approche qui est décrite dans le chapitre 3 ainsi que la relation avec la théorie des applications harmoniques. Une fois acquise l'existence de solutions pour des temps petit on peut écrire l'équation d'évolution des différentes courbures afin d'obtenir des informations géométriques. Les tous premiers renseignements que l'on peut obtenir proviennent de l'application du principe du maximum. C'est le sujet du chapitre 4. Il est présenté de manière très pédagogique : on commence par les versions scalaires pour finir par les versions vectorielles qui s'appliquent au tenseur de courbure. Bien qu'il s'agisse d'un outil d'analyse la géométrie y joue un rôle important et fascinant. La seule réserve que je fasse est l'absence d'énoncés de versions fortes du principe du maximum qui sont ensuite utilisées. Les auteurs, toutefois, les annoncent dans le volume II à venir.

Les chapitres 5 et 6 constituent le cœur de l'ouvrage puisqu'ils concernent les dimensions 2 et 3. Si l'on prétend utiliser cette technique pour prouver la géométrisation des variétés de dimension 3, il est indispensable de se convaincre que le flot de Ricci peut prouver l'uniformisation des surfaces. C'est le contenu du chapitre 5 ; en dimension 2, le flot, ou plutôt sa version normalisée (le volume reste constant pendant l'évolution), converge vers une métrique de courbure de Gauß constante sans rencontrer de singularité. Il permet donc de prouver l'uniformisation à l'exception notable du cas de la sphère pour laquelle on doit utiliser la structure complexe. Cette limitation a été levée, après la parution du présent ouvrage, dans un article de X. Chen, P. Lu et G. Tian. Dans le cas de S^2 donc deux belles preuves sont proposées par les auteurs et il faut insister sur le fait que l'article de R. Hamilton qui traite de la dimension 2 est une esquisse assez difficile à lire par un débutant. La plupart des techniques utilisées en dimension supérieure et en particulier dans les travaux de G. Perelman apparaissent sous une forme élémentaire dans cet important chapitre. Un cours de mastère II sur le flot de Ricci peut très utilement commencer par un semestre sur le cas des surfaces et ce chapitre ainsi que le précédent (sur le principe du maximum) sont une excellente référence. Dans le chapitre 6 c'est le résultat en dimension 3 mentionné en introduction de ce rapport qui est prouvé. Il met en lumière tous les points importants pour la dimension 3, en particulier le principe du maximum dit de Hamilton-Ivey. Un fois encore, comme pour les surfaces, le flot sur une variété de dimension 3 qui admet une métrique de courbure de Ricci strictement positive ne rencontre aucune singularité avant son

extinction.

Les chapitres 7, 8 et 9 sont logiquement centrés autour des singularités qui peuvent apparaître dans le cas le plus général. L'idée est de dilater la métrique autour d'un point où la courbure devient très grande et de montrer que là la variété ressemble à un modèle. C'est l'objet des chapitres 8 et 9. Afin de passer à la limite (pour les métriques convenablement dilatées) autour de ces points il faut un théorème de compacité. Certaines des propriétés des limites obtenues repose sur le contrôle des dérivées de la courbure pour une métrique qui évolue par le flot de Ricci. Ce sont les estimées dites de Shi et sont d'une importance capitale dans les travaux de Hamilton et Perelman. Elles sont décrites dans le chapitre 7 avec l'énoncé du théorème de compacité de Hamilton. Notons que le résultat de Perelman dit de « non-effondrement » (section 4 de son premier article) est utilisé dans ce chapitre; ce théorème affirme, essentiellement, que si un flot explose en temps fini (c'est-à-dire s'il existe un point où la courbure tend vers l'infini en temps fini) alors le rayon d'injectivité de la métrique est minoré. Dans un article important sur la formation des singularités R. Hamilton classifie celles-ci en trois types. Les chapitre 8 et 9 décrivent certains aspects de cette classification. Cette partie n'est pas utilisée dans les travaux de Perelman mais elle est importante tant pour renforcer l'intuition que pour les études à venir en dimension supérieure. Je dois signaler que je n'ai pas lu en détail ces deux chapitres. Un point important, en dimension 3, est que les singularités modèles, appelées « κ -solutions », satisfont l'inégalité de Harnack de Li-Yau-Hamilton. Ceci est évoqué dans le chapitre sur les surfaces ainsi que dans le chapitre 8. Elles pourraient être énoncées de manière plus détaillées; un fois encore les auteurs annoncent les détails de cet important outil dans le successeur du présent ouvrage.

Les deux appendices sont consacrés aux bases du calcul tensoriel et aux théorèmes de comparaison.

Après avoir lu l'essentiel de ce livre l'impression que je peux en retirer est que les auteurs ont certainement enseigné le sujet tant est grand le soin avec lequel les notions nouvelles sont introduites. De gros efforts sont faits pour motiver le lecteur comme en témoignent les deux chapitres d'exemples. Depuis la « publication » des articles de Perelman les notes de cours sur le flot de Ricci fleurissent. Ce livre est de loin ce que j'ai pu lire de meilleur sur le sujet. Nous attendons tous avec impatience le tome II en espérant qu'il présente certains aspects des travaux de Perelman avec le même soin et les mêmes qualités pédagogiques.

Ce texte a été publié dans sa version anglaise dans la « newsletter of the E.M.S. », n° 59 (2006).

Gérard Besson,
Université Joseph Fourier, Grenoble

Lectures on the orbit method

A.A. KIRILLOV

American Mathematical Society, 2004. 408 p. ISBN : 0-8218-3530-0. \$?

La « méthode des orbites » cherche à décrire certains objets de l'analyse harmonique invariante sur un groupe de Lie G (comme les représentations irréductibles unitaires, la topologie du dual unitaire $\hat{G}$, la mesure de Plancherel sur $\hat{G}$, etc) grâce

aux orbites de G dans sa représentation coadjointe, c'est-à-dire la représentation naturelle de G dans le dual $\mathfrak{g}^*$ de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Ces orbites possèdent une propriété remarquable : ce sont des variétés symplectiques. Elles sont bien sûr aussi munies d'une action de G , et la forme symplectique est G -invariante. En résumé, ce sont des G -variétés symplectiques. En mécanique classique, l'espace des phases d'un système physique ayant un groupe de symétrie G est une G -variété symplectique, et le système est dit "élémentaire" si cette variété est un espace homogène pour G (comme c'est le cas pour les orbites coadjointes). En mécanique quantique, l'espace des phases d'un système physique ayant un groupe de symétrie G est un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (ou plutôt son espace projectif), muni d'une représentation unitaire de G . Le système est élémentaire si cette représentation est irréductible. On voit donc se dessiner une analogie

Mécanique classique	/	Mécanique quantique
Orbites coadjointes	/	Représentations unitaires irréductibles

Il est maintenant bien connu qu'il n'existe pas de procédure canonique et universelle pour passer d'un système classique à un système quantique. Néanmoins, sur de nombreux exemples, les physiciens ont énoncé des "règles de quantification", préservant le groupe de symétrie. Les mathématiciens et les physiciens, et en premier lieu B. Kostant [K] et J.M. Souriau [S], ont formalisé ceci dans une théorie appelée "quantification géométrique", où l'on cherche à construire des objets quantiques à partir de la géométrie des objets classiques. La méthode des orbites fait donc partie de ce schéma général, mais étant plus spécifique, elle vise aussi à obtenir des résultats plus précis. L'auteur, dans l'introduction du livre, a résumé ce que l'on peut attendre de cette méthode sous forme d'un tableau à deux colonnes, intitulé "guide de l'utilisateur". La première énonce des questions sur les représentations unitaires irréductibles de G , et la seconde donne la recette pour y répondre. Comme nous le verrons plus précisément par la suite, la validité et la précision de la réponse dépendent de la classe de groupes que l'on considère. Donnons ici une partie de la première colonne :

- Décrire le dual unitaire de G comme espace topologique.

Réponse partielle : le dual unitaire est paramétré par l'ensemble des orbites coadjointes. Notons dans ce qui suit $\pi_{\mathcal{O}}$ la représentation unitaire irréductible correspondant à l'orbite coadjointe $\mathcal{O}$.

- Construire $\pi_{\mathcal{O}}$ à partir de la géométrie de $\mathcal{O}$.
- Décrire la restriction de $\pi_{\mathcal{O}}$ à un sous-groupe fermé H de G .
- Décrire la représentation induite unitaire de H à G d'une représentation π_{ω} attachée à une orbite coadjointe ω du sous-groupe fermé H de G .
- Calculer le caractère de $\pi_{\mathcal{O}}$.
- Calculer la mesure de Plancherel de G , c'est-à-dire la décomposition de $L^2(G)$ en représentations irréductibles unitaires.

La thèse de l'auteur [Ki1], publiée en 1962, et qui constitue l'acte de naissance de la méthode des orbites, s'attache à l'étude des représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. Préalablement, ce problème avait donné lieu à des travaux de J. Dixmier, et dans le cas particulier du groupe de Heisenberg, de von Neumann. Mais Kirillov est le premier à répondre complètement, et de manière très simple conceptuellement, aux questions posées ci-dessus (pour certaines de ces questions, dans des articles ultérieurs [Ki2]). Dans les années qui suivent, le cadre des groupes nilpotents est dépassé. En 1965, P. Bernat montre que la méthode

des orbites marche pour les groupes résolubles exponentiels (ceux pour lesquels l'application exponentielle est surjective). Cette hypothèse est levée en 1971 dans les travaux de L. Auslander-B. Kostant [AK] d'une part (groupes résolubles simplement connexes de type I) et de L. Pukanszky [P] de l'autre (groupes résolubles simplement connexes généraux). Pour les groupes résolubles simplement connexes généraux, les énoncés des résultats sont plus compliqués mais l'essentiel de la philosophie des orbites coadjointes est toujours pertinente. Dans un article de 1968 [Ki3], Kirillov applique sa méthode au cas des groupes semi-simples compacts. Il propose dans le même travail une "formule universelle des caractères" pour toute représentation $\pi_{\mathcal{O}}$ attachée à une orbite coadjointe $\mathcal{O}$, et ceci pour tout groupe G . Il s'est avéré par la suite que c'était un peu trop optimiste, mais ce fut le point de départ de tout un courant de recherche extrêmement fructueux dont les principaux protagonistes sont A. Bouaziz [B], M. Duflo [D1], [D2], M. Khalgui [Kh], W. Rossmann [R], P. Torasso [KhT], [T], M. Vergne [DHV], [V] (et bien d'autres). La méthode des orbites a aussi inspiré d'innombrables travaux sur les groupes de Lie réductifs. Elle marche bien pour une certaine classe de représentations unitaires, dites tempérées, qui suffisent à porter la mesure de Plancherel. Malheureusement (ou heureusement, cela dépend du point de vue), d'autres représentations unitaires jouent un rôle important, par exemple en théorie des formes automorphes, et il s'avère difficile d'adapter la méthode des orbites pour englober ces représentations. C'est encore un sujet de recherche assez actif, citons en passant les travaux de D. Vogan, ou bien les constructions des représentations "minimales" (P. Torasso, H. Sabourin, R. Brylinski-B. Kostant).

L'un des points les plus intéressants de cette philosophie des orbites coadjointes réside dans le fait que les limites de son domaine d'applicabilité ne sont pas bien déterminées. Elle est donc une source d'inspiration constante en théorie des représentations, dans un cadre qui dépasse celui des groupes de Lie. On peut s'intéresser ainsi aux représentations de groupes p -adiques, de groupes ou algèbres de dimension infinie, de super-groupes de Lie, etc...

Venons-en maintenant au livre lui-même. Remarquons que c'est la première fois que la méthode des orbites fait l'objet d'un livre, et que l'auteur est un des meilleurs spécialistes du sujet, puisqu'il est l'inventeur de cette méthode. L'auteur a repris dans une large mesure le contenu d'articles et de cours antérieurs, augmenté d'une suite conséquente d'appendices occupant une bonne moitié du livre, destinée à aider le mathématicien débutant ou non-expert, et couvrant des sujets aussi divers que les variétés différentiables, la géométrie symplectique, les groupes de Lie, la théorie des catégories, etc. Ils remplissent parfaitement leur rôle, sans ensevelir le lecteur dans des détails techniques inutiles. Comme le suggère le titre de la collection, l'un des publics visé est celui des étudiants au niveau de la thèse. Le style adopté cherche à mettre en évidence les idées, par le biais d'exemples nombreux et bien choisis, plutôt que le formalisme et la technique. La lecture du livre en est rendue, je trouve, assez plaisante. Malheureusement, ceci se fait parfois au prix de la rigueur mathématique la plus élémentaire. David Vogan, qui a fait une recension de ce livre pour le Bulletin de l'AMS tient à jour sur sa page web une liste des corrections, mineures ou non, à apporter au texte :

<http://www-math.mit.edu/~dav/CORR.pdf>

Il est tout de même dommage que le texte n'ait pas été relu plus attentivement avant publication.

Dans le chapitre d'introduction, on trouve le "guide de l'utilisateur" dont nous avons déjà parlé. Le premier chapitre est consacré à la géométrie des orbites coadjointes. Le formalisme utilisé fait appel à la notion de G -variété de Poisson. Sont aussi introduits dans ce chapitre les concepts fondamentaux d'application moment et de polarisation. Le deuxième chapitre expose la théorie des représentations du groupe de Heisenberg et le troisième celui des groupes nilpotents quelconques. On passe ensuite aux groupes résolubles (chapitre 4), où les difficultés sont expliquées soigneusement à partir des exemples les plus simples, puis aux groupes semi-simples compacts (chapitre 5). La théorie des représentations de ces groupes est rappelée en détails et mise en perspective par la méthode des orbites. Enfin le chapitre 6 propose rapidement d'autres exemples d'application de la méthode des orbites (groupes de Lie semi-simples, groupes de dimension infinie, groupes finis, etc). On peut regretter que le paragraphe consacré aux groupes de Lie semi-simples soit si bref. Même si, comme il a été dit plus haut, la méthode des orbites montre là ses limites, elle n'en a pas moins inspiré une abondante littérature et de magnifiques résultats (formules de caractères des séries discrètes par exemple). Il est dommage qu'un livre publié en 2004 ignore à ce point les progrès du sujet après 1970. Le lecteur intéressé par les développements plus récents de la méthode des orbites pourra se reporter, outre les articles originaux déjà cités, aux articles d'exposition [G], [Vo], [V2] et leur bibliographie. Le chapitre se termine par un paragraphe intitulé : "pourquoi la méthode des orbites marche-t-elle ?" Une des deux explications proposées est l'argument de quantification géométrique par lequel nous avons commencé cette recension. La seconde invoque les travaux de Kontsevitch sur la quantification par déformation, mais là encore, trop rapidement pour que l'on puisse s'en faire une idée.

Bibliographie

- [B] A. Bouaziz, *Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes*, J. Funct. Anal. **70** (1987), no. 1, p. 1-79.
- [AK] L. Auslander, B. Kostant, *Polarizations and unitary representations of solvable Lie groups*, Invent. Math. **14** (1971), p. 255-354.
- [D1] M. Duflo, *Constructions de représentations unitaires d'un groupe de Lie*, Harmonic Analysis and Group Representations, cours CIME (1980), P. 130-208.
- [D2] M. Duflo, *On the Plancherel formula for almost algebraic real Lie groups*, Lie groups representations III, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1077, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1984, p. 101-165.
- [DHV] M. Duflo, G. Heckman et M. Vergne, *Projection d'orbites, formule de Kirillov et formule de Blattner*, Mém. SMF **15** (1984), p. 65-128.
- [G] A. Guichardet, *La méthode des orbites, historique, principes, résultats*, à paraître dans la série "Leçons de mathématiques d'aujourd'hui".
- [Kh] M. S. Khalgui, *Caractères des groupes de Lie*, J. Funct. Anal. **47** (1982), no. 1, 64-77.
- [KhT] M.S. Khalgui et P. Torasso, *La formule de Plancherel pour les groupes de Lie presque algébriques réels*, Noncommutative harmonic analysis, Progr. Math., 220, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004, p. 213-251.

- [Ki1] A. Kirillov, *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, Uspekhi Mat. Nauk. **17** (1962), p. 57-110.
- [Ki2], A. Kirillov, *Plancherel measure for nilpotent Lie groups*, Funkts. Anal. i Priloz. **1** (4), (1967), p. 330-331.
- [Ki3], A. Kirillov, *Method of orbits in the theory of unitary representations of Lie groups*, Funkts. Anal. i Priloz. **2** (1), (1968), p. 90-93.
- [K] B. Kostant, *Quantization and unitary representations*, Lectures in Modern Analysis and Applications (C. Taam, eds.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 170, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970, p. 87-208.
- [P] L. Pukanszky, *Unitary representations of solvable Lie groups*, An. Sci. de l'ENS, (1971) p. 457-608.
- [R] W. Rossmann, *Kirillov's character formula for reductive Lie groups*, Invent. Math. **48** (1978), p. 207-220.
- [S] J.M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Maîtrise de mathématiques, Dunod, Paris 1970.
- [T] P. Torasso, *Méthode des orbites de Kirillov-Duflo et représentations minimales des groupes simples sur un corps local de caractéristique nulle*, Duke Math. J. 90 (1997), no. 2, p. 261-377.
- [V] M. Vergne, *A Poisson-Plancherel formula for semi-simple Lie groups*, Ann. Math. (2) **115** (1982), p. 639-666.
- [V2] M. Vergne, *Representations of Lie groups and the orbit method*, Actes Coll ; Bryn Mawr, Springer (1983), p. 59-101.
- [Vo] D. Vogan, *The method of coadjoint orbits for real reductive groups*, Representation Theory of Lie Groups, IAS/Park City Mathematics Series, vol. 8, AMS, Providence RI, 1999.

David Renard,
École Polytechnique

