SOMMAIRE DU N° 107

Éditorial

Le numéro spécial de la *Gazette* pour l'année 2005 était consacré à la physique.

Félicitations à Bertrand Duplantier et Kirone Mallick pour leur remarquable travail éditorial.

Comme vous l'avez remarqué ce spécial vous a été envoyé, cette année, en même temps que le numéro courant auquel il est rattaché, celui d'octobre. Ce rattrapage de calendrier n'aurait pas été possible sans le travail exemplaire de Claire Ropartz et Marielle Randria-Riou. Qu'elles en soient ici remerciées.

Bonne année 2006.

— *Colette Anné*

Mot de la Présidente et vie de la société

La démission forcée de Laurent Lafforgue du Haut Comité à l'Éducation où il venait d'être nommé, a soulevé beaucoup de débats dans la communauté mathématique. Vous pourrez trouver une partie de ces discussions sur la tribune libre du forum de la SMF `http://smf.emath.fr/Forum/TribuneLibre/`.

Les appels et courriels que j'ai reçus, et les avis que j'ai sollicités auprès de collègues qui n'avaient pas souhaité s'exprimer spontanément, m'ont convaincue que la proposition d'une réaction publique immédiate de la SMF divisait profondément les mathématiciens. En conséquence, et conformément à nos règles de fonctionnement (une décision du Bureau ou du Conseil de la société ne peut se prendre par voie électronique que si elle est unanime, le manque d'unanimité rendant nécessaire une réunion autour d'une vraie table non virtuelle), j'ai saisi de cette question le Bureau lors de sa réunion du 2 décembre.

La discussion, passionnée, longue et sérieuse, a montré que si les avis divergeaient fortement sur l'interprétation de l'événement lui-même et les réactions immédiates qu'il convenait ou non de lui consacrer, l'accord se faisait sur l'importance de la question sous-jacente : l'état de l'enseignement des mathématiques dans notre pays, qu'il est nécessaire d'analyser à fond, sans langue de bois et discours lénifiant.

Nous avons identifié trois points clefs :

1. Des problèmes aigus se posent à l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux.

2. Dans la situation où se trouve notre pays, et plus précisément la persistance depuis 20 ans d'un taux de chômage destructeur notamment chez les jeunes, des questions de société, telles que le rôle de la sélection par les mathématiques dans l'accès à un grand nombre de formations, pèsent lourd dans la perception de notre discipline par nos concitoyens.

3. Comme sur d'autres sujets d'actualité, l'affrontement entre les tenants de positions bloquées ne permettra pas de sortir de cette situation. On peut même penser qu'elle aura in fine un impact globalement négatif sur la qualité de l'enseignement de notre discipline.

Le Conseil de la société a désigné, lors de la réunion qui a suivi son renouvellement partiel, un vice-président et une commission chargés de traiter des questions relatives à l'enseignement.
Beaucoup de travail a été accompli récemment à ce niveau, notamment l'organisation du récent Colloque franco-finlandais « L'enseignement des mathématiques : à partir de l'enquête PISA » `http://smf.emath.fr/VieSociete/Rencontres/France-Finlande-2005/index.html`. Notre conviction que le débat ne doit surtout pas rester franco-français est sortie renforcée de cette rencontre.

Sur toute question portant sur l'orientation de la politique de la société, c'est naturellement au Conseil, seul organe élu directement par nos adhérents, qu'il revient de se prononcer. Sans prétendre atteindre du premier coup une vue exhaustive de la diversité des points de vue, le Conseil du 7 janvier prochain auditionnera plusieurs collègues à propos de l'état de l'enseignement des mathématiques dans notre pays et des remèdes qu'il convient d'y apporter. Il décidera des moyens à mettre en œuvre pour nous permettre de mener un vrai débat, condition indispensable pour parvenir à reconstruire une pensée collective de notre communauté sur cette question fondamentale.

Le 13 décembre 2005
Marie-Françoise Roy

Vie de la société

Adhésion gratuite en 2006 pour les docteurs de 2005

Pour la seconde année consécutive, la SMF offre une adhésion gratuite aux docteurs de mathématique qui en font la demande. Voir `http://smf.emath.fr/Adhesions/JeunesDocteurs/JeunesDocteurs2005.pdf` Pensez à en informer les personnes concernées.

Promenades mathématiques

Les Promenades mathématiques, co-organisées par la Société Mathématique de France et l'association Animath, regroupent un ensemble de conférences de vulgarisation destinées à présenter de façon accessible des idées importantes des mathématiques. Les Promenades ont à la fois vocation à proposer des conférences et à en faciliter l'organisation.
`http://smf.emath.fr/MathGrandPublic/PromenadesMathematiques/`

Remise du Prix Audin le 8 décembre

Toutes les information sur le Prix de Mathématiques Maurice Audin se trouvent sur le site de la SMF `http://smf.emath.fr/InfoDiverses/PrixMauriceAudin/`
Les deux lauréats de l'année 2005 sont Brahim Mezerdi et Didier Smets.

Veiller à la parité

La SMF s'est associée au mouvement de dénonciation de la sous-représentation des femmes suscité par la composition du nouveau Conseil d'administration du CNRS. `http://smf.emath.fr/VieSociete/Divers/ComPresse28-10-2005.html`

Rencontres organisées par la SMF

Notre journée scientifique annuelle, sur le thème **Mathématiques et Physique** a eu lieu le vendredi 21 octobre 2005 à Strasbourg `http://smf.emath.fr/VieSociete/JourneeAnnuelle/2005/`.

À l'occasion du dixième anniversaire de la *Revue d'histoire des mathématiques*, une journée consacrée à « **L'histoire des mathématiques aujourd'hui : professionnalisation et diversité** » a été organisée le 15 octobre à l'Institut Henri Poincaré, `http://smf.emath.fr/VieSociete/Rencontres/RHM10-2005.html`.

MATHÉMATIQUES

Principe local-global en arithmétique

David Harari[1]

Introduction

Considérons un système d'équations

$$f_i(x_1, ..., x_n) = 0 \qquad i = 1, ..., r \tag{1}$$

où les f_i sont des polynômes à coefficients dans $\mathbf{Z}$. Décider si ce système possède une solution en nombres entiers est une question en général très difficile. Les travaux de Davis, Putnam, Robinson et Matjasevic dans les années soixante ont du reste montré que ce problème était essentiellement indécidable [2].

Au lieu de considérer les solutions en nombres entiers, on peut s'intéresser aux solutions à valeurs dans le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels. Si les polynômes f_i sont homogènes, on ne considère que les solutions non triviales (i.e. différentes de $(0, ..., 0)$), et la question de l'existence d'une telle solution sur $\mathbf{Q}$ ou sur $\mathbf{Z}$ est bien sûr la même.

On peut aussi reformuler ces questions en termes géométriques. Dans le cas d'une famille de polynômes f_i quelconques, il s'agit de déterminer si la *variété algébrique affine* définie par le système (1) possède un point entier, ou encore un point rationnel. Dans le cas d'une famille de polynômes homogènes, ces polynômes définissent une *variété algébrique projective*, et on se demande si cette variété possède un point rationnel.

Faute d'une méthode générale pour résoudre ces questions, il est naturel de chercher des conditions nécessaires, et la première idée consiste à utiliser des congruences. Voici un exemple classique, dû à Fermat :

Proposition. — *Soit m un entier de la forme $m = 4^r(8s + 7)$ avec r et s entiers > 0. Alors l'équation*

$$x^2 + y^2 + z^2 = m$$

n'a pas de solutions rationnelles.

---

[1] Université Paris-Sud Orsay

[2] Pour une formulation plus précise de ce résultat, on pourra par exemple se reporter à [20].

Démonstration. S'il y avait une solution rationnelle, il y aurait une solution entière non triviale (en chassant les dénominateurs) pour l'équation

$$(8s+7)t^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Quitte à diviser x, y, z, t par un même nombre, on peut alors supposer qu'ils sont premiers entre eux dans leur ensemble. On regarde ensuite l'équation modulo 4 : dans $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, les carrés sont 0 et 1 ; ainsi t ne peut être pair sinon $x^2+y^2+z^2$ serait divisible par 4 ce qui impliquerait que x, y, z soient tous pairs, en contradiction avec l'hypothèse. Mais si t est impair, alors $(8s+7)t^2$ est congru à -1 modulo 8 et $x^2+y^2+z^2$ aussi, ce qui est impossible car les carrés de $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ sont $0, 1, 4$. □

La méthode précédente peut se généraliser : pour trouver une condition nécessaire d'existence d'une solution rationnelle d'un système d'équations polynomiales, on se ramène à une équation en nombres entiers, et on essaie ensuite d'utiliser des congruences modulo $\mathbf{Z}/p^j\mathbf{Z}$ pour un certain nombre premier p (ou plusieurs) et des entiers positifs j. Pour formuler plus commodément ces conditions, on a recours aux *corps p-adiques* ; c'est ce qui donne naissance aux *conditions locales* qui font l'objet du paragraphe suivant.

Les conditions locales

Le langage des corps p-adiques a été inventé par Hensel à la fin du XIX^e^ siècle. Soit p un nombre premier. On définit l'*anneau des entiers p-adiques* $\mathbf{Z}_p$ comme le complété de l'anneau $\mathbf{Z}$ pour la topologie associée à la valeur absolue p-adique : $|\, x\,|_p = p^{-v_p(x)}$, où $v_p(x)$ est la *valuation p-adique* de x, c'est-à-dire l'entier naturel r tel que p^r divise x et p^{r+1} ne divise pas x (par convention $v_p(0) = +\infty$). Plus explicitement, l'anneau $\mathbf{Z}_p$ est la *limite projective* sur les entiers $n \geqslant 1$ des $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ (un élément de $\mathbf{Z}_p$ est donc une suite (x_n) avec $x_n \in \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, telle que l'image de x_{n+1} par la surjection canonique $\mathbf{Z}/p^{n+1}\mathbf{Z} \to Z/p^n\mathbf{Z}$ soit x_n, ceci pour tout n). Le *corps p-adique* $\mathbf{Q}_p$ est le corps des fractions de $\mathbf{Z}_p$, ou encore le complété de $\mathbf{Q}$ pour la valeur absolue $|\ .\ |_p$. Pour plus de détails sur les propriétés des corps p-adiques, on pourra se référer à [27] ou [4]. Ces corps sont appelés des corps *locaux*, tout comme le corps des réels $\mathbf{R}$ qui est le complété de $\mathbf{Q}$ pour la valeur absolue usuelle. Par opposition, le corps $\mathbf{Q}$ est appelé un corps *global*. On pose par commodité $\mathbf{Q}_\infty = \mathbf{R}$, et on note $\mathcal{P}$ l'ensemble de tous les nombres premiers.

Il est alors équivalent de dire qu'un système d'équations polynomiales a une solution dans $\mathbf{Z}_p$ ou qu'il a une solution dans $\mathbf{Z}/p^j\mathbf{Z}$ pour tout entier $j \geqslant 1$. De même les conditions nécessaires de congruence pour avoir une solution rationnelle correspondent à l'existence de solutions (ou de solutions non triviales si on travaille avec des polynômes homogènes) dans $\mathbf{Q}_p$. Pour résumer :

Proposition. — *Une condition nécessaire (mais pas toujours suffisante) pour qu'un système d'équations polynomiales (resp. polynomiales homogènes) à coefficients dans $\mathbf{Q}$ ait une solution (resp. une solution non triviale) rationnelle est qu'il ait une solution (resp. une solution non triviale) dans tous les $\mathbf{Q}_p$, pour $p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}$.*

Ces *conditions locales* sont plus agréables à manipuler que les conditions de congruence modulo $\mathbf{Z}/p^j\mathbf{Z}$ car d'une part on n'a pour chaque p qu'un corps p-adique à considérer, d'autre part travailler sur un corps est plus commode qu'avoir à calculer dans des anneaux qui ne sont pas intègres. En outre, décider si les conditions locales sont vérifiées pour un système donné est un processus *fini*. En effet le très important résultat suivant permet souvent de réduire la question de l'existence d'une solution dans $\mathbf{Q}_p$ à une solution dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$:

Théorème (Lemme de Hensel). — *Soit*

$$f_i(x_1, ..., x_n) = 0 \qquad 1 \leqslant i \leqslant r$$

un système d'équations polynomiales à coefficients dans $\mathbf{Z}$ *(ou même* $\mathbf{Z}_p$*). Alors si la réduction modulo* p *de ce système* [3] *possède une solution* **non singulière** *dans* $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$*, le système possède une solution dans* $\mathbf{Z}_p$.

Ici, solution non singulière (ou *lisse*) signifie que la matrice des dérivées partielles $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ est de rang maximal (i.e. de rang $\inf(r, n)$) en cette solution ; s'il n'y a qu'une équation, ceci correspond au fait qu'au moins une dérivée partielle ne s'annule pas. En langage géométrique, le lemme de Hensel signifie : si la réduction modulo p d'une $\mathbf{Z}_p$-variété possède un point lisse sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, alors la variété possède un $\mathbf{Z}_p$-point (qui est forcément lisse). Voici un exemple classique d'application du lemme de Hensel :

Proposition. — *Soient* p *un nombre premier distinct de* 2 *et* a, b, c *trois entiers relatifs non divisibles par* p*. Alors l'équation* $ax^2 + by^2 = c$ *possède une solution dans* $\mathbf{Z}_p$.

Démonstration. La réduction modulo p de cette équation s'écrit $\bar{a}x^2 + \bar{b}y^2 = \bar{c}$, avec $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ non nuls dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Mais cette dernière équation admet une solution dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (pour le voir, on peut par exemple compter le nombre de carrés dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$: il y en a $\frac{p+1}{2}$, donc au moins un élément de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est à la fois de la forme $\bar{a}x^2$ et $\bar{c} - \bar{b}y^2$). Une telle solution est nécessairement non singulière, car le seul point où les deux dérivées partielles s'annulent est $(0, 0)$, qui n'est pas solution. On applique alors le lemme de Hensel. $\square$

Le lemme de Hensel se démontre par le même algorithme que celui de la méthode de Newton pour les équations réelles (voir [27], II.2.2 pour une preuve détaillée). Il possède des raffinements qui permettent de toujours ramener la question de l'existence d'une $\mathbf{Q}_p$-solution à un processus fini. D'autre part, pour un système d'équations à coefficients entiers « raisonnable » [4], l'existence de points non singuliers modulo p est automatique pour presque tout p. Ainsi, vérifier les conditions locales est en pratique facile. Par exemple pour une équation quadratique $ax^2 + by^2 = c$ comme ci-dessus, seuls les p qui divisent $2abc$ sont à considérer d'après la proposition . D'autre part la condition « à l'infini » d'existence de solutions réelles est satisfaite si et seulement si a,b, et $-c$ ne sont pas tous du même signe.

Mentionnons enfin que tout ce qui précède se généralise aisément au cas d'un corps de nombres quelconques k (c'est-à-dire d'une extension finie du corps $\mathbf{Q}$, par exemple $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$...). On fait intervenir les complétés du corps k pour

[3] Noter que comme $\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, la réduction modulo p d'un entier p-adique dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ a un sens.

[4] « Raisonnable » correspond au fait que la variété algébrique associée soit *géométriquement intègre* ; les estimées de Lang-Weil donnent alors que pour p assez grand, l'existence d'un point modulo p est garantie.

ses diverses valeurs absolues ; un nombre fini d'entre elles sont *archimédiennes* (correspondant aux plongements réels et complexes de k), les autres sont *non archimédiennes* (ou *finies*), correspondant aux valuations définies par les idéaux premiers de l'anneau des entiers de k. Les « conditions locales » signifient qu'on a l'existence de solutions dans chaque complété k_v de k, et le lemme de Hensel marche de manière analogue. Pour un corps de nombres k, on a ainsi à considérer l'ensemble de toutes ses *places*, i.e. l'ensemble de ses valeurs absolues modulo équivalence des distances qu'elles définissent.

La question est bien sûr maintenant de savoir s'il y a des cas où les conditions locales d'existence d'une solution sont suffisantes pour avoir une solution « globale » (à valeurs dans le corps de nombres sur lequel on travaille). Nous allons voir des exemples et contre-exemples au paragraphe suivant.

Du local au global

L'un des premiers résultats (et peut-être le plus célèbre) de passage du local au global est le théorème suivant, démontré dans toute sa généralité par Hasse en 1924 (pour une preuve complète sur $\mathbf{Q}$, on pourra consulter [27], IV.3) :

Théorème (Hasse-Minkowski). — *Soit $q(x_1, ..., x_n)$ une forme quadratique sur un corps de nombres k. Alors elle possède un zéro non trivial si et seulement si elle possède un zéro non trivial dans tous les complétés de k.*

En langage géométrique, le théorème signifie qu'une quadrique projective sur un corps de nombres k qui a des points dans tous les complétés de k possède un point rationnel [5] (c'est-à-dire un point défini sur k). Le cas $n = 3$ est dû à Legendre. Le point le plus difficile consiste à passer du cas $n = 3$ au cas $n = 4$, le cas $n \geqslant 5$ résultant ensuite d'un argument de fibration (que nous retrouverons plus tard dans un contexte plus général). On constate d'ailleurs que les problèmes de passage du local au global en arithmétique sont souvent d'autant plus difficiles que le nombre de variables est petit. Du reste, si $n \geqslant 5$, l'existence de points locaux aux places finies est automatique pour une quadrique en n variables ; du coup il suffit dans ce cas pour avoir l'existence d'un point rationnel de vérifier l'existence d'un point aux complétés réels de k, ce qui est très facile.

Un autre exemple connu de Hasse où le principe local-global vaut est celui de certaines équations *normiques*. Plus précisément soit K/k une extension *cyclique* (i.e. galoisienne de groupe de Galois cyclique) de corps de nombres, fixons une base $(\omega_1, ..., \omega_r)$ du k-espace vectoriel K. On peut alors considérer l'équation :

$$N_{K/k}(x_1\omega_1 + ... + x_r\omega_r) = a \tag{2}$$

où a est une constante de k^*, et les $x_1, ..., x_r$ sont les variables ; ici $N_{K/k}(.)$ est la norme de K à k, c'est-à-dire l'application qui à un élément x de K associe le déterminant de la multiplication par x dans le k-espace vectoriel K.

---

[5] Attention ici à la terminologie (classique mais quelque peu trompeuse) : point rationnel ne saurait signifier point défini sur $\mathbf{Q}$ puisque la quadrique elle-même n'est définie que sur une extension k de $\mathbf{Q}$.

Théorème (Hasse, 1924). — *Pour une extension cyclique K/k, l'équation (2) possède une solution dans k si et seulement si elle en possède une dans tous les complétés de k.*

Autrement dit un élément qui est une norme partout localement est une norme globale. Ce résultat est une conséquence de la théorie du corps de classes global (cf. [4], VII).

Par analogie avec les résultats précédents, on dira qu'une classe de variétés algébriques [6] lisses (i.e. sans point singulier) satisfait le *principe de Hasse* si pour toute variété dans cette classe, les conditions locales (existence d'un point dans tous les complétés de k) impliquent l'existence d'un point rationnel. Par exemple on a vu que les quadriques projectives satisfaisaient le principe de Hasse.

Rappelons que deux variétés X et Y sont k-birationnelles si elles possèdent respectivement des ouverts denses (pour la topologie de Zariski) U et V, avec U isomorphe (au-dessus de k) à V. Par exemple l'espace affine $\mathbf{A}_k^n$ et l'espace projectif $\mathbf{P}_k^n$ sont k-birationnels, une quadrique possédant un point rationnel est k-birationnelle à l'espace projectif (on dit qu'elle est k-rationnelle). Deux variétés sont k-birationnelles si et seulement si leurs *corps de fonctions* sont isomorphes (cf. [17], I.4).Si on travaille avec des variétés projectives et lisses sur k, alors le principe de Hasse est un *invariant k-birationnel* (s'il vaut pour une variété, il vaut pour toutes les variétés qui lui sont k-birationnelles), c'est donc une propriété dépendant seulement du corps des fonctions de la variété. Ce fait résulte de deux points importants : le théorème des fonctions implicites p-adique (qui dit que si une variété X possède un point lisse dans un complété k_v de k, tout ouvert Zariski-dense de X possède aussi un tel point), et le lemme de Lang-Nishimura qui dit que l'existence d'un k-point est un invariant k-birationnel des variétés projectives et lisses (ceci sur tout corps k).

Ceci étant, on peut se demander s'il existe des contre-exemples au principe de Hasse (pour des variétés lisses). C'est effectivement le cas, comme Hasse lui-même l'avait remarqué, pour des équations normiques analogues à (2), quand l'extension K/k n'est pas cyclique, mais par exemple galoisienne de groupe de Galois $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$. Avec $k = \mathbf{Q}$ et $K = \mathbf{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{17})$, on obtient que -1 est une norme partout localement, mais n'est pas une norme globale (cf. [4], exercice 5.3). Plus tard, des contre-exemples furent trouvés pour des courbes de genre 1 (indépendamment par Reichardt et Lind vers 1940), puis par Swinnerton-Dyer pour les surfaces projectives lisses cubiques (1962). Ce dernier résultat est déjà plus surprenant car sur $\bar{k}$, une surface cubique lisse est birationnelle à l'espace projectif ; pourtant, il existe même des contre-exemples pour des surfaces cubiques « diagonales », comme celui-ci (dû à Cassels et Guy en 1966) :

$$5x^3 + 9y^3 + 10z^2 + 12t^3 = 0$$

Ces contre-exemples peuvent souvent s'expliquer par des lois de réciprocité venant de la théorie des nombres, par exemple la loi de réciprocité quadratique

[6] Implicitement dans cet article, nous supposerons les variétés *géométriquement intègres* ; cette propriété signifie grosso modo que quand on regarde la variété sur la clôture algébrique $\bar{k}$, elle ne se décompose pas en union d'un nombre fini de variétés plus petites.

(cf. [27], I.3) ou ses généralisations, comme la suite exacte suivante, valable pour une extension cyclique (disons de degré n) K/k de corps de nombres :

$$1 \to k^*/NK^* \to \bigoplus_v k_v^*/NK_v^* \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \to 1 \tag{3}$$

où la somme directe est prise sur tous les complétés k_v de k, N désigne la norme de K à k, ou de $K_v = K \otimes_k k_v$ à k_v, et la flèche de droite est une application de réciprocité donnée par la théorie du corps de classes local. Cette suite exacte (qui vient du corps de classes global) donne un peu plus que le résultat de Hasse sur les équations normiques : pour une extension cyclique, un élément est une norme globale si et seulement s'il est une norme locale en toutes les places à l'exception possible d'une.

Indiquons comment une telle loi de réciprocité peut être utilisée pour montrer qu'une variété est un contre-exemple au principe de Hasse, en considérant l'exemple suivant dû à Iskovskih (1970) :

$$y^2 + z^2 = (3 - x^2)(x^2 - 2) \tag{4}$$

On se limite à l'ouvert lisse U de cette $\mathbf{Q}$-variété défini par $y^2 + z^2 \neq 0$. Posons $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$. Une étude locale facile montre que U a des points dans tous les complétés de $\mathbf{Q}$. Mais en utilisant le fait que $y^2 + z^2$ est une norme de l'extension K/k, on voit que si on pose $f(x) = (x^2 - 2)$, alors pour tout $\mathbf{Q}_p$-point M_p de U avec $p \neq 2$ (incluant $p = \infty$), on a $f(M_p)$ norme de l'extension $K_p/\mathbf{Q}_p$, où $K_p = K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_p$. Par contre pour $p = 2$, on obtient que $f(M_p)$ ne peut pas être une norme de $K_p/\mathbf{Q}_p$. Par conséquent, il ne peut y avoir de point rationnel M dans U, sinon la classe du rationnel $f(M)$ dans $\mathbf{Q}^*/NK^*$ contredirait la suite exacte (3).

Il est logique d'essayer de trouver un cadre général permettant d'expliquer tous ces contre-exemples. Une approche particulièrement fructueuse a été introduite par Manin en 1970, dans son exposé au Congrès international. Elle consiste à faire intervenir le *groupe de Brauer* de la variété.

Groupe de Brauer et principe de Hasse

Soit X une variété algébrique lisse sur un corps k. Son groupe de Brauer (cohomologique) $\mathrm{Br}\, X$ est défini par le biais de la cohomologie étale de la variété X (cf. [21], IV) : il s'agit du deuxième groupe de cohomologie étale à valeurs dans le faisceau $\mathbf{G}_m$. Pour ceux qui ne sont pas familiarisés avec la cohomologie étale, il nous suffira dans cet exposé de connaître les propriétés suivantes du groupe de Brauer :

– Pour une variété réduite à un point sur un corps k, le groupe de Brauer s'identifie à $\mathrm{Br}\, k$, groupe de Brauer du corps k qu'on peut définir classiquement comme les classes d'équivalence d'algèbres simples centrales sur k ([26], X.4 et X.5) munies du produit tensoriel. En particulier $\mathrm{Br}\, k = 0$ si k est un corps fini ou un corps algébriquement clos.

– Si X est une variété lisse, le groupe $\mathrm{Br}\, X$ est un sous-groupe du groupe de Brauer $\mathrm{Br}\,(k(X))$ du corps des fonctions $k(X)$ de X (il correspond aux éléments *non ramifiés*, voir [7]).

– Le groupe de Brauer définit un foncteur contravariant des k-variétés vers les groupes abéliens. En particulier si une k-variété X possède un point dans une extension K de k, on a une application d'évaluation [7] en ce point : $\mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, K$. On peut notamment appliquer ceci quand k est un corps de nombres et $K = k$ ou K est un complété k_v de k.

– Pour un corps de nombres k et l'un de ses complétés k_v, on dispose d'un homomorphisme injectif $j_v : \mathrm{Br}\, k_v \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (l'*invariant local*) qui est un isomorphisme pour v finie. Pour une place réelle v on a $\mathrm{Br}\, k_v = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et pour une place complexe $\mathrm{Br}\, k_v = 0$. On a également la loi de réciprocité globale donnée par la suite exacte (dont (3) est un cas particulier)

$$0 \to \mathrm{Br}\, k \to \bigoplus_v \mathrm{Br}\, k_v \xrightarrow{\sum j_v} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to 0 \tag{5}$$

Notons d'ailleurs que l'injectivité dans cette suite exacte correspond au fait que les *variétés de Severi-Brauer* vérifient le principe de Hasse. Une variété de Severi-Brauer de dimension $n-1$ sur un corps k est une variété qui devient isomorphe à l'espace projectif sur la clôture algébrique $\bar{k}$ de k. À une telle variété X est associé un élément de n-torsion de $\mathrm{Br}\, k$ ([26], X.6), qui est nul si et seulement si X possède un k-point. Le cas $n = 2$ correspond aux coniques.

L'idée de Manin est la suivante : soit X une k-variété projective et lisse possédant un point rationnel M, on note M_v le k_v-point de X correspondant à M. Soit $\alpha \in \mathrm{Br}\, X$. Alors la famille des évaluations $(\alpha(M_v)) \in \bigoplus_v \mathrm{Br}\, k_v$ (la somme directe[8] étant prise sur tous les complétés de k) provient de $\mathrm{Br}\, k$ (par fonctorialité) puisque (M_v) provenait d'un même point rationnel M. On a donc, d'après (5) :

$$\sum_v j_v(\alpha(M_v)) = 0 \tag{6}$$

Si une famille de points locaux (M_v) satisfait cette condition pour tout $\alpha \in \mathrm{Br}\, X$, on dit qu'elle satisfait les *conditions de Manin*. A contrario, cela signifie que si pour toute famille de points locaux $(M_v)_{v\in\Omega}$ (où Ω désigne l'ensemble de toutes les places du corps de nombres k), il existe un $\alpha \in \mathrm{Br}\, X$ tel que $\sum_v j_v(\alpha(M_v)) \neq 0$, alors X **ne peut pas avoir de point rationnel**. C'est ce qu'on appelle l'*obstruction de Manin* (ou de Brauer-Manin) au principe de Hasse.

Notons que le contre-exemple d'Iskovskih (4) rentre dans cette catégorie. Dans ce cas l'élément α de $\mathrm{Br}\, X$ utilisé est le *symbole de Hilbert* $(a, f(x))$ (dans le groupe $\mathrm{Br}\,(k(X))$ il correspond à l'algèbre de quaternions engendrée par $(1, i, j, k)$ avec les relations $ij = -ij = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$, $i^2 = -1$, $j^2 = a$, $k^2 = f(x)$; c'est un cas particulier d'algèbre simple centrale, qui est d'ordre 2 dans le groupe de Brauer). Sur tout corps K de caractéristique $\neq 2$, un symbole de Hilbert (a, b) est nul si et seulement si b est une norme de l'extension $K(\sqrt{a})/K$ (le symbole (a, b) correspond, en termes de variété de Severi-Brauer, à la conique projective

[7] Dans le langage de la géométrie algébrique, un K-point correspond à un morphisme de schémas $\mathrm{Spec}\, K \to X$, d'où par contravariance une flèche $\mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, K$, vu que le groupe de Brauer du schéma $\mathrm{Spec}\, K$ est $\mathrm{Br}\, K$.

[8] Il y a ici une subtilité : le fait que la variété soit projective implique que la somme est finie parce que le groupe de Brauer de l'anneau des entiers de k_v est nul ; les spécialistes reconnaîtront un argument de bonne réduction.

$y^2 - az^2 - bt^2 = 0$). Ainsi la loi de réciprocité générale (5) s'identifie dans ce cas particulier à (3).

Dans son texte du Congrès international [19], Manin démontre l'important résultat suivant :

Théorème (Manin, 1970). — *Soit X une courbe projective lisse de genre 1* [9] *sur un corps de nombres k. Supposons que le groupe de Tate-Shafarevitch de la jacobienne de X soit fini. Alors si X possède une famille de points locaux $(M_v)_{v\in\Omega}$ satisfaisant (6) pour tout $\alpha \in \mathrm{Br}\, X$, elle possède un point rationnel.*

Rappelons que la *jacobienne* d'une courbe X de genre 1 est une courbe elliptique E, i.e. une courbe projective lisse donnée par une équation homogène du type $y^2 t = P(x, y, t)$ avec P polynôme homogène de degré 3. Sur la clôture algébrique $\bar{k}$, X et E sont isomorphes (la différence étant que X ne possède pas forcément de point rationnel). Le *groupe de Tate-Shafarevitch* d'une courbe elliptique E correspond aux classes d'isomorphismes de courbes de genre 1 de jacobienne E qui ont des points dans tous les complétés. On conjecture qu'il est toujours fini (ce problème est fortement relié à la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, qui vaut un million de dollars...).

La preuve du théorème précédent repose essentiellement sur le théorème de dualité de Cassels-Tate pour la cohomologie galoisienne des courbes elliptiques ([3]). Par la suite, les contre-exemples classiques (vus au paragraphe précédent) au principe de Hasse ont tous pu être expliqués par l'obstruction de Manin. De ce fait, beaucoup de travaux depuis une trentaine d'années ont consisté non pas à démontrer que des classes de variétés vérifient le principe de Hasse (ce qui arrive finalement relativement rarement une fois sorti des cas très particuliers), mais plutôt que l'obstruction de Manin au principe de Hasse est la seule pour certains types de variétés (ce qui est bien plus fréquent).

Cas où l'obstruction de Manin est la seule

Mentionnons d'abord une autre propriété qui est très liée au principe de Hasse : soit X une variété algébrique lisse sur un corps de nombres k, possédant un point rationnel. On dit que X vérifie l'*approximation faible* si pour tout ensemble fini S de places de k et toute famille de points locaux $(M_v)_{v\in S}$ (chaque M_v étant un point de X défini sur le complété k_v), on peut trouver un point rationnel M de X arbitrairement proche des M_v pour $v \in S$; autrement dit l'ensemble $X(k)$ des points rationnels est dense dans l'ensemble $\prod_{v\in\Omega} X(k_v)$ pour la topologie produit des topologies v-adiques.[10] Par exemple l'espace affine ou projectif vérifie l'approximation faible (pour la droite affine, c'est un théorème classique en théorie de nombres), tandis qu'une courbe elliptique ne la vérifie jamais.

Tout comme pour le principe de Hasse, le groupe de Brauer permet de définir une obstruction (dite obstruction de Manin) à l'approximation faible, introduite par Colliot-Thélène et Sansuc dans les années 70 : une famille de point locaux

[9] ou plus généralement un espace principal homogène sous une variété abélienne de groupe de Tate-Shafarevitch fini

[10] Si on demande en plus des propriétés d'intégralité du point M aux autres places de k, on obtient la notion d'*approximation forte*, que nous ne discuterons pas ici ; les deux notions coïncident pour une variété projective.

$(M_v)_{v\in\Omega}$ ne peut pas être dans l'adhérence de $X(k)$ si elle ne vérifie pas, pour tout élément α de $\mathrm{Br}\,X$, l'égalité (6), à cause de la loi de réciprocité (5). On dira que l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour X si l'ensemble $X(k)$ des points rationnels est dense dans l'ensemble des points de $\prod_{v\in\Omega} X(k_v)$ qui vérifient (6) pour tout α de $\mathrm{Br}\,X$. C'est par exemple le cas si X est une courbe elliptique (ou plus généralement une variété abélienne) de groupe de Tate-Shafarevitch fini, et dont les points rationnels sont denses dans $X(k_v)$ pour toute place archimédienne[11] v ([33]).

Il semble raisonnable de penser que l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour des variétés dont la géométrie est relativement « simple », plus précisément pour celles (dites rationnelles) qui deviennent birationnelles à l'espace projectif sur la clôture algébrique de k (Colliot-Thélène et Sansuc ont notamment conjecturé ce résultat pour les surfaces rationnelles). Par exemple le cas des surfaces cubiques et des intersections de deux quadriques dans $\mathbf{P}^4_k$ ou $\mathbf{P}^5_k$ font partie des problèmes les plus difficiles et les plus fondamentaux du domaine. Notons aussi que pour une intersection complète (par exemple une hypersurface) lisse de dimension au moins 3, l'obstruction de Manin s'évanouit automatiquement ; il n'empêche que pour démontrer des résultats de principe de Hasse pour de telles variétés, on est parfois obligé de faire intervenir des variétés de dimension plus petite (notamment pour les méthodes de fibration, cf. plus bas) pour lesquelles l'obstruction de Manin va intervenir.

Voici quelques cas où l'on a établi que l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule (on pourra se réferer à [6] ou [22] pour d'autres exemples) :

– Surfaces de Châtelet (Colliot-Thélène, Sansuc, Swinnerton-Dyer, 1984-1987, [10]) ; elles sont données par des équations du type

$$y^2 - az^2 = P(x)$$

où a est une constante non nulle et P un polynôme de degré 4. Une application frappante de ce résultat est la description des rationnels qui peuvent s'écrire sous la forme $\alpha^2+\beta^2+\gamma^4$ avec α,β,γ rationnels. Le même article contient également beaucoup de résultats sur les intersections de deux quadriques dans l'espace projectif, notamment le fait que le principe de Hasse vaut pour les intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}^n_k$ si $n \geqslant 8$.

– Surfaces fibrées en coniques de degré 4 (Colliot-Thélène, Sansuc, Salberger, Skorobogatov, [5]) ou 3 (Salberger et Skorobogatov [24]). [12]

– Espaces principaux homogènes des groupes algébriques linéaires connexes (Sansuc, 1981 [25]).

– Plus généralement, espaces homogènes des groupes algébriques linéaires semi-simples, à stabilisateurs connexes ou abéliens (Borovoi, [1], [2]).

[11] Cette condition sur les places archimédiennes vient de ce que l'évaluation $\alpha(M_v)$ pour v archimédienne est la même pour tous les points M_v qui sont dans la même composante connexe de $X(k_v)$; autrement dit les conditions de Manin ne disent pas grand chose aux places réelles, et rien du tout aux places complexes.

[12] Pour une surfaces fibrée en coniques, le nombre de fibres dégénérées (non géométriquement intègres) est $8-d$, où d est le degré ; le problème est a priori d'autant plus difficile que d est petit, mais dans le cas $d=3$, l'existence d'un point rationnel est automatique. Le travail de Salberger et Skorobogatov concerne donc l'approximation faible.

Il y a principalement deux méthodes pour établir ces énoncés (certains sont d'ailleurs obtenus en combinant les deux) :

– La *méthode des fibrations* consiste à écrire la variété X à laquelle on s'intéresse comme fibrée au-dessus d'une base B vérifiant l'approximation faible (par exemple l'espace projectif). Si les fibres vérifient le principe de Hasse (resp. l'approximation faible), on espère pouvoir montrer la même chose pour l'espace total X. Ceci marche bien quand toutes les fibres sont géométriquement intègres et la base B est projective parce que grâce aux estimées de Lang-Weil, il existe dans cette situation un ensemble fini de places S en dehors duquel presque toutes les fibres ont des points locaux. Les premières applications subtiles de cette méthode remontent à [10]. Une version plus compliquée de la méthode des fibrations consiste à supposer seulement que l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour les fibres, et à en déduire la propriété analogue pour X. Les hypothèses requises dans ce cadre sont plus délicates ; nous renvoyons le lecteur à [13] pour plus de détails.

– La *méthode de descente* consiste à utiliser l'absence d'obstruction de Manin pour ramener la question du principe de Hasse (ou de l'approximation faible) sur X à des variétés auxiliaires (dites de descente) de dimension plus grande mais de géométrie plus simple. Les fondements théoriques de cette méthode, due à Colliot-Thélène et Sansuc ([9]) sont assez complexes. On en trouvera un bon exposé dans [30]. Elle a par exemple été appliquée avec succès aux surfaces de Châtelet [10] (les variétés auxiliaires étant ensuite traitées par fibration).

Je ne parlerai pas dans cet article de la méthode du cercle, qui permet également d'établir des résultats de principe de Hasse et d'approximation faible, avec en plus des estimations quantitatives. Son inconvénient est qu'elle nécessite en général que le nombre de variables soit grand par rapport au degré, elle est donc peu adaptée aux variétés de petite dimension. Citons quand même le bel article de Skinner ([28]), et celui de Heath-Brown et Skorobogatov en 2002 sur les équations normiques ([18]) qui est le premier à combiner méthode de la descente et méthode du cercle.

Mentionnons enfin un très important résultat de Swinnerton-Dyer (2001, [32]) : il a établi le principe de Hasse pour les surfaces cubiques diagonales sur $\mathbf{Q}$ (moyennant la finitude du groupe de Tate-Shafarevitch des courbes elliptiques) lorsqu'une condition « proche » de celle de Manin est vérifiée. Il en a déduit (par une méthode de fibration simple) le principe de Hasse pour toute hypersurface cubique diagonale de dimension $\geqslant 3$ (toujours sous l'hypothèse sur le groupe de Tate-Shafarevitch). La preuve de ce théorème (trop complexe pour être exposée ici) est basée sur une stratégie qui s'est révélée très fructueuse, introduite par Colliot-Thélène, Skorobogatov et Swinnerton-Dyer dans l'article [11] (paru en 1998). Elle a aussi été appliquée avec succès en 2005 à certaines surfaces de Kummer ([31]). Si on suppose en plus l'*hypothèse de Schinzel* (une généralisation du théorème de la progression arithmétique de Dirichlet), cette technique donne également des résultats pour des familles plus générales de courbes de genre 1 ([11]) ; tout récemment O. Wittenberg ([34]) a pu établir, sous les deux conjectures ci-dessus, le principe de Hasse pour toute intersection lisse de deux quadriques dans $\mathbf{P}^5_k$ (il a également obtenu des résultats partiels si on remplace $\mathbf{P}^5_k$ par $\mathbf{P}^4_k$). En comparant avec le résultat (inconditionnel) de Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer pour les intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}^8_k$, on retrouve le fait que les problèmes de principe de Hasse sont d'autant plus difficiles que la dimension est petite.

Au-delà de l'obstruction de Manin

Le titre de ce dernier paragraphe est emprunté à l'article fondateur [29]. Bien qu'il ne soit pas raisonnable de penser que l'obstruction de Manin au principe de Hasse soit la seule pour toute variété projective et lisse sur un corps de nombres, il a fallu attendre plus de 25 ans après l'article de Manin pour qu'un contre-exemple soit donné par Skorobogatov. Plus précisément, il a montré le

Théorème (Skorobogatov, 1997). — *Il existe une surface bielliptique X sur $\mathbf{Q}$ telle que X possède une famille de points locaux (M_v) vérifiant les conditions de Manin, mais X ne possède pas de point rationnel.*

Une *surface bielliptique* est le quotient du produit de deux courbes elliptiques par un groupe fini agissant sans point fixe (dans l'exemple de Skorobogatov, ce groupe est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$). La preuve du théorème repose encore sur la théorie de la descente : l'existence d'un point rationnel sur X impliquerait qu'une certaine famille de variétés auxiliaires (Y_i) (ce sont des espaces principaux homogènes sur X sous le groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$) ait la propriété que l'une d'elles a un point rationnel. Le fait que l'une de ces variétés ait des points dans tous les complétés de $\mathbf{Q}$ permet de montrer que l'obstruction de Manin au principe de Hasse s'évanouit pour X. Mais d'un autre côté, les (Y_i) qui ont des points partout localement sont des contre-exemples au principe de Hasse (venant de l'obstruction de Manin !). Ainsi, c'est une sorte de version « itérée » de l'obstruction de Manin qui est utilisée.

Quelque temps après, Skorobogatov et moi-même ([15]) avons développé une théorie de la descente utilisant des espaces principaux homogènes sur la variété considérée, sous des groupes non abéliens (alors que la théorie classique est étroitement reliée aux espaces principaux homogènes sous les tores ou les groupes finis abéliens). Cette théorie a conduit à des obstructions au principe de Hasse et à l'approximation faible formulées en termes de cohomologie galoisienne non-abélienne. Elle a permis de donner un cadre général pour le contre-exemple au principe de Hasse de Skorobogatov, et également pour les contre-exemples à l'approximation faible (basés sur le groupe fondamental géométrique) de [14]. Plus récemment, elle a aussi conduit ([16]) à la construction de contre-exemples à l'approximation faible non expliqués par le groupe de Brauer pour des surfaces d'Enriques (qui ne sont pourtant pas très loin des variétés rationnelles ; en particulier leur groupe fondamental géométrique est réduit à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$).

On ne connaît pas de contre-exemple inconditionnel au principe de Hasse qui ne soit pas expliqué par les obstructions ci-dessus. On pense qu'il en existe pour des hypersurfaces lisses de grand degré, mais on n'a pas pour l'instant de méthode pour attaquer ce problème. Une autre question ouverte consiste à déterminer si l'obstruction de Manin au principe de Hasse est la seule pour les courbes de genre $\geqslant 2$

(en supposant toujours la finitude du groupe de Tate-Shafarevitch de leur jacobienne). La question analogue en remplaçant « points rationnels » par « zéros-cycles de degré 1 » a une réponse positive [13] ([23], [8], ou encore [12] pour une preuve rapide). Dans une autre direction, on peut penser que les obstructions non-abéliennes permettront de construire des contre-exemples au principe de Hasse ou à l'approximation faible, non expliqués par les conditions de Manin, pour les espaces homogènes de groupes algébriques à stabilisateurs finis non-abéliens. Par exemple la propriété d'approximation faible pour le quotient $X = SL_n/G$, où G est un groupe fini est reliée, comme l'a remarqué Colliot-Thélène, au problème de Galois inverse : si X vérifie l'approximation faible en dehors d'un nombre fini de places du corps de nombres k, alors G est groupe de Galois sur k. Ce serait en particulier le cas si l'obstruction de Manin à l'approximation faible était la seule pour X, mais ce dernier point ne me semble pas très vraisemblable si le groupe G est quelconque (en particulier non résoluble).

Remerciements. Je tiens à remercier J.-L. Colliot-Thélène pour sa lecture attentive du manuscrit et ses pertinentes suggestions.

Références

[1] M. V. Borovoi : Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology, *Duke Math. J.* **72**, 217–239 (1993).
[2] M. V. Borovoi : The Brauer–Manin obstruction for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer, *J. reine angew. Math.* **473**, 181–194 (1996).
[3] J.W.S. Cassels : Arithmetic on curves of genus 1. VII. The dual exact sequence, *J. Reine Angew. Math.* **216**, 150–158 (1964).
[4] J.W.S. Cassels, A. Fröhlich : *Algebraic number theory*, Academic press, London and New-York, 1967.
[5] J.-L. Colliot-Thélène : Surfaces rationnelles fibrées en coniques de degré 4, in Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988–1989, éd. C. Goldstein, Progress in Math. Birkhäuser **91**, 43–55 (1990).
[6] J.-L. Colliot-Thélène : L'arithmétique des variétés rationnelles (exposé fait à l'occasion de la remise du prix Fermat), *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, vol. I,**3**, 295-336 (1992).
[7] J.-L. Colliot-Thélène : Birational invariants, purity and the Gersten conjecture, dans *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, 1–64, *Proc. Sympos. Pure Math.* **58**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
[8] J.-L. Colliot-Thélène : Conjectures de type local-global sur l'image des groupes de Chow dans la cohomologie étale, in *Algebraic K-theory* (Seattle, WA, 1997), Proc. Sympos. Pure Math. **67**, 1–12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
[9] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc : La descente sur les variétés rationnelles II, *Duke Math. J.* **54**, 375–492 (1987).
[10] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, Sir Peter Swinnerton-Dyer : Intersection of two quadrics and Châtelet surfaces, *J. reine angew. Math.* **373** 37–107 ; **374**, 72–168 (1987).
[11] J.-L. Colliot-Thélène, A.N. Skorobogatov, Sir Peter Swinnerton-Dyer : Hasse principle for pencils of curves of genus one whose Jacobians have rational 2-division points, *Invent. Math.* **134**, no. 3, 579–650 (1998).
[12] D. Eriksson, V. Scharaschkin : On the Brauer-Manin obstruction for zero-cycles, prépublication 2005.
[13] D. Harari : Méthode des fibrations et obstruction de Manin, *Duke Math. J.* **75**, 221–260 (1994).

[13] Colliot-Thélène a conjecturé que ceci se généralisait à toute variété projective et lisse.

[14] D. Harari : Weak approximation and non-abelian fundamental groups, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 4^e série, **33**, 467–484 (2000).
[15] D. Harari, A.N. Skorobogatov : Non-abelian cohomology and rational points, *Comp. Math.* **130** 241–273 (2002).
[16] D. Harari, A.N. Skorobogatov : Non-abelian descent and the arithmetic of Enriques surfaces, *Int. Math. Res. Notices*, à paraître.
[17] R. Hartshorne : *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin 1977.
[18] R. Heath-Brown, A.N. Skorobogatov : Rational solutions of certain equations involving norms, *Acta Math.* **189**, no. 2, 161–177 (2002).
[19] Yu. I. Manin : Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne, in *Actes du Congrès Intern. Math. (Nice 1970)*, Tome **1**, 401-411, Gauthiers-Villars, Paris 1971.
[20] Y. Matiyasevic : Diophantine representation of recursively enumerable predicates, in *Actes du Congrès Intern. Math.* (Nice, 1970), Tome 1, pp. 235–238. Gauthier-Villars, Paris, 1971.
[21] J. S. Milne : *Étale Cohomology*, Princeton Univ. Press, Princeton N.J. 1980.
[22] E. Peyre : Obstructions au principe de Hasse et à l'approximation faible, Séminaire Bourbaki, Vol. 2003/2004. Astérisque **299**, 2005.
[23] Shuji Saito : Some observations on motivic cohomology of arithmetic schemes, *Invent. Math.* **98**, 371–404 (1989).
[24] P. Salberger, A. N. Skorobogatov : Weak approximation for surfaces defined by two quadratic forms, *Duke Math. J.* **63**, 517–536 (1991).
[25] J.-J. Sansuc : Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres, *J. reine angew. Math.* **327**, 12–80 (1981).
[26] J.-P. Serre : *Corps Locaux*, Hermann, Paris 1968.
[27] J.-P. Serre : *Cours d'arithmétique*, PUF, Paris 1970.
[28] C. Skinner : Forms over number fields and weak approximation, *Compositio Math.* **106**, no. 1, 11–29 (1997).
[29] A. N. Skorobogatov : Beyond the Manin obstruction, *Inv. Math.* **135**, 399–424 (1999).
[30] A. N. Skorobogatov : *Torsors and rational points*, Cambridge Univ. Press, 2001.
[31] A. N. Skorobogatov, Sir Peter Swinnerton-Dyer : 2-descent on elliptic curves and rational points on certain Kummer surfaces, à paraître dans *Adv. in Math.*
[32] Sir Peter Swinnerton-Dyer : The solubility of diagonal cubic surfaces, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **34**, no. 6, 891–912 (2001).
[33] L. Wang : Brauer-Manin obstruction to weak approximation on abelian varieties, *Israel J. Math.* **94** (1996), 189–200.
[34] O. Wittenberg : Principe de Hasse pour les surfaces de Del Pezzo de degré 4, thèse de l'Université de Paris-Sud, 2005.

© Ivan Cori

J.-C. Yoccoz lors de sa conférence du 13 avril 2005
à la Bibliothèque nationale de France

Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré

Jean-Christophe Yoccoz

Nous remercions Jean-Christophe Yoccoz de nous avoir autorisé à publier ce texte qui correspond à sa conférence donnée à la Bibliothèque nationale de France le 13 avril 2005 dans le cadre du cyle « Un texte, un mathématicien ». La Gazette *105 avait présenté ce cycle de conférences organisé par la SMF et la BnF en partenariat avec France Culture et la revue* Tangente. *Le succès de ces manifestations a encouragé les organisateurs à renouveler l'expérience cette année, qui débutera le 11 janvier 2006 avec une conférence d'Yves Meyer*[1].

> *« ... For, in respect to the latter branch of the supposition, it should be considered that the most trifling variation in the facts of the two cases might give rise to the most important miscalculations, by diverting thoroughly the two courses of events, very much as, in arithmetic, an error which, in its own individuality, may be inappreciable, produces, at length, by dint of multiplication at all points of the process, a result enormously at variance with truth. ... »*
>
> *Edgar Allan Poe*
> *The mystery of Marie Roget, 1843*

> *« ... Car, relativement à la dernière partie de la supposition, on doit considérer que la plus légère variation dans les éléments des deux problèmes pourrait engendrer les plus graves erreurs de calcul, en faisant diverger absolument les deux courants d'événements ; à peu près de la même manière qu'en arithmétique une erreur qui, prise individuellement, peut être inappréciable, produit à la longue, par la force accumulative de la multiplication, un résultat effroyablement distant de la vérité ... »*
>
> *Trad. Charles Baudelaire, 1864*

La citation précédente est sans doute une des premières descriptions de ce qui a, beaucoup plus récemment, été baptisé d' « effet papillon », l'idée qu'à cause du caractère instable des évolutions dynamiques associées au système météorologique, le battement d'ailes d'un papillon pourrait sur le long terme être à l'origine de tempêtes et autres cataclysmes. Dans la bouche du chevalier Dupin, c'est à la logique d'une enquête policière plutôt qu'à la météorologie qu'est associée ce phénomène.

Le héros de notre histoire, Henri Poincaré (1854-1912) naît à Nancy, 11 ans après la parution de la nouvelle de Poe. Reçu premier à l'École polytechnique, il soutient en 1879 une thèse dont une des parties, le « *Mémoire sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles* », annonce une des directions que prendront ses recherches. Après un bref passage à Caen, il est de retour à Paris

[1] Tous les renseignements nécessaires se trouvent à l'adresse : `http://smf.emath.fr/BNF/2006/`

dès 1881 et occupera à la Sorbonne à partir de 1886 une chaire de « Physique mathématique et Calcul des probabilités ».

Henri Poincaré est le plus grand mathématicien de son temps, l'un des 4 ou 5 plus importants de tous les temps. Son œuvre s'étend aussi à la physique. Avec Lorentz et Einstein, il est le codécouvreur de la théorie de la relativité restreinte. Par ailleurs, ses textes de philosophie des sciences exercent encore aujourd'hui une influence considérable. Son œuvre proprement mathématique est immense, de la géométrie à l'analyse et la topologie. Il est aussi le fondateur de la théorie des systèmes dynamiques ; c'est à cette partie de ses travaux que se rattache l'épisode qui nous intéresse ici.

Stockholm est certainement l'une des plus belles villes du monde, tout particulièrement au printemps où l'éclosion de la nature et la mer partout présente y créent une atmosphère exceptionnelle. À quelques kilomètres du centre, Djürsholm abrite au bord d'un bras de mer de splendides résidences, dont l'Institut Mittag-Leffler. Cet institut, avec la superbe bibliothèque autour duquel il s'organise, était il y a un siècle la demeure de Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), le second personnage de notre histoire. C'est aujourd'hui l'un des hauts lieux de la recherche mathématique en Europe.

Mittag-Leffler fut un mathématicien de tout premier ordre, spécialiste d'analyse complexe, disputant avec le chimiste Alfred Nobel la première place dans le monde scientifique suédois de l'époque. Après un doctorat à Uppsala, il a voyagé à Paris, Berlin, Gottingen, collaborant avec Hermite, Weierstrass, Schering. Il a fondé au début des années 1880 la revue « *Acta Mathematica* », qui est toujours aujourd'hui l'une des trois ou quatre revues les plus prestigieuses en mathématiques au plan international.

Mittag-Leffler a su convaincre le roi Oscar de Suède et de Norvège (1829-1907) de soutenir financièrement la fondation d'Acta. Le roi, qui a été lui-même étudiant à Uppsala, est un mécène généreux pour l'activité scientifique. Mittag-Leffler propose donc au souverain de financer un prix qui célèbrerait son 60^e^ anniversaire.

Le jury est constitué de Mittag-Leffler lui-même, de Charles Hermite (1822-1901) et de Karl Weierstrass (1815-1897). La prééminence de ces deux mathématiciens de la génération précédente au sein des écoles française et allemande garantit au prix une large audience.

L'annonce officielle est faite à la mi 1885 ; la date limite de soumission est fixée au 1^er^ juin 1888. Le mémoire vainqueur sera publié dans les « *Acta mathematica* », et récompensé d'une médaille d'or accompagnée de 2 500 couronnes (le salaire annuel de Mittag-Leffler est de 7 000 couronnes). Les candidats peuvent traiter l'un des 4 sujets proposés, ou un sujet libre de leur choix. Sur les 12 mémoires reçus, 6 se prévalent de cette possibilité, tandis que 5 se rattachent au premier sujet proposé, le problème des n corps en mécanique céleste.

Hermite a contribué à la fondation des « Acta Mathematica ». Poincaré a été étudiant de Hermite, il a publié un article dans chacun des 5 premiers volumes de la revue. Il connaît Mittag-Leffler et n'a pas fait mystère de sa volonté de participer au concours. Malgré l'anonymat des soumissions, Mittag-Leffler n'a pas grand mal à identifier son collègue français comme l'auteur d'un mémoire qui se détache très nettement du lot. Ce mémoire, intitulé « Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique » fait très rapidement l'unanimité du jury. Le résultat est proclamé le 20 janvier 1889. L'autre mémoire distingué par le jury est l'œuvre de Paul Appell et porte sur le développement en séries trigonométriques des fonctions abéliennes.

Le mémoire de Poincaré aurait dû être publié dans les « *Acta mathematica* » en octobre 1889. Il en sera autrement...

Lars Phragmen (1863-1937) est un jeune mathématicien suédois que Mittag-Leffler a chargé de la lecture détaillée des mémoires soumis. À la suite de ses commentaires, le mémoire de Poincaré, long de 160 pages initialement, s'est enrichi de 90 pages de notes supplémentaires. Vers juillet 1889, Mittag-Leffler transmet à Poincaré une demande d'éclaircissement de Phragmen. Poincaré s'aperçoit que les objections de Phragmen sont fondées, et découvre en reprenant le corps de son argumentation qu'il a commis une erreur sérieuse dans une autre partie du texte. Début décembre, il annonce à Mittag-Leffler que la rectification de l'erreur nécessite des changements substantiels dans son mémoire.

Craignant peut-être pour sa réputation scientifique, qui est moins établie que celle de Weierstrass, Hermite ou Poincaré lui-même, Mittag-Leffler récupère discrètement les quelques exemplaires du mémoire initial qu'il avait distribués à un cercle restreint de mathématiciens et astronomes. Il obtient de Poincaré que celui-ci règle les frais d'impression du mémoire initial, soit 3 500 couronnes, 1 000 de plus que le montant du prix. La version révisée, longue de 270 pages, est prête en avril 1890 et paraîtra dans les « *Acta mathematica* » en novembre 1890.

Voilà pour les circonstances historiques, pour lesquelles le livre de June Barrow-Green cité en référence[2] m'a été précieux. Venons-en au contenu scientifique de l'épisode : je vais essayer d'expliquer l'erreur de Poincaré, la découverte à laquelle la rectification de cette erreur l'a mené, et le retentissement de cette découverte sur les mathématiques d'aujourd'hui.

Il faut d'emblée affirmer que même si l'on retranche au mémoire tout ce qui touche à l'erreur et à sa révision, le contenu en reste extraordinairement riche. Poincaré lui-même en développera les idées dans les trois tomes des « *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* », qui paraîtront entre 1892 et 1899, et marqueront une refondation complète du domaine. On trouve aussi, dans la première partie du mémoire, ce qu'on appelle aujourd'hui le théorème de récurrence de Poincaré ; ce résultat constitue l'acte fondateur de la théorie ergodique, branche cousine des systèmes dynamiques. Erreur ou pas, le prix était amplement mérité. Mais de tout ceci, je ne vais pas parler.

Un système dynamique, c'est un espace des phases avec une équation d'évolution ; les points de l'espace des phases décrivent les états possibles du système considéré ; l'équation d'évolution gouverne les changements d'états sur le court terme. Le but de la théorie est de comprendre l'évolution sur le long terme.

Souvent, un état peut-être déterminé par un nombre fini de paramètres et l'équation d'évolution est une équation différentielle décrivant la variation infinitésimale de ces paramètres. Poincaré, dès ses premiers travaux dans le domaine, va introduire un changement de point de vue fondamental. Ses prédécesseurs traitaient les équations différentielles comme des équations, et cherchaient à en représenter les solutions par des formules toujours plus sophistiquées. Poincaré va

[2] Réf. : June Barrow-Green, *Poincare and the three-body problem (1997), AMS-LMS History of mathematics, Vol. 11.*

s'apercevoir que, pour la plupart des équations différentielles, on ne peut disposer d'aucune formule raisonnable. Il va traiter les équations différentielles comme des objets géométriques, une révolution conceptuelle qui ouvre des perspectives complètement inédites. C'est dans cet esprit que j'ai complètement évité les formules dans ce qui suit.

La mécanique céleste traite du mouvement des corps célestes — étoiles, planètes, satellites naturels ou artificiels, astéroïdes...— sous l'action de la gravitation classique, à l'exclusion de tous autres phénomènes physiques. La loi de gravitation universelle de Newton stipule que la force d'attraction mutuelle de deux corps est proportionnelle à chacune de leurs masses, et inversement proportionnelle au carré de leur distance.

Dans le problème des n corps, les corps célestes sont assimilés à des masses ponctuelles sans diamètre. L'état du système est donc déterminé par les trois coordonnées de position et les trois coordonnées de vitesse de chacun des corps : l'espace des phases est de dimension égale à $6n$; l'équation d'évolution est l'équation différentielle du second ordre qui traduit la loi de gravitation universelle.

Lorsqu'il y a seulement 2 corps, il n'est pas difficile de résoudre ces équations. Les solutions en ont en fait été découvertes par Kepler par l'observation céleste plus d'un siècle avant que Newton n'écrive ses équations. Chacun des corps parcourt une ellipse, le centre de masse occupant un des foyers de ces ellipses homothétiques ; l'aire parcourue par le rayon joignant le centre de masse à l'un des corps est balayée à vitesse constante (on peut avoir aussi une hyperbole ou une parabole au lieu d'une ellipse, mais les corps s'échappent alors à l'infini).

La situation considérée par Poincaré dans son mémoire est le problème restreint des trois corps, le cas le plus simple après celui de deux corps. Dans ce problème restreint, on fait les hypothèses suivantes. On suppose d'abord que l'un des corps, appelons-le m, est de masse nulle. Il n'influence donc en rien le mouvement des deux autres corps, appelons-les m_1 et m_2 , mais subit l'attraction gravitationnelle de ces corps. On suppose de plus que les corps m_1 et m_2, dont le mouvement doit obéir aux lois de Kepler, se déplacent à vitesse uniforme sur des cercles concentriques (dont le centre est le centre de gravité de ces deux corps). On cherche à comprendre la trajectoire du corps m, et on ne s'intéresse qu'aux trajectoires contenues dans le même plan que celles de m_1 et m_2. On suppose enfin que le rapport des masses de m_2 et m_1 est faible ; on note μ ce petit paramètre.

Pour déterminer l'état du système, il faut connaître les deux coordonnées de position et les deux coordonnées de vitesse du corps m dans le plan où se déroule le mouvement. L'espace des phases est donc de dimension 4. Le plus simple est en fait de se placer dans un repère tournant qui accompagne la rotation uniforme des corps m_1 et m_2. Dans ce repère, ces deux corps deviennent immobiles, ce qui simplifie l'écriture des forces de gravitation, mais introduit un terme correspondant à la force de Coriolis. Néanmoins, le système d'équations différentielles obtenu a la forme générale, dite hamiltonienne, associée à la plupart des systèmes d'origine mécanique ; une conséquence fondamentale de cette propriété est la conservation au cours du temps d'une certaine fonction, le hamiltonien, calculable à partir de l'état du système. Cela veut dire que les solutions, qui sont des courbes dans l'espace des phases paramétrées par le temps, sont tracées sur les hypersurfaces (de dimension 3) représentant les différents niveaux possibles du hamiltonien (dans les situations classiques de la mécanique, le hamiltonien n'est rien d'autre que l'énergie totale du système).

Fixons le niveau du hamiltonien. Nous avons donc une hypersurface de dimension 3 sur laquelle sont tracées des courbes paramétrées par le temps. Dans cette hypersurface, Poincaré considère une surface Σ (de dimension 2) transverse à la famille de courbes. Les équations d'évolution se traduisent par une transformation T de cette surface Σ dans elle-même : étant donné un point x de Σ, on considère la courbe solution passant par x à l'instant 0 et on désigne par $T(x)$ le premier point où cette courbe solution rencontre à nouveau Σ. Il s'agit donc à présent de comprendre les itérations successives de cette transformation T de la surface Σ. On est passé d'une dynamique à temps continu en dimension 3 à une dynamique à temps discret en dimension 2.

Lorsque le paramètre μ, rapport des masses de m_2 et m_1, est nul, il est facile d'analyser complètement la dynamique. Le corps m_1 est immobile à l'origine et le corps m, ne subissant pas l'attraction de m_2 décrit une ellipse (ou une hyperbole, ou une parabole ; mais c'est le cas de l'ellipse qui nous intéresse dans la suite) dont l'origine est un foyer. Dans le repère tournant, cette ellipse présente un mouvement de rotation apparent traduisant la rotation uniforme de m_2 autour de l'origine. Il y a donc superposition de deux mouvements périodiques : la rotation du grand axe de l'ellipse (dans le repère tournant) à une vitesse angulaire uniforme et le déplacement sur l'ellipse du corps m en balayant les aires à vitesse uniforme (deuxième loi de Kepler). Les périodes des deux mouvements sont indépendantes et en général incommensurables : le mouvement dans son ensemble n'est alors pas périodique. On dit que le système est *complètement intégrable* et que la dynamique correspondante est *quasipériodique*.

Pour la dynamique de la transformation T sur la surface Σ, cela se traduit de la façon suivante. La surface Σ est feuilletée par un système de courbes fermées ; chacune de ces courbes est invariante par la transformation T ; de plus, chacune de ces courbes peut être paramétrée par une coordonnée angulaire de façon que la transformation T s'exprime comme une rotation dans cette coordonnée. L'angle de cette rotation dépend de la courbe considérée, et correspond au rapport des périodes des deux mouvements périodiques dans le cas du temps continu. Lorsque cet angle compté en nombre de tours, est un nombre rationnel, chaque point de la courbe est périodique sous l'action de T. Lorsqu'au contraire cet angle est irrationnel, et c'est le cas pour la plupart des courbes, les images successives d'un point de la courbe forment un ensemble dense dans la courbe.

Que se passe-t-il lorsque le paramètre μ n'est pas nul, mais simplement très petit ? Dans quelle mesure va-t-on retrouver certains des aspects du cas $\mu = 0$? Poincaré analyse d'abord le cas des orbites périodiques. Considérons pour fixer les idées le cas d'une courbe de Σ, invariante par T lorsque $\mu = 0$, pour laquelle l'angle de la rotation induite par T s'annule. Tous les points de cette courbe sont donc fixés par T lorsque $\mu = 0$. Lorsque μ est petit mais non nul, Poincaré montre que seul un nombre fini de points (très voisins de cette courbe) sont encore fixés par T, et correspondent donc à des orbites périodiques pour le système en temps continu (dans le repère tournant).

Une analogie avec un système mécanique plus simple, le pendule, est utile. On considère le mouvement dans un plan vertical d'une barre rigide fixée à une de ses extrémités. En l'absence de pesanteur (correspondant au cas $\mu = 0$ pour le problème restreint des 3 corps), on a un mouvement de rotation uniforme ; en particulier toutes les positions sont des positions d'équilibre. Par contre, en présence de pesanteur, il n'y a plus que deux positions d'équilibre. La position verticale basse est un équilibre stable, la perturbation de cet équilibre conduit à de petites oscillations. La position verticale haute est un équilibre instable ; si, à un temps infiniment lointain dans le passé, la barre s'éloigne de cet équilibre avec une vitesse infiniment petite, elle effectuera un tour complet pour revenir à l'équilibre à un temps infiniment lointain dans le futur avec une vitesse infiniment faible. Ce comportement remarquable est qualifié de doublement asymptotique par Poincaré ; le vocabulaire moderne est homocline.

Revenons aux points fixés par la transformation T sur la surface Σ. Poincaré montre que la moitié d'entre eux sont stables et l'autre moitié sont instables, au moins au niveau infinitésimal. Le passage de la stabilité infinitésimale à la stabilité locale ne sera obtenu que vers 1960 grâce aux succès de la théorie KAM (pour Kolmogoroff-Arnold-Moser) ; ce n'est pas ici notre sujet. Poincaré étudie de plus près les points fixes instables. Pour chacun de ces points fixes, Poincaré démontre qu'il existe une courbe remarquable tracée sur Σ passant par ce point fixe, dite stable ou positivement asymptotique, caractérisée par la propriété suivante : quand on itère la transformation T à partir d'un point de cette courbe, la suite de points obtenue ainsi converge vers le point fixe. Il existe de même une courbe, dite instable ou négativement asymptotique, caractérisée par la propriété duale : quand on itère l'inverse T^{-1} de la transformation T à partir d'un point de cette courbe, la suite de points obtenue ainsi converge vers le point fixe. Chacune de ces courbes est invariante sous l'action de la transformation T. Dans l'exemple du pendule pesant, les trajectoires homoclines associées à l'équilibre instable constituent à la fois la courbe stable et la courbe instable (il y a deux trajectoires homoclines suivant le sens de rotation du tour effectué).

Les courbes positivement et négativement asymptotiques des points fixes instables de la transformation T coïncident-elles, comme c'est le cas pour le pendule pesant ? Dans le cas du pendule pesant, outre un calcul direct, un argument de portée plus générale est le suivant : on a affaire à une dynamique en temps continu dans un espace des phases bidimensionnel ; le théorème d'unicité des solutions d'équations différentielles garantit alors que les deux courbes asymptotiques sont égales dès qu'elles se rencontrent (en un point distinct du point fixe auquel elles sont associées).

Poincaré va chercher à déterminer la position de ces courbes positivement et négativement asymptotiques, en effectuant des développements par rapport aux puissances successives du petit paramètre μ (plus exactement, de la racine carrée de μ). Dans la version initiale du mémoire, il montre que les deux courbes coïncident au premier ordre en $\sqrt{\mu}$; il affirme aussi que les développements en les puissances successives de $\sqrt{\mu}$ sont convergents. Dans la version corrigée du mémoire, il montre que les deux courbes coïncident à tous les ordres en $\sqrt{\mu}$; si les développements étaient effectivement convergents, cela permettrait évidemment de conclure que les deux courbes sont égales. Hélas, la convergence, qu'il pensait être conséquence de principes généraux valables dans des situations similaires, n'a pas lieu : lui-même le montrera dans la version corrigée !

On peut penser que Poincaré, en rédigeant la version initiale du mémoire, avait vérifié que les deux courbes coïncident à tous les ordres en $\sqrt{\mu}$ et donc (convaincu qu'il était alors de la convergence des développements) qu'elles étaient égales. Pour éviter le calcul délicat de ce développement à tous les ordres, il va chercher un raccourci en complétant le calcul (facile) au premier ordre en $\sqrt{\mu}$ par un argument de nature topologique. À la base de cet argument se trouve la propriété que T préserve les aires, propriété héritée de la nature hamiltonienne du système initial. L'argument montre effectivement que les deux courbes doivent se rencontrer (en un point distinct du point fixe instable). En temps continu, pour le pendule pesant, cela implique que les deux courbes coïncident. Mais pas en temps discret, comme c'est le cas pour la transformation T !

En résumé, les arguments, grâce auxquels Poincaré pensait initialement pouvoir conclure que les courbes positivement et négativement asymptotiques coïncident, permettent seulement de prouver que ces courbes se rencontrent en des points distincts des points fixes auxquels elles sont associées. En général, en ces points d'intersection, les droites tangentes aux deux courbes sont distinctes ; les trajectoires correspondantes sont dites homoclines transverses.

Quand on cherche, comme Poincaré lui-même l'a fait, à tracer dans toute leur extension des courbes positivement et négativement asymptotiques présentant des intersections homoclines transverses, on s'aperçoit rapidement que le fait que ces courbes soient invariantes par la transformation T force une géométrie d'une complexité redoutable. Si Poincaré est bien conscient de cette complexité, il reviendra aux successeurs de Poincaré, George D. Birkhoff (1884-1944) et Steve Smale (né en 1930) de commencer à l'analyser.

Un des outils conceptuels fondamentaux, introduit par Alexandre Liapounov (1857-1918), est la mesure du taux de divergence (ou convergence) exponentielle des trajectoires au niveau infinitésimal. Pour le pendule pesant, cette divergence est toute entière concentrée au point d'équilibre instable. En présence de points d'intersections homoclines transverses, cette divergence exponentielle va se manifester pour toutes les trajectoires correspondant aux points d'intersection. C'est une telle divergence exponentielle qui caractérise les dynamiques de type chaotique qui sont à la base de l' « effet papillon ».

Le fer à cheval de Smale est un modèle simplifié de la transformation T où l'on est capable de décrire complètement le système d'intersections homoclines transverses associé à un point fixe instable. Un codage géométrique simple permet d'associer à chaque point d'intersection des courbes positivement et négativement asymptotiques une suite de 0 et de 1 (paramétrée par les entiers relatifs, et ne comportant qu'un nombre fini de 1). Inversement, toute suite de 0 et de 1 ayant ces propriétés est associés à un point d'intersection. La suite associée à l'image $T(x)$ d'un point d'intersection x est simplement la suite associée à x décalée d'un cran vers la gauche. Quand on ne considère que la partie de la suite paramétrée par les entiers positifs ou nuls (cela revient à se concentrer sur l'évolution future en oubliant le passé), le passage de x à $T(x)$ revient à multiplier par 2 le nombre dont la suite tronquée est le développement binaire : on retrouve la citation de Poe...

Malgré tous les progrès accomplis depuis une cinquantaine d'années dans notre analyse des systèmes dynamiques chaotiques (hyperboliques est le terme généralement utilisé par les mathématiciens), on aurait tort de croire que le problème restreint des 3 corps est aujourd'hui compris de façon satisfaisante. Une question centrale de la théorie des systèmes dynamiques, et qui est complètement ouverte à l'heure actuelle, est la suivante : choisissons au hasard un point de la surface Σ, et observons son orbite par les itérations successives de la transformation T. Y-a-t-il une probabilité non nulle (sur le choix du point initial) pour qu'on observe le long de cette orbite une divergence exponentielle des orbites au niveau infinitésimal ? La théorie KAM mentionnée auparavant nous garantit qu'à l'inverse il y a une probabilité non nulle de ne **pas** observer de divergence exponentielle car la dynamique de l'orbite sera de nature quasipériodique...

Un texte, un mathématicien

Devant le succès rencontré l'an dernier, la SMF et la BnF ont décidé de poursuivre l'expérience. Un cycle de 4 conférences de mathématiques est organisé en 2006, elles s'adressent au grand public ainsi qu'aux enseignants des collèges-lycées, étudiants et lycéens.

C'est à la Bibliothèque nationale de France, les mercredis à 18h30, (site F. Mitterrand, Grand auditorium, Hall Est) Quai François-Mauriac, à Paris dans le 13e arr.

Date des conférences :

11 janvier Y. Meyer – *Pourquoi Henri Lebesgue essayait de mesurer les surfaces, et n'y arrivait pas ?*
15 mars É. Ghys – *Henri Poincaré et le monde non euclidien*
05 avril M. Audin – *Le cas de Sophie Kowaleskaya*
10 mai É. Bayer-Fluckiger – *Hermann Minkowski, grand prix de l'Académie des sciences à 18 ans*

Pour plus de détails voir la page web : `http://smf.emath.fr/BNF/2006/`

PROMENADES MATHÉMATIQUES

« Je n'y avais jamais pensé, c'est vraiment très bien, nous sommes vraiment contents de pouvoir vous accueillir... » Cette phrase, quiconque d'entre nous ayant eu une fois l'occasion de se rendre dans un établissement scolaire pour y présenter une conférence de mathématiques devant des élèves l'a forcément entendue avant même le début de son exposé. Il faut dire que, pour les enseignants de mathématiques, les possibilités concrètes de présenter la discipline à leurs élèves sous un jour moins scolaire sont peu nombreuses : rien d'étonnant, donc, à ce qu'ils soient ravis quand une occasion se présente.

C'est pour créer ces occasions que nous avons conçu les « promenades mathématiques ». Il s'agit d'un catalogue de conférences de vulgarisation des mathématiques, en ligne (http://smf.emath.fr/MathGrandPublic/PromenadesMathematiques/) depuis novembre 2005, destiné à faciliter l'organisation de conférences à toutes les périodes de l'année, dans toute la France, dans des établissements tels que collèges, lycées, universités, mais aussi médiathèques et comités d'entreprises. Initiées conjointement par la SMF et l'association Animath et avec le soutien du CNRS, les promenades mathématiques ont pour vocation de gérer l'offre et la demande de conférences, ainsi que de fédérer les différentes initiatives existantes au niveau local qui vont dans le même sens. Plus largement, les promenades mathématiques veulent impulser un mouvement de fond en faveur de la vulgarisation des mathématiques, notamment par le biais d'actions de formation à la vulgarisation, par exemple auprès des doctorants dans le cadre des CIES.

Nous lançons donc un appel à contributions, à la fois pour l'offre et pour la demande. Commençons par l'offre : une première vague de sollicitations nous a permis de disposer, en à peine quelques semaines, d'une banque d'une quarantaine de titres et de résumés de conférences. Cela a rendu très rapidement possible la mise en ligne d'un premier catalogue, et nous remercions tous les collègues sollicités d'avoir répondu si vite et en si grand nombre. Nous n'en avons pas moins besoin d'étoffer encore le catalogue. À vous tous qui savez l'importance de faire découvrir les mathématiques sous un jour moins scolaire, nous vous demandons de nous envoyer des propositions de conférences : un titre, un résumé, le niveau scolaire de la conférence, ainsi qu'éventuellement les besoins en matériel, une délimitation géographique (pour ceux souhaitant éviter de trop grands déplacements) et une référence bibliographique si la conférence est déjà publiée sous une forme ou sous une autre. Les conférences peuvent être conçues selon des angles très différents, allant du jeu à la perspective historique en passant par des manipulations physiques ou informatiques. Elles peuvent aussi prendre la forme d'un exposé plus classique au cours duquel le conférencier motive le sujet qu'il introduit et explique un certain nombre de résultats tout en faisant sentir au public l'importance de la question abordée. Celle-ci peut être théorique aussi bien qu'appliquée, intellectuelle *aussi bien que concrète. Les conférences ne se limitent pas nécessairement à des sujets purement mathématiques, elles peuvent aussi donner un point de vue de mathématicien sur certains domaines comme la physique, la biologie, l'économie, les sciences humaines, l'art ou la littérature, entre autres.*

Second point, la demande : établissements scolaires et universitaires, rectorats, écoles d'ingénieurs, maisons des sciences ou de la culture, médiathèques, comités d'entreprises, clubs de mathématiques, journaux, magazines, revues spécialisées, sont autant de structures à informer, la médiatisation des promenades mathématiques étant une condition de leur succès. Aidez-nous à faire connaître le catalogue un peu partout, parlez-en autour de vous. C'est ainsi qu'ensemble nous contribuerons à diffuser davantage la culture mathématique auprès du plus grand nombre.

⋆ ⋆ ⋆

Le texte qui suit développe l'une des conférences du catalogue des « Promenades mathématiques », adaptée pour la *Gazette*. Il est pour partie constitué d'extraits de l'ouvrage *Le Fabuleux destin de* $\sqrt{2}$ (éditions Le Pommier, parution mars 2006).

Le Fabuleux destin de $\sqrt{2}$

Benoît Rittaud[1]

Au Panthéon des nombres

Il était une fois le Panthéon des nombres...

En son centre trône le nombre π, qui attire la plupart des regards. À la droite du maître on aperçoit le nombre d'or, $(1+\sqrt{5})/2$, réputé plus accessible. Viennent ensuite d'autres figures d'inégale importance : la base des logarithmes népériens (e), la constante d'Euler (γ), la constante d'Apéry ($\zeta(3)$)...

Dans ce tableau, c'est tout juste si l'on remarque la présence de la racine carrée de 2. Oh, bien sûr, tout visiteur régulier du Panthéon vous dira que, en tant que rapport de la diagonale du carré à son côté, $\sqrt{2}$ est une constante fondamentale de la géométrie. Souvent, il ajoutera doctement que c'est aussi le tout premier nombre dont l'irrationalité a été démontrée, par Pythagore en personne.

Si vous insistez encore, il éclairera votre lanterne en ces termes : « si $\sqrt{2}$ était rationnelle, alors on pourrait l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible de la forme p/q, donc on aurait $p^2 = 2q^2$, donc p^2 serait pair, donc p aussi et s'écrirait donc $2p'$, d'où $q^2 = 2p'^2$ et par le même raisonnement on obtiendrait que q serait pair, donc p et q seraient tous deux pairs contredisant l'hypothèse initiale que p/q est irréductible, d'où l'irrationalité de $\sqrt{2}$. »

En général, une fois que vous aurez accepté de dire que cette démonstration est élégante, vous serez prié de circuler pour aller voir ce qui se passe du côté des nombres transcendants ou des équations résolubles par radicaux. Aurions-nous

[1] Université Paris XIII

donc fait le tour de ce qu'il y a à dire sur la racine carrée de 2 ? On en est loin : la liste de toutes ses propriétés est d'une variété presque infinie. Peut-être est-ce précisément parce qu'elle constitue le pain quotidien des mathématiciens que ceux-ci en oublient de la regarder avec les mêmes yeux curieux qui leur font admirer les merveilles cachées et inattendues d'autres nombres.

La chasse aux décimales

De toutes les constantes mathématiques fondamentales, la racine carrée de 2 est probablement celle qui est connue depuis le plus longtemps. Quatre mille ans d'histoire nous séparent d'une tablette babylonienne, YBC 7289 (*Yale Babylonian Collection*), sur laquelle un scribe a dessiné un carré et ses diagonales, ainsi que la longueur du côté, celle de la diagonale et, surtout, le rapport entre les deux, évalué à $1;24,51,10$ en notation sexagésimale, soit environ $1,4142129$ (au lieu de $1,414213562\ldots$).

Mathematical exercice
to find diagonal of square,
using the square root of 2 (YBC 7289)

Une telle précision indique non seulement que les Babyloniens savaient que le rapport de la diagonale au côté est « un nombre qui, multiplié par lui-même, donne 2 », mais aussi qu'ils en connaissaient un algorithme de calcul. Ils ont ainsi fait de la racine carrée de 2 le nombre connu le plus précisément pendant plus de deux millénaires. Le nombre π, quant à lui, a dû attendre la fin du V^e siècle pour être connu avec une précision comparable, grâce au Chinois Tsu Ch'ung-Chih qui découvre l'approximation 355/113.

Sans être aussi énorme que celui associé aux décimales de π, le palmarès des chasseurs de décimales de $\sqrt{2}$ est tout de même très fourni, même s'il est à peu près inconnu. Le prestige des noms qui figurent sur ce palmarès, de Marcus Boorman (520 décimales en 1887, dont 315 exactes), à Horace Uhler (1542 décimales en 1951, toutes exactes) en passant par René Coutsal (1032 décimales en 1950, toutes exactes) n'est en rien comparable à celui d'Archimède, d'Al-Kashi, de Ludolph Van Ceulen ou de William Shanks, qui doivent tous au moins une partie de leur célébrité à leur calcul de nouvelles décimales de π. Et la gloire mathématique de François Viète ne doit guère aux 48 décimales de $\sqrt{2}$ qu'il a calculées...

Après le nombre π, la racine carrée de 2 est aujourd'hui le nombre connu avec le plus de précision, et ce pour une raison assez inattendue : le calcul de π est lié à celui de $\sqrt{2}$ dans beaucoup de formules. La méthode d'Archimède déjà permet de lier les deux constantes. Rappelons que cette méthode consiste à approcher la circonférence du cercle par les périmètres de polygones inscrits et circonscrits ; les formules d'Archimède lient les périmètres des polygones à n côtés à ceux des polygones à $2n$ côtés : en itérant les formules d'Archimède, on s'approche de la circonférence du cercle, et donc de π. Pour initialiser la récurrence, Archimède était parti d'hexagones, impliquant la racine carrée... de 3, mais certains chasseurs de décimales ont préféré partir du carré et de la racine carrée de 2 (c'est notamment le cas pour le célèbre record de Ludolph Van Ceulen). Depuis une trentaine d'années, après quelques siècles d'utilisation de séries entières, les records de décimales de π utilisent le plus souvent l'algorithme de Brent-Salamin (voir [10]) ou des formules dues à Jonathan et Peter Borwein. Toutes ces techniques font intervenir $\sqrt{2}$, « obligeant » ainsi les chasseurs de décimales de π à battre simultanément un record de décimales de $\sqrt{2}$!

L'irrationnelle

Bien sûr, l'histoire de $\sqrt{2}$ ne se réduit pas au calcul de ses décimales. Bien plus intéressant est le fait que la racine carrée de 2 est l'un des premiers nombres à avoir été repéré comme irrationnel. Contrairement à ce qu'on lit souvent, il n'y a toutefois aucune certitude définitive sur le fait que $\sqrt{2}$ aurait été « le tout premier nombre irrationnel », et encore moins que Pythagore serait l'auteur de la première démonstration (même si la découverte est l'œuvre de l'école pythagoricienne). Quant à savoir la méthode de démonstration employée, le flou est tout aussi total. Des variantes autour d'une même idée de base aux démonstrations radicalement différentes, on parvient sans peine à une liste de plus d'une vingtaine de façons élémentaires de se persuader du résultat. Voici par exemple ce qui est peut-être la plus belle démonstration arithmétique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, publiée par Richard Beigel (voir [4]) mais dont l'argument-clé se trouve déjà chez Euclide (*Éléments*, livre VII, proposition 29) : si p et q n'ont pas de facteur commun, alors p^2 et q^2 n'en ont pas non plus. En conséquence, si p/q est irréductible, alors p^2/q^2 l'est aussi, donc l'égalité $p^2/q^2 = 2$ impose $q = 1$, donc $p^2 = 2$, ce qui n'est clairement pas possible.

Se demander si $\sqrt{2}$ est ou non rationnelle n'a d'ailleurs rien de très naturel ; plus généralement, la distinction rationnel/irrationnel a parfois des relents d'arbitraire, parce qu'on écrit rarement, hors d'une pratique purement mathématicienne, les nombres sous forme d'une fraction. Le plus souvent, on utilise l'écriture décimale. Plutôt que de se demander si $\sqrt{2}$ est rationnel, on peut ainsi se demander si elle est décimale. La démonstration de ce que $\sqrt{2}$ ne s'écrit pas avec une quantité finie de chiffres après la virgule est certainement beaucoup plus simple et éclairante sur la notion de raisonnement par l'absurde que la démonstration habituelle de l'irrationalité : notons u le dernier chiffre d'un éventuel nombre décimal x égal à $\sqrt{2}$; en posant la multiplication de x par x, on voit que le dernier chiffre du résultat est égal au dernier chiffre de u^2 ; puisque $x^2 = 2$, le dernier chiffre de u^2 devrait être nul, alors qu'aucun nombre entre 1 et 9 n'a pour carré un nombre dont le dernier chiffre est 0.[2]

L'art diagonal

L'intérêt de la racine carrée de 2 déborde de loin ces considérations purement mathématiques. Se plonger dans le sujet montre que, sans exagération, la racine carrée de 2 est le nombre irrationnel dont l'utilité pratique est la plus importante de tous, ou au moins la plus variée. La liste des domaines extra-mathématiques dans lesquels la racine carrée de 2 a été, ou est encore, utilisée va de la musique à la philosophie et de la photographie à la théologie, en passant par la géométrie des ornements dans l'art islamique.

Une discipline qui en a été tout particulièrement friande est l'architecture. Vitruve déjà, au Ier siècle de notre ère, s'y intéresse dans le souci pratique de construire un carré d'aire double d'un carré donné. Ce problème, qui fait l'objet d'un célèbre passage d'un dialogue de Platon (*Ménon*), se résout en prenant la diagonale du carré initial. La nature géométrique de la solution s'impose à l'architecte puisque « l'on ne peut venir à bout [du problème] par multiplication, ni par aucune voie de nombres » ([15], livre IX, chapitre premier).

Vitruve attribue également à la racine carrée de 2, ou plus exactement au rapport $\sqrt{2}$, une valeur esthétique : pour lui, l'atrium d'une villa romaine se doit d'être rectangulaire, dans un rapport longueur/largeur qui ne peut prendre que trois valeurs : les deux premières sont 5/3 et 3/2, et « *la troisième est, quand d'icelle largeur se fait un carré parfait, puis qu'il se coupe d'une ligne Diagonale, dont l'étendue en est baillée pour longueur* ». (Même si la phrase a un délicieux parfum suranné, la façon moderne consistant à écrire « longueur/largeur $= \sqrt{2}$ » est quand même plus directe !)

Cette esthétique prêtée par Vitruve à la racine carrée de 2 inspire ensuite les architectes de la Renaissance, à la fois parce que, précisément, ils redécouvrent Vitruve, mais aussi parce qu'ils ont à cette époque le désir de faire en sorte que l'architecture soit considérée comme un art « noble », ce qui à l'époque n'est guère le cas. C'est en partie dans ce but qu'ils importent un vocabulaire issu de cet autre art noble qu'est la musique, science par excellence de l'harmonie des proportions. On sait depuis les pythagoriciens que les intervalles musicaux agréables à l'oreille se font à partir de sons dont les rapports des fréquences sont simples : 2/1 pour l'octave, 3/2 pour la quinte, desquels dérivent la gamme « de Pythagore ». À l'époque, donc, l'harmonie des proportions s'exprime systématiquement par des rapports rationnels[3]. La seule exception attestée concerne la racine carrée de 2, principalement en raison de sa présence dans le carré et pour sa propriété d'être la moyenne géométrique de 1 et de 2 (c'est-à-dire que $\sqrt{2}$ est le nombre x tel

---

[2] Ce raisonnnement se généralise à toute base entière b, fournissant ainsi une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ apparemment inédite. Notons tout de même que le cas de la base 10 est particulier ; le raisonnement général est plus long, car les choses se compliquent lorsque la base b possède des carrés parfaits comme diviseurs.

[3] Aujourd'hui, les nombres irrationnels ont fait leur apparition, dans notre « gamme bien tempérée », dans laquelle le *demi-ton* (rapport des fréquences de deux notes consécutives) est constant. Cette gamme contient douze notes entre un *do* et le *do* suivant, pour coller au plus près de la gamme de Pythagore ; le ton est donc donné par le rapport $\sqrt[12]{2}$. L'intervalle de rapport $\sqrt{2}$ est celui entre le *do* et le *fa*$\sharp$.

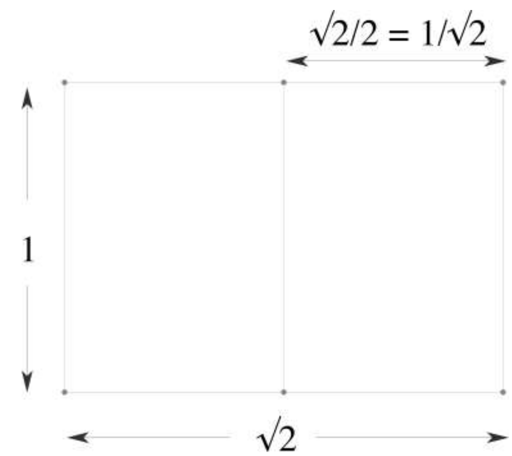
que $1/x = x/2$). Ainsi, des architectes aussi éminents qu'Andrea Palladio, Leon Battista Alberti, Francesco Di Giorgio ou encore Sebastiano Serlio évoquent tous ce rapport.

Faisons ici une courte digression pour indiquer que, contrairement à ce qui est encore trop souvent propagé, le nombre d'or ne semble avoir jamais, quant à lui, été l'objet d'une attention quelconque de la part des architectes de cette époque, y compris après la publication du fameux ouvrage de Luca Pacioli, *De Divina proportione*, sans doute le premier ouvrage entièrement dédié à un simple nombre. Pour les architectes de la Renaissance, le nombre d'or avait sans doute contre lui d'être irrationnel, ce qui ne cadrait pas avec la vision de l'époque de l'idée d'harmonie.

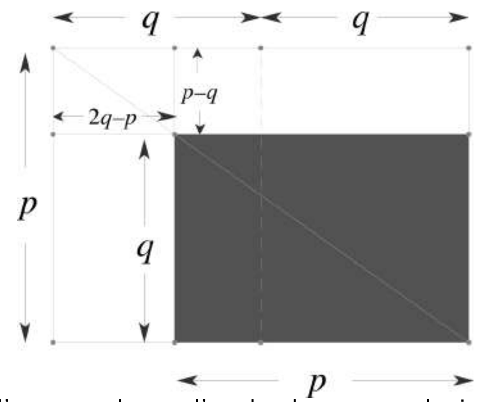
Ce point n'en rend que plus remarquable la présence si fréquente de $\sqrt{2}$ dans les écrits et les réalisations des architectes de la Renaissance. Selon l'historien Rudolf Wittkower (voir [16]), $\sqrt{2}$ est le seul irrationnel à avoir eu droit de cité dans l'architecture de l'époque. Par exemple, Palladio, dans ses *Quatre livres de l'architecture*, indique que pour dimensionner l'atrium du couvent de la charité, à Venise, il a « tâché de faire que cette maison fût semblable à celle des anciens » et que, pour cela, il y a construit « un avant-logis Corinthien, la longueur duquel a la diagonale de son carré » (livre II, chapitre VI). Cette « proportion diagonale », selon la dénomination de Serlio, se retrouve aussi bien dans le dimensionnement des colonnes doriques chez Alberti que dans la forme des lots de terre autour du Capitole dans les prescriptions du président américain Thomas Jefferson, grand amateur d'architecture ([9]).

Les formats de papier

Une utilisation plus proche de nous de la racine carrée de 2 concerne les formats de papier que nous utilisons quotidiennement. La propriété fondamentale d'une feuille de la série A (comme le A4, le plus courant, de 21 cm de large et de $29,7$ cm de long) est qu'en la pliant en deux dans le sens de la longueur, on obtient un rectangle homothétique au premier.



C'est un exercice très simple que de montrer que le seul rapport longueur/largeur disposant de cette propriété est $\sqrt{2}$, la « proportion diagonale » de Serlio, que le peintre Paul Sérusier, au début du XX^e siècle, appelait quant à lui la « porte d'harmonie ». En particulier, donc, le rapport $29,7/21$ est une approximation de $\sqrt{2}$.[4] En passant, cette propriété des « rectangles diagonaux » fournit une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (apparemment inédite dans sa version géométrique ci-dessous) : supposons $\sqrt{2} = p/q$ avec p et q les plus petits possibles et considérons deux rectangles identiques de longueur p et de largeur q, collés l'un à l'autre par l'un de leurs grands côtés. Parce que ces rectangles sont diagonaux, le grand rectangle qu'ils constituent ensemble, et qui a pour dimensions $2q$ et p, est lui aussi diagonal.



Faisons pivoter d'un quart de tour l'un des deux rectangles initiaux pour le placer au coin inférieur droit du grand rectangle, et intéressons-nous au petit rectangle qui apparaît en haut à gauche : puisque le rapport longueur/largeur est le même pour le grand rectangle et le rectangle pivoté, il est aussi le même pour ce petit rectangle (c'est le théorème de Thalès). Or les dimensions de ce petit rectangle sont entières ($2q - p$ et $p - q$) et inférieures à p et q, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle p et q sont les plus petits possibles.

Historiquement, après une proposition sans lendemain de l'Allemand Georg Christoph Lichtenberg au XVIII^e siècle, c'est sous la révolution française qu'est légalisé pour la première fois cette norme pour les formats de feuilles de papier. La raison en était alors principalement fiscale : il s'agissait de fixer de façon équitable les taxes à appliquer à différents documents tels que les actes judiciaires. En effet, il semble raisonnable de fixer le prix du timbre (sous-entendu : fiscal) d'un acte en fonction de la taille de celui-ci, elle-même se définissant de façon objective par le format du papier sur lequel il est consigné. Les différents formats en vigueur à l'époque n'étant pas dans des rapports d'aires simples, les prix des différents timbres manquaient de cohérence. Avec des rectangles diagonaux, tout devenait plus simple. C'est le 13 brumaire de l'an VII de la République (3 novembre 1798) que le *Bulletion des Lois de la République* promulgue la « loi sur le timbre » qui définit les nouveaux formats, qui correspondent à nos formats A2, A3, B3, B4 et B5 (les formats de la série B sont dérivés de ceux de la série A et constituent eux aussi des rectangles diagonaux). Malheureusement, cette brillante modernisation

[4] Les dimensions du format A0 sont choisies de sorte que l'aire du rectangle soit de 1 m^2 ; le A1 est un A0 plié en 2, et ainsi de suite.

n'a pas connu le même succès que ces autres innovations majeures qu'ont été le mètre ou le kilogramme, également élaborés sous la révolution française. C'est finalement en Allemagne que l'idée ressurgit, d'abord au XIX^{e} siècle chez le chimiste Wilhelm Ostwald, puis au début du XX^{e} sous l'impulsion de l'ingénieur berlinois Walter Porstmann. Les débats débouchent, en 1922, sur la norme dite DIN 476 (*Deutsches Institut für Normung*), devenue depuis la norme ISO 216, utilisée à peu près partout dans le monde, à la notable exception des pays d'Amérique du Nord.

L'avènement des machines à photocopier a conforté l'intérêt du rectangle diagonal comme format de référence, car il permet d'effectuer agrandissements et réductions d'un document initial sans affecter sa forme : les facteurs 141 % et 71 % que proposent aujourd'hui la plupart des photocopieuses ne sont pas autre chose que des approximations de $\sqrt{2}$ et de $1/\sqrt{2}$, destinées au passage du format An au format A$(n+1)$ ou A$(n-1)$.

Des décimales sans structure ?

Que ce soit pour l'architecture ou les formats de nos feuilles de papier, la connaissance de quelques décimales de $\sqrt{2}$ est suffisante. La question se pose donc de l'intérêt réel de calculer les décimales d'un tel nombre. Une réponse est donnée par le calcul de précision, dont un exemple historique frappant est celui des tables de logarithmes d'Henry Briggs, élaborées à partir d'extraction de racines carrées (le principe est que si $\log_{10}(x)$ est connu, alors $\log_{10}(\sqrt{x})$ s'en déduit, en divisant simplement $\log_{10}(x)$ par 2). Pour obtenir une bonne estimation de $\log_{10}(2)$, il extrait en 1624 pas moins de 47 fois la racine carrée de 2 (soit le nombre $2^{1/2^{47}}$) avec une précision de 32 chiffres après la virgule !

L'intérêt pour les décimales de $\sqrt{2}$ prend une nouvelle tournure mathématique en 1909, lorsqu'Émile Borel introduit la notion de normalité ([5]) : est « normal » tout nombre dont les décimales (en base 10 ou autre) possèdent les mêmes propriétés statistiques qu'une suite de chiffres tirés indépendamment et selon une loi uniforme. Il démontre que l'ensemble des nombres non-normaux est négligeable, mais ce n'est qu'en 1933 que David Champernowne ([7]) construit le premier exemple explicite de nombre normal.

On ignore toujours si les nombres « courants » comme $\sqrt{n}$, π ou e sont ou non normaux. À tout seigneur tout honneur : c'est le plus souvent π que l'on évoque comme exemple de nombre pour lequel la question de la normalité se pose de façon pressante. Mais finalement, le cas de la racine carrée de 2 est au moins aussi intriguant. En effet, contrairement à celles du nombre pi, les décimales de la racine carrée de 2 sont extrêmement simples à calculer ; selon Otto Neugebauer et Abraham Sachs, les Babyloniens déjà connaissaient probablement un algorithme d'extraction de racines carrées correspondant peu ou prou à la formule de Héron (I^{er} siècle de notre ère), elle-même cas particulier de la méthode de Newton. Pour $\sqrt{2}$, celle-ci consiste à définir la suite $u_0 = 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction $f(x) = x/2 + 1/x$.

Même si cette formule a été un rien améliorée depuis pour éviter la division par x (on utilise aujourd'hui plutôt la fonction $f(x) = 3x/2 - x^3$, qui fait converger la suite $(u_n)_n$ vers $\sqrt{2}/2$ - voir [14]), il est tout de même remarquable qu'un algorithme aussi ancien survive encore aujourd'hui. Il faut dire qu'il est à la fois très simple à mettre en œuvre et extrêmement rapide : à chaque étape, le nombre de décimales exactes double. Le record actuel de décimales de $\sqrt{2}$, obtenu par Yasumasa Kanada et Daisuke Takahashi (137 milliards de décimales), a été obtenu avec 28 itérations seulement, en prenant pour u_0 une évaluation de $\sqrt{2}$ précise à quelques décimales. L'efficacité de la méthode est telle qu'on ne peut d'ailleurs que s'étonner de ce que, il y a quelques décennies à peine, les élèves se voyaient encore infliger l'apprentissage d'une méthode d'« extraction de racines carrées » aussi pénible d'emploi que lente à converger.

Deux progrès ont récemment été faits sur la question de la normalité des nombres comme $\sqrt{2}$. En 2004, David Bailey, Jonathan Borwein, Richard Crandall et Carl Pomerance ont montré que la quantité de 0 ainsi que celles de 1 qui figurent dans les k premiers chiffres du développement de $\sqrt{2}$ en base 2 est au moins de l'ordre de $\sqrt{k}$ ([3]). En 2005, Boris Adamczewski, Yann Bugeaud et Florian Luca ont montré que, quelle que soit la base de numération entière b choisie, si l'on note $p(k)$ le nombre de séquences de chiffres différentes de longueur k apparaissant dans le développement de $\sqrt{2}$ en base b, alors le rapport $p(k)/k$ est non borné ([1]). On est donc encore bien loin de la normalité, et la racine carrée de 2 illustre ainsi de façon tout à fait frappante, bien mieux qu'un nombre comme π, le décalage profond entre les aspects quantitatif (la facilité du calcul des décimales) et qualitatif (la description statistique des décimales). En 1950, Borel lui-même disait : « le problème de savoir si les chiffres d'un nombre tel que $\sqrt{2}$ satisfont ou non à *toutes* les lois que l'on peut énoncer pour des chiffres choisis au hasard me paraît toujours être un des problèmes les plus importants qui se posent aux mathématiciens. » ([6]) Un demi-siècle plus tard, ces mots sont toujours d'actualité.

L'irrationnel extrême

Le fait qu'on ignore la répartition statistique des décimales de $\sqrt{2}$ peut s'exprimer à l'aide de la théorie de la distribution modulo 1. On dit qu'une suite $(u_n)_n$ de nombres est *uniformément répartie modulo* 1 si la suite $(v_n)_n$ de ses parties fractionnaires vérifie que, quel que soit l'intervalle $I \subset [0,1]$, si l'on désigne par $c_N(I)$ le nombre d'entiers $n < N$ tels que $v_n \in I$, alors la suite c_N/N converge vers la mesure de Lebesgue de I. En clair, la suite $(v_n)_n$ visite chaque région de l'intervalle $[0,1]$ selon une fréquence directement donnée par la taille de cette région. Savoir si $\sqrt{2}$ est ou non un nombre normal en base b revient à savoir si la suite $(b^n\sqrt{2})_n$ est uniformément répartie modulo 1 ou non.

Autant nous sommes peu renseignés sur la répartition modulo 1 de cette suite, autant nous savons en revanche beaucoup sur une autre suite, la « suite de Kronecker » de $\sqrt{2}$, définie par $(n\sqrt{2})_n$. Un résultat classique, démontré vers 1910 indépendamment par divers auteurs (Bohl, Sierpinski, et surtout Weyl, le fondateur de la théorie), affirme que quel que soit l'irrationnel α, la suite $(n\alpha)_n$ est uniformément répartie modulo 1 (voir [11]).

De ce point de vue, donc, tous les irrationnels se valent. Une façon de les distinguer consiste alors à s'interroger sur la vitesse à laquelle les suites se répartissent dans l'intervalle $[0,1]$. Un outil classique pour quantifier la vitesse de répartition modulo 1 est la *discrépance-**, notée D_N^* et définie comme le *supremum* sur tous les intervalles $[0,a]$ des écarts entre la fréquence de passage dans $I = [0,a]$ des N

premiers termes et la mesure de I (qui correspond à la fréquence asymptotique). Autrement dit, pour tout N, on pose :

$$D_N^* := \sup_{a \leqslant 1} \left(\left| \frac{c_N([0, a])}{N} - a \right| \right).$$

Un résultat de base de la théorie de l'équirépartition modulo 1 indique qu'une suite est uniformément répartie si, et seulement si, la suite D_N^* tend vers zéro. Pour une suite de la forme $(n\alpha)_n$, on sait dire bien davantage : en substance, la vitesse à laquelle la discrépance-$*$ tend vers zéro ne dépend que de la qualité des approximations de α par des rationnels. En gros, l'idée est que plus l'approximation de α par un rationnel p/q est précise, plus les suites $(n\alpha)_n$ et $(np/q)_n$ restent proches l'une de l'autre ; comme la suite $(np/q)_n$ n'est évidemment pas uniformément répartie modulo 1, la discrépance-$*$ de $(n\alpha)_n$ « prend du retard » si les deux suites restent proches trop longtemps.

On s'attendrait donc à ce que l'irrationnel α dont la discrépance-$*$ tend le plus vite vers zéro soit celui qui est le moins bien approché par les rationnels, qui n'est autre que le nombre d'or (dont le développement en fraction continue a les plus petits quotients partiels). Yves Dupain et Vera Sòs, qui ont résolu la question, n'ont pas été les moins surpris de la réponse : « on sait que la discrépance d'une suite [de la forme] $\{n\alpha\}$ dépend des quotients partiels [de α]. Elle est « petite » ou « grande » selon que sont « petits » ou « grands » [ces quotients partiels] (...) On pourrait donc s'attendre à ce qu'elle prenne la plus petite valeur pour [le nombre d'or, dont tous les quotients partiels valent 1]. Il est tout à fait surprenant que tel ne soit pas le cas. » ([8]).

Quel est donc le nombre qui ravit, de ce point de vue, le titre d'« irrationnel extrême » au nombre d'or ? C'est la racine carrée de 2.

Plusieurs spécialistes sont toutefois d'avis que cette conclusion quelque peu étrange n'est que le reflet de ce que la discrépance-$*$ n'est pas le meilleur moyen de quantifier la vitesse de répartition, et que le « vrai » irrationnel extrême est celui qui maximise la vitesse de convergence vers zéro de la *discrépance*, qui ne diffère de la discrépance-$*$ que par la fait que le *supremum* est pris sur tous les intervalles inclus dans $[0, 1]$, et non seulement sur ceux de la forme $[0, a]$. Et l'on s'attend à ce que le nouveau vainqueur soit le nombre d'or. Mais pour l'instant, personne ne s'est donné la peine de le démontrer, laissant ainsi un sursis à la racine carrée de 2.

Un intérêt pratique de trouver des suites dont la discrépance est faible est notamment donné par une inégalité due à Koksma, qui indique que l'écart entre l'intégrale d'une fonction f entre 0 et 1 et la moyenne des valeurs de f prises en des points $x_1 \dots x_N$ est inférieur au produit de la variation totale de f par le discrépance des x_n. Plus cette discrépance est faible, donc, plus l'approximation de l'intégrale par la moyenne $(1/N) \sum_{n \leqslant N} f(x_n)$ a des chances d'être précise.

Qu'il s'agisse du calcul d'intégrales ou de l'esthétique d'un atrium, dans tous les cas, la présence de la racine carrée de 2 marque que, pour citer Alberti, « la pratique se tire des secrets de mathématique. »

Références

[1] Boris ADAMCZEWSKI, Yann BUGEAUD & Florian LUCA, "Sur la complexité des nombres algébriques", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Mathématiques*, 339, no1, pp. 11-14, 2004.

[2] Leon Battista ALBERTI, *L'Architecture et art de bien bastir*, Kerver, 1553.

[3] David BAILEY, Jonathan BORWEIN, Roichard CRANDALL & Carl POMERANCE, "On the binary expansions of algebraic numbers", *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, vol. 16, no3, pp. 487-518, 2004.

[4] Richard BEIGEL, "Irrationality without number theory", *The American Mathematical Monthly*, vol. 98, no4, pp. 332-335, 1991.

[5] Émile BOREL, "Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques", *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, t. 27, pp. 247-270, 1909.

[6] Émile BOREL, "Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaîne", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t. 230, pp. 591-593, 1950.

[7] David CHAMPERNOWNE, "The construction of decimals normal in the scale of ten", *Journal of the London Mathematical Society*, 8, pp. 254-260, 1933.

[8] Yves DUPAIN & Vera SÒS, "On the discrepancy of $(n\alpha)$ sequences", *Colloquia mathematica societatis János Bolyai, 34. Topics in classical number theory, Budapest (Hungary), 1981*, vol. 1, pp. 355-387, 1984.

[9] Rachel FLETCHER, "An American Vision of Harmony : Geometric Proportions in Thomas Jefferson's Rotunda at the University of Virginia", *Nexus Network Journal*, vol. 5, no 2, 2003.

[10] Boris GOURÉVITCH, "La quète des décimales de π", *Gazette des Mathématiciens*, no 102, pp. 29-52, 2004.

[11] Lauwerens KUIPERS & Harald NIEDERREITER, *Uniform distribution of sequences*, Wiley-Interscience, 1974.

[12] André PALLADIO, *Les Quatre livres de l'architecture*, Edme Martin, 1650.

[13] Benoît RITTAUD, *Le Fabuleux destin de $\sqrt{2}$*, Le Pommier, 2006.

[14] Daisuke TAKAHASHI, *Fast multiple-precision arithmetic on distributed memory parallel computers and its applications*, thèse de l'université de Tokyo, 1998.

[15] Marc VITRUVE, *Architecture, ou art de bien bastir*, Jean de Tournes, 1618.

[16] Rudolf WITTKOWER, *Les Principes de l'architecture à la Renaissance*, Passion, 1996.

for John McAlpine

Block Design for Piano

Tom Johnson

© 2005 by Tom Johnson

MATHÉMATIQUES ET MUSIQUE

Écouter un « Block Design »

Tom Johnson[1]

Le compositeur Tom Johnson est né dans le Colorado en 1939. Il a étudié à l'université de Yale et, en privé, avec Morton Feldman. Après 15 ans à New York, il s'installe à Paris, où il habite depuis 1983. Il est généralement considéré comme un minimaliste, puisqu'il travaille avec du matériel toujours réduit, en procédant toutefois de manière nettement plus logique que la plupart des autres minimalistes, ce qui se traduit par un emploi fréquent de formules, de permutations et de séquences prévisibles. Self-Similar Melodies, *un texte théorique de 291 pages en anglais, a été édité en 1996 par les Éditions 75. Des articles, fichiers sonores et d'autres informations se trouvent à l'adresse :* `http://www.tom.johnson.org`

Tom Johnson au festival de Daegu[2]

Depuis longtemps je compose de la musique déterministe, musique qui suit ses formules, ses règles, musique qui a une direction, une logique, une rationalité. Une des meilleures manières de faire cela est de suivre un modèle mathématique.

Entre 1978 et 1988 j'étais content avec des modèles qu'un musicien comme moi peut comprendre sans difficulté : une suite logique évidente, tous les diviseurs d'un nombre abondant, le triangle de Pascal, les permutations des notes d'une mélodie, ou toutes les combinaisons de quelque chose. Même la table de multiplication a suffi pour un morceau court pour piano, mais avec le temps, je voulais aborder des objets mathématiques plus sophistiqués, parfois des choses que je n'avais jamais étudiées. J'ai trouvé dans un livre, par exemple, la suite de Narayana ($F_n = F_{n-1} + F_{n-3}$), qui est devenue *Les Vaches de Narayana*, un morceau que Michel Waldschmidt a transformé récemment dans une version vidéo, ajoutant beaucoup d'images et d'informations mathématiques. Jean-Paul Allouche, que j'ai rencontré il y a longtemps grâce à Waldschmidt, a collaboré avec moi pour faire une émission à France Culture avec une musique de sept notes, suivant le triangle de Pascal modulo sept. Il m'a aidé aussi à comprendre les automates finis, une exploration qui s'est terminée avec *Automatic Music*, un morceau de 50 minutes pour six percussionnistes.

[1] avec l'aimable accord de Paul Denny (université d'Auckland) et de Patrick Solé (CNRS, Nice)

[2] Festival de nouvelle musique en Corée du sud, juin 2005

Il y a quatre ans, j'ai commencé à étudier les pavages linéaires, un travail très riche, fait en collaboration avec des mathématiciens comme Emmanuel Amiot, qui a résumé cette recherche dans la Gazette d'octobre 2005.

Quand je raconte tout cela à un mathématicien, la première réponse est toujours « j'aimerais entendre une musique comme ça », mais malheureusement il n'est pas possible de faire entendre la musique dans un article, et je ne suis pas convaincu que l'écoute est essentielle pour comprendre cette manière de travailler. La différence entre musique subjective et musique mathématiquement calculée n'est pas aussi audible que la différence entre musique baroque et musique romantique, ou la différence entre une valse et une berceuse, et c'est probablement mieux que j'essaie simplement d'expliquer cette différence par un exemple qui m'occupe depuis un an environ.

L'harmonie n'a que rarement joué un rôle principal dans ma musique. Il y avait le *Catalogue des Accords*, tous les 8178 accords possibles dans une seule octave, et *Le Triangle de Pascal*, où je me suis limité aux accords construits avec secondes majeures et tierces mineures, mais maintenant je veux composer ce que j'appelle des « harmonies rationnelles », et cela m'oblige d'entrer sérieusement dans la combinatoire. Les accords ne sont que des combinaisons de notes tirées des gammes finies. Qu'est-ce qui se passe si on les considère simplement comme éléments tirés des groupes finis ?

Surtout, à la suggestion de Jean-Paul Allouche, je suis allé à la bibliothèque un jour pour voir ce que je pouvais trouver sur « block design ». Je n'ai pas la formation nécessaire pour comprendre la plupart des articles écrits sur ce sujet, mais un problème classique de 1847 était abordable, et fortement stimulant. C'est les « promenades de Kirkman », parfois considérées comme le début de l'étude sérieuse de block design :

« 15 young ladies in a school walk out three abreast for seven days in succession : it is required to arrange them daily, so that no two shall walk twice abreast. (Ladies and Gentlemen's Diary, Query VI, p. 48, 1847) ».

L'article expliquant cela donna deux ou trois exemples, et j'ai essayé d'arranger les 15 dames moi-même aussi. J'ai réussi à trouver deux ou trois solutions pour une semaine, et de pianoter les résultats avec plusieurs gammes de 15 notes. Comme j'ai dit, il n'y a aucune différence éclatante entre la musique mathématique et la musique qui vient des règles de consonance et dissonance, ou de l'intuition, ou de quelque source profondément spirituelle et mystérieuse. Un accord est un accord, et il n'a que le son d'un accord, peu importe son origine. Il y a des différences quand même. Si un accord est considéré uniquement comme une simple combinaison d'éléments d'un groupe, la probabilité est identique pour chaque candidat qu'il soit un accord majeur ou un accord très dissonant. Il y a une merveilleuse démocratie, les notes deviennent abstractions au delà de la tradition musicale, et la séparation entre musique tonale et musique atonale disparaît complètement. Une autre différence est qu'il n'y a pas d'ordre dans les combinaisons. Il n'y a aucune raison pour qu'une combinaison soit la résolution d'une autre combinaison, et aucune raison pour que l'accord final soit particulier.

L'idée de mettre en musique les promenades de Kirkman me semblait très bonne, mais j'avais besoin de plus d'informations pour vraiment comprendre ce que j'étais en train de faire. J'ai décidé d'écrire un courriel à Paul Denny, un mathématicien à l'Université d'Auckland en Nouvelle-Zélande.

« *I am a composer, but I'm finding that I can make lovely harmonies with Steiner Triple Systems, and related combinations, so I spent a long day in the National Library here in Paris, mostly with Colbourn and Rosa, where I found a most interesting reference to your work with the 48 TS(6,14) subgroups and the 75 TS(6,16) subgroups, and I'd love to look at them – or rather, listen to them. I'm not a mathematician, so if your work consists of formulas and other symbolic notation that only mathematicians will understand, I probably won't get it right. But if the combinations are somehow written out, they will probably be something I can use. I would of course give credit to you, and it might even be something you'd enjoy listening to one day. If you can send this information to me, or let me know where else I might order it or download it, I would appreciate this very much.* »

Denny était content de recevoir une question d'un compositeur, et il a répondu immédiatement. Comprenant que je ne savais pas grand chose sur le sujet, sa réponse avait beaucoup d'informations élémentaires, que je cite ici pour les lecteurs qui n'ont pas étudié les block design, et pour établir un vocabulaire utilisé souvent quand on parle de block design, ou plus généralement de « combinatorial design ».

« *I don't have collections of designs stored on disk, but I can easily generate some small classes of designs for you. Balanced incomplete block designs can be defined by 5 parameters :*

** v = a number of « points », or « numbers »*

** k = the size of each block*

** L = the number of times each pair of points must appear in the total design*

** B = the total number of blocks in each design*

** r = the number of times each point appears in the total design*

So, for example, the $v = 9$, $k = 3$ and $L = 1$ design looks like this :

$$\begin{array}{llll} >\{1,2,3\} & >\{4,5,6\} & >\{7,8,9\} & >\{1,4,7\} \\ >\{2,5,8\} & >\{3,6,9\} & >\{1,5,9\} & >\{2,6,7\} \\ >\{3,4,8\} & >\{1,6,8\} & >\{2,4,9\} & >\{3,5,7\} \end{array}$$

Here, $v = 9$, $k = 3$, and $L = 1$. There are 9 points, each block is of size 3, and the number of times each pair of points appears in the design is 1. For example, the pair (1,2) appears in exactly one block (the first block) and no other blocks. The same can be said for any pair of points.

Also, we have $B = 12$, because there are 12 blocks in the design, and $r = 4$ because each point is contained in 4 blocks. This design is unique, which is to say that all other designs satisfying these constraints are isomorphic to this one.

If we change the parameter set slightly, to say :

$v = 9$

$k = 3$

$L = 2$

$B = 24$

$r = 8$

then there are in fact 36 unique solutions or designs. Again, a mathematician would say that exactly 36 non-ismorphic designs exist for that set of parameters.

For example, here is one such design :

$$\begin{array}{llll} \{1\ 2\ 3\} & \{1\ 2\ 3\} & \{1\ 4\ 5\} & \{1\ 4\ 6\} \\ \{1\ 5\ 7\} & \{1\ 6\ 8\} & \{1\ 7\ 9\} & \{1\ 8\ 9\} \\ \{2\ 4\ 5\} & \{2\ 4\ 8\} & \{2\ 5\ 9\} & \{2\ 6\ 7\} \\ \{2\ 6\ 9\} & \{2\ 7\ 8\} & \{3\ 4\ 7\} & \{3\ 4\ 9\} \\ \{3\ 5\ 6\} & \{3\ 5\ 8\} & \{3\ 6\ 7\} & \{3\ 8\ 9\} \\ \{4\ 6\ 8\} & \{4\ 7\ 9\} & \{5\ 6\ 9\} & \{5\ 7\ 8\} \end{array}$$

*Notice that every pair of points (such as 1,2) occurs in exactly *two* of these blocks.*

If these sorts of designs are useful, I can easily generate them for you (I could generate all 36 if you like – they all have a unique structure and some have more symmetry than others).

However, if there are other sets of parameters you are more interested in, then let me know. If you could tell me the values for v, k and L that you are interested in, that is most useful.

I hope some of that has been helpful, although you may already have known much of it ! Let me know if I can help... all the best ! »

Ma réponse a suivi le même jour :

« *Good to get your last letter. It gave me much to think about, and many things to prepare in response.*

I knew about the S(9,3,1) system, as I saw somewhere how you could derive it from a 3 x 3 square, and I knew that this is a Steiner Triple System, where blocks of three elements must contain each pair of elements exactly once, but there is one Steiner Triple System that particularly interests me. If you want to run some numbers through your computer and look for complete systems, where all the combinations appear once and only once, it would be nice to start with S(15,3,1), the « Kirkman promenades ». It seems that Kirkman only knew one solution, but he eventually found several others, and after a while people started looking for all 13, to make a large Steiner system. 13 times the 7 solutions of the 5 daily lines of ladies makes all 455 combinations of 15 taken three at a time. Since this is a classic problem, it will make a lovely piece, and I have found a nice scale for playing the 7 x 5 three-note chords, which gives a very strange and interesting combination of consonants and dissonances. Maybe for three flutes. But one week of this music goes by in only a minute or so, so I really need to find the other 12 weeks to make a piece out of it.

I'm enjoying our correspondence and hope it continues for some time. »

Quelques jours plus tard, Denny m'envoie cette information :

« *The Steiner Triple Systems are a *special* type of balanced incomplete block design for which* $k = 3$ *and* $L = 1$, *where L is the number of times each pair must appear. They only exist for values of v such that* $v = 1$ *or* 3 *(mod* 6*). The number of non-isomorphic solutions for the Steiner Triple Systems are given in the table below :*

v	*number of non-isomorphic solutions*
7	*1*
9	*1*
13	*2*
15	*80*
19	*11,084,874,829*
21	*? ? ? ?*

These results are well-known – there is a unique solution for $v = 7$ *and* 9, 2 *solutions for* $v = 13$ *and* 80 *solutions when* $v = 15$ *(which corresponds to the famous Kirkman story you mentioned !).*

There are hundreds of millions of solutions when $v = 19$, *and it is unlikely whether anyone will know the exact number of solutions when* $v = 21$ *as it is likely to be enormous.*

- A « large set » of $STS(v)$ *is a family of solutions* $B1, B2, ..., Bq$ *of q Steiner Triple Systems of order* v, *all on the same point set, such that every triple is contained in at least one of the sets* Bi.

- A large set is said to be « mutually disjoint » in the case that every possible triple occurs in precisely one of the solutions

The software that I developed (as part of a Masters thesis under the supervision of Peter Gibbons) is able to construct all non-isomorphic designs for a particular parameter set. For example, it can be used to generate all 80 solutions for the v=15 Steiner Triple Systems pretty quickly. However, I haven't spent any time looking at large sets of mutually disjoint designs.

It seems as though from the point of view of making music it is preferable to have a collection of solutions that form a large set with the nice mutually disjoint property rather than the non-isomorphic solutions on their own. »

Deux semaines après, la correspondance recommence avec la lettre suivante. Je ne suis pas sûr que la solution « originale » proposée dans cette lettre soit correcte, mais je laisse le texte comme il était.

« Gone for a week of concerts and teaching in Vienna, but now I'm back at work on the new piece that is to be titled : « Kirkman's Ladies : Rational Harmonies in Three Voices. »

I tried without success lots of geometric ways of finding the five basic curves that will permute around the permutation orbits (1,2,3,4,5,6,7) (8,9,10,11,12,13,14) (15), and then found a technique that actually produced an original solution :

1		*3*				*7*								
	2						*8*					*13*		
			4	*5*							*12*			
					6								*14*	*15*
								9	*10*	*11*				

Somehow I was able to see in this format (something I've used a lot in rhythmic tiling problems) that the same pair would never come up twice. And the musical result was as lovely as with the solution I'd taken from some book. Elated, I began constructing more solutions by hand, but inevitably there was a flaw somewhere. So it is clear that if I want a large Steiner system, a complete 13-week solution to the Kirkman's Ladies problem, I have to find a method I can understand, or find a list that someone else has prepared. If I can somehow come up with a large set containing all 455 combinations once each, and producing 13 weeks of music, that will be particularly elegant. I'm sure too that there are other block designs that really need to be translated into music further down the road. »

Cette fois, en réponse, je reçois toute l'information précise que je cherchais :

« I found a paper that I think will be very useful to you. It was written by R.H.F.Denniston in 1973, and contains a solution to the Kirkman's schoolgirl problem (although the paper refers to this as Sylvester's schoolgirl problem, because Sylvester proposed the question as to whether the walks could continue for 13 weeks until each triplet had walked together).

If you look at Tables 1 and 2 in the paper, you will find a very special Steiner Triple System of order 15. From this, you can generate another Steiner Triple Systems by applying the simple transformation rules to each block :

$$\{x, y, z\} \rightarrow \{x+1,\ y+1,\ z+1\}\ mod\ 13$$
$$\{x, y, A\} \rightarrow \{x+1,\ y+1,\ A\}\ mod\ 13$$
$$\{x, y, B\} \rightarrow \{x+1,\ y+1,\ B\}\ mod\ 13$$
$$\{x, A, B\} \rightarrow \{x+1,\ A, B\}\ mod\ 13$$

If you apply these same rules to the new Steiner Triple System, you will get another Steiner Triple System. If you repeat this 12 times you will have a set of 13 Steiner Triple Systems, and this will in fact be a large set – where all 455 triples are used and each design can be resolved correctly into 7 by 5 lines.

I would very much like to hear the generated music :–) Are there any other types of designs you would like to look at ? »

Attaché à ce courriel était l'article de R.H.F. Denniston (*Discrete Mathematics* **9** *(1974), p. 229-233*), apparemment la première solution éditée d'un « large Steiner system », et maintenant je pouvais grouper toutes les 13 * 7 * 5 * 3 dames.

Face à 455 combinaisons de 1 à 15, pris trois à la fois, un compositeur a beaucoup de liberté, parce qu'il n'y a pas d'ordre dans les combinaisons. On peut placer les trois femmes en ordre arbitraire sur chaque rang, choisir n'importe quel ordre pour les cinq combinaisons de trois femmes chaque jour, et exercer la même liberté pour les sept jours chaque semaine et pour les 13 semaines du semestre. Comme d'habitude, je voulais donner une logique à l'écoulement de la musique, donc j'ai décidé que les cinq accords de chaque jour devraient s'enchaîner avec la voix basse descendante. Pour ordonner les promenades de lundi, mardi, mercredi ..., je considérais le dernier accord de chaque jour avec la même logique descendante, et les 13 semaines suivaient également un ordre descendant.

Malgré cette organisation, on ne sent pas une progression mécanique. Les accords normalement classés tonals se mêlent avec les accords qu'on entend normalement dans un contexte atonal, et les règles traditionnelles pour l'enchaînement d'accords ne se jouent pas du tout. On peut presque croire que ces harmonies étaient choisies par hasard, mais avec une écoute plus concentrée on peut aussi remarquer qu'avec chaque groupe de cinq accords, on entend les mêmes quinze notes une fois chacune, et qu'on n'entend jamais le même accord deux fois. Un auditeur très habile peut même sentir qu'à l'intérieur de chaque semaine une seule paire de notes n'arrive jamais simultanément deux fois.

Tout cela me fascinait beaucoup quand je commençais à mettre la longue liste sur papier à musique. Bien sûr, c'est un peu fastidieux d'écrire tous ces accords à la main, mais il n'y en avait que 455, et le travail allait assez vite. Plus tard Javier Ruiz, qui a préparé mes partitions depuis longtemps, et qui est extrêmement habile avec l'ordinateur, me dit : « Mais on ne peut pas travailler comme cela. Il peut y avoir une erreur ». Il recalcule les données de Denniston, traduit les chiffres en MIDI, envoie les notes MIDI au logiciel Finale, et sort une partition impeccable.

Ce morceau n'a pas encore été joué dans un concert officiel, et je n'ai pas eu des réactions très claires, mais après quelques auditions privées, je comprends déjà que les gens qui aiment cette musique ne sont pas toujours les gens qui la comprennent le mieux. Je n'ai aucune idée pourquoi une personne aime ou n'aime pas Kirkman's Ladies, mais je peux expliquer un peu le problème de compréhension, qui est vraiment un problème de perception.

Considérez les collections de chiffres suivantes. Sans compter systématiquement, pouvez-vous confirmer que tous les nombres 0 à 14 sont présents en chaque collection ?

11	10	13	12	14
6	7	9	8	3
5	4	2	1	0

8	9	13	6	11
2	1	3	4	12
14	10	0	5	7

13	7	11	8	3
5	4	2	1	12
10	5	1	6	0

En tant que bon lecteur de la *Gazette*, vous avez sans doute vu que les deux premières collections sont complètes et que la troisième contient des erreurs, mais si vous ne pouvez qu'écouter les mêmes collections, jouées sur une gamme de 15 hauteurs, pourriez-vous constater cela avec la même aise, la même satisfaction ? Probablement pas. J'ai remarqué pourtant que mes amis musiciens sont parfois assez habiles avec de tels exercices. Quand je joue une telle suite de cinq accords incorrectement, ils entendent souvent qu'une note a été jouée deux fois et qu'une autre note manque quelque part. Et si je me trompe en jouant un accord de quatre notes, ou de seulement deux notes, ils entendent l'erreur davantage. Je ne m'inquiète pas trop pour les capacités perceptuelles de mes auditeurs. Ni la facilité de percevoir les détails d'un morceau de musique ni le profil exact des auditeurs qui vont apprécier la musique ne sont le souci principal du compositeur. Très souvent d'ailleurs on n'a aucune idée pourquoi un auditeur peut aimer ou ne pas aimer un morceau, et l'auditeur n'est pas toujours sûr non plus. Tout cela est très difficile à évaluer, et cette information n'est pas essentielle pour le compositeur en tout cas. Pour moi il suffit de savoir qu'un morceau a été soigneusement composé, qu'il a un sens, et que ce sens est au moins perceptible par la personne qui l'écrit.

Kirkman's Ladies se termine donc bien, mais je ne voulais pas arrêter là. Je faisais encore des visites aux bibliothèques mathématiques parisiennes pour essayer de trouver d'autres block designs susceptibles d'une traduction musicale. Il y a beaucoup d'articles sur le sujet maintenant, venant souvent des États-Unis et de la Chine, mais aussi de l'Inde, de l'Angleterre, de l'Allemagne, de partout. Surtout utile pour moi était le livre *Triple Systems* de Charles J. Colbourn et Alexander Rosa et le CRC *Handbook of Combinatorial Designs*, édité par Charles J. Colbourn et Jeffrey Dinitz. Pendant quelque temps, j'avais plus besoin d'étudier les mathématiques que d'écrire la musique, et je trouvais beaucoup de possibilités. « Room squares » m'intéressait beaucoup, par exemple, et j'avais une correspondance stimulante avec Jeffrey Dinitz, un mathématicien de l'Université de Vermont qui a travaillé ce sujet. Peut-être je trouverai une musique qui suit ce joli modèle mathématique, mais pour l'instant les Room squares restent silencieux.

En même temps que je cherchais de nouveaux matériaux mathématiques, je voulais faire circuler *Kirkman's Ladies* un peu. Sûrement la première partition jamais écrite à partir d'un block design peut intéresser des gens que je ne connais pas encore. J'ai envoyé un exemplaire à Patrick Solé, par exemple, un combinatoricien français. Jean-Paul Allouche m'avait recommandé ce nom longtemps avant, et j'avais essayé de lire un article de lui, mais ne comprenant rien, je ne l'avais jamais contacté. Mais en recevant ma partition, Patrick Solé répond avec intérêt, ajoutant ce post-scriptum :

« PS : Il serait merveilleux de différencier par la musique des designs de mêmes paramètres mais non équivalents.... »

Cela était un peu cryptique pour moi, mais j'ai répondu aussi bien que possible avec ce que je savais :

« *... Je trouve qu'il n'y a pas beaucoup de différences entre un STS(9) et un autre, ni musicalement ni mathématiquement. Par contre, un « group divisible design » avec groupes de tailles différentes, ou ce que Colbourn et Rosa appellent « an embedded design », peut donner une musique très différente. Mais pour quelqu'un comme moi, ces structures sont très difficiles à calculer.* »

Patrick Solé a compris la direction où je voulais aller, et quelque temps plus tard il m'envoie les 253 vecteurs d'un groupe de Mathieu, connu plus exactement comme un 4-(23,7,λ). Il suggère aussi un 5-(24,8,1), mais je ne trouve pas de musique dans ces collections plus ou moins gigantesques.

Le travail continue très lentement, et quatre mois passent avant que je n'écrive à nouveau à Patrick Solé :

« *Je sais que c'est le mois d'août, et que vous ne voulez pas trop penser les maths maintenant, mais j'ai une question qui peut vous intéresser quand vous recommencerez le travail.*

Je n'ai pas encore trouvé une manière pour mettre en musique M(23), mais je travaille « Block Design for piano », une suite de 330 arpeggios de six notes qui viennent directement de la page 47 du CRC Handbook, un design défini comme 4-(12,6,10). Chaque quadruplet, par définition, arrive 10 fois dans les 330 blocs, mais est-ce qu'il n'est pas également vrai que

chaque élément arrive 165 fois

chaque paire arrive 75 fois

et que chaque triplet arrive 30 fois ?

Donc, est-ce qu'on ne peut pas aussi bien appeler ce block design 3-(12,6,30) ou 2-(12,3,75) ? »

Trois jours après j'ai sa réponse :

« *Bien sûr tout t-design est aussi un i-design pour $i < t$: qui peut le plus peut le moins !*

D'après MCWilliams et Sloane, la formule est

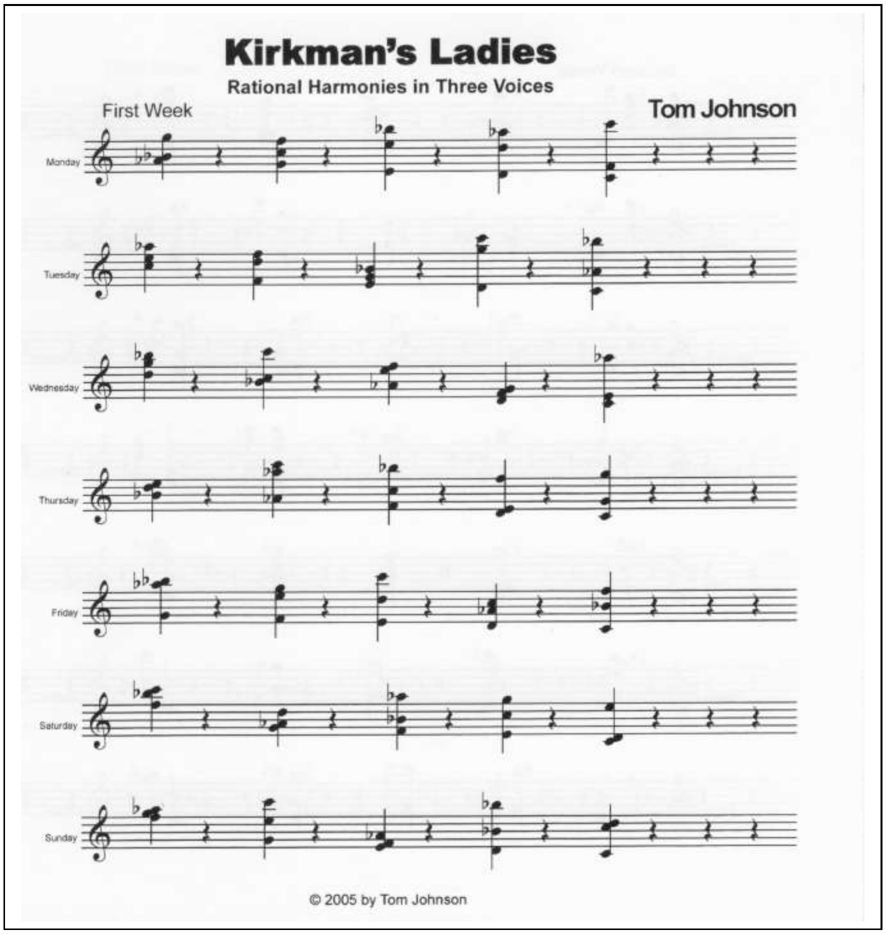
$\lambda_i = \lambda(v - i \text{ choose } t - i)/(k - i \text{ choose } t - i)$

La preuve est facile si on maîtrise le principe de compter des paires de deux façons différentes : par la droite et par la gauche »

Je ne comprends pas encore la formule de McWilliams et Sloane, et il n'est même pas très clair pourquoi il faut parfois compter par la droite et parfois par la gauche, mais je suis très fier d'avoir reçu A+ d'un mathématicien, et d'être rassuré que les 330 arpeggios dans ma nouvelle composition représentent une application correcte du design 4-(12,6,10).

Cette partition, *Block Design for Piano*, produit une musique avec des différences assez subtiles, juste 330 arpeggios de six notes, l'un après l'autre. La musique dure 20 minutes, et il est probable que les auditeurs qui l'écoutent comme musique de fond n'apprécieront pas trop les petites différences entre les groupes de six notes montantes. Beaucoup ne vont même pas se rendre compte que j'avais finalement frappé la grande cible d'Arnold Schœnberg en réalisant une égalité absolue des 12 sons.

En fait, je ne saurai jamais qui comprendra quoi à quel niveau de précision, et je n'ai aucune idée de qui appréciera Block Design for Piano ni pourquoi, mais c'est probablement mieux que le compositeur ne pense pas trop à tout cela. J'ai appris déjà très jeune que mes compositions ont leurs propres vies. Une fois terminées, elles n'ont plus besoin de moi. Elles trouvent toutes seules leurs significations, leur importance, leur manque d'importance, leur grand public, leur petit public – ou leur disparition.



Documents Mathématiques

Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie (SGA 2)

Alexander Grothendieck

Ce volume est une édition recomposée et annotée du livre « Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2) », Advanced Studies in Pure Mathematics 2, North-Holland Publishing Company - Amsterdam, 1968, par A. Grothendieck et al. Dans cet ouvrage, on donne des conditions nécessaires et suffisantes de finitude des faisceaux de cohomologie locale d'un faisceau cohérent. Ces résultats conduisent à des théorèmes d'algébrisation qui permettent en particulier d'obtenir, à l'aide de théorèmes de pureté également démontrés dans le texte, des théorèmes de type Lefschetz pour le groupe fondamental ou de Picard.

This volume is a new updated edition of the book ``Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2)'', Advanced Studies in Pure Mathematics 2, North-Holland Publishing Company - Amsterdam, 1968, by A. Grothendieck et al. In this monograph are given necessary and sufficient conditions for the finiteness of the local cohomology sheaves of coherent sheaves. These results provide algebraization theorems leading in particular, with the help of purity results also proved in the text, to Lefschetz's theorem for both the fundamental group and the Picard group.

prix public* : 40 € - prix membre* : 28 €
* frais de port non compris

Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris cedex 05

http : //smf.emath.fr

L'ascenseur social ne fonctionne que si l'on paye les charges

Pierre Arnoux[1], Pierre Fontes[2], André Morel[3], Jacques Treiner[4]

Les événements récents des banlieues ont révélé de graves carences dans les mécanismes d'intégration de la société française. L'École y a longtemps joué un rôle privilégié ; elle ne le joue manifestement plus, ou mal. Luc Bronner, dans son article du *Monde* du 27 novembre 2005, fait état de l' « apartheid scolaire » qui résulte des stratégies d'évitement mises en œuvre par les familles qui cherchent à échapper à la mixité sociale à l'École pour donner de meilleures chances de réussite scolaire à leurs enfants.

Nous proposons ici une mesure simple qui inverserait la tendance pour celles et ceux qui, malgré tous les obstacles inhérents à une situation d'exclusion de fait, terminent leurs études secondaires dans de bonnes conditions : l'instauration d'un système de pré-recrutement d'enseignants à la fin de la première année d'université. Cette disposition pourrait être accompagnée d'un engagement des bénéficiaires à participer à des activités d'accompagnement scolaire (tutorat, aide aux devoirs...) dès l'attribution de leur salaire. Déjà évoquée à plusieurs reprises ces dernières années, elle est défendue par l'Académie des sciences et par le Collectif Action Sciences, qui regroupe une quinzaine de sociétés savantes et d'associations d'enseignants.

Un système semblable a existé jusqu'au milieu des années 70. Pour le secondaire, il s'agissait d'un concours (dénommé IPES) par lequel les candidats, s'ils étaient reçus, percevaient un salaire pour effectuer leurs études, et s'engageaient à enseigner 10 ans (études comprises) dans un établissement public. Les professeurs du primaire étaient, pour leur part, recrutés par concours au niveau du baccalauréat, et formés dans les Écoles Normales d'Instituteurs où ils percevaient également un salaire en tant qu'élève-fonctionnaire. À cette époque, selon les années, entre 25 000 et 30 000 étudiants étaient payés pour poursuivre des études afin d'enseigner. Plus de 10 000 places étaient mises au concours chaque année.

Les jeunes d'aujourd'hui ne savent pas que la société portait naguère à la fonction enseignante une considération telle que, par l'intermédiaire de l'État, elle leur proposait d'y engager leur avenir, de concevoir leurs études dans une perspective professionnelle à long terme, et estimait normal de leur donner, sur la base de leurs mérites, les moyens d'y parvenir dans de bonnes conditions. Bon nombre d'universitaires formés à l'époque ont bénéficié de ce système, sans lequel s'engager dans des

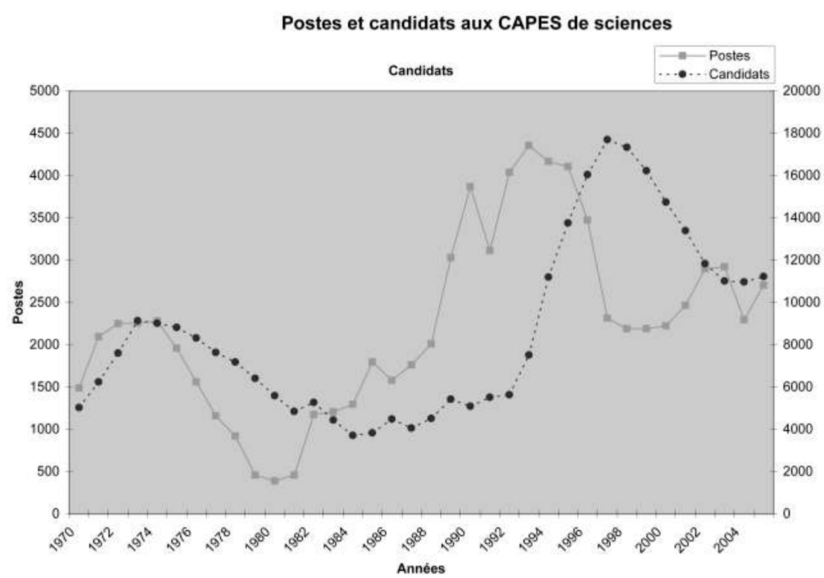
[1] Professeur de mathématiques, université de Marseille-Luminy
[2] Professeur de physique, IUFM de Versailles et université Paris-Sud
[3] Physicien, commission enseignement de la Société Française de Physique
[4] Professeur de physique, université Pierre et Marie Curie, Paris

études longues, dans les années 60, n'aurait pas été possible. Le message délivré par un tel système produisait un effet d'appel pour tous. Dans le contexte actuel, il indiquerait tout particulièrement aux jeunes les plus doués des quartiers ghettoïsés qu'ils sont les bienvenus dans des cursus longs, qu'un contrat est possible.

L'Éducation nationale se veut un ascenseur social. Mais comme tout ascenseur, il ne fonctionne que si l'on paye les charges. Depuis l'abandon de la politique de pré-recrutement, les charges sont impayées. Pourquoi s'étonner que l'ascenseur ne fonctionne plus ? Notons au passage que le système est toujours en place dans les étages les plus hauts : les Écoles normales supérieures, l'ÉNA, Polytechnique : l'ascenseur fonctionne toujours sans heurt pour les classes les plus aisées !

On objectera peut-être qu'il est illusoire de penser attirer des étudiantes et des étudiants nombreux et de qualité vers la fonction d'enseignant par une mesure aussi « simple ». Nous répondrons à cette objection à partir d'une analyse des recrutements d'enseignants au cours des 30 dernières années, en montrant que les étudiants suivent avec beaucoup de rationalité l'offre des postes mis aux concours de recrutement. À titre d'illustration, nous commentons les données relatives aux CAPES de Mathématiques, Sciences de la vie et de la terre, Physique et Chimie pour la période 1970-2002 (source : Direction de l'évaluation et de la prospective) ; tous les autres concours (autres disciplines, agrégation) donnent lieu à des considérations similaires.

Le graphique ci-dessous présente le nombre de postes mis au concours, ainsi que le nombre de candidats qui se présentent aux épreuves.



On y observe une remarquable corrélation entre ces deux courbes. Il y a réponse à l'offre, et la constatation remarquable est que les variations du nombre de candidats suivent celles du nombre de postes, avec un décalage de 4 ans. La variation du nombre de postes semble donc être un facteur explicatif déterminant de la variation du nombre de candidats. Ainsi, l'observation de la chute de plus de 25% du nombre de candidats à l'ensemble des CAPES de sciences depuis 1997 pourrait être interprétée comme l'expression de la « désaffection des jeunes pour les sciences ». En réalité elle ne fait que refléter, avec quatre ans de décalage, la chute du nombre de postes mis au concours entre 1993 et 2000, et elle risque donc de se poursuivre encore pendant quelques années. Pourquoi quatre ans de décalage ? Une hypothèse plausible : c'est la durée des études supérieures nécessaires pour se présenter aux concours ! Ainsi, les nouveaux étudiants se projettent ou non dans un avenir d'enseignant suivant l'offre affichée au moment de leur entrée à l'université.

Notons au passage que la réponse des étudiants à l'offre de places aux concours est d'autant plus frappante que cette offre a subi les variations les plus étranges, alors que les besoins, liés à une scolarisation régulièrement croissante, étaient parfaitement prévisibles. Le nombre d'élèves dans le secondaire pendant la période considérée ne présente en effet aucun accident : c'est une évolution lisse, avec une montée rapide dans les 50 dernières années, et un léger fléchissement récent. Au regard de cette évolution régulière du nombre d'élèves, la courbe de l'offre révèle des variations importantes, surprenantes et incompréhensibles. Pourquoi le nombre de postes mis au concours est-il divisé par 5 entre 1974 et 1980 ? La montée d'un facteur 10 entre 1980 et 1990 résulte sans doute d'un effet de rattrapage qui devait trouver son terme, mais est-il sûr que la diminution d'un facteur 2 entre 1993 et 2000 soit justifiée par une réduction des besoins ? Dans quelle autre profession voit-on des variations aussi brutales du recrutement ?

De telles variations montrent à l'évidence que la détermination du nombre de postes résulte de considérations assez éloignées des besoins d'encadrement, lesquels, nous l'avons vu, sont clairement identifiables. Nous n'avons du reste pas pu trouver de trace administrative de la procédure par laquelle ce nombre est déterminé chaque année ! N'oublions pas que le nombre d'enseignants présents dans les classes a, lui, augmenté, même dans les périodes les plus avares de postes mis au concours : les besoins, incompressibles, ont été satisfaits par le recrutement en grand nombre de vacataires et de contractuels placés devant les élèves sans avoir reçu, la plupart du temps, de formation professionnelle.

Les conclusions qu'il nous semble possible de tirer de ces données sont simples, et elles permettent d'agir, si toutefois l'on a bien pris la mesure des enjeux. Une politique pluriannuelle de recrutement des enseignants est possible et souhaitable, puisque les besoins sont parfaitement prévisibles. Pour prévenir la pénurie à venir des enseignants, de sciences en particulier, il suffit de faire savoir aux jeunes que l'on a besoin d'eux à ces postes-là, puisqu'ils répondent à l'offre. Mais celle-ci doit être fiable et attractive. Une procédure de pré-recrutement, c'est-à-dire un financement des études en échange d'un engagement décennal et d'une participation modérée à l'encadrement scolaire dès l'attribution du premier salaire, constitue un appel clair et convaincant. Un tel pré-recrutement, fondé sur le mérite, aura l'avantage d'attirer dans les filières universitaires longues des jeunes — en particulier des jeunes filles — qui hésitent à s'y engager pour raisons financières. Il remettrait en route l'ascenseur social, et ferait revenir à l'université toute une "tête de classe" formée de jeunes motivés et doués qui y ont toute leur place, mais en sont aujourd'hui écartés par des raisons matérielles, ou y poursuivent leurs études dans des conditions déplorables. Nous avons tout à y gagner !

PRIX ET DISTINCTIONS

Prix Fermat 2005

Vendredi 28 octobre 2005, le Prix Fermat de recherches en mathématiques 2005 a été décerné conjointement à Pierre Colmez pour ses contributions à l'étude des fonctions L et des représentations galoisiennes p-adiques et à Jean-François Le Gall pour ses contributions à l'étude fine du mouvement brownien plan, pour l'invention du serpent brownien et ses applications à l'étude d'équations aux dérivées partielles non-linéaires.

P. Colmez

J.-F. Le Gall

I. Kortchemski

Rappelons que le Prix Fermat récompense les travaux de recherche d'un ou plusieurs mathématiciens dans des domaines où les contributions de Pierre de Fermat ont été déterminantes. Ce prix d'un montant de 20 000 euros est décerné par l'université Paul Sabatier de Toulouse tous les deux ans.

Les lauréats des éditions précédentes sont L. Ambrosio (2003), R.L. Taylor et W. Werner (2001), F. Bethuel et F. Hélein (1999), M. Talagrand (1997), A.J. Wiles (1995) J.-M. Coron (1993), J.-L. Colliot-Thélène (1991), A. Bahri et K.A. Ribet (1989).

Mardi 15 novembre 2005, le Prix Fermat Junior a été décerné à Igor Kortchemski, élève au lycée Louis-Le-Grand, Paris, pour son travail sur les « bonnes suites et permutations ».

Ce prix, d'un montant de 2 000 euros, est aussi décerné par l'université Paul Sabatier et récompense la contribution d'un étudiant des lycées ou des universités françaises dans des domaines qui figurent aux programmes des enseignements aux niveaux Bac à Bac plus trois.

Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova

The Mathematical Journal of the University of Padova

(ISSN 0041-8994)

Instructions for Authors

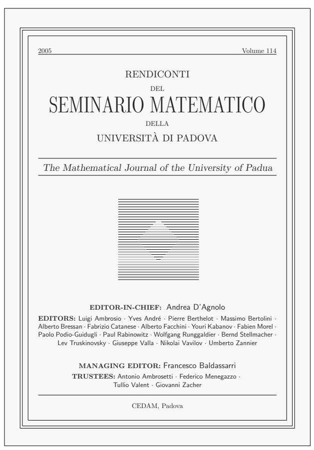
Please see our website

Subscription information

Subscriptions are annual (two volumes per year)
Italy: Euro 130 - Other countries: Euro 170

Contact Information

Editorial office: Prof. Giovanni Gerotto
Postal address: Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata - Via Belzoni, 7 - 35131 Padova, Italy
e-mail: **rendiconti@math.unipd.it**
website: **rendiconti.math.unipd.it**



Contents of volume 114 (2005)

Editorial Board

A. D'Agnolo (Editor in Chief)
L. Ambrosio, SNS Pisa, Italy
Y. André, ENS Paris, France
P. Berthelot, Rennes, France
M. Bertolini, Milano, Italy
A. Bressan, PennState, U.S.A.
F. Catanese, Bayreuth, Germany
A. Facchini, Padova, Italy
Y. Kabanov, Besançon, France
F. Morel, München, Germany
P. Podio-Guidugli, Roma, Italy
P. Rabinowitz, Madison, USA
W. Runggaldier, Padova, Italy
B. Stellmacher, Kiel, Germany
L. Truskinovsky, Palaiseau, France
G. Valla, Genova, Italy
N. Vavilov, Saint-Petersburg, Russia
U. Zannier, SNS Pisa, Italy

Managing Board

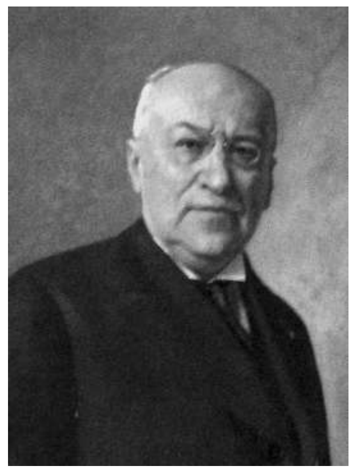
F. Baldassarri (Managing Editor)
A. Ambrosetti, SISSA Trieste, Italy
F. Menegazzo, Padova, Italy
T. Valent, Padova, Italy
G. Zacher, Padova, Italy

INFORMATIONS

Émile Picard (1856–1941), membre de l'Académie des sciences

Académie des sciences – DISC[1]

2006 est l'année du cent cinquantenaire de la naissance d'Émile Picard (24 juillet 1856−11 novembre 1941), professeur d'analyse et d'algèbre supérieures à la Faculté des sciences de Paris et professeur de mécanique générale à l'École centrale des arts et manufactures. À cette occasion, l'Académie des sciences a réalisé un dossier numérique sur ce mathématicien qui fut son Secrétaire perpétuel pour la division des sciences mathématiques et physiques de 1917 à sa mort.



© Académie des sciences – Institut de France

Émile Picard
peint par P.-A. Laurens

Ce dossier comprend une biographie de Picard ainsi que la liste de ses travaux publiés dans les Comptes rendus de l'Académie des sciences avec un lien électronique vers chaque article en texte intégral sur le site de la Bibliothèque Nationale de France. Il rend hommage également à Picard historien des sciences, en publiant l'intégralité de plusieurs discours, passionnants et très agréables à lire, tels « Un coup d'œil sur l'histoire des sciences et des théories physiques », « Un double centenaire : Newton et Laplace, leur vie et leur œuvre », « L'évolution des idées sur la lumière et l'œuvre d'Albert Michelson ».

Un portrait de Picard[2] peint par Paul-Albert Laurens, membre de l'Académie des Beaux-Arts, ouvre ce dossier qui se termine par un extrait de l'émouvant manuscrit, dernier texte de sa main, de l'hommage qu'il voulait rendre à Maurice Hamy. On pourra enfin lire l'éloge d'Émile Picard prononcé par Louis de Broglie dans le cadre de l'Institut de France.

Le dossier est consultable sur le site Internet de l'Académie des sciences :
`http://www.academie-sciences.fr/membres/in_memoriam/Picard/Picard_oeuvre.htm`
Contact : Anne Bernard et Natacha Oliveira – `disc@academie-sciences.fr`

[1] Délégation à l'information scientifique et à la communication de l'Académie des sciences.
[2] Offert à l'Académie des sciences par Gilbert Dunoyer de Ségonzac en 2004.

Section 01 du Comité National Compte rendu de la Session d'automne 2005[1]

Présents : Sorger, Franjou, André, Jouve, Cellier, Baraud, Beffara, Planchon, Sabbah, Baladi, Flavigny, Monchanin, Esteban, Nier, Comets, Colin.

Excusés : Divizio, Trouvé, Fougères, Laumon, Rassouli.

La session se déroule en présence de C. Peskine, directeur scientifique adjoint (DSA) pour les mathématiques et de M. Enock, chargé de mission au département scientifique. Y assistent également ponctuellement L. Bonpunt et S. Cordier, chargés de mission au département scientifique.

La section approuve le procès-verbal de la session du printemps 2005.

Intervention du DSA, C. Peskine

Le directeur du département SPM, M. Lannoo a quitté ses fonctions début octobre ; le chargé de mission pour la mise en place du nouveau département MIPPU (et probable futur directeur) Jean-Yves Marzin n'a pas encore assez d'éléments pour intervenir utilement. Quelques points importants :

– *Moyens* : on s'attend à une quinzaine de postes de chercheurs pour 01 au concours 2006, ce qui reste bien en regard d'autres sections (la mobilité vers l'université n'y est pas étrangère...). Pour les postes ITA, la diminution est moins importante, 5-7 postes. Les laboratoires ont rempli des demandes globales de moyens (financiers, appels d'offres, postes), on peut espérer que les DSAs pourront continuer à discuter avec les directeurs de laboratoires, dans le cadre de leur nouvelles attributions.

– *Politique des mathématiques* J.-F. Munster (directeur scientifique général dans le nouvel organigramme) a interviewé chacun des DSA. C. Peskine a répondu en parlant de 4 priorités : unité et ouverture des mathématiques (en particulier, développer les applications mais sans fléchages) ; interactions avec l'enseignement et la formation de chercheurs ; ressources humaines et recrutements (transparence du recrutement, même si le Comité national est souvent cité en exemple) ; développement des carrières, mobilité et promotion DR2 (c'est là que le CNRS est faible dans le dialogue avec les universités). Dernier point : il faut une politique d'infrastructure, énorme travail pour imposer cette vision (informatique, ITA, etc.).

Suit une discussion informelle sur les problèmes posés par la réorganisation en cours. Sur la question des unités liées et associées, il semble que cette notion ne soit pas très pertinente et que la politique actuelle était la présence dans tous les laboratoires. Tout le monde (dans la nouvelle organisation) est sensibilisé à ce problème. Par ailleurs, nous avons des liens naturels avec l'ingénierie, où se fait l'interaction ? (il s'agit d'un département transverse dont personne ne sait comment il va fonctionner) Quel va être le poids des mathématiques dans MIPPU (qui est beaucoup plus large que SPM) ? En contrepartie, on a dans le nouveau département

[1] Ce compte rendu ne suit pas nécessairement l'ordre chronologique du déroulement.

beaucoup de ceux avec qui on peut interagir. Dorénavant, les laboratoires peuvent dépendre de deux départements (ou plus), typiquement MIPPU-Ingénierie. Auparavant, le département était un endroit où l'on partageait les moyens, il semble que cela s'effectuera plutôt au niveau de la nouvelle direction scientifique générale (DSG). Rien ne dit que le département aura le même rôle, entre ce qui remonte et ce qui se fera au niveau des DIRs.

Compte rendu de la réunion exceptionnelle de la CPCN (commission des présidents de section du CN) qui s'est tenue en septembre 2005, à laquelle Fabrice Planchon a participé.

– *Concours :* de nombreuses sections sont surprises que le jury d'admission ait procédé à des déclassements ou n'ait pas pourvu des postes, sans aucun retour d'information vers les jurys d'admissibilité. Le directeur général (DG) rappelle que le jury est souverain, il est éventuellement prêt dans l'avenir à fournir des explications confidentielles aux présidents de section concernés. La CPCN souhaite une discussion sur la composition des différents jurys d'admission (DR et CRs, en particulier avec la mise en place des nouveaux départements scientifiques). Le jury d'admission, par sa composition même (au mieux un seul membre de chaque section présent) ne peut pas prendre de décision basée sur le contenu scientifique ; donc en principe le classement d'une section ne peut être bouleversé que dans des circonstances exceptionnelles. Il est de toute façon indispensable que les règles du jeu soient connues à l'avance, par les jurys d'admissibilité comme par les candidats.

– *Réforme du CNRS :* le rôle exact des DIR n'est toujours pas connu précisément, et l'on ne sait pas comment les nouveaux départements scientifiques vont fonctionner. Les assistantes de gestion scientifique dans les départements disparaissent, il n'est pas clair qui assurera leur rôle : les assistantes du Comité national pour moitié et les directions régionales pour moitié (collecte des rapports ?). La CPCN demande qu'une politique scientifique claire soit définie et menée par les DSA, en lien avec les directeurs de laboratoire. En particulier, elle réfute toute augmentation du nombre de postes fléchés au concours résultant d'éventuelles demandes des DIRs.

– *Projet de loi (en ligne :* `www.pactepourlarecherche.fr`*)* : il n'est qu'assez peu détaillé (ceci n'est pas forcément un défaut : les détails pratiques sont le plus souvent dans les décrets qui suivent). Un article 5 sur l'évaluation, mise en place d'agence d'évaluation de la recherche (AER) indépendante des départements scientifiques du CNRS et de la MSTP (ministère). Cette agence évaluera toutes les unités de tous les organismes. Pour les comités d'évaluation (au moins en mathématiques), rien ou presque ne change, si ce n'est l'endroit où se décide leur composition (AER en remplacement du DSA ou de la MSTP pour les unités non CNRS). Du point de vue du Comité national, la vraie question est en aval. L'AER enverra le rapport à la tutelle du laboratoire, rien ne dit que le rapport repassera devant la section compétente du CN. Le CN n'est plus mentionné dans le projet qu'en tant qu'organe d'évaluation des personnes. En particulier, qui juge des créations/suppressions/fusions d'unités ? Continuera-t-on à effectuer des missions d'évaluation en propre pour les unités CNRS ? Il est possible que rien ou presque ne change en pratique, mais cela reste extrêmement flou, et relève du fonctionnement interne du CNRS. Il y aura donc une réunion plénière du CN le 9 décembre pour discuter de l'ensemble de toutes ces questions. À noter que le projet de loi n'aborde absolument pas l'évaluation des enseignants-chercheurs.

– *Perspectives budgétaires* : budget en faible augmentation, mais les budgets récurrents vont plutôt baisser. Sur les 3000 postes créés, le CNRS en a obtenu environ 200, auxquels il faut rajouter de l'ordre de 90 postes d'accueil. Sur les 200 postes permanents, la répartition prévue par la direction générale est de 160 ITA et 40 chercheurs. Dans le contexte de départs à la retraite moins importants qu'en 2005, il est à craindre que l'on ait moins de postes au concours 2006. La CPCN souhaite qu'un effort soit fait pour que le bilan comptable ne soit pas négatif de 2005 à 2006.

– *La question des délégations a été de nouveau évoquée. Ce qui a été dit par le DG* : la part nationale est amenée à diminuer, puisque l'on attribue de plus en plus de délégations aux universités lors des renouvellements quadriennaux. La gestion de ces délégations est laissée aux universités concernées. Il y a manifestement des dossiers qui se perdent, vu le nombre d'étapes intermédiaires dans l'évaluation. Le nombre d'intervenants dans le processus est trop élevé, mais au bout du compte les mathématiques s'en sortent de mieux en mieux. Il est important de toujours demander des délégations par les deux voies (sur le quota du plan quadriennal de l'université et par la voie nationale). Par rapport à l'an dernier : le processus n'a pas encore démarré. Il sera plus ramassé dans le temps a priori. À noter que pour les demandes de post-docs, tout sera bouclé fin décembre (plus tôt, donc, que l'an dernier).

Changements organisationnels

À l'occasion du récent départ de M. Lannoo, la section a tenu à le remercier pour son action à la tête du département SPM, et la motion suivante a été approuvée à l'unanimité `http://cn.math.cnrs.fr/automne2005/motion-01-a05.txt`

Affectations des nouveaux entrants (CR/DR)

La section discute des cas ayant posé problème (1er choix du candidat non suivi), et de la pertinence de l'utilisation des affectations en relation avec des questions de politiques scientifiques vis-à-vis des laboratoires intéressés par les candidats. La section (plus exactement le jury) devrait à l'avenir émettre des recommandations plus claires sur ces questions d'affectation (qui sont la prérogative de la direction scientifique). En tout état de cause, le processus conduisant aux affectations doit être relativement transparent et permettre au candidat d'avoir l'occasion de s'exprimer. Les cas ayant provoqué la discussion ont conduit à des affectations qui sont raisonnables scientifiquement, la section les approuve par un vote majoritaire. Les autres affectations de CRs sont confirmées à l'unanimité. Les affectations des DRs nouvellement promus sont également confirmées à l'unanimité.

Cas particuliers de laboratoires

Orléans/Tours : avis favorable à la création d'une fédération de recherche. C'est l'occasion pour la direction scientifique de rappeler que ce type de fédération, rassemblant des sites distants géographiquement, n'est aucunement un prélude à une unification des unités, mais a vocation à favoriser la coordination des laboratoires impliqués, dans leur dialogue avec leurs tutelles ainsi qu'au niveau régional.

Statistique et génome (UMR 8071, Évry) / Génome et informatique (UMR 8116, Évry) : avis favorable à l'intégration de l'UMR 8116 dans l'UMR 8071.

Démission Teissier (directeur institut fédératif de Jussieu) : pas de remplaçant prévu actuellement. L'IFJ a permis des actions communes, notamment pour la bibliothèque, il faudra trouver un nouveau directeur.

Rouen : la situation n'a pas avancé sur les points évoqués lors de la visite du laboratoire en juin 2005. La section n'a d'autre choix que de demander la mise en FRE.

Concours

Les auditions et les délibérations du jury pour le concours 2006 auront lieu du 10 au 14 avril. La section décide de ne pas procéder à l'audition des candidats DRs, et de ne pas utiliser d'experts (ce dernier point sous réserve de l'arrêté d'ouverture du concours).

Comités d'évaluation

La section approuve la désignation des représentants pour les évaluations d'unités du printemps 2006.

Reconstitutions de carrière

Avis favorable aux dossiers présentés.

Titularisations

La section approuve l'ensemble des demandes.

Promotions CR1

La section donne un avis favorable à l'ensemble des promouvables, sans effectuer de classement (le budget permettant à l'ensemble de ces promotions d'avoir lieu).

Accueils en détachement

La section approuve le classement suivant, (en gardant à l'esprit qu'en cas de non-détachement, les classés seront prioritaires lors de l'examen des délégations s'ils ont déposé une demande)

1 Auscher, 2 Lagoutière, 3 Rosier, 4 Lambert, 5 Creusé, 6 Amroun, 6 Benayadi, 6 Cieutat, 6 Miranville, 6 Pittet, 6 Tibar, 6 Zaidenberg.

Promotions DR

La section note l'abondance d'excellents candidats pour un très faible nombre de promotions possibles, particulièrement au niveau DRCE où ce nombre est quasi-nul. Les critères retenus pour l'examen des dossiers sont consultables en ligne, `http://www.cnrs.fr/comitenational/sections/critere/section01.htm`

Nombre de promos DR pour cette année, sur l'ensemble du CNRS :

100 DR1, 12 DRCE1, 13 DRCE2

DRCE1 → DRCE2

1 J.-Y. Girard
2 J.-P. Bourguignon, J.-L. Loday.

DR1 → DRCE1

1 C. Soulé
2 F. Murat

DR2 → DR1

1 P. Biane
2 G. Besson
3 K. Chemla
4 L. Cohen

Cas particuliers de chercheurs

Détachements : la section donne un avis favorable aux diverses demandes présentées, en modulant éventuellement leur durée. Elle rappelle que pour pouvoir se prononcer efficacement sur ce type de demandes, il importe qu'elles soient faites dans les délais (et non a posteriori, ce qui semble malheureusement la règle de fait), et accompagnées d'un dossier scientifique clair en liaison avec la demande. Par ailleurs, elle souhaite être informée des projets à long terme des chercheurs dans ce type de positions (en particulier lorsqu'ils occupent un emploi permanent), lors des demandes de renouvellement.

Mutations : la section donne un avis favorable aux mutations qu'elle juge scientifiquement justifiées. Elle rappelle que toute demande doit être effectuée dans des délais raisonnables (c'est-à-dire pour être examinée à la session qui précède la date du changement d'affectation demandée), et accompagnée d'un dossier scientifique expliquant et appuyant cette demande, faute de quoi la section ne pourra se prononcer.

La section approuve ensuite plusieurs *échanges de service* entre chargés de recherche et maîtres de conférence.

Colloques – Écoles

Le bilan classé des demandes figure à
`http://cn.math.cnrs.fr/automne2005/Colloques-Ecoles-Classement.txt`

Les 14 dossiers des Écoles 2006 ont été classés en paquets suivant les critères suivants :

(1) Qualité du projet de formation et du projet scientifique ;
(2) Qualité et opportunité de l'école ;
(3) Pertinence du budget.

Les Écoles sont financées par la formation continue du CNRS et reçoivent des crédits plus importants que les colloques. Il faut donc que les dossiers qui pourraient être financés comme école n'encombrent pas les demandes de colloques. À titre d'information, en 2005 le CNRS a financé 87 écoles, pour un montant de 1,3 million d'euros, dont 9 en mathématiques (dont 3 interdisciplinaires) pour 137 000 euros.

L'examen des dossiers de colloques 2006 s'est faite comme l'an passé, puisque malgré les changements en cours au CNRS, la méthode d'attribution est reconduite. Étant entendu que la somme globale allouée n'est pas extensible, un grand nombre de subventions signifie des subventions petites. En 2005, c'est 17 colloques de mathématiques qui ont été soutenus à hauteur de 42000 euros (le département SPM a soutenu 54 colloques, pour 139 000 euros).

Les 37 dossiers de colloques 2006 ont été classés en paquets de priorité. Les critères retenus sont les suivants :

(1) éligibilité : les dossiers de colloques au CIRM sont écartés, la subvention CNRS étant déjà faite par ce biais ;
(2) Qualité du projet scientifique ;
(3) Qualité et opportunité du colloque ;
(4) Pertinence du budget.

En pratique, le point (1) n'était pas connu de tous, et le projet scientifique n'était pas toujours explicité. Pire, les budgets sont souvent inexploitables, voire incohérents. Par exemple, un budget centré sur la subvention CNRS n'est pas réaliste au vu des sommes allouées. Dès que les modalités pour 2007 seront plus claires, un formulaire type sera mis à disposition des demandeurs, sur le site de la section 01 du Comité national (`cn.math.cnrs.fr`).

GDRs

La section approuve les bilans (positifs) des GDRs à mi-parcours et en fin de parcours, ainsi que les demandes de renouvellement et de création qui lui sont présentés. À noter que le CNRS souhaite encourager la constitution de réseaux européens (GDRE), mais que, pour des raisons de facilité administrative, il est recommandé de constituer un GDR qui représente le nœud français dans le GDRE (tout en déposant les demandes simultanément et de façon coordonnée).

Journaux

La section approuve le renouvellement des subventions demandées.

Recrutements universitaires des mathématicien(ne)s en 2004

Laurent Busé

Cette fiche est, pour sa majeure partie, extraite des statistiques 2004 du Ministère de l'Éducation Nationale disponibles à l'url :

`http://www.education.gouv.fr/personnel/enseignant_superieur/enseignant_chercheur/statistiques.htm`

Flux entrant des enseignants-chercheurs

	Postes en 25	Postes en 26	Postes toutes disciplines	% 25 et 26
MCF	45	49	2017	4,66%
PR	21	19	703	5,69%

Tant pour les maîtres de conférences que pour les professeurs, ces chiffres sont en léger retrait par rapport aux années précédentes. Dans le même temps, les thèses de mathématiques (plus précisemment les allocations ordinaires du ministère) représentent 5,45% des thèses 2003-2004 toutes disciplines confondues (ce dernier chiffre étant à peu près constant depuis 2000-2001).

Qualifications

Section	Dossiers examinés	Candidats retenus	Taux de qualification
Maître de Conférences			
25	270	214	79,26%
26	387	259	66,93%
Professeurs			
25	104	91	87,50%
26	104	77	74,04%

Toutes sections confondues, 16 115 dossiers ont été examinés et 9 249 qualifications (57,39%) comme maître de conférences ont été délivrées (noter qu'un même candidat peut recevoir plusieurs qualifications et donc présenter plusieurs dossiers). Les mathématiques (sections 25 et 26) représentent donc moins de (car plusieurs candidats sont qualifiés en 25 et 26) 5,11%. Les listes nominatives de qualifiés disponibles sur le site de l'Opération Postes montrent que 49 candidats ont reçu la double qualification 25 et 26 cette année.

Pour les professeurs, 3196 dossiers ont été examinés et 1896 qualifications (57,39%) ont été délivrées ; les mathématiques représentent alors moins de 8,86%.

Au vu de ces chiffres, la proportion des candidats qualifiés est sensiblement comparable à celle des candidats recrutés pour les maîtres de conférences, et légèrement favorable pour les professeurs.

Recrutement par année de qualification

Section	Année de qualification du candidat nommé						
	2000	2001	2002	2003	2004	Total	% qual. en 2004
Maître de Conférences							
25		7	6	11	21	45	46,67%
26		3	5	19	22	49	44,90%
27			7	44	92	143	64,34%
Toutes sections	19	116	245	574	1063	2017	52,70%
Professeurs							
25	1	1	1	6	12	21	57,14%
26		1	1	8	9	19	47,37%
27		2	8	15	23	48	47,92%
Toutes sections	6	43	89	224	360	722	49,86%

La proportion des personnes recrutées en étant fraîchement qualifiées en mathématiques se situe donc dans la moyenne, toutes sections confondues.

Répartition des recrutés par sexe

Section	Femmes	Hommes	Total	% Femmes
Maître de Conférences				
25	7	38	45	15,6%
26	17	32	49	34,7%
27	30	113	143	21,0%
Toutes sections	830	1187	2017	41,2%
Professeurs				
25	1	20	21	4,8%
26	3	16	19	15,8%
27	8	40	48	16,7%
Toutes sections	181	541	722	25,1%

Les femmes sont donc clairement sous-représentées en mathématiques, surtout « fondamentales ». Noter que la proportion de 4,8% de femmes recrutées comme professeur en section 25 est la plus faible, et de très loin, parmi toutes les sections (seule la section 60, mécanique, est en dessous des 10% avec la section 25).

Âge moyen du candidat nommé

Section	Maître de Conférences		Professeurs	
	Effectifs	Âge moyen	Effectifs	Âge moyen
25	45	31 ans 2 mois	21	36 ans et 5 mois
26	49	30 ans et 4 mois	19	36 ans et 6 mois
27	143	30 ans et 1 mois	48	40 ans et 3 mois
Toutes sections	2017	32 ans et 8 mois	774	42 ans et 9 mois

Le recrutement en mathématiques se fait donc plus tôt que la moyenne, toutes sections confondues, surtout pour les professeurs. Si l'on couple ces résultats avec le sexe du recruté, on obtient les chiffres suivants :

Section	**Femmes**	**Âge moyen**	**Hommes**	**Âge moyen**
Maître de Conférences				
25	7	37 ans 8 mois	38	30 ans
26	17	29 ans 9 mois	32	30 ans 8 mois
27	30	31 ans 1 mois	113	29 ans 10 mois
Toutes sections	830	33 ans 2 mois	1187	32 ans 4 mois
Professeurs				
25	1	31 ans	20	36 ans 9 mois
26	3	38 ans 4 mois	16	36 ans 3 mois
27	8	41 ans 7 mois	40	39 ans 11 mois
Toutes sections	194	43 ans 11 mois	580	42 ans 4 mois

Section	**Total**	**Âge moyen**
Maître de Conférences		
25	45	31 ans 2 mois
26	49	30 ans et 4 mois
27	143	30 ans et 1 mois
Toutes sections	2017	32 ans et 8 mois
Professeurs		
25	21	36 ans et 5 mois
26	19	36 ans et 6 mois
27	48	40 ans et 3 mois
Toutes sections	774	42 ans et 9 mois

Complément : recrutement des jeunes chercheurs au CNRS et à l'INRIA

En 2004, le CNRS a recruté 13 mathématiciens et 2 mathématiciennes en tant que CR2 (Chargé de Recherche de 2$^{\text{ième}}$ classe), ce qui représente environ 6,8% de la totalité des postes de CR2 mis au concours cette année. De son côté, l'INRIA a recruté 24 CR2, 23 hommes et 1 femme, dont 6 mathématiciens (au sens de la spécialité de leur thèse). Rappelons que ces deux concours étaient soumis à des limites d'âge, ce qui donne des moyennes d'âge assez faible pour ces recrutements (à peine plus de 29 ans pour l'INRIA).

Les mathématiques à l'ANR en 2005

Pierre Arnoux, Philippe Flajolet, Vincent Franjou, Christian Kassel

L'Agence Nationale de la Recherche – ANR – a été créée en février 2005 avec pour rôle de soutenir des projets de recherche « *venant de toute la communauté scientifique, financés après mise en concurrence et évaluation par les pairs* ». Ce qui nous intéresse ici[1] est le « Programme Blanc » qui se compose du programme « Non Thématique » (NT) et de son compagnon, le programme « Jeunes Chercheurs » (JC). Selon sa description officielle, « *le Programme Blanc donne une impulsion significative à des projets ambitieux qui se positionnent favorablement dans la compétition internationale et qui présentent des objectifs originaux, en rupture avec les itinéraires de recherche bien balisés* ».

En 2005, 200 millions d'Euros ont été au total consacrés au programme JC+NT, sur lesquels 30 millions d'Euros étaient réservés aux actions étiquetées JC.

Neuf Conseils Scientifiques Disciplinaires[2] (CSD) ont été nommés. Nous fournissons ici le compte rendu relatif au Comité « *Mathématiques et Interactions* », encore appelé poétiquement CSD5. Quelques réflexions plus générales concluent ce compte-rendu.

L'appel d'offres

L'appel d'offre a été lancé avec une date limite de soumission des projets fixée à début juin 2005 ; suite à un processus complexe, les résultats seront finalement transmis aux responsables de soumissions de projets début octobre 2005.

Les projets sont d'abord déposés sur un site Internet dédié. Le soumissionnaire (sic !) choisit lui-même, pour le projet qu'il dépose, parmi les neuf disciplines du programme :

- une discipline principale d'appartenance ;
- le cas échéant, une discipline secondaire.

Nous avons ainsi reçu en juin 2005 des projets « Monos » (ceux qui mettent uniquement en jeu la discipline mathématique) et des projets « Bis » (typiquement : maths plus sciences physiques, ou informatique, ou biologie). Pour les projets Bis, nous pouvions donc intervenir soit en tant que comité principal, soit en tant que comité secondaire.

En 2005, pour les projets où figuraient les mathématiques, les nombres de soumissions ont été les suivants :

[1] Une autre partie des activités de l'ANR concerne des programmes spécifiques dans des domaines comme énergie, environnement, santé, information ; parmi ses missions figure encore le fait de « favoriser les interactions entre laboratoires publics et laboratoires d'entreprise en développant les partenariats ».

[2] La liste des divers CSD et de leurs membres se trouve sur le site Internet de l'ANR.

	Maths (CSD5) en principal	Maths (CSD5) en secondaire
Jeune Chercheur mono :	25	—
Jeune Chercheur bi :	19	20
Non Thématique mono :	11	—
Non Thématique bi :	32	37
Total :	**87**	**57**

Rapportés à l'ensemble des disciplines, les projets en mathématiques (Projets Mono ou Bi-principal en CSD5) représentaient cette année 4% du nombre total des demandes (2200, toutes disciplines confondues).

Le Comité (CSD5), les experts

Le CSD5 a, en 2005, comporté 11 membres à savoir : Pierre Arnoux, Thierry Colin, Hakan Eliasson, Philippe Flajolet (Président), Vincent Franjou, Alice Guionnet, Christian Kassel, Bertrand Maury, Jacques Tilouine, Jean-Philippe Vert, André Voros.

Ce comité a été nommé par l'ANR après consultation des organismes de recherche et de la MSTP, semble-t-il. La liste couvrait selon nous assez bien la discipline, avec (en gros) 4 mathématiciens purs, 3 mathématiciens appliqués [2 analystes numériciens, une probabiliste], et 4 mathématiciens d'interface [informatique, biologie, statistiques, physique]. (Par parenthèse cette configuration intégrait mieux les mathématiques pures que dans le cas de la précédente ACI NIM, dont l'objectif était, il est vrai, autre.)

La première étape du processus consistait à solliciter l'avis d'experts extérieurs au CSD, de manière analogue à ce que pratiquent des agences étrangères comme la NSF. La nomination de ces experts a fait l'objet d'une session du CSD de deux jours, fin juin 2005. Il était demandé que chaque CSD nomme 4 experts pour un projet Mono ou un projet Bi ayant ce CSD comme rattachement principal. Nous n'avions par contre à nommer que deux experts lorsque nous n'intervenions qu'en tant que CSD secondaire. Nous avons dans la très grande majorité des cas respecté ces guides. À cause des intersections aléatoires entre les choix indépendants des comités, de fait entre 4 et 6 experts se sont en général trouvés nommés.

En juillet, les projets (un pointeur sur une page ouèbe) ont été envoyés aux experts. Dans le même temps, ils étaient communiqués aux rapporteurs. La date limite de réponse imposée aux experts était début septembre. Les experts se sont trouvés être à environ 80% français (cela est dû en partie au dépôt de dossiers en langue française), mais ce fait n'a semble-t-il pas posé de problème particulier. Le taux de réponse des experts début septembre s'est établi à environ 40% pour le CSD5, ce qui est une assez bonne moyenne en comparaison d'autres disciplines. De la sorte les projets avaient souvent reçu deux ou trois expertises extérieures, parfois quatre. Quelques relances ont permis d'éviter le fait que certains des projets ne reçoivent aucun rapport d'expertise. En parallèle, de juillet à septembre, les contenus des projets étaient bien sûr examinés par les rapporteurs concernés.

Les rapports d'experts sont entrés sur le ouèbe et combinent notations et appréciations rédigées. Certains estiment à environ 3 ou 4 heures de temps le travail d'un expert sur un dossier (lecture, écriture des notations et appréciations).

L'évaluation

Les membres du CSD5 se sont réunis deux jours et demi mi-septembre 2005 pour réaliser l'évaluation comparative des

$$87 + 57 = 144$$

dossiers dont ils avaient la charge. Chaque rapporteur avait alors connaissance de ses dossiers et des expertises correspondantes. Les délais étaient très tendus et l'on peut regretter : (*i*) que les membres du CSD n'aient pas eu accès, avant la tenue de la session de septembre, aux dossiers sur lesquels ils ne rapportaient pas ; (*ii*) que le temps de préparation de la synthèse des expertises externes par les rapporteurs ait été si court (*in fine*, quelques jours seulement). Il n'y a aucune raison pour que ces défauts de jeunesse, de nature purement technique et en partie liés à un outil informatique encore en rodage ne soient pas corrigés dès l'an prochain.

Le comité s'est tenu, selon nous, de manière très ouverte aux différentes sensibilités mathématiques. Pour partie des deux jours et demi de séance, nous nous sommes organisés en trois sous-comités, disons pour simplifier, maths pures, maths applis, et interfaces des maths. Chaque sous-comité planchait d'abord sur l'union des dossiers de ses membres, chaque rapporteur présentant et discutant ses propres dossiers – de sorte que le sous-comité se forge une idée collective, plus approfondie qu'il n'aurait été possible en session plénière, du classsement des dossiers dont il avait la charge. On passait ensuite à une phase plénière où chaque sous comité présentait ses recommandations à l'ensemble du CSD ; puis, discussion, harmonisation, interclassement, et enfin décision finale de classement.

Quant aux critères adoptés, ils sont déjà connus de ceux qui ont réalisés des expertises et ont été repris par les membres du CSD. Le plus simple est de les citer *in extenso*, ce en suivant les rubriques du questionnaire ouèbe (NT) :

– Porteur de Projet : appréciation, commentaire. Équipes impliquées : appréciation, commentaire.
– Projet : Intérêt scientifique, réalisme du programme de travail, originalité dans le contexte général, positionnement/interaction au niveau international.
– Interdisciplinarité : appréciation, commentaire.
– Demande financière : appréciation, commentaire.

Nous avons pris un appui fort sur ces expertises, mais assumons naturellement la responsabilité des choix que nous avons faits, en situation difficile de « concours » plutôt que « d'examen ». Signalons que le critère d'interdisciplinarité n'était pertinent que pour les projets Bis, des projets de mathématiques pures ou appliquées en solo étant reconnus de plein droit[3]. Comme il est normal, les projets impliquent pratiquement tous plusieurs équipes et une estimation de la plausibilité et de la richesse du montage proposé était tentée.

Pour les projets Bis, il avait été décidé (tant par les présidents de CSD que par l'ANR) que le classement final concernant les dossiers Bis était du ressort du CSD de rattachement principal. Il n'était guère possible de faire autrement, vu la complexité de gestion de $\binom{9}{2} = 36$ intersections entre comités. Dans quelques rares

[3] Les quatre catégories JC/NT $\times$ Monos/Bis disposaient de fait d'enveloppes de financement séparées (établies préalablement par l'ANR en proportion des volumes des demandes de chaque type).

cas, on a pu regretter que des projets que le CSD5 (en position d'avis secondaire) jugeait très bons ne soient pas passés ; on pourrait imaginer à l'avenir de donner des droits à valeur de forcing (des « jokers ») au comité secondaire.

Notons enfin que les projets JC et les projets NT concouraient *a priori* dans des catégories différentes dotées de budgets séparés. Compte tenu d'une pression trop forte sur le budget JC, nous avons procédé à quelques reclassements de projets JC en Projets NT, lorsque les circonstances s'y prêtaient. De la sorte nous estimons que les jeunes chercheurs en maths ont été *de facto* sensiblement à égalité avec les anciens.

La finalisation du programme

L'étape suivant la session de septembre des CSD était le comité de pilotage (le 22 septembre 2005) destiné à harmoniser le programme entre CSD. Nos propositions étant conformes au budget alloué ne posaient pas de problèmes sur ce plan, mais le taux de sélectivité de nos propositions était par trop inférieur à la moyenne prévue (l'objectif fixé par l'ANR était d'environ 25%–30% pour JC et 35%–40% pour NT.) Il a été alors procédé le 22 septembre à quelques ajustements finaux, mais de portée pour nous très limitée. En effet, le comité de pilotage du 22 septembre a dans l'ensemble bien accepté une « exception culturelle » des mathématiques.

Globalement, pour les 87 projets sur lesquels nous avions le pouvoir de décision, la sélectivité (les projets Monos et ceux ayant les maths comme principal) est la suivante :

38% (14/37) pour le programme JC ; 46% (23/50) pour le programme NT.

(Les dénominateurs tiennent compte des reclassements JC→NT.) Ceci correspond à un financement attribué aux projets d'un montant égal à 4.5 MEuros. Cette somme représente 2.25% du budget total JC+NT de l'ANR.

Pour les 57 projets Bis où les maths étaient secondaires, le nombre de projets acceptés est de l'ordre de 20, pour un montant total qui devrait ne pas être inférieur à 2.5 MEuros. Noter cependant que seule une fraction de cette dernière somme est à prendre en compte au titre d'équipes de mathématiciens.

Le futur ?

Disons tout d'abord que nous avons été très favorablement impressionnés par la qualité généralement élevée des soumissions. Dans nombre de cas, en situation de forte compétition et à budget fixé, nous nous sommes vus contraints de refuser des projets que nous estimions dignes de financement. Nous sommes conscients de l'effort que nécessite le montage d'un projet et la préparation des dossiers – nous tenons à en remercier ici tous les responsables. Nous exprimons notre gratitude à tous les membres de la communauté mathématique qui ont accepté de participer à la phase d'expertise des projets en fournissant de nombreuses analyses très précieuses.

D'un point de vue concret, il nous semble que la recommandation la plus immédiate à adresser à la communauté mathématicienne est la suivante : Ne pas hésiter à soumettre des projets de qualité et ne pas pratiquer une autocensure excessive. Il nous semble bien que la part des mathématiques a, selon le terme même d'un rapport[4] de l'ANR, été « comprimée ». Nous attribuons ceci d'une part à un relativement faible volume de propositions émanant de la communauté des mathématiciens, d'autre part à des demandes financières souvent sous-dimensionnées en provenance des mathématiciens. À cet égard, il est curieux que la demande moyenne d'un mathématicien soit voisine de celle d'un spécialiste de sciences humaines et sociales et environ la moitié de celle d'un projet typique dans les autres disciplines.

Le programme NT+JC de cette année doit être reconduit en 2006. Nous exprimons ici la nécessité qu'il soit doté de financements sensiblement accrus. En 2005, les 200 millions d'Euros du « Programme Blanc » représentent 37% du budget total des appels à projets de l'ANR. Nous espérons que cet espace de liberté pour la recherche mathématique verra sa part croître sensiblement dans le budget de l'Agence. Nous exprimons dans le même temps la nécessité que soit respecté pour l'avenir un sain équilibre entre, d'une part, le financement de la recherche sur projets et, d'autre part, le vital soutien de base aux laboratoires, aux équipes, aux groupements de recherche fédérateurs, et à la politique scientifique des organismes.

[4] Recommandons à ce sujet et pour une vue d'ensemble le « dossier de presse » (? !) daté du 15 novembre 2005 et disponible sur le site de l'ANR.

Claude Berge et Paul Erdős, 1995

CARNET

Claude Berge : un hommage en quelques images personnelles

Geňa Hahn[1]

1- Le 30 juin 2006 nous nous souviendrons de la mort de l'artiste français, connu également pour son œuvre mathématique et son sourire timide, Claude Berge. D'une intelligence profonde bien appliquée à ses intérêts très divers - analyse fonctionnelle, art primitif, combinatoire, échecs, femmes, hex, jeux en général, littérature potentielle, sculpture, théorie des graphes et hypergraphes, théorie des jeux, topologie - et d'une sensibilité souvent dissimulée, Claude Berge fut une institution française. Il est surtout connu pour ce qu'il a fait pour la théorie des graphes (et la combinatoire en général) en France et dans le monde - il en est l'un des pères. Les dires de Gian-Carlo Rota à ce sujet ont été assez cités depuis le 30 juin 2002, en particulier dans l'excellent article [4] de Vašek Chvátal, un collègue, et surtout un ami, de Claude Berge. C'est dans cet article que l'on trouve également une appréciation de ses mathématiques discrètes, le domaine qu'il aurait pu choisir simplement pour son nom. Une multitude d'articles et de sites internet sont disponibles (voir la section 16) pour ceux qui veulent en savoir plus sur sa vie mathématique, il y en a même qui parlent de sa vie littéraire, mais la vie de l'homme est absente (sauf dans l'entretien avec Jacques Nimier, `http://perso.wanadoo.fr/jacques.nimier/entretien_berge.htm`).

Il l'aurait certainement voulu ainsi et nous lui devons ce respect. Le but ici est de donner une *impression* de l'homme, une petite peinture discrète, humble.

FIG. 1. Extrait de la photo du colloque Berge, 1995
Vašek Chvátal, Ron Graham, Paul Erdős, CB, Dominique Sotteau, Carsten Thomassen

[1] Université de Montréal, Département d'informatique et de recherche opérationnelle

2- C'était une petite tradition, les colloques dits *Berge* tous les (à peu près) quatre ans. Comme les précédents, le dernier a eu lieu à Luminy en 2000. Les photos de Claude Berge et Paul Erdős qui circulent sur l'internet sans que l'on sache comment elles s'y sont trouvées proviennent de celui de 1995. C'est là que le Prix Euler a été remis à Claude Berge, voir la figure 2.

FIG. 2. Remise du Prix Euler : Ron Graham, Ralph Stanton, CB

3- Dans la pièce enfumée du 54 boulevard Raspail, deuxième étage, l'air vibre de tension. La tête sourit du haut aux joueurs penchés sur le parallélogramme noir rempli de trous dont beaucoup remplis de billes. Martine est assise devant la machine à écrire, Henry empeste avec sa n-ième cigarette ($n \geqslant 25$), Pierre l'aide, Yahya observe, les visiteurs n'osent pas interrompre. Une main caresse une bille noire, puis la pose dans un trou. Deux minutes de silence, le calme revient, on respire de nouveau. La partie de hex est finie, tout le monde voit que le noir aura gagné, on peut aller déjeuner. Ce n'est que là que Claude pose la question : *Tu manges avec nous ?*

FIG. 3. Une sculpture de CB

4- Autour d'une grande table les chaises sont tassées, il ne reste presque plus de place. Au tableau, un canadien - ou, peut-être, un américain ou un slovaque - parle des graphes, en français approximatif truffé d'anglais. Les étudiants, chercheurs, visiteurs, plongent dans l'exposé même si certains pensent plutôt à l'heure car, à la sortie, il faudra courir chez Poilâne (la queue !) puis à la gare quand on vient de loin (Orsay, Le Mans). Finalement, les questions, presque hésitantes, de Claude. En anglais, cela facilite la vie. Pertinentes.

FIG. 4. Mathématiciens à la Barbade

5- Barbade. La mer, le soleil, les amis, les maths. Un *workshop* occasionnel instauré par Vašek Chvátal dans les années 1980 et maintenant disparu au profit d'autres. Un environnement parfait pour Claude Berge : une vingtaine de matheux qui mangent en travaillant et travaillent en buvant des piñas coladas, des Banks et du Mount Gay. La plongée à 50 mètres, le calme (relatif) d'une station de recherche en biologie marine dérangé seulement par les chiens d'aspect méchant et de nature docile, les oiseaux, et, parfois, des singes (une année, les biologistes en avaient adopté un petit, qui semait la terreur par sa rapidité et sa curiosité avant d'être enfermé dans une grande cage pour la sécurité de tous, lui compris). Et, bien sûr, par les jeunes biologistes, souvent jolies, toujours intéressantes.

Beaucoup de théorèmes ont été prouvés, ou au moins découverts et commencés, à Bellairs, en particulier sur des graphes parfaits, voir [3]. C'est dans les Caraïbes que l'on trouvait Claude à l'aise, disant, avec un sourire malin *Geňa fait même du* flying fish *un repas mangeable*.

Plus sérieusement, la curiosité et l'ouverture d'esprit étaient toujours bien servies dans cette atmosphère amicale, libre et libératrice, créatrice, sans contrainte aucune (surtout administrative). Et, quelque part, cet aspect caractérise bien Claude Berge, joueur, penseur, artiste. Sans aucun doute, les mathématiques étaient pour lui un domaine artistique, avec ses contraintes et ses libertés.

FIG. 5. CB à la Barbade

6- Claude Berge, sculpteur[2]. On les voit rarement, ces œuvres ludiques, intenses.

FIG. 6. Vernissage à la Galerie Adrian Bondy

Il y en a même une qui est perdue depuis des années. Pourtant il y en avait ! D'abord les sculptures multipètres [5], des collages magnifiques de pierres et de coquillages d'inspiration, disons, ancestrale. Puis un silence artistique après la mort de son fils. Et un renouveau, commençant, peut-être, avec une petite rétrospective à la Galerie Adrian Bondy en 1990, figure 6 (voir aussi [8], l'avant-dernière photo). Les dernières sculptures pourraient s'appeler *duchampètres*, elles sont construites à la campagne à partir d'objets fermiers (voir [8], la dernière photo). Entre les deux, il y a eu également quelques bronzes, dont les magnifiques *Clones*, figure 7, un couple magique fumeur de cigarettes (il suffit de leur en allumer une à chacun pour qu'ils les fument).

[2] Si jamais le lecteur connaît des propriétaires des œuvres de Claude Berge, je le prie de m'en informer car je pense qu'une exposition ne serait pas une mauvaise idée. J'en ai deux, les *Clones*, et la première femme multipètre qu'il ait faite.

FIG. 7. Les *Clones*

Ce que les sculptures de Claude partagent avec les mathématiques, c'est la création d'objets nouveaux, d'idées nouvelles, à partir d'une collection a priori très disparate, au départ par un jeu, mais à la fin et au fond par un procédé réfléchi et très sérieux. Il suffit de regarder ces masques de coquillages – rien à voir avec le kitch que l'on peut acheter près des plages presque partout au monde. Il y a toujours le jeu, la sensualité, la sexualité, et la timidité.

FIG. 8. Une sculpture de CB

7- Les créations sculpturales de Claude Berge rappellent, sans les copier, les objets d'art primitif dont il avait une grande collection et dont il était connaisseur. De l'art asmat, il était bien plus que simple connaisseur, mais un expert reconnu [1], membre de la societé des océanistes, [9]. Malin, il a su mélanger ses plaisirs, ses envies et son travail : pendant ses voyages mathématiques il trouvait le temps de faire de la plongée sous-marine, souvent assez près des societés primitives. Cela lui permettait de partager le temps libre entre la mer et l'art, sans parler d'assouvir sa soif de nouvelles impressions, de nouvelles émotions, de nouvelles rencontres, aussi passagères qu'elles puissent être. *Comprendre, sentir, éprouver, ... créer.*

FIG. 9. Une sculpture de CB

8- L'OuLiPo [10] est une société secrète pour ceux qui ne la connaissent pas. La **li**ttérature **po**tentielle se devéloppe, dans son **ou**vroir, depuis le 24 novembre 1960 (donc exactement 46 ans avant le moment où ceci est écrit). Pour une fois, citons :

> *L'Ouvroir de Littérature Potentielle (OuLiPo) a été fondé, le 24 novembre 1960, par François Le Lionnais, Raymond Queneau et une dizaine de leurs amis écrivains et/ou mathématiciens et/ou peintres : Albert-Marie Schmidt, Jean Queval, Jean Lescure, Jacques Duchateau, Claude Berge et Jacques Bens selon le tapuscrit de ce dernier, secrétaire définitivement provisoire du début. La réunion fondatrice a eu lieu au restaurant « Le Vrai Gascon », 82 rue du Bac à Paris.*
>
> *Le propos était d'inventer de nouvelles formes poétiques ou romanesques, résultant d'une sorte de transfert de technologie entre Mathématiciens et Ecriverons (sic).*

Claude Berge, membre fondateur, le reste (aucun membre ne peut être exclu). Excusé des réunions par le devoir d'être ailleurs. Comme en théorie des jeux, comme en théorie des graphes, il joue. L'alexandrin [7] et le duc de Densmore [2] font partie de l'univers oulipien, avec *La reine aztèque* (*La princesse aztèque*), sonnets à longueur variable. Citons encore une fois [10]

> *Claude Berge a collaboré avec Georges Perec à qui il a proposé l'usage du bicarré latin d'ordre 10 pour répartir les attributs dans les différentes pièces de l'immeuble décrit dans La Vie mode d'emploi.*

Cette création semble être permanente et évolutive, comme il l'a sans doute voulue. Comme, d'ailleurs, la théorie des graphes.

9- Enfant, on rêve. Adolescent, on fantasme. Adulte, on meurt ... sauf si on continue à rêver et à réaliser ses rêves. En mathématiques, en littérature (potentielle ou non), en peinture, en sculpture, en musique, le rêve fait partie du métier. L'enfant reste et il nourrit l'adulte, qui, en renvoi d'ascenseur, conseille l'enfant sur les songes trop dangereux, en espérant que parfois l'enfant ne suive pas les conseils.

FIG. 10. Une sculpture de CB

10- Les grands hommes gardent une partie plus ou moins importante de l'enfant. Un enfant qui, parfois, ne peut pas, ou ne veut pas, comprendre ce que l'on lui dit. Claude Berge, un homme d'une éternelle patience quand il prouvait un théorème ou construisait un alexandrin disparu [7], n'admettait pas que nous - Adrian Bondy et moi - ne puissions pas photographier en cinq minutes une centaine de minuscules objets, chacun dans sa petite case dans une boîte de 60cm $\times$ 60cm de manière à ce que *tous* les objets soient bien illuminés. Lui, qui était un habitué des salles de Drouot, qui regardait sur ses murs des tableaux des maîtres contemporains, qui savait combien de temps prend un poème, un lemme utilitaire ou un rapport bien fait, il était incapable de comprendre pourquoi une bonne photographie d'une de ses sculptures ne se faisait pas instantanément et coûtait ... disons assez cher.

11- Mai 2002. Je viens à Paris, de Prague où nous vivons depuis 2000, en grande partie pour rendre visite à Claude. Je vais à l'hôpital retrouver sa compagne Birgit crevée, épuisée, mais débordant d'énergie quand il s'agit de Claude. Elle me donne un email imprimé - Paul Seymour annonce la preuve de la conjecture des graphes parfaits. Je lis le texte à Claude. Il est difficile de savoir ce qu'il pense, je devine un mélange de joie d'avoir eu raison et de tristesse que cette aventure soit terminée, qu'il n'y aura plus la conjecture de Berge mais simplement un théorème[3] et, surtout, que le plaisir de chercher ne sera plus.

12- Juin 2002. Depuis une dizaine d'années, nous fêtions nos anniversaires

[3] Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas

ensemble et j'assure Claude qu'on le fera à sa sortie de l'hôpital. Il n'a plus l'air d'y croire, lui, qui est revenu de l'au-delà plusieurs fois déjà. Pourtant son attitude n'est pas celle d'un homme perdu, mourant, mais d'un enfant embêté parce que la grippe l'empêche d'aller jouer avec les copains. Malgré la douleur sans doute atroce. Et Vašek Chvátal me le confirme plus tard : jusqu'au dernier moment, Claude ne voulait pas partir, il n'était pas prêt, il lui restait encore des milliers de choses à faire, des conjectures à proposer, des sculptures à imaginer, des contrepèteries à créer.

13- Ce n'est qu'en 2002 que je me suis rendu compte de la bizarrerie de ma relation avec Claude Berge : en 22 ans, nous n'avons pas parlé mathématiques sérieusement une seule fois. Art, littérature, vin, cinéma, mais point de maths. Pourtant, j'avais fait le gros du travail de ma thèse – sur les hypergraphes ! – à Paris. Deux timides ? Il m'a offert QUI A TUE LE DUC DE DENSMORE [2] avec la dédicace *. . . à un ami calme . . . .*

FIG. 11. CB avec Birgit Bock, A. Bondy, M. Las Vergnas, Montréal

14- Ave, Berge. Ce document est fiévreux, grandement hâtif. Il jaillit, kyrielle, lentement mais non ouvertement, presque quelconque, ruisselant sans tarder. Une victoire walé xénophile y zieute Zoro, youpi (!), xylographe wasp volatilisé universellement tant sur rue que pour oratoire. Non, mes lettres kitch juchent ignobles, haridelles, gémissant, furieux et deviennent carrément banaux, amen.

15-

c'est fini
l'aventure
avant de recommencer
une autre
dernière fois
enfin

beaux jours
ensoleillés par tes
rimes
graphiques
encore

16- Note sur les références

La présente liste contient quelques liens vers des sites ou textes contenant certains faits biographiques sur Claude Berge. Il est inutile de reproduire ces informations ici, notre but étant plutôt de donner un aperçu de l'homme. Toutefois, quelques références bibliographiques y figurent, notamment celles qui ne sont pas aussi facilement trouvables, ou, bien sûr, celles citées.

Pour en savoir plus sur la conjecture de Berge et sa preuve, voir :
`http://www.cs.concordia.ca/~chvatal/perfect/spgt.html`
Pour une page sélective de liens aux sites concernant Claude Berge, voir :
`www.iro.umontreal.ca/~hahn/berge`.

Références

[1] C, Berge, Ancestral Sculpture in Asmat Art, *The world of tribal arts* **1(2)** (1994), 35 – 45.
[2] C. Berge, **Qui a tué le duc de Densmore ?**, *Bibliothèque Oulipienne* **67** (1994), Réédition Castor Astral, 2000.
[3] C. Berge and V. Chvátal, eds., **Topics on perfect graphs**, North-Holland Mathematics Studies **88**, *Annals of Discrete Mathematics* **21**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1984.
[4] V. Chvátal, Claude Berge : 5.6.1926 – 30.6.2002, *Graphs and Combinatorics* **19** (2003), 1-6.
[5] P. Soupault, **Claude Berge : Sculptures Multipètres**, *Le Minotaure*, Paris, 1962.
[6] OULIPO, **adpf**, Association pour la Diffusion de la Pensée Française, Ministère des affaires étrangères, 1995
[7] http ://perso.wanadoo.fr/therese.eveilleau/pages/delices/textes/alexandrins.htm
[8] http ://www.ecp6.jussieu.fr/GT04/Berge/Berge.html
[9] http ://cc.joensuu.fi/esfo/members/members.php
[10] http ://www.oulipo.net/

Toutes les photographies sont ©Geňa Hahn
sauf celle de la figure 11, ©Studio O'Allard photographes Inc.

TRIBUNE LIBRE

Cette rubrique permet à toute personne de notre communauté d'y exprimer une opinion personnelle qui n'engage ni le comité de rédaction, ni la Société Mathématique de France. Les réactions à ces textes sont publiées dans le courrier des lecteurs.

⋆ ⋆ ⋆

En juillet 2004 l'Académie des sciences a émis un avis sur l'enseignement scientifique et technique dans l'enseignement obligatoire que certains mathématiciens ont considéré comme inadmissible. Il est apparu au bureau de l'Académie qu'une contribution a posteriori *de la section de mathématique serait bienvenue. La section de mathématique, dont le délégué était alors Alain Connes, s'est réunie en septembre et a chargé un petit groupe, constitué de Jean-Pierre Demailly, Laurent Lafforgue et Jean-Pierre Kahane, de rédiger un projet qui puisse exprimer la position de la section. Ce petit groupe a procédé à des rédactions séparées et n'a pu parvenir à un accord. La position de Demailly et Lafforgue a donné lieu au texte 'les savoirs fondamentaux au service de l'avenir scientifique et technique', publié par la Fondation pour l'innovation politique* `http://www.fondapol.org/projet-enseignement.jsp#` *sous la signature de Roger Balian, Jean-Michel Bismut, Alain Connes, Jean-Pierre Demailly, Laurent Lafforgue, Pierre Lelong et Jean-Pierre Serre ; celle de Jean-Pierre Kahane, 'Académie, école et mathématiques' nous a été communiquée récemment et paraîtra dans la revue Repères n° 63 (avril 2006) sous la signature de Jean-Pierre Kahane, une version électronique en a été déposée sur le site de la SMF* `http://smf.emath.fr/Enseignement/TribuneLibre/Kahane2.pdf.` *Laurent Lafforgue a exposé dans la* Gazette *105 les raisons de son engagement, voici maintenant la tribune de Jean-Pierre Kahane.*

De l'école, de la connaissance et de la foi

Jean-Pierre Kahane

En tribune libre dans le numéro 105 de la *Gazette*, Laurent Lafforgue a exposé la façon dont il voyait les problèmes de l'école et ce qui fonde la valeur de la culture et du savoir. Il a pris, dit-il, « le risque d'en surprendre plus d'un, voire de scandaliser (cf. [1]). »

C'est vrai, son article a fait choc, et il a provoqué l'indignation de certains membres de la SMF. Personnellement, je n'ai été ni surpris ni scandalisé. S'il exprimait la position de la SMF, il y aurait lieu de protester. Mais les éditeurs, comme Lafforgue lui-même, insistent sur le caractère « très personnel », « strictement personnel », de son approche de l'enseignement et du savoir. Il me paraît donc qu'il faut lire ce texte comme un document sur une certaine façon de penser. Je tenterai d'y répondre à partir d'une autre façon de penser.

J'évoquerai d'abord une amusante méprise de ma part. C'était en 2002. Laurent Lafforgue venait de recevoir la médaille Fields et Laurent Schwartz était mort depuis quelques semaines. J'avais succédé à Evry Schatzman comme président de l'Union rationaliste et j'avais le souci de la renforcer. J'y avais fait adhérer Laurent Schwartz sans aucune difficulté – d'autant plus facilement peut-être que Jacques Hadamard en était président d'honneur. L'Union rationaliste venait donc de perdre une médaille Fields et un Laurent. Je ne connaissais pas beaucoup Laurent Lafforgue, mais j'avais eu l'occasion d'apprécier chez lui une grande rigueur morale. Naïvement, je lui ai suggéré de venir remplir à l'Union rationaliste le vide que laissait Laurent Schwartz. Il a décliné la proposition en m'indiquant son engagement dans l'action catholique, et nous avions convenu de parler plus tard du rationalisme et de la foi.

Je ne pensais certes pas à une explication publique, mais c'est en effet comme militant rationaliste qu'il me semble intéressant d'analyser la position de Laurent Lafforgue et d'y répondre. Je m'exprimerai très librement, sans aucun souci de ménager Lafforgue et sans volonté de le heurter.

Il me faut d'abord conseiller au lecteur de lire ou de relire son article. Voici, de façon sommaire et partielle, comment se présentent pour moi son argumentation et quelques points sensibles. D'abord, un hommage appuyé à l'école républicaine laïque telle qu'elle avait été mise en place par la Troisième République. Puis le constat que cette école n'existe plus, et que le reniement par l'école des principes de l'humanisme classique explique la stérilité littéraire, culturelle et intellectuelle de la France. C'est l'occasion pour Laurent Lafforgue d'exposer les valeurs de l'humanisme classique.
Cependant (paradoxe dit-il), au dessus de son intérêt passionné pour la littérature, la France et sa langue, il place sa foi dans le Christ et sa fidélité confiante à l'Église catholique dont il a reçu cette foi. Cette fidélité le rend critique à l'égard de la France républicaine et laïque, mais ne l'empêche pas de défendre l'école républicaine.
Il la défend par gratitude personnelle et en raison de ce qu'elle a représenté dans le passé. Quand elle a été mise en place, elle a fait étudier Pascal, plus tard Péguy, autant que Voltaire ou Diderot. Elle a fait confiance à l'intelligence et à la liberté de chacun. Elle créait un monde commun, celui de la raison, qui pour lui est un don de Dieu.

Lafforgue nourrit un soupçon majeur à l'égard de la France laïque, sécularisée et détachée de ses racines chrétiennes et bibliques, à savoir d'être incapable de fécondité sur le long terme. Il est frappé par la différence de destin et de créativité entre la France et les États-Unis, où la liberté s'est construite en s'appuyant sur le christianisme. Il déclare qu'aujourd'hui plus que jamais, le peuple juif, peuple de la Loi et des prophètes, fait preuve d'une créativité dont aucun peuple n'approche.
Il lance un défi à la société française sécularisée : celui de la fécondité, celui de la reconstruction d'une école de la culture et du savoir. Si cela s'avère impossible, il ira jouer ailleurs, en reportant tout son espoir sur l'Église. Il suffira de petites communautés très fortes et enracinées dans la foi, sur laquelle tout peut être reconstruit. Par exemple, des établissements confessionnels hors contrat pourraient refonder un enseignement religieux (lecture approfondie de la Bible en hébreu et en

grec, étude de toute la tradition depuis les Pères de l'Église, étude de la tradition juive) et profane (humanités classiques, littérature, philosophie, mathématiques, physique, sciences) sans commune mesure avec celui d'aujourd'hui.

Un leitmotiv est donc l'école et la laïcité. Un autre est la foi et la raison. Les mathématiques apparaissent en incidente, comme « le seul champ intellectuel où la France est encore brillante. » Chacun de ces sujets mérite réflexion.

Commençons par l'école laïque.

L'école laïque est l'école de tous, dans le respect de la liberté de conscience de chacun. Lafforgue se réfère au passé de manière enthousiaste ; les historiens de l'éducation complèteraient utilement la vue qu'il en donne. Mais c'est pour donner du présent une image détestable, réduite aux défaillances de l'école. À défaut de retourner à l'école du passé, l'issue qu'il suggère est en rupture complète avec la laïcité, puisqu'elle a pour optique des écoles organisées par communautés.

Il est vrai que l'école est en crise. Une preuve en est la comparaison de deux données : 5% seulement des enfants effectuent toute leur scolarité dans l'enseignement privé, mais 50% y effectuent une part de leur scolarité. L'école publique n'assume donc pas pleinement son rôle. La reconquête de la laïcité est ou devrait être à l'ordre du jour. L'état présent mérite une analyse, et le souci de l'avenir, des propositions. L'Union rationaliste a consacré son colloque annuel à cette question en 2004, et les actes en sont édités [2]. Les problèmes de l'école doivent être placés dans leur contexte social, économique et politique, et ils doivent être abordés franchement en tant que tels.

Un regard sur le passé peut donner de bonnes idées. Parmi les fondateurs de l'école primaire, Paul Bert mérite une attention spéciale. Il a été le ministre de l'Instruction publique dans le gouvernement Gambetta en 1881-1882 et il en a rédigé les programmes et leurs commentaires :

« Lorsque nous avons inscrit aux programmes et dans un ordre d'énumération qui n'est pas dû au hasard les éléments des sciences naturelles, physiques et mathématiques, nous n'avons pas voulu indiquer seulement par là que l'enfant doit apprendre à l'école des faits et des théories. Et cependant de quelle utilité ne seront pas pour le futur agriculteur les notions de botanique et de physique, pour le futur artisan celles de physique et de mécanique ! Mais ce que nous avons eu pour objectif principal, c'est la discipline de l'intelligence, bien sûrs que lorsque les sciences naturelles lui auraient appris à observer, les sciences physiques à prouver, les sciences mathématiques à préciser et à tirer les conséquences, nous aurions formé un esprit libre de préjugés, difficile à séduire et sur lequel n'auraient pas facilement prise, d'où qu'elles viennent, les sorcelleries et les superstitions. »

L'école primaire visait l'utilité et, par l'apprentissage des sciences, la « discipline de l'intelligence ». Par rapport à cette double ambition, le lycée, fondé sur les humanités classiques, avait du retard. La réforme de 1902, à laquelle Émile Borel a pris part, a cherché à combler ce retard, mais il reste encore pour nous aujourd'hui à penser et repenser l'enseignement des sciences sous l'angle de l'utilité et de la culture.

La séparation des Églises et de l'État en 1905 a créé pour la France une situation originale. Cependant il ne faut pas prendre la laïcité pour une particularité française sans répondant dans le monde. Elle a pour source l'Europe des Lumières, et elle

a fait débat en Europe tout au cours du XIX^e siècle. La question de la séparation des églises et de l'école dans quelques pays européens est traitée dans une thèse excellente, de Benoît Mély, parue en 2004 (cf. [3]).
Depuis 1905 les atteintes à la laïcité se sont multipliées, et l'opposition de l'Église catholique s'est tempérée au contact des réalités. Mais l'Église catholique, et maintenant d'autres communautés religieuses, ne renoncent pas à intervenir dans l'enseignement public et en concurrence avec lui (cf. [2]). Laurent Lafforgue, sans le vouloir sans doute, apporte sa caution à cette tendance, en même temps que des justifications et des suggestions.

Il ne suffit pas pour moi de qualifier ses suggestions d'irréalistes. Elles me paraissent dangereuses. La référence à la Bible à lire en hébreu et en grec est typique : un enfant n'a aucun des moyens philologiques ou historiques permettant de lire la Bible en hébreu en exerçant son esprit critique ; il s'agira pour lui d'un livre sacré intouchable. Heureux si les commentaires ne contribuent pas à fausser son jugement. Je prendrai comme exemple le commentaire du Dictionnaire encyclopédique du judaïsme, gros ouvrage bien documenté, sur le livre de Josué, le successeur de Moïse et le conquérant du Canaan. Selon ce dictionnaire, « Josué alliait les qualités d'un prophète à celles d'un juge et d'un chef militaire ? il prit des villes par ruse, sans effusion de sang, comme lors de la conquête de Aï (Jos 8) (cf. [4]). » Dans la Bible la prise de la ville est en effet racontée par le menu ; pour épargner le lecteur je ne cite qu'une phrase : « il y eut au total douze mille personnes tuées ce jour-là, hommes et femmes, tous gens d'Aï . » L'effusion du sang des Cananéens compte pour zéro. N'est-ce pas abominable, comme d'ailleurs l'ensemble du livre de Josué ? Il faut lire la Bible comme on lit Homère, comme un témoignage bouleversant sur ce que furent la vie des hommes et leurs pensées dans un passé qui n'est pas si reculé. Si on la prend comme modèle au premier degré, les conséquences peuvent en être dramatiques : on le voit en Israël comme aux États-Unis.

Beaucoup de choses sont à conquérir dans l'enseignement public, mais c'est en regardant l'avenir et en s'appuyant sur ce qu'il y a de meilleur dans le présent. Ni la société française actuelle, ni les orientations politiques qui l'expriment et la façonnent, ne prennent la mesure des besoins en matière de recherche et d'éducation pour que l'humanité puisse faire face aux immenses problèmes du siècle qui vient. Le combat pour une école laïque à la hauteur des enjeux est nécessaire et urgent. Ce n'est pas le moment d'accuser l'école actuelle de tous les maux, ni de faire bande à part.

Quid des rapports entre la foi et la raison ?

Certaines formules de Laurent Lafforgue me font chaud au cœur : celles en particulier où il exalte « *un monde commun, celui de la raison, de la connaissance rationnelle, de la pensée réfléchie et du débat argumenté*. » En militant rationaliste je ne saurais mieux dire. Puis il ajoute que pour lui la raison est un don de Dieu, et développe une apologétique chrétienne originale, selon laquelle l'Église a œuvré au progrès des sciences en fournissant le terreau de sa mise en question. Sans prétendre traiter le sujet, il faut dire que sur les rapports entre la foi et la raison les rationalistes ont une longueur d'avance sur Jean-Paul II, auquel il se réfère. Je me borne à signaler l'étude et le témoignage d'un historien des religions, Prosper Alfaric, mon lointain prédécesseur à la présidence de l'Union rationaliste,

un remarquable connaisseur de l'enseignement religieux et de la Bible (cf. [5]).
Il est exact que les grands-parents de la plupart d'entre nous ont pratiqué une religion. Personnellement, je suis héritier d'une tradition judéo-chrétienne qui, du côté juif de mon père comme du côté protestant de ma mère, a été questionnée depuis fort longtemps pour aboutir à un solide athéisme au niveau de mes parents. S'il n'y avait pas eu de traditions religieuses, mes ancêtres n'auraient pas eu à s'en libérer ; en cela se traduit pour moi l'apport judaïque et protestant. L'apport de l'Église catholique à Galilée, à une autre échelle, me paraît du même ordre. Je ne vois pas que le christianisme puisse en être glorifié, comme le fait Lafforgue.

La démarche scientifique implique d'être disponible sans cesse pour une remise en question. Victor Hugo avait une bonne formule : la science est la certitude mobile de l'homme. La science, en effet, nous fournit des repères localement fiables mais sans cesse à réviser. La religion s'appuie sur des vérités révélées, en principe intouchables. L'esprit critique doit s'arrêter aux portes de la foi.

Je constate que de grands créateurs ont eu la foi, et ont attribué leurs succès à l'inspiration divine. C'est sans doute naturel, en s'émerveillant devant ce que l'on parvient à créer ou à découvrir. Mais la science d'aujourd'hui est si porteuse de merveilles que la foi dans le surnaturel n'est plus si répandue que, disons, du temps de Newton.

La foi s'est dans quelques cas marquants opposée à la démarche scientifique. C'est le cas pour Pascal, qui a gardé sous le boisseau comme insignifiant au regard de ses pensées religieuses son traité sur l'équilibre des liqueurs, grâce auquel son nom a été donné à l'unité de pression. Sur Pascal mystique et savant, des extraits significatifs de ses œuvres ont été publiés récemment dans les Cahiers rationalistes (cf. [6]).

En ce qui concerne Péguy, que cite aussi Lafforgue, c'est le contraire : homme de foi et non scientifique, il a trouvé des accents très forts pour dénoncer l'attitude le l'Église à l'égard de la science : *« Pour préparer la faillite scolaire de la République, on essaye de discréditer notre enseignement laïque jusque dans sa source même qui est la science. On parle beaucoup, depuis quelque temps, de la banqueroute de la science et on nous adresse à un banquier qui, lui, ne fait jamais faillite, parce que ses traites, étant tirées sur l'invisible et l'invérifiable, ne sont jamais protestées ! Et d'abord nous écarterons résolument ces docteurs retour de Rome qui nous prêchent le renoncement à la science et à la raison, la docilité systématique, le silence prudent et respectueux. »*

Deux mots sur les mathématiques et sur le français.

Laurent Lafforgue n'est pas de ces docteurs de Rome. Mais sa vision du déclin français dans tous les domaines à l'exception des mathématiques risque d'aboutir au même renoncement : les mathématiques étant le seul champ intellectuel où la France est encore brillante, faisons des mathématiques si nous en sommes encore capables, le reste est en décrépitude.

Il est vrai que les mathématiques sont brillantes en France, et c'est en grande partie parce qu'elles se ressourcent sans cesse auprès de la physique, de l'informatique, de la biologie et, finalement, de presque toutes les sciences. Il a été désastreux dans un passé assez récent de les dissocier des autres sciences, et la tendance actuelle, à les rapprocher, est fructueuse pour tout le monde. En matière d'éducation, nous avons un certain retard, mais l'attention a été attirée sur les perspectives de nouveaux contenus et de nouvelles formes d'organisation, comme les laboratoires de mathématiques. Là encore, il ne s'agit pas de retirer ses billes et d'aller jouer ailleurs. L'enseignement des sciences est une grande question d'avenir. Comme mathématiciens, nous sommes solidaires des autres disciplines, nous en sommes responsables, nous devons avoir à l'esprit d'avancer ensemble.

Je conclurai sur un point où je rejoins Laurent Lafforgue, et où nous pouvons avoir l'impression d'être des passéistes, à moins qu'au contraire nous ne définissions la bonne approche de l'avenir. Il s'agit du français, de la langue et de la littérature françaises dont il est amoureux, et de son indignation devant ceux qui déprécient cet héritage. Je désire ajouter quelque chose en ce sens dont nous, mathématiciens, sommes responsables. C'est le merveilleux héritage littéraire, philosophique et scientifique que constituent les œuvres de nos grands ancêtres. Il reste beaucoup d'œuvres à publier, et il y a beaucoup à lire, à tous les niveaux, dans ce qui est publié et disponible. Ce n'est qu'un aspect de l'histoire des mathématiques, mais il mérite une attention particulière, de la part des historiens comme des mathématiciens.

Références bibliographiques

[1] L. Lafforgue – « De l'école et de ce qui fonde la valeur de la culture et du savoir », *Gazette des Mathématiciens* **105** (juillet 2005), p. 77–84.

[2] « Une laïcité pour l'avenir » – *Raison Présente*, Union rationaliste **149–150** (juin 2005), les citations sont prises des p. 183–184.

[3] B. Mély – « De la séparation des églises et de l'école, mise en perspective historique (thèse sous le titre *La question de la séparation des églises et de l'école dans quelques pays européens, Allemagne, France, Grande-Bretagne, Italie*) », Éditions Page deux, 2004, 717 p.

[4] « Dictionnaire encyclopédique du judaïsme » – éd. Robert Laffont, 1996, 1635 p. (citation p. 526).

[5] P. Alfaric – « De la foi à la raison » Publications de l'Union rationaliste (1955), 295 p.

[6] J.-P. Kahane – « Pascal le mystique et Pascal le savant, d'après sa correspondance avec les époux Périer », *Cahiers rationalistes* **578** (2005), p. 21–28.

Vous pouvez envoyer vos réactions à l'adresse : `gazette@dma.ens.fr`

LIVRES

A First Course in Harmonic Analysis (Second Edition)
Anton Deitmar
Universitext, Springer, 2005. 192 p.
ISBN : 0-387-22837-3. 47,42 €

Ce livre propose une introduction inhabituelle à l'analyse harmonique. Destiné à des étudiants relativement novices (licence), sa lecture ne nécessite qu'un faible prérequis : rudiments d'algèbre linéaire, fonctions d'une ou plusieurs variables réelles ; la topologie générale utilisée est développée *ab initio*, l'intégrale de Lebesgue évitée. Son objectif est ambitieux, puisqu'il s'agit d'inscrire séries et intégrales de Fourier classiques dans le contexte de l'analyse sur les groupes abéliens localement compacts, et de donner une petite introduction à l'analyse harmonique non commutative. Il s'organise en trois parties et deux appendices.

La première partie (« Fourier Analysis », chapitres I à IV) est consacrée à la théorie classique. À juste titre, l'accent porte davantage sur les propriétés algébriques et hilbertiennes que sur l'étude fine de la convergence ponctuelle. Le chapitre I, dévolu aux séries de Fourier, est donc centré sur la formule de Parseval ; avec un peu de coquetterie, celle-ci est prouvée en se ramenant au cas des fonctions en escalier, lui-même traité par un calcul direct reposant sur le lemme de Riemann-Lebesgue. La convergence normale pour les fonctions continues et de classe C^1 par morceaux en est déduite par l'argument d'unicité habituel. Dans le chapitre II, l'auteur expose les définitions de base de l'analyse hilbertienne de façon à réinterpréter Parseval ; le cadre choisi impose de définir L^2 comme complété abstrait, sans en incarner les éléments comme (classes de) fonctions, ce qui limite à mon avis l'intérêt du propos. En revanche, le chapitre III est une excellente étude élémentaire de la transformation de Fourier réelle : des versions « pré-lebesguiennes » mais substantielles de la formule d'inversion, du théorème de Plancherel et de la formule de Poisson y sont prouvées avec efficacité. L'appendice I complète cet exposé par l'application à la fonction ζ : prolongement analytique, équation fonctionnelle. Le chapitre IV, motivé par la détermination d'un prolongement « ultime » de la transformation de Fourier, définit distributions et distributions tempérées, mais souffre un peu de l'absence d'applications de ces notions.

La seconde partie (« LCA Groups », chapitres V à VIII) débute par l'analyse de Fourier sur les groupes abéliens finis, le théorème de structure de ces derniers étant admis. Après une introduction aux espaces métriques, le chapitre VI définit les groupes abéliens localement compacts, supposés ici métrisables ; le chapitre VII définit le dual d'un tel groupe et le calcule pour $\mathbb{Z}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}$, avant de mettre en évidence la dualité compact-discret et d'énoncer (sans preuve) le théorème de Pontryagin. Enfin, le chapitre VIII présente l'intégrale de Haar (dont la construction est détaillée dans l'appendice II), en donne quelques exemples, calcule la transformée d'une convolée et énonce (sans démonstration) le théorème de Plancherel. Malgré l'absence de la formule d'inversion, cette partie m'a semblé de nature à bien éclairer le lecteur débutant, donc réussie.

La dernière partie (« Noncommutative Groups », chapitres IX à XII) aborde l'analyse harmonique sur les sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{C})$; un premier chapitre définit l'algèbre de Lie d'un tel sous-groupe au moyen de l'exponentielle et admet en substance le théorème de Cartan-von Neumann, avant de décrire les premiers liens entre les représentations d'un sous-groupe et celles de l'algèbre associée. Ces notions sont appliquées dans le chapitre X à la détermination des représentations irréductibles de $SU_2(\mathbb{C})$. Le chapitre XI établit le théorème de Peter-Weyl pour les groupes matriciels, ce qui en simplifie considérablement la preuve, le résultat d'approximation étant alors conséquence immédiate du théorème de Stone-Weierstrass. Le livre se termine par l'étude du groupe d'Heisenberg : construction des représentations irréductibles, théorème de Plancherel. Cette partie me paraît également réussie.

L'ensemble du livre est rédigé très clairement, l'auteur ayant apporté un soin particulier à la fluidité des arguments. Chaque chapitre est accompagné d'exercices simples mais pertinents. Il n'est pas entièrement clair, cependant, que le niveau choisi soit le plus adapté au sujet. Supposer, au moins dans certains chapitres, le lecteur familier avec l'intégrale de Lebesgue et les bases de l'analyse fonctionnelle aurait allégé l'exposé des généralités et permis de développer les exemples. Malgré cette réserve, cet ouvrage fort agréable à lire est une addition bienvenue à la littérature ; un large public pourra y trouver profit.

Nicolas Tosel,
Lycée du Parc, Lyon

Dynamics beyond uniform hyperbolicity
Christian Bonatti, Lorenzo J. Diaz & Marcelo Viana
Encyclopædia of Mathematical Sciences, Springer, 2005. 384 p.
ISBN : 3-540-22066-6. 94,95 €

L'ouvrage de C. Bonatti, L. J. Diaz et M. Viana fait le point sur les progrès récents accomplis dans le domaine des systèmes dynamiques présentant une forme faible d'hyperbolicité.

Ce livre est destiné à un public de chercheurs, ayant de bonnes connaissances en dynamique hyperbolique uniforme ; une certaine familiarité avec la théorie des bifurcations est conseillée pour la lecture des chapitres III, VI et IX. On peut, sur ce point, se référer à l'ouvrage de D. Ruelle, *Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory*.

Il existe un certain nombre d'articles d'introduction de bonne qualité sur le sujet : M. Viana (*Math. Int.* 2000) pour l'attracteur de Lorenz, C. Bonatti (*Bourbaki* 2002) pour la dynamique générique, K. Burns, C. Pugh, M. Shub, A. Wilkinson (PSPM 2001) pour l'ergodicité stable, etc. Mais ces survols ne reflètent déjà plus tout à fait l'état actuel de la recherche ; le sujet a en effet connu des progrès rapides depuis quatre ans et une partie significative des résultats présentés par C. Bonatti, L. J. Diaz et M. Viana ont étés obtenus au cours de la période 2000-2005. Ce livre arrive donc à point nommé pour proposer une vision unifiée de cette dynamique « au-delà de l'hyperbolicité uniforme ».

Stabilité des systèmes dynamiques

Un difféomorphisme est dit uniformement hyperbolique, en restriction à un certain ensemble compact invariant K, si l'espace tangent en tout point de K se décompose en deux fibrés respectivement contractés et dilatés de manière uniforme par la différentielle de la transformation. L'exemple le plus simple d'un tel système est donné par l'action de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur le tore $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$; l'ensemble hyperbolique K coïncide avec le tore dans cet exemple.

De manière remarquable, les difféomorphismes pour lesquels l'ensemble des points récurrents (par chaîne) est hyperbolique sont exactement les difféomorphismes qui sont stables par perturbation : toute perturbation C^1-proche de la transformation est en fait conjuguée à la transformation, en restriction à l'ensemble des points récurrents.

Que subsiste-t-il de ce résultat en l'absence d'hyperbolicité uniforme ? Une première approche consiste à affaiblir les notions d'hyperbolicité et de stabilité, tout en cherchant à conserver une équivalence entre les deux notions.

On a cherché par exemple à faire correspondre la notion d'hyperbolicité partielle (apparition d'un fibré neutre en plus des deux fibrés dilatés et contractés) avec la propriété d'ergodicité stable (toute perturbation C^2-proche est ergodique) ; ou encore la notion de décomposition dominée (le rapport de dilatation entre les deux fibrés est uniforme, sans préjuger d'une dilatation ou d'une contraction uniforme sur les fibrés eux-mêmes) avec la transitivité robuste (toute perturbation C^1-proche est transitive). Ces résultats sont présentés chapitres VII et VIII.

Phénomène de Newhouse

Une deuxième approche consiste à considérer une famille de difféomorphismes φ_λ dépendant d'un paramètre λ, et hyperboliques pour $\lambda < 0$. On s'intéresse alors à ce qui se passe juste après la perte d'hyperbolicité.

Si cette perte est due à la création de tangences entre les variétés stables et instables d'un point périodique de la transformation, un phénomène nouveau apparaît : il peut exister des valeurs de λ, arbitrairement proches de 0, telles que le difféomorphisme associé φ_λ possède une infinité de points périodiques attractifs ou répulsifs. De plus, il existe un ensemble générique (au sens de Baire) de difféomorphismes C^2-proches de φ_λ qui possèdent eux aussi une infinité de points périodiques répulsifs ou attractifs. Ces difféomorphismes ne peuvent pas être hyperboliques et leur dynamique reste tout à fait mystérieuse.

On ignore si les valeurs de λ associées à de tels difféomorphismes forment un ensemble de mesure de Lebesgue positive. Il semble au contraire que ce soit l'hyperbolicité qui prévale après la bifurcation : la proportion des paramètres $\lambda \in [0, \varepsilon[$ associés à des transformations φ_λ hyperboliques tend vers une quantité strictement positive quand ε tend vers 0.

Ces dynamiques « sauvages », et pourtant localement C^2-génériques, ont d'abord étés construites par S. Newhouse pour les difféomorphismes de surfaces, puis généralisées à la dimension supérieure par J. Palis et M. Viana. C'est l'objet du chapitre III.

Régularité et généricité

À ce stade, on peut se demander s'il est possible de dégager quelques propriétés dynamiques qui soient satisfaites par un sous-ensemble générique de difféomorphismes de classe C^k définis sur les variétés compactes.

Rappelons qu'un ensemble *générique* est un ensemble qui contient une intersection dénombrable d'ouverts denses. Un sous-ensemble générique peut être petit au sens de la mesure ; par exemple il peut intersecter toute famille générique de difféomorphismes sur un ensemble de paramètres de mesure de Lebesgue nulle.

Le caractère générique de la plupart des propriétés dynamiques des transformations dépend de manière cruciale du degré k de régularité des transformations considérées. Voici deux exemples qui illustrent ce fait pour des transformations de surfaces :
– un homéomorphisme générique possède une entropie topologique infinie ; tous les difféomorphismes de classe C^k, $k \geqslant 1$, sont d'entropie finie ; les difféomorphismes de classe C^∞ admettent toujours une mesure d'entropie maximale ;
– la transitivité est une propriété générique des homéomorphismes préservant un volume fixé (J. C. Oxtoby, S. M. Ulam 1941) ; c'est encore vrai en topologie C^1 (C. Bonatti, S. Crovisier 2003) ; la question est ouverte en topologie C^2 ; c'est faux en topologie C^4 ; les contre-exemples s'obtiennent à l'aide de la théorie K.A.M.

Voici quelques raisons qui peuvent amener à travailler avec une topologie plutôt qu'une autre :

La topologie C^1 : c'est le degré de différentiabilité requis pour parler d'exposants de Lyapounov. Dans le cadre hyperbolique, c'est suffisant pour construire la mesure d'entropie maximale et donner des asymptotiques pour le nombre de points périodiques de période inférieure à un réel donné.

La topologie C^2 : il devient possible de construire des mesures « physiques » ; ces mesures vont décrire le comportement asymptotique des trajectoires, pour un ensemble de trajectoires de mesure de Lebesgue pleine. On peut chercher à évaluer la dimension des attracteurs du système et mettre en place un formalisme thermodynamique.

La topologie C^3 : c'est le degré minimal pour appliquer les théorèmes perturbatifs de type K.A.M. ; c'est donc un degré de régularité souhaitable pour les questions de dynamique hamiltonienne et de mécanique céleste.

C'est pour la topologie C^1 que les résultats les plus substantiels ont été obtenus, en raison de quatre lemmes de perturbations qui n'ont à l'heure actuelle aucun analogue C^k, $k > 1$: il s'agit du lemme de fermeture de Pugh (1967), du lemme de Franks (1971), du lemme de fermeture ergodique de Mañé (1982) et du lemme de connexion d'Hayashi (1997). C'est ce dernier lemme qui est à l'origine des progrès récents en dynamique C^1-générique. Ces lemmes sont présentés brièvement dans la première annexe du livre. Le lemme de fermeture de Pugh a un énoncé particulièrement simple : si x est un point récurrent pour le difféomorphisme f, alors il existe une perturbation C^1-proche de f pour laquelle x est un point périodique.

Voici deux théorèmes de généricité C^1 essentiellement dus à R. Mañé :

Théorème. — *Un difféomorphisme C^1-générique d'une surface est :*
– ou bien hyperbolique (en restriction à l'ensemble des points récurrents) ;
– ou bien possède une infinité de points périodiques attracteurs ou répulsifs.

En d'autres termes, pour les difféomorphismes C^1 de surfaces, on observe encore un phénomène similaire à celui de Newhouse, et c'est la seule alternative à l'hyperbolicité, du point de vue générique. Ce résultat possède à présent un analogue en dimension supérieure (F. Abdenur 2003), qui fait appel à la notion de décomposition dominée ; ces questions sont discutées dans le chapitre X.

Théorème. — *Considérons l'ensemble des difféomorphismes C^1 définis sur une surface, et préservant un volume fixé sur la surface. Alors, génériquement, un tel difféomorphisme est :*
– ou bien hyperbolique (sur toute la surface) ;
– ou bien ses exposants de Lyapounov sont presque partout nuls.

Le tore est la seule surface orientable dont le fibré tangent peut s'écrire comme somme de deux sous-fibrés, donc la seule surface à admettre un flot hyperbolique (sur toute la surface). Pour toutes les autres surfaces, les difféomorphismes préservant le volume ont génériquement des exposants nuls : pas de contraction ni de dilatation en moyenne des vecteurs tangents le long des trajectoires. Ce résultat est à l'opposé de ce qui est attendu en topologie C^2. Là encore, ce résultat a des analogues en dimension supérieure (J. Bochi, M. Viana 2002) ; ces généralisations sont abordées au chapitre XII.

Topologie C^2 et mesures physiques

Il faut relativiser la portée du résultat précédent ; préserver un volume n'est pas du tout une propriété générique en topologie C^k, pour k quelconque, et ce même pour les systèmes uniformément hyperboliques. Par contre, en topologie C^2, il est possible de construire, pour les systèmes hyperboliques, des mesures qui se substituent au volume, et qui décrivent le comportement de presque toutes les trajectoires, le presque tout faisant ici référence à la mesure de Lebesgue. Ces mesures sont parfois qualifiées de « mesures physiques » et portent le nom de mesures S.R.B. (Sinaï, Ruelle, Bowen). Elles ont des exposants de Lyapounov positifs et sont en nombre fini.

L'espoir est grand de montrer que ces mesures existent pour la plupart des systèmes vérifiant des conditions faibles d'hyperbolicité (hyperbolicité partielle, décomposition dominée). Le chapitre XI détaille les constructions disponibles à l'heure actuelle.

Un certain nombre de systèmes dynamiques ont fait l'objet d'une attention toute particulière ; il s'agit d'une part de l'application de Hénon $(x, y) \mapsto (1-ax^2+y, bx)$ définie de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$: pour un ensemble judicieusement choisi de paramètres $a, b \in \mathbf{R}$, M. Benedicks et L. Carleson montrent qu'il existe effectivement un compact invariant attracteur supportant une mesure S.R.B. ; celle-ci satisfait à une propriété de mélange exponentielle et vérifie un théorème central limite. Il a été possible de généraliser ces considérations à une classe d'applications dite de type « Hénon » ; ceci fait l'objet du chapitre IV.

D'autre part, le chapitre IX fait le point sur l'attracteur de Lorenz ; il s'agit là d'un flot défini sur $\mathbf{R}^3$, et non pas d'un difféomorphisme. Introduit en 1963 par E. Lorenz pour modéliser certains problèmes de turbulence en météorologie, il faut attendre 1999 pour que l'existence mathématique de cet attracteur soit enfin établie. Là encore, il existe des mesures S.R.B. (W. Colmenarez 2002) et ce résultat est vrai pour une classe de flots plus généraux, dits de type « Lorenz ». Enfin, C. Morales et M. J. Pacifico (2003) obtiennent le résultat suivant en C^1 générique :

Théorème. — *Un champ de vecteurs C^1-générique défini sur une variété compacte de dimension* 3 *satisfait à l'une des alternatives suivantes :*
– ou bien l'ensemble de ses points récurrents se décompose en un nombre fini d'ensembles invariants, chacun étant soit uniformément hyperbolique, soit un attracteur de type « Lorenz », soit un répulseur de type « Lorenz » ;
– ou bien il admet une infinité d'orbites périodiques attractives ou répulsives.

Remarques finales

Parmi les autres thèmes abordés, le chapitre V présente les résultats de dynamique sur les surfaces obtenus par E. Pujals et M. Sambarino (2000), et qui permettent de conclure à la C^1-densité des difféomorphismes admettant des tangences homoclines dans le complémentaire de l'ensemble des difféomorphismes hyperboliques ; le chapitre VI explique quels phénomènes sont susceptibles d'apparaître au cours d'une bifurcation occasionnée par l'existence de cycles hétérodimensionnels. Enfin, les problèmes de stabilité stochastiques sont évoqués en diverses occasions.

Sur le fond, ce livre représente un travail de synthèse remarquable qui devrait intéresser tous les spécialistes des systèmes dynamiques. Les auteurs ont tenu à exposer les idées qui sous-tendent chacun des résultats présentés, et ce avec beaucoup de conviction et d'enthousiasme. De même, ils se sont efforcés d'indiquer les conjectures et les problèmes ouverts à l'heure actuelle.

Sur la forme, on regrettera un certain nombre de coquilles ainsi que quelques incohérences de notation ; le texte reste agréable à lire, hormis pour quelques passages qui auraient gagné à être illustrés par un nombre plus important de figures.

Yves Coudène,
Université Rennes I

Understanding Probability, chance rules in everyday life
Henk Tijms
Cambridge University Press, 2004. 390 p.
ISBN : 0-521-54036-4. £ 18,99

> « La théorie des probabilités n'est en fin de compte que sens commun réduit à calcul mathématique ; elle nous permet de saisir avec exactitude ce que des esprits subtils ressentent avec une sorte d'instinct qu'ils sont souvent incapables d'expliquer... Elle apprend à se garantir des illusions qui souvent nous égarent. »

Cette citation attribuée à Laplace et que Henk Tijms insère dans l'introduction de son *Understanding Probability*, résume bien l'ambition de ce livre : amener un lecteur novice en probabilité, de la description de simples phénomènes aléatoires, qu'on côtoie quotidiennement, à une première formalisation mathématique des objets probabilistes, pour ensuite lui permettre d'affronter des situations de plus en plus complexes tout en démasquant les pièges dans lesquels nous font souvent tomber les raccourcis de notre intuition.

Il s'agit d'un ouvrage à mi-chemin entre le livre de vulgarisation et le manuel scolaire. La première partie est écrite dans une prose ample, qui évite les formalismes et est, en revanche, riche d'exemples, et s'adresse à quiconque n'est pas effrayé par quelques formules. Elle requiert seulement quelques connaissances de mathématique élémentaire (les outils les plus sophistiqués employés étant la série géométrique et les exponentielles), mais elle donne un vaste aperçu de la théorie classique des probabilités, ainsi qu'une idée de ses nombreuses applications. La formalisation précise de ces concepts est renvoyée à la deuxième partie, plus courte et mathématiquement dense, qui est en effet un manuel sur l'essentiel de la théorie des probabilités.

Pour introduire le lecteur au monde de l'aléatoire, l'auteur utilise, dans son premier chapitre, les jeux de hasard, qui offrent une source privilégiée d'exemples à la fois simples et concrets. On introduit ainsi tout naturellement la notion mathématique d'événements élémentaires comme les résultats possibles d'un jeu et celle de variable aléatoire comme le gain qui s'en suit. La loi des grands nombres est utilisée dès les premières pages, pour permettre d'interpréter la probabilité d'un événement à l'aide de la notion plus intuitive de fréquence de réalisation de ce même événement dans une suite d'expériences successives. On présente au lecteur, de façon très descriptive, des nombreuses propriétés des processus aléatoires obtenus par la répétition d'expériences indépendantes, c'est-à-dire ce qui se produit lorsqu'on joue souvent à la roulette. On voit ainsi, entre autres, comment les systèmes censés augmenter les chances de gain sont, sur le long terme, voués à l'échec et que le seul moyen de tirer profit des jeux de hasard est d'ouvrir un casino.

Henk Tijms, conformément à sa spécialisation en recherche opérative, utilise avec insistance les résultats de simulations obtenues par ordinateur pour aider le lecteur à visualiser les phénomènes qu'il décrit, ainsi que pour soutenir certaines affirmations. Il prend aussi soin, après une brève introduction aux nombres pseudo-aléatoires, de décrire avec précision les algorithmes informatiques utilisés pour mimer les situations étudiées. Cette approche « expérimentale » des probabilités lui permet de présenter un panorama de la théorie des probabilités d'une ampleur qu'on trouve rarement même dans des cours pour spécialistes.

Cette dichotomie d'approche, basée à la fois sur la théorie et sur la simulation, continue dans la suite du livre où d'autres problèmes plus ou moins classiques tirés de la vie quotidienne donnent l'occasion de réfléchir sur notre capacité à évaluer les probabilités et de se familiariser avec des manières plus rigoureuses de les calculer. C'est, par exemple, le cas du classique problème de l'anniversaire (Quelle est la probabilité dans un groupe de personnes qu'au moins deux fêtent leur anniversaire le même jour ?) qui permet de développer un intéressant discours sur les coïncidences d'événements rares.

On trouve aussi l'analyse d'événements historiquement vérifiés, comme celui de la loterie que les forces armées américaines avaient utilisée en 1970 pour désigner les réservistes destinés à partir pour la guerre du Viêt-nam. Le résultat de cette loterie avait fait crier au scandale, car les heureux gagnants étaient, en grande partie, nés dans les premiers mois de l'année ; la présence d'évidentes régularités dans une extraction en principe uniforme parmi tous les réservistes est en effet suspecte. Henk Tijms nous explique les raisons de tels résultats en analysant la mécanique de l'extraction et, plus en général, nous éclaircit sur la difficulté d'obtenir des générateurs vraiment aléatoires. Il en profite aussi pour donner une première introduction à la statistique et aux tests d'hypothèses : que signifie qu'une suite de résultats aléatoires ne corresponde pas à un modèle donné ? Comment peut-on mesurer et quantifier cet écart ?

Le chapitre suivant introduit les distributions de probabilités discrètes les plus importantes, en les plaçant dans des situations économiques et sociales. Ainsi, la distribution binomiale est illustrée, entre autres, par le problème de la surréservation chez les compagnies aériennes, c'est-à-dire comment déterminer la probabilité de laisser à terre des passagers lorsqu'on accepte plus de réservations que de places disponibles sur un vol. Les applications de la distribution de Poisson sont encore plus nombreuses ; en effet, elle peut servir de modèle au nombre d'incendies dans une ville, ainsi qu'à calculer les polices d'assurance. Mais on apprend aussi qu'en 1898, un des pères de ce modèle L. von Bortkiewcz l'utilisait pour compter les soldats de l'armée prussienne morts chaque année par un coup de pied de cheval. Enfin, la loi hypergéométrique permet de calculer exactement la probabilité de gagner au Loto (et déterminer ainsi combien l'État y gagne).

Le théorème de la limite centrale et quelques-unes de ses conséquences sont les protagonistes du chapitre V. La distribution normale est introduite comme limite de distributions binomiales, prenant bien soin de donner une interprétation intuitive de la notion d'intégrale et des distributions continues de probabilité. On s'attarde sur les applications statistiques, analysant par exemple la fiabilité des résultats d'une étude pour le vaccin contre la polio ou l'intervalle de confiance lors des sondages électoraux. Un petit, mais intéressant, paragraphe est aussi consacré à la vision bayésienne des statistiques. Un autre point fort du chapitre est l'introduction du mouvement brownien et de ses applications à la finance ; on explique en particulier la célèbre méthode de Black-Scholes pour calculer le prix d'une option, qui est le droit d'acheter dans un an à un prix fixé un certain produit financier dont le prix fluctue aléatoirement.

Un petit chapitre d'approfondissement sur la probabilité conditionnelle et la formule de Bayes conclut la partie de vulgarisation. On y présente, entre autres, le célèbre dilemme de Monty Hall, du nom du programme télévisé dont le jeu à prix, pourtant apparemment très simple, avait suscité un énorme débat, montrant que même la communauté scientifique n'est pas à l'abri de flagrantes erreurs. La solution rigoureuse du dilemme est présentée agrémentée de savoureuses anecdotes et d'une analyse des pièges psychologiques dans lesquels on tombe si facilement.

La deuxième partie de l'ouvrage est destinée à la démonstration rigoureuse d'une partie des résultats introduits auparavant, qui requièrent des connaissances mathématiques plus approfondies. On y trouve, traité de manière classique, l'essentiel de la théorie des probabilités : une introduction axiomatique aux mesures de probabilités, variables aléatoires à valeurs discrètes et continues, corrélation entre variables aléatoires et fonctions génératrices.

Le livre de Henk Tijms est sûrement un ouvrage captivant, mais il faut quand même signaler quelques points noirs. Premièrement, l'utilisation massive des simulations par ordinateur leur confère une aura injustifiée d'absolue fiabilité, tandis que leurs limites sont passées souvent sous silence. Certains mathématiciens de formation théorique risquent de se scandaliser par des affirmations du style « cette simulation démontre tel résultat » ou « explique tel phénomène », dont le livre pullule. En outre, quelquefois l'auteur fait preuve d'une certaine légèreté et tombe dans les pièges des raccourcis intellectuels qu'il essaye de démasquer. Il faut, par exemple, surveiller ces fascinants exemples, car, parfois, il arrive qu'une analyse plus profonde amène au contraire du résultat qu'on était censé obtenir (c'est par exemple le cas du problème légal de la question 6).

Mais, dans son ensemble, *Understanding Probability* reste un livre remarquable, qui grâce à son approche intuitive, saura séduire tous les lecteurs, qui, tous n'étant pas des professionnels des mathématiques, veulent s'initier aux probabilités de manière autonome. Henk Tijms, qui travaille à la Vrije Universiteit d'Amsterdam, suggère d'utiliser son livre comme manuel pour des cours universitaires dans les filières sociales ou techniques. Peut-être, cela n'est pas envisageable en France, où l'enseignement de probabilités est, en général, plus rigoureux et formel, mais cet ouvrage pourrait en tout cas être une bonne lecture complémentaire et aider les enseignants à rendre leurs cours plus accessibles et captivants.

Sara Brofferio,
Université Paris-Sud

Musique et acoustique : de l'instrument à l'ordinateur
PHILIPPE GUILLAUME
Éditions Lavoisier, Paris, 2005. 190 p. ISBN : 2-7462-0999-3. 47,50 €

L'objet de cet ouvrage est quelque peu atypique, comme l'est d'ailleurs le parcours de son auteur Philippe Guillaume. En effet, après avoir été accordeur de piano pendant les premières années de sa vie professionnelle, P. Guillaume a entamé des études de mathématiques à l'université Paul Sabatier de Toulouse, études qu'il a menées jusqu'au bout en passant tous les diplômes universitaires (y compris agrégation et doctorats) ; il est actuellement professeur des universités à l'INSA de Toulouse. Son domaine d'activité de recherche en mathématiques appliquées est l'optimisation de formes ; parmi les enseignements qu'il dispense à l'INSA figure un cours dit d'ouverture sur l'acoustique musicale. Ceci nous amène à la matière traitée dans le livre en question. Comme cela est indiqué dans l'avant-propos, « *l'objectif du livre est de donner au lecteur un aperçu général sur la nature du son musical, depuis sa production par les instruments de mesure traditionnels jusqu'aux sons obtenus par synthèse numérique* », bref « *le son y est abordé d'un point de vue scientifique* ». Les six chapitres le composant sont :

1. les sons (45 pages) ;
2. les instruments de musique (47 pages) ;
3. les gammes et tempéraments (11 pages) ;
4. psychoacoustique (12 pages) ;
5. le son numérique (27 pages) ;
6. synthèse et effets sonores (20 pages) ; l'ouvrage se termine par une bibliographie comportant 29 références.

La nature du sujet d'étude fait qu'on aborde tout naturellement des notions d'acoustique comme la génération et la propagation des sons, de mathématiques comme l'analyse de Fourier, de psychoacoustique, de théorie du signal analogique et numérique, d'algorithmique et d'informatique comme le format MP3 de compression des sons, et bien entendu de musique.

Les connaissances scientifiques requises pour lire ce livre sont contenues dans celles qu'on aborde dans le segment L des formations mathématiques (sauf peut-être pour la physique et l'acoustique qui vont au-delà) ; quant aux connaissances musicales, reconnaissons qu'elles dépassent largement celles de l'amateur lambda (comme moi).

Cet ouvrage, original sous la plume d'un mathématicien, plaira à celles et ceux qui s'intéressent au son et à la musique et qui ont une culture scientifique de base : étudiants, enseignants-chercheurs, professionnels de tout genre dans les domaines scientifiques et techniques. On peut simplement regretter que le prix de vente soit exagéré (47,50 euros) ; un livre de 190 pages à couverture souple, pas trop spécialisé, doit pouvoir être disponible en France à moins de 25 euros.

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty,
Université Paul Sabatier de Toulouse

Le suffrage universel inachevé
MICHEL BALINSKI
Débats, Éditions Belin, 2004. 336 p. ISBN : 2-7011-3774-8. 20,50 €

Comme tout un chacun, je suis régulièrement convié à exprimer ma préférence ou faire mon choix en votant (élections politiques, universitaires, au sein de sociétés savantes comme la SMF). Pour les prochaines élections nationales politiques de 2007, puis les locales politiques décalées en 2008, le personnel politique décideur a estimé qu'il ne convenait pas de changer de règles ni de redécouper les circonscriptions élisant les députés ; tout le monde craint la « magouille » des gens en place... et bien désireux d'y rester. En abordant ce livre, je pensais naïvement être conforté dans l'idée que les modes opératoires actuels d'élection étaient équitables et peu contestables. Or il n'en est rien : j'ai pris ce que j'ai lu dans ce livre et les conclusions qu'en tire l'auteur comme un seau d'eau froide sur la tête...

L'auteur : après avoir été professeur dans plusieurs universités américaines, le mathématicien M. Balinski est installé en France depuis 1982 comme directeur de recherche au CNRS (Laboratoire d'économétrie de l'École polytechnique). Cela explique que les systèmes électoraux des deux pays, les États-Unis et la France, plus que d'autres, soient analysés à la loupe dans l'ouvrage en question. Les systèmes électoraux font partie depuis des années des sujets d'intérêt de M. Balinski, y compris dans son travail de chercheur professionnel ; entre 2001 et 2003, il avait déjà publié dans la revue mensuelle « *Pour la Science* », seul ou avec des coauteurs, une série d'articles sur les procédures de recrutement (analysant en passant celui des postes universitaires), le découpage électoral, les différents modes de répartition des sièges de députés ou sénateurs,... en particulier, au moment des élections d'avril 2002, un numéro spécial de « *Pour la Science* » avait été consacré au sujet.

Dans le copieux ouvrage dont nous rendons compte (336 pages, au prix modique de 20,50 euros), M. Balinski fait d'abord une étude *historique* détaillée de l'évolution du suffrage universel et de ses modes de représentation (comme déjà dit, essentiellement ceux des États-Unis et de France) ; *« l'Histoire, pour ainsi dire »* , explique-t-il au début, *« porte l'analyse rigoureuse jusqu'au moment où, les connaissances acquises, il devient facile et naturel d'aborder directement les problèmes actuels pour bâtir une théorie »* . L'auteur y présente ensuite *les systèmes électoraux divers et variés (en cours ou envisageables)* : on y apprend que le scrutin proportionnel avec plus fort reste (PFR, très utilisé dans le milieu universitaire) accumule à peu près tous les défauts possibles (pages 194–196), que le système du mathématicien Sainte-Laguë (1910) est très équitable mais pratiquement jamais utilisé, et, comme attendu, qu'en changeant de système de vote on peut modifier presque à souhait le résultat d'un vote. La première partie, intitulée « La longue marche du suffrage universel », comprend cinq chapitres couvrant au total 160 pages ; elle est essentiellement historique : Le droit de vote 1789-1848 ; le compte des voix 1848-1958 ; la V^{e} république 1958-2004 ; les leçons de l'Histoire. La deuxième partie, intitulée « La justice électorale » (environ 100 pages) est découpée en cinq chapitres également : l'Assemblée nationale et la « répartion équitable » ; le Parlement européen et la « biproportionnalité » ; le découpage des circonscriptions : France et États-Unis ; le Sénat et les autres conseils ; l'élection d'un président : France et États-Unis. En épilogue, l'auteur résume son analyse, je cite : *« Ce livre prétend démontrer deux vérités fondamentales. La première est que depuis les débuts de la démocratie représentative, les hommes politiques ne cessent de manipuler les règles du jeu qui les conduisent au pouvoir — c'est-à-dire, les systèmes électoraux et modes de scrutin qui les élisent — cherchant à asseoir plus solidement leur pouvoir. La seconde est que ces règles, pleines de subtilités et de finesses, riches de conséquences surprenantes sinon paradoxales, peuvent être analysées rigoureusement, car il existe une théorie les concernant : la science électorale, au service de la justice électorale ».* Le livre se termine avec quatre annexes ; la dernière (la D) présente un exemple d'élection entre cinq candidats où chacun gagne selon un mode de scrutin (à méditer en pensant au choix récent du site des jeux olympiques de 2012 ou...à un recrutement dans une commission de spécialistes).

Ne cachons pas que, par certains aspects, la lecture de l'ouvrage de M. Balinski n'est pas une détente : beaucoup de chiffres, de comparaisons, de tableaux... y sont présentés et analysés avec force détails. On en ressort aussi un peu énervé : un département ayant 23 000 habitants de plus qu'un autre, se voit attribuer deux députés de moins (il y a aujourd'hui 72 paires de départements où le plus peuplé a moins de députés) ; certains français pèsent à l'Assemblée nationale jusqu'à 5,5 fois plus que d'autres ; d'où la question : comment se fait-il que les équipes des candidats aux élections politiques (dont certains membres sont sérieux, formés à la rigueur scientifique, et soucieux de justice électorale) ne proposent pas de systèmes plus justes que ceux en cours actuellement ? J'ai donc interrogé l'auteur M. Balinski avec la question suivante : quelle a été la réaction des hommes politiques ou de leurs conseillers aux analyses et conclusions de son ouvrage ? Réponse : « *Les politiciens ne veulent pas que d'autres se mêlent des fonctions qui transforment les voix en élus : ils préfèrent continuer de les concevoir à leur gré. Néanmoins, j'ai eu quelques réactions : une lettre très positive d'un ancien président de la République, une autre d'un ancien président du RPR, un long entretien avec l'actuel président d'un des grands partis. Peut-être plus important, on m'a fait comprendre que le livre et un article dans la revue* « Commentaire » *(été 2005) ont eu une audience attentive au Conseil constitutionnel, car dans les pays où il y a eu des réformes, elles ont été forcées ou encouragées par les Cours de justice. Il est difficile de faire accepter l'importance d'une analyse rigoureuse de systèmes électoraux, par des hommes politiques, juristes, politologues ou journalistes. Mais la situation est dramatique : sans l'égalité des voix des électeurs, il n'y a point de démocratie.* » Il y a là matière à réflexion...

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty,
Université Paul Sabatier de Toulouse

Contrôle optimal : théorie et applications

EMMANUEL TRÉLAT
Mathématiques concrètes, Éditions Vuibert, Paris, 2005. 288 p.
ISBN : 2-7117-7175-X. 30 €(ou $)

Disons-le d'emblée : c'est un livre que j'aurais aimé écrire... Il concerne un domaine des mathématiques (et d'automatique) peu couvert en France, aussi bien en formation qu'en recherche, celui du contrôle optimal (que nous préférons appeler ici du nom plus français de *Commande optimale*) des systèmes gouvernés par des équations différentielles. S'il fut un sujet plus « chaud » en mathématiques appliquées dans les années soixante et soixante-dix, et s'il reste un domaine de recherche actif dans certains pays comme la Russie, les États-Unis et l'Angleterre, en France il a été laissé essentiellement aux automaticiens. On trouve néanmoins des groupes très actifs en recherche dans ce domaine dans des centres comme Toulouse (ENSEEIHT), université de Dijon, École des mines de Paris, INRIA-Rocquencourt, université de Lyon I, université de Paris I (en économie mathématique)... Pour ce qui est de la formation, on en trouve trace dans des options de deuxième année d'écoles d'ingénieurs (ENSEEIHT-Toulouse, École Centrale de Paris, École des mines de Paris, Supaéro de Toulouse,...), un peu dans des masters 1 de mathématiques (comme à l'université Paul Sabatier de Toulouse), dans des masters professionnels comme celui d'ingénierie mathématique et automatique de l'université de Paris-Sud à Orsay (où enseigne l'auteur du livre).

L'ouvrage proposé est dû à un jeune spécialiste du sujet, É. Trélat (maître de conférences à l'université de Paris-Sud à Orsay) ; pour les moins jeunes, il fait écho d'une certaine manière au « Cours d'automatique théorique » de R. Pallu de la Barrière (Éditions Dunod, 1966), il se situe dans le même esprit et objectif que l'ouvrage de M. Bergounioux (« Optimisation et contrôle des systèmes linéaires », Dunod 2001) ; les deux ouvrages (récents) en anglais qui s'en rapprochent le plus sont ceux de L. M. Hocking (« Optimal Control, an Introduction to the Theory with Applications », Oxford Series, 1991) et A. Locatelli (« An Introduction to Optimal Control », McGraw-Hill, 2001).

Le livre de É. Trélat débute avec un chapitre I d'introduction sur la commande optimale d'un ressort, exemple-modèle qui servira de fil rouge dans toute la suite. Cet exemple détaillé était déjà disponible sur le site web de la SMAI en 2002-2003 puisque « Optimisation et Commande optimale » figuraient cette année-là comme thèmes des projets TIPE en classes préparatoires aux écoles scientifiques. La première partie du livre, composée de trois chapitres traite de la commande optimale de systèmes *linéaires :* contrôlabilité (13 pages) ; temps-optimalité (6 pages) ; problèmes linéaires-quadratiques (15 pages). Disons que cette partie est plutôt classique ; elle utilise les outils et résultats d'algèbre linéaire et d'équations diférentielles linéaires qui sont rappelés en annexes du livre ; elle pourrait servir aussi bien dans un cours de mathématiques que d'automatique. Commencer par le monde linéaire est intéressant du point de vue pédagogique, et aussi parce que la linéarisation de modèles non-linéaires est utile par exemple dans les questions dites de stabilisation. Mais le monde est non-linéaire... too bad. L'auteur s'attaque donc en deuxième partie d'ouvrage à la commande optimale de systèmes *non-linéaires :* cinq chapitres y sont consacrés. Le chapitre V (11 pages) est dédié aux définitions et préliminaires : application entrée-sortie, notions de contrôlabilité, contrôles singuliers. Le chapitre VI (3 pages) donne l'occasion de présenter succinctement un théorème général d'existence de trajectoires optimales. Avec le chapitre VII (31 pages) on arrive à un point culminant : le principe du minimum (ou du maximum, ça dépend des formulations) de L. Pontryagin (PMP en abrégé). Le PMP (un énoncé général figure en page 103–104) est une condition nécessaire satisfaite par les solutions d'un problème de commande optimale ; elle est importante aussi bien pour des considérations théoriques qu'algorithmiques (les méthodes dites indirectes du chapitre IX par exemple). Avoir démontré le PMP (par les russes à la fin des années cinquante, motivés par des problèmes militaires ou du spatial) est, de mon point de vue, une des plus brillantes réalisations mathématiques de la deuxième moitié du XX^e siècle. L'histoire du processus de sa découverte est racontée dans deux articles, celui de R. Gamkrelidze (publié en 1999) que cite l'auteur, mais aussi celui plus polémique et non publié de V. Boltyanski (rapport de l'université technique de Munich, 1994) ; ce dernier montre les difficultés dans la démarche de création mathématique et aussi dans les relations entre collègues mathématiciens (quand il s'agit d'attribuer le crédit d'une idée ou d'une démonstration). Des exercices et problèmes d'illustration sont proposés, parfois avec des indications de solutions. Le chapitre se termine par le problème de la commande optimale et stabilisation d'une navette spatiale, projet du CNES-Toulouse sur lequel a eu à travailler l'auteur du livre. Le chapitre VIII (9 pages) traite de la théorie de Hamilton-Jacobi dans le contexte de la commande optimale : cette matière est plus classique et peut être trouvée dans d'autres ouvrages, y compris en français (celui de Barles en 1994 par exemple). Le chapitre IX (8 pages) est entièrement consacré aux méthodes numériques de résolution d'un problème de commande optimale : méthodes dites indirectes (méthodes de tir appliquées aux systèmes différentiels issus du PMP), méthodes directes (discrétisation directe du problème originel) ; on appréciera le tableau comparatif synthétique et les commentaires (pages 178–180) sur « Quelle méthode choisir ? ». L'ouvrage se termine avec une Annexe de cinq courts chapitres (45 pages au total) où sont rappelés les définitions et résultats essentiels d'algèbre linéaire, sur les équations différentiels linéaires, en commande-automatique linéaire.

L'ouvrage rendra service à ceux qui s'intéressent aux applications de la Commande optimale dans les systèmes gouvernés par des équations différentielles (elles sont nombreuses, à commencer par le domaine spatial et la robotique). Pour l'avoir expérimenté dans un petit bout de Master 1 de mathématiques, je sais aussi que le domaine est utile en formation : pour donner le goût du calcul variationnel moderne, pour l'apprentissage mathématique (analyse et synthèse d'un problème, déductions, tri parmi les solutions préconisées), etc.

On peut regretter quelques anglicismes (« temps-optimalité » pour *time optimality,* « preuve » systématiquement utilisé à la place de « démonstration » comme souvent en mathématiques d'ailleurs,...) ou fautes de français (« prémisses » au lieu de « prémices » en page 93 (peut-être est-ce voulu ?), « paramétriser » au lieu de « paramétrer » en page 131,...) ; mais ce ne sont que des broutilles dans un ensemble de très bonne facture que je recommande aux lecteurs de la *Gazette*.

Le livre de Trélat coûte 30 euros, c'est le premier d'une nouvelle collection chez Vuibert intitulée « Mathématiques concrètes ».

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty,
Université Paul Sabatier de Toulouse