Bull. Soc. Math. France
147 (1), 2019, p. 49-90

SUR LA TORSION DE FROBENIUS DE LA CATÉGORIE DES MODULES INSTABLES

PAR THE CUONG NGUYEN

RÉSUMÉ. — Un des phénomènes marquants dans la catégorie $\mathcal{P}_d$ des foncteurs polynomiaux stricts est l'injectivité des morphismes induits par la torsion de Frobenius entre groupes d'extensions des foncteurs. Dans [4], l'auteur démontre que le foncteur de Hai, allant de la catégorie $\mathcal{P}_d$ vers la catégorie des modules instable $\mathcal{U}$, est pleinement fidèle. Cela fait de la catégorie $\mathcal{P}_d$ une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{U}$. La torsion de Frobenius s'étend à toute la catégorie $\mathcal{U}$, mais n'y est pas aussi bien comprise. Cet article étudie la torsion de Frobenius, soit dans ce cas le foncteur double Φ, et ses effets sur les groupes d'extension des modules instables. On donne des calculs explicites de nombreux groupes d'extensions des modules instables, et permet de confirmer, dans de nombreux cas, l'injectivité des morphismes entre des groupes d'extensions induits par la torsion de Frobenius dans la catégorie $\mathcal{U}$. Ces résultats sont obtenus en étudiant la résolution injective minimale du module instable libre $F(1)$.

Texte reçu le 17 novembre 2015, modifié le 15 juin 2016, accepté le 30 juin 2016.

THE CUONG NGUYEN, Department of Mathematics, Vietnam National University, 334 Nguyen Trai Street, Hanoi, Vietnam • Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications - UMR7539 du CNRS, LIAFV, 99 Avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France • *E-mail :* tdntcuong@gmail.com • *E-mail :* nguyentc@math.univ-paris13.fr • *Url :* https://sites.google.com/site/thcuongnguyen/

Classification mathématique par sujets (2010). — 55S10, 18A40.

Mots clefs. — Algèbre de Steenrod, foncteurs polynomiaux stricts, modules instables, torsion de Frobenius.

L'auteur est partiellement soutenu par le programme ARCUS Vietnam MAE, Région IDF et par LIAFV - CNRS - Formath Vietnam.

© Société Mathématique de France
0037-9484/2019/49/$ 5.00
doi:10.24033/bsmf2775

Abstract (*On the Frobenius twist in the category of unstable modules*). — The Frobenius twist of strict polynomial functors induces natural morphisms between Ext-groups, which are injective according to Friedlander and Suslin [10]. This fact plays an important role in homological computations of strict polynomial functors. In algebraic topology, the category $\mathcal{P}_d$ of homogeneous strict polynomial functors of degree d is connected to the category $\mathcal{U}$ of unstable modules over the Steenrod algebra *via* Hai's functor [11], which is proved to be fully faithful in [4]. The Frobenius twist is extended to the category $\mathcal{U}$, under the form of the double functor Φ, but remains mysterious there. This article aims to study the Frobenius twist Φ and its effects on Ext-groups of unstable modules. We compute explicitly many Ext-groups in $\mathcal{U}$ and show that in these cases, the morphisms induced by the Frobenius twist are injective. These results are obtained by constructing the minimal injective resolution of the free unstable module $F(1)$.

1. Introduction

En topologie algébrique, on rencontre fréquemment les calculs des groupes d'extensions entre modules gradués sur l'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}_2$. La suite spectrale d'Adams montre l'intérêt d'étudier ces groupes. Mais l'étude directe des groupes d'extensions des $\mathcal{A}_2$-modules gradués s'est avérée difficile. Toutefois, une sous-catégorie abélienne (pleine) fondamentale de la catégorie des $\mathcal{A}_2$-modules gradués offre davantage de prise aux calculs cohomologiques : la catégorie, notée traditionnellement $\mathcal{U}$, des $\mathcal{A}_2$-modules *instables* (c'est-à-dire dans lesquels $Sq^i x = 0$ si x est un élément homogène de degré strictement inférieur à i). Cette condition d'instabilité est vérifiée par la cohomologie singulière (mod. 2) d'un espace topologique, mais pas d'un spectre, ce qui en justifie l'appellation. Le foncteur d'oubli de $\mathcal{U}$ dans la catégorie de tous les $\mathcal{A}_2$-modules gradués possède un adjoint à gauche nommé *déstabilisation* et noté D dont les dérivés ont été étudiés, par exemple, par Lannes et Zarati [19]. La suite spectrale de Grothendieck associée à cette adjonction (plus précisément, au couple D et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(-, N)$ pour certain module instable N) permet ainsi d'obtenir certains renseignements sur des groupes d'extensions entre $\mathcal{A}_2$-modules gradués. En particulier, si N est un module instable injectif, cette suite spectrale s'effondre à la page 2 et donne

$$\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{A}_2}(M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(D_q(M), N),$$

pour tout $q \geq 0$, où D_q désigne le q-ème foncteur dérivé du foncteur de déstabilisation D. Cela joue un rôle crucial dans la preuve de Lannes et Zarati sur la conjecture de Ségal pour les 2-groupes abéliens élémentaires (forme faible) [19, 5.4.7].

La structure algébrique fine de la catégorie $\mathcal{U}$ est utilisée pour résoudre des problèmes topologiques, par exemple, la conjecture de Sullivan sur les espaces fonctionnels dont la source est un espace classifiant d'un p-groupe abélien

élémentaire (ces espaces sont étudiés et présentés en grand détail dans [15]). Dans le fameux article [20], aux *Annals of Mathematics*, Miller démontre cette conjecture en la ramenant à la trivialité des groupes d'extensions entre certains $\mathcal{A}_2$-modules instables. Ce point clé est réétudié par Lannes et Schwartz [16] avec les techniques des modules instables, ce qui en simplifie la preuve.

L'objet essentiel de cette note est d'étudier l'algèbre cohomologique des modules instables sur l'algèbre de Steenrod : on calcule les groupes d'extensions entre certains modules instables, et on étudie les effets de la torsion de Frobenius sur eux. Afin de préciser, explicitons quelques notations. La lettre p désigne un nombre premier, et on note $\mathbb{F}_p$ le corps premier de caractéristique p. Soit $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs de la catégorie des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels de dimension finie vers la catégorie des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels. Cette notion remonte au travail fondamental [7] d'Eilenberg et Mac Lane, dans les années 1950, sur l'homologie singulière des espaces topologiques. Le lien avec $\mathcal{F}$ en topologie est établi dans [12] : il existe un foncteur, que l'on note f, de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{F}$, défini grâce au foncteur de Lannes [15] ; le résultat crucial est que ce foncteur induit une équivalence entre la catégorie quotient $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ (modulo les modules instables nilpotents [23]) et la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}$, désignée par $\mathcal{F}_\omega$, des foncteurs analytiques.

Un autre lien très important est introduit par Friedlander et Suslin dans [10] par les foncteurs polynomiaux stricts. L'objet de [10] est de montrer que pour un schéma en groupes fini G et un G-module rationnel M de dimension finie, $H^*(G;\Bbbk)$ est une algèbre de type fini, et $H^*(G;M)$ est un module de type fini sur $H^*(G;\Bbbk)$, ici $\Bbbk$ désigne un corps fini. L'outil essentiel est la notion des foncteurs polynomiaux stricts, qui consiste en associer pour tout $\Bbbk$-espace vectoriel V un espace vectoriel $F(V)$, et pour tout couple d'espaces vectoriels V et W un morphisme de schémas de $\mathrm{Hom}_\Bbbk(V,W)$ dans $\mathrm{Hom}_\Bbbk(F(V),F(W))$ tel que les propriétés usuelles pour que F soit un foncteur soient satisfaites. Ici on identifie un espace vectoriel V par le schéma affine $Spec\left(S^*\left(V^\sharp\right)\right)$, où l'on désigne par $V^\sharp$ le $\Bbbk$-dual de V et par S^* l'algèbre symétrique. Un foncteur polynomial strict se réduit par l'évaluation du polynôme en un foncteur polynomial ordinaire, et qu'on obtient ainsi un foncteur 'oubli' $\mathcal{O} : \mathcal{P}^d \to \mathcal{F}$, où l'on note $\mathcal{P}^d$ la catégorie des foncteurs polynomiaux stricts homogènes de degré d. Le degré d'un foncteur polynomial strict est le degré des polynômes utilisés pour la définition du morphisme des schémas, et de la même façon on définit la propriété qu'un tel foncteur soit homogène. D'après Nguyen D. H. Hai [11], le foncteur d'oubli se factorise à traverse f, *via* un foncteur $\bar{m}_d : \mathcal{P}^d \to \mathcal{U}$, qui est pleinement fidèle selon [4]. Ceci montre l'intérêt d'étendre de nombreux phénomènes intéressants de $\mathcal{P}^d$ à la catégorie $\mathcal{U}$, et on en détaille dans la suite l'un de ceux qui nous motivent.

Rappelons la torsion de Frobenius. Soit $\Bbbk$ un corps fini de caractéristique positive p, et soit V un $\Bbbk$-espace vectoriel. On note F l'homomorphisme de

Frobenius $x \mapsto x^p$. La torsion de Frobenius de V, notée $V^{(1)}$, est le $\Bbbk$-espace vectoriel, qui comme groupe abélien, s'identifie à V mais, dont la multiplication par les scalaires est donnée par $\lambda v = \lambda^p v$. Étant donné un $GL_n(\Bbbk)$-module M, sa torsion de Frobenius $M^{(1)}$ est le $GL_n(\Bbbk)$-module induit par l'homomorphisme de Frobenius

$$F : GL_n(\Bbbk) \longrightarrow GL_n(\Bbbk).$$

D'après les travaux de Cline, Parshall, Scott et Jantzen [3, 13][1], le morphisme

$$\mathrm{Ext}^*_{GL_n(\Bbbk)}(M,N) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^*_{GL_n(\Bbbk)}\left(M^{(1)}, N^{(1)}\right) \tag{1}$$

induit par la torsion de Frobenius en cohomologie est injectif. Selon Friedlander et Suslin [10, corollaire 3.13], pour n assez grand, les groupes d'extensions des $GL_n(\Bbbk)$-modules se calculent comme ceux des foncteurs polynomiaux stricts. Il y a aussi une torsion de Frobenius $F^{(1)}$ d'un foncteur polynomial strict F, ce qui consiste en associer à un $\Bbbk$-espace vectoriel V le $\Bbbk$-espace vectoriel $F\left(V^{(1)}\right)$, et celle-ci induit donc un analogue dans $\mathcal{P}$ du phénomène d'injectivité (1). Ce résultat est crucial dans [8] pour démontrer que les groupes d'extensions entre les foncteurs polynomiaux stricts se stabilisent par rapport aux itérations de la torsion de Frobenius.

Il y a sur $\mathcal{U}$ un avatar de la torsion de Frobenius : le foncteur double Φ [23]. Nguyen D. H. Hai [11] montre que le foncteur $\bar{m}_d$ commute avec la torsion de Frobenius :

$$\Phi\bar{m}_d(F) \cong \bar{m}_d\left(F^{(1)}\right).$$

Le foncteur Φ joue un rôle important dans l'étude de la catégorie $\mathcal{U}$; la question suivante est dès lors très naturelle :

Question 1. — *Étant donnés deux modules instables M et N, le morphisme*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}(\Phi M, \Phi N)$$

induit par Φ en cohomologie est-il injectif ?

Malheureusement, celle-ci ne peut avoir lieu en toute généralité, ne serait-ce qu'à cause des modules instables nilpotents. Un contre-exemple concernant des modules instables $\mathcal{N}il$-fermés sera aussi donné.

Cependant des calculs, effectués à l'aide du module instable $F(1)$ (l'objet projectif de $\mathcal{U}$ qui représente le foncteur associant à un module instable le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de ses éléments homogènes de degré 1) sur le système

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}(\Phi^n F(1), \Phi^n F(1)) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{n+1}F(1), \Phi^{n+1}F(1)\right) \to \cdots,$$

Φ^r désignant la r-ème itération de l'endofoncteur Φ, montrent qu'il subsiste des propriétés intéressantes :

1. Je tiens à remercier Professeur Wilberd van der Kallen pour m'avoir indiqué la bonne réference pour ce résultat.

THÉORÈME 8.5. — *Soit i un entier non négatif tel que $i \leq 49$ ou $i = 2^n - 2^5 + t$ avec $0 \leq t \leq 2^5 + 2$ et $5 < n$. Alors pour tout $0 \leq r$, le morphisme*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}}\left(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)\right) \longhookrightarrow \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{r+1} F(1), \Phi^{r+1} F(1)\right)$$

induit par Φ en cohomologie est injectif.

L'essentiel de notre travail consiste en l'étude de la résolution injective (minimale de préférence) de $F(1)$. Dans cet article, on la désigne par (I^r, ∂^r), où $r \geq 0$. Nous ne la connaissons pas, mais nous pouvons dire beaucoup de choses à ce propos.

Rappelons les objets injectifs de la catégorie $\mathcal{U}$. On désigne par $J(n)$ l'enveloppe injective de la cohomologie réduite $\tilde{\mathrm{H}}^*(S^n; \mathbb{F}_2)$ de la sphère S^n. Les $J(n)$ sont caractérisés par

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, J(n)) \cong (M^n)^\sharp .$$

Il y a aussi d'autres objets injectifs importants de la catégorie $\mathcal{U}$. Soit V un 2-groupe abélien élémentaire, la cohomologie de l'espace classifiant BV, que l'on note H^*V (on note $\tilde{\mathrm{H}}^*V$ la cohomologie réduite), est un module instable injectif. Ce phénomène est observé par Carlsson pour $p = 2$ [2], démontré dans le cas $V = \mathbb{Z}/p$ pour p impair par Miller [20], et développé dans le cas général par Lannes et Zarati [18].

Les travaux de Franjou, Lannes et Schwartz, [17, théorème 3.1],[9, théorème 7.3] permettent de démontrer :

PROPOSITION 4.6. — *Pour tout entier non négatif r, le module I^r se décompose en somme directe $R^r \oplus N^r$, où R^r est un facteur direct d'une certaine somme $\bigoplus_\alpha \mathrm{H}^*(BV_\alpha; \mathbb{F}_2)$, et N^r est une somme directe finie de modules de Brown-Gitler.*

Puisqu'il n'y a pas de morphisme non trivial d'un modules instable fini dans H^*V, la suite $(N^r, \partial^r|_{N^r}, r \geq 0)$ est un sous-complexe de la résolution injective minimale de $F(1)$. Le calcul de la cohomologie de ce sous-complexe dépend de la cohomologie de MacLane des corps finis [9].

COROLLAIRE 3.8. — *Soient k un entier positif et $r = 1 + 2^k(2l+1)$, alors :*

$$\mathrm{H}^r\left(N^\bullet, \partial^\bullet|_{N^\bullet}\right) \cong \frac{F(1)}{\Phi^k F(1)}.$$

Soient $k > l \geq 2$. On observe que si t est un entier tel que $2^l > t$ alors

$$\mathrm{H}^{t+2^l}\left(N^\bullet, \partial^\bullet|_{N^\bullet}\right) \cong \mathrm{H}^{t+2^k-2^l}\left(N^\bullet, \partial^\bullet|_{N^\bullet}\right).$$

Cette périodicité particulière de la cohomologie $\mathrm{H}^*\left(N^\bullet, \partial^\bullet|_{N^\bullet}\right)$ se relève au complexe $(N^\bullet, \partial^\bullet|_{N^\bullet})$.

THÉORÈME 5.1. — *Sous les mêmes hypothèses sur k, l et t, il y a un isomorphisme entre les modules instables :*

$$N^{t+2^l} \cong N^{t+2^k-2^l}.$$

Désignons par $J(n_1, \dots, n_k)$ la somme directe de $J(n_i), 1 \leq i \leq k$, et posons :

$$A_{2^n+3} := \left(\bigoplus_{i=1}^{n-3} J\left(2^{n-1}-2^i\right)\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{\substack{1\leq i\leq n-2\\ 0\leq j\leq i-2}} J\left(2^{n-1}-2^i-2^j\right)\right).$$

Le théorème suivant détaille les N^k pour de nombreux entiers k.

THÉORÈME 8.4. — *Pour $n \geq 6$, on a :*

k	2^n-32	2^n-31	2^n-30	2^n-29	2^n-28
N^k	0	$J(16)$	$J(15,14,12)$	$J(14,12,11,8)$	$J(13,10,5)$
k	2^n-27	2^n-26	2^n-25	2^n-24	2^n-23
N^k	$J(12,4,3)$	$J(11,6,3)$	$J(10,2)$	$J(9)$	$J(8)$
k	2^n-22	2^n-21	2^n-20	2^n-19	2^n-18
N^k	$J(7,3)$	$J(6,2)$	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$
k	2^n-17	2^n-16	2^n-15	2^n-14	2^n-13
N^k	$J(2)$	0	$J(8)$	$J(7,6)$	$J(6,4)$
k	2^n-12	2^n-11	2^n-10	2^n-9	2^n-8
N^k	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0
k	2^n-7	2^n-6	2^n-5	2^n-4	2^n-3
N^k	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0	$J(2)$
k	2^n-2	2^n-1	2^n	2^n+1	
N^k	0	$J(1)$	0	$J(2^{n-1})$	
k	2^n+2			2^n+3	
N^k	$J(2^{n-1}-1, 2^{n-1}-2, \dots, 2^{n-1}-2^{n-3})$			$J(2^{n-2}) \oplus A_{2^n+3}$	

On observe que dans la zone où on peut expliciter N^k, les modules de Brown-Gitler du type $J(2^n)$ sont répartis de la manière suivante : chaque module N^{2l+1} en contient un seul facteur et N^{2l} n'en contient aucun. Cette particularité implique :

PROPOSITION 4.2. — *Soit l un entier. S'il existe un entier n_l tel que*

$$N^{2l+1} = J(2^{n_l}) \oplus \bigoplus_{\alpha} J\left(2^{m_\alpha}(2t_\alpha+1)\right),$$

où $t_\alpha > 0$, et que N^{2l} ne contient aucun facteur direct du type $J(2^n)$, alors on a :

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2l}\left(\Phi^k F(1), F(1)\right) \cong \begin{cases} 0 & si\ k \leq n_l, \\ \mathbb{F}_2 & si\ k > n_l. \end{cases}$$

De plus, le morphisme

$$\mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1), F(1)\right) \to \mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{k+1} F(1), F(1)\right)$$

induit par Φ *en cohomologie est injectif.*

Plan de l'article. — La section 2 rappelle des généralités sur les modules instables injectifs, et la section 3 justifie l'étude de la résolution injective minimale de $F(1)$. On y en calcule l'homologie de la partie réduite en utilisant la cohomologie de MacLane de $\mathbb{F}_2$. La partie nilpotente de cette résolution est étudiée dans la section 4. Le corollaire 3.8 permet de montrer que chaque terme de cette partie est somme directe finie de modules de Brown-Gitler. On décrit un phénomène de périodicité de la partie nilpotente dans la section 5. Le théorème 5.1 y est démontré. La section 6 est consacrée à une étude des extensions de la partie nilpotente par la partie réduite. Cela est crucial pour démontrer le théorème 8.4. Les cas particuliers de la partie nilpotente sont calculés dans la section 7. La section 8 a pour but de calculer les groupes d'extensions entre certains modules instables et étudier l'effet de la torsion de Frobenius sur eux. Une conjecture à ce propos est donnée à la fin de l'article.

Remerciements. — Ce travail fait partie de ma thèse de doctorat effectuée à l'Université Paris 13 sous la direction de Lionel Schwartz. Je tiens à remercier Professeur Schwartz pour sa générosité, son soutien constant, ses précieux conseils, sa patience et ses exigences qui m'ont toujours apporté autant humainement que scientifiquement. Mes remerciements vont également à Vincent Franjou. Ses remarques m'ont permis d'envisager ce travail sous un autre angle. Je suis reconnaissant au rapporteur anonyme de cet article, pour ses commentaires et ses suggestions permettant d'en améliorer nettement la présentation. J'aimerais profiter de cette occasion pour remercier les membres du VIASM pour leur accueil chaleureux et leur généreuse hospitalité pendant ma visite à Hanoi où l'article a été baptisé.

2. Modules instables injectifs

La lettre p désigne un nombre premier, et on note $\mathbb{F}_p$ le corps premier de caractéristique p. Dans le cadre de cet article, nous nous intéressons au cas $p = 2$.

L'algèbre de Steenrod. — L'algèbre de Steenrod modulo 2, notée traditionnellement $\mathcal{A}_2$, est une algèbre graduée associative engendrée par les Sq^k de degré $k \geq 0$ soumis aux relations d'Adem et $Sq^0 = 1$. Serre introduit les notions de monôme admissible et d'excès [25] pour les opérations de Steenrod. Le monôme

$$Sq^{i_1} \dots Sq^{i_m}$$

est admissible si $i_k \geq 2i_{k+1}$ pour tout $m \geq k \geq 2$ et $i_m \geq 1$. L'excès de cette opération est défini par :

$$e(Sq^{i_1} \dots Sq^{i_m}) := i_1 - i_2 - \dots - i_m.$$

L'ensemble des monômes admissibles et Sq^0 forment une base additive de l'algèbre de Steenrod. Milnor [21] montre que $\mathcal{A}_2$ a un coproduit naturel qui fait d'elle une algèbre de Hopf dont l'antipode est l'involution de Hopf.

Les Sq^{2^k} sont indécomposables, et on désigne par $\mathcal{A}(n)$ la sous-algèbre de $\mathcal{A}_2$ engendrée par les Sq^{2^i} tels que $i \leq n$. Les $\mathcal{A}(n)$ sont de dimension finie sur $\mathbb{F}_2$ d'après [1, section 5]. En fait, toute sous-algèbre, engendrée par un ensemble fini d'opérations de Steenrod, est de dimension finie sur $\mathbb{F}_2$. Il existe un ensemble minimal de relations définissant $\mathcal{A}_2$, concernant seuls les Sq^{2^n} [26] :

$$Sq^{2^i} Sq^{2^j} \equiv Sq^{2^j} Sq^{2^i} \text{ modulo } \mathcal{A}(i-1), \text{ si } 0 \leq j \leq i-2,$$
$$Sq^{2^i} Sq^{2^i} \equiv Sq^{2^{i-1}} Sq^{2^i} Sq^{2^{i-1}} + Sq^{2^{i-1}} Sq^{2^{i-1}} Sq^{2^i} \text{ modulo } \mathcal{A}(i-1).$$

Pour $n \geq k$, on désigne par Q_k^n le produit

$$Sq^{2^k} Sq^{2^{k+1}} \dots Sq^{2^n}.$$

L'ensemble des monômes $Q_{k_0}^{n_0} Q_{k_1}^{n_1} \dots Q_{k_i}^{n_i}$, où les (n_j, k_j) sont en ordre lexicographique

$$(n_j, k_j) < (n_{j-1}, k_{j-1}) \text{ pour tout } 1 \leq j \leq i,$$

forme la base de Wall de l'algèbre de Steenrod [26].

Modules instables. — Un $\mathcal{A}_2$-module gradué M est dit instable si l'action de Sq^k sur un élément homogène x de degré n est triviale dès que $k > n$. La catégorie des modules instables est désignée par $\mathcal{U}$.

Soit Sq_0 l'opération qui, à un élément homogène x de degré n d'un module instable, associe l'élément $Sq^n x$. La torsion de Frobenius dans $\mathcal{U}$ est un endofoncteur Φ qui consiste en associer à un module instable M le module ΦM, concentré en degrés pairs tel que $(\Phi M)^{2n} = M^n$, et l'action de l'algèbre de Steenrod est déterminée par $Sq^{2k}\Phi x = \Phi Sq^k x$. Posons

$$\lambda_M : \Phi M \longrightarrow M,$$
$$\Phi x \longmapsto Sq_0 x.$$

Définition 2.1. — Un module instable M est dit *réduit* si λ_M est injectif. Il est dit *nilpotent* si pour chaque élément $x \in M$, il existe un entier n_x tel que

$$Sq_0^{n_x} x = 0.$$

On désigne par $\mathcal{N}il$ la sous-catégorie des modules nilpotents.

Notons $J(n)$ l'enveloppe injective de la cohomologie réduite $\tilde{\mathrm{H}}^*(S^n; \mathbb{F}_2)$ de la sphère S^n. Les $J(n)$ sont caractérisés par

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, J(n)) \cong (M^n)^\sharp$$

et forment un système de cogénérateurs injectifs pour $\mathcal{U}$. De plus, puisque $J(n)$ est fini pour tout entier non négatif n, il est nilpotent. Dualement, pour chaque entier non négatif n, on note $F(n)$ le recouvrement projectif de $\tilde{\mathrm{H}}^*(S^n;\mathbb{F}_2)$; ce module est instablement et librement engendré par $\imath_n$ de degré n, et est caractérisé par

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n),M)\cong M^n.$$

Comme le $\mathcal{A}_2$-morphisme $F(1)\to \mathrm{H}^*\mathbb{Z}/2$ induit par $\imath_1\mapsto u$, où u est l'unique générateur de l'algèbre $\mathrm{H}^*\mathbb{Z}/2$, est injectif, alors l'unique générateur de $F(1)$ est souvent désigné par u au lieu de $\imath_1$.

Carlsson et Miller ont observé que la cohomologie modulo p d'un p-groupe abélien élémentaire est injective dans $\mathcal{U}$ [2, 20]. Lannes et Zarati ont démontré que le produit tensoriel d'un tel module avec un module de Brown-Gitler reste injectif [18], et cela donne la caractérisation des modules instables injectifs.

THÉORÈME 2.2 ([17, théorème 3.1]). — *Chaque module injectif indécomposable de la catégories $\mathcal{U}$ est isomorphe à un produit tensoriel $L\otimes J(n)$ entre un facteur direct indécomposable L de $(\mathrm{H}^*B\mathbb{Z}/p)^{\otimes d}$, pour certain entier non négatif d, et un module de Brown-Gitler $J(n)$. Un module instable injectif est une somme directe de modules de ce type.*

Ce théorème signifie qu'un module instable injectif se décompose en somme directe entre un module réduit et un module nilpotent. Pour chaque n, on désigne par x_n l'unique générateur de $(J(2^n))^1$. Dans sa preuve de la conjecture de Sullivan, Miller détaille une description complète des modules de Brown-Gitler.

THÉORÈME 2.3 ([20, théorème 6.1]). — *Il y a un isomorphisme entre les algèbres bigraduées sur l'algèbre de Steenrod :*

$$\bigoplus_{n\geq 0} J(n)\xrightarrow{\sim}\mathbb{F}_2[x_n,n\geq 0,||x_n||=(1,2^n)].$$

L'action de l'algèbre de Steenrod est définie par $Sq^1x_n=x_{n-1}^2$ et par la formule de Cartan :

$$Sq^m(xy)=\sum_{i=0}^{m} Sq^i(x)Sq^{m-i}y.$$

Il en découle que

$$\left(\prod_{i\in I}x_i\,\middle|\,\sum_{i\in I}2^i=n\right)$$

est une $\mathbb{F}_2$-base de $J(n)$.

3. Relation avec la cohomologie de MacLane des corps finis

Dans cette section, on justifie l'étude de la résolution injective minimale de $F(1)$. Chaque terme de cette résolution se décompose en somme directe entre un module nilpotent et l'un qui est réduit. En fait, la partie nilpotente de la résolution est un sous-complexe, et on va se servir de la cohomologie de MacLane de $\mathbb{F}_2$ pour calculer l'homologie du complexe quotient de la résolution par cette partie.

3.1. Première réduction du travail. — Pour tout entier non négatif r, posons :

$$\mathrm{H}_r = \frac{F(1)}{\Phi^r F(1)}.$$

De manière récursive, on définit, pour tout $k \geq 2$,

$$\lambda_M^k := \lambda_M \circ \Phi\left(\lambda_M^{k-1}\right) : \Phi^k M \to M.$$

Soit n un entier non négatif. Un module instable M est dit *n-connexe* s'il M^k est trivial pour tout $n \geq k$. Puisque, pour chaque module instable M, il existe un épimorphisme

$$\bigoplus_{x \in M^k} F(k) \to M, \quad \imath_k \mapsto x,$$

alors si l'un module instable est n-connexe, il en est de même pour son recouvrement projectif d'où

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(M, N) \cong 0,$$

pour tout module instable N tel que $N^k = 0$ des que $k > n$. Puisque H_r est trivial en degrés plus grands que 2^{r-1}, on obtient la première réduction du travail.

Proposition 3.1. — *Soient M un module instable 0-connexe et r un nombre entier. Alors le morphisme*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, \Phi^r F(1)) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi^r M, F(1)), \tag{2}$$

induit par $\lambda_{F(1)}^r$ en cohomologie est un isomorphisme. De plus

$$(\lambda_{\Phi^r M})^* \circ \left(\lambda_{F(1)}^r\right)_* = \left(\lambda_{F(1)}^{r+1}\right)_* \circ \mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi). \tag{3}$$

Démonstration. — L'isomorphisme (2) résulte des deux points suivants :

1. pour tout entier i, le groupe $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^i(\Phi^r M, \mathrm{H}_r)$ est trivial ;
2. le module H_r s'insère dans la suite exacte courte

$$0 \to \Phi^r F(1) \to F(1) \to \mathrm{H}_r \to 0.$$

L'identité (3) découle de ce que le morphisme $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\lambda_{\Phi^r M}, \Phi^r F(1))$ se factorise à travers $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*\left(\Phi^{r+1} M, \lambda_{\Phi^r F(1)}\right)$ *via* $\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^*(\Phi, \Phi)$. □

A l'aide de la proposition 3.1, on se ramène à étudier la résolution injective minimale du module $F(1)$ et les morphismes $\left(\lambda_{\Phi^{n-1}F(1)}\right)^*$.

COROLLAIRE 3.2. — *Soit M un module instable 0-connexe. Il existe un isomorphisme entre les colimites :*

$$colim_n \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\Phi^n M, F(1)\right) \cong colim_n \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\Phi^n M, \Phi^n F(1)\right).$$

De plus $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}(\Phi,\Phi)$ est un monomorphisme si et seulement si les $(\lambda_{\Phi^{n-1}M})^*$ l'est.

Notations concernant la résolution injective minimale de $F(1)$. — On désigne par $(I^\bullet, \partial^\bullet)$ la résolution injective minimale de $F(1)$. Pour tout $j \geq 0$, chaque module I^j se scinde en somme directe $R^j \oplus N^j$: R^j est réduit et N^j est nilpotent [17, théorème 3.1]. Puisque $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(N^i, R^{i+1}\right)$ est trivial pour tout $i \geq 0$, les morphismes restreints $\partial^\bullet|_{N^\bullet}$ font de la suite $(N^r, \partial^r|_{N^r}, r \geq 0)$ un sous-complexe de la résolution injective de $F(1)$. Désormais $\partial^l|_{N^l} : N^l \to N^{l+1}$ est noté ∂^l_n. On peut exprimer les différentielles ∂^l sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \partial^l_n & \omega^l \\ 0 & \partial^l_r \end{pmatrix} : N^l \oplus R^l \longrightarrow N^{l+1} \oplus R^{l+1}. \tag{4}$$

Désignons par $\tilde{\Phi}$ l'adjoint à droite du foncteur Φ. Comme R^i est injectif et réduit pour tout $i \geq 0$, alors $R^i \xrightarrow{\sim} \tilde{\Phi}R^i$ selon [23, théorème 6.3.4]. Pour tout $n, m \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^n F(1), I^m\right) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^n F(1), N^m \oplus R^m\right) \\ &\cong \left(\tilde{\Phi}^n N^m\right)^1 \oplus \left(R^m\right)^1. \end{aligned}$$

Par conséquent, la partie $(N^\bullet, \partial^\bullet_n)$ et seul le degré 1 de la partie $(R^\bullet, \partial^\bullet_r)$ suffisent pour calculer $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}\left(\Phi^n F(1), F(1)\right)$.

3.2. La cohomologie du complexe $\left(R^\bullet, \partial^\bullet_r\right)$. — Cette sous-section utilise les travaux de Franjou, Lannes, et Schwartz [9] sur la cohomologie de MacLane des corps finis pour étudier la cohomologie du complexe $(R^\bullet, \partial^\bullet_r)$.

D'après Henn, Lannes, et Schwartz [12, I.7], le foncteur

$$f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}_\omega$$

admet un adjoint à droite que l'on note m. En particulier, $f \circ m$ est isomorphe à l'endofoncteur $id_{\mathcal{F}_\omega}$.

NOTATION 1. — *On note ℓ le foncteur composé $m \circ f$. Il est appelé foncteur de localisation loin de $\mathcal{N}il$.*

Un module instable M est dit $\mathcal{N}il$-fermé si $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}}(N, M)$ est nul pour tout module nilpotent N et pour $i = 0, 1$.

PROPOSITION 3.3 ([12, I.7]). — *Soit $M \in \mathcal{U}$, alors $\ell(M)$ est $\mathcal{N}il$-fermé. De plus l'unité $M \to \ell(M)$ est un isomorphisme si M est $\mathcal{N}il$-fermé.*

Puisque tout module injectif réduit est $\mathcal{N}il$-fermé, alors

COROLLAIRE 3.4. — *On a une identification entre les complexes :*

$$\ell(I^\bullet, \partial^\bullet) \cong (R^\bullet, \partial_r^\bullet).$$

La cohomologie du complexe $(R^\bullet, \partial_r^\bullet)$ *est isomorphe au dérivé* $\ell^*(F(1))$.

La description de $\ell^*(F(1))$ que l'on donne dans la suite est une récolte des travaux présentés dans [9] (voir aussi [24]).

REMARQUE 3.5. — Rappelons que le foncteur f est exact. On note $R^i m$ le i-ème dérivé du foncteur m, l'adjoint à droite de f. Alors, la suite spectrale à la Grothendieck associé au couple $(f \vdash m)$ est reformulée comme suit.

$$E^2_{i,j} := \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{U}}\left(M, R^i m(F)\right) \Longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{\mathcal{F}_\omega}\left(f(M), F\right). \tag{5}$$

où ℓ^i désigne le i-ème dérivé de $\ell = m \circ f$.

On note I le foncteur d'inclusion $V \mapsto V$, et Γ^k le foncteur qui, à un espace vectoriel V, associe le groupe des invariants $\left(V^{\otimes k}\right)^{\mathfrak{S}_k}$, où le groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$ agit par permutations sur $V^{\otimes k}$. Puisque d'une part, $I \cong f(F(1))$, et d'autre part, f est exact et préserve l'injectivité des objets, alors

$$R^i m(I) \cong R^i m(f(F(1))) \cong \ell^i(F(1)).$$

Comme $F(k)$, isomorphe à $m(\Gamma^k)$, est projectif, la suite spectrale (5) pour $(F(k), I) \in \mathcal{U} \times \mathcal{F}_\omega$ s'effondre à la page E^2 et donne :

PROPOSITION 3.6. — *Pour tout* $i, k \geq 0$*, il y a un isomorphisme*

$$\ell^i(F(1))^k \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}\left(\Gamma^k, I\right),$$

entre $\mathbb{F}_2$*-espaces vectoriels.*

Le théorème suivant décrit les $\ell^i(F(1))^k$, pour tout entier non négatif k, ainsi que leurs relations.

THÉORÈME 3.7 ([9]). — *Les groupes* $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}\left(\Gamma^m, I\right)$ *sont triviaux si* m *n'est pas une puissance de 2, et :*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}\left(\Gamma^{2^k}, I\right) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } 2^{k+1} | i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, pour tout k*, le morphisme*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}\left(\Gamma^{2^{k-1}}, I\right) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}\left(\Gamma^{2^k}, I\right)$$

induit par le Verschiebung est un isomorphisme si $2^{k+1} | i$.

Et ceci permet de déterminer $\ell^i(F(1))$ en tant que module instable.

COROLLAIRE 3.8. — *Soit $i = 2^n(2k+1)$. Il y a un isomorphisme entre les modules instables :*

$$\ell^i(F(1)) \cong \frac{F(1)}{\Phi^n F(1)}.$$

Démonstration. — L'action de Sq^i sur M^n est déterminée par l'action du morphisme

$$\begin{aligned} Sq^i : F(n+i) &\longrightarrow F(n) \\ \imath_{n+i} &\longmapsto Sq^i \imath_n \end{aligned}$$

sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), M)$. L'isomorphisme

$$\ell^i(m(I))^k \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}\left(\Gamma^k, I\right),$$

combiné avec le théorème 3.7, montre que, en tant qu'espaces vectoriels gradués,

$$\ell^i(F(1)) \cong \frac{F(1)}{\Phi^n F(1)} \text{ si } i = 2^n(2k+1).$$

A cause de l'écart de degrés, la seule opération agissant peut-être non trivialement sur $\left(\ell^i(F(1))\right)^{2^k}$ est Sq^{2^k}. Il résulte de la proposition 3.6 que cette opération devient

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}\left(\Gamma^{2^k}, I\right) \xrightarrow{f^*\left(Sq^{2^k}\bullet\right)} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}\left(\Gamma^{2^{k+1}}, I\right)$$

et est donc non triviale. Ce morphisme est en fait induit par le Verschiebung $\Gamma^{2^{k+1}} \to \Gamma^{2^k}$, dual au morphisme de Frobenius $S^{2^k} \to S^{2^{k+1}}$ (voir [11]). Il s'ensuit que si $i = 2^n(2k+1)$,

$$\ell^i(F(1)) \cong \frac{F(1)}{\Phi^n F(1)}$$

en tant que modules instables. □

En particulier, d'après [9, théorème 7.3] :

THÉORÈME 3.9. — *Le produit de Yoneda fait de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(I, I)$ une $\mathbb{F}_2$-algèbre commutative. Elle est engendrée par les classes $e_n \in \mathrm{Ext}^{2^{n+1}}_{\mathcal{F}}(I, I), n \geq 0$ et admet la présentation suivante :*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(I, I) \cong \frac{\mathbb{F}_2[e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots]}{\langle e_n^2, n \in \mathbb{N}\rangle},$$

$\langle e_n^2, n \in \mathbb{N}\rangle$ désignant l'idéal engendré par les puissances carrés.

Contre-exemples. — On aimerait que le morphisme $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}(\Phi,\Phi)$ soit injectif en général. Cependant :

CONTRE-EXEMPLE 1. — *Il existe un entier i tel que le morphisme*

$$\mathrm{Ext}^5_{\mathcal{U}}\left(\Phi^i(F(1)\otimes F(1)),\Phi^i(F(1))\right)\to \mathrm{Ext}^5_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{i+1}(F(1)\otimes F(1)),\Phi^{i+1}(F(1))\right)$$

induit par le foncteur Φ en cohomologie n'est pas injectif.

On va maintenant justifier ce contre-exemple. Dans un premier temps, on montre que

$$\mathrm{colim}_n\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}(\Phi^n(F(1)\otimes F(1)),F(1))=0.$$

Par contre, dans un deuxième temps on vérifie que

$$\mathrm{Ext}^5_{\mathcal{U}}(F(1)\otimes F(1),F(1))\cong\mathbb{F}_2.$$

Alors il existe i tel que $\left(\lambda_{\Phi^i(F(1)\otimes F(1))}\right)^*$ n'est pas injectif. Selon [12],[6, théorème 3.3], on sait calculer $\mathrm{colim}_n\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}(\Phi^n M,F(1))$:

THÉORÈME 3.10. — *Soit n un entier. Le morphisme*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}(\Phi^n M,F(1))\to\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(f(M),I),$$

naturel en M, induit un isomorphisme

$$colim_n\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}(\Phi^n M,F(1))\cong\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(f(M),I),$$

naturel en M.

De plus, d'après [22], [14, proposition 2.15],

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(f(F(1)\otimes F(1)),I)=\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(I\otimes I,I)=0,$$

alors :

$$\mathrm{colim}_n\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}(\Phi^n(F(1)\otimes F(1)),F(1))=0.$$

Les groupes $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{U}}(\Phi^n(F(1)\otimes F(1)),F(1))$ doivent être triviaux si l'on suppose que $\left(\lambda_{\Phi^{n-1}(F(1)\otimes F(1))}\right)^*$ est injectif. Cependant :

LEMME 3.11. — *On a un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}^5_{\mathcal{U}}(F(1)\otimes F(1),F(1))\cong\mathbb{F}_2.$$

Démonstration. — On désigne par Λ^2 la 2-ième puissance extérieure. Il résulte de la résolution projective minimale de $\Lambda^2(F(1))$ [5, corollaire 1.1.4.17] qu'on a un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}^5_{\mathcal{U}}\left(\Lambda^2(F(1)),F(1)\right)\cong\mathbb{F}_2.$$

Le lemme découle de la suite exacte longue associée à la suite exacte courte

$$0\to F(2)\to F(1)\otimes F(1)\to\Lambda^2(F(1))\to 0.$$

□

Un contre-exemple concernant les modules nilpotents est donné ci-dessous.

CONTRE-EXEMPLE 2. — *Le morphisme*

$$\mathrm{Ext}^3_{\mathcal{U}}\left(\Sigma\mathbb{F}_2, F(1)\right) \to \mathrm{Ext}^3_{\mathcal{U}}\left(\Sigma^2\mathbb{F}_2, \Phi F(1)\right)$$

induit par le foncteur Φ n'est pas injectif.

Démonstration. — Puisque, d'une part, $\Sigma\mathbb{F}_2$ est 0-connexe, et d'autre part, le morphisme $\lambda_{\Sigma\mathbb{F}_2}$ est trivial, le contre-exemple résulte la proposition 3.1. □

4. Sur la résolution injective minimale de $F(1)$

Comme la section 2, on désigne par $(I^\bullet, \partial^\bullet) = (N^\bullet \oplus R^\bullet, \partial^\bullet)$ la résolution injective minimale de $F(1)$, $R^\bullet$ et $N^\bullet$ désignant la partie réduite et la partie nilpotente respectivement. Pour tout $l \geq 0$, chaque morphisme ∂^l s'écrive sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \partial^l_n & \omega^l \\ 0 & \partial^l_r \end{pmatrix} : N^l \oplus R^l \longrightarrow N^{l+1} \oplus R^{l+1}. \tag{6}$$

La minimalité de la résolution signifie que I^0 est l'enveloppe injective de $F(1)$, I^1 est celle du quotient $I^0/F(1)$ et I^j est l'enveloppe injective du conoyau $\mathrm{Coker}\left(\partial^{j-2}\right)$ pour tout $j \geq 2$.

4.1. La partie réduite de la résolution. — Ce paragraphe est consacré à l'étude de la partie $(R^\bullet, \partial^\bullet_r)$ de la résolution injective minimale de $F(1)$. En particulier, chaque module R^j sera calculé en degré 1.

L'enveloppe injective de $F(1)$ est $\tilde{\mathrm{H}}^*\mathbb{Z}/2$. Nous allons montrer que R^k contient un et un seul facteur direct isomorphe à $\tilde{\mathrm{H}}^*\mathbb{Z}/2$ si k est pair et n'en contient aucun sinon. Pour ce fait, remarquons que, d'une part, I – isomorphe à $f(F(1))$ – est simple dans $\mathcal{F}$, et d'autre part, f préserve la minimalité des résolutions. Alors le nombre de facteurs isomorphes à $\tilde{\mathrm{H}}^*\mathbb{Z}/2$ de R^k, est la dimension sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(I, I)$ du groupe $\mathrm{Ext}^k_{\mathcal{F}}(I, I)$. Il découle du théorème 3.7 que :

PROPOSITION 4.1. — *Chaque R^k contient un et un seul facteur direct isomorphe à $\tilde{\mathrm{H}}^*\mathbb{Z}/2$ si k est pair, et n'en contient aucun sinon.*

A part $\tilde{\mathrm{H}}^*\mathbb{Z}/2$ et $\mathbb{F}_2$, les autres modules instables injectifs indécomposables réduits sont 1-connexes [23, section 4.4]. Alors pour tout entier $l \geq 0$, chaque module R^{2l+1} est 1-connexe ; R^{2l} est 0-connexe et le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de ses éléments de degré 1 est isomorphe à $\mathbb{F}_2$. Par abus de notation, on note u l'unique générateur de degré 1 de R^{2l}. L'exactitude de la résolution injective de $F(1)$ implique que $\partial^{2l}_r(u)$ est trivial alors que $\omega^{2l}(u)$ ne l'est pas. Il en découle que chaque terme N^{2l+1} contient un facteur direct isomorphe à la somme directe de $J(2^{n_k}), 1 \leq k \leq m$, tel que

$$\omega^{2l}(u) = \sum_{k=1}^{m} x_{n_k}.$$

Dans le reste de cet article, on va montrer que dans plusieurs cas intéressants, le terme N^{2l+1} contient un seul facteur direct de type $J(2^{n_l})$ alors que N^{2l} n'en contient aucun et cela est suffisant pour calculer le groupe $\mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^r F(1), F(1)\right)$. En effet, on va montrer que dans ces cas :

PROPOSITION 4.2. — *Soit l un entier. S'il existe un entier n_l tel que*

$$N^{2l+1} = J(2^{n_l}) \oplus \bigoplus_{\alpha} J\left(2^{m_\alpha}(2t_\alpha + 1)\right),$$

où $t_\alpha > 0$, et que N^{2l} ne contient aucun facteur direct de type $J(2^n)$, alors on a :

$$\mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1), F(1)\right) \cong \begin{cases} 0 & \textit{si } k \leq n_l, \\ \mathbb{F}_2 & \textit{si } k > n_l. \end{cases}$$

De plus, le morphisme

$$\mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1), F(1)\right) \to \mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{k+1} F(1), F(1)\right)$$

induit par Φ en cohomologie est injectif.

Démonstration. — Puisque N^{2l+1} contient une seule copie de $J\left(2^{n_l}\right)$, alors,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1), N^{2l+1}\right) \cong \begin{cases} \langle x^{2^k}_{n_l - k}\rangle & \text{si } k \leq n_l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Parce que $\partial^{2l}(u^{2^k}) = x^{2^k}_{n_l-k}$, alors, pour $i = 0$ ou $i = 1$, le morphisme de liaison

$$\mathrm{H}^{2l-1+i}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1), R^\bullet\right)\right) \to \mathrm{H}^{2l+i}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1), N^\bullet\right)\right),$$

associé à la suite exacte courte de complexes

$$0 \to N^\bullet \to I^\bullet \to R^\bullet \to 0,$$

est un isomorphisme si $k \leq n_l$ et est trivial sinon. Il en découle, selon le corollaire 3.8, que

$$\mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1), F(1)\right) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq n_l, \\ \mathbb{F}_2 & \text{si } k > n_l. \end{cases}$$

De plus, parce que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(\frac{\Phi^k F(1)}{\Phi^{k+1} F(1)}, I^{2l}\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\left(\frac{\Phi^k F(1)}{\Phi^{k+1} F(1)}, N^{2l} \oplus R^{2l}\right) \cong 0$$

alors

$$\mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\frac{\Phi^k F(1)}{\Phi^{k+1} F(1)}, F(1)\right) \cong 0,$$

et donc

$$\mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^k F(1), F(1)\right) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{2l}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{k+1} F(1), F(1)\right)$$

est injectif. □

4.2. La partie nilpotente de la résolution. — Puisque d'une part, les $\mathrm{H}^k\left(R^\bullet, \partial_r^\bullet\right)$ sont finies et d'autre part

$$\mathrm{H}^k\left(R^\bullet, \partial_r^\bullet\right) \cong \mathrm{H}^{k+1}\left(N^\bullet, \partial_n^\bullet\right),$$

alors les $\mathrm{H}^{k+1}\left(N^\bullet, \partial_n^\bullet\right)$ sont aussi finies. Dans ce paragraphe, on va montrer que N^l est également fini, pour tout $l \geq 0$.

Remarquons que si l'un module instable est nilpotent ou réduit, il en est de même pour son enveloppe injective. Un module instable peut se calculer comme l'extension d'un module réduit par son plus grand sous-module nilpotent. Le lemme suivant explique comment on forme l'enveloppe injective d'une extension à partir de la partie nilpotente et celle qui est réduite. La vérification de ce lemme est simple et est laissée aux lecteurs.

LEMME 4.3. — *Étant donné une suite exacte courte*

$$0 \to N \to M \to R \to 0,$$

N désignant un module nilpotent et R désignant un module réduit, alors l'enveloppe injective de M est la somme directe de l'enveloppe injective de R et celle de N.

Ainsi, pour tout entier non négatif j, afin de déterminer N^j, il faut calculer le sous-module nilpotent le plus grand de $\mathrm{Coker}\left(\partial^{j-2}\right)$. On se place dans une situation générale des catégories abéliennes. La proposition suivante est classique et est laissée aux lecteurs.

PROPOSITION 4.4 ([6]). — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. Etant donné $\left(C^i, \delta^i\right)^{i\geq 0}$ un sous-complexe du complexe $\left(J^i, \omega^i\right)^{i\geq 0}$, notons $\left(Q^i, \tau^i\right)^{i\geq 0}$ le complexe quotient $\left(J^i/C^i\right)^{i\geq 0}$. Alors, le noyau M^i du composé*

$$\mathrm{Coker}\left(\omega^i\right) \to \mathrm{Coker}\left(\tau^i\right) \to \frac{Q^{i+1}}{\mathrm{Ker}\left(\tau^{i+1}\right)}$$

s'insère dans une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{H}^i\left(Q^\bullet, \tau^\bullet\right) \to \mathrm{Coker}\left(\delta^i\right) \to M^i \to \mathrm{H}^{i+1}\left(Q^\bullet, \tau^\bullet\right) \to 0.$$

Cette proposition applique à la résolution injective minimale de $F(1)$.

PROPOSITION 4.5. — *Le noyau $\mathscr{M}^j$ du composé*

$$\mathrm{Coker}\left(\partial^j\right) \to \mathrm{Coker}\left(\partial_r^j\right) \to \frac{R^{j+1}}{\mathrm{Ker}\left(\partial_r^{j+1}\right)}$$

s'insère dans une suite exacte :

$$0 \to \ell^j(F(1)) \to \mathrm{Coker}\left(\partial_n^j\right) \to \mathscr{M}^j \to \ell^{j+1}(F(1)) \to 0.$$

De plus, N^{j+2} est l'enveloppe injective de $\mathscr{M}^j$.

Démonstration. — La proposition résulte des trois points suivants :

1. le lemme 4.3 ;
2. pour tout j, chaque $R^{j+1}/\mathrm{Ker}\left(\partial_r^{j+1}\right)$ est réduit ;
3. les $\ell^j(F(1))$ et $\mathrm{Coker}\left(\partial_n^j\right)$ sont nilpotents pour tout j.

□

Comme $F(1)$ est réduit, I^0 l'est aussi et il suit que N^0 et ∂_n^0 sont triviaux. Puisque $\ell^j(F(1))$ est fini pour tout $j > 0$, si N^j est fini alors il en est de même pour $\mathscr{M}^{j-1}$. Donc par une récurrence simple on obtient :

Proposition 4.6. — *Dans la résolution injective minimale $(N^\bullet \oplus R^\bullet, \partial^\bullet)$ de $F(1)$, chaque N^i est fini, pour tout entier non négatif i.*

Remarque 4.7. — La minimalité de la résolution injective minimale de $F(1)$ implique que pour tout facteur $J(n)$ de N^i, on a

$$\partial_n^i(x_0^n) = 0.$$

Cela résulte du fait que l'un morphisme $\varphi : J(n) \to J(m)$ n'est pas un isomorphisme si et seulement si $\varphi(x_0^n)$ est trivial.

Si M est un module instable fini, on désigne par $\mathrm{d}(M)$ le plus grand degré tel que M^n ne soit pas trivial. Pour exemple,

$$\mathrm{d}(J(n)) = n \quad \text{et} \quad (J(n))^n \cong \mathbb{F}_2.$$

Le lemme suivant mesure les $\mathrm{d}(N^i)$, pour tout $i \geq 0$.

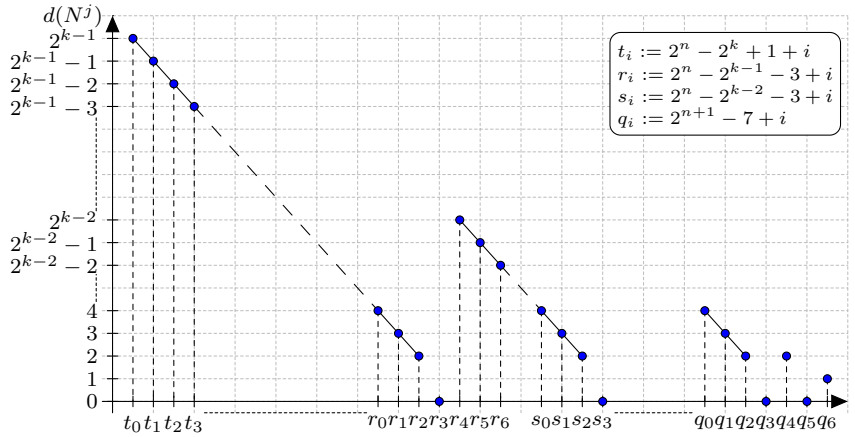
Lemme 4.8. — *Si $n > k+1 \geq 2$, alors*

m	2^n-2	2^n-1	2^n	2^n+1	2^n-2^k-1	2^n-2^k	2^n-2^k+1
N^m	0	$J(1)$	0	$J\left(2^{n-1}\right)$	$J(2)$	0	$J\left(2^{k-1}\right)$

Si l est un entier tel que $2^{k-1}-1 \geq l \geq 2$, alors

$$\mathrm{d}\left(N^{2^n-2^k+l}\right) = 2^{k-1}-l+1 \quad \text{et} \quad \left(N^{2^n-2^k+l}\right)^{2^{k-1}-l+1} \cong \mathbb{F}_2.$$

Le diagramme suivant interprète la représentation géométrique des $\mathrm{d}\left(N^i\right)$ *:*



Démonstration. — Comme $F(1)$ est $\mathcal{N}il$-fermé, alors N^0 et N^1 sont triviaux. D'après la proposition 4.5, pour tout entier non négatif j, N^{j+2} est l'enveloppe injective d'un module $\mathscr{M}^j$, qui s'insère dans la suite exacte

$$0 \to \ell^j\left(F(1)\right) \to \mathrm{Coker}\left(\partial_n^j\right) \to \mathscr{M}^j \to \ell^{j+1}\left(F(1)\right) \to 0.$$

Il suit de là et du corollaire 3.8 que :

m	0	1	2	3	4	5
N^m	0	0	0	$J(1)$	0	$J(2)$

Supposons que le résultat est établi pour tout $n \leq q-1$, où $3 \leq q$, on démontre le cas $n = q$. Par hypothèse de récurrence, on a :

m	2^q-4	2^q-3	2^q-2	2^q-1	2^q	2^q+1
N^m	0	$J(2)$	0	$J\left(1\right)$	0	$J\left(2^{q-1}\right)$

Parce que $\ell^{2^q+1}(F(1)) = 0$ d'où

$$\mathrm{d}\left(\mathscr{M}^{2^q}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^q}\right)}{\ell^{2^q}(F(1))}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{J\left(2^{q-1}\right)}{\mathrm{H}_q}\right),$$

alors

$$\mathrm{d}\left(N^{2^q+2}\right) = 2^{q-1}-1 \quad \text{et} \quad \left(N^{2^q+2}\right)^{2^{q-1}-1} \cong \mathbb{F}_2.$$

Puisque N^{2^q+2} est somme directe de modules de Brown-Gitler, alors N^{2^q+2} contient un et un seul facteur direct isomorphe à $J(2^{q-1}-1)$, et tout autre facteur $J(m)$ satisfait $m < 2^{q-1}-1$. Par conséquent, l'élément $x_1 x_0^{2^{q-1}-3}$ du

facteur $J(2^{q-1}-1)$ de N^{2^q+2}, l'unique générateur de degré $2^{q-1}-2$, n'appartient pas à $\mathrm{Im}\left(\partial_n^{2^q+1}\right)$. Il en découle que

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^q+1}\right)\right) = 2^{q-1}-2.$$

Puisque la résolution $(R^\bullet \oplus N^\bullet)$ est minimale, alors

$$\left(\mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^q+1}\right)\right)^{2^{q-1}-2} \cong \mathbb{F}_2$$

d'après la remarque 4.7. Donc il suit de $\ell^{2^q+2}(F(1)) = \Sigma\mathbb{F}_2$ que

$$\mathrm{d}\left(\ell^{2^q+2}(F(1))\right) < \mathrm{d}\left(\mathscr{M}^{2^q+1}\right)$$

d'où

$$\mathrm{d}\left(\mathscr{M}^{2^q+1}\right) = 2^{q-1}-2 \quad \text{et} \quad \left(\mathscr{M}^{2^q+1}\right)^{2^{q-1}-2} \cong \mathbb{F}_2.$$

Cet argument se généralise et montre que pour $2 \leq t \leq 2^{q-1}-1$,

$$\mathrm{d}\left(N^{2^q+t}\right) = 2^{q-1}-t+1 \quad \text{et} \quad \left(N^{2^q+t}\right)^{2^{q-1}-t+1} \cong \mathbb{F}_2.$$

Il suit de là que

$$N^{2^q+2^{q-1}-2} \cong J(2) \oplus \bigoplus_I J(1).$$

Par ailleurs, il découle (voir [5]) de la résolution projective minimale de $\Sigma\mathbb{F}_2$ que

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{U}}^{2^q+2^{q-1}-1}(\Sigma\mathbb{F}_2, F(1)) = 0,$$

donc $N^{2^q+2^{q-1}-1}$ ne contient aucune copie de $J(1)$ d'où

$$N^{2^q+2^{q-1}-1} \cong J(2).$$

Puisque

$$\partial^{2^q+2^{q-1}-2}(u) = x_1,$$

alors $\mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^q+2^{q-1}-2}\right)$ est trivial d'où la trivialité de $N^{2^q+2^{q-1}}$.

De manière similaire, pour tous s et r tels que $q > s \geq 2$ et $2^{s-1}-1 \geq r \geq 2$, on a

$$N^{2^{q+1}-2^s-1} \cong J(2), \quad N^{2^{q+1}-2^s} \cong 0, \quad N^{2^{q+1}-2^s+1} \cong J(2^{s-1}),$$
$$\mathrm{d}\left(N^{2^{q+1}-2^s+r}\right) = 2^{s-1}-r+1 \quad \text{et} \quad \left(N^{2^{q+1}-2^s+r}\right)^{2^{s-1}-r+1} \cong \mathbb{F}_2,$$

Il en découle que $N^{2^{q+1}-2} \cong 0$ et donc $N^{2^{q+1}-1} \cong J(1)$. Le lemme en résulte. □

Comme conséquence du lemme 4.8, $\mathscr{M}^{2k+1}$ est une extension triviale de $\mathrm{H}^{2k+2}(R^\bullet, \partial_r^\bullet)$ par $\mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2k+1}\right)$ si k est de la forme $2^n - 2^m - 1$. On montre, en fait, qu'elles sont les seules extensions triviales parmi les $\mathscr{M}^{2k+1}$. Avant de détailler cette classification des extensions dans la section 6, on étudie un phénomène de périodicité de la partie nilpotente de la résolution injective minimale de $F(1)$ dans la section qui suit.

5. Un phénomène de périodicité

Soit $I \in \mathcal{F}$ le foncteur d'inclusion $V \mapsto V$, pour tout $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel V, rappelons que $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(I, I)$ est engendrée par $e_n \in \mathrm{Ext}^{2^{n+1}}_{\mathcal{F}}(I, I)$ en tant qu'algèbre (voir le théorème 3.9).

NOTATION 2. — *Soient deux entiers $n > k \geq 2$. On note*

$$e(n,k) = e_{n-2}e_{n-3}\dots e_k.$$

Le morphisme

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{F}}(I, I) \xrightarrow{\smile e(n,k)} \mathrm{Ext}^{2^n-2^{k+1}}_{\mathcal{F}}(I, I) \tag{7}$$

induit par le produit de Yoneda est un isomorphisme [9, proposition 7.2]. On désigne par $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\left(I, f\left(R^0\right)\right)$ le morphisme qui représente l'unité 1 et par $\delta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\left(I, f\left(R^{2^n-2^{k+1}}\right)\right)$ celui qui représente $e(n,k)$. Puisque $(f(R^*), f(\partial^*))$ est une résolution injective dans $\mathcal{F}$ du foncteur I, l'isomorphisme (7) signifie que δ se factorise à travers γ *via* un morphisme

$$\gamma_0 : f(R^0) \to f(R^{2^n-2^{k+1}}).$$

Grâce à l'exactitude de la suite

$$I \hookrightarrow f(R^0) \to f(R^1) \to \cdots \to f(R^n) \to \cdots$$

et à l'injectivité des foncteurs $f(R^i)$, on obtient un morphisme entre les complexes

$$\gamma_\bullet : f(R^\bullet) \to f\left(R^{\bullet+2^n-2^{k+1}}\right)$$

tel que les morphismes induits en cohomologie sont le produit de Yoneda avec $e(n,k)$. Rappelons que le foncteur $f : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ admet un adjoint à droite qu'on désigne par m. Puisque les modules R^i sont $\mathcal{N}il$-fermés, alors $m\left(R^i\right)$ est isomorphe à R^i et donc $(m(\gamma_\bullet))$ est un morphisme entre les complexes

$$R^\bullet \to R^{\bullet+2^n-2^{k+1}}.$$

Désignons par α^i le morphisme $m(\gamma_i)$. Alors pour $0 \leq t \leq 2^{k-1} - 1$, on a

$$\alpha^{2^k+2t}(u) = u,$$

et il en découle que le morphisme α^{2^k+2t} induit un isomorphisme entre les modules instables :

$$\ell^{2^k+2t}(F(1)) \xrightarrow{\sim} \ell^{2^n-2^k+2t}(F(1)).$$

THÉORÈME 5.1 (Périodicité). — *Étant donné $n > k \geq 2$, on a :*

$$\mathscr{M}^{2^n-2^k+t-2} \cong \mathscr{M}^{2^k+t-2},$$
$$N^{2^n-2^k+t} \cong N^{2^k+t},$$

pour tout $0 \leq t \leq 2^k - 1$.

Démonstration. — Il suit du lemme 4.8 que $N^{2^n-2^k}$ et N^{2^k} sont triviaux. Donc

$$\operatorname{Coker}\left(\partial_r^{2^k-1}\right) \cong \operatorname{Coker}\left(\partial^{2^k-1}\right)$$
$$\operatorname{Coker}\left(\partial_r^{2^n-2^k-1}\right) \cong \operatorname{Coker}\left(\partial^{2^n-2^k-1}\right).$$

Puisque $I^{2^n-2^k+1}$ est injectif, il existe $\beta^{2^k+1} : I^{2^k+1} \to I^{2^n-2^k+1}$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} I^{2^k} & \longrightarrow & \operatorname{Coker}\left(\partial^{2^k-1}\right) & \hookrightarrow & I^{2^k+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha^{2^k}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{2^k}} & & \downarrow{\scriptstyle \exists \beta^{2^k+1}} \\ I^{2^n-2^k} & \longrightarrow & \operatorname{Coker}\left(\partial^{2^n-2^k-1}\right) & \hookrightarrow & I^{2^n-2^k+1} \end{array} \tag{8}$$

Parce que, d'une part,

$$N^{2^k+1} \cong J\left(2^{k-1}\right) \cong N^{2^n-2^k+1},$$

et d'autre part,

$$\partial^{2^k}(u) = x_{k-1} = \partial^{2^n-2^k}(u),$$

la restriction de β^{2^k+1} à N^{2^k+1} est un automorphisme de $J\left(2^{k-1}\right)$. Puisque les I^j sont injectifs, le diagramme (8) montre qu'il existe un morphisme entre les complexes :

$$\beta^{2^k+\bullet} : I^{2^k+\bullet} \to I^{2^n-2^k+\bullet}.$$

Supposons que β^{2^k+t} induise

$$\mathscr{M}^{2^n-2^k+t-2} \cong \mathscr{M}^{2^k+t-2},$$
$$N^{2^n-2^k+t} \cong N^{2^k+t},$$

pour tout $1 \leq t < m < 2^{k-1} - 1$. On passe au cas $t = m$. Par hypothèse de récurrence, il résulte de la proposition 4.5 que β^{2^k+m} induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\ell^{2^k+m-2}(F(1)) & \hookrightarrow & \mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^k+m-2}\right) & \longrightarrow & \mathscr{M}^{2^k+m-2} & \twoheadrightarrow & \ell^{2^k+m-1}(F(1)) \\
\| & & \| & & \downarrow & & \| \\
\ell^{s-2}(F(1)) & \hookrightarrow & \mathrm{Coker}\left(\partial_n^{s-2}\right) & \longrightarrow & \mathscr{M}^{s-2} & \twoheadrightarrow & \ell^{s-1}(F(1))
\end{array}$$

où $s = 2^n - 2^k + m$. On peut conclure la récurrence et le théorème en découle. □

6. Sur les extensions $\mathscr{M}^{2k+1}$

Rappelons que pour tout entier non négatif k, $\mathscr{M}^{2k+1}$ est une extension de $\mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2k+1}\right)$ par $\ell^{2k}(F(1))$. L'objet essentiel de cette section est de classifier ces extensions.

THÉORÈME 6.1. — *L'extension $\mathscr{M}^{2k+1}$ de $\mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2k+1}\right)$ par $\ell^{2k+2}(F(1))$ est triviale si et seulement si k est de la forme $2^n - 2^m - 1$, où $n > m \geq 1$.*

Afin de démontrer ce théorème, on introduit ci-dessous une interprétation de la non-trivialité de l'extension $\mathscr{M}^k$. Rappelons que la résolution injective minimale de $F(1)$ est désignée par $(I^s, \partial^s \,|\, s \geq 0)$, où chaque I^s se décompose en somme directe $N^s \oplus R^s$, et ∂^s s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \partial_n^s & \omega^s \\ 0 & \partial_r^s \end{pmatrix} : N^s \oplus R^s \longrightarrow N^{s+1} \oplus R^{s+1}.$$

PROPOSITION 6.2. — *Soit $k = 2^q(2m+1) - 1$, où $m, q \geq 1$. Alors l'extension $\mathscr{M}^k$ de $\mathrm{Coker}\left(\partial_n^k\right)$ par $\ell^{k+1}(F(1))$ est non triviale si et seulement si $\omega^{k+1}\left(u^{2^q}\right)$ est non nul.*

Démonstration. — Puisque $k+1$ est pair donc R^{k+1} est 0-connexe, et

$$\left(R^{k+1}\right)^1 \cong \left(\tilde{\mathrm{H}}^*\mathbb{Z}/2\right)^1 \cong \mathbb{F}_2\langle u \rangle.$$

Il résulte de l'exactitude de la résolution $\{I^\bullet, \partial^\bullet\}$ de $F(1)$ que N^{k+2} contient un facteur direct isomorphe à une somme de $J(2^{m_s})$, où $1 \leq s \leq t$, tel que

$$\omega^{k+1}(u) = \sum_{s=1}^{t} x_{m_s} =: x$$

Il en résulte que $Sq^{2^{q-2}} Sq^{2^{q-3}} \dots Sq^1 x$ est non trivial puisque, d'une part, il est égal à $\omega^{k+1}(u^{2^{q-1}})$, et d'autre part,

$$\ell^{k+1}(F(1)) \cong \frac{F(1)}{\Phi^q F(1)}.$$

Il en découle que

$$\max\{x_s \,|1 \leq s \leq t\} \geq q-1,$$

et l'extension $\mathscr{M}^k$ n'est pas triviale si et seulement si cette inégalité est stricte. Autrement dit, $\omega^{k+1}(u^{2^q})$ n'est pas nul comme il est égal à

$$Sq^{2^{q-1}}\omega^{k+1}(u^{2^{q-1}}) = Sq^{2^{q-1}}Sq^{2^{q-2}}\dots Sq^1 x.$$

La proposition en découle. □

COROLLAIRE 6.3. — *Sous les mêmes hypothèses que celles de la proposition 6.2, si l'extension $\mathscr{M}^k$ n'est pas triviale, alors $u^{2^q} \in R^{k+1}$ n'est pas un cobord.*

Démonstration du théorème principal. — Dans ce qui suit, on va démontrer le théorème 6.1 par récurrence sur k. Le cas $k < 2$ résulte des calculs explicites sur $\mathscr{M}^{2k+1}$, où $k < 2$, du lemme 4.8. On peut établir l'argument de récurrence. Supposons que le résultat est établi jusqu'au $2^{n-1}-1$, on va le démontrer jusqu'au $2^n - 1$.

L'hypothèse de récurrence nous ramène à étudier les cas $2^{n-1} \leq k \leq 2^n - 1$. Par ailleurs, selon le théorème 5.1,

$$\mathscr{M}^{2^n-2^r+t-2} \cong \mathscr{M}^{2^r+t-2},$$

pour tout $2 \leq r < n$ et $0 \leq t \leq 2^r - 1$. Donc nous ne nous limiterons qu'aux cas

$$2^{n-1} \leq k \leq 2^{n-1} + 2^{n-2} - 1.$$

Ces cas sont vérifiés en deux étapes. Dans le premier temps, on montre que, pour $q < 2^{n-2}-1$, si l'extension $\mathscr{M}^{2^{n-1}+2q+1}$ n'est pas triviale, alors il en est de même pour $\mathscr{M}^{2^n+2q+1}$. Cependant, les cas $q = 2^{n-2} - 2^r - 1$, où $r \leq n-2$, sont exclus de cet argument, ne serait-ce qu'à cause de la trivialité des extensions $\mathscr{M}^{2^n-2^{r+1}-1}$ pour tout $2 \leq r \leq n-2$. Les extensions $\mathscr{M}^{2^{n+1}+2^n-2^r-1}$ pour tout $1 \leq r < n$ sont donc exclus de cet argument. Donc pour terminer la preuve, dans le second temps, on va vérifier ces cas séparément.

Première partie de la preuve. — Pour tout $q < 2^{n-2}-1$, selon le théorème 5.1, $\mathscr{M}^{2^{n-1}+2q+1}$ n'est pas triviale si et seulement si $\mathscr{M}^{2^n+2^{n-1}+2q+1}$ ne l'est pas (puisque ces deux extensions sont isomorphes). Donc dans cette partie, on va démontrer que si $\mathscr{M}^{2^n+2^{n-1}+2q+1}$, où $q < 2^{n-2}-1$, n'est pas triviale, alors il en est de même pour $\mathscr{M}^{2^n+2q+1}$. On se place dans une situation similaire à celle de la preuve du théorème 5.1. Alors, il existe un morphisme entre les complexes

$$\tau^\bullet : I^{2^n+\bullet} \to I^{2^n+2^{n-1}+\bullet},$$

tel que

$$\tau^{2j}(u) = u,$$

pour tout $j \leq 2^{n-2} - 1$. Supposons que

$$2^n + 2^{n-1} + 2q + 1 = 2^s(2r+1) - 1$$

pour quelque $s \geq 1$. Parce que $\mathscr{M}^{2^n+2^{n-1}+2q+1}$, où $q < 2^{n-2}-1$, n'est pas triviale, il existe $v \in R^{2^n+2^{n-1}+2q+1}$ tel que

$$\omega^{2^n+2^{n-1}+2q+2}\left(u^{2^s}\right) \neq 0.$$

Rappelons que R^{2^n+2q+2} est 0-connexe et contient un et un seul facteur isomorphe à $\tilde{\mathrm{H}}^*\mathbb{Z}/2$. Par abus de notation, on note u l'unique générateur de degré 1 de R^{2^n+2q+2}. Alors

$$\tau^{2^n+2q+2}(u^{2^s}) = u^{2^s}.$$

Il en découle que

$$\begin{aligned}\omega^{2^n+2^{n-1}+2q+2}\left(u^{2^s}\right) &= \omega^{2^n+2^{n-1}+2q+2}\left(\tau^{2^n+2q+2}\left(u^{2^s}\right)\right)\\ &= \tau^{2^n+2q+3}\left(\partial^{2^n+2q+2}\left(u^{2^s}\right)\right)\\ &= \tau^{2^n+2q+3}\left(\omega^{2^n+2q+2}\left(u^{2^s}\right)\right)\end{aligned}$$

d'où

$$\omega^{2^n+2q+2}\left(u^{2^s}\right) \neq 0.$$

Il en résulte que $\mathscr{M}^{2^n+2q+1}$ n'est pas triviale.

Suite de la preuve. — Il nous reste à démontrer que $\mathscr{M}^{2^n+2^{n-1}-2^q-1}$ n'est pas triviale pour tout $q < n-1$.

Soit $u^{2^q} \in R^{2^n+2^{n-1}-2^q}$, il découle du corollaire A.4 qu'il existe $v \in R^{2^n}$ de degré $2^{n-1}-1$ et une $\left(u^{2^q} \to v\right)$-suite (voir la définition A.1)

$$\left\{v_i \in R^{2^n+2^{n-1}-2^q-i}, 1 \leq i \leq 2^{n-1}-2^q-1 \,\middle|\, Sq^1 v_i \neq 0\right\}$$

telle que

$$\begin{aligned}Sq^1 v &= u^{2^{n-1}},\\ Sq^1 v_{2^k-2^q-1} &= u^{2^k}, q < k \leq n-2,\\ \partial_r^{2^n}(v) &= Sq^1 v_{2^{n-1}-2^q-1},\\ \partial_r^{2^n+2^{n-1}-2^q-i}(v_i) &= Sq^1 v_{i-1}, 2 \leq i \leq 2^{n-1}-2^q-2,\\ \partial_r^{2^n+2^{n-1}-2^q-1}(v_1) &= u^{2^q}.\end{aligned}$$

Rappelons que $N^{2^n+1} \cong J(2^{n-1})$ selon le lemme 4.8. Donc,

$$\partial^{2^n}(u^{2^{n-1}}) = x_0^{2^{n-1}}.$$

Puisque $Sq^1 x_0^{2^{n-1}-2} x_1 = x_0^{2^{n-1}}$, alors

$$\partial^{2^n}(v) = Sq^1 v_{2^{n-1}-2^q-1} + x_0^{2^{n-1}-2} x_1.$$

On remarque que, d'après le lemme 4.8,

$$N^{2^n+t} \cong J(2^{n-1}-t+1) \bigoplus \left(\bigoplus_{m<2^{n-1}-t+1} J(m) \right),$$

pour tout $1 \leq t \leq 2^{n-1}-1$. Alors, il existe $y \in N^{2^n+2}$ de degré $2^{n-1}-2$ tel que $Sq^1 y = 0$, et

$$\partial^{2^n+1}(v_{2^{n-1}-2^q-1}) = Sq^1 v_{2^{n-1}-2^q-2} + x_0^{2^{n-1}-3} x_1 + y.$$

De plus, comme y est de degré $2^{n-1}-2$, il est soit nul soit somme des éléments de type $x_0^{2^{n-1}-2}$; puisqu'un morphisme $\varphi : J(k) \to J(l)$ n'est pas l'identité si et seulement si $\varphi\left(x_0^k\right) = 0$, alors $\partial^{2^n+2}(y) = 0$ à cause de la minimalité de la résolution du module $F(1)$. L'argument qu'on a utilisé pour calculer $\partial^{2^n+1}(v_{2^{n-1}-2^q-1})$ se généralise et montre qu'il existe $y_i \in N^{2^n+2^{n-1}-2^q-i+1}$, où $1 \leq i \leq 2^{n-1}-2^q-2$, tels que

$$Sq^1 y_i = 0,$$
$$\partial^{2^n+2^{n-1}-2^q-i+1}(y_i) = 0,$$

pour tout i, et

$$\partial^{2^n+2^{n-1}-2^q-i}(v_i) = Sq^1 v_{i-1} + x_0^{2^q+i-2} x_1 + y_i,$$

pour tout $2 \leq i \leq 2^{n-1}-2^q-1$. En particulier,

$$\partial^{2^n+2^{n-1}-2^q-1}(v_1) = u^{2^q} + x_0^{2^q-1} x_1 + y_1.$$

Il en résulte que

$$\omega^{2^n+2^{n-1}-2^q}\left(u^{2^q}\right) = x_0^{2^q} \neq 0$$

d'où la non-trivialité de l'extension $\mathscr{M}^{2^n+2^{n-1}-2^q-1}$. □

7. Les cas particuliers

Le théorème 5.1 permet de se concentrer sur le calcul de N^{2^k+m} pour tout $m < 2^{k-1}$. Dans le cadre de cet article, on peut effectuer les calculs pour $1 \leq m \leq 4$.

7.1. Les N^{2^k+2}. — Les modules N^{2^k+2} sont calculés à l'aide du lemme suivant dont la vérification est laissée aux lecteurs.

Lemme 7.1. — *La suite*

$$N^{2^k+1} \to N^{2^k+2}$$

fournit les deux premiers termes de la résolution injective minimale de H_k.

On rappelle que la somme directe $\bigoplus_{n\geq 0} J(n)$ est isomorphe à l'algèbre

$$\mathbb{F}_2[x_i | i \geq 0, x_i \in J(2^i)^1].$$

Rappelons aussi qu'un morphisme de modules de Brown-Gitler $J(n) \to J(m)$ est déterminé par une opération de Steenrod θ de degré $n-m$. Ce morphisme est désigné par $\bullet\theta$. La détermination de N^{2^k+2} se réalise dans la proposition suivante.

PROPOSITION 7.2. — *Il y a un isomorphisme entre les modules instables :*

$$N^{2^k+2} \cong \bigoplus_{i=0}^{k-3} J(2^{k-1}-2^i).$$

Le morphisme $\partial_n^{2^k+1}$ se présente sous forme matricielle :

$$\left(\bullet Sq^1, \bullet Sq^2, \ldots, \bullet Sq^{2^{k-3}}\right)^t.$$

Démonstration. — On constate que l'inclusion $\mathrm{H}_k \to J\left(2^{k-1}\right)$ est déterminé par $u^{2^i} \mapsto x_{k-i-1}^{2^i}$, pour tout $0 \leq i \leq k-1$. On va maintenant montrer que l'ensemble E de l'image de $x_0^{2^{k-1}-2^{m+1}} x_1^{2^m}$ dans le quotient $J\left(2^{k-1}\right)/\mathrm{H}_k$, pour tout $0 \leq m \leq k-3$, en forme un système minimal de cogénérateurs. Autrement dit, pour tout élément $x \in J\left(2^{k-1}\right)/\mathrm{H}_k$, il existe une opération de Steenrod θ telle que θx appartient à l'espace vectoriel sur $\mathbb{F}_2$ engendré par E. Rappelons que

$$\left(\prod_{i\in I} x_i \,\middle|\, \sum_{i\in I} 2^i = 2^{k-1}\right)$$

est une $\mathbb{F}_2$-base de $J\left(2^{k-1}\right)$. Il en découle que l'ensemble de l'image de tout élément $\prod_{i\in I} x_i$ dans $J\left(2^{k-1}\right)/\mathrm{H}_k$ tel que I contient deux indexes différents en forme une $\mathbb{F}_2$-base. Donc il suffit de démontrer que pour tout élément $\prod_{i\in I} x_i$ tel que I contient deux indexes différents, il existe une opération de Steenrod θ tel que

$$\theta \prod_{i\in I} x_i = x_0^{2^{k-1}-2^{m+1}} x_1^{2^m},$$

pour certain $0 \leq m \leq k-3$. On réécrit

$$\prod_{i\in I} x_i = x_0^{n_0} x_1^{n_1} \ldots x_s^{n_s}.$$

Notons

$$m_i := \sum_{j=i}^{s} 2^{i-1} n_j,$$

alors

$$Sq^{m_{s-1}} Sq^{m_{s-2}} \ldots Sq^{m_1} \left(x_0^{n_0} x_1^{n_1} \ldots x_s^{n_s}\right) = x_0^{2^{k-1}-2^s n_s} x_1^{2^{s-1} n_s}.$$

On désigne par 2^r le terme le plus grand dans l'expression 2-adique de $2^{s-1}n_s$. Donc

$$Sq^{2^{s-1}n_s-2^r}\left(x_0^{2^{k-1}-2^s n_s}x_1^{2^{s-1}n_s}\right)=x_0^{2^{k-1}-2^r}x_1^{2^r}.$$

Il en résulte que E est un système de cogénérateurs de $J\left(2^{k-1}\right)/\mathrm{H}_k$; de plus il est minimal car E est $\mathbb{F}_2$-libre. Puisque, soit $\theta\in\mathcal{A}_2$,

$$\theta\left(x_0^{2^{k-1}-2^{m+1}}x_1^{2^m}\right)=\begin{cases}x_0^{2^{k-1}} & \text{si } \theta=Sq^{2^m},\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

donc l'algèbre de Steenrod agit trivialement sur E. Comme E est $\mathbb{F}_2$-libre, alors

$$\begin{aligned}J\left(2^{k-1}\right)/\mathrm{H}_k &\longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{k-3} J\left(2^{k-1}-2^i\right)\\ x\in E &\longmapsto x_0^{|x|}\end{aligned}$$

est une injection de $J\left(2^{k-1}\right)/\mathrm{H}_k$ dans son enveloppe injective. Par ailleurs,

$$Sq^{2^m}\left(x_0^{2^{k-1}-2^{m+1}}x_1^{2^m}\right)=x_0^{2^{k-1}},$$

pour tout $0\leq m\leq k-3$, alors le composé

$$J\left(2^{k-1}\right)\longrightarrow J\left(2^{k-1}\right)/\mathrm{H}_k\longrightarrow\bigoplus_{i=0}^{k-3}J\left(2^{k-1}-2^i\right)$$

s'écrit sous forme matricielle

$$\left(\bullet Sq^1,\bullet Sq^2,\ldots,\bullet Sq^{2^{k-3}}\right)^t.$$

Le résultat en découle. □

7.2. Les $N^{2^k+3}, k\geq 2$. — Le module N^{2^k+3} est l'enveloppe injective de $\mathscr{M}^{2^k+1}$ qui s'insère dans la suite exacte courte :

$$0\longrightarrow\mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^k+1}\right)\longrightarrow\mathscr{M}^{2^k+1}\longrightarrow\ell^{2^k+2}(F(1))\longrightarrow 0.$$

Proposition 7.3. — *Soit $k\geq 2$. L'extension $\mathscr{M}^{2^k+1}$ de* $\mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^k+1}\right)$ *par* H_1 *est non triviale, et l'enveloppe injective de* $\mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^k+1}\right)$ *est celle de* $\mathscr{M}^{2^k+1}$.

Démonstration. — La non-trivialité de $\mathscr{M}^{2^k+1}$ résulte du théorème 6.1. On note I_0 l'enveloppe injective de $\mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^k+1}\right)$ et I_1 celle de $\mathscr{M}^{2^k+1}$. On constate que $I_0\subset I_1$. La suite exacte courte

$$0\to\mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^k+1}\right)\to\mathscr{M}^{2^k+1}\to\mathrm{H}_1\to 0$$

montre que $I_1 \subset I_0 \oplus \mathrm{H}_1$. Puisque l'extension est non triviale, cette inclusion n'est pas stricte. On en déduit que $I_0 \cong I_1$. □

COROLLAIRE 7.4. — *La suite*

$$N^{2^n-2^k+1} \xrightarrow{\partial_n^{2^n-2^k+1}} N^{2^n-2^k+2} \xrightarrow{\partial_n^{2^n-2^k+2}} N^{2^n-2^k+3}$$

fournit les trois premiers termes de la résolution injective minimale de H_k.

7.3. Les $N^{2^k+4}, k \geq 3$. — On rappelle que N^{2^k+4} est l'enveloppe injective de $\mathscr{M}^{2^k+2}$ qui se calcule de la suite exacte courte :

$$0 \to J(1) \to \mathrm{Coker}\left(\partial_n^{2^k+2}\right) \to \mathscr{M}^{2^k+2} \to 0.$$

Puisque $J(1)$ est injectif, $N^{2^k+4} \oplus J(1)$ est l'enveloppe injective de $\mathrm{Coker}\,(\partial)_n^{2^k+2}$. On obtient donc :

PROPOSITION 7.5. — *Il existe un morphisme* $N^{2^k+3} \to N^{2^k+4} \oplus J(1)$ *tel que la suite suivante*

$$0 \to \mathrm{H}_k \to N^{2^k+1} \xrightarrow{\partial_n^{2^k+1}} N^{2^k+2} \xrightarrow{\partial_n^{2^k+2}} N^{2^k+3} \to N^{2^k+4} \oplus J(1)$$

fournit les quatre premiers termes de la résolution injective minimale de H_k.

8. Torsion de Frobenius

Dans cette section, on calcule les premiers termes de la résolution injective minimale de H_k afin de compléter le résultat principal sur la partie nilpotente de la résolution injective minimale de $F(1)$. Cette information permet d'étudier l'effet de la torsion de Frobenius sur les groupes d'extensions entre certains modules instables.

8.1. Résolution injective minimale de H_k. — La proposition 7.2 fournit les deux premiers termes de la résolution injective minimale de H_k :

$$0 \to \mathrm{H}_k \to J\left(2^{k-1}\right) \xrightarrow{\left(\bullet Sq^1, \bullet Sq^2, \ldots, \bullet Sq^{2^{k-3}}\right)^t} \bigoplus_{i=0}^{k-3} J\left(2^{k-1}-2^i\right)$$

Pour $k \geq 3$, désignons par J_2^k le troisième terme de la résolution injective minimale de H_k et par ∂_2^k la deuxième différentielle. Cette sous-section est consacrée à calculer les J_2^k et ∂_2^k.

Rappelons une stratégie classique pour déterminer l'enveloppe injective $E(M)$ d'un module instable fini M. C'est ce que nous allons faire pour calculer J_2^k. On sait qu'une telle enveloppe est une somme directe finie de modules de Brown-Gitler $J(n_\alpha), \alpha \in A$. Désignons par f l'inclusion $M \to E(M)$. Parce que $J(n)$ représente le foncteur associant à un module instable le dual linéaire

du $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel de ses éléments homogènes de degré n, alors il existe $z_\alpha \in M^{n_\alpha}$, pour tout n_α où $\alpha \in A$, tel que

$$f(z_\alpha) = x_0^{n_\alpha} \in J(n_\alpha).$$

Puisque f est injective, alors l'algèbre de Steenrod agit trivialement sur z_α. Donc, pour déterminer $E(M)$, il suffit de trouver une $\mathbb{F}_2$-base $\{z_\alpha, \alpha \in A\}$ de l'espace vectoriel engendré par les éléments de M sur lesquels l'algèbre de Steenrod agit de manière triviale. Selon [26], pour $0 \leq j \leq i-2$ ou $j = i$, il existe les opérations de Steenrod $w_{i,j}^t$, où $1 \leq t \leq i$, telles que

$$Sq^{2^i} Sq^{2^j} = \sum_{t=1}^{i} Sq^{2^{i-t}} w_{i,j}^t. \tag{9}$$

On se serve des $w_{i,j}^t$ pour déterminer ∂_2^k. Rappelons qu'un morphisme entre les modules instables

$$\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{m} N_j$$

est déterminé par

$$M_r \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to \bigoplus_{j=1}^{m} N_j \twoheadrightarrow N_s$$

pour tous $1 \leq r \leq n$ et $1 \leq s \leq m$.

Lemme 8.1. — *On a :*

$$J_2^k = \left(\bigoplus_{i=1}^{k-2} J\left(2^{k-1} - 2^i\right)\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{\substack{2 \leq i \leq k-3 \\ 0 \leq j \leq i-2}} J\left(2^{k-1} - 2^i - 2^j\right)\right)$$

et ∂_2^k est déterminé par :

$$\begin{aligned}
&\bullet Sq^{2^n} : J(2^{k-1} - 2^n) \longrightarrow J(2^{k-1} - 2^{n+1}),\\
&\bullet Sq^{2^n} : J(2^{k-1} - 2^n) \longrightarrow J(2^{k-1} - 2^n - 2^m),\\
&\bullet w_{n,n}^{n-i} : J(2^{k-1} - 2^i) \longrightarrow J(2^{k-1} - 2^{n+1}), \forall i \neq n,\\
&\bullet w_{n,m}^{n-i} : J(2^{k-1} - 2^i) \longrightarrow J(2^{k-1} - 2^n - 2^m), \forall i \neq m, n.
\end{aligned}$$

Démonstration. — Dans ce qui suit, on désigne par ∂ le morphisme

$$J\left(2^{k-1}\right) \xrightarrow{\left(\bullet Sq^1, \bullet Sq^2, \ldots, \bullet Sq^{2^{k-3}}\right)^t} \bigoplus_{i=0}^{k-3} J\left(2^{k-1} - 2^i\right).$$

Notons K le conoyau de ∂ et M le codomaine de ∂. Pour tout $y \in M$ on désigne par $\bar{y}$ son image dans K.

Etant donné un élément $x \in K$, homogène de degré $s \geq 0$, on va montrer qu'il existe une opération de Steenrod θ telle que θx appartient à l'ensemble

$$\left\{ \overline{x_0^{2^{k-1}-2^{n+1}-2^m} x_1^{2^n}}, \overline{x_0^{2^{k-1}-2^{q+1}-2^q} x_1^{2^q}} \,\middle|\, 0 \leq n \leq m-2; 0 \leq q, m \leq k-3 \right\}$$

que l'on note F. Cela résulte des points suivants :

1. pour tout $x \in M$, il existe une opération de Steenrod telle que θx appartient à
$$\left\{ x_0^{2^{k-1}-2^i-2^{n+1}} x_1^{2^n} \,\middle|\, 0 \leq n, i \leq k-3 \right\};$$
2. on a
$$\partial\left(x_0^{2^{k-1}-2^{i+2}} x_2^{2^i}\right) = x_0^{2^{k-1}-2^{i+2}} x_1^{2^i}$$
$$\partial\left(x_0^{2^{k-1}-2^{n+1}-2^{m+1}} x_1^{2^n+2^m}\right) = x_0^{2^{k-1}-2^{n+1}-2^m} x_1^{2^n} + x_0^{2^{k-1}-2^n-2^{m+1}} x_1^{2^m},$$
pour tous $0 \leq n+2 \leq m \leq k-3$ et $0 \leq i \leq k-3$;
3. pour tout $x \in M$ tel que
$$\mathcal{A}_2(x) \cap F = \mathbb{F}_2 \left\langle x_0^{2^{k-1}-2^{i+2}} x_1^{2^i} \right\rangle$$
alors
$$x = x_0^{2^{k-1}-2^{i+2}} x_s^{2^{i+1-s}}$$
pour certain s ;
4. on a
$$\partial\left(x_0^{2^{k-1}-2^{i+2}} x_{s+1}^{2^{i+1-s}}\right) = x_0^{2^{k-1}-2^{i+2}} x_s^{2^{i+1-s}}.$$

Puisque F contient des éléments de degré distinct deux à deux, il est $\mathbb{F}_2$-libre. De plus, $\mathcal{A}_2$ agit trivialement sur F. Il en découle que

$$\overline{x_0^{2^{k-1}-2^{n+1}-2^m} x_1^{2^n}} \mapsto x_0^{2^{k-1}-2^n-2^m},$$
$$\overline{x_0^{2^{k-1}-2^{q+1}-2^q} x_1^{2^q}} \mapsto x_0^{2^{k-1}-2^{q+1}},$$

induisent une injection de K dans son enveloppe injective J_2^k. □

8.1.1. *Les cas particuliers.* — Le lemme suivant détaille les N^i pour $i \leq 24$. Rappelons que pour tout $i \geq 3$, N^i est l'enveloppe injective de $\mathscr{M}^{i-2}$, qui s'insère dans une suite exacte

$$0 \to \ell^{i-2}(F(1)) \to \operatorname{Coker}\left(\partial_n^{i-2}\right) \to \mathscr{M}^{i-2} \to \ell^{i-1}(F(1)) \to 0.$$

La méthode qu'on utilise ici est la stratégie qu'on a exploité pour étudier la résolution injective minimale de H_k dans la sous-section précédente.

Proposition 8.2. — *On a*

k	1	2	3	4
N^k	0	0	$J(1)$	0
k	5	6	7	8
N^k	$J(2)$	0	$J(1)$	0
k	9	10	11	12
N^k	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0
k	13	14	15	16
N^k	$J(2)$	0	$J(1)$	0
k	17	18	19	20
N^k	$J(8)$	$J(7)\oplus J(6)$	$J(6)\oplus J(4)$	$J(5)$
∂_n^k	$\left(\bullet Sq^1, \bullet Sq^2\right)^t$	$\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 & 0 \\ \bullet Sq^2 Sq^1 & \bullet Sq^2 \end{pmatrix}$	$\left(\bullet Sq^1, 0\right)$	$\bullet Sq^1$
k	21	22	23	24
N^k	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0
∂_n^k	$\bullet Sq^1$	$\bullet Sq^1$	0	0

Démonstration. — Les N^k et ∂_n^k pour $k < 20$ sont calculés grâce à la sous section 8.1 et au lemme 4.8. Puisque $\mathscr{M}^{18} \cong \mathrm{Coker}\,(\delta)$, où

$$\delta := \ell^{18}(F(1)) \hookrightarrow \mathrm{Coker}\left(J(7)\oplus J(6) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 & 0 \\ \bullet\left(Sq^2Sq^1\right) & \bullet Sq^2 \end{pmatrix}} J(6)\oplus J(4) \right),$$

donc $\mathscr{M}^{18} \cong \Sigma^5\mathbb{F}_2$ d'où $N^{20} \cong J(5)$.

Parce que, d'une part,

$$\mathrm{Coker}\left(\partial_n^{19}\right) \cong \Sigma^4\mathbb{F}_2,$$

et d'autre part, $\mathscr{M}^{19}$ est une extension non triviale de $\mathrm{Coker}\left(\partial_n^{19}\right)$ par $\ell^{20}(F(1))$, alors

$$\mathscr{M}^{19} \cong \mathrm{H}_3.$$

Il en découle que N^{21} est isomorphe à $J(4)$.

De manière similaire on obtient les N^i pour $22 \leq i \leq 24$. □

Posons :

$$J(n_1, \ldots, n_k) := \bigoplus_{i=1}^{k} J(n_k).$$

De manière analogue, on obtient

PROPOSITION 8.3. — *On a*

k	33	34	35
N^k	$J(16)$	$J(15,14,12)$	$J(14,12,11,8)$
∂_n^k	$\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 \\ \bullet Sq^2 \\ \bullet Sq^4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 & 0 & 0 \\ \bullet Sq^2 Sq^1 & \bullet Sq^2 & 0 \\ \bullet Sq^4 & \bullet Sq^3 & \bullet Sq^1 \\ \bullet Sq^{6,1} & \bullet Sq^{4,2}+Sq^{5,1} & \bullet Sq^4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet Sq^4 & \bullet Sq^2 & \bullet Sq^1 & 0 \\ \bullet Sq^{6,3} & \bullet Sq^{4,2,1} & \bullet Sq^{4,2} & \bullet Sq^3 \end{pmatrix}$
k	36		37
N^k	$J(13,10,5)$		$J(12,4,3)$
∂_n^k	$\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 & 0 & 0 \\ \bullet Sq^{6,2,1} & \bullet Sq^{5,1} & 0 \\ \bullet Sq^{6,2,1} & \bullet Sq^{4,2,1} & \bullet Sq^2 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 & 0 & 0 \\ \bullet Sq^6 & 0 & 0 \\ 0 & \bullet Sq^1 & 0 \end{pmatrix}$
k	38	39	40
N^k	$J(11,6,3)$	$J(10,2)$	$J(9)$
∂_n^k	$\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bullet Sq^1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bullet Sq^1, 0 \end{pmatrix}$	$\bullet Sq^1$
k	41	42	43
N^k	$J(8)$	$J(7,3)$	$J(6,2)$
∂_n^k	$\begin{pmatrix} \bullet Sq^1, \bullet Sq^4 Sq^1 \end{pmatrix}^t$	$\begin{pmatrix} \bullet Sq^1 & 0 \\ 0 & \bullet Sq^1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bullet Sq^1, 0 \end{pmatrix}$
k	44	45	46
N^k	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$
∂_n^k	$\bullet Sq^1$	$\bullet Sq^1$	$\bullet Sq^1$
k	47	48	49
N^k	$J(2)$	0	$J(8)$
∂_n^k	0	0	0

Posons

$$A_{2^n+3} := \left(\bigoplus_{i=1}^{n-3} J\left(2^{n-1}-2^i\right) \right) \bigoplus \left(\bigoplus_{\substack{1\leq i\leq n-2 \\ 0\leq j\leq i-2}} J\left(2^{n-1}-2^i-2^j\right) \right).$$

On peut donc formuler le résultat principal sur la résolution injective minimale de $F(1)$.

THÉORÈME 8.4. — *Pour $n \geq 6$ on a :*

k	2^n-32	2^n-31	2^n-30	2^n-29	2^n-28
N^k	0	$J(16)$	$J(15,14,12)$	$J(14,12,11,8)$	$J(13,10,5)$
k	2^n-27	2^n-26	2^n-25	2^n-24	2^n-23
N^k	$J(12,4,3)$	$J(11,6,3)$	$J(10,2)$	$J(9)$	$J(8)$
k	2^n-22	2^n-21	2^n-20	2^n-19	2^n-18
N^k	$J(7,3)$	$J(6,2)$	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$

k	2^n-17	2^n-16	2^n-15	2^n-14	2^n-13
N^k	$J(2)$	0	$J(8)$	$J(7,6)$	$J(6,4)$
k	2^n-12	2^n-11	2^n-10	2^n-9	2^n-8
N^k	$J(5)$	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0
k	2^n-7	2^n-6	2^n-5	2^n-4	2^n-3
N^k	$J(4)$	$J(3)$	$J(2)$	0	$J(2)$
k	2^n-2	2^n-1	2^n	2^n+1	
N^k	0	$J(1)$	0	$J(2^{n-1})$	
k	2^n+2			2^n+3	
N^k	$J(2^{n-1}-1, 2^{n-1}-2, \dots, 2^{n-1}-2^{n-3})$			$J(2^{n-2}) \oplus A_{2^n+3}$	

La proposition 4.2 permet de conclure :

THÉORÈME 8.5. — *Pour $i \leq 49$ ou $i = 2^n - 2^5 + t$ avec $0 \leq t \leq 2^5+2$ et $n > 5$. Alors pour tout r, le morphisme*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}}\left(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)\right) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{r+1} F(1), \Phi^{r+1} F(1)\right)$$

induit par Φ en cohomologie est injectif.

NOTATION 3. — *Soient d un entier pair et $2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}$ son expression 2-adique, où $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. On note :*

$$\upsilon(d) = 1 + n_k - k.$$

Le théorème suivant est un corollaire du théorème 8.5.

THÉORÈME 8.6. — *Pour $d \leq 49$ ou $d = 2^n - 2^5 + t$ avec $0 \leq t \leq 2^5+2$ et $n > 5$, on a :*

$$\mathrm{Ext}^d_{\mathcal{U}}\left(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 \nmid d, \\ 0 & \text{si } 2 \mid d \text{ et } r < \upsilon(d), \\ \mathbb{F}_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

THÉORÈME 8.7. — *Soit d un entier pair, on a :*

$$\mathbb{F}_2 \subset \mathrm{Ext}^d_{\mathcal{U}}\left(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)\right) \text{ si } r \geq \upsilon(d).$$

De plus si $r \geq \upsilon(d)$, le morphisme

$$\mathrm{Ext}^d_{\mathcal{U}}\left(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)\right) \to \mathrm{Ext}^d_{\mathcal{F}}(I, I)$$

induit par le foncteur $f : \mathcal{U} \to \mathcal{F}$ est non trivial.

Démonstration. — Le cas $d = 2^n$ a été calculé à l'aide de la proposition 4.2 et du lemme 4.8. En effet

$$\mathrm{Ext}^{2^n}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)\right) \cong \mathbb{F}_2$$

pour tout r tel que $r \geq n$. On raisonne par récurrence sur la longueur 2-adique de d. On suppose que le théorème est vérifié pour d dont $\alpha(d) < k$. On passe au

cas de $\alpha(d) = k$. On note $d = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_k}$ où $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. On désigne par d_1 la somme $2^{n_2} + \cdots + 2^{n_k}$. Pour $r \geq \upsilon(d)$ le diagramme suivant est donc commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^{d_1}_{\mathcal{U}}(\Phi^r F(1), F(1)) & \xrightarrow{\smile \delta_{n_1}} & \mathrm{Ext}^{d}_{\mathcal{U}}(\Phi^r F(1), F(1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ext}^{d_1}_{\mathcal{F}}(I, I) & \xrightarrow{\smile e_{n_1}} & \mathrm{Ext}^{d}_{\mathcal{F}}(I, I) \end{array}$$

où δ_{n_1} désigne le générateur du groupe $\mathrm{Ext}^{2^{n_1}}_{\mathcal{U}}(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1))$. Par hypothèse de récurrence, le composé

$$\mathrm{Ext}^{d_1}_{\mathcal{U}}(\Phi^r F(1), F(1)) \to \mathrm{Ext}^{d_1}_{\mathcal{F}}(I, I) \xrightarrow{\smile e_{n_1}} \mathrm{Ext}^{d}_{\mathcal{F}}(I, I)$$

est non trivial. On en déduit que $\mathbb{F}_2 \subset \mathrm{Ext}^{d}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{r-1} F(1), F(1)\right)$ et que le morphisme

$$\mathrm{Ext}^{d}_{\mathcal{U}}(\Phi^r F(1), F(1)) \to \mathrm{Ext}^{d}_{\mathcal{F}}(I, I)$$

est non trivial. □

Il est donc raisonnable de conjecturer :

Conjecture 8.8. — *Soit d un entier, on a :*

$$\mathrm{Ext}^{d}_{\mathcal{U}}(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 \not| \, d, \\ 0 & \text{si } 2 \mid d \text{ et } r < \upsilon(d), \\ \mathbb{F}_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, le morphisme canonique

$$\mathrm{Ext}^{d}_{\mathcal{U}}(\Phi^r F(1), \Phi^r F(1)) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^{d}_{\mathcal{U}}\left(\Phi^{r+1} F(1), \Phi^{r+1} F(1)\right)$$

induit par le foncteur exact Φ est un monomorphisme.

Annexe A. Sur l'acyclicité des modules instables injectifs réduits

Rappelons que dans cet article, $(R^\bullet)$ désigne la partie réduite de la résolution injective minimale de $F(1)$. Comme on a vu dans la preuve du théorème 6.1, la notion de $(y \to z)$-suite, où $y \in R^m$ et $z \in R^k$ pour quelques $m > k$, y joue un rôle important. Dans ce qui suit, nous allons l'introduire et l'étudier.

On rappel que le carré de l'opération de Bockstein Sq^1 est trivial. Soit M un module instable, alors $\left(M, Sq^1\right)$ est un complexe ; M est dit Sq^1-acyclique si $\left(M, Sq^1\right)$ est acyclique. D'après Lannes et Zarati [18], les modules injectifs réduits 0-connexes sont Sq^1-acycliques. On constate que chaque différentiel ∂^i_r de la suite $(R^\bullet)$ est un morphisme entre les complexes

$$\left(R^i, Sq^1\right) \to \left(R^{i+1}, Sq^1\right).$$

La définition suivante détaille un lien particulier entre R^m et R^{m-t} pour certains $m > t \geq 1$, déterminé par $\partial_r^\bullet$ et Sq^1.

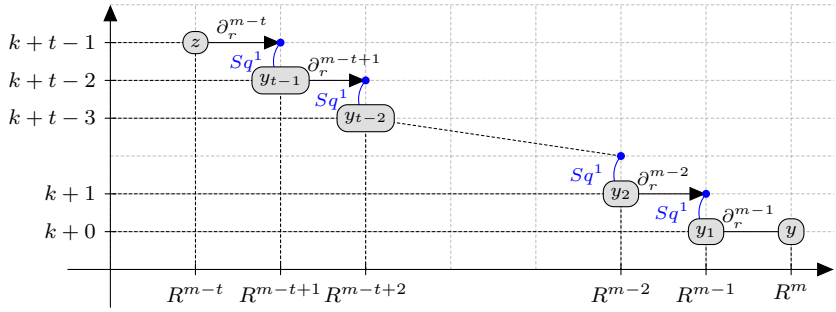
Définition A.1. — Soient y un élément de degré k de R^m et $t \geq 1$ un nombre entier. On dit que y admet une t-ème Sq^1-pré-image $z \in R^{m-t}$ de degré $k+t-1$ s'il existe des éléments

$$\left\{ y_i \in R^{m-i}, 1 \leq i \leq t-1 \,\middle|\, Sq^1 y_i \neq 0 \right\}$$

tels que

$$\begin{aligned} \partial_r^{m-1}(y_1) &= y, \\ \partial_r^{m-t}(z) &= Sq^1 y_{t-1}, \\ \partial_r^{m-t+i}(y_{t-i}) &= Sq^1 y_{t-i-1}, 1 \leq i \leq t-2. \end{aligned}$$

Une telle suite $(y_1, y_2, \ldots, y_{t-1})$ est appelée une $(y \to z)$-suite. Le diagramme suivant donne une explication géométrique de la suite.



Rappelons que chaque module R^{2k} contient un et un seul facteur direct isomorphe à $\tilde{\mathrm{H}}^*\mathbb{Z}/2$.

Lemme A.2. — *Soit n un entier et $u^2 \in \tilde{\mathrm{H}}^*\mathbb{Z}/2 \subset R^{2^n-2}$. Etant donné un entier $t \geq 1$, s'il y a une $(u^2 \to y)$-suite $(y_1, y_2, \ldots, y_{t-1})$, alors il existe z tel que $(y_1, y_2, \ldots, y_{t-1}, y)$ est une $(u^2 \to z)$-suite.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer qu'il existe un élément $z \in R^{2^n-t-3}$ tel que

$$\partial_r^{2^n-t-3}(z) = Sq^1 y \neq 0.$$

On commence par démontrer que $Sq^1 y$ n'est pas trivial. Supposons par l'absurde qu'il l'est. Puisque R^s est Sq^1-acyclique pour tout $s \geq 0$, alors il existe $z_1 \in R^{2^n-t-2}$ tel que

$$Sq^1 z_1 = y.$$

Puisque $Sq^1 y_{t-1} = \partial_r^{2^n-t-2}(y)$, on a

$$Sq^1\left(\partial_r^{2^n-t-2}(z_1) - y_{t-1}\right) = 0.$$

Comme

$$\partial_r^{2^n-t-1}\left(\partial_r^{2^n-t-2}(z_1)-y_{t-1}\right)=Sq^1y_{t-2}\neq 0$$

alors

$$\partial_r^{2^n-t-2}(z_1)-y_{t-1}\neq 0$$

et cet élément joue maintenant le rôle de y. On pourra donc généraliser cet argument et montrer qu'il existe :

$$\left\{z_i, 1\leq i\leq t-1 \,\middle|\, z_i\in R^{2^n-t-3+i}\right\}$$

tels que

$$\partial_r^{2^n-t-3+i}(z_i)-y_{t-i}\neq 0,$$
$$Sq^1\left(\partial_r^{2^n-t-3+i}(z_i)-y_{t-i}\right)=0.$$

En particulier, il résulte de

$$\partial_r^{2^n-4}(z_{t-1})-y_1\neq 0,$$
$$Sq^1\left(\partial_r^{2^n-4}(z_{t-1})-y_1\right)=0$$

qu'il existe un élément non trivial $\alpha\in R^{2^n-3}$ de degré 1 tel que

$$\partial_r^{2^n-4}(z_{t-1})-y_1=Sq^1\alpha$$

d'où la contradiction (rappelons que R^s est 1 connexe pour tout s impair).

Parce que, d'une part, $\ell^{2^n-t-2}(F(1))$ est nul en degré $t+2$, et d'autre part, Sq^1y, ce qui est de degré $t+2$, appartient à $\mathrm{Ker}\left(\partial_r^{2^n-t-2}\right)$, alors il existe $z\in R^{2^n-t-3}$ tel que

$$\partial_r^{2^n-t-3}(z)=Sq^1y$$

et le lemme en résulte. □

Le lemme A.2 permet de construire une chaîne précise connectant les éléments $u^2\in R^{2^n-2}$ et $u^{2^n-1}\in R^0$. La méthode qu'on utilise ici dépend de la Sq^1-acyclicité de R^n pour tout n et de ce que la suite $(R^\bullet,\partial_r^\bullet)$ est exacte en degrés n'étant pas de la forme 2^m. La preuve du lemme A.3 ci-dessous est une chasse au diagramme.

Lemme A.3. — *Soit n un entier et $u^2\in\tilde{\mathrm{H}}^*\mathbb{Z}/2\subset R^{2^n-2}$. Alors il existe une $\left(u^2\to u^{2^n-1}\right)$-suite*

$$\left\{y_i\in R^{2^n-i-2}, 1\leq i\leq 2^n-3 \,\middle|\, Sq^1y_i\neq 0\right\}$$

telle que

$$Sq^1y_{2^t-2}=u^{2^t},$$

pour $2\leq t\leq n-1$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivial. Supposons que le résultat est établi pour $n \leq q$, on le démontre pour $n = q+1$. Puisque $f(R^\bullet)$ est la résolution injective minimale du foncteur d'inclusion I, le produit de Yoneda [9, proposition 7.2]

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{F}}(I,I) \xrightarrow{\smile e^{q-1}} \mathrm{Ext}^{2^q}_{\mathcal{F}}(I,I)$$

induit un morphisme entre les complexes :

$$\gamma_\bullet : f(R^\bullet) \to f(R^{\bullet+2^q}).$$

Soit m l'adjoint à droite de f [12], comme $m \circ f\left(R^i\right) \cong R^i$, pour tout $i \geq 0$, alors il y a un morphisme entre les complexes :

$$m(\gamma_\bullet) : R^\bullet \to R^{\bullet+2^q}.$$

Par la propriété du produit de Yoneda [9], pour tout $l \leq 2^{q-1} - 1$,

$$m(\gamma_{2l})(u) = u.$$

Il résulte de l'hypothèse de récurrence qu'il existe une $\left(u^2 \to u^{2^q-1}\right)$-suite

$$\left\{ y_i \in R^{2^q-i-2}, 1 \leq i \leq 2^q - 3 \,\middle|\, Sq^1 y_i \neq 0 \right\}$$

telle que

$$Sq^1 y_{2^t-2} = u^{2^t},$$

pour tout $2 \leq t \leq q-1$. Notons

$$v_i := m\left(\gamma_{2^q-i-2}(y_i)\right),$$

on obtient la suite

$$\left\{ v_i \in R^{2^{q+1}-i-2}, 1 \leq i \leq 2^q - 3 \right\}$$

telle que

$$Sq^1 v_{2^t-2} = u^{2^t},$$

pour tout $2 \leq t \leq q-1$. Cette suite est une $\left(u^2 \to v_{2^q-2}\right)$-suite si $Sq^1 v_i \neq 0$, pour tout $1 \leq i \leq 2^q - 3$. C'est ce que nous allons démontrer et la preuve est terminé grâce au lemme A.2. En fait, rappelons que $R^0 \cong \tilde{\mathrm{H}}^*\mathbb{Z}/2$ donc une $\left(u^2 \to x\right)$-suite avec $x \in R^0$ entraine que $x = u^{2^{n-1}}$.

On raisonne par récurrence sur i. Parce que $R^{2^{q+1}-3}$ est trivial en degré 1, la Sq^1-acyclicité de $R^{2^{q+1}-3}$ montre que $Sq^1 v_1$ n'est pas trivial. Supposons que pour tout $1 \leq i < s \leq 2^q - 3$,

$$Sq^1 v_i \neq 0.$$

On passe au cas $i = s$. Si, au contraire, $Sq^1 v_s$ est trivial, alors par la Sq^1-acyclicité de $R^{2^{q+1}-s-2}$ il existe $w_s \in R^{2^{q+1}-s-2}$ tel que $Sq^1 w_s = v_s$. Il suit que

$$Sq^1\left(\partial_r^{2^{q+1}-s-2}(w_s) - v_{s-1}\right) = 0.$$

Puisque

$$\partial_r^{2^{q+1}-s-1}\left(\partial_r^{2^{q+1}-s-2}(w_s) - v_{s-1}\right) = Sq^1 v_{s-2} \neq 0,$$

alors $\partial_r^{2^{q+1}-s-2}(w_s) - v_{s-1}$ n'est pas trivial. On se trouve dans la même situation que celle de la construction des éléments $\{z_i, 1 \leq i \leq t-1\}$ de la preuve du lemme A.2. De manière analogue, on obtient une suite

$$\left\{w_j \in R^{2^{q+1}-j-2}, 1 \leq j \leq s-1\right\}$$

telle que

$$Sq^1 w_j = \partial_r^{2^{q+1}-j-3}(w_{j+1}) - v_j \neq 0,$$

pour tout $1 \leq j \leq s-1$. En particulier, quand $j = 1$ on a

$$Sq^1 w_1 = \partial_r^{2^{q+1}-4}(w_2) - v_1 \neq 0,$$

alors que $R^{2^{q+1}-3}$ est 1-connexe d'où la contradiction. □

Corollaire A.4. — *Soient $q \leq n-2$ et $u^{2^q} \in R^{2^n+2^{n-1}-2^q}$. Alors, il existe $v \in R^{2^n}$ de degré $2^{n-1}-1$ et une $\left(u^{2^q} \to v\right)$-suite*

$$\left\{v_i \in R^{2^n+2^{n-1}-2^q-i}, 1 \leq i \leq 2^{n-1}-2^q-1 \,\middle|\, Sq^1 v_i \neq 0\right\}$$

telle que

$$Sq^1 v = u^{2^{n-1}},$$

$$Sq^1 v_{2^k-2^q-2} = u^{2^k}, q < k \leq n-2.$$

Démonstration. — Soient n un entier et $u^2 \in \tilde{\mathrm{H}}^*\mathbb{Z}/2 \subset R^{2^{n-1}-2}$. Alors il existe une $\left(u^2 \to u^{2^{n-1}-1}\right)$-suite

$$\left\{y_i \in R^{2^{n-1}-i-2}, 1 \leq i \leq 2^{n-1}-3 \,\middle|\, Sq^1 y_i \neq 0\right\}$$

telle que

$$Sq^1 y_{2^t-2} = u^{2^t},$$

pour tout $2 \leq t \leq n-2$. Puisque $f(R^\bullet)$ est la résolution injective minimale du foncteur d'inclusion I, le produit de Yoneda [9, proposition 7.2]

$$\mathrm{Ext}^0_{\mathcal{F}}(I,I) \xrightarrow{\smile e^{n-1}} \mathrm{Ext}^{2^n}_{\mathcal{F}}(I,I)$$

induit un morphisme entre les complexes :

$$\gamma_\bullet : f(R^\bullet) \to f(R^{\bullet+2^n}).$$

Soit m l'adjoint à droite de f [12], comme $m \circ f\left(R^i\right) \cong R^i$, pour tout $i \geq 0$, alors il y a un morphisme entre les complexes :

$$m(\gamma_\bullet) : R^\bullet \to R^{\bullet+2^n}.$$

Par la propriété du produit de Yoneda [9], pour tout $l \leq 2^{n-1} - 1$,

$$m(\gamma_{2l})(u) = u.$$

On se trouve dans une situation similaire à celle de la preuve du lemme A.3. Notons

$$w_i = m(\gamma_{2^{n-1}-i-2})(y_i),$$

pour tout $1 \leq i \leq 2^{n-1} - 3$, alors

$$\left\{w_i \in R^{2^n+2^{n-1}-i-2}\right\}$$

est une $\left(u^2 \to u^{2^{n-1}-1}\right)$-suite telle que

$$Sq^1 w_{2^t-2} = u^{2^t}, 2 \leq t \leq n-2.$$

En particulier, puisque

$$Sq^1 w_{2^q-2} = u^{2^q},$$

posons $v = w_{2^{n-1}-2}$ et

$$v_i := w_{i+2^q-2},$$

où $1 \leq i \leq 2^{n-1} - 2^q - 1$, alors

$$\left\{v_i \in R^{2^n+2^{n-1}-2^q-i}, 1 \leq i \leq 2^{n-1} - 2^q - 1 \,\middle|\, Sq^1 v_i \neq 0\right\}$$

est la $\left(u^{2^q} \to v\right)$-suite dont on a besoin. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. F. Adams – « On the structure and applications of the Steenrod algebra », *Comment. Math. Helv.* **32** (1958), p. 180–214.

[2] G. Carlsson – « G. B. Segal's Burnside ring conjecture for $(\mathbf{Z}/2)^k$ », *Topology* **22** (1983), no. 1, p. 83–103.

[3] E. Cline, B. Parshall & L. Scott – « Detecting rational cohomology of algebraic groups », *J. London Math. Soc.(2)* **28** (1983), no. 2, p. 293–300.

[4] N. T. Cuong – « Homogeneous strict polynomial functors as unstable modules », *ArXiv e-prints* (2014).

[5] ———, « Some homological algebra computations in the category of unstable modules », Theses, Université Paris 13, Juillet 2014, p. 1–206.

[6] N. T. Cuong & L. Schwartz – « Some finiteness results in the category $\mathcal{U}$ », *Vietnam J. Math.* **43** (2015), no. 1, p. 181–192.

[7] S. Eilenberg & S. Mac Lane – « On the groups $H(\Pi, n)$. II. Methods of computation », *Ann. of Math. (2)* **60** (1954), p. 49–139.
[8] V. Franjou, E. M. Friedlander, A. Scorichenko & A. Suslin – « General linear and functor cohomology over finite fields », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), no. 2, p. 663–728.
[9] V. Franjou, J. Lannes & L. Schwartz – « Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis », *Invent. Math.* **115** (1994), no. 3, p. 513–538.
[10] E. M. Friedlander & A. Suslin – « Cohomology of finite group schemes over a field », *Inventiones mathematicae* **127** (1997), no. 2, p. 209–270.
[11] N. D. H. Hai – « Foncteurs polynomiaux stricts et modules instables sur l'algèbre de Steenrod », *J. Algebra* **324** (2010), no. 4, p. 860–874.
[12] H.-W. Henn, J. Lannes & L. Schwartz – « The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects », *Amer. J. Math.* **115** (1993), no. 5, p. 1053–1106.
[13] J. C. Jantzen – *Representations of algebraic groups*, Pure and Applied Mathematics, vol. 131, Academic Press, Inc., 1987.
[14] M. Jibladze & T. Pirashvili – « Cohomology of algebraic theories », *J. Algebra* **137** (1991), no. 2, p. 253–296.
[15] J. Lannes – « Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1992), no. 75, p. 135–244, With an appendix by Michel Zisman.
[16] J. Lannes & L. Schwartz – « À propos de conjectures de Serre et Sullivan », *Invent. Math.* **83** (1986), no. 3, p. 593–603.
[17] ———, « Sur la structure des A-modules instables injectifs », *Topology* **28** (1989), no. 2, p. 153–169.
[18] J. Lannes & S. Zarati – « Sur les $\mathcal{U}$-injectifs », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **19** (1986), no. 2, p. 303–333.
[19] ———, « Sur les foncteurs dérivés de la déstabilisation », *Math. Z.* **194** (1987), no. 1, p. 25–59.
[20] H. Miller – « The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces », *Ann. of Math. (2)* **120** (1984), no. 1, p. 39–87.
[21] J. Milnor – « The Steenrod algebra and its dual », *Ann. of Math. (2)* **67** (1958), p. 150–171.
[22] T. I. Pirashvili – « Higher additivizations », *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR* **91** (1988), p. 44–54.
[23] L. Schwartz – *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1994.
[24] ———, « Algèbre de Steenrod, modules instables et foncteurs polynomiaux », in *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, Panor. Synthèses, vol. 16, Soc. Math. France, 2003, p. 55–100.

[25] J.-P. Serre – « Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane », *Comment. Math. Helv.* **27** (1953), p. 198–232.
[26] C. T. C. Wall – « Generators and relations for the Steenrod algebra », *Ann. of Math. (2)* **72** (1960), p. 429–444.