SOMMAIRE DU N° 106

SMF

Mot de la Présidente

L'actualité de cette rentrée est malheureusement marquée par l'annonce de la **division par cinq de la subvention** du Ministère des Affaires Étrangères au Comité National Français des Mathématiciens pour sa Commission des Congrès et Conférences Internationales. Cette subvention annuelle sera réduite à 5000 euros, ce qui représente moins de 2 euros par personne !
Les mathématiques françaises occupent la seconde place sur le plan mondial, et nos relations internationales sont des plus actives. Notre communauté est unie et bien organisée et nous avons géré les sommes modestes allouées dans le passé de manière efficace, en les consacrant en priorité aux jeunes mathématiciens. Le président de la République dans son récent discours du 30 août à Reims a rappelé le soutien important qu´il veut assurer à la recherche fondamentale et a naturellement mentionné « nos mathématiques » parmi les disciplines concernées au tout premier plan. Il a aussi parlé de l'importance des échanges internationaux pour la vie scientifique.
Baisser de manière aussi brutale nos crédits pour les échanges internationaux nous paraît être, dans ce contexte, une telle aberration que nous ne pouvons croire que la décision annoncée sera maintenue.
Signez et faites signer la pétition de protestation contre cette mesure !
`http://smf.emath.fr/RelationsInternationales/Divers/PetitionCNFM/`

le 02 octobre 2005
Marie-Françoise Roy

Vie de la société

À la suite de l'Assemblée Générale du 18 juin dernier, le bureau de la SMF, réuni le 16 septembre, a adopté le texte suivant.

Quelques éléments de réflexion sur la Société Mathématique de France

Fondée en 1872, la Société Mathématique de France (SMF) est l'une des plus anciennes sociétés savantes pour les mathématiques dans le monde. Association loi de 1901, reconnue d'utilité publique, elle a pour but, selon ses statuts « l'avancement et la propagation des études de mathématiques pures et appliquées ». Le vocabulaire a changé mais la base est là.

La SMF est une société savante. Sa richesse principale est l'immense expertise scientifique de ses membres.

Ses objectifs

– créer les conditions d'une recherche mathématique de qualité et diffuser ses résultats,
– veiller à l'ouverture et la diversité des mathématiques en France,
– maintenir leur excellence et leur dynamisme,
– affirmer la cohérence indispensable entre formation et recherche,
– faire connaître et aimer les mathématiques,
– promouvoir un enseignement de qualité à tous les niveaux,
– développer le dialogue avec les autres sciences,
– créer des contacts avec les industries et les services,
– renforcer le lien avec les sciences humaines, notamment l'histoire et la philosophie, contribuer à diffuser les œuvres culturelles de qualité concernant les mathématiques : théâtre, cinéma, littérature...
– contribuer aux débats de société concernant les mathématiques et leurs utilisations,
– intensifier les échanges culturels et scientifiques internationaux et défendre la diversité linguistique, contribuer à la construction de l'Europe et à la solidarité avec les pays du sud.

Ses actions actuelles

La SMF intervient dans le débat public

– en expliquant le rôle des mathématiques dans le développement scientifique, économique et culturel
– en défendant la nécessité d'une communauté mathématique nombreuse et repartie sur l'ensemble du pays
– en encourageant un enseignement de qualité à tous les niveaux

La SMF met en œuvre des outils au service de la communauté mathématique

– pour la recherche
  – le CIRM
  – l'édition mathématique
  – les sessions états de la recherche
– pour l'ouverture thématique, culturelle ou professionnelle
  – la *Gazette*
  – les journées annuelles
  – le site Web

Elle organise régulièrement des congres internationaux avec une grande variété de pays étrangers, soutient les activités du CIMPA et contribue activement à la Société Mathématique Européenne.

La SMF développe enfin des initiatives variées en direction de publics n'appartenant pas à la communauté mathématique au sens restreint. Son forum de discussion est parfois très animé, mais ce sont surtout les questions d'enseignement qui font l'objet d'échanges passionnés.

Certaines de ces activités lui sont propres, de nombreuses autres sont menées en commun avec un grand nombre de partenaires, qu'il s'agisse des autres sociétés savantes, notamment de mathématiques (SMAI, SFDS), du CNRS, d'associations telles l'APMEP, Femmes et mathématiques, de la Bibilothèque nationale de France, etc.

La SMF a donc une activité multiforme cohérente avec ses objectifs.

On peut constater toutefois certaines lacunes dans notre action. Pour prendre un exemple significatif : nos publications et notre site Web permettent trop peu à un non spécialiste intéressé par les mathématiques de se documenter sur celles-ci, leur place dans notre pays et dans le monde, leur évolution actuelle.

Ses difficultés

La composition actuelle de la SMF ne reflète pas comme il serait souhaitable la variété de la communauté mathématique professionnelle et amateur de notre pays. Cette situation la freine dans la réalisation d'une partie de ses objectifs.

La SMF est âgée, la moyenne d'age de ses membres est d'environ 55 ans.

La SMF est élitiste, la proportion d'adhérents parmi les professeurs et directeurs de recherche est d'environ 50 %, alors qu'elle est de moins de 15 % chez les maîtres de conférences.

La SMF est parisienne ; malgré des progrès réels, ses adhérents et ses activités sont trop concentrées à Paris.

La SMF reste une tour d'ivoire, les amateurs de mathématiques y sont encore trop peu nombreux.

En outre, la SMF connaît, après deux décennies de développement, une tendance à l'effritement. Ses effectifs stagnent depuis trois ans et ont même régressé légèrement l'an dernier. Elle ne vend pas suffisamment certaines de ses publications et a du mal à équilibrer son budget.

Ces difficultés se manifestent dans un contexte général qu'il ne faut pas oublier. L'état-nation est mis en cause par l'émergence des régions et de l'Europe, par l'accès direct au village mondial, par le Web. Les formes traditionnelles d'organisation et de vie associative s'étiolent, tandis que de nouvelles pratiques plus décentralisées et coopératives se développent. L'enseignement secondaire et universitaire vit une crise profonde, notamment en sciences. Il y a de moins en moins d'étudiants de mathématiques. Quant aux enseignements de mathématiques demandés dans les autres filières de formation, ils ne sont pas forcément donnés par des mathématiciens. L'effectif traditionnel de la communauté mathématique commence à diminuer dans le contexte des départs à la retraite et des redéploiements. Simultanément le nombre de mathématiciens présents dans la recherche pluridisciplinaire ou l'industrie augmente.

De nouvelles actions possibles

– mettre en évidence des domaines scientifiques frontières qui renouvellent la pratique mathématique

– moderniser encore nos activités d'édition et mieux préciser leurs objectifs

– mettre en valeur nos liens avec le CIRM

– aller vers les jeunes et les amateurs de mathématiques en utilisant nos atouts spécifiques

– faire du site Web de la SMF une fenêtre sur les mathématiques et les mathématiciens en France et dans le monde

– mettre en place une partie interactive du site Web où tous peuvent contribuer librement

– développer des activités en région.

Quelques propositions

– définir une action prioritaire de recrutement de jeunes mathématiciennes et mathématiciens, notamment maîtres de conférences : lancer une campagne d'adhésion, maintenir la gratuité de la première cotisation pour les nouveaux thésards, recommencer la journée d'accueil des nouveaux maîtres de conférence, remplacer le tarif « moins de 30 ans » par un tarif « moins de 35 ans »

– constituer un conseil d'orientation de nos activités d'édition

– constituer un conseil d'orientation de notre site Web

– mettre en commun les expériences positives en direction des jeunes et des amateurs

– préciser le rôle des correspondants et mettre des outils à leur disposition

– mettre au point des outils permettant de suivre l'évolution de nos effectifs et de notre situation financière.

MATHÉMATIQUES

Conjecture de Poincaré : la preuve de R. Hamilton et G. Perelman

Laurent Bessières[1]

L'objectif de ce texte est de présenter la preuve de la conjecture de Poincaré proposée par Grisha Perelman, suivant les idées et méthodes de la théorie du flot de Ricci, développée précédemment par Richard Hamilton. On explique au lecteur la théorie du flot de manière non exhaustive mais, j'espère, suffisamment complète pour comprendre le schéma et les ressorts de la preuve de la conjecture. La présentation suit grosso-modo l'histoire des différentes étapes de la théorie du flot de Ricci.

1. Introduction

Dans ce chapitre, on présente brièvement l'histoire de la théorie du flot de Ricci et le schéma de preuve de la conjecture de Poincaré. On tentera dans les chapitres suivants de raconter les épisodes les plus marquants. La conjecture de Poincaré, formulée en 1904 dans [25], s'énonce aujourd'hui de la manière suivante. Rappelons qu'une variété M est simplement connexe si tout lacet continu $\mathbb{S}^1 \to M$ est continûment déformable en un point.

Conjecture 1.1 (Poincaré, 1904)**.** *Soit M une variété compacte de dimension* 3*, simplement connexe, alors M est homéomorphe à la sphère S^3.*

Cette question, à l'origine purement topologique, s'est révélée extraordinairement difficile et a stimulé les recherches sur la classification des variétés de dimension 3. Depuis les années 70, beaucoup de progrès ont été faits dans la compréhension des liens entre la topologie d'une variété et les géométries qu'elle peut porter. Le Graal poursuivi par les mathématiciens de ce domaine est la conjecture de géométrisation, qui affirme que toute variété compacte de dimension 3 admet une décomposition canonique en morceaux fondamentaux admettant une métrique homogène, c'est-à-dire une métrique telle que deux points quelconques ont des voisinages isométriques (voir l'article de M. Anderson [1] dans un précédent numéro de la Gazette et celui de John Milnor [23]). En dimension 3, il n'y a que 8 métriques homogènes et parmi elles, 3 de courbure sectionnelle constante. Pour les lecteurs peu familiers de la géométrie riemannienne, rappelons que si M est munie d'une métrique riemannienne g, c'est-à-dire de la donnée en chaque point x de M d'un produit scalaire g_x sur l'espace tangent T_xM, on associe à chaque plan

[1] Institut Fourier, Université Joseph Fourirer, 38402 Saint-Martin d'Hères. E-mail : laurent.bessieres@ujf-grenoble.fr

vectoriel P de T_xM un nombre $K(P)$ qu'on appelle *courbure sectionnelle* de P. La notion de courbure sectionnelle généralise la courbure de Gauss des surfaces plongées dans $\mathbb{R}^3$. On reviendra sur les diverses notions de courbure et leur signification géométrique au début de la section 2. Le point fondamental est qu'un espace où la courbure sectionnelle est constante, c'est-à-dire $K = -1$, 0 ou 1 si on normalise, est localement isométrique à l'espace hyperbolique, à l'espace euclidien ou à la sphère ronde. Si de plus l'espace est supposé simplement connexe, on a une isométrie globale. On peut donc reformuler la conjecture de Poincaré comme un problème géométrique :

Conjecture 1.2. *Soit M une variété compacte, de dimension* 3*, simplement connexe, alors M peut être munie d'une métrique de courbure sectionnelle constante strictement positive.*

On attend la même conclusion sous l'hypothèse de finitude du groupe fondamental et on appelle cela la conjecture d'elliptisation. C'est un cas particulier de la conjecture de géométrisation.

Maintenant, pour munir une variété de la métrique la plus jolie, une idée naturelle et qui peut sembler naïve au premier abord consiste à partir d'une métrique quelconque et à la déformer pour lui donner le plus possible de symétrie ou d'homogénéité. Suivant cette idée, en 1982, Richard Hamilton [13] a introduit l'équation du flot de Ricci

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}_{g(t)}, \tag{1}$$

où $g(t)$ est une famille de métriques riemanniennes sur une variété donnée et Ric_g la courbure de Ricci associée à la métrique g. Cette courbure contient moins d'information que la courbure sectionnelle en général, mais autant en dimension 3. C'est une forme bilinéaire symétrique sur chaque espace tangent, donc de même nature que la métrique. L'équation (1) fait donc sens. En coordonnées on peut voir que c'est une équation du type équation de la chaleur. Son but est d'homogénéiser les courbures. On peut vérifier facilement que les métriques de courbure de Ricci constante — c'est-à-dire de valeurs propres égales et constantes sur la variété soit $\mathrm{Ric}_g = \lambda g$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ — évoluent homothétiquement le long de ce flot (voir l'exemple 2.1 page 13). On revient dans la section 2 sur d'autres motivations de cette équation. Énonçons brièvement ce qu'Hamilton a pu faire avec ce flot et ce qu'il aurait aimé pouvoir faire. Dans [13] Hamilton démontre l'existence de solutions de l'équation (1) (appelées flots de Ricci) en temps petit pour toute donnée initiale. Ensuite il établit pour l'opérateur de courbure Rm — une version algébrique des courbures sectionnelles — une équation d'évolution de la forme $\frac{\partial\,\mathrm{Rm}}{\partial t} = \Delta\,\mathrm{Rm} + Q(\mathrm{Rm})$ où Q est une expression quadratique. En utilisant des principes du maximum, il montre que la positivité de la courbure de Ricci est préservée par le flot en dimension 3, et celle de l'opérateur de courbure l'est en toute dimension. De plus, la courbure scalaire — une fonction sur la variété qu'on obtient en diagonalisant $\mathrm{Ric}_g(x)$ dans une base orthonormée de g_x et en sommant les valeurs propres — a un minimum croissant en toute dimension. En général, la courbure a tendance à tendre (on dira exploser) vers $+\infty$ en au moins un point. Si la courbure de Ricci est strictement positive, la courbure scalaire explose en tout point à la même vitesse. Il faut imaginer une sphère un peu cabossée s'écrasant

sur un point. Le fait crucial est alors que la métrique s'arrondit : le pincement des valeurs propres de la courbure de Ricci s'améliore lorsque la courbure grandit. En dilatant convenablement les métriques $g(t)$, on peut montrer qu'elles convergent vers une métrique de courbure sectionnelle constante strictement positive sur la variété. La variété est donc difféomorphe à un quotient de S^3 par un groupe fini d'isométries. C'est le résultat le plus spectaculaire de [13] et un premier pas vers la conjecture de Poincaré. On reviendra sur ce résultat dans la section 2.
En général, le comportement du flot est plus sauvage. Par exemple la courbure peut exploser sur une partie de la variété et rester bornée ailleurs, ou exploser partout mais à des vitesses différentes. On dit que le flot rencontre une singularité. L'exemple le plus naturel est celui où un morceau de la variété de forme cylindrique $\mathbb{S}^2 \times I$ s'écrase sur un segment (voir l'exemple 3.1 page 16). Pour comprendre la formation d'une singularité, on fait des zooms sur la zone où la courbure tend vers $+\infty$. Plus précisément, on dilate l'espace pour que la courbure reste bornée et simultanément on ralentit l'écoulement du temps et on le réinitialise à zéro. On appelle cela une dilatation parabolique. Chaque dilatation parabolique produit un nouveau flot dont le passé est de plus en plus long et où la courbure est bornée. Une idée naturelle est de passer à la limite dans cette suite de flots, de classifier les flots limites et d'en déduire la géométrie du flot peu de temps avant l'explosion. Hamilton a développé dans [17] un théorème de compacité adéquat sur les espaces de flots de Ricci, en fait une version pour les flots des théorèmes de convergence riemannienne à la Gromov. Cependant, une hypothèse cruciale pour appliquer ce résultat est une minoration du rayon d'injectivité. Le rayon d'injectivité en un point est le supremum des rayons $r > 0$ pour lesquels l'application exponentielle $\exp_x : B(0,r) \subset T_xM \to B(x,r)$ est un difféomorphisme. On a besoin d'une estimée de la forme $\mathrm{inj}(x)^2 |\mathrm{Rm}_x| \geqslant \delta > 0$ sur le flot. Le rayon d'injectivité peut tendre vers zéro mais pas trop vite relativement à la courbure. En dilatant — l'expression $\mathrm{inj}^2 |\mathrm{Rm}_x|$ étant invariante — on obtient une métrique de géométrie bornée. Un des obstacles majeurs au programme d'Hamilton est qu'il ne peut obtenir cette estimée en toute généralité. Supposons cet obstacle franchi. On peut montrer que les flots limites alors construits sont de courbure sectionnelle positive ou nulle, bornée, et ont un passé infini. Un outil important pour cela est le théorème de pincement de Hamilton-Ivey [14][19], qui permet de minorer la partie négative de la courbure sectionnelle par une fonction de la courbure scalaire. Nous verrons ce résultat dans la section 3. Une large part de la classification de ces flots limites est faite dans [16], modulo l'hypothèse sur le rayon d'injectivité. Pour poursuivre le flot malgré les singularités, on peut envisager de décomposer la variété en morceaux et de poursuivre le flot sur chaque composante. La technique, déjà utilisée par Hamilton pour certaines variétés de dimension 4, consisterait à opérer des chirurgies juste avant l'explosion de la courbure en coupant le long de sphères $S^2 \subset M$. On jette les morceaux de grande courbure - il faut contrôler leur topologie - puis on relance le flot sur les morceaux restant (en rebouchant les trous en collant des boules), jusqu'à la prochaine singularité (voir pages 30 pour une image). Un problème est de montrer que les singularités n'apparaissent pas de plus en plus vite, s'accumulant en temps fini. Il faut aussi savoir que les seules singularités qui arrivent sont opérables, c'est-à-dire sont de type cylindre sphérique. Enfin il faut contrôler la topologie lors des chirurgies. L'espoir d'Hamilton était d'obtenir

après un nombre fini de chirurgies un flot sans singularités qui converge (s'il est correctement dilaté) sur chaque morceau.

En 2002 et 2003, Grisha Perelman a déposé sur le serveur ArXiv trois papiers [26], [27], [28] qui, s'ils sont corrects, réalisent à peu près le programme d'Hamilton, prouvant entre autre la conjecture de Poincaré et la conjecture de géométrisation. Dans [26], Perelman résout complètement la question des singularités. Pour cela, il introduit de nouvelles fonctionnelles géométriques qui permettent de voir le flot de Ricci comme un flot de gradient. La croissance de ces fonctionnelles le long du flot permet alors de contrôler certaines quantités géométriques. En particulier on obtient un résultat de non effondrement local du volume des boules avec comme corollaire la minoration du rayon d'injectivité invoquée plus haut. Ce contrôle passe à la limite et amène Perelman à considérer une classe particulière de solutions du flot qu'il appelle les κ-solutions (prononcer *kappa*-solutions). Perelman donne la classification complète des κ-solutions de dimension 3, obtenant des modèles pour toutes les singularités. Le point culminant de [26] est le théorème des voisinages canoniques qui décrit la géométrie des flots de Ricci de dimension 3 aux points de grande courbure scalaire. Mentionnons que [26] contient un certain nombre de résultats valables en toute dimension et intéressants en soi. Cette connaissance précise de la géométrie aux points de grande courbure permet de faire des chirurgies de manière contrôlée. Dans [27], Perelman démontre qu'on peut poursuivre ce flot avec chirurgie indéfiniment, et ce pour toute donnée initiale normalisée sur une variété compacte de dimension 3. Un argument simple de diminution du volume montre qu'il n'y a qu'un nombre fini de chirurgies sur chaque intervalle de temps fini. Par contre, elles peuvent se poursuivre pendant un temps infini. La variété peut devenir non connexe et certaines composantes peuvent disparaître lors des chirurgies, on dit qu'elles s'éteignent. Le point clé est que grâce au théorème des voisinages canoniques la topologie de ces composantes est connue. Il s'agit de quotients de la sphère $\mathbb{S}^3$, de produits $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, d'espaces projectifs $\mathbb{RP}^3$ ou de sommes connexes d'espaces projectifs, comme on le verra dans la section 5. Il peut même arriver que toutes les composantes de la variété s'éteignent en temps fini. Si la variété de départ est simplement connexe, on sait alors qu'il n'y a que des sphères et que la variété initiale est difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}^3$. C'est la stratégie développée dans [28], où l'extinction du flot avec chirurgie en temps fini est prouvée grâce à l'annulation d'un invariant géométrique ad hoc. Une version de cette méthode, techniquement plus simple, est développée par Tobias Colding et William Minicozzi dans [5]. Ils montrent que la largeur de la variété, une quantité géométrique calculée à l'aide d'un balayage par des sphères S^2, décroît jusqu'à zéro en temps fini le long d'un flot de Ricci lisse. On peut en déduire l'extinction en temps fini pour le flot avec chirurgie. La fin de [27] traite la situation contraire, l'évolution du flot avec chirurgie en temps infini et la géométrisation de la variété. Nous n'aborderons pas cette question.

Les articles de Perelman sont difficiles à lire et leur vérification pas encore terminée, notamment en ce qui concerne l'étude en temps long du flot avec chirurgie. Néanmoins il ne semble pas y avoir de doute sur l'existence du flot avec chirurgie en temps infini. On peut trouver de nombreux détails et compléments de preuve dans les notes de Bruce Kleiner et John Lott [21]. À ce jour, mon humble avis est que la conjecture de Poincaré est prouvée. Le lecteur peut trouver des notes informelles sur le flot de Ricci et les travaux de Hamilton et Perelman dans [1], [11], [24], [7].

Ce texte est organisé comme suit. Dans le chapitre 2, on introduit le flot de Ricci et les équations d'évolution des courbures. On explique comment des principes du maximum permettent de contrôler les courbures et d'obtenir la classification des variétés de courbure de Ricci strictement positive. Le chapitre 3 est consacré aux singularités. On introduit les suites de dilatations paraboliques et on présente brièvement les fonctionnelles utilisées par Perelman pour prouver le théorème de non effondrement local. On donne la classification des κ-solutions (les flots limites) et on termine par le théorème des voisinages canoniques. Dans le chapitre 4, on utilise les résultats précédents pour décrire le flot de Ricci au moment crucial d'une singularité. On définit la chirurgie puis le flot avec chirurgie. Dans le chapitre 5 on explique l'argument de Colding et Minicozzi prouvant l'extinction du flot en temps fini et qui conclut la preuve de la conjecture de Poincaré.

Mes remerciements vont à J. Bertrand et Luc Rozoy, dont les remarques sur la première version de ce texte m'ont beaucoup aidé. Je remercie B. Leeb, J. Iniotakis et tout le groupe de Münich, dont les notes de groupe de travail m'ont été très utiles pour améliorer ma compréhension des articles de Perelman. Je remercie également M. Boileau et Sylvain Maillot pour les échanges fructueux à l'école d'été de Trieste et à d'autres occasions. Je tiens à remercier chaleureusement A. Parreau pour sa lecture attentive des pré-versions de ce texte et ses conseils qui m'ont beaucoup inspiré. Enfin je remercie chaleureusement mon collègue et néanmoins ami G. Besson pour tout le travail effectué ensemble ces deux dernières années.

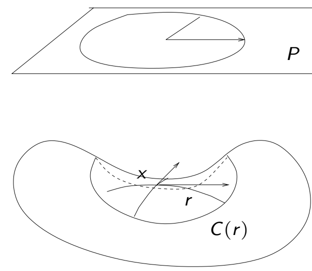
Dans tout ce texte, sauf précision contraire, les variétés sont supposées connexes et orientées. Les variétés compactes sont toujours supposées sans bord. Les variétés, métriques, fonctions etc. sont $\mathcal{C}^\infty$.
La lettre M désigne une variété de dimension n, x un point de M, g une métrique riemannienne sur M et $g(t)$ une famille de métriques riemanniennes pour $t \in (a,b)$. Les courbures, normes, etc., dépendent du temps t.

2. Le flot de Ricci

Avant de décrire le flot, on va passer en revue les diverses notions de courbure. En effet, on va naviguer dans ce texte entre à peu près toutes les courbures et une partie de l'étude du flot de Ricci consiste à comprendre comment les unes contrôlent les autres.

Les courbures

De manière générale, la courbure mesure le défaut infinitésimal de la métrique à être le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. Par exemple les *courbures sectionnelles* associent à chaque plan vectoriel $P \subset T_xM$ un nombre $K(P)$, qu'on calcule comme suit. On considère le cercle $C(r)$ de centre x de rayon r tangent à P.



Alors la longueur du cercle est

$$\ell(C(r)) = 2\pi r\left(1 - \frac{K(P)}{6}r^2 + o(r^2)\right)$$

et $K(P)$ mesure donc le défaut infinitésimal au périmètre euclidien. L'objet qui apparaît naturellement dans le flot sur la courbure est la *courbure de Ricci*, qui est une forme bilinéaire symétrique sur chaque espace tangent, on la notera Ric. La valeur de $\mathrm{Ric}(v, v)_x$ se calcule en traçant les courbures sectionnelles des plans vectoriels de T_xM contenant v, c'est-à-dire $\mathrm{Ric}(v, v)_x = \sum_{i=1}^{n-1} K(P_{ve_i})$ où (e_i) est une base orthonormé de $v^\perp$. Géométriquement, elle mesure un défaut d'aire sur des petites sphères dans la direction v.
La courbure la plus simple est la *courbure scalaire*, qui est une fonction sur la variété et qu'on notera R. En un point donné, c'est la trace par rapport à g_x de la courbure de Ricci sur T_xM, c'est-à-dire $R(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}(e_i, e_i)_x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\neq i} K(P_{e_ie_j})$ où (e_i) est une base orthonormée de T_xM. Elle mesure un défaut dans le volume des petites boules centrées en x.
On utilisera aussi dans ce texte un objet plus sophistiqué, l'opérateur de courbure qu'on notera Rm (pour Riemann). Pour chaque point x, Rm_x est un endomorphisme symétrique agissant sur l'espace des deux formes alternées de T_xM. Sa donnée est équivalente à celles des courbures sectionnelles et il apparaît naturellement lorsque l'on étudie les équations d'évolution des courbures. La normalisation choisie par Hamilton fait que ses valeurs propres sont les doubles des courbures sectionnelles en dimension 3. En coordonnées locales, toutes les courbures ont des expressions polynomiales en les coefficients de g, ∂g et $\partial^2 g$.

Résumons la hiérarchie des courbures : les courbures sectionnelles (ou l'opérateur de courbure) déterminent la courbure de Ricci qui détermine la courbure scalaire. En dimension 3 la courbure de Ricci détermine toutes les courbures sectionnelles. Ainsi $K(P_{e_1e_2}) = (\mathrm{Ric}(e_1, e_1) + \mathrm{Ric}(e_2, e_2) - \mathrm{Ric}(e_3, e_3))/2$. En particulier une métrique est de courbure de Ricci constante, c'est-à-dire proportionnelle à la métrique, si et seulement si les courbures sectionnelles sont constantes sur la variété. L'un des intérêts majeurs du flot de Ricci en dimension 3 est qu'il permet de contrôler toutes les courbures à partir de la courbure scalaire. Heuristiquement, le flot homogénéise les courbure de Ricci donc un contrôle sur la moyenne implique un contrôle sur la courbure elle-même.

Pour plus de détails, les lecteurs curieux peuvent se reporter à [10] ou au stratosphérique [2].

Le flot de Ricci

On cherche à munir M d'une métrique optimale. La méthode proposée par Hamilton est inspirée des idées de Eells et Sampson [9]. On part d'une métrique quelconque et on cherche à la régulariser au moyen d'une équation de la chaleur. Idéalement on souhaite minimiser une fonctionnelle géométrique sur l'espace des métriques, l'équation d'évolution étant décrite par l'opposé du champ de vecteur gradient de la fonctionnelle. Le candidat naturel est l'intégrale $\int_M R$ de la courbure scalaire, la fonctionnelle dite de Hilbert-Einstein. Ses points critiques (sur l'espace des métriques de volume 1) sont les métriques de courbure de Ricci constante, i.e. $\mathrm{Ric}_g = \lambda g$ (on les appelle métriques d'Einstein). Cependant l'équation associée à son gradient n'admet pas de solutions en général. L'idée d'Hamilton a été de modifier cette équation. On n'obtient pas un flot de gradient mais il y a existence de solutions.
On dit que $g(t)$ est un flot de Ricci sur $[0, T[$ si elle satisfait à l'équation d'évolution :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}_{g(t)}\,. \tag{2}$$

En fait l'équation qui correspond à la stratégie ci-dessus est celle dite du flot de Ricci normalisé : $\frac{\partial g}{\partial t} = -2(\mathrm{Ric} - \frac{r}{n} g)$, où r est la moyenne de la courbure scalaire. Les deux équations sont équivalentes - on passe de l'une à l'autre par une dilatation sur l'espace et le temps. La deuxième est de volume constant et plus pratique pour les problèmes de convergence. Ses point fixes sont les métriques de courbure de Ricci constante, qui évoluent par homothétie pour l'équation (2). L'équation du flot de Ricci est plus agréable pour les questions d'évolution des courbures. La constante 2 qui apparaît dans (2) est choisie arbitrairement pour un confort dans les calculs ; on peut la modifier par une homothétie sur le temps. Dans des coordonnées locales harmoniques, l'équation (2) se met sous la forme

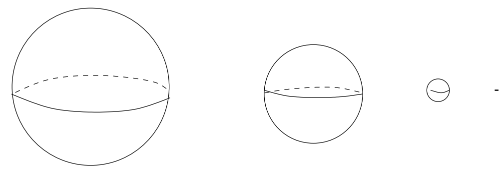
$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = \Delta g_{ij} + Q_{ij}(g, \partial g) \tag{3}$$

où Δ est le laplacien (dépendant de t) sur les fonctions et Q un terme quadratique en g et les dérivées premières de g. Ainsi (2) devient une équation aux dérivées partielles parabolique du type **réaction-diffusion**.

Exemple 2.1. *Soit (S^3, g) la sphère unité de $\mathbb{R}^4$ munie de la métrique induite. On considère la famille $g(t) = r^2(t)g$ avec $r(0) = 1$ et $r(t) > 0$. La courbure sectionnelle de $r^2 g$ vaut $\frac{1}{r^2}$. La courbure de Ricci dans une direction $v \in T_x S^3$ s'obtient en traçant les courbures sectionnelles sur les plans vectoriels de $T_x S^3$ contenant v soit*

$$\mathrm{Ric}_{r^2 g} = \frac{2}{r^2} r^2 g = 2g.$$

L'équation (2) donne $r^2(t) = 1 - 4t$ et le dessin est celui-ci (explosion en temps fini) :



$t = 0$ $t = \frac{1}{4}$

Plus généralement, si $\mathrm{Ric}_g = \lambda \cdot g$ *(g d'Einstein) alors l'homothétie* $g(t) = (1 - 2\lambda t)g$ *est une solution du flot de Ricci, défini sur* $[0, \infty)$ *si* $\lambda \leqslant 0$, *sur* $[0, \frac{1}{2\lambda})$ *sinon. Sur* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, *le flot est constant sur le facteur* $\mathbb{R}$ *alors que la sphère* $\mathbb{S}^2$ *s'écrase comme ci-dessus.*

Le choix de l'équation (2) est justifié par le

Théorème 2.1 ([13]). *Supposons* M *compacte. Il existe un unique flot de Ricci* $g(t)$ *avec donnée initiale* g *défini sur un intervalle maximal* $[0, T)$, $0 < T \leqslant \infty$. *De plus* $T < \infty$ *si et seulement si le maximum des valeurs absolues des courbures sectionnelles tend vers l'infini quand* $t \to T$.

Le temps T est appelé un temps *singulier* s'il est fini. Pour montrer ce théorème, on établit d'abord l'existence et l'unicité d'une solution en temps petit pour toute donnée initiale lisse (voir Hamilton [13] et aussi De Turck [8] pour une simplification). On peut voir en intégrant (2) que tant que la courbure de Ricci reste bornée, on a

$$C^{-1}g(0) \leqslant g(t) \leqslant Cg(0).$$

Pour poursuivre le flot il suffit de s'assurer que la métrique reste lisse. Cela est pourvu par l'effet régularisant du flot qui permet de contrôler les dérivées à tous les ordres des courbures si on les contrôle à l'ordre zéro (pour les détails voir [5, th.6.45]). Pour contrôler les courbures on écrit leurs équations d'évolution et on utilise des principes du maximum. On va voir un aperçu de ces techniques dans le chapitre suivant.

Équations d'évolution des courbures et principes du maximum

Commençons par l'équation la plus simple, celle de la courbure scalaire :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + 2|\,\mathrm{Ric}\,|^2 \tag{4}$$

où toutes les quantités dépendent de t. C'est une E.D.P de type réaction-diffusion, le Laplacien régularisant la solution (diffusion) et le terme non linéaire ayant tendance à la faire exploser (réaction). En un point où la courbure scalaire $R(x, t)$ de $g(t)$ atteint son minimum sur M, le Laplacien ΔR est positif (c'est la trace des dérivés secondes). On déduit de (4) que $\frac{\partial R}{\partial t} \geqslant 0$ en x et, intuitivement, que le minimum de la courbure scalaire croit. Si de plus on utilise l'inégalité $|\,\mathrm{Ric}\,|^2 \geqslant \frac{R^2}{n}$, on obtient $\frac{\partial R}{\partial t} \geqslant \frac{2R^2}{n}$ et on peut penser que le minimum doit croître assez vite. Pour en donner une justification rigoureuse on utilise un principe du maximum. Expliquons cela en détail. Le principe du maximum permet de comparer la solution de l'E.D.P et une solution de l'équation différentielle ne comportant que le terme de réaction, qui représente la situation extrême. En voici un énoncé (voir [5, th.4.2]) : *soit F une fonction lisse sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe des fonctions u sur $M \times [0, T)$ et φ sur $[0, T)$ satisfaisant*

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant \Delta_{g(t)} u + F(u) \quad \text{et} \quad \varphi' = F(\varphi).$$

Si $u \geqslant \varphi$ au temps $t = 0$ alors $u \geqslant \varphi$ sur $[0, T)$.

En appliquant ceci à $u = R$ et $F = 0$, puis $F(s) = \frac{2s^2}{n}$, on obtient que le minimum $R_{min}(t)$ de la courbure scalaire croit puis que si $R_{min}(0) > 0$ alors

$$R_{min}(t) \geqslant \frac{n/2}{t_0 - t} \tag{5}$$

où $t_0 = \frac{n}{2R_{min}(0)}$. On en déduit d'abord qu'en un temps singulier, au moins une courbure sectionnelle tend vers $+\infty$. C'est le premier signe d'une préférence du flot de Ricci pour les courbures positives. Ensuite, (5) montre que ce temps singulier arrive avant t_0 si la courbure scalaire est strictement positive en $t = 0$. À priori, il se pourrait qu'en un point certaines courbures sectionnelles tendent vers $+\infty$, d'autres vers $-\infty$ ou restent bornées.

Pour avoir plus d'informations, on travaille sur l'opérateur de courbure, qui satisfait à une équation d'évolution semblable,

$$\frac{\partial \operatorname{Rm}}{\partial t} = \Delta \operatorname{Rm} + Q(\operatorname{Rm}). \tag{6}$$

Ici le Laplacien est la trace de la dérivée covariante seconde et Q est une expression quadratique. En dimension 3 la courbure de Ricci détermine l'opérateur de courbure et satisfait à une équation du même type. Un principe du maximum pour les tenseurs (voir Hamilton [13]) permet alors de montrer que la positivité de l'opérateur de courbure est préservée en toute dimension et celle de la courbure de Ricci l'est en dimension 3. En cas de courbure strictement positive, un raffinement de ces techniques permet d'obtenir le premier résultat frappant, qu'on présente dans le chapitre suivant.

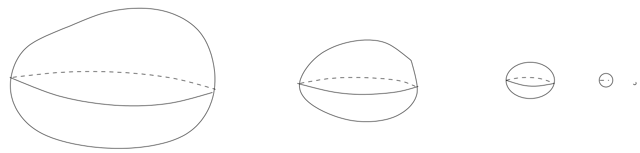
Quand la courbure de Ricci est strictement positive

On suppose M compacte de dimension 3 et $g(0)$ de courbure de Ricci strictement positive. *Alors la courbure de Ricci de $g(t)$ reste strictement positive et on a en tout point le pincement (voir* [13, ch.10]*)*

$$\frac{|\operatorname{Ric} - \frac{R}{3} g|}{R} \leqslant \frac{\alpha}{R^{\beta}}, \quad \alpha, \beta > 0. \tag{7}$$

Ceci signifie que si la courbure scalaire $R(x, t)$ tend vers $+\infty$, l'écart relatif en x de la courbure de Ricci $\operatorname{Ric}_{g(t)}$ à sa moyenne $\frac{R}{3} g(t)$ tend vers 0. Maintenant, en contrôlant le gradient de la courbure scalaire, Hamilton montre que celle-ci explose en tout point au même temps T et que le ratio du maximum et du minimum des courbures scalaires sur M tend vers 1. Hamilton montre alors que la famille $\tilde{g}(t) = vol(g(t))^{-2/3} g(t)$ (renormalisation de volume constant) converge vers une métrique de courbure sectionnelle constante d'où le

Théorème 2.2 (Space form theorem [13])**.** *Si M possède une métrique de courbure de Ricci strictement positive, alors M peut être munie d'une métrique de courbure sectionnelle constante positive.*



Remarque 2.1.

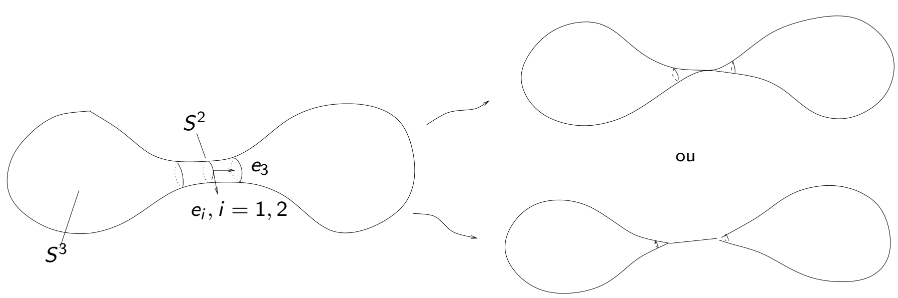
i. *En particulier M est le quotient de la sphère $\mathbb{S}^3$ par un groupe fini d'isométries. Une telle variété est dite* **sphérique***. C'est le théorème fondateur de toute la théorie et le premier pas vers la conjecture de Poincaré.*

ii. *R. Hamilton a montré (voir* [14]*) que sous l'hypothèse de positivité de la courbure de Ricci, M est difféomorphe à un quotient de $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^3$ par un sous groupe discret d'isométries dans leur métrique standard. La preuve repose sur un principe du maximum fort et un théorème de décomposition.*

3. Formation des singularités

La morale de ce qui précède est qu'en courbure positive les choses se passent bien : la positivité de la courbure scalaire est toujours préservée, celle de la courbure de Ricci l'est en dimension 3 ; dans le dernier cas une normalisation du flot converge et la topologie de la variété est connue. La situation est radicalement différente sans la positivité de la courbure de Ricci. En particulier la courbure peut exploser sur une partie de la variété et rester bornée ailleurs.

Exemple 3.1. *Considérons le flot $(S^3, g(t))$ ayant l'allure suivante :*



En $t = 0$, sur la sphère S^2 centrale, les courbures sectionnelles des plans $P_{e_1 e_3}$ et $P_{e_2 e_3}$ orthogonaux à $\mathbb{S}^2$ sont faiblement négatives alors que la courbure sectionnelle du plan $P_{e_1 e_2}$ tangent à $\mathbb{S}^2$ est très positive. Donc $\mathrm{Ric}(e_1, e_1) = K(P_{e_1 e_2}) + K(P_{e_1 e_3}) >> 0$ et $\mathrm{Ric}(e_2, e_2) = K(P_{e_1 e_2}) + K(P_{e_2 e_3}) >> 0$ alors que $\mathrm{Ric}(e_3, e_3) = K(P_{e_1 e_3}) + K(P_{e_2 e_3})$ est faiblement négative. Quand le flot évolue la variété est contractée très fortement dans les directions e_1,e_2 et $K(P_{e_1 e_2}) \to \infty$ alors qu'elle est faiblement dilatée dans la direction e_3.

Observons que c'est encore la partie positive de la courbure qui explose. En un sens c'est toujours le cas. Une variante des résultats précédents, le théorème de pincement de Hamilton-Ivey, montre que pour un flot de Ricci de dimension 3, la partie négative de l'opérateur de courbure Rm est contrôlée par la courbure scalaire R. De plus elle est négligeable comparée à la courbure scalaire lorsque celle-ci explose. Précisément :

Théorème 3.1 (pincement de Hamilton-Ivey [14],[19]). *Il existe une fonction croissante $\Phi : [-1, +\infty) \to [1, +\infty)$ vérifiant $\lim_{r\to\infty} \Phi(r)/r = 0$ avec la propriété suivante. Si $R \geqslant -1$ et $\mathrm{Rm} \geqslant -\Phi(R)$ en $t = 0$, alors pour tout t dans $[0, T)$ on a*

$$\mathrm{Rm} \geqslant -\Phi(R). \tag{8}$$

Il faut comprendre l'inégalité comme une minoration des valeurs propres de l'opérateur de courbure (donc des courbures sectionnelles). Deux remarques : 1) la condition au temps $t = 0$ n'est pas restrictive puisqu'on peut toujours la réaliser en dilatant la métrique initiale, R tendant vers 0 et $\varphi(R)$ vers 1. On peut également la supprimer en adaptant φ à la condition initiale. 2) La courbure scalaire contrôle, donc toutes les courbures. En effet si on appelle $\lambda \geqslant \mu \geqslant \nu$ les valeurs propres de l'opérateur de courbure, les valeurs propres de la courbure de Ricci sont $(\lambda+\mu)/2$, $(\lambda+\nu)/2$, $(\mu+\nu)/2$ et la courbure scalaire vaut $\lambda+\mu+\nu$. D'où les inégalités

$$R + 2\varphi(R) \geqslant \lambda \geqslant \mu \geqslant \nu \geqslant -\varphi(R). \tag{9}$$

En particulier la courbure de Ricci (ou l'opérateur de courbure) explose en un point si et seulement si la courbure scalaire explose. Maintenant, en un point où la courbure scalaire $R(x, t)$ est très grande on a

$$\frac{\mathrm{Rm}}{R} \geqslant \frac{-\Phi(R)}{R} \geqslant -\varepsilon. \tag{10}$$

Si on dilate $g(t)$ pour que $R(x, t) = 1$, le terme de gauche étant invariant par dilatation de la métrique, l'opérateur de courbure devient presque positif : $\mathrm{Rm}(x, t) \geqslant -\varepsilon$. C'est en ce sens « faible » que le flot préfère les courbures positives. Dans l'étape suivante, on va regarder de plus près ce qui se passe en ces points.

Étude des singularités : la technique du zoom

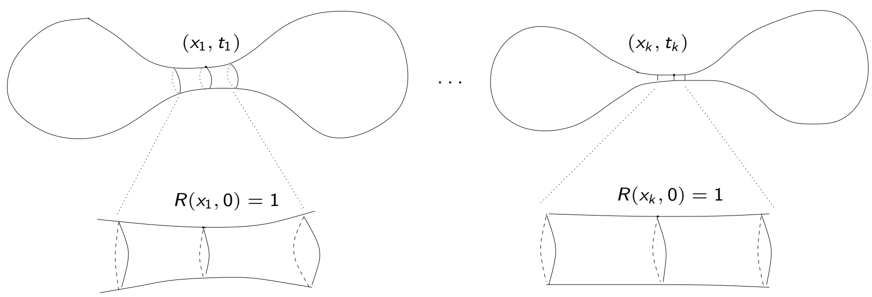
Cette technique a été mise en œuvre par Hamilton dans [16] et [17]. Le but est de décrire la géométrie au voisinage des points de grande courbure. L'idée est de faire des zooms sur une suite de points de courbure tendant vers l'infini et de passer à la limite. Si on peut montrer l'existence de limites, qui seront des flots de Ricci avec des propriétés particulières, on obtient des modèles pour la géométrie des singularités. Un des points de blocage du programme d'Hamilton concerne l'existence de la limite, qu'il ne peut montrer en général. Cette question est complètement résolue par Perelman.

On précise l'idée d'un zoom en définissant une *dilatation parabolique*. On se donne un point x_0 de M, un temps t_0 dans $[0, T)$ et un réel $Q > 0$ (en général

$Q = R(x_0, t_0)$ est très grand). *On appelle dilatation parabolique en* (x_0, t_0) *de rapport* Q *le flot de Ricci sur* M *d'équation*

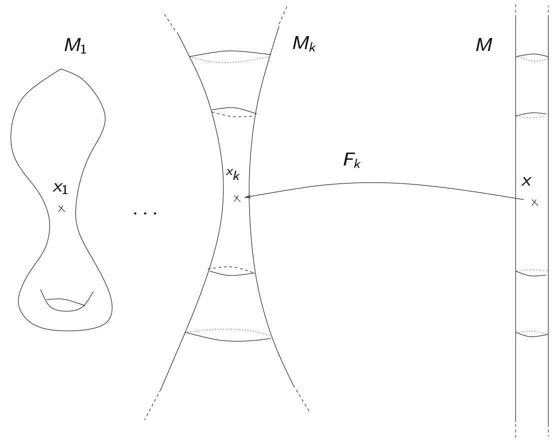
$$g_0(t) = Q \cdot g(t_0 + \frac{t}{Q}),$$

pour t *dans* $[-t_0 Q, (T - t_0)Q]$.
On laisse le lecteur vérifier que c'est bien un flot de Ricci. Cette transformation dilate les distances d'un facteur $\sqrt{Q}$ donc rapetisse la courbure scalaire d'un facteur $\frac{1}{Q}$. Pour que $g_0(t)$ soit un flot de Ricci, le temps est ralenti d'un facteur Q et donc l'intervalle de vie est dilaté du même facteur. Dans la nouvelle solution le point base est ramené au temps $t = 0$ par le décalage de t_0.
Supposons maintenant que T soit un temps singulier. On suppose aussi que la variété est de dimension 3 et satisfait au pincement de Hamiton-Ivey (9). On prend une suite de points (x_k, t_k) dont la courbure scalaire $Q_k := R(x_k, t_k)$ tend vers $+\infty$. On se place dans la situation la plus simple : on suppose que la courbure scalaire est partout inférieure à Q_k pour les temps précédant t_k. En un sens, on considère une suite maximale. On appelle $g_k(t)$ la dilatation parabolique en (x_k, t_k) de rapport Q_k. Si on note $R_k(x, t)$ la courbure scalaire de $g_k(t)$ en x, les dilatations paraboliques correspondent à des renormalisations où $R_k(x_k, 0) = 1$. Maintenant la courbure scalaire est partout inférieure à 1 pour les temps négatifs. De plus le pincement de Hamilton-Ivey et la dilatation impliquent que l'opérateur de courbure est borné et presque positif sur les intervalles de vie négatifs $[-t_k Q_k, 0]$ qui convergent vers $(-\infty, 0]$.



On voudrait faire converger notre suite de zooms, c'est-à-dire la suite de flots de Ricci pointés $(M, g_k(t), (x_k, 0))$. Avant de dire ce qu'on entend par là, faisons une petite digression sur la convergence des variétés riemanniennes.

Cette théorie a été développée par M. Gromov dans le fameux petit livre vert [11] (qui a doublé depuis sa première parution). On dit qu'une suite de variétés riemanniennes (M_k, g_k) converge au sens C^p vers une variété riemanienne (M, g) s'il existe des difféomorphismes F_k de M sur M_k tels que la métrique $F_k^* g_k$ induite par F_k sur M converge vers g en norme C^p. Si la convergence est assez régulière, le volume, le diamètre, les courbures, etc. convergent. On dira que deux variétés sont ε-proches s'il y a un difféomorphisme $(1 + \varepsilon)$-bilipschitz de l'une sur l'autre. Lorsqu'on travaille avec des variétés non compactes, ou compactes mais sans contrôle du diamètre, on considère la convergence pointée. On dit qu'une suite de variétés riemanniennes pointées (M_k, g_k, x_k) converge vers une variété riemannienne pointée (M, g, x) si pour tout $r > 0$, les boules $B_{g_k}(x_k, r)$ convergent vers $B_g(x, r)$. Cette fois-ci, la limite n'est pas forcément difféomorphe aux M_k.



On a alors le théorème de compacité suivant [11, 8.28] : *soit* (M_k, g_k, x_k) *une suite de variétés riemanniennes pointées. On suppose qu'il existe des constantes* $V > 0$ *et pour tout* $r > 0$, $K(r) > 0$ *telles que pour tout* k,
1) les valeurs absolues des courbures sectionnelles de M_k *sont bornées par* $K(r)$ *sur la boule* $B(x_k, r)$ *;*
2) le rayon d'injectivité en x_k *est minoré par* V*.*
Alors il existe une sous-suite convergente au sens C^2 *vers une variété riemannienne pointée* (M, g, x), g *de classe* C^1.

Remarquons que, grâce au théorème de Cheeger [4], la minoration du rayon d'injectivité est équivalente à une minoration du volume de la boule centrée en x_k et de rayon, disons, 1. L'effondrement d'une sphère sur un point ou d'un tore plat sur un cercle donne une bonne idée de ce qui se passe si on affaiblit les hypothèses. L'idée de la preuve est la suivante. Par des théorèmes classiques de comparaison, on contrôle le volume (ou le rayon d'injectivité) sur toute boule centrée en x_k. On peut alors contrôler dans une boule le nombre des cartes qui définissent la variété ainsi que les recollements entre ces cartes. La suite est une succession d'applications du théorème d'Ascoli doublée d'un procédé diagonal. On peut augmenter la régularité de la convergence si on a des estimées supplémentaires sur la courbure, ce qui est toujours le cas avec un flot de Ricci. En pratique les convergences seront C^p pour tout p donc très fortes. En particulier les courbures convergent à tous les ordres. Nous sommes maintenant prêts pour définir la convergence d'une suite de flots de Ricci pointés. On note $B(x, t, r)$ la boule centrée en x de rayon r dans la métrique $g(t)$.
Fixons un intervalle (a, b) *tel que* $-\infty \leqslant a < 0 \leqslant b \leqslant \infty$. *Soit* $(M_k, g_k(t), x_k)$ *une suite de flots de Ricci pointés sur* (a, b). *On dit que cette suite converge vers le flot de Ricci pointé* $(M, g(t), x)$ *s'il existe pour tout* k *des plongements* F_k *de* $B(x, 0, k)$ *dans* M_k *envoyant* x *sur* x_k *tels que la suite de métriques* $F_k^* g_k(t)$ *converge vers* $g(t)$ *au sens* C^∞ *uniformément sur les compacts de* $M \times (a, b)$.
Bien sûr on peut faire dépendre les intervalles (a, b) de k, à condition que leur intersection contienne un intervalle. Le théorème de compacité adéquat suivant est démontré par Hamilton dans [17]. On note $B(x, t, r)$ la boule centrée en x de rayon r dans la métrique $g(t)$.

Théorème 3.2. *Si une suite de flots de Ricci pointés $(M_k, g_k(t), x_k)$ comme ci-dessus vérifie :*
1) pour tout $r > 0$ et tout t dans (a, b), les valeurs absolues des courbures sectionnelles de $g_k(t)$ sont bornées sur $B(x_k, t, r)$ par une constante $K(r, t)$,
2) le rayon d'injectivité en x_k pour $g(0)$ est minoré par une constante $V > 0$,
alors il existe une sous-suite convergente vers un flot de Ricci pointé $(M, g(t), x)$ défini sur (a, b).

Comme au-dessus, on peut remplacer la condition 2) par une minoration du volume de la boule unité de $g(0)$ centrée en x_k. Il est temps de revenir à notre suite de zooms $(M, g_k(t), (x_k, 0))$. Elle satisfait à l'hypothèse sur la courbure sur les intervalles de temps négatifs $[-t_k Q_k, 0]$ puisqu'on a tout fait pour cela. Supposons un instant que la condition sur le rayon d'injectivité soit satisfaite. Par le théorème de compacité 3.2, on peut extraire une suite convergeant vers un flot défini sur $M_\infty \times (-\infty, 0]$. Une telle solution est dite ancienne. De plus le flot limite a un opérateur de courbure borné et non nul puisque $R(x_\infty, 0) = 1$, positif ou nul par passage à la limite dans le pincement de Hamilton-Ivey. Ces conditions sont très fortes et permettent d'envisager la classification de ces solutions du flot. Une bonne part de ce travail est faite par Hamilton (voir [16]) modulo la condition sur le rayon d'injectivité.

Le premier apport frappant de G. Perelman dans [26] est d'établir que cette hypothèse est toujours satisfaite si l'explosion de la courbure a lieu en temps fini. C'est le théorème dit de non-effondrement local, qu'on décrit dans le chapitre suivant. Une deuxième question est de savoir ce qui se passe si on zoome sur des points où la courbure est grande mais pas maximale. Dans ce cas il est beaucoup plus dur de construire une limite. C'est ce que fait Perelman dans le théorème 12.1 de [26], dit des voisinages canoniques (4.4 dans ce texte).

4. Non effondrement local

Expliquons brièvement de quoi il s'agit. Intuitivement, une famille de variétés riemanniennes s'effondre si elle s'approche d'un espace de dimension inférieure, comme par exemple une famille de cylindres qui s'écrase sur une droite. Plus précisément, on demande que le rayon d'injectivité (ou le volume de la boule unité) tende vers zéro en tout point, la courbure étant bornée par, disons, 1 — une condition naturelle si on ne veut pas tout effondrer en contractant la métrique. Pour une variété riemannienne (M, g) fixe, on parlera d'effondrement relatif à une échelle donnée. Moralement, un cylindre vu de très loin est proche d'une droite, mais vu de très près il est proche d'un plan. Dit autrement, une boule de très grand rayon dans le cylindre ramenée à un rayon 1 par dilatation est proche d'un segment, alors qu'une boule de petit rayon ramenée à un rayon 1 est (proche d') un disque euclidien. Pour définir l'effondrement local, on se donne donc un réel $\rho > 0$ (l'échelle) et on considère les rayons $r \leqslant \rho$. On dit qu'une boule $B(x, r)$ est admissible si $|\,\mathrm{Rm}\,| \leqslant r^{-2}$ sur $B(x, r)$, soit après dilatation $|\,\mathrm{Rm}\,| \leqslant 1$ sur la boule unité. Si on écrit $r \leqslant \frac{1}{\sqrt{|\,\mathrm{Rm}\,|}}$, cela revient à se donner aussi une « échelle de la courbure » en plus de l'échelle ρ. Pour quantifier l'effondrement on se donne un nombre $\kappa > 0$ et on travaille avec le volume des boules plutôt que le rayon d'injectivité, qui sera plus accessible par des méthodes de flot. *On dit qu'une métrique g est κ-effondrée* *à l'échelle ρ s'il existe une boule admissible $B(x,r)$ de rayon $r \leqslant \rho$ telle que $r^{-n}vol(B(x,r)) < \kappa$.* Après dilatation, cela revient à comparer le volume de la boule unité à κ (ou le rayon d'injectivité en x à une fonction de κ). Sinon on dira qu'elle est *κ-non effondrée à l'échelle ρ, c'est-à-dire que $r^{-n}vol(B(x,r)) \geqslant \kappa$ pour toute boule admissible de rayon $r \leqslant \rho$.* On choisit toujours la constante κ inférieure à la valeur euclidienne de $r^{-n}vol(B(x,r))$, qui est la limite quand $r \to 0$ de cette quantité pour toute métrique. Ainsi, pour tout $\kappa > 0$ raisonnable, le cylindre est κ-effondré à grande échelle mais κ-non effondré à petite échelle. Une sphère ronde et le cylindre sphérique $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ sont κ-non effondrés à toute échelle, même quand la sphère est très petite. Une version du théorème de non-effondrement local affirme alors (voir [26] chapitre 4) :

Théorème 4.1. *Supposons M compacte, munie d'un flot de Ricci $g(t)$ défini sur $[0,T)$, T fini. Alors il existe une constante $\kappa > 0$ telle que $g(t)$ est κ-non-effondrée à l'échelle $\sqrt{T}$ pour tout temps $t < T$.*

Dans ce qui suit on décrit les techniques mises en œuvre dans la preuve et grossièrement l'idée de celle-ci. On a dit que le flot de Ricci n'est pas un flot de gradient. Le premier apport de Perelman est de montrer qu'il l'est à difféomorphisme près. Plus précisément, soit (M,g) une variété riemannienne et f une fonction C^∞ sur M, on définit la fonctionnelle

$$\mathcal{F}(g,f) = \int_M (R + |\nabla f|^2) e^{-f} dvol. \tag{11}$$

On obtient une fonctionnelle géométrique $\mathcal{F}$, définie sur $\mathcal{M} \times C^\infty(M)$, où $\mathcal{M}$ est l'ensemble des métriques riemanniennes de M. On restreint cette fonctionnelle au sous-espace de $Met(M) \times C^\infty(M)$ formé des couples (g,f) tels que la forme volume $e^{-f}dvol$ est constante, égale à une forme volume fixée dm. L'équation du champ de vecteur gradient de la fonctionnelle $\mathcal{F}$ conduit alors au système

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2(\mathrm{Ric} + D^2 f), \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -\Delta f - R, \tag{12}$$

où toutes les quantités dépendent de $g(t)$. L'idée est de perturber une solution $(g(t), f(t))$ du système (12) pour se débarrasser du terme $D^2 f$ et obtenir une solution $\tilde{g}(t)$ du flot de Ricci. Un résultat classique de géométrie riemannienne dit que si on déforme une métrique g par un flot de difféomorphismes φ_s tel que $\frac{d}{ds}\varphi_s = \nabla f$, f étant une fonction, on a $\frac{d}{ds}(\varphi_s^* g) = 2D^2 f$. Maintenant, une solution de (12) étant donnée, on peut définir une famille de difféomorphismes φ_t telles que $\frac{d}{dt}\varphi = \nabla f$ pour tout temps t. Alors le couple formé de $\tilde{g}(t) = \varphi_t^* g(t)$ et $\tilde{f}(t) = f(t) \circ \varphi_t$ vérifie le système

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}, \qquad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = -\Delta \tilde{f} - R + |\nabla \tilde{f}|^2, \tag{13}$$

où tout dépend de $\tilde{g}(t)$. Le premier membre est alors une solution du flot de Ricci. L'opération inverse est possible, c'est-à-dire une solution du système (13) donne par perturbation une solution du système (12). Le lecteur soupçonneux aura peut-être remarqué que le deuxième membre est une équation de la chaleur rétrograde qui n'a pas de solution en général. Il se demandera à juste titre si on ne raisonne pas sur l'ensemble vide. L'astuce est la suivante. En présence d'un flot de Ricci, qu'on notera $\tilde{g}(t)$, sur $[0, T]$, on résout la deuxième équation de (13) dans le sens rétrograde, en partant d'une donnée initiale $\tilde{f}(T)$, ce qui revient à fixer la forme volume dm au temps T. Pour cette solution $(\tilde{g}(t), \tilde{f}(t))$ du système (13) sur $[0, T]$, la fonction $\mathcal{F}(\tilde{g}(t), \tilde{f}(t))$ est égale à $\mathcal{F}(g(t), f(t))$ et croissante, dans le bon sens. C'est démoniaque.

Pour montrer le non effondrement local, Perelman utilise ce même procédé avec une fonctionnelle plus sophistiquée, la fonctionnelle « entropie ». Pour idée, en voici la formule

$$\mathcal{W}(g, f, \tau) = \int [\tau(R + |\nabla f|^2 + f - n](4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} e^{-f} dvol,$$

où $\tau > 0$. En choisissant au temps $t < \infty$ une fonction f approchant la fonction indicatrice d'une boule admissible $B(x, r)$, il peut contrôler l'expression $r^{-n} vol(B)$ par la quantité $W(g, f, r^2)$. La croissance de la fonctionnelle le long d'un flot $(g(t), f(t), \tau(t))$ permet alors de contrôler cette quantité en fonction de $g(0)$ et de t.

Revenons au flot $(M^3, g(t))$ et à la suite de zooms considérée au chapitre précédent. Si le temps d'explosion T de la courbure est fini, les métriques $g(t)$ sont κ-non effondrées à l'échelle $\sqrt{T}$. Les zooms $g_k(t)$ sont également κ-non effondrés, à l'échelle $\sqrt{Q_k}\sqrt{T}$. On a alors une minoration du rayon d'injectivité de $g_k(0)$ en x_k et le théorème de compacité s'applique. Quitte à extraire on peut passer à la limite et on obtient un flot de Ricci κ-non-effondré à toute échelle. Dans l'épisode suivant, on classifie les flots pouvant apparaître de cette manière.

κ-solutions de dimension 3

On a montré dans les deux chapitres précédents comment construire la limite d'une certaine suite de zooms. Les propriétés que vérifie la limite - c'est une solution définie sur $(-\infty, 0]$, d'opérateur de courbure positif borné non nul, κ-non-effondrée à toute échelle - définissent un ensemble de flots de Ricci que Perelman appelle les κ-solutions. Par exemple $\mathbb{S}^3$ et $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ avec leur flots canoniques sont des κ-solutions mais pas $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ (quand $t \to -\infty$, le facteur $\mathbb{S}^1$ est très petit relativement au $\mathbb{S}^2$). Le but de cette section est de donner la classification complète des κ-solutions de dimension 3, ce qui correspond au chapitre 11 de [26] et 1.5 de [27]. La liste est remarquablement courte :

Théorème 4.2. *Une κ-solution de dimension 3 est isométrique à*

A. $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ muni de son flot standard,

B. $\mathbb{B}^3$ ou $\mathbb{RP}^3 - \overline{\mathbb{B}^3}$, munis d'un flot de courbure strictement positive,

C. $\mathbb{S}^3/\Gamma$, ou Γ est un sous-groupe fini d'isométries de la sphère ronde, muni d'un flot de courbure strictement positive.

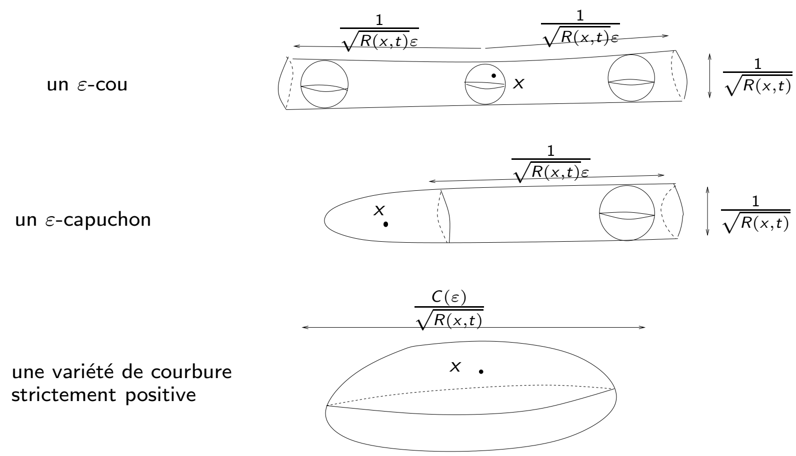
Pour décrire la géométrie locale des κ-solutions, Perelman utilise la terminologie suivante. Soit $\varepsilon > 0$, on dit qu'une boule $B(x, t, \frac{r}{\varepsilon})$ est un *ε-cou* si après une dilatation de facteur r^{-2}, elle est ε-proche de $\mathbb{S}^2 \times (-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon})$ muni de sa métrique canonique de courbure scalaire 1 (voir dessin page 23, les rayons sont des ordres de grandeur). Nécessairement, r est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{R(x,t)}}$. On appellera *ε-capuchon* une métrique de courbure strictement positive bornée sur $\mathbb{B}^3$ ou sur $\mathbb{RP}^3 - \overline{\mathbb{B}^3}$ telle que tout point en dehors d'un compact est dans un ε-cou. Même si la courbure des κ-solutions est variable, la géométrie est contrôlée de manière universelle :

Théorème 4.3. *Il existe $\kappa_0 > 0$ et une constante universelle $\eta > 0$ telle que toute κ-solution de dimension 3 est soit une κ_0-solution soit un quotient de la sphère ronde. De plus les oscillations de la courbure scalaire sont contrôlées par*

$$|\nabla R| \leqslant \eta R^{\frac{3}{2\times}}, \quad |\frac{\partial R}{\partial t}| \leqslant \eta R^2. \tag{14}$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe une constante $C(\varepsilon) > 0$ telle que pour tout t, tout point x admet un voisinage B de diamètre inférieur à $\frac{C(\varepsilon)}{\sqrt{R(x,t)}}$, qui est soit

i) un ε-cou,
ii) un ε-capuchon,
iii) une variété compacte de courbure sectionnelle strictement positive.



Remarque 4.1.

1) *On appellera voisinage canonique de tels voisinages. Dans le deuxième cas, on contrôle la taille de la partie non cylindrique. Dans le dernier cas, le voisinage contient toute la variété, qui est difféomorphe à une variété sphérique d'après 2.2. On a de plus des estimées sur le minimum de la courbure sectionnelle.*

2) *On peut choisir $\varepsilon > 0$ de manière universelle avec la propriété suivante. Si on met bout à bout un nombre fini de ε-cous, la réunion est difféomorphe à $\mathbb{S}^2 \times I$ ou $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Si chaque côté d'une réunion d'ε-cous est bouché par un ε-capuchon, la réunion est difféomorphe à S^3, $\mathbb{RP}^3$ ou une somme connexe de deux $\mathbb{RP}^3$. Le point clé est qu'un recollement le long de sphères $\mathbb{S}^2$ est trivial. (Voir dessin page 29.)*

Ce texte est trop réduit pour présenter la preuve de ces théorèmes. Mentionnons seulement quelques idées frappantes et des exemples d'utilisation. Tout d'abord on a un théorème de compacité qui dit : *l'ensemble des κ-solutions $(M, g(t), x)$ de dimension* 3 *telles que $R(x, 0) = 1$ est compact*. Ce résultat est stupéfiant car on ne contrôle la courbure a priori qu'en un seul point. D'autre part, pour toute κ-solution

$(M, g(t))$ et toute suite $t_k \to -\infty$, Perelman démontre l'existence d'une suite $(M, g_k(t), x_k)$, où $g_k(t) = \frac{1}{-t_k} g(t_k - t_k t)$, ayant une limite $(M_{-\infty}, g_{-\infty}(t), x_{-\infty})$ quand $k \to \infty$. Intuitivement c'est le germe en $-\infty$ de la κ-solution et Perelman appelle cela un *soliton asymptotique*. En dimension 3 c'est aussi une κ-solution mais elle a des propriétés supplémentaires d'autosimilarité. Ainsi $g_{-\infty}(t)$ évolue selon l'équation

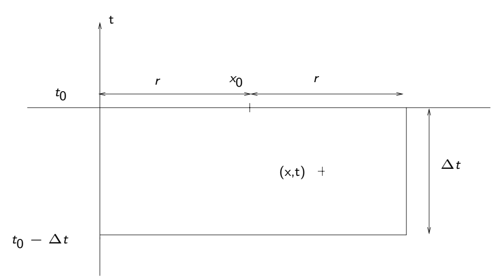
$$g_{-\infty}(t) = \alpha(t)\varphi_t^* g(0),$$

où $\alpha(t) > 0$ et φ_t est un difféomorphisme de $M_{-\infty}$. Perelman l'utilise pour classifier les κ-solutions. Donnons un exemple. Considérons une κ-solution compacte, donc de courbure strictement positive par les travaux d'Hamilton. Supposons que son soliton asymptotique soit compact. Il est donc muni d'un flot de courbure strictement positive qui évolue vers la métrique ronde et le pincement des courbures s'améliore. Par autosimilarité, la courbure est constante et les métriques $g_{-\infty}(t)$ sont rondes. Mais $g_{-\infty}(0)$ est proche de $g(t_k)$ (à dilatation près) lorsque t_k est très négatif donc $g(t_k)$ est arbitrairement proche d'une métrique ronde lorsque $t_k \to -\infty$. Ce n'est possible que si $g(t)$ est le flot rond, puisque le flot s'arrondit.

Théorème des voisinages canoniques

Dans les précédents chapitres, on a classifié des modèles de singularité, c'est-à-dire les flots de Ricci pouvant apparaître comme limite des zooms de courbure maximale. Il reste à voir que ces flots, c'est-à-dire les κ-solutions listées en 4.3, suffisent à décrire tous les points de grande courbure du flot de Ricci. C'est précisément ce que dit le théorème des voisinages canoniques, le résultat majeur de [26]. Essentiellement, ce résultat dit que si le flot a vécu assez longtemps, tout point de grande courbure scalaire a un voisinage en temps et en espace proche d'un même voisinage d'une κ-solution. Ce résultat est crucial car pour contrôler la topologie lors des chirurgies, on aura besoin de voir *tous* les points de grande courbure. On donne une version édulcorée du théorème pour éviter beaucoup de technique. On va supposer la métrique initiale normalisée pour que le flot vive une seconde au moins et obéisse au pincement de Hamilton-Ivey (8). On appelle voisinage parabolique en (x_0, t_0) de rayons r et $\Delta t > 0$, l'ensemble

$$P(x_0, t_0, r, \Delta t) = \{(x, t), d_{t_0}(x, x_0) \leqslant r, t_0 - \Delta t \leqslant t \leqslant t_0\}$$
$$= B(x_0, t_0, r) \times [t_0 - \delta t, t_0].$$



C'est un bout de flot dans le passé d'une boule.

Théorème 4.4. [26, th. 12.1] *Pour tout ε,$\kappa > 0$, il existe une constante universelle $r_0 > 0$ avec la propriété suivante. Soit $(M^3, g(t))$ un flot de Ricci sur une variété* *compacte de dimension* 3*, défini sur* $[0, T]$*,* $T > 1$*. On suppose que* $g(t)$ *est* κ*-non effondrée à l'échelle* r_0*. Si* (x_0, t_0) *est un point tel que* $t_0 \geqslant 1$ *et* $Q_0 := R(x_0, t_0) \geqslant r_0^{-2}$*, alors le voisinage parabolique* $P(x_0, t_0, \frac{1}{\varepsilon\sqrt{Q_0}}, -\frac{1}{\varepsilon Q_0})$ *est* ε*-proche, après dilatation parabolique de facteur* Q_0*, du voisinage correspondant d'une* κ*-solution.*

Remarque 4.2. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *assez petit, un tel point* x_0 *est donc dans un* ε*-cou, un* ε*-capuchon ou une variété de courbure sectionnelle strictement positive, comme dans le théorème 4.3. Les oscillations de la courbure sont contrôlées par (14). On dira que* $g(t)$ *satisfait à l'hypothèse des voisinages canoniques à l'échelle* r_0*.*

La preuve de ce résultat est assez étourdissante et je ne résiste pas à l'envie de la raconter. Elle renferme plusieurs arguments par contradiction, renormalisations et passages à la limite, emboîtés comme des poupées russes. Ce sera la partie la plus technique de ce texte.

Preuve. Par contradiction. Pour simplifier, disons qu'un point est mauvais si son voisinage parabolique n'est pas ε-proche, après le zoom, d'une κ-solution et il est joli sinon. On se donne une suite de flots de Ricci $(M_k, g_k(t))$ satisfaisant aux hypothèses, avec dans chacun un mauvais point (x_k, t_k), tels que $Q_k = R(x_k, t_k) \geqslant r_k^{-2} \to \infty$. L'idée est de faire converger une suite de zooms sur les mauvais points vers une κ-solution - une contradiction pour k assez grand. La grande difficulté est que les zooms ne sont plus de courbure bornée. La preuve compte quatre étapes. Une première astuce consiste à prendre d'autres mauvais points, "presque maximaux" parmi les mauvais points. Grossièrement, disons que tout point dans le passé du point mauvais ayant une courbure double doit être joli. Dans la deuxième étape, on montre qu'au temps $t = 0$ les zooms sont de courbure bornée sur chaque boule centrée sur les mauvais points. On peut donc passer à la limite riemannienne sur la tranche $t = 0$ des flots. Dans la troisième étape, on montre que la courbure est globalement bornée sur la limite. Enfin on étend la convergence en une convergence de flots pour les temps négatifs. En un certain sens, la preuve est une récurrence sur l'échelle de courbure. On va tricher un peu pour simplifier certains arguments.

1ère étape. Il existe dans chaque flot un mauvais point (x'_k, t'_k) tel que tout point (x, t) vérifiant $t \leqslant t'_k$ et $R(x, t) \geqslant 2R(x'_k, t'_k)$ est joli.

Pour montrer cette assertion on raisonne sur chaque flot comme suit. Si le point (x_k, t_k) convient, on le prend sinon il existe dans son passé un mauvais point (x, t) tel que $R(x, t) \geqslant 2R(x_k, t_k)$. Si (x, t) convient, on le prend sinon il existe dans son passé un mauvais point (x', t') tel que $R(x', t') \geqslant 2R(x, t)$. On itère jusqu'à trouver un mauvais point qui convienne. Comme la courbure double à chaque coup et $M_k \times [0, t_k]$ est compact, cela arrive forcément en un nombre fini d'itérations. Éventuellement, le procédé s'arrête car il n'y a plus de point de courbure double.

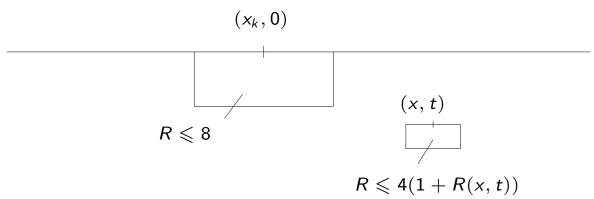
On peut raffiner un peu cet argument pour se ramener à $t'_k \geqslant 1/2$. En effet il importe que le passé du mauvais point soit assez long pour que les zooms convergent vers une solution ayant un passé infini.

Sans perte, on peut supposer que (x_k, t_k) est le mauvais point satisfaisant à l'assertion ci-dessus avec $t_k \geqslant 1/2$. Le but est de montrer qu'une suite de dilatations paraboliques en (x_k, t_k) de facteur $R(x_k, t_k)$ converge vers une κ-solution. Pour ne pas alourdir les notations, on note $g_k(t)$ la dilatation parabolique telle que

$R(x_k, 0) = 1$. Maintenant on travaille sur les espaces $M_k \times [-Q_k/2, 0]$ où tous les points de courbure scalaire $\geqslant 2$ sont jolis. C'est « l'hypothèse de récurrence » sur l'échelle de courbure. Ces points ont des voisinages comme en (4.3) et la courbure scalaire y vérifie les estimées (14).

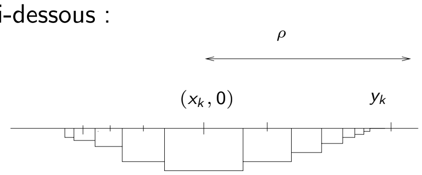
2ème étape. pour tout $R > 0$, les courbures scalaires sont uniformément bornées sur les boules $B(x_k, 0, R)$.

On commence par montrer que tout point a un voisinage parabolique de taille définie par la courbure du point sur lequel les courbures sont contrôlées. Précisément, il existe une constante $c = c(\eta)$ telle *si* $\bar{Q} = 1 + R(x, t)$ *alors la courbure scalaire est majorée par* $4\bar{Q}$ *sur le voisinage parabolique* $P(x, t, \frac{c}{\sqrt{\bar{Q}}}, \frac{c}{\bar{Q}})$.

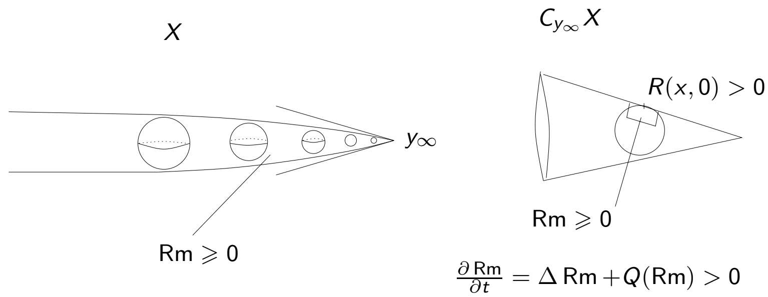


En effet, dès que la courbure scalaire est supérieure à 2, les estimées (14) s'appliquent. Il suffit alors de les intégrer sur les segments horizontaux ou verticaux du voisinage parabolique.

En particulier la courbure scalaire est uniformément bornée sur les boules $B(x_k, 0, \frac{c}{\sqrt{2}})$. Considérons alors le supremum ρ des rayons $r > 0$ tels que la courbure scalaire soit uniformément bornée sur les boules $B(x_k, 0, r)$. Pour montrer que $\rho = \infty$, on raisonne encore par contradiction. L'hypothèse de κ-non effondrement des métriques g_k et le théorème de compacité 3.2 permettent d'extraire une suite convergente de boules $(B(x_k, 0, \rho), g_k(0), x_k)$ vers une variété (non complète) $(B_{g_\infty}(x, \rho), g_\infty, x)$ de courbure positive ou nulle (en passant à la limite dans le pincement de Hamilton-Ivey). De plus, les boules $B_{g_\infty}(x, r)$ sont la tranche de temps $t = 0$ d'un bout de flot si $r < \rho$. Heuristiquement, on peut passer à la limite sur les boîtes ci-dessous :



On peut compléter la boule $B_{g_\infty}(x, \rho)$ en un espace métrique complet X de courbure positive ou nulle au sens d'Alexandrov. Ceci signifie que les triangles géodésiques de X sont plus épais que les triangles de même longueur du plan euclidien. Par hypothèse il existe une suite de points y_k dans $B(x_k, 0, \rho)$ telle que $R(y_k, 0) \to \infty$ et $y_k \to y_\infty \in X$. On peut trouver un voisinage de y_∞ formé d'une réunion infinie d'ε-cou de rayons sphériques tendant vers 0. En utilisant des estimées plus précises on peut montrer alors que le cône tangent $C_{y_\infty}X$ en y_∞ de X (l'analogue du plan tangent, obtenu en dilatant à l'infini l'espace en y_∞) est un cône métrique non plat. De plus en dehors du sommet, chaque point x est dans la tranche de temps $t = 0$ d'un bout de flot de Ricci de courbure positive ou nulle vivant sur $[-\delta_x, 0]$.



Un calcul montre que $\frac{\partial \mathrm{Rm}}{\partial t} > 0$ en ces points $(x, 0)$ du cône alors que l'opérateur de courbure admet au moins une direction nulle (en considérant la direction radiale). Cela contredit la positivité de l'opérateur sur $[-\delta_x, 0]$.

Pour les deux dernières étapes on va aller plus vite. On note (M, g, x) la limite des $(M_k, g_k(0), x_k)$. On sait que g est d'opérateur de courbure positive ou nulle.

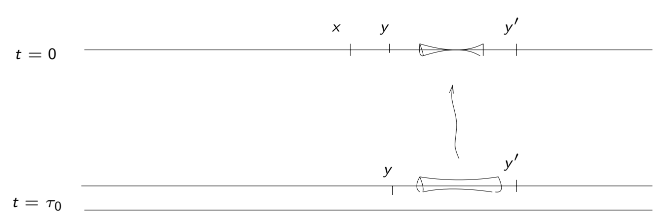
3ème étape : L'opérateur de courbure est borné sur M.

On suppose la variété non compacte et on raisonne encore par contradiction. On trouve dans la variété un cylindre sphérique $\mathbb{S}^2 \times [0, \infty)$, le rayon de $\mathbb{S}^2$ tendant vers 0 vers le bout. La théorie des variétés complètes de courbure positive ou nulle dit que c'est impossible. En effet, une telle variété doit « s'ouvrir » à l'infini.

Les résultats précédents impliquent une borne uniforme de la courbure sur $M_k \times [\tau, 0]$ pour un $\tau < 0$. On peut donc passer à la limite pour obtenir un flot sur $M \times [\tau, 0]$. On appelle τ_0 l'infimum des tels τ et on se dirige vers la

4ème étape : $\tau_0 = -\infty$.

Sans surprise, on raisonne par contradiction. On commence par montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que l'écart des distances entre le temps t et le temps $t = 0$ est contrôlé par $|d_{g(t)} - d_{g(0)}| \leqslant C$ (on contrôle la courbure par une inégalité de Harnack et on intègre la variation des métriques). Dans le cas où M est compact cela montre que le diamètre de $g(t)$ reste borné et on procède comme à l'étape 2. Dans le cas non compact, on peut trouver dans $(M, g(t))$ des portions cylindriques $\mathbb{S}^2 \times I$ séparant deux points éloignés y, y' et dont le rayon des sphères $\mathbb{S}^2$ tend vers 0 quand $t \to \tau_0$.



Comme les distances décroissent avec le flot (la courbure est positive donc $\frac{\partial g}{\partial t} \leqslant 0$) cela implique la nullité du rayon d'injectivité de $(M, g(0))$ - une contradiction.

Au final on obtient la convergence de $(M_k \times [-Q_k/2, 0], g_k(t), (x_k, 0))$ vers une κ-solution. Cela implique que x_k est joli pour k assez grand - une contradiction. $\square$

Ceci termine cette longue partie sur l'étude des singularités. En résumé, on sait calculer une échelle de courbure r_0^{-2} au delà de laquelle la géométrie du flot de Ricci est canonique. On va exploiter ces informations pour opérer des chirurgies.

5. Le flot avec chirurgie

Dans ce chapitre on définit le flot avec chirurgie sur une variété compacte de dimension 3. L'idée est de poursuivre le flot, lorsqu'il rencontre une singularité, en découpant la variété aux endroits où la courbure explose. Perelman reprend une technique élaborée par Hamilton sur des variétés de dimension 4 (voir [18]). Cependant il opère les chirurgies exactement au temps d'explosion de la courbure alors qu'Hamilton les faisait un peu avant. On va donc commencer par décrire géométriquement le flot de Ricci lors d'une explosion de la courbure.

On se donne un flot de Ricci $(M^3, g(t))$ où M est compacte et $g(t)$ est définie sur un intervalle maximal $[0, T)$ avec $T < \infty$. Par hypothèse, il existe donc un point x dans M tel que $R(x,t) \to \infty$ quand t s'approche de T. On suppose que la métrique $g(0)$ a été convenablement normalisée pour que le théorème des voisinages canoniques s'applique. On se donne donc $\varepsilon > 0$, une constante $\kappa > 0$ de non effondrement par le théorème 4.1 et une échelle $r_0 > 0$ au delà de laquelle on a des voisinages canoniques par le théorème 4.4.

Le flot de Ricci lors d'une explosion de la courbure

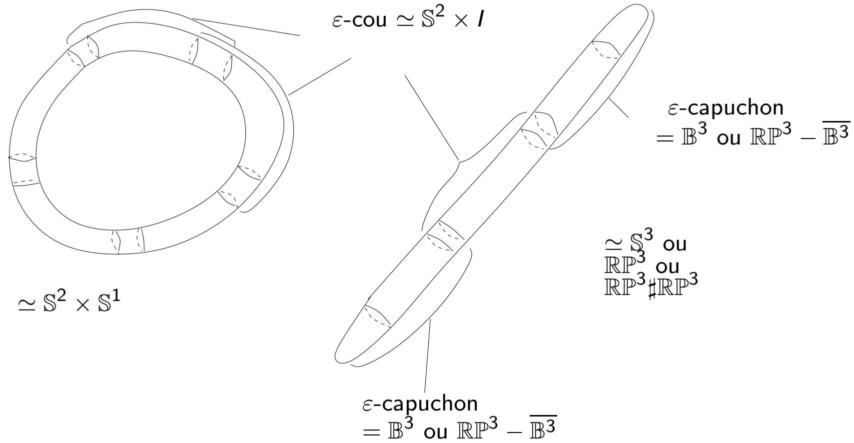
On veut comprendre la structure de l'ensemble des points de M où la courbure scalaire reste bornée, c'est-à-dire de l'ensemble

$$\Omega = \{x \in M,\ R(x,\cdot) \leqslant c(x)\}.$$

Par hypothèse, Ω est strictement plus petit que M. On commence par traiter la situation la plus simple, quand Ω est vide, c'est-à-dire quand la courbure scalaire explose partout. On dit alors que le flot s'éteint. Cette situation ressemble à celle du théorème 2.2 sauf qu'on n'a pas d'informations sur le signe de la courbure de Ricci.

1er cas : Ω est vide, le flot s'éteint

Dans ce cas, M est difféomorphe à $\mathbb{S}^3 \backslash \Gamma$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ ou une somme connexe de deux $\mathbb{RP}^3$. En effet si la courbure explose partout, on peut trouver un temps t_0 proche de T tel que $R(x, t_0) \geqslant r_0^{-2}$ pour tout point $x \in M$. Alors $(M, g(t_0))$ est recouverte par des voisinages canoniques satisfaisant aux conclusions de 4.3. Si l'un de ces voisinages est une variété compacte de courbure sectionnelle strictement positive, on peut conclure que la variété M est difféomorphe à une variété sphérique par 2.2. Sinon on peut recouvrir $(M, g(t_0))$ par un nombre fini de ε-cous et de ε-capuchons. S'il n'y a que des ε-cous on les met bout-à-bout jusqu'à ce qu'ils se referment en un $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Sinon un nombre fini de ε-cous mis bout à bout doivent être bouchés par deux ε-capuchons. (voir dessin page suivante)



On trouve donc que M est difféomorphe à $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{RP}^3$ ou $\mathbb{RP}^3 \# \mathbb{RP}^3$.

Remarque 5.1. *Dans ce cas, si M est simplement connexe on peut conclure que M est difféomorphe à S^3.*

2ème cas : Ω n'est pas vide

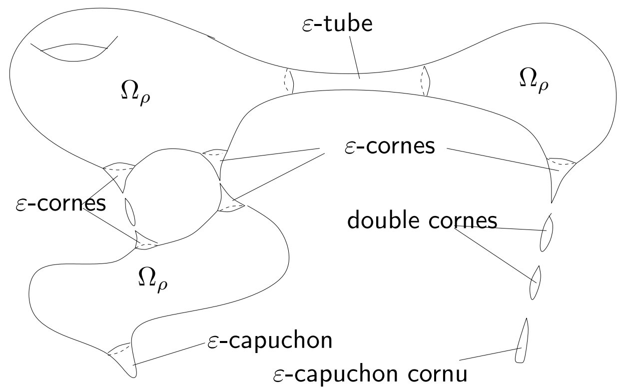
Les contrôles sur les oscillations de la courbure (14) permettent de montrer que Ω est un ouvert sur lequel $g(t)$ converge vers une métrique régulière que nous appellerons $g(T)$. En particulier, la conclusion du théorème des voisinages canoniques est vraie sur $(\Omega, g(T))$ (en bougeant un peu les paramètres). Pour comprendre la structure de l'ensemble Ω, on se donne une échelle $\rho < r_0$ et on définit l'ensemble

$$\Omega_\rho = \{x \in M\,;\ R(x,T) \leqslant \rho^{-2}\}.$$

Ce sont les points où la courbure n'est pas trop grande mais au delà de laquelle on a des voisinages canoniques. Supposons que Ω_ρ soit non vide. Alors $\Omega \setminus \Omega_\rho$ est recouvert par des ε-cous et des ε-capuchons. Pour décrire les composantes connexes de $\Omega \setminus \Omega_\rho$, Perelman introduit la terminologie suivante. Il appelle *ε-tube* (resp. *ε-corne*, resp. *double ε-corne*), une métrique sur $\mathbb{S}^2 \times I$ telle que chaque point est contenu dans un ε-cou, et telle que la courbure scalaire reste bornée aux deux bouts (resp. reste bornée d'un côté et tend vers l'infini de l'autre, resp. tend vers l'infini aux deux bouts). Il appelle *ε-capuchon cornu* une métrique sur $\mathbb{B}^3$ ou $\mathbb{RP}^3 - \overline{\mathbb{B}^3}$ telle qu'en dehors d'un compact, tout point soit dans un ε-cou, et telle que la courbure scalaire tende vers l'infini sur le bout. En examinant les différentes combinaisons possibles d'ε-cous et d'ε-capuchons, on peut voir que tout point $x \in \Omega \setminus \Omega_\rho$ est dans un des ensembles suivants :

a) un ε-tube dont les bords sont dans Ω_ρ, ou
b) une ε-corne dont un bord est dans Ω_ρ, ou
c) un ε-capuchon dont le bord est dans Ω_ρ, ou
d) ε-capuchon cornu, ou
e) une double ε-corne.

Les deux dernières composantes sont celles disjointes de Ω_ρ. Voici un dessin :



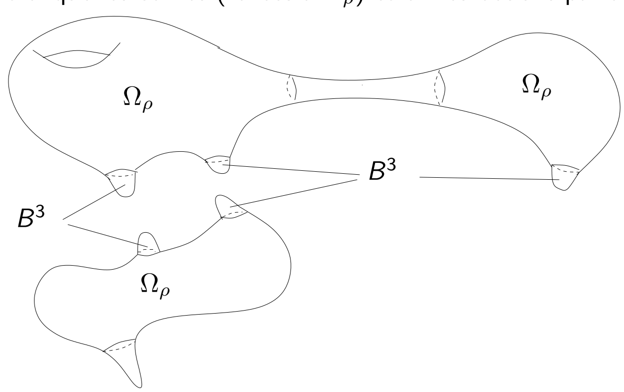
L'ensemble Ω peut être très compliqué. En particulier, il peut avoir une infinité de composantes connexes du type doubles cornes. Par contre, il n'y a qu'un nombre fini de composantes intersectant Ω_ρ.

Remarque 5.2. *Si Ω_ρ est vide, comme dans le cas où Ω est vide, on recouvre $(M, g(t))$ par des voisinages canoniques et on montre que M est difféomorphe à $\mathbb{S}^3 \backslash \Gamma$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ ou $\mathbb{RP}^3 \# \mathbb{RP}^3$. On dit aussi que le flot s'éteint, même si la courbure n'explose pas partout. Cela sera justifié par la définition de la chirurgie.*

La chirurgie

Si Ω n'est pas vide, on opère une chirurgie topologique de la manière suivante :

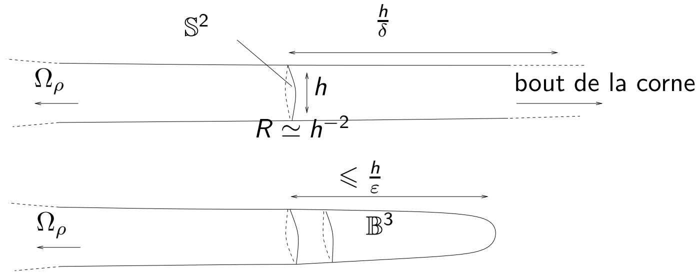
1) on jette les composantes connexes de Ω n'intersectant pas Ω_ρ,
2) on tronque les cornes (reliées à Ω_ρ) et on les bouche par des boules $\mathbb{B}^3$.



On obtient ainsi une nouvelle variété différentielle, éventuellement non connexe mais avec un nombre fini de composantes, que nous noterons M_1. En tout temps $t < T$ proche de T, $(M \backslash \Omega(\rho), g(t))$ est recouverte par des voisinages canoniques. On peut donc déterminer la topologie de la partie de la variété qui est jetée. On vérifie ainsi que M est la somme connexe des différentes composantes connexes de M_1 et d'un nombre fini de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ et de projectifs $\mathbb{RP}^3$ (éventuellement). Dans le dessin ci-dessus, on perd dans la chirurgie un $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, et un $\mathbb{RP}^3$ si le capuchon cornu est $\mathbb{RP}^3 - \overline{\mathbb{B}^3}$.

Remarque 5.3. *Si l'ensemble Ω_ρ est vide, la procédure ci-dessus fait sens. Dans ce cas on jette tout et M_1 est vide d'où la terminologie extinction.*

Cette chirurgie peut se définir de manière métrique, c'est-à-dire en contrôlant précisément les recollements effectués. Pour cela, on choisit de tronquer les ε-cornes au milieu d'un δ-cou, pour un paramètre $0 < \delta << \varepsilon$. Perelman montre en effet que pour tout $0 < \delta < \varepsilon$, il existe un nombre $h(\delta, \rho, \varepsilon) > 0$ tel que dans toute ε-corne, tout point de courbure scalaire supérieure à h^{-2} est dans un δ-cou. La métrique du δ-cou dilatée par h^{-2} est δ-proche de la métrique produit sur $\mathbb{S}^2 \times (-\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta})$. On fait la chirurgie sur la sphère centrale de courbure approximative h^{-2} et on recolle une boule $\mathbb{B}^3$ avec une métrique standard de type ε-capuchon. On peut interpoler les deux métriques sur un cylindre $\mathbb{S}^2 \times [0, \lambda h]$, où λ est une constante, en restant proche de la métrique canonique, la longueur du ε-capuchon étant inférieure à $\frac{h}{\varepsilon}$. Un point important est qu'on peut faire cette opération en préservant le pincement de Hamilton-Ivey $\mathrm{Rm} \geqslant -\Phi(R)$, le κ-non effondrement et l'échelle r_0 des voisinages canoniques.



Observons que le volume perdu lors de la chirurgie est strictement positif de l'ordre de $\frac{h^3}{\delta} - \frac{h^3}{\varepsilon}$. Cette opération est ce que Perelman appelle une chirurgie avec paramètre (r_0, δ) (le paramètre ρ est fixé en posant $\rho = \delta \cdot r_0$).

La nouvelle variété compacte (éventuellement non connexe) M_1 étant munie d'une métrique riemannienne $g_1(T)$, on peut relancer le flot de Ricci simultanément sur ses différentes composantes. La question qui se pose est de savoir si on peut itérer la procédure assez longtemps pour décomposer complètement M et la déterminer. Mentionnons qu'on peut contrôler la croissance du volume total de la variété (par le minimum de la courbure scalaire), donc la perte de volume lors de chaque chirurgie montre que sur chaque intervalle de temps fini, il n'y aura qu'un nombre fini de chirurgies avec paramètre (r_0, δ).

Flot avec chirurgie

Si la conclusion du théorème des voisinages canoniques survit sur le flot après la chirurgie, on peut espérer itérer cette procédure ci-dessus indéfiniment. C'est loin d'être gagné car on ne peut plus normaliser la métrique g_1. Un tour de force de [27] est de réaliser cela en faisant dépendre les paramètres r_0 et δ du temps.

Définition 5.1. *Soient $r(t)$, $\delta(t)$ des fonctions strictement positives sur $[0, +\infty)$. On appelle flot avec chirurgie la donnée*

- d'une suite $(t_k)_{0 \leqslant k \leqslant N \leqslant \infty}$ de $[0, +\infty)$ strictement croissante discrète et pour chaque entier k,

- d'une variété compacte M_k, pouvant être non connexe,

- d'un flot de Ricci $g_k(t)$ sur $M_k \times [t_k, t_{k+1})$, singulier en t_{k+1}, satisfaisant à l'hypothèse des voisinages canoniques à l'échelle $r(t)$,

tels que $(M_{k+1}, g_{k+1}(t_{k+1}))$ *est obtenu de* $(M_k, g_k(t))$ *par une chirurgie de paramètres* (r, δ) *au temps* t_{k+1}.

En particulier, il n'y a qu'un nombre fini de chirurgies sur chaque intervalle de temps fini. Si on appelle M_k^j, $j \in \{1, \cdots, N(k)\}$, les composantes connexes de M_k, on peut voir, en tenant compte des composantes qui s'éteignent, que $M = M_0$ est difféomorphe à la somme connexe des M_k^j et d'un nombre fini de tores sphériques $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ et de quotients de $\mathbb{S}^3$ par des groupes finis d'isométries.

Remarque 5.4. *Il peut arriver qu'on obtienne une variété* M_k *vide, c'est-à-dire que le flot s'éteint. Dans ce cas* $t_{k+1} = +\infty$ *et par abus de langage on dit que le flot de Ricci continue à exister sur* $\varnothing \times [t_k, \infty)$. *La variété* M *est alors difféomorphe à une somme connexe d'un nombre fini de* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ *et de quotients de* $\mathbb{S}^3$ *par des groupes finis d'isométries.*

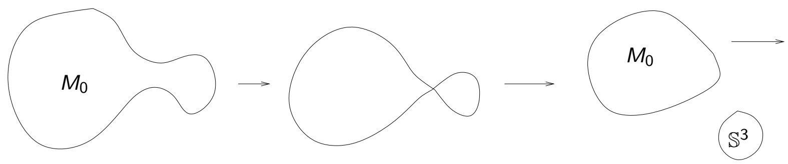
Il nous reste à énoncer le résultat fondamental de [27]. On dit qu'une métrique g est normalisée si les courbures sectionnelles sont majorées par 1 en valeur absolue et si le volume de toute boule unité est au moins la moitié du volume euclidien. Alors, en édulcorant un peu l'énoncé, on a le

Théorème 5.1 ([27])**.** *Soit* $\varepsilon > 0$. *Il existe des fonctions décroissantes* $r(t) > 0$, $\delta(t) > 0$ *définies sur* $[0, \infty)$ *avec la propriété suivante. Pour toute donnée initiale* (M, g_0) *normalisée, le flot avec chirurgie avec paramètres* $(r(t), \delta(t))$ *est défini sur* $[0, \infty)$.

La preuve de ce résultat se fait par récurrence sur des intervalles successifs $[2^i\varepsilon, 2^{i+1}\varepsilon]$. L'étape 0 est réalisée à l'aide du théorème des voisinages canoniques. L'itération de la récurrence se montre par contradiction, comme dans la preuve du théorème des voisinages canoniques. La différence est qu'il peut y avoir des chirurgies dans le passé. De plus, il faut au préalable montrer le non effondrement sur l'intervalle $[2^{i+1}\varepsilon, t)$ pour une constante $\kappa_{i+1} > 0$ dépendant seulement des constantes précédentes. Pour cela Perelman utilise une version locale de la fonctionnelle $\mathcal{F}$ vue dans la section 4. Il va sans dire que la mise en œuvre de ces arguments demande beaucoup d'habileté et d'ingéniosité.

6. Preuve de la conjecture de Poincaré

On est maintenant capable, pour toute donnée initiale normalisée, de poursuivre le flot avec chirurgie indéfiniment. De plus, on contrôle totalement les manipulations topologiques opérées lors des chirurgies. D'après la remarque 5.4, pour prouver la conjecture de Poincaré, il suffit de montrer que si la donnée initiale est simplement connexe, le flot avec chirurgie s'éteint en temps fini. On peut simplifier les choses en supposant M irréductible. *On dit qu'une variété* M *de dimension* 3 *est irréductible si toute sphère plongée* $S^2 \subset M$ *borde une boule* B^3. Cela implique que toute décomposition de M en somme connexe est triviale : si $M = M_1 \# M_2$, l'une des variété est difféomorphe à M et l'autre à $\mathbb{S}^3$. Maintenant le théorème de Kneser affirme que toute variété compacte de dimension 3 admet une unique décomposition en somme connexe d'un nombre fini de variétés irréductibles et de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Si M est simplement connexe elle se décompose donc en un nombre fini de variétés simplement connexes irréductibles. Il suffit de montrer que de telles variétés sont difféomorphes à $\mathbb{S}^3$. On va donc supposer notre variété initiale simplement connexe et irréductible. On la note M_0, on la munit d'une métrique quelconque normalisée et on lance le flot avec chirurgie. Maintenant M_0 survit à chaque chirurgie à difféomorphisme près (tant que le flot ne s'éteint pas) et on peut considérer qu'elle est munie d'un flot de Ricci lisse par morceaux.



Il suffit de prouver que le flot s'éteint en temps fini sur cette composante. C'est ce que nous détaillons maintenant.

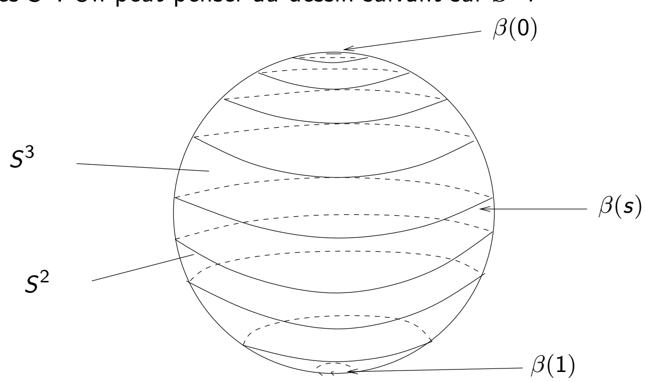
Extinction du flot en temps fini

Nous présentons l'argument de T. Colding et W. Minocozzi [5], plus simple techniquement que celui de Perelman [28]. Il consiste à montrer que la largeur de $(M_0, g(t))$ - une quantité géométrique strictement positive calculée à l'aide d'un balayage de M_0 par des sphères S^2 — décroît assez vite le long du flot de Ricci pour atteindre zéro en temps fini. Ceci repose sur le fait que l'espace des applications de S^2 dans M_0 n'est pas simplement connexe.

On considère l'ensemble des applications de S^2 dans M_0, continues et d'énergie bornée, $H = C^0 \cap L_1^2(S^2, M_0)$. L'énergie $E(f)$ d'une application $f : S^2 \to M_0$ est définie par

$$E(f) = \int_{S^2} |df|_g^2 dV_{S^2}.$$

On note $i(M_0) \subset H$ l'ensemble des applications constantes qui envoient la sphère S^2 sur un point de M_0. Des arguments classiques de topologie montrent que le groupe fondamental $\Pi_1(H, i(M_0))$ est non trivial. Il existe donc un chemin d'applications de S^2 dans M_0, $\beta : [0,1] \to H$, d'extrémités des applications constantes et homotopiquement non trivial. En quelque sorte, on a un balayage de la variété par des sphères S^2. On peut penser au dessin suivant sur $\mathbb{S}^3$:



La classe $[\beta]$ étant fixée, on définit la largeur de (M_0, g) en minimisant parmi les représentants γ de $[\beta]$ l'énergie maximale des sphères S^2 le long de $\gamma(s)$:

$$W([\beta], g) = \inf_{\gamma \in [\beta]} \sup_{s \in [0,1]} E(\gamma(s)).$$

On a alors le

Théorème 6.1 (J. Jost [20]). *$W([\beta], g) > 0$.*

Par ailleurs T. Colding et W. Minicozzi montrent dans [5] la

Proposition 6.1. *Si $g(t)$ est un flot de Ricci lisse sur M_0, alors*

$$\frac{dW([\beta], g(t))}{dt} \leqslant -4\pi + \frac{3}{4(t+C)} W([\beta], g(t)).$$

où C dépend de $R_{min}(0)$. Cette inégalité implique que la largeur de $(M_0, g(t))$ atteint zéro en temps fini si le flot est défini assez longtemps.

Revenons à notre flot lisse par morceaux $(M_0, g(t))$. L'inégalité ci-dessus s'applique sur chaque intervalle lisse du flot. La constante C change à chaque singularité mais en s'améliorant car $R_{min}(t)$ croît. Pour conclure, il suffit de montrer que la largeur de $(M_0, g(t))$ ne saute pas à chaque singularité, et en fait elle décroît. C'est réglé par le

Lemme 6.1. *Soit T un temps singulier pour le flot $g(t)$ sur M_0. Alors il existe pour tout $t < T$ proche de T un difféomorphisme $(1 + \xi(t))$-lipschitz entre $(M_0, g(t))$ et $(M_0, g(T))$ avec $\xi(t) \to 0$ quand $t \to T$. Par conséquent,*

$$\lim_{t \to T_-} W([\beta], g(t)) \geqslant W([\beta], g(T)).$$

En effet, considérons le dessin page 31 et revenons un tout petit peu dans le passé à $t < T$. Sur l'ensemble Ω_ρ, sur la moitié de la corne touchant Ω_ρ et sur le δ-cou la métrique a peu varié. Par contre le bout de la corne est remplacé par une boule $\mathbb{B}^3$ (puisque la chirurgie doit faire apparaître une sphère S^3). On réalise le difféomorphisme en prenant l'identité sur la partie à gauche de la sphère centrale du δ-cou et en envoyant la partie droite sur le ε-capuchon. L'application est $(1+\xi(t))$-lipschitz sur la partie gauche et une partie du δ-cou, et très contractante sur le complémentaire. Maintenant cette application décroît l'énergie, à un facteur multiplicatif $(1 + \xi(t))^2$ près :

$$W([\beta], g(T)) \leqslant (1 + \xi(t))^2 W([\beta], g(t)).$$

7. Références

[1] M. Anderson, *Géométrisation des variétés de dimension 3 via le flot de Ricci*, La gazette des mathématiciens, n° 103, SMF (janvier 2005) [original : Notices 51, n° 2, AMS.]

[2] M.Berger, *A panoramic view of riemannian geometry*, Springer, 2003.

[3] G. Besson, *Une nouvelle approche de la topologie des variétés de dimension 3, d'après R. Hamilton et G. Perelman* Séminaire Bourbaki, 57ème année, 2004-2005, n° 947.

[4] J. Cheeger, *Finiteness theorems for riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 92 (1970), 61-74.

[5] B. Chow and D. Knopf, *The Ricci flow : an introduction*, Math. Surv. and Monographs, vol. 110, AMS (2004)

[6] T.H. Colding, W.P. Minicozzi, *Estimates fot the extinction time for the Ricci flow on certains three-manifolds and a question of Perelman*, `http//arXiv.org/abs/math.DG/0307245`

[7] B. Chow et H.-D. Cao, *Recent developments on the Ricci flow*, `http://arxiv.org/ps/math.DG/9811123`

[8] D. DeTurck, *Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors, improved version*, Collected papers on Ricci flow, ed. H.-D. Cao, B. Chow, S ;-C. Chu and S.-T. Yau, Int. Press, Sommerville, MA, 2003

[9] J. Eells and J.H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 86 (1964), 109-160.
[10] S. Gallot, D. Hulin et J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer (1990).
[11] M. Gromov, J. Lafontaine et P. Pansu, Structures métriques pour les variétés riemanniennes, CEDIC (1981)
[12] R.E. Greene, *A Genealogy of Noncompact Manifolds of Nonnegative Curvature : History and Logic* Comparison Geometry MSRI Publications Volume 30, 1997.
[13] R. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. 17 (1982), n° 2, 255-306.
[14] R. Hamilton, *Four-manifolds with positive curvature operator*, J. Diff. Geom 24, p153-179 (1986)
[15] R. Hamilton, *The Harnack estimate for the Ricci flow*, J. Diff. Geom 37, 225-243 (1993)
[16] R. Hamilton, *The formations of the singularities of the Ricci flow*, In Surveys in Differential Geometry, volume II, 7-136, International press, Cambridge MA,1995
[17] R. Hamilton, *A compactness property for solutions of the Ricci flow*, Amer. Jour. Math. 117 (1995), 545-572.
[18] R. Hamilton, *Four-manifolds with positive isotropic curvature*, Commu. Annal. Geom. 5 (1997) 1-92.
[19] T. Ivey, *Ricci solitons on compact three-manifolds.* Diff. Geom. Appl., 301-307, (1993).
[20] J. Jost, *Two-dimensional geometric variational problems*, J. Wiley and Sons, Chichstor, N.Y. 1991
[21] B. Kleiner et J. Lott *Notes on Perelman's papers*, `http://www.math.lsa.umich.edu/research/ricciflow/posting123004.ps`
[22] S. Maillot, *Flot de Ricci et Géométrisation des variétés de dimension 3. (D'après R. Hamilton et G. Perelman*, `http://www-irma.u-strasbg.fr/~maillot/ricci2.pdf`
[23] J. Milnor, *Towards the Poincaré conjecture and the clasiffication of 3-manifolds*, Notices of the AMS, vol 50, n° 10, nov 2003, Trad. française in *Gazette des Mathématiciens* 99, SMF, janvier 2004.
[24] J. Morgan, *Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds*, Bulletin of the AMS, vol 42, n° 1, 57-78
[25] H. Poincaré, *Analysis Situs, Cinquième complément à l'analysis Situs*, Rend. Circ. mat. Palerma 18 (1904) 45-110.
[26] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications.* `ArXiv : math.DG/0211159`.
[27] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds.* `ArXiv : math.DG/0303109`.
[28] G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds.* `ArXiv : math.DG/0307245`

Elina Löwensohn et Jean-François Peyret
lors d'une répétition au festival d'Avignon 2005

MATHÉMATIQUES ET THÉÂTRE

Le cas de Sophie K. (de Jean-François Peyret)

Michèle Audin

Un peu de mathématiques, pour commencer. Le mouvement d'un solide avec un point fixe dans un champ de pesanteur constant est *intégrable*, ici au sens où les solutions des équations différentielles qui le décrivent sont des fonctions méromorphes du temps, dans trois cas et trois cas seulement :

– le cas d'Euler, celui où le centre de gravité du solide est le point fixe ;

– le cas de Lagrange, celui où la droite joignant le centre de gravité au point fixe est un axe de révolution du solide — comme c'est le cas pour une toupie, si l'on admet que le point de contact de celle-ci avec le sol est fixe, c'est pourquoi on appelle souvent ces solides des « toupies » ;

– le cas de Kowalevskaya, où il y a aussi un axe de révolution, mais cette fois orthogonal à la droite joignant le point fixe au centre de gravité et où, de plus, le solide a une forme particulière, le $A = B = 2C$ dans la matrice d'inertie.

... Ce que nous savons depuis 1888, date où une jeune femme russe se voit attribuer par l'Académie des Sciences le prix Bordin pour un remarquable mémoire (devenu l'article [1]) dans lequel elle démontre l'assertion sur les trois cas ci-dessus et elle résout effectivement le système différentiel dans le nouveau cas qui porte désormais son nom, grâce à une remarque sur laquelle je reviendrai plus bas et à une connaissance approfondie des fonctions abéliennes et de leurs propriétés, ici sur une courbe de genre 2.

Le cas de Sophie K.

Le « cas de Sophie K » est donc une sorte de gyroscope, mais c'est aussi le cas d'une personnalité aux facettes multiples, mathématicienne, révolutionnaire, romancière[1] et, pour ceux qui préfèrent les arguments d'autorité(s), amie de Dostoïevski, première femme docteur en mathématiques, épouse du traducteur de Darwin en russe, élève de Weierstraß, j'en passe, et tout ça vite, vite, trop vite, existence ardente et fulgurante — Sophie K. meurt à quarante ans, d'une pneumonie. Oui, c'était le XIXᵉ siècle, et Sophie était une mathématicienne aux prises avec son siècle, avec les maux de son siècle, mysoginie et pneumonie notamment. Encore aux prises avec les nôtres (de siècles) où, si l'on meurt moins de pneumonie, sa brillante ! personnalité est plutôt méconnue, dans le monde

[1] auteur notamment du roman [2], qui n'est sans doute pas ce qu'elle a écrit de plus beau, mais qui est le moyen par lequel Jean-François Peyret l'a rencontrée...

même qui devrait être capable de mesurer la qualité de son apport à la science. J'y reviendrai aussi.

« Le cas de Sophie K. » est aussi, pour notre plus grande élévation scientifique et intellectuelle et donc aussi pour notre plus grand plaisir, un spectacle de Jean-François Peyret et Luc Steels, donné au Festival d'Avignon (dans le cadre somptueux de la Chartreuse de Villeneuve-lez-Avignon) en juillet 2005 et que l'on pourra, à nouveau, voir au printemps 2006 au théâtre de Chaillot à Paris. Jean-François Peyret s'intéresse depuis de nombreuses années aux relations entre science et théâtre, il a déjà monté plusieurs spectacles sur ces thèmes, comme les *Variations Darwin*, l'année dernière à Chaillot et au Théâtre National de Strasbourg (voir l'article [3], une critique théâtrale parue dans *Nature*, ce n'est pas rien !).

Une petite expérience dans le labo Peyret

S'intéressant à notre Sophie, Jean-François Peyret ne pouvait pas ne pas contacter Jacqueline Détraz, qui a publié le livre [4]. C'est sur le conseil de celle-ci (elle me connaissait comme l'un(e) des auteurs d'un travail sur la toupie de Kowalevski [5]) qu'il m'a demandé de venir participer à une après-midi de répétitions, en mai 2005, à Chaillot, une expérience à laquelle Jacqueline s'était livrée, elle aussi. Il va sans dire que j'étais très impressionnée (ne fût-ce que d'entrer dans ce temple, euh, je veux dire, palais, par l'entrée des artistes) et que je m'attendais à assister à une répétition, c'est-à-dire à écouter des acteurs réciter un texte, puis à faire deux ou trois commentaires (allais-je savoir en produire d'assez intéressants ?).

Rien de tout cela, bien entendu. Plusieurs heures avec l'équipe autour d'une table, je réponds à des questions, vagues d'abord, comment je travaille, celle-là, je m'y attendais, ce que je fais, puis la toupie, j'en ai amené une mais il y en a déjà plusieurs dans la salle de répétitions, et vous en verrez dans le spectacle, comment elle tourne, je mentionne les tores (de Liouville, j'y reviendrai), je dessine donc des bouées, puis des surfaces de genre 2, c'est joli, tout le monde trouve ça joli, il y a là les trois actrices que vous verrez dans *le Cas de Sophie K.*, Olga Kokorina, Elina Löwensohn et Nathalie Richard (par ordre alphabétique), j'explique que, s'il s'est passé presque tout le XIX^{e} siècle entre l'étude de la toupie (le cas de Lagrange) et l'article de Sophie [1], c'est parce qu'il a fallu inventer l'analyse complexe entre temps, et, bon, l'analyse complexe, elle connaissait, elle, la meilleure élève de Weierstraß (voir l'article [6] de Mittag-Leffler), quelqu'un, sans doute Jacqueline, leur a déjà dit que, dans les nombres réels, si on rencontre un obstacle, on reste bloqué, alors que dans les nombres complexes, les obstacles, on peut les contourner, je confirme et je fais encore un dessin, mais là, c'est un peu plus compliqué... il n'y avait *pas* d'obstacle réel, les obstacles, on les a introduits en disant que le temps est complexe[2], les questions deviennent plus précises, Olga (que vous entendrez dans le spectacle « imaginer » la racine carrée de -1) ne sait pas ce qu'est un nombre complexe, c'est-à-dire, elle n'a jamais réalisé qu'elle ne connaissait pas de racine carrée à un nombre négatif, Elina, passionnée, me dit, pour nous, x, y, c'est abstrait, ça ne nous dit rien, et me demande ce que je vois quand j'entends parler de x et y, s'ils sont là tous les deux, je pense à une courbe

[2] En termes mathématiques et pour les lecteurs de la *Gazette*, l'énergie totale du système est une fonction *propre* ; le mouvement, qui a lieu à énergie constante, est donc confiné sur des hypersurfaces d'énergie qui sont *compactes* les flots sont complets, rien ne part à l'infini en réel !

(c'est elle qui me l'a rappelé, elle s'en souvient encore !), j'en passe, puisque cette gymnastique épuisante mais passionnante dure plusieurs heures.

Au bout desquelles, une pause, puis les trois sœurs[3] improvisent un peu, le spectacle en est à un stade très préliminaire, mais je suis déjà impressionnée par le découpage en plusieurs plans, toujours une des actrices filmée en vidéo dans le couloir et projetée en gros plan sur le fond du plateau. Re-pause, puis re-séance de questions, tout le monde participe et toute l'équipe semble vouloir comprendre un maximum de mathématiques, Marion Stoufflet (la dramaturge), Pierre Nouvel et Valère Terrier (les « vidéastes »), Agnès de Cayeux (la webmaîtresse), Claire Béjanin (la productrice), les solutions des équations, les surfaces de Riemann... Et quand c'est fini, on recommence en allant dîner.

Ce que vous en verrez dans le spectacle ? Eh bien, voyez-vous, tout se passe comme si vous, mathématicien, vous assistiez à un séminaire, vous discutiez avec la collègue qui a fait l'exposé, vous lisiez un article d'une troisième personne, vous travailliez sur votre sujet, vous pensiez à une idée que vous aviez eue en parlant avec une quatrième collègue plusieurs mois plus tôt, et puis comme si tout ça se mettait ensemble, et comme si vous démontriez un théorème, vous écriviez un article dans lequel tout ça a joué un rôle sans pour autant que les contenus en apparaissent effectivement. Vous verrez[4] un spectacle dans lequel tout ce dont je viens de faire la liste, mais qui n'est qu'une toute petite partie de ce que l'équipe de Jean-François Peyret a dû ingurgiter, a été mélangé, digéré, a réagi avec d'autres apports, d'autres textes. C'est ce que j'ai trouvé le plus intéressant, en voyant le spectacle « fini » (l'était-il ?), de découvrir cette façon d'emmagasiner de la connaissance, cette façon de travailler, intellectuellement si proche de la nôtre. Rien d'étonnant à ce que Jean-François Peyret s'intéresse à la science, il confectionne un théâtre de l'ère scientifique (et pas seulement, comme d'autres, à l'air scientifique) dans une salle de répétition qui fonctionne comme un laboratoire.

Le *Cas de Sophie K.* que vous verrez est une sorte de collage (les critiques de l'*Humanité* [7], puis du *Monde* [8], parlaient de cubisme, c'est vrai aussi), pas moins de trois actrices, Olga, Elina et Nathalie, magnifiques et déjà nommées, pour les éclats d'une telle personnalité, encore un acteur, Graham F. Valentine, commentateur flegmatique, et un époustoufflant musicien, Alexandros Markeas, qui improvise au piano en faisant tourner une toupie sur un écran vidéo, sans compter les deux vidéastes Pierre et Valère qui filment, sous vos yeux, ce que vous verrez quelques secondes plus tard, sans parler des caméras qui filment et que vous ne voyez pas ni de celles que vous ne voyez pas et qui filment ce que vous voyez, images dans différents plans (voilà le cubisme et les « nouvelles technologies » dont se réclame Jean-François Peyret) dans un dispositif scénique d'une grande beauté, collage de textes, les *Souvenirs d'enfance* de notre Sophie (voir [4]), ceux de Gosta (voir [6]) et de sa sœur Charlotte Mittag-Leffler (voir encore [4]), Poincaré prononcé par les images presque abstraites des bouches de nos trois sœurs, Dostoïevski (si Dieu n'existe pas, Kirilov est Dieu [9]), la biographie de Vera Zasoulitch (une authentique Vera nihiliste, plus crédible que celle de [2]), Lautréamont, un spectacle raffiné, riche, intelligent et exigeant, à la hauteur de son sujet.

---

[3] La référence semble pertinente ! À la suite d'une remarque entendue ce jour-là, je découvre que, au premier acte des *Trois sœurs*, on offre une toupie à Irina, dont c'est la fête.

[4] À Paris, au théâtre national de Chaillot, salle Gémier, du 26 avril au 27 mai 2006.

Retour sur la toupie de Sophie

J'ai annoncé plusieurs fois que j'allais revenir à tel ou tel point de mathématiques. Pour éviter les malentendus, je précise que, de l'œuvre mathématique de Kowalevskaya, je ne connais que l'article sur le solide [1], que ce n'est *pas* parce que la personnalité de son auteur m'intéressait que j'ai travaillé sur ce sujet mais à l'inverse[5] parce que je travaillais sur les systèmes intégrables que j'ai dû lire cet article (que j'ai trouvé si beau que j'ai eu envie d'en parler), que Kowalevskaya a fait bien d'autres choses (Cauchy-Kowalevskaya, les anneaux de Saturne,...), pour lesquelles je renvoie à sa bibliographie dans [4].

Revenons donc à la toupie de Sophie. J'ai commencé par mettre le mot « intégrable » en italiques, avant de le définir comme « à solutions méromorphes[6] ». C'est en effet ainsi que Kowalevskaya a démontré qu'il n'existe que trois cas « intégrables ».

J'ai ensuite promis de revenir sur une certaine « remarque » de notre auteur. Eh bien, voilà, elle a trouvé ce nouveau cas en imposant que les solutions n'aient pas de singularités pires que des pôles (ce qu'on appelle aujourd'hui, assez injustement, la « propriété de Painlevé »)... mais elle a aussi remarqué que, dans ce cas[7] (comme dans ceux d'Euler et de Lagrange et comme par hasard), il y a une quantité conservée, une intégrale première, ce qui fait que le système est intégrable « au sens de Liouville » (voir les tores du même Liouville mentionnés à propos de la toupie de Lagrange). J'attire l'attention des lecteurs de la *Gazette* sur le fait que les relations entre ces deux notions d'intégrabilité, relation soulevée par [1], n'est toujours pas complètement éclaircie (voir [12] et, plus modestement, [13]).

Il est vrai que l'on s'est arrêté assez vite de s'intéresser aux systèmes intégrables, après que Poincaré ait démontré qu'il y en avait fort peu... Maintenant que la théorie des représentations (avec notamment Kirillov [14], qui n'est pas Dieu, et Kostant [15]) et celle des algèbres de Lie affines (travaux d'Adler et van Moerbeke, voir [16], de Reyman et Semenov-Tian-Shanski, et je ne pense pas seulement à [17], source de [5]) ont remis, depuis une trentaine d'années, le sujet à la mode, maintenant que la théorie de Galois différentielle [18] permet d'appréhender mieux les différentes notions d'intégrabilité, il est sans doute temps de revaloriser les qualités novatrices et révolutionnaires du travail de mathématicienne de Sophie K.

Références

[1] S. Kowalevski – « Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe », *Acta Math.* **12** (1889), p. 177–232.
[2] S. Kovalevskaïa – *Une nihiliste*, Phébus, Paris, 2004.
[3] L. Spinney – « A stage of evolution », *Nature* **432** (25th november 2004), p. 445.
[4] J. Détraz – *Kovalevskaïa : l'aventure d'une mathématicienne*, Belin, Paris, 1993.

[5] À l'époque où je travaillais avec Robert Silhol sur [5], je partageais sans le savoir l'avis de Weierstraß, rapporté dans [6], sur la biographie de Kowalevskaya écrite par Charlotte Mittag-Leffler : « "Die Menschen sterben, die Gedanke bleiben", il eût suffi que la haute figure de Sonja passât à la postérité par la seule vertu de ses travaux mathématiques et littéraires. »

[6] Le système n'est pas linéaire, les solutions peuvent, *a priori*, avoir des singularités très compliquées.

[7] On peut voir des figures représentant les solides dans les trois cas en question dans l'article [10], publié dans [11].

[5] M. Audin & R. Silhol – « Variétés abéliennes réelles et toupie de Kowalevski », *Compositio Math.* **87** (1993), p. 153–229.
[6] G. Mittag-Leffler – « Weierstrass et Sonja Kowalewsky », *Acta Math.* **39** (1923), p. 133–198.
[7] J.-P. Léonardini – « L'art d'un expert en calcul mental », *l'Humanité* (12 juillet 2005).
[8] F. Darge – « Un portrait cubiste de Sofia Kovalevskaïa mathématicienne, romancière et féministe », *le Monde* (16 juillet 2005).
[9] F. Dostoïevski – *Les Démons*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, XX.
[10] P. Y. Polubarinova-Kochina – « On the scientific work of Sofya Kovalevskaya », in [11], 1978, Translated and introduced by Beatrice Stillman.
[11] S. Kovalevskaya – *A Russian childhood*, Springer, 1978, Translated and introduced by Beatrice Stillman.
[12] V. E. Zakharov (éd.) – *What is integrability ?*, Springer, Berlin, 1991.
[13] M. Audin – « Two notions of integrability », *soumis*.
[14] A. A. Kirillov – *Éléments de la théorie des représentations*, MIR, Moscou, 1974.
[15] B. Kostant – « Quantization and representation theory I : prequantization », in *Lectures in modern analysis and applications III*, Lecture Notes in Math., vol. 170, Springer, 1970.
[16] M. Adler, P. van Moerbeke & P. Vanhaecke – *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 47, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
[17] A. I. Bobenko, A. G. Reiman & M. A. Semenov-Tian-Shansky – « The Kowalevski top 99 years later », *Commun. Math. Phys.* **122** (1989), p. 321–354.
[18] J. Morales-Ruiz – *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, Progress in Math., Birkhäuser, 1999.

MATHÉMATIQUES ET MUSIQUE

À propos des canons rythmiques

Emmanuel Amiot[1]

Cet article fait le point sur une notion riche, issue de préoccupations musicales mais qui s'est avérée féconde en problèmes mathématiques fascinants.

En particulier l'étude des canons rythmiques a permis de découvrir des résultats inédits sur les corps finis et de démontrer de nouveaux cas de la conjecture spectrale. En retour, bien sûr, les outils mathématiques performants utilisés ont donné de nouvelles dimensions à explorer aux compositeurs. La théorie de Galois a donc fait une apparition inattendue dans certains logiciels d'aide à la Composition assistée par ordinateur !

Des illustrations musicales (ou en tout cas, sonores...) de cet article peuvent être trouvées sur le site `http://canonsrythmiques.free.fr/Midi`, sous forme de fichiers MIDI.

Notations

Je note $\mathbb{Z}_n$ le groupe (parfois l'anneau) quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}_q$ est le corps à q éléments.

Dans tout anneau, $a \mid b$ signifie que a divise b.

Φ_n désigne le $n^{\text{ème}}$ polynôme cyclotomique dans $\mathbb{Z}[X]$.

Enfin $[\![a, b]\!]$ désigne l'intervalle d'entiers $[a, b] \cap \mathbb{Z}$.

Canons musicaux et canons rythmiques

Canon musical

Le principe du canon musical est probablement bien connu du lecteur ; l'exemple le plus connu des francophones est sans doute « *Frère Jacques* », qui se chante de préférence à quatre, chaque chanteur reprenant exactement la même comptine mais décalée d'une mesure par rapport au chanteur précédent.

Frère Jacques, frère Jacques	Dormez-vous ? dormez-vous ?	Sonnez les matines, sonnez les matines	Ding deng dong, ding, deng dong
	Frère Jacques, frère Jacques	Dormez-vous ? dormez-vous ?	Sonnez les matines, sonnez les matines
		Frère Jacques, frère Jacques	Dormez-vous ? dormez-vous ?
			Frère Jacques, frère Jacques

1 Pianiste et compositeur.

qui devient, en régime de croisière,

Frère Jacques, frère Jacques	Dormez-vous ? dormez-vous ?	Sonnez les matines, sonnez les matines	Ding deng dong, ding, deng dong
Ding deng dong, ding, deng dong	Frère Jacques, frère Jacques	Dormez-vous ? dormez-vous ?	Sonnez les matines, sonnez les matines
Sonnez les matines, sonnez les matines	Ding deng dong, ding, deng dong	Frère Jacques, frère Jacques	Dormez-vous ? dormez-vous ?
Dormez-vous ? dormez-vous ?	Sonnez les matines, sonnez les matines	Ding deng dong, ding, deng dong	Frère Jacques, frère Jacques

Ce principe de jouer une même mélodie (ou une forme légèrement déformée de la même mélodie) le long de diverses voix est aussi celui de la fugue, dont le plus célèbre spécialiste est J.S. Bach.

C'est tout un art (de la fugue !) que de faire coïncider harmonieusement des notes diverses avec un décalage. J.S. Bach, justement, a par exemple montré sa virtuosité dans les *Variations Goldberg* où il fait des canons décalés dans le temps et dans l'espace des hauteurs, successivement d'un unisson, d'une seconde, d'une tierce, etc.

Pour modéliser de façon constructive les canons, nous allons nous montrer moins ambitieux, en nous concentrant exclusivement sur le domaine rythmique, et plus exigeants, en posant une condition rigoureuse :

sur chaque temps, on doit entendre une seule note.

Sans cette contrainte, on pourrait (on peut !) faire un canon fondé sur n'importe quel motif. Cela n'a pas grand intérêt, sauf peut-être combinatoire.

Le canon rythmique « canonique », si j'ose dire, est donc fondé sur un pattern rythmique discret, qu'on peut imaginer joué par un instrument de percussion (on néglige la question de la durée des notes), pattern qui est répété à l'identique par d'autres voix.

On peut alors modéliser ce pattern très simplifié par une série d'entiers, qui repèrent les moments où une note est jouée. Sans perte de généralité, on peut fixer l'origine des temps à la première note du pattern, qui va donc commencer par le nombre 0. Le principe même du canon signifie que les diverses entrées du motif sont obtenues par des translations, égales aux décalages avec la première entrée : les diverses voix seront $A, A + b_1, A + b_2$...

En mettant dans un même vecteur tous ces décalages, on obtient une première formalisation, provisoire :

Définition 1. — *Soit $A = \{0, a_1, \dots a_{k-1}\}$ un sous-ensemble de $\mathbb{N}$;*

A sera le motif (inner rhythm) d'un canon rythmique s'il existe un pattern des voix (outer rhythm) $B = \{0, b_1, \dots b_{\ell-1}\}$ tel que $A \times B \ni (a, b) \mapsto a + b$ est injective.
A est le motif du canon, B la séquence des entrées (les moments où chaque instrument commence sa partie).

Cette condition s'écrit aussi $A + B = A \oplus B$.

Exemple. — Le motif $A = \{0, 1, 3, 6\}$ donne un canon à quatre voix avec $B = \{0, 4, 8, 12\}$. En effet, $A \oplus B = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 10\}$. Une représentation simplifiée de partition en est donnée figure 1.

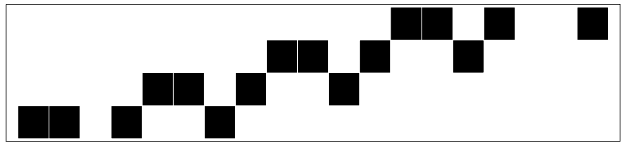


Fig. 1 – Un canon rythmique

Remarque 1. — Chaque note est jouée sur un multiple entier de l'unité de temps ; ceci peut paraître une contrainte artificielle et forte, mais en fait aussi bien Dan Tudor Vuza [20], qui est le pionnier des recherches sur les canons rythmiques, que Lagarias [15] dans un article purement mathématique, ont montré essentiellement que ce cas est le seul possible pour un motif fini.

Un corollaire élémentaire de la définition :

Proposition (Dualité). — *Si $A \oplus B$ est un canon rythmique, il en est de même de $B \oplus A$: on peut échanger les rôles des inner et outer rhythms.*

La commutativité de l'addition permet donc de fabriquer un canon à p voix de q notes en partant d'un canon à q voix de p notes. Avec 4×5 ou 5×4 notes, on obtient par exemple la figure 2.

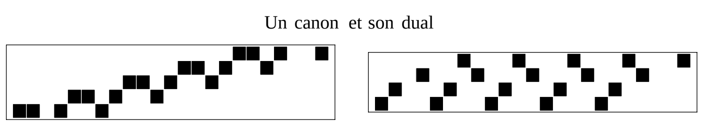


Fig. 2 – Deux canons duaux

Canons périodiques

On remarque, sur l'exemple ci-dessus, qu'il y a des trous dans le canon —- que les musiciens appellent des silences — mais que ces trous se trouveraient naturellement bouchés par d'autres copies du motif. En fait on peut obtenir un canon infini avec une note et une seule par temps, soit avec un nombre infini de voix, soit de façon plus réaliste en prolongeant le motif par périodicité (ici la période 8) comme on le constate sur la figure 3, qui reprend le motif de la figure 1.

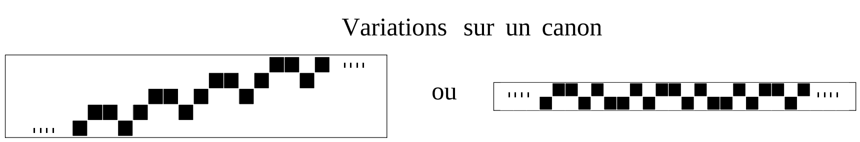


Fig. 3 – Canon prolongé à l'infini

On obtient ainsi un *pavage périodique* de $\mathbb{Z}$ par le motif A. Dorénavant, je parlerai donc indifféremment de pavages (pavages de $\mathbb{Z}$) ou de canons rythmiques. Par passage au quotient, cela revient à dire que l'on a un pavage du groupe cyclique $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. D'où une nouvelle définition, plus restrictive, qui est celle que nous considérerons désormais :

Définition 2. — *On a un canon rythmique de motif* $A = \{a_0, \dots a_{k-1}\}$ *et de période* n *s'il existe* $B \subset \mathbb{N}$ *tel que*

$$A \oplus B = \mathbb{Z}_n.$$

La condition de somme directe ($\oplus$) exprime que sur chaque temps on a exactement une note et une seule.

Exemple. — Le motif $A = \{0, 1, 3, 6\}$ donne un canon de période 8 avec $B = \{0, 4\}$. En effet, $A \oplus B = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 10\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ si on travaille modulo 8. C'est l'effet obtenu si on reprend périodiquement ce canon (comme *Frère Jacques*).

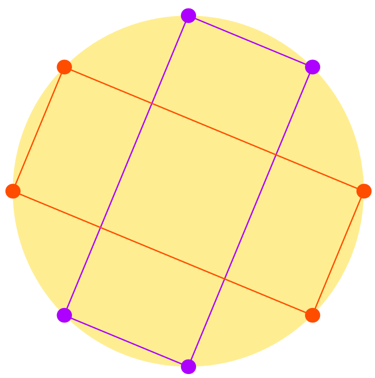


Fig. 4 – La forme d'un motif est définie à une rotation près

Remarque 2. — Comme $\mathbb{Z}_n$ est cyclique, la notion de pavage ou de canon rythmique est indépendante d'un choix d'origine de ce cercle comme on le voit sur les figures 4 et 5. C'est pourquoi en pratique on convient, sans perte de généralité, que A, B commencent par 0. Formellement cela est lié à l'action du groupe $\mathbb{Z}_n$ sur ses parties par translation.

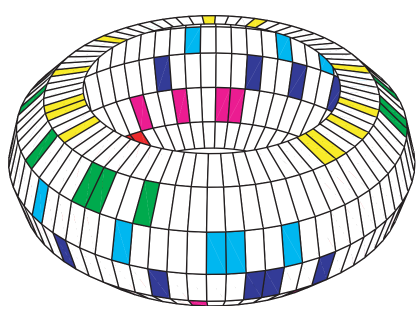


Fig. 5 – Un canon de Vuza, de période 108

Cette condition de périodicité que nous avons apparemment imposée semble très forte. Mais on connait depuis 1950 le théorème suivant :

Théorème 1 (de Bruijn). — *Si A est une partie finie de $\mathbb{N}$ telle qu'il existe $C \subset \mathbb{Z}$ avec $A \oplus C = \mathbb{Z}$, alors il existe un entier n et une partie (finie) B tels que $C = B \oplus n\mathbb{Z}$. Donc le pavage est périodique, et $A \oplus B = \mathbb{Z}_n$.*

La démonstration de ce théorème repose sur l'incontournable principe des tiroirs, je laisse le lecteur intéressé se référer à [2] et à la figure suivante.

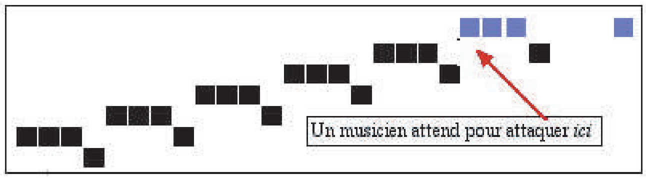


Fig. 6 – Pourquoi tout canon de motif fini est périodique

Mentionnons à ce propos un premier problème ouvert : Si $\ell(A) = \max A - \min A$ est la largeur du motif A, la démonstration de De Bruijn montre que $n \leqslant 2^{\ell(A)}$ majore la période du canon, mais tous les exemples connus vérifient $n \leqslant 2 \times \ell(A)$... Est-ce général ?

Exercice 1. — Donner un motif de largeur ℓ pour lequel la plus petite période possible du canon est effectivement 2ℓ (solution en fin d'article).

En revanche un motif infini peut très bien donner un canon apériodique (par exemple les nombres dont l'écriture binaire n'a que des bits d'ordre impairs), ainsi que des pavages plus « tordus »[2].

Modélisation polynomiale et facteurs cyclotomiques

Pour travailler dans une structure plus riche, on fait comme Sophus Lie passant d'un groupe de Lie à son algèbre : par exponentiation.

Polynôme associé à un motif rythmique

On va enrichir la structure algébrique ambiante, remplaçant les sommes d'ensembles par des produits de polynômes.

Définition 3. — *Soit $A \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble fini non vide. Alors on pose $A(X) = \sum\limits_{k \in A} X^k$.*

Proposition. — *La somme $A + B$ est directe (i.e. $A \times B \ni (a, b) \mapsto a + b$ est injective) ssi*

$$A(X) \times B(X) = (A \oplus B)(X)$$

Sinon on trouverait des coefficients strictement plus grand que 1. Et donc la définition des canons rythmiques est la condition suivante, notée (T_0) :

Théorème 2. — *A est le motif d'un canon rythmique avec « motif des entrées » B et période n ssi*

$$(T_0) \qquad A(X) \times B(X) = 1 + X + X^2 + \dots X^{n-1} \pmod{X^n - 1}.$$

Par exemple $\{0, 1, 3, 6\} \oplus \{0, 8, 12, 20\}$ donne les polynômes

$$(1 + X + X^3 + X^6) \times (1 + X^8 + X^{12} + X^{20})$$

dont le produit est

$$1+X+X^3+X^6+X^8+X^9+X^{11}+X^{12}+X^{13}+X^{14}+X^{15}+X^{18}+X^{20}+X^{21}+X^{23}+X^{26}$$

qui se réduit modulo $X^{16} - 1$ à $1 + X + \dots X^{15}$ — concrètement on applique la règle $X^k \to X^{k \mod n}$.

N.B. : c'est en découvrant cette formalisation appliquée par Andranik Tangian [16] à un problème de Tom Johnson que je me suis enthousiasmé pour la cause des canons rythmiques ; mais ce procédé remonte à Redei dans les années 1950.

Les 'perfect square tilings' de Tom Johnson

Le but de ce paragraphe est de montrer sur un exemple assez simple que l'introduction des polynômes n'est pas qu'une simple commodité d'écriture : si on sort l'artillerie lourde, c'est qu'elle s'impose pour l'étude des canons ! On sait plus de choses dans une algèbre que dans le monoïde $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_n)$...

T. Johnson, compositeur minimaliste américain vivant à Paris, s'est posé récemment la question de réaliser une forme très particulière de canon (canon avec augmentations) avec le motif très simple T_1 =(0 1 2) mais avec les contraintes suivantes :

– utilisez des augmentations de ce motif, $T_2 = 2 \times T_1, \dots T_k$ (au sens musical : comprenez des multiples, translatés, comme (5 9 13)= $5 + T_4 = 5$+(0 4 8)= $5 + 4 \times T_1$),
– les multiplicandes sont tous distincts,
– et on pave de façon 'compacte', *i.e.* sans faire de réduction modulo *n*.

Ce problème a été exposé dans la rubrique de J.P. Delahaye dans *Pour la science* (novembre 2004) ce qui a donné l'occasion à plusieurs lecteurs, bons programmeurs, de trouver des solutions avec le motif initial (0 1 2 3) — à cette heure la question de l'existence d'un pavage parfait pour un motif de 5 notes est ouverte.

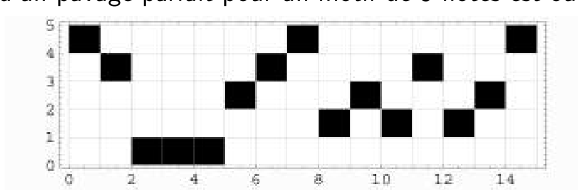


Fig. 7 – Plus petit 'perfect sqare tiling'

Quand Tom s'est ouvert de cette nouvelle question, il nous a présenté la plus petite solution (cf. figure 7, où l'on voit T_1 aux échelles 1,2,4,5,7), et une question troublante : pourquoi était-il impossible de trouver un 'pavage en carré parfait' avec seulement un ou deux des motifs T_3, T_6, T_9 ? Son programme lui donnait soit les trois à la fois (figure suivante), soit aucun.

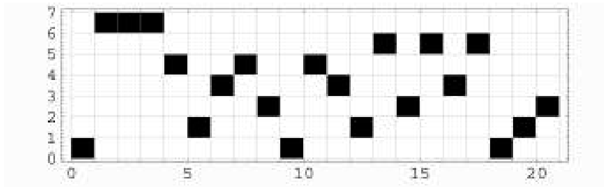


Fig. 8 – Plus petit 'perfect square tiling' avec T_3, T_6, T_9

Cette petite question admet une solution très simple, si l'on exprime le motif de base par le polynôme $\Phi_3(X) = 1 + X + X^2$, ses augmentations sont de la forme $X^k(1+X^i+X^{2i}) = X^k\Phi_3(X^i)$, et la question de Tom revient à trouver une expression algébrique de la forme

$$\sum_{i\in I} X^{k_i}\Phi_3(X^i) = 1 + X + \ldots = \sum_{j=0}^{3n-1} X^j = \frac{X^{3n}-1}{X-1}.$$

Exercice 2. — Montrer que dans une relation comme la précédente, le nombre d'indices i qui sont multiples de 3 est lui-même un multiple de 3.

Polynômes cyclotomiques

L'intérêt de ce changement d'espace, de $\mathbb{Z}$ à une partie de $\mathbb{Z}[X]$, est que l'on sait plusieurs choses sur les polynômes qui apparaissent dans notre problème (voyez n'importe quel bon livre d'algèbre commutative pour une preuve du théorème suivant).

Théorème 3. — *Les facteurs irréductibles (dans $\mathbb{Q}[X]$ ou $\mathbb{Z}[X]$) de $1 + X + X^2 + \ldots + X^{n-1}$ sont les célèbres polynômes cyclotomiques Φ_d, avec $d \mid n$ (et $d > 1$ ici). Φ_d est le produit (dans $\mathbb{C}[X]$) des $X - \xi$ où ξ décrit l'ensemble des racines de l'unité d'ordre exactement d.*

On peut les calculer par récurrence par la formule $\prod_{d|n} \Phi_d(X) = X^n - 1$ ou par inversion de Möbius $\Phi_n(X) = \prod_{d|n}(X^d-1)^{\mu(d)}$.

Leurs coefficients sont entiers (relatifs). On a par exemple $\Phi_p(X) = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{p-1}$ quand (ssi) p est premier.

On a tout de suite un critère très utile qui résulte du théorème précédent.

Corollaire 1. — *Pour un canon de période n, chaque polynôme cyclotomique $\Phi_d, 1 < d \mid n$, divise $A(X)$ ou $B(X)$.*

Ceci résulte du théorème du Gauss dans l'anneau principal $\mathbb{Q}[X]$, appliqué à la relation (T_0) (cf. Théorème 2). Ce phénomène explique une remarque d'Andreatta, faite sur les canons de Vuza (cf. infra), observant que beaucoup de canons sont « presque » (*i.e.* à peu de termes près, voire exactement) des palindromes. En effet, tous les polynômes cyclotomiques sont autoréciproques, *i.e.* palindromiques, ainsi que leurs produits. Comme ce sont (presque) les seuls facteurs de $A(X), B(X)$ cela explique que ces derniers sont (presque) palindromiques.

Nous verrons que la répartition de ces facteurs cyclotomiques entre $A(X)$ et $B(X)$ est cruciale pour permettre l'existence d'un canon rythmique.

Le cas de Φ_p d'indice premier admet une généralisation utile quoique élémentaire (récurrence) :

Lemme 1. — *On a $\Phi_d(1) \neq 1$ ssi d est une puissance d'un nombre premier.*
Si $d = p^\alpha$ on a alors $\Phi_d(1) = p$, car

$$\Phi_{p^\alpha}(X) = 1 + X^{p^{\alpha-1}} + X^{2p^{\alpha-1}} + \ldots + X^{(p-1)p^{\alpha-1}}.$$

Par exemple, $\Phi_9 = 1 + X^3 + X^6$.

Les conditions de Coven-Meyerowitz

Avant 1998, on ne connaissait quasiment aucune condition générale pour déterminer si le motif A était capable d'engendrer un canon rythmique, *i.e.* de paver (à l'exception du cas où $|A|$ était une puissance d'un nombre premier).

Exercice 3. — Sauriez-vous dire par exemple si $(1, 4, 9, 16)$ forme un canon rythmique ?

Des considérations précédentes, les deux mathématiciens Aaron Meyerowitz et Etan Cohen ont déduit (cf. [5]) les critères suivants :

Théorème de Coven-Meyerowitz. — *Soit R_A l'ensemble des $d \in \mathbb{N}$ où Φ_d divise $A(X)$, et S_A le sous-ensemble des puissances de nombres premiers éléments de R_A. On définit alors les conditions*

$$\text{et} \begin{cases} (T_1) : A(1) = \prod\limits_{p^\alpha \in S_A} p, \\ (T_2) : \text{si } p^\alpha, q^\beta, \cdots \in S_A \text{ alors } p^\alpha . q^\beta \cdots \in R_A. \end{cases}$$

$$\text{Alors} \begin{cases} \text{Thm A1. — Si } A \text{ pave, alors } (T_1) \text{ est vérifiée.} \\ \text{Thm A2. — Si } (T_1) \text{ et } (T_2) \text{ sont vérifiées, alors } A \text{ pave.} \\ \text{Thm B. — Si } |A| = A(1) \text{ n'a que deux facteurs premiers et si } A \text{ pave,} \\ \text{alors } (T_2) \text{ est vérifiée.} \end{cases}$$

Donnons un exemple. — Le motif $A = \{0, 1, 8, 9, 17, 28\}$ a un polynôme associé qui se factorise en

$$\begin{aligned}(1+X)\left(1-X+X^2\right)\left(1+X+X^2\right)\left(1-X^2+X^4\right)\left(1-X^3+X^6\right)\\ \left(1+X^3-X^4-X^7+X^8-X^9+X^{11}-X^{12}+X^{13}\right)\end{aligned}$$

On reconnaît[2] les facteurs cyclotomiques d'indices $2, 3, 6, 12, 18$, plus un outsider qui n'est pas cyclotomique du tout. On a donc $R_A = \{2, 3, 6, 12, 18\}, S_A = \{2, 3\}$; or $2 \times 3 = 6$, ce qui prouve à la fois (T_1) (car $A(1) = 6$) et (T_2) (car $6 \in R_A$). Effectivement, A pave.

[2] j'ai dû implémenter pour cela une procédure qui marie harmonieusement théorie de Galois et mathématiques numériques, utilisant notamment que si toutes les racines d'un polynôme unitaire irréductible à coefficients entiers sont de module 1, alors ce sont des racines de l'unité. La précision du calcul a dû être adaptée au degré du polynôme passé en variable !

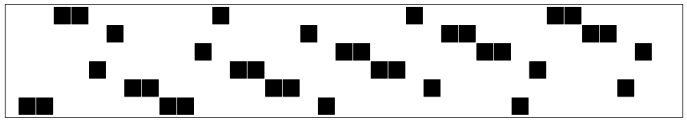


Fig. 9 – Canon vérifiant $(T_1)\&(T_2)$

Seul le troisième de ces résultats (Thm B) est véritablement difficile ; il repose sur un lemme de Sands qui prouve que A ou B est inclus dans $p\mathbb{Z}$ (où p est l'un des deux facteurs premiers), ce qui est faux dans le cas général, et ce en utilisant un résultat on ne peut plus Galoisien :

Lemme 2. — *Si n est premier avec m alors Φ_n est encore irréductible dans le corps cyclotomique* $\mathbb{Q}[e^{2i\pi/m}]$.

Qu'on me pardonne de mentionner ce résultat technique : dans une partie ultérieure où l'on travaille dans $\mathbb{F}_q[X]$, les Φ_n cessent généralement d'être irréductibles et le contraste avec la situation en caractéristique 0 méritait, je pense, d'être mentionné.

Cet article serait interminable si toutes les démonstrations y figuraient, mais je vais tout de même reproduire brièvement ici la démonstration du (Thm A1), qui illustre bien l'intérêt d'avoir élargi le contexte de parties de $\mathbb{Z}_n$ à une algèbre de polynômes.

Démonstration. La preuve repose sur le lemme 1. Observons que si $A \oplus B = \mathbb{Z}_n$, on a en termes de polynômes $A(1)B(1) = n$. Mais dans la décomposition en facteurs premiers de $A(1)B(1)$ figurent tous les $\Phi_d(1)$, qui valent 1 ou p (ce dernier cas ssi d est une puissance de p). Le nombre premier p figure un nombre de fois égal au nombre de puissances de p qui divisent n, *i.e.* sa multiplicité dans n.

Donc les facteurs premiers de n apparaissent dans $A(1)B(1)$ sous la forme $\Phi_{p^\alpha}(1)$ et seulement sous cette forme. Les autres facteurs (cyclotomiques ou pas) de $A(X)$ (ou $B(X)$) contribuent seulement pour la valeur 1 quand $X = 1$, puisque tous les facteurs de n sont recensés.

La valeur de $A(1)$ est donc égale au seul produit des facteurs premiers p tels que Φ_{p^α} soit un facteur de $A(X)$: c'est bien la condition (T_1). $\square$

Notons sans insister, pour l'instant, qu'on ignore toujours aujourd'hui si la condition (T_2) est nécessaire dans tous les cas pour paver.

Ces conditions ne sont pas dénuées d'applications pratiques : en septembre, nous avons présenté à Barcelone pour l'ICMC[3] une nouvelle fonctionnalité du logiciel d'aide à la composition *OpenMusic*, développé à l'IRCAM notamment par Carlos Agon et Moreno Andreatta, et qui permet de fabriquer des « canons cyclotomiques », de période donnée, en utilisant les conditions ci-dessus.

[3] International Computer Music Conference

Canons et corps finis

Nous allons faire un détour instructif en généralisant de façon naturelle la notion de canon rythmique à celle de canon modulo p. Il s'agit alors d'avoir sur chaque temps un nombre de notes égal à 1 modulo p, condition plus généreuse que « une note et une seule ». On se retrouve naturellement à factoriser des polynômes dans l'anneau $k[X]$, où k est un corps fini. En effet, comme on l'a vu, la condition définissant un canon rythmique est

$$(T_0) \qquad A(X) \times B(X) = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{n-1} \mod (X^n - 1).$$

La question se pose alors de considérer les facteurs irréductibles de cette identité polynômiale. Dans le cas de $\mathbb{Z}[X]$ on avait affaire aux polynômes cyclotomiques ; dans l'exposé qui suit la situation est plus compliquée, notamment du fait de la multiplicité > 1 des racines (de l'unité).

Le problème de Johnson

Je résume ici le problème qui m'a poussé à considérer des factorisations dans des corps finis en lieu et place de $\mathbb{Z}[X]$.

Tom Johnson a présenté en 2001 aux *Journées d'Informatique Musicale* [10] le problème suivant de canon par augmentations.

Faire un canon (compact) avec le motif (0 1 4) et (certaines de) ses augmentations $(0, 2, 8)$ (ainsi que $(0, 4, 16)$ etc). Le compositeur et mathématicien A. Tangian, de l'université de Hanovre, rédigea aussitôt [16] un programme en Fortran pour calculer toutes les solutions de taille bornée par un N donné ; il s'avéra que toutes ces solutions avaient une longueur multiple de 15. La plus petite se trouve sur la figure suivante.

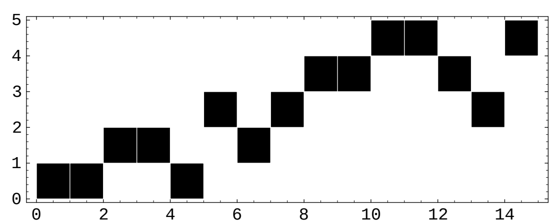


Fig. 10 – Le plus petit pavage avec (0 1 4) et augmentations

Qu'elles soient multiples de 3 n'avait rien de surprenant, mais pourquoi de 15 ?

Si l'on pose $J(X) = 1 + X + X^4$, le problème de Johnson revient à trouver des facteurs 0-1 $A, B \ldots$ tels que

$$A(X)J(X) + B(X)J(X^2) \ldots = 1 + X + X^2 + \ldots X^{n-1}$$

En effet, une augmentation comme $(0, 2, 8)$ a pour polynôme associé $J(X^2) = 1 + X^2 + X^8$.

Dans la plus petite solution, on a $A(X) = 1 + X^2 + X^8 + X^{10}$ et $B(X) = X^5$ pour $n = 15$.

Je me suis demandé s'il y avait moyen de trouver une racine commune de tous ces facteurs. Pour cela il s'est avéré nécessaire de changer de corps. En effet, dans tout corps de caractéristique 2 on a

$$J(X^2) = 1 + X^2 + X^8 = (1 + X + X^4)^2 = \big(J(X)\big)^2$$

par l'automorphisme de Frobenius[4] on a plus généralement

Lemme 3. — *Pour tout polynôme $A(X)$ à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, on a $A(X)^p = A(X^p)$.*

De même $J(X^4) = J(X)^4$ et ainsi de suite.

Donc $J(X)$ doit diviser $1+X+X^2+\ldots+X^{n-1}$ à condition de calculer modulo 2. Or J se décompose dans le corps $\mathbb{F}_{16}$ à 16 elements (résultat élémentaire de Galois : J est irréductible sur $\mathbb{F}_2$ et donc $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_{2^{d^\circ J}} \approx \mathbb{F}_2[X]/(J)$), de plus dans ce corps toutes ses racines[5] sont d'ordre (multiplicatif) 15, *i.e.* vérifient $\alpha^n = 1 \iff 15 \mid n$.

Maintenant on a donc, si α est racine de J dans $\mathbb{F}_{16}$, $1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots \alpha^{n-1} = J(\alpha) \times (\ldots) = 0$. On en déduit en multipliant par $\alpha - 1$ que $\alpha^n - 1 = 0$, donc $\alpha^n = 1$, ce qui impose bien que $15 \mid n$, cqfd.

《**Der verfluchte Ring**》

La condition (T_0) a un sens dans tous les anneaux[6] $k[X]$, et même $A[X]$ pour tout anneau A contenant $0, 1$. En effet c'est une identité entre polynômes 0-1, c'est-à-dire entre éléments de l'ensemble $\{0, 1\}[X]$. Je dis bien ensemble : car il n'est fermé ni pour $+$ ni pour $\times$ (par exemple développer $(1 + X^2)^3$ fait intervenir des opérations autres que 0+0 ou 0+1).

Il est bien clair que $\mathbb{Z}[X]$ est beaucoup trop vaste (il y a une écrasante majorité de polynômes NON 0-1), et il est bien difficile de donner des conditions nécessaires et suffisantes sur un polynôme 0-1$\in \mathbb{Z}[X]$ pour déterminer s'il va paver ou non (cela reste un problème ouvert), sinon en exhibant un tel pavage[7].

Il est bien plus tentant de travailler dans $\mathbb{F}_2[X] = \mathbb{Z}_2[X] = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ cet anneau ne contient que des polynômes 0-1, et il les contient même tous une fois et une seule.

Malheureusement bien que l'application canonique

$$\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{F}_2[X]$$
$$P = \sum a_k X^k \mapsto P \pmod 2 = \sum \overline{a_k} X^k$$

envoie bijectivement $\{0, 1\}[X] \subset \mathbb{Z}[X]$ sur $\mathbb{F}_2[X]$, il n'y a pas de bonne application réciproque vers $\mathbb{Z}[X]$, faute de structure algébrique sur $\{0, 1\}[X]$.

Par exemple on ne peut pas remonter dans $\mathbb{Z}[X]$ l'équation suivante :

$$(1 + X)(1 + X + X^2) = 1 + X^3 \in \mathbb{F}_2[X]$$

---

4 Pour p premier, q une puissance de p, $\mathcal{F} : x \mapsto x^p$ est un automorphisme du corps $\mathbb{F}_q$ (et il engendre le groupe de Galois de $\mathbb{F}_q$ sur $\mathbb{F}_p$). L'ensemble de ses points fixes est le sous-corps premier $\mathbb{F}_p$. Cela résulte de l'identité $(x + y)^p = x^p + y^p$ en caractéristique p.

5 Ceci résulte du théorème de Lagrange : tout élément de $\mathbb{F}_{16}^*$ a un ordre qui divise 15, et du fait que des éléments d'ordre inférieur seraient racines d'autres polynômes (ex. $1 + X + X^2$ pour les éléments d'ordre 3) qui sont premiers avec J.

6 Sauf peut-être celui des Nibelungen auquel réfère bien sûr le titre de cette section.

7 Ce serait un problème NP, si l'on en croit [12].

en termes de polynômes $0-1$.

J'ai donc recherché des conditions équivalentes au fait que « (T_0) soit vérifiée dans $\mathbb{Z}[X]$ ». La plus convaincante est :

Théorème 5. — (T_0) *est vraie dans* $\mathbb{Z}[X] \iff$ *elle est vérifiée dans tous les* $\mathbb{F}_p[X]$.

C'est un lointain cousin du théorème chinois, qu'il est bien plus facile [2] de démontrer musicalement que mathématiquement : il signifie que le nombre de notes sur chaque temps est exactement 1, si et seulement si il vaut 1 modulo tous les p premiers (on peut affaiblir les hypothèses d'ailleurs).

Remarque 3. — Il est capital de souligner que l'énoncé ci-dessus est différent de ce qui suit :

« Il existe $B(X) \in \{0,1\}[X] \subset \mathbb{Z}[X]$, n tel que $A(X) \times B(X) \equiv 1+X+\ldots+X^{n-1} \pmod{X^n-1}$ dans $\mathbb{Z}[X]$

$$\iff$$

Pour tout p premier, il existe B_p, n_p tel que $A(X) \times B_p(X) \equiv 1+X+\ldots+X^{n_p-1} \pmod{X^{n_p}-1, p}$ »

Bien sûr, $\Rightarrow$ est vraie. J'ai essayé assez longtemps de prouver la réciproque, conformément à la philosophie de Yoneda ou aux théorèmes (local $\Rightarrow$ global) du genre de ceux de Hasse sur les formes quadratiques. Le résultat fut surprenant...

Canons modulo p : todos locos !

Nous avons posé la question de l'étude locale, i.e modulo p, de la relation (T_0). Quelles conditions a-t-on pour qu'un motif donné pave modulo p ? De façon stupéfiante, il n'y en a aucune ! (cf. [3])

Théorème (Amiot, avril 2004). — *Pour toute partie finie non vide* $A \subset \mathbb{N}$ *(contenant 0), pour tout p premier, il existe* $B \subset \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$(T_{0,p}) \qquad A(X) \times B(X) \equiv 1 + X + X^2 + \ldots X^{n-1} \pmod{X^n - 1, p}$$

c'est-à-dire qu'on a cette congruence dans $\mathbb{F}_p[X]$.

En termes musicaux, cela signifie que sur chaque temps, le nombre de notes est 1, mais à un multiple de p près.

J'ai d'abord trouvé ce théorème avec le modulo 2, toujours très particulier (dans ce cas on a même un pavage compact, c'est-à-dire que la réduction modulo X^n-1 est superflue).

Ainsi avec le motif (0 1 4), qui ne pave certes pas $\mathbb{Z}$, on a un canon avec des notes isolées ou des accords de trois sons :

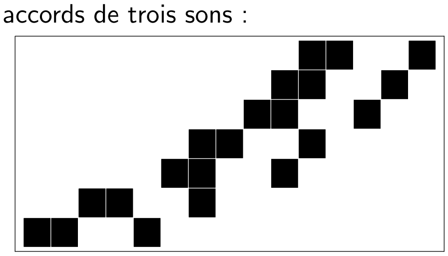


Fig. 11 – Un pavage dans $\mathbb{F}_2$

Exercice 4. — Le lecteur est invité à chercher un tel pavage avec le motif (0,1,3) modulo 2.

L'argument clef est un théorème assez simple, mais frappant, de la théorie de Galois des corps finis :

Théorème 7. — *Dans tout $\mathbb{F}_p[X]$, tout polynôme $A(X)$ non nul en 0 divise $X^n - 1$, pour n assez grand.*

Démonstration. Je ne donne que les grandes lignes (cf. [3]). Toute racine de $A(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ est dans un corps $\mathbb{F}_q$, extension de $\mathbb{F}_p$ de degré fini. Or dans ce corps, $\mathbb{F}_q$, tout élément non nul vérifie $X^{q-1} = 1$ (à cause du théorème de Lagrange). Avec quelques points techniques (à cause de la multiplicité des racines), on en déduit un n tel que $A(X) \mid X^n - 1$ (un multiple de tous ces $q - 1$).

Si $A(X)$ représente le motif rythmique, il existe donc n tel que : $A(X) \times (X - 1) \mid X^n - 1$, et donc en posant $C(X) = \dfrac{X^n - 1}{A(X)(X - 1)}$, on a bien

$$A(X) \times C(X) = \frac{X^n - 1}{(X - 1)}.$$

Certes, $C(X)$ n'est pas en général un polynôme 0-1 ; mais en caractéristique finie on construit facilement un polynôme 0-1 $B(X)$, qui soit congru à $C(X)$ modulo $X^n - 1$: il suffit de remplacer tout terme αX^k par $(\alpha - 1)X^k + X^{n+k-1}, \alpha > 1$, et d'itérer cette transformation jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des coefficients 0 ou 1, ce qui achève la preuve du théorème. □

Ce procédé est constructif : la figure précédente est obtenue par un algorithme qui implémente précisément cette méthode (en optimisant n, en plus).

Des références sur ce sujet trop peu étudié sont [21] et, plus récemment (avec des applications à la cryptographie), [1].

En conclusion, il n'y a PAS de condition locale (modulo p) pour qu'un motif donné A pave : todos locos ! il nous faut donc revenir à $\mathbb{Z}[X]$. Au moins, les facteurs de $\dfrac{X^n - 1}{X - 1} \in \mathbb{Z}[X]$ seront simples... Pour l'amour de l'art, observons en effet que la situation est bien moins claire dans les corps finis :

– $X^n - 1$ peut avoir un discriminant nul (*i.e.* des racines multiples) quand $p \mid n$.

– Des polynômes jadis irréductibles (ex. $\Phi_8 = X^4 + 1$) sont factorisables dans TOUT corps fini.

– Le produit des $X - \xi$ où ξ parcourt l'ensemble des racines d'ordre multiplicatif donné dans $\mathbb{F}_q^*$ n'est plus en général un polynôme irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$ (cf. [1]).

Exercice 5. — Trouvez les facteurs irréductibles du produit $\prod(X - \xi)$ quand ξ décrit l'ensemble des huit générateurs du groupe $(\mathbb{F}_{16}^*, \times)$, (les éléments d'ordre 15). Vous pouvez vous référer utilement au paragraphe sur le problème de Johnson.

J'ai découvert incidemment une propriété étrange et mystérieuse, bien que sa preuve ne soit pas très difficile, qui permet de calculer la multiplicité de 1 comme racine de $A(X)$ donné :

Proposition. — *Soit $A(X)$ un polynôme 0-1 qui pave avec période n et soit p un facteur premier de A. Alors*

– la multiplicité de 1 comme racine de A dans $\mathbb{F}_p$, s'exprime en base p comme un nombre dont les chiffres sont exclusivement 0 ou $\overline{p-1}$;

– le nombre des chiffres non nuls dans ce nombre en base p n'est autre que la multiplicité de p comme facteur de $A(1)$ dans $\mathbb{N}$, $A(1)$ étant le nombre de notes du motif A (ceci est quasiment la condition (T_1) de Coven-Meyerowitz).

Curieusement, ce nombre de bits non nuls apparaît pour le calcul de complexité de l'exponentiation rapide, comme dans le difficile théorème de Smale sur l'immersion d'une variété sans singularité dans $\mathbb{R}^n$.

Retour dans $\mathbb{Z}[X]$

Ce bref passage en caractéristique p nous a permis de toucher à d'autres formes de canons. Il en existe autant d'espèces que de compositeurs et je ne puis les énumérer toutes ; mentionnons seulement le résultat remarquable du canadien Jon Wild (2000) : « tout motif de trois notes pave avec son rétrogradé », qui renvoie à une pratique courante à l'âge baroque.

On revient en caractéristique nulle, avec l'intention de pousser l'utilisation des polynômes 0-1 aussi loin que possible. On parviendra au fait remarquable que la conjecture spectrale en dimension 1 repose sur le cas particulier des canons de Vuza, dont l'intérêt dépasse donc de loin les simples applications musicales.

Dans le cas de $\mathbb{Z}[X]$ les facteurs irréductibles de l'identité (T_0) polynomiale sont les polynômes cyclotomiques $\Phi_d, d \mid n$; les conditions trouvées en 1998 par Coven-Meyerowitz sont cruciales pour la suite de cet exposé.

J'ajoute ici un lemme qu'ils jugent capital.

Les automorphismes du groupe $\mathbb{Z}_n$ sont bien connus, ce sont les $x \mapsto \alpha x$ où $\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$ est un des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}_n$. Il est donc clair que $A \oplus B = \mathbb{Z}_n \iff \alpha A \oplus \alpha B = \mathbb{Z}_n$. Il est beaucoup moins évident que l'on a

Lemme 4. — $A \oplus B = \mathbb{Z}_n \iff \alpha A \oplus B = \mathbb{Z}_n$ *pour tout* α *inversible modulo n.*

Coven & Meyerowitz ([5]) donnent une démonstration de ce lemme « capital » dans un anneau de polynômes, apparemment insatisfaits de la démonstration originale (combinatoire) de [17].

Mais en fait sa première preuve est dûe à D.T. Vuza 6 ans auparavant. Il en a senti d'ailleurs la raison profonde, qui est que $\psi_\alpha : z \mapsto z^\alpha$ est un automorphisme du groupe des racines n-ièmes de l'unité, et l'utilise pour une démonstration encore assez compliquée à base de transformée de Fourier et convolution.

Ma version consiste à remarquer que changer A en αA revient à changer $A(X)$ en $A(X^\alpha)$, qui est une bijection sur l'ensemble des polynômes 0-1 considérés modulo $X^n - 1$ (cf. exo), et cela applique (l'inverse de) ψ_α aux racines de $A(X)$, et donc les ensembles des racines n-ièmes de l'unité qui sont racines de $A(X)$ ne sont pas changées, ce qui signifie que les facteurs cyclotomiques de $A(X)$ sont invariants dans cette transformation.

Comme ceux de $B(X)$ n'ont pas bougé, on a encore entre $A(X^\alpha)$ et $B(X)$ tous les facteurs cyclotomiques de $(X^n - 1)/(X - 1)$, qui doit donc diviser $A(X^\alpha).B(X)$. Un argument de degré permet de conclure (on connaît les $n - 1$ racines de $A(X^\alpha).B(X)$ modulo $X^n - 1$).

Exercice 6. — Vérifier que changer $A(X)$ en $A(X^\alpha)$ (modulo $X^n - 1$) conserve sa nature de polynôme 0-1.

Je tiens à souligner que ce procédé est musical[8] : par exemple Tom Johnson l'a redécouvert tout seul, expérimentalement !

Bien sûr cette action de groupe permet une description plus économique des canons : par exemple pour l'ensemble des canons de Vuza de période 72, qui consiste de 3 formes pour A et 6 pour B[9], il ne reste qu'une orbite pour chacun et on peut donc déduire facilement tous les canons de Vuza 72 du couple

$$A = (0, 3, 6, 12, 23, 27, 36, 42, 47, 48, 51, 71) \qquad B = (0, 8, 10, 18, 26, 64).$$

Les groupes de Hajós, Dan Tudor Vuza, et les canons rythmiques irréductibles

Le mathématicien et musicien roumain Dan Tudor Vuza a passé près de dix ans, de 1980 à 1990, à étudier la question des canons rythmiques en long et en large. En particulier, il s'est intéressé aux canons pour lesquels ni A ni B n'ont de période propre.

Précisons : bien sûr, d'après le théorème de De Bruijn (tout canon de motif fini est périodique), on travaille avec une période globale, n, du canon. Mais il arrive très souvent (presque toujours, en fait) que l'un des termes de la somme directe $A \oplus B = \mathbb{Z}_n$ ait une sous-période. Ainsi pour l'exemple simple de $A = \{0, 1, 4, 5\}$ qui pave avec période 8 : c'est en fait le sous-motif $\{0, 1\}$ répété avec période 4 qui constitue $A = \{0, 1\} \oplus 4$.

Moreno Andreatta s'est aperçu que Vuza avait redécouvert des résultats sur les factorisations des groupes cycliques issus de la conjecture de Hajòs : un groupe cyclique $\mathbb{Z}_n$ est de Hajòs, ou encore est un « bon groupe », si dans toute factorisation $\mathbb{Z}_n = A \oplus B$, on a $A + p = A$ pour un certain $p < n$ (ou la même chose pour B). Vuza a caractérisé tous les groupes de Hajós cycliques en utilisant la théorie de Fourier, suivant une remarque déjà ancienne du grand théoricien Lewin qui remarquait qu'une somme directe de parties revient à un produit de convolution de leurs fonctions caractéristiques.

Cela est décrit en détail dans [4]. Le plus petit « mauvais groupe » est $\mathbb{Z}_{72}$.

On connaît des algorithmes pour fabriquer des canons de Vuza (*i.e.* des factorisations de « mauvais » groupes), mais aucun procédé qui assure de les trouver tous. La formule la plus simple est dûe [11] à Frank Jedrzejewski :

Proposition (2003). — *Si on considère p_1, p_2 premiers et $n_i, i = 1 \dots 3$ tels que $n_1 p_1$ soit premier avec n_2 (et réciproquement) alors en posant $[\![a, b]\!] = \{a, a+1, \dots b\}$ on a pour $n = p_1 p_2 n_1 n_2 n_3$ le canon de Vuza suivant :*

---

8 Alban Berg par exemple l'a utilisé pour transformer des séries dodécaphoniques dans son opéra *Lulu*.

9 À rotation près.

$$A = n_2 n_3 \times (\llbracket 0, p_2 - 1 \rrbracket \oplus p_2 n_1 \times \llbracket 0, p_1 - 1 \rrbracket) \qquad B = n_1 n_3 \times (\llbracket 0, p_1 - 1 \rrbracket \oplus p_1 n_2 \times \llbracket 0, p_2 - 1 \rrbracket)$$

$$S = n_3 (p_2 n_2 \times \llbracket 0, n_1 - 1 \rrbracket \oplus p_1 n_1 \times \llbracket 0, n_2 - 1 \rrbracket) \qquad R = \big(\llbracket 1, n_3 - 1 \rrbracket \oplus B\big) \cup A$$

$$R \oplus S = \mathbb{Z}_n$$

La factorisation de n est générale : si on ne peut ainsi écrire n c'est que $\mathbb{Z}_n$ est un bon groupe ([18]). Une autre façon de l'écrire [18] consiste à énumérer les cardinaux des « bons » groupes :

Théorème (Hajòs, Redei, de Bruijn, Sands,...). — *Les « bons groupes » cycliques sont les $\mathbb{Z}_n$ tels que n s'écrive de l'une des façons suivantes (où p, q, r, s sont des nombres premiers distincts) :*

$$n = p^{\alpha} \qquad n = p^{\alpha} q \qquad n = p^2 q^2 \qquad n = p^2 qr \qquad n = pqrs.$$

Remarque. — si $\mathbb{Z}_n$ a un sous-groupe qui est « mauvais », alors on montre que $\mathbb{Z}_n$ est aussi « mauvais ».

Ces canons sont d'un grand intérêt pour les compositeurs, car ils introduisent une non-répétitivité dans la régularité (du phénomène globalement périodique), un peu comme la rime en poésie. La notion a beau être relativement récente, une liste d'outils sur les canons de Vuza est présente dans divers logiciels d'aide à la composition, comme *Open Music* développé à l'Ircam, et plusieurs compositeurs contemporains (George Bloch, Fabien Lévy) s'en servent dans leurs œuvres. J'ai par exemple sur mon piano un morceau très simple de G. Bloch qui a servi de musique pour une version française d'un film de Hitchcock. Il nous a expliqué de façon très convaincante pourquoi ces cellules qui se répètent, mais à intervalles imprévisibles, excellent à faire monter la tension du spectateur/auditeur !

Génération de canons

Poussés par le dynamisme des compositeurs, nous avons étudié nombre de transformations sur les canons rythmiques.

Plusieurs transformations

Le groupe affine

Le Lemme 4 donne l'exemple même d'une transformation non triviale, qui préserve la notion de canon sous l'action d'un groupe. Il s'agit ici du groupe affine $Aff(\mathbb{Z}_n)$. Souvenons-nous en effet que l'on a convenu d'identifier un motif rythmique A à la classe de tous ses translatés $A + m \mod n$. Le lemme 1 rajoute les homothéties (de rapport a inversible) et on a donc affaire aux orbites sous les actions de toutes les bijections $x \mapsto ax + b$ dans $\mathbb{Z}_n$. La figure suivante montre une telle orbite et les canons correspondants : $(0, 1, 4, 5)$ et $(0, 3, 4, 7)$ sont les deux formes du motif modulo 8.

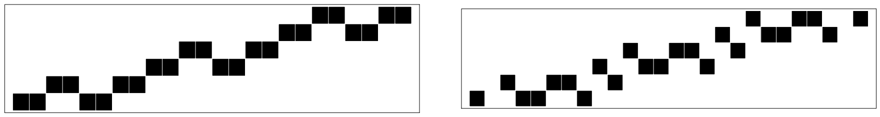


Fig. 12 – Orbite d'un motif sous l'action du groupe affine

Le lemme 4 prouve que les conditions (T_1) et (T_2) de [5] sont préservées par une telle transformation.

Je me suis posé la question de généraliser ce résultat aux autres transformations utilisées par les musiciens. Les voici.

Zoom/augmentation

Cette transformation revient à dilater le temps et à remplacer une note (ou un silence) par k notes (ou silences). Illustration :

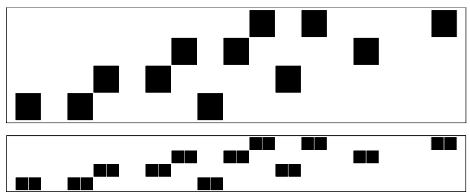


Fig. 13 – Zoom d'un canon rythmique

Du point de vue polynômial, on change $B(X)$ en $B(X^k)$ et $A(X)$ en $A(X^k)\times(1+X+\ldots+X^{k-1})$. En travaillant par récurrence sur les facteurs premiers de k, j'ai pu montrer dans [3] que cette opération préserve aussi les conditions (T_1) et (T_2) de [5].

L'importance particulière de cette opération vient de ce qu'elle permet de fabriquer de nouveaux «canons de Vuza», à partir d'anciens. On obtient ainsi des canons inédits (non fournis par l'algorithme de Vuza). Cela a été remarqué par divers chercheurs (Carlos Agon, Thomas Noll) et notamment par Harald Fripertinger de l'université de Graz, qui a donné des formules remarquables de dénombrement des canons rythmiques et s'est lancé à la recherche de tous les canons de Vuza de «petite» taille. Une amicale compétition (il a gagné) nous a permis en 2003-2004 de trouver force nouveaux canons de période 108, 120 ou 144. Au colloque de Graz [7] en mai 2004, Harald a fait sensation en montrant que tous les canons de Vuza que nous avions trouvés pour les deux premières périodes, 72 et 108, étaient en vérité les seuls possibles. Pour cela il s'est appuyé à la fois sur des algorithmes habilement conçus par ses soins, des actions de groupes et dénombrements d'orbites à coups d'équation aux classes, et de la combinatoire (théorie de Polya). Incidemment, les canons de Vuza apparaissent comme un matériau exceptionnellement rare (probabilité inférieure au 1 millionième), ce qui a son intérêt pour la suite.

Concaténation

L'opération de concaténation est très simple, elle consiste à répéter un même motif à la queue-leu-leu plusieurs fois :

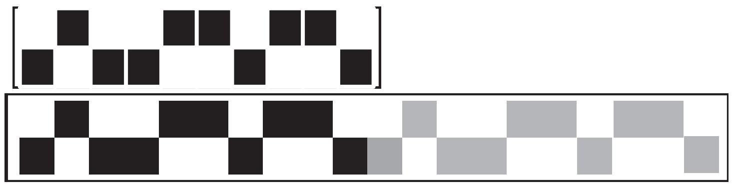


Fig. 14 – Un canon rythmique répété

Je suis redevable à H. Fripertinger pour m'avoir fait comprendre l'importance théorique de cette opération si simple. Elle lui a permis [8] de donner des formules exactes pour dénombrer les canons dans les « bons groupes », puisque par définition même un des facteurs d'une décomposition en somme directe d'un tel groupe est concaténé $\{0,1\} \oplus \{0,2\} \to \{0,1,4,5\} \oplus \{0,2\}$ d'un motif plus court. Ceci permet de proche en proche de trouver tous les canons de période donnée, à condition d'éviter les périodes fatidiques 72, 108, 120, etc.

Cette opération consiste, polynômialement, à multiplier $A(X)$ par ce que j'appelle un métronome :

Définition 4. — *Un métronome est un motif de la forme*

$$A = (0, k, 2k, 3k, \ldots (m-1)k)$$

i.e.

$$A(X) = 1 + X^k + X^{2k} + \ldots + X^{(m-1)k} = \frac{X^{mk} - 1}{X^k - 1} = \prod_{d \mid mk \text{ et } d \nmid k} \Phi_d.$$

Il en résulte assez facilement (cf. [3]), travaillant avec m premier sans perte de généralité, le

Théorème 9. — *Si A s'obtient par concaténation de $\tilde{A}$, pavant avec B, alors l'un vérifie (T_2) si et seulement si l'autre vérifie aussi (T_2).*

Entrelacement et équirépartition

Ce procédé n'est pas (encore) connu des musiciens mais je ne doute pas qu'ils en fassent bientôt leurs choux gras. Je l'ai découvert dans un article récent et très général (de Kolountzakis et Matolcsi, [12]) (dans un contexte d'algèbre commutative), mais il s'avère que vu sous un autre angle, c'est un outil essentiel pour le dernier théorème de [5], le plus difficile. Je reformule ensemble ces différents résultats. La démonstration n'en est pas très difficile (le lecteur courageux pourra s'y essayer) :

Théorème 10. — *Soient $A_1, \ldots A_k$ des motifs qui pavent un canon rythmique avec un MÊME B. Alors on obtient un canon rythmique en posant $A = \cup_{i=0\ldots k-1}(i + kA_i)$, qui pave avec kB.*

Réciproquement, un tel canon est caractérisé par le fait que l'« outer rhythm » B est multiple d'une constante $k > 1$: $B \subset k\mathbb{Z}$, ou, de manière équivalente, par le fait que A est équiréparti modulo k : les ensembles

$$\widehat{A}_i = A \cap (i + k\mathbb{Z})$$

ont tous même cardinal, et pavent avec un même $\widehat{B} = B/k$.

On peut ainsi fabriquer de nouveaux canons de Vuza, par exemple en prenant pour les A_i (une partie de) l'orbite d'un motif sous le groupe affine. De façon bien plus remarquable, tous les canons Vuza recensés (ceux obtenus par algorithme et les autres) peuvent être fabriqués par ce procédé à partir de canons plus petits, qu'ils soient de Vuza ou pas.

La figure ci-dessous illustre la genèse d'un canon de période 72. On y reconnaît (cf. la voix supérieure) les deux motifs génériques qui sont dilatés et s'entrelacent pour donner le motif final.

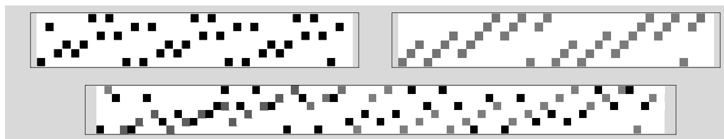


Fig. 15 – Un canon de Vuza 72 *comme entrelacement de deux canons* 36

Réduction des canons rythmiques

Les canons de Vuza sont finalement assez similaires aux nombres premiers, au sens où ils sont «irréductibles», et engendrent tous les autres canons ; en effet, résulte de leur définition le :

Théorème 11. — *On peut réduire récursivement tout canon par déconcaténation — l'opération inverse de la concaténation — appliquée à l'un des deux termes A ou B, soit à un canon de Vuza, soit au canon trivial ($\{0\} \oplus \{0\}$).*

Nous disposons finalement de diverses transformations, dont plusieurs (zoom, concaténation, entrelacement) changent la période ; toutes ces opérations conservent les conditions $(T_1), (T_2)$ de Coven-Meyerowitz et il est temps de mentionner le lien avec la conjecture spectrale.

La conjecture de Fuglede

La conjecture spectrale

Dans le cas le plus général, la conjecture publiée par Fuglede en 1974 ([13]) est une question qui relie la géométrie et l'analyse harmonique :

Conjecture Spectrale (1974). — *Un domaine K (compact d'intérieur non vide) pave $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire qu'il existe $B \subset \mathbb{R}^n$ tel que*

$$\bigcup_{b \in B} b + K = \mathbb{R}^n \text{ et } \overbrace{b+K}^{\circ} \cap \overbrace{b'+K}^{\circ} = \varnothing \text{ pour } b \neq b'$$

si et seulement si K possède une base hilbertienne, i.e. il existe une famille Λ telle que $(x \mapsto e^{2i\pi<\lambda,x>})_{\lambda\in\Lambda}$ est une famille orthonormée qui engendre une partie dense de $\mathcal{L}^2(K)$.

Fuglede a prouvé sa conjecture dans le cas où B est un réseau ($B \approx \mathbb{Z}^n$). On comprend mieux cette conjecture dans le cas simple où K est par exemple l'hypercube unité : il suffit alors de prendre pour K le réseau $\mathbb{Z}^n$, c'est la théorie de la décomposition en série de Fourier.

Jusqu'à l'été 2003, tous les résultats publiés sont allés dans le sens de la confirmation de cette conjecture. Elle est vraie en particulier pour tous les K assez réguliers (les convexes plans, par exemple). Comme il s'agit d'orthogonalité dans $\mathbb{R}^n$, on a assez vite établi une condition équivalente en terme d'existence d'une matrice de Hadamard douée de propriétés adéquates.

C'est en exhibant des matrices de Hadamard complexes que Terence Tao a finalement prouvé que cette conjecture est fausse en dimension $\geqslant 5$. Depuis on a trouvé des contre-exemples dans les deux sens, dont la dimension est descendue à 3 [12]. Mais cela reste un problème ouvert en dimension 1 malgré une kyrielle de résultats partiels (cf. [13]). Un des plus récents concerne les produits de métronomes, au sens de la définition ci-dessus ([14]). Il est en partie contenu dans le théorème que je démontre ci-dessous.

Notons le lien trivial entre pavages de $\mathbb{R}$ et pavages de $\mathbb{Z}$: si A pave $\mathbb{Z}$ alors $A + [0, 1[$ pave $\mathbb{R}$. La réciproque est moins triviale mais résulte des travaux de Vuza et de façon très différente de Lagarias & Wang [15].

La conjecture spectrale en dimension 1

Izabella Laba, lisant l'article de Coven-Meyerowitz, a rapidement compris qu'on pouvait en tirer une connexion à la conjecture spectrale. Elle publia peu après (2000) [13] le résultat suivant :

Proposition. — *$(T_1) + (T_2) \Rightarrow$ spectral (et spectral $\Rightarrow (T_1)$).*

Cela utilise des calculs élémentaires, et le lemme suivant qui caractérise le caractère spectral en dimension 1 (on peut le prendre comme définition) :

Lemme 5. — *A pave $\mathbb{Z}$ si et seulement si il existe une famille $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \lambda_{k-1}, k = |A| = A(1)$ telle que les $e^{2i\pi\lambda_j}$ soient racines de $A(X)$.*

Laba prend tout simplement des λ_j de la forme $i/p^\alpha,\ i = 0 \dots p-1$, pour montrer que si (T_2) est vérifiée alors A est spectral.

Remarque 4. — Il ne faut pas croire que le caractère 0-1 du polynôme $A(X)$ oblige ses racines de module 1 a être d'ordre fini dans S^1. En d'autres termes, théoriquement un spectre peut très bien exister et être irrationnel :

Exercice 7. — Trouver un polynôme 0-1 ayant des racines de module 1 d'ordre infini.

D'après ce résultat de Laba, si un motif rythmique pave mais qu'il n'est pas spectral, il ne peut vérifier (T_2). Mais si l'on en croit le principe de réduction énoncé au théorème 11, cela ne peut se produire que dans un groupe non-Hajós. En effet, tout pavage dans un « bon groupe » se réduit récursivement à des canons plus petits dans des sous-groupes, qui sont donc encore « bons », et donc on peut encore réduire jusqu'à tomber sur le canon trivial à une note, $(0) \oplus (0)$. Qui vérifie la condition (T_2) (!). Par conservation d'icelle dans le procédé de concaténation des canons (voir le théorème 9), on déduit

Théorème (Amiot, juin 2004). — *Si un canon n'est pas spectral, alors il peut se réduire par déconcaténation à un canon de Vuza, lui aussi non spectral. A fortiori, si n a l'une des formes suivantes (p, q, r, s étant des nombres premiers distincts) :*

$$n = p^\alpha \qquad n = p^\alpha q \qquad n = p^2 q^2 \qquad n = p^2 qr \qquad n = pqrs$$

alors tout motif d'un canon rythmique de période n est spectral.

On peut même aller plus loin en prenant au lieu de la période n la taille du motif ($=$ le nombre de notes $= A(1)$). Les trois premiers cas avec deux facteurs premiers résultent du théorème $(B2)$ de [5], les deux derniers sont nouveaux à ma connaissance.

Ce résultat s'applique aussi aux pavages d'un intervalle d'entiers, que j'appelle canons compacts (ceux pour lesquels il est inutile de procéder à une réduction modulo n car on a $A \oplus B = [\![0, n-1]\!]$ dans $\mathbb{N}$, par exemple $\{0, 1, 4, 5\} \oplus \{0, 2\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$), car d'après un résultat ancien de De Bruijn ils sont tous déconcaténables.

Corollaire 2. — *En conséquence de l'énumération par Fripertinger des canons de Vuza pour $n = 72, 108$ nous savons que tous les canons de période $\leqslant 108$ (et même jusqu'à 119) sont spectraux (au sens où aussi bien A, le « inner rhythm », que le « outer rhythm » B, sont spectraux).*

Ceci suggère une idée assez intuitive, à savoir que s'il existe un motif A qui pave sans vérifier (T_2), alors A, n doivent être grands. Jusqu'ici, tous les algorithmes qui fabriquent des canons de Vuza assurent que (T_2) est vérifiée, et tous les procédés d'augmentation de taille des canons vus ci-dessus conservent cette propriété : on ne sait donc vraiment pas comment construire un éventuel canon de Vuza qui nie la propriété (T_2), ce qui ne prouve pas qu'il n'en existe pas puisqu'on ne sait pas comment les construire tous...

Réduction par équirépartition

Il ne paraissait pas impossible d'espérer réduire TOUS les canons de Vuza, et donc de démontrer le sens (pave $\Rightarrow$ spectral) de la conjecture de Fuglede.

En effet l'algorithme de Vuza fabrique toujours un second membre multiple de n_3 (cf. la formule de Jedrzejewski). Dans ce cas on a équirépartition de l'inner rhythm modulo n_3 (cf. [5], lemme 2.5). Le groupe affine préserve d'ailleurs cette condition d'équirépartition. Mais elle signifie que l'on peut réduire un tel canon à un canon plus petit, en préservant la condition (T_2). Si donc il s'avérait que TOUT canon de Vuza ait, à l'instar de ceux que l'on sait fabriquer, un facteur équiréparti, la méthode de réduction (utilisant dualité, concaténation, équirépartition selon le cas) permettrait de réduire TOUT canon au canon trivial. Ce qui démontrerait la condition (T_2) pour tout canon, ce dont on pourrait déduire (un sens au moins de) la conjecture de Fuglede.

Le cimetière des conjectures

Mais le champ de bataille des canons rythmiques est jonché des cadavres de nombreuses conjectures... À commencer, historiquement au tout début, par la conjecture de De Bruijn : *si un groupe abélien fini est somme directe de A et B alors l'un des deux est périodique*, tuée dans l'œuf par les canons de Vuza et bien avant cela, par les contre-exemples de Redei, Hajòs, De Bruijn et consorts.

La conjecture de Fuglede a certes tenu 31 ans avant de connaître son premier contre-exemple – mais il est vrai qu'elle aura été prouvée dans nombre de cas particuliers ; au contraire, brèves auront été la vie de celle de Tijdeman 1996 (si ppcm(A)=1 alors il existe un nombre premier tel que $B \subset p\mathbb{Z}$, tuée par Szabó), ou de celle de Lagarias & Wang (si T pave avec les compléments $T_1, \ldots T_n$ alors ils sont spectraux et de même spectre) qui fut victime de Kolountzakis & Matolcsi en juin 2004 [12].

On ignore actuellement si la conjecture que Coven et Meyerowitz se sont soigneusement retenus d'énoncer (pave $\Rightarrow (T_2)$) est prouvable ; elle est logiquement plus forte que le sens (pave $\Rightarrow$ spectral) de celle de Fuglede, d'après Laba. Les résultats en sens inverse sont encore peu nombreux (si A est spectral alors ?...), à part [14] qui utilise des métronomes c'est-à-dire des canons très simples, et il est difficile de se faire une opinion sur cette direction.

Mais je finirai cette hécatombe par l'extermination de ma propre conjecture. En effet, la construction mentionnée par [5] du hongrois Szabó dans [19] réfute au départ une conjecture de Sands, proche de celle de Tijdeman. Mais il s'avère qu'elle donne, incidemment, un canon de Vuza, qui n'est donc par définition pas réductible par dé-concaténation, et par construction pas réductible par équirépartition ! Signalons tout de même que le plus petit contre-exemple donné par cette méthode, que j'ai implémenté avec *Mathematica*™, est de période 30030, ce qui explique qu'il n'ait pas sauté aux yeux. De plus la méthode de construction est particulièrement perfide, même si elle n'est pas sans rappeler certains procédés de construction des canons de Vuza ; j'en donne ici l'idée très simplifiée.

En hommage au théorème de De Bruijn intitulé 'on British Number systems', j'emprunterai une métaphore pécuniaire. On considère un ensemble de pièces et de billets qui permettent de payer exactement n'importe quelle somme ($< n$). On prend pour A la somme des « pièces jaunes », et pour B' les sommes de « gros billets ». De façon encore plus imagée, A contient les unités et B' les dizaines, et $A \oplus B' = [\![0, n-1]\!]$. Dans l'exemple donné plus bas, $B' = \{0, 30, 60, \ldots 30k, \ldots\}$.

L'idée hongroise consiste alors à perturber B' en une nouvelle partie B, en modifiant certains éléments, choisis exprès irrégulièrement, par l'ajout d'un élément variable de A, tout cela variant circulairement ; ceci ne modifie pas le fait que $A \oplus B = \mathbb{Z}_n$ mais cela rend B plus irrégulier. Avec certaines conditions techniques (cf. [19]) on montre que B (ainsi que, plus trivialement, A) engendre $\mathbb{Z}_n$ et en conséquence, qu'il n'est pas contenu dans un sous-groupe strict $k\,\mathbb{Z}_n$: donc pas de réduction possible par équirépartition. De plus, la méthode employée assure qu'on a affaire à deux facteurs A, B apériodiques, et donc à un canon de Vuza... Le plus petit que j'ai pu construire de cette façon est de période 900 :

$$A = (0, 36, 72, 100, 108, 136, 144, 172, 200, 208, 225, 236, 244, 261, 272, 297, 308, \\ 325, 333, 344, 361, 369, 397, 425, 433, 461, 469, 497, 533, 569)$$

$$B = (0, 30, 60, 90, 156, 210, 240, 250, 270, 330, 336, 360, 390, 405, 420, 510, \\ 516, 540, 550, 570, 600, 690, 696, 720, 780, 810, 850, 855, 870, 876).$$

Coda

Stretta

Nous pouvons nous croire arrivés bien loin de *Frère Jacques* et de son petit canon à quatre voix. Mais les contre-exemples obtenus par des arguments sophistiqués à ces conjectures mathématiques pointues permettent de mettre en évidence des objets musicaux doués de propriétés intéressantes, qui vont certainement faire leur apparition dans des partitions prochaines : cela a déjà été le cas par le passé, particulièrement avec les canons de Vuza mais aussi dans bien des domaines – il n'est pas nouveau que des idées mathématiques servent, consciemment ou non, l'inspiration de musiciens.

En retour, et de façon bien plus novatrice, on peut espérer que les suggestions des compositeurs continuent, comme elles ont commencé de le faire, à éclairer la recherche mathématique de leurs idées spécifiques. L'étonnante fécondité de cette irruption de la musique dans les mathématiques s'explique à mon avis par la fringale des mathématiciens pour les concepts nouveaux, qui ont toujours servi spectaculairement l'avancement de notre science : bien des outils mathématiques aujourd'hui banals sont issus de la physique, bien sûr, mais aussi de la biologie, de l'économie, etc. Prophétisons que le temps est venu de reformer et d'élargir le *Quadrivium* antique, la musique reprenant avec les autres son statut de pilier de la connaissance.

Solutions des exercices

Exercice 1. Canon de période $2 \times \ell(A)$

Il suffit de prendre $A = (0, n-1)$ qui pave avec $B = (0, 1, \dots, n-1)$ mais pas moins.

Exercice 2. Perfect square tilings

Partant de : $\sum_{i \in I} X^{k_i} \Phi_3(X^i) = 1 + X + \dots = \sum_{j=0}^{3n-1} X^j = \dfrac{X^{3n}-1}{X-1}$, on pose $X = j = e^{2i\pi/3}$: les indices i multiples de 3 sont caractérisés par le fait que $\Phi_3(j^i) = \Phi_3(1) = 3 \neq 0$. Pour tout autre indice on aura $\Phi_3(j^i) = 0$ – c'est la relation classique $1 + j + j^2 = 0$. Il reste donc une somme des $j^{k_i}, i \in 3\mathbb{N}$ qui doit valoir 0. Or la plus courte somme valant 0 est encore $1 + j + j^2 = 0$, ce qui impose qu'il y ait 0 ou 3 (ou 6, ou 9...) multiples de trois parmi les indices i. Cela explique pourquoi T_3 n'apparaît pas sans T_6 et T_9.

Exercice 3. $(1, 4, 9, 16)$ pave-t-il ?

Non. On a bien deux facteurs cyclotomiques, d'indices 2 et 10, mais la condition (T_1) n'est pas vérifiée, sans parler de (T_2).

$$X^{16} + X^9 + X^4 + X = X \times (1+X) \times (1 - X + X^2 - X^3 + X^4) \times (1 + X^3 - X^5 + X10)$$

(il faut un logiciel de calcul formel si on veut factoriser sans efforts ; en revanche on liste facilement les polynômes cyclotomiques du style $\Phi_{p^\alpha} = 1 + X^{p^{\alpha-1}} + X^{2p^{\alpha-1}} + \dots$ et on teste s'ils sont diviseurs).

Exercice 4. Pavage modulo 2

La plus petite solution pour paver modulo 2 avec $A = (0, 1, 3)$ est $B = (0, 2, 3)$. En effet $A + B = \{0, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6\}$.

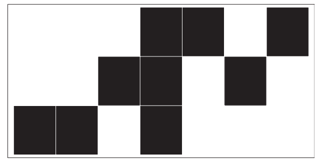


Fig. 16 – pavage modulo 2 *avec* $(0, 1, 3)$

Exercice 5. Éléments d'ordre 15 dans le corps à 16 éléments

Dans la discussion du problème de Johnson, on a vu que le polynôme (irréductible sur $\mathbb{F}_2[X]$) $J(X) = 1 + X + X^4$ a 4 racines d'ordre 15 dans $\mathbb{F}_{16}$. Leurs inverses sont aussi d'ordre 15, elles sont racines du polynôme réciproque $1 + X^3 + X^4$. On a alors $\Phi(15) = 8$ éléments d'ordre 15, on n'en trouvera pas plus (Φ désignant la fonction d'Euler).

Exercice 6. Transformation affine

Si α est premier avec n, alors l'application $k \mapsto \alpha k \mod n$ est une bijection. Donc A et αA sont en correspondance bijective, et leurs polynômes associés sont bien 0-1.

Exercice 7. Nombres algébriques de module 1 non racines de l'unité

Ma plus petite solution est $A(X) = 1 + X + X^3 + X^5 + X^6$, dont les quatre racines non réelles peuvent être exprimées par radicaux (poser $Y = X + 1/X$) et sont de module 1, mais ce ne sont pas des racines de l'unité (sinon $A(X)$ aurait un facteur cyclotomique).

Références

[1] Al Fakir, S., *Algèbre et théorie des nombres*, T2, Ellipses 2004.
[2] Amiot, E., *Why Rhythmic Canons are Interesting*, in : E. Lluis-Puebla, G. Mazzola et T. Noll (eds.), *Perspectives of Mathematical and Computer-Aided Music Theory, EpOs*, 190–209, Universität Osnabrück, 2004.
[3] Amiot, E., *Rhythmic canons and Galois theory*, Grazer Math. Ber., 347 (2005), 1–25.
[4] Andreatta, M., *On group-theoretical methods applied to music : some compositional and implementational aspects*, in : E. Lluis-Puebla, G. Mazzola et T. Noll (eds.), *Perspectives of Mathematical and Computer-Aided Music Theory, EpOs*, 122–162, Universität Osnabrück, 2004.
[5] Coven, E., and Meyerowitz, A. *Tiling the integers with one finite set*, in : *J. Alg.*, 212 :161-174, 1999.
[6] DeBruijn, N.G., *On Number Systems*, Nieuw. Arch. Wisk. (3) 4, 1956, 15–17.
[7] Fripertinger, H. *Remarks on Rhythmical Canons*, Grazer Math. Ber., 347 (2005), 55–68.
[8] Fripertinger, H. *Tiling problems in music theory*, in : E. Lluis-Puebla, G. Mazzola et T. Noll (eds.), *Perspectives of Mathematical and Computer-Aided Music Theory, EpOs*, 149–164, Universität Osnabrück, 2004.
[9] Hajós, G., *Sur les factorisations des groupes abéliens*, in : *Casopsis Pest. Mat. Fys.*,74 :157-162,1954.
[10] Johnson, T., *Tiling The Line*, proceedings of J.I.M., Royan, 2001.

[11] Jedrzejewski, F., *A simple way to compute Vuza canons*, MaMuX seminar, January 2004, http ://www.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/.
[12] Kolountzakis, M. & Matolcsi, M., *Complex Hadamard Matrices and the spectral set conjecture* , http ://arxiv.org/abs/math.CA/0411512.
[13] Laba, I., *The spectral set conjecture and multiplicative properties of roots of polynomials*, J. London Math. Soc. 65 (2002), 661-671.
[14] Laba, I., and Konyagin, S., *Spectra of certain types of polynomials and tiling of integers with translates of finite sets*, J. Num. Th. 103 (2003), nº 2, 267-280.
[15] Lagarias, J., and Wang, Y. *Tiling the line with translates of one tile*, in : *Inv. Math.*, 124 :341-365, 1996.
[16] Tangian, A., *The Sieve of Eratosthene for Diophantine Equations in Integer Polynomials and Johnson's problem*, disc. paper N° 309 Fern Universität Hagen.
[17] Tijdeman, R., *Decomposition of the Integers as a direct sum of two subsets*, in : *Séminaire de théorie des nombres de Paris*, 3D, p.261-276, Cambridge U.P, 1995.
[18] Sands, A.D., *The Factorization of abelian groups*, Quart. J. Math. Oxford, 10(2) :45–54.
[19] Szabó, S., A type of factorization of finite abelian groups, Discrete Math. 54 (1985), 121–124.
[20] Vuza, D.T., *Supplementary Sets and Regular Complementary Unending Canons*, in four parts in : *Canons. Persp. of New Music*, nos 29(2) pp.22-49 ; 30(1), pp. 184-207 ; 30(2), pp. 102-125 ; 31(1), pp. 270-305, 1991-1992.
[21] Warusfel, *Structures Algébriques finies*, Classiques Hachette, 1971.
[22] Wild, J., *Tessellating the chromatic*, Perspectives of New Music, 2002.
[23] *Midi files for the illustrations in this paper*, as part of my website dedicated to rhythmic canons, at http ://canonsrythmiques.free.fr/midiFiles/, 2004.

HISTOIRE

Le Zéro et le un[1], un travail d'historien sur la notion scientifique d'information

Marie-José Durand-Richard

Les discours médiatiques sur « la révolution informationnelle » ne cessent d'insister sur le rôle central de l'information et de la communication, qui caractériserait le passage au XXI[e] siècle dans les sociétés modernes, via les nouvelles technologies. Effet de mode ou mutation profonde de nos représentations ? L'envahissement du « numérique » est tellement flagrant, et les restructurations qui accompagnent l'informatisation des entreprises tellement douloureuses qu'il est difficile d'acquérir le recul indispensable pour apprécier l'ampleur véritable de ces transformations : elles affectent si profondément le vécu individuel et collectif qu'il peut être tentant d'y voir la naissance d'un nouveau paradigme. Un récent ouvrage de Jérôme Segal, *Le zéro et le un*, remarquablement documenté, nous offre les moyens d'un tel recul, et nous guide pas à pas dans les linéaments du travail scientifique et des questionnements qu'il fait naître et dont il se nourrit. Le panorama est impressionnant, alliant concision technique et clarté du propos, tandis qu'une bibliographie de 70 pages invite le lecteur curieux[2] à poursuivre l'enquête à travers textes scientifiques, fonds d'archives et sites Internet. Ce regard d'historien tranche avec les « histoires » par trop apologétiques de l'informatique ou des sciences cognitives, souvent publiées par les acteurs eux-mêmes au cours des cinquante dernières années. Si Jérôme Segal a lui-même interviewé bon nombre de ces acteurs, directement ou par correspondance, il en délaisse la présentation biographique, et ses tendances méthodologiquement hagiographiques, pour intégrer leurs contributions à une histoire contextuelle extrêmement vivante, qu'il situe délibérément entre histoire des idées et histoire des institutions.

Il n'est pas question pour lui de célébrer les formidables ruptures que signifieraient la cybernétique ou l'intelligence artificielle, mais de situer les convergences techniques et épistémologiques qui ont conduit à donner à « l'information » une définition scientifique, et, pour ce faire, à l'envisager en termes quantitatifs plutôt que qualitatifs. Dans un second temps sont examinées les multiples implications de ce basculement du qualitatif au quantitatif, dont les enjeux sont tout à la fois d'ordre philosophique, économique, et idéologique. La question majeure porte sur

[1] Cette étude se réfère à l'ouvrage de Jérôme Segal paru en 2004, *Le Zéro et le Un, Histoire de la notion scientifique d'information au XX[e] siècle,* Paris, Éd. Syllepse, Coll. « Matériologiques », Préf. A. Danchin.

[2] Les références bibliographiques qui suivent, pour abondantes qu'elles soient, n'en sont qu'un aperçu. Elles sont presque exclusivement les siennes, et permettront à ce lecteur potentiel d'aborder au moins l'étude des textes les plus marquants.

la validité de la tentative d'unification qui prend corps autour de cette nouvelle conception, unification de processus qui caractérisent tout autant l'autonomie de domaines organisés que celle des « opérations de l'esprit », auxquelles cette faculté d'autonomie est si souvent rapportée.

Une formulation mathématique commune, à quel prix ?

L'élaboration de la notion scientifique d'information suppose une formulation mathématique qui ne va pas sans risque. Cette nouvelle expression de l'information, née dans l'entre-deux-guerres, signe une rencontre capitale entre la théorie des probabilités et des domaines initialement aussi éloignés les uns des autres que la théorie cinétique des gaz, la génétique des populations, les télécommunications et la cryptologie. C'est en effet le formalisme probabiliste qui permet d'exprimer la « quantité d'information » en fonction du logarithme des fréquences des symboles utilisés. Jérôme Segal était intervenu à ce sujet lors d'une séance du séminaire d'histoire des mathématiques de l'Institut Henri Poincaré, pour souligner la diversité des approches scientifiques et techniques par lesquelles ce mot du langage courant a pris une signification spécifique nouvelle[3]. Les rapprochements entre physique stochastique et théorie des probabilités sont issus des travaux du physicien hongrois Léo Szilard[4] (1898-1964), poursuivis par Norbert Wiener[5] (1894-1964) du côté du mouvement brownien, et par John von Neumann (1903-57) du côté de la mécanique quantique[6] ; la caractérisation mathématique d'un échantillon statistique émerge des recherches du biométricien Ronald A. Fisher[7] (1890-1962), ou de celles d'ingénieurs en télécommunications comme Karl Küpfmüller[8] (1897-1977) en Allemagne ou Harry Nyquist[9] (1889-1970) et Ralph V.L. Hartley[10] (1888-1970) aux États-Unis. Toutes ces prises en compte des aléas de notre connaissance déboucheront sur la formule établie dans ce cadre par Claude Shannon[11] (1913-2001) en 1945 dans le cadre de la théorie du signal :

$$H = \sum_{i=0}^{n} \frac{n_i}{N} \log_2 \frac{N}{n_i} = -\sum_{i=0}^{n} p_i \log_2 p_i$$

---

[3] Cette séance du séminaire avait fait l'objet d'un compte rendu dans *La Gazette des Mathématiciens*, n° 91, janvier 2002, 18-29.

[4] Szilard, L., 1972-87, *The Collected Works of Léo Szilard*, Cambridge, MIT Press, 3 vols.

[5] Wiener, N., 1921, "The average of an analytical functional and the Brownian movement", *Proceedings of the National Academy of Science*, 7, 294-298.

[6] Neumann, J. von, 1932, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin, Verlag von Julius Springer, New York, Dover, 1943, Paris, PUF, 1947.

[7] Fisher, R.A., 1925, "The Theory of Statistical Estimation", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 22, 700-725.

[8] Küpfmüller, K, 1924, "Über Einschwingvorgänge in Wellenfiltern", *Elektrische Nachrichten Technik*, 1, Helft 5, 141-152.

[9] Nyquist, H., 1924, "Certain Factors Affecting Telegraph Spee", *Bell System Technical Journal*, 3, april, 324-346.

[10] Hartley, R.V.L., 1928, "Transmission of Information", *Bell System Technical Journal*, 7, 535-563.

[11] Shannon, C., 1945, *A Mathematical Theory of Cryptography*, Memorandum MM 45-110-02 ; 1948, "A Mathematical Theory of Communication", *Bell System Technical Journal*, 28, 59-98.

où N représente le nombre de choix possibles de signes utilisés, n_i le nombre de choix effectifs de ces signes, et p_i les probabilités correspondantes, selon la loi induite par leur répartition initiale dans le code utilisé pour constituer les messages. L'intervention du logarithme et des probabilités est destinée à exprimer le caractère additif de cette « quantité d'information », ainsi que la réduction de l'équivoque dont est porteur le choix qu'elle représente. Du fait de cette approche stochastique, cette définition ne se réfère donc pas à la situation d'un message particulier, considéré en tant que tel, mais sa situation dans l'ensemble des messages envisagés pour un « alphabet » et un « codage » donnés. Elle n'est pas destinée à évaluer le contenu spécifique des renseignements fournis, mais seulement l'efficacité de leur composition et de leur transmission, qu'elles soient verbales ou machiniques.

Outre l'ambiguïté qui reste attachée à la multiplicité d'origines de cette définition, la quantification de la notion d'information bute immédiatement sur un problème aussi crucial qu'épineux : une relation persiste-t-elle entre le sens courant du mot « information » et celui de cette quantité ? En devenant objectivable, l'information semble bien perdre toute dimension sémantique. C'est là un questionnement d'autant plus urgent que les effets de cette mutation du sens de ce mot se manifestent concrètement au présent, avec le développement des « nouvelles technologies de l'information et de la communication ». L'histoire des sciences regorge cependant d'autres cas où le renforcement de la puissance du « comment ? » va de pair avec le renoncement à certaines ambitions du « pourquoi ? », comme prix à payer de l'objectivation et de l'efficacité de la science. À titre de comparaison, Jérôme Segal évoque le cas de l'énergétique au tournant du XX^e^ siècle, dont Wilhelm Ostwald[12] (1853-1932) espérait le dépassement de l'opposition entre force et matière, voire entre esprit et corps. Et le basculement des notions de « force », de « mouvement » ou d'« attraction » dans le domaine scientifique fut tout aussi problématique au moment de la constitution de la science classique au XVII^e^ siècle : la mathématisation du mouvement, au sein d'une physique qui appréhende alors la matière comme inerte, participe de la réification de mouvements humains, antérieurement appréhendés comme signes de l'autonomie du vivant ; ils se trouvent assimilés à une action machinique, au sens où des causes agissantes préétablies et identifiables produisent leurs effets selon des « lois de la nature ». Dans le cas présent, ce qui apparaît comme un renoncement à la signification de l'information soulève des réticences d'autant plus vives qu'elle touche à une caractérisation de l'humain à la fois comme « être pensant » et comme « animal politique » au sens aristotélicien du terme, qui avait résisté à l'emprise des « lois de la nature », et dont la science classique ne s'était pas emparée. Face à ce nouveau monisme, les réticences sont si fortes qu'elles tendent à laisser dans l'ombre les significations nouvelles que fait surgir la quantification de l'information, et qui sont à identifier non plus du côté de l'émission individuelle du message, mais du côté de l'organisation collective de la transmission des messages. C'est la difficulté à appréhender tous les enjeux de cette mutation que l'analyse comparatiste de Jérôme Segal éclaire dans tous ses cheminements, aussi bien conceptuels et institutionnels que géographiques et chronologiques.

[12] Ostwald, W., 1912, *Die Energie*, Leipzig, Barth.

Un contexte spécifique, celui de la Seconde Guerre Mondiale

Aussi puissantes soient-elles, les idées scientifiques ne s'imposent pourtant pas d'elles-mêmes, et un des grands mérites de cette enquête est de nous renseigner très précisément sur le contexte politique, économique et philosophique, qui a vu ce nouveau champ disciplinaire prendre corps. Si différentes approches de la notion scientifique d'information se font jour en Europe pendant l'entre-deux-guerres, la Seconde Guerre Mondiale apparaît comme un catalyseur essentiel de l'étude technique des échanges d'information, qui porte aussi bien sur le codage des messages et de la voix[13], sur la conduite de tir pour la défense anti-aérienne[14] — domaines souvent signalés dans les histoires de l'informatique — que sur l'automatisation du calcul scientifique[15] et des techniques industrielles ou l'étude de la fission nucléaire[16] — plus souvent méconnues. C'est l'énormité des moyens matériels et humains concentrés par les États-Unis qui déplace vers l'Ouest la synthèse de développements alors également présents en Europe et en URSS. Elle installe outre-Atlantique des orientations de recherche et un partenariat durable entre l'armée, l'université, et l'industrie, que pérenniseront les années de guerre froide, et dont l'organisation de la science aujourd'hui ne saurait s'affirmer comme complètement indépendante. L'analyse de ce contexte ne débouche pas sur la minimisation du rôle des acteurs, mais elle rend manifeste leur engagement scientifique dans des recherches techniques dont ils n'ignorent pas les enjeux : Vannevar Bush (1890-1974) et l'analyseur différentiel pour les calculs balistiques, Warren Weaver (1894-1978) et la maîtrise de la conduite de tir, Wiener et l'« Anti Aircraft Predictor », von Neumann et la préparation de la bombe A, Shannon et Alan Turing (1912-54) autour de la cryptologie et du « X-system » de transmission numérique de la parole, mais aussi bon nombre de mathématiciens, parmi lesquels Richard Courant (1882-1972), Jerzy Neyman (1894-1981), George Birkhoff (1884-1944), Oswald Veblen (1880-1960)[17]. L'OSRD, *Office of Scientific Research and Development*, mobilise plus de 6 000 scientifiques, répartis sur tout le territoire, et implique les universités et les instituts d'ingénierie et les laboratoires de recherche privés. À la fin de la guerre, le MIT est le premier partenaire des forces armées avec près de 120 millions de dollars de contrats.

Culture technique et culture scientifique s'interpénètrent d'autant plus fortement que la théorie de l'information devient discours unificateur pour la cybernétique et l'informatique, nées au même moment et dans les mêmes conditions, autour des mêmes acteurs et avec les mêmes enjeux. Les recherches de guerre ont crucialement contribué à l'établissement des grands calculateurs et d'une théorie unifiée de la rétroaction (feedback). Dès 1948, la cristallisation du dogme cybernétique autour des notions d'information et de rétroaction consacre l'expression commune

[13] Budiansky, Stephen, 2000, *Battle of Wits : The Complete Story of Codebreaking in World War II*, New York, The Free Press.

[14] Bush, V. 1931, "The Differential Analyzer. A New Machine for Solving Differential Equations", *Journal of the Franklin Insitutte*, vol. 212, 447-88.

[15] Campbell-Kelly, M., Croarken, M., Flood, R. & Robson, E., 2003, *The History of Mathematical Tables*, Oxford, Oxford University Press.

[16] Hoddeson, L., Henriksen, P.W., Meade, R.A., Westfall, C.L., 1993, *Critical Assembly : A technical History of Los Alamos during the Oppenheimer years*, 1943-45, Cambridge, CUP.

[17] Godement, R., 1998, "Postface : Science, technologie, armement", *Analyse mathématique II, Calcul Différentiel et intégral, séries de Fourier, Fonctions holomorphes*, Springer, 377- 465.

des processus de régulation, appréhendés dès avant la guerre dans l'étude des servomécanismes[18] et la structure des centres de téléphone ou de calcul[19], et dans les phénomènes biologiques sous le nom d'homéostasie[20]. Lorsque l'étude des servomécanismes rencontre la théorie de la prédiction, lorsque la structure des circuits électriques ou téléphoniques se lit en termes logiques, lorsque le câblage externe des gros calculateurs devient programme interne d'ordinateur, et apparaît susceptible d'un même traitement numérique en « langage » binaire, ce discours commun s'affirme comme celui des comportements organiques et machiniques. Ancré sur l'espoir d'un renouveau social et humain porté par la sortie de guerre, dont le mythe d'un Homme démiurge n'est pas absent, le rêve philosophique de l'unité des sciences semble ainsi se concrétiser en un nouveau paradigme qui incite Jérôme Segal à se référer à un manuscrit de Leibniz, découvrant en 1679 le « calcul avec des zéros et des uns » dans les figures du *Livre des Transformations chinois*.

Si l'histoire tend à localiser à l'Est les aspirations matérialistes, elles sont tout aussi manifestes, au moins sous la forme d'un monisme athée, dans les conférences interdisciplinaires de la fondation Macy, qui de 1946 à 1953, rassemblent tous les grands noms de l'histoire de l'informatique et de la cybernétique à New York sur le thème « Circular Causal and Feedback Mechanisms in Biological and Social Systems » : la formalisation mathématique des échanges d'information n'offre-t-elle pas la maîtrise de processus envisagés jusque là comme fonctionnement de l'esprit, qui peuvent alors être attribués directement au cerveau, c'est-à-dire au vivant, sans référence spécifique à l'humain[21] ? Et Jérôme Segal marque le lien de ces acteurs avec le programme positiviste du début du XX^{e} siècle, notamment *via* les conceptions du Cercle de Vienne, et l'émigration d'un philosophe, logicien et probabiliste comme Rudolf Carnap (1891-1970), dont l'enseignement aux États-Unis marquera les pionniers du projet cybernétique[22].

Pour Jérôme Segal, qui préfère se consacrer à l'étude des phénomènes d'appropriation plutôt qu'à la recherche des « précurseurs », la rapidité avec laquelle la cybernétique se répand dans la période 1950-70 témoigne de l'existence hors des États-Unis d'un milieu déjà structuré avant la guerre, institutionnellement et conceptuellement, par d'importantes recherches sur ces phénomènes de régulation, aussi bien dans le domaine technique que biologique. Les États-Unis n'ont pas inauguré les rapprochements entre physique et industrie, déjà bien établis en URSS et en Europe. C'est ainsi que dans l'industrie allemande des années 1930, des ingénieurs parmi lesquels Karl Küpfmüller (1897-1977) ou Winfried Oppelt (1912-2000) s'attachent à l'étude technique des phénomènes de régulation, tandis que Félix Lincke fait le lien entre régulation technique et biologique, et que le biologiste Robert Wagner publie dès 1932 *Chômage et déflation dans la société du point de vue biologique*, où il cherche à rendre compte des problèmes économiques par des défauts de régulation. Dans le même temps, la position du physicien et ingénieur

[18] Schmidt, H., 1944, *Regelungstechnik, Begriffe und Bezeichnungen*, Berlin, VDI-Verlag.
[19] Cannon, W.B., 1929, "Organization for Physiological Homeostasis", *Physiological Reviews*, 9, 399-431.
[20] Ehrenfest, Paul, 1959, *Collected Scientific Papers*, Amsterdam, North Holland Publishing Company. New York, Interscience Publishers Inc.
[21] Dupuy, J.-P., 1994, *Aux origines des sciences cognitives*, Paris, La Découverte.
[22] Carnap, R., Neurath, O, & Morris, C.W., 1938-1955, *International Encyclopædia of unified Science*, Chicago, University of Chicago Press.

Hermann Schmidt (1894-1968) au bureau des brevets du III[e] Reich l'amène à synthétiser les orientations de recherche d'instituts comme les Kaiser-Wilhelm-Institutes, la Friedrich-Wilhelm-Universität, l'Institut du Reich pour la physique et la technique, la Technische Hochschule de Berlin-Charlottenbourg, et plusieurs grandes entreprises sidérurgiques : il propose une représentation unique et une terminologie unifiée pour aborder les problèmes de stabilité, de description analytique du développement de nouveaux outils ou d'optimisation des systèmes. En Grande-Bretagne, c'est dès 1943 que W. Ross Ashby (1903-72) rédige « L'origine physique de l'adaptation par essais et erreurs », publié en 1945 dans le *Journal of General Psychology*, où l'étude comparative des phénomènes de régulation lui permet de délaisser les hypothèses vitalistes en biologie. En France même, l'ingénieur et architecte Jacques Lafitte affirme, dans ses *Réflexions sur la science des machines* (1932), avoir été guidé par l'étude des corps organisés vivants : son travail inspirera le projet de Louis Couffignal (1902-66) sur les « machines à penser ».

C'est donc bien une formalisation mathématique commune qui sous-tend la possibilité d'une vision synthétique de tous ces phénomènes, et c'est dans la multiplicité des contacts retrouvés de l'après-guerre, ceux d'une reconstruction tous azimuts, que se concrétisent ses potentialités. Au-delà du rôle connu des fondations privées, comme la fondation Macy ou la fondation Rockfeller aux États-Unis, l'abondance des congrès et des publications manifeste l'intensité des débats, nationaux et internationaux, par lesquels la notion scientifique d'information s'installe au cœur des modes de théorisation de l'action efficace. Le premier congrès international organisé à Londres par la Royal Society en 1950, « Cybernétique, théorie du signal et de l'information », est reconnu comme décisif jusqu'aux États-Unis pour établir la théorie de l'information comme discipline autonome. L'URSS elle-même ne résistera pas longtemps à ce corpus, à ceci près que les manifestations du discours idéologique sur la science se laissent mieux appréhender dans les états fortement centralisés. Alors que les ordinateurs y existent et sont aussi performants que ceux d'Europe et des États-Unis dans les années 1950 — qu'il suffise de penser à Spoutnik et à la bombe atomique russe, qui n'auraient pas été possibles sans eux —, la cybernétique y sera d'abord violemment critiquée comme « pseudo-science », « bourgeoise » et « obscurantiste », avant d'y être promue officiellement en 1962 en tant que confirmation du matérialisme dialectique. L'intérêt qu'elle représente pour les militaires n'est pas étrangère à ce revirement, comme en témoignent les interventions de l'amiral académicien Axel Berg (1896-1979), ainsi que la critique potentielle qu'elle semble autoriser envers la bureaucratie et l'économie[23]. Profitant d'un long séjour sur place, Jérôme Segal analyse surtout le phénomène à partir des confrontations qui ont lieu en RDA à ce sujet, notamment autour de l'engagement direct du philosophe Georg Klaus (1912-74) dans ce travail de légitimation[24].

On passe ainsi progressivement d'une analyse mathématique des phénomènes physiques dominée par le calcul différentiel, à des théories fréquentielles marquées par leur origine dans les télécommunications, et d'un discours sur l'énergie à des recherches sur la stabilité des systèmes.

---

[23] Trogemann, G., Nitussov, A. Y. & Wolfgang E. (Eds), 2001, *Computing in Russia. The History of Computer Devices and Information Technology revealed*, Vieweg. Gerovitch, Slava, 2002, *From Newspeak to Cyberspeak*, Cambridge, the MIT Press.

[24] Klaus, G., 1961, *Kybernetik in philosophischer Sicht*, Berlin, Dietz Verlag.

Théorie, heuristique ou idéologie

Avec la notion de rétroaction, et la circulation d'information qu'elle suppose, les servomécanismes industriels et l'homéostasie physiologique deviennent donc susceptibles d'une même formalisation. Celle-ci permet du même coup d'envisager l'adaptation et l'apprentissage comme les processus de régulation qui permettent de caractériser une autonomie de « comportement » aussi bien pour la machine que pour « l'animal ». Rejoignant les travaux de Ludwig von Bertalanffy (1901-72) sur l'étude des systèmes[25], ce type de représentation relègue au second rang les références à un support physique ou à une conscience agissante. La comparaison récurrente entre ordinateur et cerveau humain dans les années 1950 ne fera que renforcer cette tendance, avec la double tentation de substituer la machine à l'homme, avec le risque — aussi bien économique que philosophique — de réduire l'homme à la machine[26].

Ce risque de réification de l'humain va bien au-delà de la projection anthropomorphique qui nous fait attribuer une « pensée » aux machines. Il s'articule sur un non-dit propre au rôle du formalisme mathématique dans ce processus d'identification. Quiconque a déjà écrit une équation algébrique sait que si les symboles permettent d'expliciter les opérations d'un problème, ils laissent à l'utilisateur le soin d'en déterminer la signification au départ, qui déterminera ses conditions de validité dans les applications. Cet oubli tacite du sens n'est donc pas propre à la « quantité d'information », mais à son caractère opératoire : il en sous-tend toutes les possibilités d'extension, qu'elles aient valeur heuristique ou idéologique. Le recours aux analogies est inhérent à tout processus de symbolisation et à la plasticité de la langue naturelle. L'impact de la notion d'information porte la trace d'une interrogation collective particulièrement vive dans la période de réorganisation générale, politique, sociale et intellectuelle, que constitue l'après-guerre. Jérôme Segal nous restitue les débats intervenus dans de nombreux domaines lors des différentes tentatives pour appréhender les phénomènes en termes de quantité d'information. Ils montrent à la fois les limites de cette notion, le travail d'élaboration de significations nouvelles et les effets en retour sur la théorie de l'information elle-même, tout en confrontant le rêve d'unification dont elle est porteuse aux enjeux politiques et idéologiques de sa fonction de représentation du monde et de la société.

La restructuration des champs du savoir qu'engage la théorie de l'information est énorme, et conjugue des interactions fortes entre potentialités et travail fondationnel. La valeur heuristique de la simulation n'est plus à démontrer, et les applications techniques concernent tous les appareils codés, des missiles et des drones aux cartes à puces et à Internet. Si ce n'est pas l'aspect le plus médiatisé de son impact, c'est d'abord dans le domaine scientifique que la théorie de l'information conduit à une restructuration des relations entre différentes disciplines, d'abord par le biais de l'utilisation des mêmes outils mathématiques. C'est ainsi qu'elle unifie les différentes utilisations de la transformation de Fourier présentes dans les travaux des statisticiens, des physiciens, et des ingénieurs en télécommunications. Elle nourrit également une réflexion épistémologique et philosophique générale, dont le physicien français Léon Brillouin (1889-1969), devenu citoyen américain en 1949,

[25] Bertalanffy, L. von, 1973, *Théorie Générale des Systèmes*, Paris. Dunod.
[26] Von Neumann, J., 1996, *L'ordinateur et le cerveau* (1958), Paris, Flammarion, Champs.

est un des principaux représentants[27]. Lui qui a toujours mené de front recherches pratiques (radio, acoustique, magnétron) et recherches théoriques en mécanique quantique et en thermodynamique envisage les lois de la nature ou les théories scientifiques comme des constructions humaines : les concepts d'information et d'organisation sont nécessaires et suffisants à leur élaboration, et permettent de faire fi de toute hypothèse supplémentaire, comme la continuité de l'espace ou les a priori kantiens.

Mais surtout, les difficultés inhérentes à la diversité des origines de la « quantité d'information » alimentent la recherche d'un cadre mathématique plus général, qui tient aussi de la tentative de réinvestir du sens à cette définition, là où les besoins de la quantification l'en avaient initialement exclu. Dès 1950, les travaux de Irving J. Good[28] (né en 1916) et de G.A. Barnard[29] (1915-2002) en Grande-Bretagne, de Benoit Mandelbröt[30] (né en 1924) et Marcel-Paul Schützenberger[31] (1920-96) en France participent directement de cet effort d'unification par la recherche d'une axiomatisation mathématique, et donnent lieu à un débat sur la nature ontologique ou constructiviste de la théorie de la décision et de la statistique. Aux États-Unis, au-delà de l'unification des cas discret et continu, les travaux de S. Kullback, qui se place dès 1951 dans le cadre de la statistique inférentielle, situent la théorie de l'information comme branche des probabilités, où définition de l'incertitude devient mesure de l'information manquante[32]. L'interprétation subjectiviste des probabilités se trouve ainsi renforcée, tout comme dans le cadre de la réinterprétation de la mécanique statistique, qui se manifeste par exemple dans la création de l'association internationale « Maximum d'entropie et méthodes bayésiennes », et où l'entropie va acquérir une signification indépendante de la thermodynamique. En URSS, c'est dès le congrès international de mathématiques d'Amsterdam (1954) que Andrei N. Kolmogorov (1903-87) s'enthousiasme pour la théorie de l'information qu'il envisage comme moyen de décrire de façon universelle un objet mathématique aléatoire (à partir du nombre de bits qui suffisent en moyenne à le décrire) : il crée ainsi à Moscou une véritable école soviétique en ce domaine, jusqu'à fonder en 1965 la théorie de la complexité algorithmique, unifiant les approches combinatoire, probabiliste, et algorithmique de l'information[33].

Quant au succès de la notion scientifique d'information, Jérôme Segal l'attribue en premier lieu aux applications techniques qu'elle induit, au premier rang desquels figurent les développements massifs de l'ordinateur dans les années 1950,

[27] Brillouin, L., 1959, *La science et la théorie de l'information*, Paris, Masson ; 1964, *Scientific Uncertainty and Information*, London, New York, Academic Press Inc.

[28] Good, I.J., 1950, *Probability and the Weighting of Evidence*, London, Griffen & Cie.

[29] Barnard, G.A., 1951, "The Theory of Information", *Journal of the Royal Statistical Society*, B., 13, 46-69.

[30] Mandelbröt, B., 1953, *Contributions à la théorie mathématique des jeux de communication*, Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 2, 3-124.

[31] Schützenberger, M. P., 1953, *Contributions aux applications statistiques de la théorie de l'information*, Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 3, 3-17.

[32] Kullback, S., 1959, *Theory of Information and Statistics*, New York, John Wiley & Sons.

[33] Kolmogorov, A.N., 1965, "Three Approaches of Quantitative Definition of Information", *Problems of Information Transmission*, 1, 3-11.

les recherches en optique d'A. Blanc Lapierre[34] (1915-2001), celles de Dennis Gabor[35] (1900-79) sur l'holographe, et surtout les recherches sur l'amélioration de la transmission des signaux, notamment la théorie des codes correcteurs, dont les applications vont des communications spatiales à la compression de données[36]. Il n'empêche qu'une part essentielle de ce succès provient des débats qui portent sur la possibilité de transférer ce nouveau concept d'information à d'autres domaines de connaissance. Et il est manifeste que l'engouement pour le discours informationnel et son pouvoir unificateur est d'autant plus fort que la question du sens est plus délicate : en linguistique, psychologie, sociologie, économie, droit, et plus encore en biologie moléculaire. La psychologie et la linguistique, mobilisées dès l'effort de guerre, la première par la cryptologie, la seconde pour théoriser les problèmes liés au comportement perturbé des pilotes, sont partie prenante du projet cybernétique. Il est remarquable que la théorie de l'information transforme le paysage linguistique après la guerre, de l'approche probabiliste de Roman Jakobson[37] (1896-1982) aux approches formelles de Noam Chomsky[38] (né en 1928) ou de Y. Bar-Hillel[39] (1915-75). Approches, qui toutes buteront sur l'obstacle sémantique de la polysémie profonde des langues naturelles, dont la pragmatique de Charles W. Morris[40] (1901-79) tentera de rendre compte, relayée par les considérations techniques de Weaver[41], et par un débat plus général sur la nature du langage.

Le transfert de la théorie de l'information à l'étude du vivant, qui marque la naissance de la biologie moléculaire, est sans aucun doute le plus caractéristique. Il s'inscrit pour Jérôme Segal dans une véritable entreprise réductionniste de colonisation de la biologie par la physique, dont témoignent les 900 000 millions de dollars du programme de recherche de la Fondation Rockfeller de 1932 à 1959. L'information s'y substitue à l'énergie comme concept fondamental. L'analogie formelle entre l'expression de l'entropie et celle de l'information, et la tentative de conciliation entre compréhension du vivant et second principe de la thermodynamique débouchent ainsi sur une nouvelle approche du vivant, qui permet d'envisager les organismes comme des systèmes organisés à plusieurs niveaux, et d'appliquer la notion d'information à d'autres champs qu'à celui de la génétique, en particulier à la physiologie des membranes ou à l'embryologie. Aussi bien Weaver que Hans Kalmus[42] (1906-89) ou John B.S. Haldane[43] (1892-1964) ; fondateur de la génétique

[34] Blanc Lapierre, A., 1970, "Considérations sur la théorie de la transmission de l'information et sur son application en physique", *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, XIII, 245-96.
[35] Gabor, D., 1964, "Light and Information", *Progress in Optics*, 1, 111-153.
[36] Berlekamp, E.R., 1974, *Key Papers in the Development of Coding Theory*, New York, McGraw-Hill.
[37] Jakobson, R., 1961, "Linguistics and Communication Theory", *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, 12, 245-252. Reproduit en français dans 1963, *Essais de linguistique générale*, Paris, Minuit.
[38] Chomsky, N., 1956, "Three Models for the description of a Language", I.R.E. *Transactions on Information Theory*, 2, 113-124.
[39] Bar-Hillel, Y., 1964, *Language and Information, Selected Essays on their Theory and Applications*, Reading, Addison-Wesley.
[40] Morris, C.W., 1946, *Signs, Language, and Behaviour*, New York, Prentice Hall.
[41] Weaver, W., 1967, *Science and Imagination, Selected Papers of Warren Weaver*, New York, London, Basic Book, Inc. Publishers.
[42] Kalmus, H., 1950, "A cybernetic aspect of Genetics", *Journal of Heredity*, 41, 19-22.
[43] Haldane, J.B.S., 1949, "Suggestions as to quantitative measurement of rates of evolution", *Evolution* 3, 51-56.

des populations, envisagent ainsi la comparaison entre transmission génétique et transmission informationnelle avant même la découverte de la structure de l'ADN ; mais c'est bien avec cette découverte que s'imposera le vocabulaire du codage de la séquence d'acides aminés de la protéine, avec les travaux de Jacques Monod et de François Jacob. Le mythe du « tout génétique », et la contestation du déterminisme qu'il induit, en sont partie prenante.

Jérôme Segal s'inquiète tout au long de l'ouvrage des conditions et des limites d'un tel succès, parlant « d'attitudes oscillantes entre rationalisme appliqué et fascination mystique ». C'est au nom de cette multiplicité d'attitudes qu'il préfère parler de la théorie de l'information en termes de discours informationnel plutôt que de théorie scientifique, et se référer à la notion scientifique d'information plutôt qu'au concept d'information, afin de distinguer entre les aspects effectif, constructif et prospectif de son utilisation, selon l'expression du logicien John Myhill[44]. Inquiétude légitime, mais qui pourrait séparer plus clairement les entreprises de type « sectaire » — de la secte Moon aux effets de mode — et celles qui sont issues du refus légitime de confondre la richesse et la plasticité de l'invention humaine avec la constructivité formelle de ces nouvelles machines, dont la puissance de calcul tend à masquer le caractère normatif et clos. Là où la préface d'Antoine Danchin vise à démarquer la théorie de l'information des facteurs psychosociologiques, de « l'hypocrite magie du flou » et de « l'avènement d'une philosophie molle », persiste la question de savoir où demeure la spécificité de l'humain face à ce matérialisme scientifique, puisque l'ouvrage est précisément édité dans une collection qui s'en revendique. Que devient l'autonomie du sujet, que la philosophie comme la théologie ont attribuée pendant tant de siècles à l'action de l'esprit, dès lors que celle-ci semble pouvoir être simulée, voire matérialisée, par le fonctionnement d'un réseau de neurones formels ? La question est d'autant plus cruciale que, si la théorie de l'information renonce à la signification des messages échangés, son objectif est ailleurs : il concerne la compréhension et la maîtrise des systèmes organisés, dont l'humain n'apparaît plus que comme un élément parmi d'autres, interchangeable avec la machine. C'est cet objectif qui sous-tend l'automatisation systématique des processus industriels et des champs de bataille, tout comme la circulation quasi instantanée d'informations d'un bout à l'autre de la planète. Il y a donc bien davantage une fonction d'effectivité que de causalité. La technologie sous-jacente, au service de ceux qui la maîtrisent, autorise un renforcement de pouvoir porté par « l'exploitation des effets engendrés par les techniques de communication », dont témoigne l'existence des réseaux informatiques comme le programme SAGE[45] ou ARPANET[46], et qui se trouve à cent lieues de la croyance naïve en l'universalité et la transparence des échanges. L'autonomie du sujet, pensé comme simple individualité, peut être abandonnée au discours religieux ou publicitaire. Que des sectes aient pu s'en emparer ne représente qu'un phénomène marginal. Bien plus conséquente risque d'être l'emprise des organes de pouvoir centralisés, maîtres de ces techniques, des militaires aux multinationales, tout comme les risques encourus par le recul du

[44] Myhill, J., 1952, "Some philosophical implications of mathematical logic. Three classes of ideas", *The Review of Metaphysics*, 6, 165-198.

[45] Edwards, Paul, 1996, *The Closed World : Computers and the Politics of Discourse in Cold War America*, Cambridge (Mass.), MIT Press, 113-45.

[46] Hellige, H.D., 1994, "From Sage via Arpanet and Ethernet : Stages in Computer Communications Concepts between 1950 and 1980", *History and Technology*, 11, 49-75

contrôle conscient des processus de communication, voire la déresponsabilisation dont est porteuse l'automatisation du cycle perception-décision-action. La question du contrôle ou de l'auto-organisation de ces systèmes, demeure une question ouverte, profondément humaine et sociale.

INFORMATIONS

Bilan des sessions 2005 du CNU Section 25[1]

À l'instar de l'an dernier, voici les résultats des sessions 2005 (qualifications, promotions et CRCT) du CNU 25, ainsi que ceux de la commission de transformation des assistants en MC pour ce qui concerne la section 25.

Session de qualifications

La session s'est tenue du 31 janvier au 2 février 2005, à l'Institut Henri Poincaré. Les listes des qualifiés sont consultables sur le site du CNU 25, à l'adresse suivante : `http://cnu25.emath.fr`

Maîtres de Conférences

328 candidats à cette qualification ont rempli l'application ANTARES ; parmi eux, 2 ont obtenu un poste de MC au second mouvement 2004 (il s'agissait donc pour ceux-là d'un renouvellement de qualification) ; 43 n'ont pas transmis de dossier à leurs rapporteurs, 3 n'ont pas soutenu leur thèse dans les délais, 1 dossier a été transmis hors délai, et enfin, 1 autre était incomplet et non recevable. Le CNU 25 a donc délibéré sur 278 dossiers de demande de qualification (270 en 2004).

55 candidats (nombre identique à celui de 2004 !), soit 20%, n'ont pas été qualifiés aux motifs suivants : 31 ont été jugés hors section (30 relevaient de la section 26 et 1 de la section 27) ; 24 ont été jugés de niveau scientifique insuffisant, dont la moitié pour absence de travaux récents (*i.e.* durant les quatre dernières années, s'agissant de renouvellement).

Le CNU 25 a donc qualifié 223 candidats pour 48 postes de MC mis au concours en 2005.

Parmi ces qualifiés, 15% environ possèdent une thèse étrangère (hors thèse en cotutelle), proportion en forte baisse par rapport à 2004 (28%).

Sur 328 candidats, 167 avaient demandé la qualification en section 25 et en section 26 ; parmi ces derniers, 140 dossiers étaient administrativement recevables. Plus de la moitié des candidats examinés par le CNU 25 ont donc aussi été examinés par la section 26. Cette proportion est en hausse par rapport à 2004 (un tiers). 38 (soit 27%) de ces candidats n'ont pas obtenu la qualification en section 25 pour le motif « hors section » pour 30 d'entre eux, et « niveau insuffisant » pour 8 d'entre eux. Aucun n'a été jugé « hors section » par l'ensemble des sections où il était candidat. 78 ont été qualifiés dans deux sections dont la 25 (et parmi les 26, 27,

[1] rédigé par Michel Olivier, président et Isabelle Chalendar, assesseur.

29 et 72), 4 ont été qualifiés dans 3 sections dont la 25 (et parmi les 26, 27, 29 et 67) et enfin 2 ont été qualifiés dans 4 sections (25, 26, 28 et 29).

Par curiosité, mentionnons un candidat qualifié une fois PR et deux fois MC, et un candidat qualifié deux fois PR et deux fois MC (en 25 et 26).

Professeurs

126 candidats ont renseigné l'application ANTARES, 14 n'ont pas transmis de dossier à leur rapporteur. Le CNU 25 a donc examiné 112 candidats (105 en 2004).

89 d'entre eux ont été qualifiés PR ; 23 n'ont pas été qualifiés (20%) aux motifs suivants : 3 ont été jugés hors section (2 en 26 et 1 en 27) et 20 ont été jugés de niveau scientifique insuffisant.

18 postes PR ont été mis au concours en 2005.

Parmi les qualifiés, 27 ont une thèse étrangère, soit 30% (26% en 2004). En ce qui concerne les PR, les candidatures étrangères restent donc à un niveau important.

29 dossiers communs avec la section 26 ont été examinés ; parmi ceux-ci, 8 ont subi un refus de qualification par les deux sections ; mais aucun ne s'est vu opposé le motif « hors section » par les deux sections ; autrement dit, leurs travaux ont été jugés insuffisants par au moins une section. Au final, 18 candidats ont été qualifiés par deux sections dont la 25 (et par la 26 ou la 27), et 2 ont été qualifiés par trois sections (25, 26 et 27).

Session de promotions

Cette session s'est tenue du 9 au 11 mai 2005 à l'Institut Henri Poincaré à Paris.

Nous donnons ci-après le nombre de notices individuelles déposées auprès du CNU 25, le nombre de promotions à répartir dans chaque grade et corps, avec, entre parenthèses, les chiffres analogues de l'année 2004.

Pour la hors classe des MC, le CNU a reçu 88 notices (86) pour 11 promotions à décerner (13).

Pour l'accès au grade de PR1, 121 notices (135) pour 11 promotions (11) ; pour l'accès au grade de PR CE1, 79 notices (86) pour 4 promotions (5) ; et enfin pour l'accès au grade de PR CE2, 20 notices (20) pour 4 promotions (3).

Ont donc été promus, à compter du 1er septembre 2005, dans les grades suivants :

MC hors classe

Ably Mohammed (Lille 1), Asch Joachim (Toulon), Coelho Michel (Nantes),
Combres Annie, ép. Hersant (Paris 7), Esbelin Henri (IUFM Clermont),
Mardesic Pavao (Bourgogne), Pezennec Jean-Paul (Nantes),
Rolin Jean-Philippe (Bourgogne), Rotillon Denis (Toulouse 3),
Smati Abdelhakim (Limoges), Strouse Elisabeth, ép. Esterle (Bordeaux 1).

PR première classe

Burq Nicolas (Paris 11), Diaz Y Diaz Francisco (Bordeaux 1)
Joye Alain (Grenoble 1), Laszlo Yves (Paris 6), Le Merdy Christian (Besançon)
Lion Jean-Marie (Rennes 1), Nekovar Jan (Paris 6), Potyagailo Leonid (Lille 1)
Schafke Reinhard (Strasbourg 1), Schlenker Jean-Marc (Toulouse 3),
Vaynerman Leonid (Caen).

PR classe exceptionnelle, 1er échelon

Bost Jean-Benoit (Paris 11), Langevin Rémi (Bourgogne),
Levasseur Thierry (Bretagne occidentale), Saint-Raymond Jean (Paris 6).

PR classe exceptionnelle, 2e échelon

Campana Frédéric (Nancy 1), Harris Michael (Paris 7),
Nikolskii Nikolaï (Bordeaux 1), Oliver Robert (Paris 13).

Congés pour recherches ou conversions thématiques (CRCT)

Contrairement aux années précédentes, le CNU ne pouvait établir une liste supplémentaire. La pression des demandes de CRCT au niveau national devient très grande : en cette année 2005, il y avait 24 candidats MC et 19 candidats PR pour 7 semestres de CRCT à attribuer. Le CNU 25 a décidé d'attribuer 4 semestres aux MC et 3 semestres aux PR.

Le CNU 25 s'efforce de classer les candidats selon des critères « objectifs » communs : travaux depuis 2000, responsabilités collectives récentes, projet de recherche, préparation HDR pour les MC, etc.

En fonction de ce classement, un semestre CRCT a été attribué à :
Clozel Laurent (Paris 11), Kharlamov Viatcheslav (Strasbourg 1),
Oliver Robert (Paris 13), Guedj Vincent (Toulouse 3), Laytimi Faima (Lille 1),
Leplaideur Renaud (Bretagne occidentale), Touzet Frédéric (Rennes 1).

Transformations Assistants-MC

Le ministère a mis le corps des assistants en voie d'extinction depuis 2002. Pour ce faire, il a créé une commission regroupant des représentants nommés de tous les groupes et sections du CNU, commission qui siège depuis 4 ans (commission renouvelée en 2004).

En ce qui concerne le CNU 25, après avis favorable de ce dernier, la session 2005 de la commission a inscrit sur la liste d'aptitude aux fonctions de MC (article 62), avec nomination au 1er septembre 2005, les assistants de la section 25 dont les noms suivent :
Chabannes Geneviève (Aix-Marseille 3), Guerrier Jean-Marc (Caen),
Kors Gérard (Aix-Marseille 3), Malardeau Marie-Claude (Limoges),
Morizot Maris (Montpellier 2).

À noter que 6 candidatures étaient déposées ; l'une d'entre elles n'a pas transmis de dossier au rapporteur ; tous les dossiers recevables ont reçu un avis positif. En fait, de nombreux assistants ne se sont pas portés candidats.

La commission a émis auprès du ministère, un avis selon lequel les critères du type CNU ne peuvent plus être appliqués aux candidats éventuels, après quatre années de fonctionnement de la commission. Elle propose au ministère de faire les transformations restantes par une autre voie réglementaire.

En guise de conclusion

Le travail des membres du CNU 25 (comme celui des autres sections) est difficile en raison de la pénurie à gérer en ce qui concerne les promotions. La pression notamment pour les passages PR1 et PRCE1 est énorme. Le nombre de qualifiés, notamment MC, est sans rapport avec le nombre de postes mis au concours ; le niveau des candidats est souvent très bon, voire excellent.

L'auteur de ce compte rendu 2005 tient à souligner un aspect qui concerne particulièrement la section 25 : la place des femmes dans notre discipline.

Trois chiffres 2005 : parmi les qualifiés PR, il n'y a que 7,9% de femmes ; parmi les qualifiés MC, 20,2% ; ces deux chiffres nous placent en dernière position de TOUTES les sections du CNU, et parfois très loin derrière (cf. les sections juridiques ou littéraires qui sont globalement paritaires, mais aussi loin derrière la section 26 (14,1%) ou la section 27 (23,1%) pour les PR). Deux promotions sur 30 ont été attribuées à des femmes (les deux en MCHC). Aucun recrutement PR femme cette année (sur 18) ; 10 recrutements MC (sur 48).

Ces chiffres doivent sans doute interpeller notre communauté.

Enfin, le bureau du CNU 25 se félicite encore cette année de l'ambiance sereine qui règne au sein l'assemblée, malgré les enjeux importants, ainsi que de la qualité de l'aide matérielle que nous offrent les personnels de l'Institut Henri Poincaré pour le bon déroulement des sessions du CNU.

Bilan de la session 2005 du CNU Section 26[1]

Qualifications : bilan 2005

Qualifications aux fonctions de Maître de Conférences

Le nombre de candidats inscrits était de 508. Le nombre de dossiers non parvenus aux rapporteurs est de 106. Sur les 402 dossiers examinés, 278 candidats ont été qualifiés (soit 69 %, à comparer à 67 % en 2004 et 60 % en 2003). Environ les trois-quarts des refus de qualification sont justifiés par une inadéquation de la candidature au domaine disciplinaire recouvert par la section.

Comme les années passées, deux critères importants ont été utilisés dans l'évaluation des dossiers, en particulier pour les candidats dont le parcours ne s'inscrivait pas de façon canonique dans les thématiques de la section.
1. L'aptitude à enseigner les mathématiques.
2. L'activité scientifique. Dans les domaines d'application des mathématiques, cette activité ne doit pas se limiter à une description de modèles classiques et une utilisation de méthodes et algorithmes éprouvés. L'évaluation prend en compte l'apport méthodologique, la mise en place de modèles originaux, le développement de nouveaux algorithmes, la validation par des applications réalistes.

Recommandations aux candidats (et aux directeurs de thèse)

Le dossier de candidature doit faire apparaître clairement :

– la capacité à enseigner les mathématiques dans un cursus de Licence de mathématiques ;

– un travail de recherche en mathématiques appliquées. L'utilisation d'un outil mathématique standard dans un travail de recherche relevant d'une autre discipline ne semble pas suffisant à lui seul pour la qualification en Section 26 ;

– une activité liée à la recherche en mathématiques appliquées dans la période précédant la demande de qualification.

Le dossier de candidature doit être présenté avec soin et clarté. Nous demandons que les rapports préalables à la soutenance de thèse de doctorat soient joints au dossier (quand ils existent et sont publics, ce qui est le cas des doctorats français). Le dossier doit contenir un *curriculum vitæ* détaillé, les références complètes des travaux du candidat, et au minimum quelques-uns de ceux-ci.

La présence d'une publication dans une revue à comité de lecture n'est pas exigée pour les thèses récentes. Mais elle représente un élément d'appréciation décisif pour les thèses plus anciennes. La publication d'un article en seul auteur, ou sans son directeur de thèse, peut être un élément positif d'appréciation.

[1] rédigé par le bureau de la section : Emmanuel Lesigne, François Golse, Bernard Gleyse et Olivier Raimond.

En ce qui concerne les candidats dont la formation et/ou la mention du doctorat ne relèvent pas des mathématiques (informatique, biologie, physique, mécanique, traitement du signal, économie,...), il est impératif qu'une large part du dossier de qualification soit consacrée à la mise en évidence :

– de la part des mathématiques dans leur formation initiale ;

– de leur contribution scientifique dans le domaine des mathématiques appliquées.

Pour les candidats titulaires d'un doctorat récent, il est naturel d'attendre qu'un ou plusieurs membres du jury de thèse, et si possible un des rapporteurs, relèvent de la section du CNU dans laquelle le candidat demande la qualification. (Cette condition n'est bien sûr pas absolue).

Enfin, signalons l'existence de guides édités par les sociétés savantes (livret du candidat SMF-SMAI, voir `www.emath.fr`) qui donnent des conseils très utiles aux candidats sur les postes universitaires.

Qualifications aux fonctions de Professeur

Le nombre de candidats inscrits était de 154. Le nombre de dossiers non parvenus aux rapporteurs est de 21. Sur les 133 dossiers examinés, 92 candidats ont été qualifiés (soit 69 %, proportion stable par rapport aux années précédentes). Plus d'un refus de qualification sur deux est justifié par une inadéquation de la candidature au domaine disciplinaire recouvert par la section.

Les points essentiels examinés dans un dossier de candidature à la qualification aux fonctions de professeur sont les suivants :

– la capacité à enseigner les mathématiques dans un cursus de Master de mathématiques ;

– un travail de recherche significatif en mathématiques appliquées, avec une activité avérée dans la période récente ;

– la démonstration d'une réelle autonomie scientifique ;

– l'aptitude à l'encadrement et à la direction de recherches.

Sur la base de ces critères, la majorité des dossiers examinés ne posait aucun problème.

Commentaire

Que ce soit pour les MCF ou les professeurs, le nombre de nouveaux qualifiés est relativement stable ces dernières années, alors que le nombre de postes ouverts au concours MCF 26 est passé de 80 à 49 entre 1999 et 2005, et le nombre de postes ouverts au concours Prof 26 est passé de 40 à 26 pendant la même période. Suite à des redéploiements le nombre d'enseignants-chercheurs en mathématiques a diminué de façon sensible dans la période récente dans notre pays. Alors que la plus grande partie de la recherche mathématique française est effectuée dans les universités et que l'école mathématique française est reconnue pour sa qualité, cette situation est inquiétante pour l'avenir. Nous devons alerter les décideurs locaux et nationaux sur un risque de déclin qui serait dommageable à l'ensemble des sciences de notre pays.

Promotions

Nous donnons dans cette section un bilan du travail du CNU sur les promotions en 2005, auquel nous avons ajouté un bilan des promotions locales l'année précédente.

Pour les promotions, le CNU doit gérer la pénurie. Il ne fait aucun doute pour chacun des membres du Conseil que le nombre de promotions offertes est très faible par rapport au nombre de collègues pouvant légitimement y prétendre pour la qualité de leur travail scientifique, de leur investissement pédagogique et des services rendus à la communauté dans l'administration de la recherche ou de leurs établissements.

Les dossiers de candidature à une promotion doivent contenir un descriptif de l'ensemble de la carrière (et non des trois dernières années, comme c'est demandé par l'administration). À côté du CV et de la liste complète des travaux (classés par type de publication), le dossier doit comporter des informations précises sur les activités pédagogiques, administratives, et les services rendus à la communauté universitaire.

Chaque dossier de candidature est examiné par deux rapporteurs du CNU, désignés par le bureau, après consultation du bureau élargi.

Promotions à la hors-classe des MCF

Nombre de promotions offertes : 12
Nombre de collègues promouvables : 295
Nombre de candidats : 122

Liste des promus :
Batina Jean (Pau), Belmedi Said (Lille 1),
Bloch (ép. Denape) Isabelle (IUFM Bordeaux),
Dubois Gérard (INSA Lyon), Dunau Jean-Louis (INSA Toulouse),
Jourani Abderrahim (Dijon), Lohéac Jean-Pierre (École Centrale de Lyon),
Novotny Antonin (Toulon), Petit Frédérique (Paris 6),
Petiot Jean-François (Vannes), Recoules Raymond (Albi),
Valmorin Vincent (Antilles-Guyanne).

(Il y a dans cette liste deux promotions « en voie 2 ». La voie 2 concerne les collègues de « petits établissements » dont la promotion n'est examinée qu'au niveau national. C'est le cas des IUFM et de certaines écoles d'ingénieur comme les ENI.)

Pour les promotions à la hors-classe, le CNU examine l'ensemble d'une carrière de MCF. À côté du travail de recherche et de l'activité d'enseignant, un investissement particulier dans le domaine pédagogique ou au service de la communauté scientifique est apprécié. Un objectif de ces promotions étant d'offrir une fin de carrière valorisée à des collègues méritants, le CNU est vigilant à une juste répartition des âges des collègues promus.

L'âge moyen des promus est 51 ans. Les âges s'étendent de 42 à 59.

Promotions à la première classe des PR

Nombre de promotions offertes : 14
Nombre de collègues promouvables : 267
Nombre de candidats : 161

Liste des promus :
Broniatowski Michel (Paris 6), Chateauneuf Alain (Paris 1),
Debussche Arnaud (ENS Cachan), Dinh The Luc (Avignon),
Dorier Jean-Luc (IUFM Lyon), Gamboa Fabrice (Toulouse 3),
Hecht Frédéric (Paris 6), Herbin Raphaëlle (Aix-Marseille 1),
Hu Ying (Rennes 1), Kichenassamy Satyanad (Reims),
Mazure (ép. Bernard) Marie-Laurence (Grenoble 1),
Penel Patrick (Toulon), Pham Xuan Huyen (Paris 7),
Piau Didier (Lyon 1).

(Il y a dans cette liste une promotion « en voie 2 ».)

Pour l'examen des promotions à la première classe des professeurs, le CNU dégage de chaque dossier de candidature les éléments suivants :

– domaine scientifique, âge et ancienneté comme professeur,
– faits marquants de la carrière, distinctions scientifiques,
– responsabilités diverses (direction d'équipe, de projet ou d'établissement, responsabilités pédagogiques, activités éditoriales, appartenance à différentes commissions,...),
– activité scientifique (nombre et qualité des publications, communications),
– valorisation de la recherche, collaborations extra-mathématiques,
– encadrement doctoral (thèses encadrées et devenir des docteurs).

Les candidats sont invités à mettre clairement ces éléments en avant dans leurs dossiers.

Le CNU veille à une répartition équilibrée des sous-disciplines (analyse des EDP et analyse numérique, calcul scientifique, didactique, optimisation, probabilités, statistiques) qui n'exclut pas les dossiers transversaux ou atypiques.

L'âge moyen des promus est 47 ans. Les âges s'étendent de 36 à 60.

Promotions au 1er échelon de la classe exceptionnelle des PR

Nombre de promotions offertes : 4
Nombre de collègues promouvables : 208
Nombre de candidats : 87

Liste des promus :
Bethuel Fabrice (Paris 6), Le Tallec Patrick (Paris 9, X),
Robert Christian (Paris 9), Werner Wendelin (Paris 11).

Le CNU attend des candidats à une promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle qu'ils aient fait preuve de compétences exceptionnelles dans les différentes missions d'un professeur des universités, que ce soit par l'excellence de leurs travaux de recherche, ou en jouant un rôle majeur dans la communauté scientifique en termes d'encadrement, de diffusion et de structuration de la recherche.

Cette année des candidats relativement jeunes ont bénéficié de cette promotion. Une répartition équilibrée des âges des promus doit être recherchée sur un mandat du CNU (4 ans).

L'âge moyen des promus est 43 ans. Les âges s'étendent de 36 à 50.

Promotions au 2nd échelon de la classe exceptionnelle des PR

Nombre de promotions offertes : 3
Nombre de collègues promouvables : 27
Nombre de candidats : 17

Liste des promus :
Cazes Pierre (Paris 9), Crouzeix Jean-Pierre (Clermont 2),
Schvartz (ép. El karoui) Nicole (Paris 6, X).

Parmi les candidats dont le dossier démontre une activité soutenue dans les différentes missions dévolues aux professeurs d'université, le critère essentiel pour le changement d'échelon est l'ancienneté dans la classe exceptionnelle, ainsi que l'âge.

L'âge moyen des promus est 62 ans. Les âges s'étendent de 61 à 64.

Promotions locales 2004

Les sections du CNU ne distribuent que la moitié (49,5%) des promotions ouvertes aux enseignants-chercheurs. (Ces promotions sont distribuées entre sections du CNU proportionnellement au nombre de promouvables.) Les autres promotions sont attribuées par les établissements d'enseignement supérieur.

On pourrait s'attendre à observer, discipline par discipline, un équilibre entre les nombres de promotions nationales et locales. Or en mathématiques, et particulièrement en 26^{e} section, le nombre de promotions locales reste assez nettement inférieur au nombre de promotions nationales. Ce fait a été clairement décrit et dénoncé par le CNU précédent (cf. le bilan 2003). Il faudrait analyser en profondeur les raisons du manque de reconnaissance locale des mathématiciens dans l'Université Française. Il est difficile de croire que le manque de qualité scientifique en soit la cause principale.

Le bilan des promotions locales 2005 n'est pas encore disponible, mais voici le bilan des promotions locales en 2004 dans notre section.

Hors-Classe des Maîtres de Conférences

Douze promotions avaient été attribuées par le CNU. Onze promotions ont été obtenues localement.

Voici la liste des promus :
Ait Hennani Larbi (Lille 2), Amaziane Brahim (Pau),
Beau Daniel Julien (Dijon), Delyon (ép. Brandière) Odile (Paris 11),
Deremetz Bernard (Valenciennes),
Giran (ép. Pellerin) Nicole (Aix- Marseille 3),
Lavainne Francis (Paris 13),
Le Friec (ép. Bara) Marie-Françoise (Clermont 1),
Piquet Claude (Paris 6), Trouche Luc (Montpellier 2),
Vallin Philippe (Paris 9).

Première classe des professeurs

Treize promotions avaient été attribuées par le CNU. Sept promotions ont été obtenues localement.

Voici la liste des promus :
Boussouira (ép. Alabau) Fatiha (Metz), Broze Laurence (Lille 3),
Ducharme Gilles (Montpellier 2), Grégoire Gérard (Grenoble 2),
Guessab Allal (Pau), Panasenko Grigori (St Étienne),
Truong Van Benoît (INSA Toulouse).

Classe exceptionnelle des professeurs

Le CNU avait attribué 4 promotions au premier échelon de la classe exceptionnelle. Il n'y a eu aucune promotion locale.
Le CNU avait attribué 4 promotions au second échelon de la classe exceptionnelle. Il y a eu 4 promotions locales, dont voici la liste.

Hammad Pierre (Aix-Marseille 3),
Hiriart Urruty Jean-Baptiste (Toulouse 3),
Le Breton Alain (Grenoble 1), Morel Jean-Michel (ÉNS Cachan).

Congés pour recherche ou conversion thématique, pour l'année 2005-2006

Le nombre de semestres de CRCT que le CNU pouvait attribuer cette année est 8. Ce nombre est ridiculement faible par rapport au nombre de semestres demandés (90 dans notre section cette année), et à la qualité des projets annoncés. Pour mémoire, nous avions pu attribuer 16 semestres de CRCT l'an dernier !

Le CNU a proposé d'accorder un semestre de CRCT à :

Chrusciel Piotr (Tours), De Meyer Bernard (Paris 1), Méléard Sylvie (Paris 10),
Merlevede (ép. Castano) Florence (Paris 6), Nkonga Boniface (Bordeaux 1),
Renault Jérôme (Paris 9), Souplet Philippe (St Quentin),
Vignal Marie-Hélène (Toulouse 3).

Intégration des assistants dans le corps des MCF

Cette procédure nationale est gérée par une commission regroupant l'ensemble des disciplines, après avis du CNU sur les dossiers. 250 emplois de MCF étaient ouverts cette année pour des assistants. Tous les assistants relevant de la section 26 qui avaient déposé un dossier ont été inscrits sur la liste d'aptitude pour l'accès au corps des MCF.

Une fête des mathématiques tout à fait inédite : « Le Salon de la culture et des jeux mathématiques organisé par le CIJM »

Marie-José Pestel[1]

Du 2 au 5 juin 2005, le 6e salon de la culture et des jeux mathématiques a fait le plein, place Saint Sulpice au cœur de Paris.

Depuis 2000, Année Mondiale des Mathématiques, le Comité international des jeux mathématiques donne rendez-vous à un public, jeunes ou moins jeunes, initiés ou non spécialistes, et lui propose d'aller à la découverte des mille et une facettes des mathématiques.

Ce salon d'animation, gratuit, ouvert à tous, s'est fixé pour objectifs de mettre la culture mathématique à la portée du grand public par des approches ludiques, historiques, artistiques et devient un grand rendez-vous de l'animation scientifique.

Cette année, Année Mondiale de la Physique, l'occasion était belle de jeter un regard croisé sur les deux disciplines et de dire comment elles se sont développées, s'enrichissant mutuellement de leur questionnement. La brochure *Maths Physique Express* que nous avons rédigée en commun et qui est disponible sur nos sites[2] se veut un témoignage de cette richesse.

Depuis six ans les grands centres muséographiques, universitaires et scientifiques, et cette année le CNRS, sont venus s'associer à cette grande aventure. Tous conjuguent leurs efforts et faire participer le public le guider dans l'apprentissage de la connaissance. Les objectifs de notre manifestation :

– nul ne doit rester à l'écart du savoir scientifique,

– le chemin qui mène à la culture mathématique est à découvrir très tôt par tous, il est indispensable que chaque citoyen acquière les moyens de comprendre le monde de demain.

Chaque année des milliers de visiteurs et plus de 2500 élèves témoignent du bien fondé de ces objectifs.

Il faut évoquer tous ces moments forts où des universitaires, des chercheurs et des animateurs proposent les ateliers de « Marie Curie », parlent de surfaces minimales avec des bulles de savon, font découvrir la mathématique qui se cache derrière une tresse, un nœud, un casse tête, un labyrinthe...

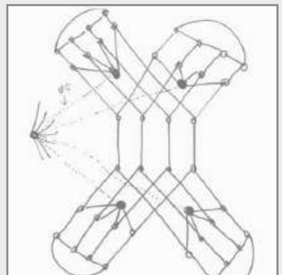
Une des surprises de ce salon très dynamique est d'y voir des jeunes et des moins jeunes chercher, dans une ambiance studieuse, à résoudre des problèmes de logique ou les jeux mathématiques et littéraires du Trophée Lewis Carroll.

Le 6e salon a déroulé le fil d'Ariane, que sera le 7e ? Faites confiance au CIJM ! Nous mettrons tout en œuvre pour vous étonner !...

Dans le cadre de cette manifestation, des lycéens du lycée Gay-Lussac de Limoges ont accroché trois panneaux d'exposition sur Claude Berge, réalisés par le CIJM et que nous reproduisons ci-après.

[1] Présidente du CIJM
[2] `www.cijm.org`

Claude Berge



Graphe de la main de Claude Berge

Un mathématicien atypique

Comme de nombreux mathématiciens, Claude Berge ne pense pas dans sa jeunesse être destiné aux mathématiques. Lors de ses études, il s'intéresse surtout à la littérature. Cependant, son goût pour les raisonnements logiques ainsi que la rencontre d'un professeur de " taupe " passionnant changeront sa destinée.

Après une thèse de mathématiques classiques, il se lance dans un domaine alors très peu développé en France qui prendra plus tard le nom de Combinatoire.

Son besoin de rendre les choses visuelles, de les agencer et de trouver des raccourcis l'amène à s'intéresser plus particulièrement à des articles publiés en Europe traitant des graphes. II en fait alors une synthèse afin d'approfondir ce sujet qui lui semble plein de ressources. Ainsi naîtra en France, en 1958, la première étude complète dédiée aux graphes : *Théorie des graphes et ses applications.*

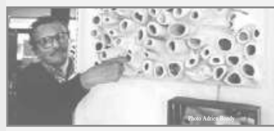
Photo Michel Las Vergnas

Spécialisé dans ce domaine, il publie une série d'articles de référence notamment *Graphes Parfaits* en 1963, ainsi qu'un livre *Graphes et Hypergraphes* en 1969. C'est à cette occasion que Claude Berge a créé le terme *hypergraphes.* Spécialiste des jeux de stratégie, il rédige un ouvrage, *La Théorie générale des jeux à " n " personnes*, où il introduit une alternative à " l'équilibre fort " de Nash qui portera son nom. Ultérieurement, son ouvrage *Programmes, Jeux et Réseaux de Transport* unifie des notions diverses en matière de graphes. Certains mathématiciens s'occupent de nombres et de fonctions, lui se penche sur les problèmes de configuration. Les mathématiques sont pour lui avant tout une

photo Adrian Bondy

source de plaisir. II aime trouver des chemins tout à fait inattendus dans le but de réaliser des démonstrations élégantes en écartant les formules compliquées. Plus que tout, il aimera façonner et faire évoluer cette discipline.

Amoureux de beaux énoncés, de problèmes insolubles et de démonstrations courtes, Berge préfère les conjectures aux théorèmes. Sa conjecture des " Graphes parfaits " qui lui vaut une renommée mondiale, a résisté pendant 42 ans aux efforts des plus grands mathématiciens. Elle vient cependant d'être démontrée, mais au prix d'une longue démonstration.



Claude Berge montre du doigt un vrai "trou de Graphe Parfait" dans une de ses oeuvres...

Photo Adrian Bondy

Ses recherches sont si passionnantes qu'il aura toujours du mal à les abandonner pour transmettre son savoir dans des lieux prestigieux, tant en France (Sorbonne, Université Pierre et Marie Curie,...) que dans le monde (Etats-Unis, Chine, Inde, Koweit,...). Professeur invité à Princeton, directeur de recherche au CNRS, directeur de l'Equipe combinatoire de l'université Pierre et Marie Curie (Paris VI) pendant 25 ans, chercheur à l'Ecole des hautes études en sciences sociales, chercheur au Centre d'analyse et de mathématique sociales, directeur du Centre international de calcul à Rome, consultant à l' EURATOM, ne sont que quelques unes des fonctions qu'il a occupées pendant sa vie.

Mondialement reconnu, il sera honoré de nombreux prix prestigieux parmi lesquels, conjointement avec le Professeur américain R.L.Graham, le prix Euler en 1995.

Clau Berge et Paul Erdös- Photo Gena Hahn

Claude Berge

Claude Berge, bronze,

L'homme de passion

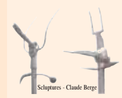
Petit fils de F lix Faure, fils d'un m decin psychiatre, Claude Berge est n le 5 juin 1926 Paris. Il est le second d'une fratrie de six enfants, au sein de laquelle il appara t tr s t t comme un gar onnet exceptionnel. Il aime s'isoler pour se consacrer ses passions la collection, le jeu et la mythologie grecque et romaine. Sa curiosit et son go t du voyage l'am nent d couvrir les cinq continents et plus particuli rement l'Afrique, l'Asie et l'Oc anie. V ritable humaniste, Claude Berge aime la vie, les gens et surtout les jeunes, ses tudiants, avec qui il a des liens tr s forts. L'homme est un tourbillon de passions qu'il aime transmettre aux autres. Son enthousiasme est contagieux, nombreux sont ceux qui l'ont suivi sur cette voie. C'est un tr s haut niveau qu'il pratique le Go, le Solitaire, le Hex et les Echecs. Il joue avec les plus grands et sa ma trise des graphes lui vaut de travailler sur la mise au point de programmes performants pour les jeux d' checs.

Art Asmat

Sculpture de Claude Berge

Ses passions s' tendent aussi la litt rature avec le mouvement OULIPO, , la sculpture et la collection d'oeuvres d'art o il recherche l'insolite et les formes pur es, avec une vraie passion pour l'art Asmat de Nouvelle Guin e.

Lui-m me sculpteur de tr s grand talent, il laisse une œuvre importante. Partout, dans les passions de Claude Berge, on retrouve son esprit et son me de math maticien.



Sculptures - Claude Berge

Berge.

Afin de conclure sur la vie de cet homme clectique et fascinant qui s'est termin e pr matur ment le 30 juin 2002, laissons la parole Vasek Chvatal de Rutgers University (Etats-Unis)

Lycée Gay Lussac de Limoges

Claude Berge

et La Reine Aztèque

Claude Berge a construit son po me
La Reine Azt que
sur le mod le des illusions g om triques
inspir es de celle de Sam Lyod,
ou de DeLand

Claude Berge crit un sonnet (4, 4, 3, 3) donc 14 vers

Tandis qu'en frissonnant elle grenait des vers
L' Azt que impertubable la touque impr cise
Serrait sa souveraine une blonde aux yeux verts
D'un lien libidineux que la froidure attise
Dans l'Ouest enfoui dit-elle son amant pervers,
C'est l que l'art jaillit, que l'Inca prosa se,
Et que la pyramide abolit l'univers !
Nul n'entend le muet qui tout doucement s'enlise...

Comme le perspicace inoui conjecturait,
Jeune ami pr somptueux plus fou qu'il ne parait,
N'offre pas de pactole ton gardien farouche
Si le verbe la fois oppresseur et charmant
D'un tel triomphateur ne trouble le diamant ...
M me Xipe Totec fuit et d truit sa souche

Il scie les vers, coupe et recolle...

Tandis qu'en frissonnant elle	grenait des vers
L'	Azt que impertubable la touque impr cise
Serrait sa souveraine une blonde	aux yeux verts
D'un lien	libidineux que la froidure attise
Dans l'Ouest enfoui dit-elle son amant	pervers,
C'est l que l'art	jaillit, que l'Inca prosa se,
Et que la pyramide abolit l'univers	!
Nul n'entend le muet qui	tout doucement s'enlise...
Comme le perspicace inoui	conjecturait,
Jeune	ami pr somptueux plus fou qu'il ne parait,
N'offre pas de pactole ton gardien	farouche
Si le verbe	la fois oppresseur et charmant
D'un tel triomphateur ne trouble le diamant	...
M me Xipe Totec	fuit et d truit sa souche

et construit une ode (4, 3, 1, 6, 1) de 15 vers ....

Tandis qu'en frissonnant elle conjecturait,
L' ami pr somptueux plus fou qu'il ne parait,
Serrait sa souveraine une blonde farouche
D'un lien la fois oppresseur et charmant
Dans l'Ouest enfoui dit-elle son amant ...
C'est l que l'art fuit et d truit sa souche
Et que la pyramide abolit l'univers
Nul n'entend le muet qui grenait des vers
Azt que impertubable la touque impr cise
Comme le perspicace inoui aux yeux verts
Jeune libidineux que la froidure attise
N'offre pas de pactole ton gardien pervers
Si le verbe jaillit, que l'Inca prosa se,
D'un tel triomphateur ne trouble le diamant !
M me Xipe Totec tout doucement s'enlise...

Lycée Gay Lussac de Limoges

Du niveau en mathématiques dans certaines Grandes Écoles

Laurent Decreusefond[1]

La « baisse du niveau » est une antienne qui remonte à l'Antiquité. Néanmoins, alertés par certains de leurs enseignants, les directeurs des écoles du concours commun Mines-Ponts (CCMP) ont jugé important d'examiner le « niveau » en mathématiques de leurs étudiants tel qu'il est ressenti par les professeurs de ces écoles. Les résultats de cette enquête, ainsi que d'autres contributions sur le même thème ont été présentés lors de la journée du 10 mai, qui s'est tenue à l'École Nationale Supérieure des Télécommunications[2]. Je ne voudrais parler ici que de l'enquête. Celle-ci a été menée en interrogeant non seulement des professeurs de mathématiques mais aussi des enseignants des matières à forte composante mathématique, tous les domaines de la physique et traitement du signal principalement.

Il en ressort que si la diminution des aptitudes mathématiques est vérifiée, elle s'avère moins pénalisante que l'hétérogénéité due à la filiarisation des classes préparatoires aux Grandes Écoles (CPGE). La réforme de 1997 a, en effet, introduit trois filières : Mathématiques-Physique (MP), Physique-Sciences Industrielles (PSI) et Physique-Chimie (PC). Leurs horaires respectifs sont de 12, 10 et 9 heures d'enseignement de mathématiques par semaine en seconde année de CPGE. L'écart des horaires entre filière MP et filière PC est le même que celui qui existait entre les filières M et P mais le nombre d'heures a diminué pour tous de 20 %. Les objectifs des programmes sont officiellement les mêmes : étudier les mathématiques conjointement pour elles-mêmes comme une discipline *développant des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifique* mais aussi *comme discipline fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires aux sciences physiques, à l'informatique, aux sciences industrielles et à la chimie*. Néanmoins, force est de constater que dans les filières PSI et PC, c'est la vision utilitariste qui prévaut : la plupart de ces étudiants ont de plus en plus de mal avec les raisonnements, seuls perdurent quelques réflexes calculatoires. On ne saurait d'ailleurs blâmer ces jeunes gens et ces jeunes filles de la formation desquels (en filière PC) ont disparu, par exemple, les suites de Cauchy, la convergence uniforme et le théorème de Cayley-Hamilton. Mon propos n'est pas de critiquer les élèves mais de dire qu'à force de diminuer les exigences théoriques au nom de « l'immédiate utilité », la formation mathématique a perdu une partie de sa richesse qui est de former des esprits rigoureux et capables d'abstraction.

Pendant ce temps, la recherche et l'innovation technologique reposent de plus en plus fortement sur les dernières avancées théoriques, notamment mathématiques et physiques. Comme les écoles d'ingénieur sont les dernières entités de formation théorique de leur cursus, il est de notre devoir de préparer un certain nombre de

[1] École normale supérieure des télécommunications
[2] Le compte rendu en sera prochainement disponible sur le site `http://www.enst.fr`

nos étudiants à appréhender ces connaissances. Comme les acquis d'entrée sont fragiles et très divers, et comme les besoins en sortie sont de plus en plus élevés, on conçoit aisément, ainsi que le montre l'enquête, le désarroi des professeurs qui ne savent comment appréhender cette situation de plus en plus alarmante.

Reprenons à notre compte une version simplifiée de la classification des savoirs selon B. Bloom. On peut distinguer quatre niveaux d'apprentissage : la connaissance emmagasinée, le savoir-faire par l'application de méthodes, l'appropriation et la faculté d'extension. Le marché du travail amène nos jeunes diplômés à changer de poste une demi-douzaine de fois dans leurs dix premières années de travail. Si l'on veut leur assurer une formation de qualité, il nous faut les amener au niveau 3 dans des domaines génériques (mathématiques et physique de l'ingénieur) plutôt que de leur faire atteindre le niveau 2 d'une multitude de domaines pointus et rapidement obsolètes. Cela devient très ardu à partir du moment où nombre de nos étudiants ne sont plus habitués à tenir des propos logiques et à mener des raisonnements abstraits, ainsi qu'en attestent aussi certains professeurs de français.

Après avoir recherché chez nos diplômés des capacités de « managers », de financiers plus que de réels profils d'ingénieurs, certaines entreprises considèrent qu'elles vont devoir réinvestir les domaines techniques. Les Grandes Écoles doivent certes s'interroger sur leurs méthodes de formation en réhabilitant les savoirs fondamentaux et le travail personnel. Elles doivent aussi initier plus qu'elles ne le font actuellement leurs étudiants à la recherche. Néanmoins, tout ceci ne sera possible que si la situation au lycée et en classes préparatoires cesse de se détériorer, en recréant par exemple, une réelle filière mathématico-physique en terminale.

Ainsi que l'écrit le Comité d'études sur les formations d'ingénieurs[3], « *Le développement rapide de l'outil informatique a modifié la notion même d'objet technologique ; il est indéniable que la simulation numérique prend une place grandissante, et que l'accent se déplace de plus en plus du faisable vers l'optimal. En outre, il existe incontestablement des besoins industriels en ingénieurs ayant un très haut niveau de connaissances dans les techniques mathématiques de modélisation et d'optimisation.* »

Nous ne pouvons qu'espérer que cette enquête sera suivie d'effets rapides et nous voulons le croire, vigoureux.

[3] `http://www.cefi.org/CEFINET/GLOBAL/CTI/TITRE_2/DOC2.HTM`

Les logiciels libres comme publication scientifique d'un nouveau type

Bernard Mourrain

Notre activité de recherche, de manière simplifiée, est une succession d'étapes d'approfondissement, d'innovation et d'explication. Un résultat (mathématique) n'apparaît dans la communauté que s'il est présenté, expliqué et justifié auprès des pairs. Cela se fait par le biais de publications, évaluées par ces pairs, accessibles dans les bibliothèques ou de manière électronique, par internet. Cela passe aussi souvent par des présentations dans des séminaires, des conférences, avec ou sans actes. Il est clair que cette activité de présentations et de publications des travaux est un moteur essentiel des avancées du domaine. Elle permet de faire le point des connaissances existantes et d'explorer de manière plus pertinente ce qui n'est pas connu, sans devoir reprendre systématiquement les mêmes chemins et refranchir les mêmes obstacles.

Dans certains domaines comme, par exemple, la géométrie algébrique effective ou le calcul formel, dans lequel je travaille, la recherche de résultats d'ordre théorique peut être associée à des motivations algorithmiques, voire expérimentales. Le développement de logiciels pour valider des idées nouvelles, pour expérimenter des méthodes qui semblent prometteuses, ou pour mieux comprendre certains phénomènes, joue un rôle important. Cette étape d'expérimentation et d'implantation permet de valider des réponses à certaines questions tout en en posant de nouvelles. C'est également un moteur des avancées du domaine.

L'écriture de logiciels participe donc au progrès des connaissances. Elle peut être perçue comme une forme de description d'un certain savoir-faire ou d'une certaine expertise. Si, de plus, le logiciel est distribué, cette activité pourrait également être considérée comme une publication scientifique à part entière. Or, c'est loin d'être le cas. L'affichage de développements logiciels dans un dossier de candidature à un poste de chercheur, par exemple, n'a pas du tout le même poids que la publication d'articles, même si cette activité logicielle se révèle plus chronophage et parfois plus exigeante. Pourquoi en est-il ainsi ?

Pour pouvoir jouer un rôle équivalent à celui d'une publication classique, il faudrait d'abord pouvoir bâtir sur l'existant. Autant dans un article, il est facile (et recommandé) de citer des publications connexes, pour mieux les étendre ou les enrichir. Autant quand il s'agit de développement logiciel, ceci devient un véritable casse-tête.

Un obstacle important est certainement l'accessibilité. Ce mécanisme de référence d'un logiciel à un autre est souvent bloqué par les licences qui leurs sont associées. L'utilisation de licences dites propriétaires empêche un tiers de s'appuyer simplement sur un logiciel pour l'étendre. Une conséquence directe est que des codes ayant les mêmes fonctionnalités sont réécrits à plusieurs endroits, sans vraiment utiliser l'expertise sous-jacente et donc sans vraiment progresser. Il s'agit d'une vision propriétaire des connaissances. En mathématiques, peut-on dire que la commutativité de la multiplication des nombres rationnels ou le théorème de Pappus sont la propriété de quelqu'un ? Au niveau logiciel, il devrait en être de même. C'est, pourtant, cette règle de bon sens que les brevets logiciels tentent de forcer.

Les logiciels dits libres, au contraire, garantissent l'accessibilité tout en favorisant la possibilité de réutilisation externe. Ce type de licence permet en effet l'utilisation et l'extension d'un logiciel existant dans la mesure où le nouveau logiciel (étendu) est distribué avec la même propriété de copie et d'extension. Cela permet effectivement de considérer la diffusion d'un logiciel comme une publication scientifique. L'enjeu est du même ordre que pour les publications classiques : faire progresser les connaissances et mieux comprendre ce qu'on ne connaît pas.

Pour aller encore plus loin dans cette logique, pourquoi ne pas envisager d'évaluer ces travaux logiciels comme sont évalués les articles, en mettant en place un mécanisme de référé adapté à ce nouveau type de publication. Ceci permettrait d'analyser la pertinence des travaux et de valider leur qualité, tout en reconnaissant le travail des auteurs à une plus juste valeur. Cela permettrait également de construire de nouveaux développements sur des bases plus solides, sans devoir réinventer la roue. Enfin, cela fournirait un suivi historique permettant sans doute, *a posteriori*, de mieux comprendre l'évolution des connaissances dans le domaine.

Bien sûr ce modèle basé sur l'échange de savoirs est en opposition avec un modèle propriétaire et fermé, qui voit les logiciels comme des produits. On pourrait être tenté de penser que ce dernier modèle est dicté par des raisons économiques et que tout autre fonctionnement n'est pas possible. Du point de vue d'un utilisateur, vaut-il mieux devoir payer un nouveau produit chaque fois qu'une version améliorée apparaît, ou plutôt contribuer (financièrement ou directement) à l'évolution du logiciel, suivant ses besoins ? C'est ce dernier type de solution « plus économique » que favorisent les logiciels libres. Dans un modèle propriétaire, le prix de vente est directement lié à l'effort de maintenance et d'évolution du logiciel. Dans un modèle libre, cette évolution est ouverte à la communauté des utilisateurs et seul un service basé sur ce logiciel peut être payé. Les brevets et licences non-libres sont donc, d'une certaine manière, des freins à l'évolution d'un logiciel.

Personnellement, j'ai fait le choix d'une licence libre (de type GPL), pour le développement d'une bibliothèque logicielle synaps (voir `http://www-sop.inria.fr/galaad/software/synaps/`), dédiée au calcul symbolique-numérique et à la résolution d'équations polynomiales. Des contributions externes venant de différentes universités françaises (Limoges, Paris 6) ou étrangères (Athènes, Santander, Buenos Aires) enrichissent régulièrement ses fonctionnalités. Avec plusieurs groupes de la communauté de calcul formel impliqués dans des activités logicielles, nous proposons à travers le projet roxane (voir `http://www-sop.inria.fr/galaad/software/roxane/`), de coordonner nos développements et de rendre nos logiciels interopérables. Deux écoles d'été, l'une à Giens du 15 au 20 septembre 2002, l'autre à Sophia-Antipolis du 4 au 9 septembre 2005, présentant des tutoriels de logiciels libres en Algèbre et Géométrie, ont également été organisées dans le but de promouvoir l'utilisation de ces outils.

TRIBUNE LIBRE

Cette rubrique permet à toute personne de notre communauté d'y exprimer une opinion personnelle qui n'engage ni le comité de rédaction, ni la Société Mathématique de France. Les réactions à ces textes sont publiées dans le courrier des lecteurs.

Former des formateurs d'enseignants de mathématiques du second degré : pourquoi, comment ?

Nicolas Pouyanne[1] et Aline Robert[2]

Une fois les concours passés, par qui sont formés les jeunes enseignants du second degré (formation dite initiale) et... les moins jeunes (formation continue) à l'heure actuelle ?
Une grande diversité règne : certains stages de formation sont animés par des animateurs des I.R.E.M. (Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques, implantés dans les universités) ; ce sont alors des enseignants volontaires qui ont fait la démarche de venir à l'I.R.E.M. ; d'autres formateurs sont des enseignants remarqués par l'inspection pédagogique régionale, jugés excellents, auxquels on a proposé cette tâche. La plupart du temps, ils continuent d'enseigner, mais sont en partie déchargés de leurs classes. Ce dernier cas se rencontre souvent dans les formations initiales organisées dans les I.U.F.M.[3], en ce qui concerne la formation mathématique, même si des compléments peuvent être apportés par des universitaires. Ajoutons que les enseignants débutants (stagiaires de C.A.P.E.S. ou d'agrégation) ont aussi un conseiller pédagogique qui les aide au niveau de leur établissement, au quotidien (et qui est très apprécié, en général).
Ainsi, jusqu'à présent les recrutements de formateurs ne mettent pas en jeu des connaissances « estampillées » officiellement, mais plutôt des critères de l'ordre de l'expérience et de la réussite professionnelle. Leur formation de formateurs se fait essentiellement « sur le tas », à partir de leur expérience (souvent grande) et des échanges qu'ils peuvent avoir entre eux.

La démarche exposée ici est différente puisqu'il s'agit de proposer une formation universitaire organisée pour ces formateurs. Cette démarche fait par ailleurs déjà l'objet d'un début de reconnaissance institutionnelle : faisant suite à un diplôme d'université (D.U.) à Versailles-Saint-Quentin en 2002/2003 et 2003/2004, un master professionnel, adossé au master de recherche de didactique des disciplines scientifiques, a été ouvert à la rentrée 2004 à l'université Paris VII pour « former des formateurs d'enseignants du second degré en mathématiques ». En tout état de cause, ce diplôme, qui s'adresse à des enseignants ayant au moins cinq années

[1] Maître de conférences à l'université de Versailles Saint-Quentin, chercheur en mathématiques.
[2] Professeur à l'IUFM de Versailles, chercheur en didactique des mathématiques.
[3] I.U.F.M. : Institut universitaire de formation des maîtres

d'expérience après le concours, n'engage à rien de manière automatique : ni à devenir formateur, ni à être recruté comme tel. Mais comme les recrutements de formateurs font dorénavant l'objet de procédures spécifiques, ce diplôme peut jouer favorablement.

Dans cet article nous présentons d'abord une justification de la démarche de formation de formateurs. Puis nous indiquons nos objectifs précis dans ce type de formation et décrivons des modalités de formation supposées adéquates : les expériences qui ont déjà eu lieu nous confortent dans ce point de vue. Nous concluons par des questions.

Pourquoi former des formateurs ?

Nous exposons ici les raisons d'être d'une telle formation.

En un mot, ce sont à la fois les attendus de l'enseignement des mathématiques dans le second degré compte tenu des conditions actuelles ainsi que nos hypothèses sur les apprentissages des élèves, les pratiques des enseignants et leur formation qui nous amènent à proposer d'avoir des formateurs « formés » de manière spécifique.

Plusieurs travaux menés sur l'enseignement primaire ont révélé des décalages importants entre les objectifs des formateurs et les pratiques ultérieures des formés. Parmi les nombreux facteurs à l'origine de ces décalages, on relève l'insuffisance des formations en termes de relations entre le message théorique et les pratiques du quotidien. C'est précisément un des enjeux majeurs dans le second degré à notre avis.

Il s'agit alors de former des formateurs qui soient préparés explicitement à leur mission. Ils doivent être « davantage » que des super-enseignants, dont le bagage essentiel est l'expérience personnelle enrichie *a posteriori* : les formateurs « dont on rêve » doivent réussir à élaborer des scénarios de formation adaptés pour installer, enrichir, voire changer les pratiques des enseignants de mathématiques en relation avec les apprentissages des élèves.

1) Attendus et difficultés générales dans l'enseignement des mathématiques du secondaire.

Sans entrer dans le détail des attendus de l'enseignement des mathématiques, on peut dire sans trop s'avancer qu'il y a à l'heure actuelle un certain malaise qui concerne la qualité des apprentissages des élèves du second degré. Cela a des conséquences jusqu'à l'enseignement supérieur : beaucoup de collègues s'attendent à trouver chez leurs étudiants des connaissances qui, en fait, ne sont pas acquises comme ils l'auraient pensé.

Trois dysfonctionnements de l'enseignement des mathématiques, déjà importants antérieurement, sont devenus, nous semble-t-il, au fil de la démocratisation-massification de l'enseignement secondaire, très dommageables pour les apprentissages. Toutes les difficultés sont en effet aggravées par l'hétérogénéité croissante des classes et des établissements, par les réductions d'horaires en mathématiques et par des phénomènes de société qui dépassent l'école et peuvent jouer par exemple sur les conditions de travail des élèves.

D'abord, nous pensons qu'est encore répandue l'idée que le « bon » exposé bien clair et bien maîtrisé par l'enseignant est nécessairement transparent pour les élèves (« illusion de la transparence »). De tels exposés ne sont pas du tout accessibles à tous les élèves, et les difficultés d'appropriation de ce que le professeur dit en classe peuvent même entraîner des difficultés à travailler à la maison : il y a là une cause possible d'une spirale descendante bien connue. Des formes nouvelles — cours dialogué au lieu de cours magistral notamment, activités d'introduction superficielles — ont pu faire croire à un changement en profondeur. Nous pensons que c'est insuffisant, voire même un leurre. Pour trop d'élèves, faire des mathématiques continue de consister en une suite de petites tâches isolées les unes des autres, qui reviennent à appliquer correctement une propriété ou une règle indiquées par l'enseignant. Le moindre changement dans l'énoncé, la moindre initiative à prendre deviennent insurmontables. Cependant, nous pensons aussi qu'il y a des causes profondes — entièrement légitimes — à l'origine des choix des enseignants : même si l'on est convaincu de l'intérêt de modifier ce type de choix, il n'est pas du tout simple de le faire quand on a trop peu de temps, un programme très chargé et des classes vraiment trop hétérogènes. Dans certains cas, réussir à engager à peu près tous les élèves dans l'action mathématique relève déjà de l'exploit quotidien.

Plusieurs conséquences à cela : d'abord l'état des connaissances de nos étudiants. Ils savent des choses, mais ils ne savent pas les reconnaître quand ils en ont besoin sans indication de notre part. Ensuite, et c'est lié, ils n'ont pas organisé leurs connaissances entre elles ni beaucoup exploré leur domaine de validité. Enfin changer cet état de faits nécessite, du côté des enseignants, des formations spécifiques qui s'attaquent à des habitudes dont les raisons d'être sont très fortes.

Ensuite, on a remarqué l'importance croissante des malentendus, c'est-à-dire des décalages essentiels entre les activités que l'enseignant croit que l'élève a déployées et les activités réelles ; ces dernières s'avèrent, chez bien des élèves, beaucoup plus restreintes et superficielles que prévu, notamment en Z.E.P[4]. Un tout petit exemple en quatrième : l'enseignant raisonne sur un triangle rectangle générique, appelé ABC, alors que certains élèves travaillent, eux, sur le cas particulier dessiné sur leur cahier, et ne saisissent pas que le théorème qui a été démontré (disons le théorème de Pythagore) est valable pour tous les triangles analogues. Du coup certains élèves n'arrivent pas à appliquer le théorème si le triangle s'appelle MNP ou est dessiné « la tête en bas ».
Ce problème n'a pris une certaine ampleur qu'avec l'accès au second degré de couches nouvelles d'élèves. Le combattre est un second enjeu de la formation des enseignants. Il ne s'agit pas d'abaisser les exigences en appelant toujours les triangles ABC, mais d'avoir à disposition des moyens pour amener ce type d'élèves à construire leurs connaissances mathématiques. Cela ne s'improvise pas facilement, surtout lorsqu'il s'agit de classes difficiles.

Enfin, l'intégration des nouvelles technologies (T.I.C.E.[5]) supporte mal l'improvisation et les enseignants y rencontrent souvent des difficultés. C'est pourtant peut-être un enjeu face à l'ennui ou au désintérêt par rapport aux sciences, souvent signalés. Il ne s'agit pas d'apprendre seulement le maniement mathématique de logiciels mais leur utilisation nécessite de modifier la gestion de la classe et requiert plus d'exigence en termes d'exposition des connaissances et de passage à l'écrit. En effet, on a montré que s'il arrive que les élèves s'engagent bien dans l'action sur l'ordinateur, ils ont du mal à s'en extraire et à atteindre la conceptualisation qui reste l'objectif final. En outre, certaines conceptions des mathématiques (et

[4] Z.E.P. : Zone d'éducation prioritaire.
[5] T.I.C.E. : Technologies de l'information et de la communication pour l'enseignement.

de leur évaluation) doivent changer au contact de ces instruments. Il nous semble là encore nécessaire que les enseignants aient des connaissances spécifiques pour mettre en place un enseignement intégrant les T.I.C.E. le plus rapidement possible et sans trop se décourager.

Nous développons ci-dessous un certain nombre de ces constats à partir de recherches en didactique des mathématiques.

2) Du côté des apprentissages des élèves : des activités souvent réduites.

Dans notre point de vue didactique, apprendre, du côté des élèves, est associé à conceptualiser, donner du sens, utiliser à bon escient ainsi qu'à organiser les connaissances mathématiques entre elles.

De nombreux travaux ont déjà illustré le fait qu'apprendre dépend fortement des activités des élèves en classe. Par activités, nous entendons tout ce que les élèves pensent, font, disent, ne disent pas... Elles sont déterminées à la fois par les énoncés qui sont donnés et par ce que le professeur organise pendant le temps de la classe. Bien sûr cela dépend aussi d'autres facteurs mais ces derniers sortent de notre champ de recherches.

Un certain nombre de recherches en didactique ont été menées dans des classes ordinaires, pour analyser ces activités. Par exemple, nous avons montré que le démarrage des exercices en classe au collège et même en seconde, y compris chez des enseignants très qualifiés, relevait souvent — les contraintes de temps et d'hétérogénéité des classes aidant — du schéma suivant [15]. L'enseignant prend la parole dès le début du travail de résolution et indique au fur et à mesure ce qu'il « faut » faire, tout en privilégiant un travail sur le savoir nouveau, qui vient d'être exposé (formules, définitions, règles, théorèmes). On n'explore cependant que peu ce nouveau, et il est rare que l'on travaille explicitement à l'entretien des connaissances anciennes ou à la réorganisation entre ancien et nouveau.

En termes d'activités, cela correspond à des tâches isolées qui portent sur le chapitre en cours, avec à la fois très peu de travail d'adaptation des connaissances à utiliser et une majoration des calculs bien balisés que presque tous les élèves peuvent faire. Ils ont rarement l'occasion de faire appel à des connaissances disponibles — qu'ils doivent repérer tout seuls, sans qu'il y ait d'indication à ce sujet. Le travail du sens se trouve de fait réduit par cette organisation de l'enseignement. De plus, dans ces conditions, le travail des moyens de contrôles devient inutile pour la réussite aux exercices. Pourtant, n'est-il pas nécessaire aux apprentissages ?

Cela dit, on ne peut pas être sûr qu'il résulte de ces choix un morcellement des connaissances et/ou des acquisitions peu solides, car des élèves apprennent aussi ce qui ne leur est pas enseigné explicitement. Mais on peut se poser la question, notamment pour des élèves moyens. La plainte réitérée de beaucoup d'observateurs du manque de « choses sûres » chez les élèves n'a-t-elle pas en partie comme origine ce type de réduction du travail en classe ? Tout comme cette phrase souvent entendue chez les élèves « c'est juste quand on commence à comprendre qu'on change de chapitre »...

Pourquoi donc les enseignants font-ils ces choix ? Pourraient-ils faire autrement ?

3) Du côté des pratiques des enseignants.

Des recherches didactiques sur les pratiques des enseignants de mathématiques en classe sont menées depuis une dizaine d'années en France. Nous retenons ici

celles qui s'inscrivent dans la double approche qui a été développée avec J. Rogalski chercheur en ergonomie cognitive [13, 17] : il s'agit de tenir compte du fait que les choix des enseignants ne peuvent pas répondre exclusivement aux besoins d'apprentissage de chaque élève car leurs pratiques sont contraintes de multiples manières. Bien sûr, les programmes et les horaires pèsent largement sur les décisions des enseignants, souvent déchirés entre la nécessité institutionnelle de finir le programme et l'ambition professionnelle de faire « bien » au moins quelques chapitres. Mais les attentes des autres collègues, les habitudes de chaque établissement, les élèves, les parents et l'administration ont aussi une place dans ce qui est possible ou non dans une classe donnée. En outre, un enseignant travaille avec ses conceptions, ses valeurs personnelles, ses connaissances particulières, ses expériences et ses goûts et l'exercice de son métier repose sur cette cohérence qui se renforce au fur et à mesure de sa carrière. Tout se passe comme si les choix des enseignants optimisaient tout un tas de contraintes qui dépassent largement les seuls apprentissages de leurs élèves. D'ailleurs quand on leur pose la question d'alternatives éventuelles, ils en voient peu.
De plus d'autres résultats de recherche démontrent que les pratiques des enseignants sont rapidement stables [20], voire difficiles à changer, et que cette stabilité est en germe dès l'installation des pratiques chez les débutants. Si on vérifie que ces équilibres individuels sont différents d'un enseignant à l'autre [9], on a pu aussi mettre en évidence certaines régularités globales, qui se dégagent en partie à l'insu des acteurs [19] : certaines décisions ne seront jamais prises par aucun enseignant même si elles leur paraîtraient plus efficaces en termes d'apprentissage pour tous les élèves. Par exemple attendre que tous les élèves réussissent quelque chose est quasi impossible si la classe est trop hétérogène. Autre exemple, beaucoup d'enseignants n'arrivent pas à se taire plus de 30 secondes dans une classe après avoir proposé la recherche d'un exercice, y compris pour des raisons déontologiques alors qu'ils sont absolument convaincus de l'intérêt de faire chercher les élèves : cela semble incompatible avec les habitudes et les attentes des uns et des autres. Il est difficile de ne pas faire « comme les autres » notamment à l'échelle d'un établissement. La difficulté d'organiser des formes de travail différentes, comme le travail en petits groupes ou même en salle machine en est révélatrice.

Alors si les pratiques sont contraintes et stables, y a-t-il encore des variables dans cette situation ?

4) Comment faire évoluer les choses ?

Notre hypothèse est qu'on peut (quand même !) améliorer les apprentissages scolaires par des formations d'enseignants permettant, par exemple, à chaque professeur d'organiser dans sa classe davantage d'activités mathématiques porteuses d'apprentissage : formations spécifiques pour les Z.E.P. afin de mieux connaître les types d'intermédiaires qu'on peut utiliser avec des élèves en difficulté, formations aux T.I.C.E. qui ne se limitent pas à une initiation aux logiciels, formations des pratiques permettant une prise en compte réelle des activités des élèves en relation avec leurs apprentissages grâce à de nouveaux outils mis au service des enseignants.

Car il s'agit, nous insistons, d'aider les enseignants à surmonter de véritables obstacles : souvent l'enjeu n'est pas seulement de reproduire ni même d'améliorer des pratiques existantes mais de pouvoir les modifier, les enrichir.

Certes l'idée de formation professionnelle initiale est essentiellement associée dans le milieu enseignant à « compagnonnage », « formation sur le terrain » (c'est-à-dire en classe) grâce à un suivi au quotidien du débutant par un enseignant expérimenté. Les formations regroupées en centre sont souvent perçues négativement *a priori*. Il est clair que, alors qu'il n'y avait qu'une formation très légère (ce qu'on appelait C.P.R.[6], avant 1991), il y a eu de très bons professeurs, mais les problèmes n'étaient pas aussi aigus ni aussi massifs, les besoins et les conditions sociales étaient autres. Ainsi, nous faisons l'hypothèse qu'une formation exclusivement sur le terrain engendre beaucoup plus facilement des reproductions que des modifications et peut s'avérer insuffisante. Des choses importantes ne se voient pas lorsqu'on reste en classe, même chez de « bons » professeurs, par exemple certains malentendus subtils ou trop grossiers. De plus expérience n'est pas nécessairement synonyme d'expertise : par exemple une recherche récente (cf. Maurice [11], 2000), a montré que des enseignants très expérimentés prévoyaient certaines réponses d'élèves moins bien que des novices, suite à l'illusion de la transparence de leurs propos d'enseignants qu'ils ne remettaient plus en question. Enfin, les « bons » enseignants ne savent pas nécessairement tout seuls caractériser leurs pratiques dans leur spécificité : qu'est-ce qui a « marché » ? les choix d'énoncés ? les modalités de travail en classe, ou leur combinaison ?

Par ailleurs, la transmission « directe » des recherches en didactique aux enseignants ne se fait pas bien. Même les scénarios d'enseignement les plus robustes imaginés à l'issue de recherches ne sont pas adoptés par la majorité des enseignants qui les connaissent. Plusieurs facteurs peuvent expliquer cela pour le second degré : des décalages entre les représentations qui ont guidé la conception de la séquence et ce que le professeur en attend, le caractère inhabituel qu'une telle séance peut revêtir lorsqu'elle est isolée dans l'année, l'apparent « temps perdu » pendant les séances...

Dans ces conditions, nous suggérons deux modalités à développer sous la responsabilité des universitaires : une formation pré-professionnelle, liée aux contenus à enseigner, en fin de licence (dans le système L.M.D.[7]) et une formation de formateurs, qui prenne en charge de manière plus outillée la formation professionnelle des enseignants.

Un détour par une formation initiale pré-professionnelle en licence

On pourrait ainsi penser à une formation pré-professionnelle à l'université, liée aux contenus mathématiques à enseigner, qui anticipe sur certains des besoins évoqués ci-dessus : notamment organiser les connaissances pour préparer les futurs enseignants à entendre les élèves et à leur faire travailler le sens, mais aussi rétablir chez les étudiants des productions de niveau « très bien », alors qu'on se contente souvent d'un niveau « moyen ». Il y a lieu de les sensibiliser à la relativité de la rigueur en mathématiques et plus généralement, au rôle producteur de l'écrit qui reste souvent implicite dans les études universitaires.

Un des changements qualitatifs importants qui intervient en effet entre la formation universitaire de l'étudiant et la première année d'enseignement du nouveau professeur est le suivant : il s'agit de concevoir un texte complet pour une séance donnée,

---

[6] C.P.R. : Centre pédagogique régional.

[7] L.M.D. : Licence-Master-Doctorat.

sans trous, sans fautes (autant que possible), présenté oralement, et de surcroît, il faut prendre en compte les élèves en leur proposant des activités adéquates ! Quelle préparation reçoivent nos étudiants, à part les exemples que nous leur donnons et où ils sont « de l'autre côté de la barrière », intéressés surtout par la réussite ?

Jusqu'à la fin de la licence, les connaissances mathématiques sont presque toujours introduites aux étudiants avec leurs définitions et propriétés (notions considérées comme objets), puis des exercices et problèmes sont proposés pour utiliser ces connaissances comme outils.

Une pré-professionnalisation peut servir à introduire un travail sur les différentes « qualités » de mises en fonctionnement des connaissances dans les exercices, l'organisation de ces connaissances entre elles et leur nature (avec leur diversité), en relation avec les activités mathématiques des élèves.
Des analyses d'énoncés permettent ainsi d'apprendre à repérer les connaissances à utiliser dans des exercices (connaissances anciennes, nouvelles, indiquées ou non) et la manière de les utiliser, les adaptations à introduire par rapport au cours, les mélanges.
On met aussi en évidence, en proposant des exercices à résoudre de différentes manières, l'importance du travail d'organisation des connaissances les unes par rapport aux autres, y compris le cas échéant en relation avec la modélisation ou l'utilisation des mathématiques dans d'autres disciplines scientifiques. Enfin, on envisage des questions liées à la nature de ces connaissances, en relation avec les connaissances antérieures (degré de généralisation, formalisation) : exposés sur les progressions et les fondements, qui débouchent sur des questions sur les démonstrations et leur relativité.

Pour sensibiliser les étudiants à la fois à la différence entre analyses *a priori* et déroulement effectif et aux impératifs de clarté et de rigueur des interventions des enseignants, on peut envisager des modalités particulières pour certaines séances : exposés d'étudiants, devant être « parfaits » ou même séances préparées, encadrées (et corrigées) par un groupe d'étudiants. Lors d'un stage dans un collège ou un lycée, les étudiants observent certains exercices en se centrant à la fois sur les aides de l'enseignant pendant la résolution et sur les réactions des élèves. Le rapport de stage permet de mettre en relation les analyses de ces exercices et les déroulements effectifs.

Un tel travail prépare à la fois l'oral du C.A.P.E.S.[8] (analyses demandées dans la deuxième épreuve d'oral) et la deuxième année d'I.U.F.M. (prise en main d'une classe). Il nous semble important dans la formation des futurs enseignants dans la mesure où ils auront à choisir des exercices qui induisent des activités mathématiques, celles-ci générant en partie les apprentissages des élèves, tout en tenant compte de l'inévitable « érosion » de leurs projets en classe.

Une formation des formateurs à la hauteur des besoins en formation des enseignants

Pour reprendre le point de vue plus strictement professionnel nous pensons que, pour faire évoluer les pratiques autant qu'il est nécessaire, que ce soit à l'installation ou plus tard, il ne suffit pas de former en montrant (« fais comme moi ») ou en disant (« fais ce que je fais ») à partir de l'expérience personnelle, même si cela reste

---

[8] C.A.P.E.S : Certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré.

indispensable. Une formation mathématique initiale aussi complète que possible, également, est indispensable mais non suffisante.
Nous proposons de former des formateurs qui puissent aider aussi bien les débutants à installer leurs pratiques que les enseignants plus expérimentés à évoluer face aux nouvelles difficultés. Ces aides sont étayées par des connaissances supplémentaires que les enseignants n'ont pas en général. Ces connaissances s'appuient elles-mêmes sur l'expérience d'enseignement, permettent aux formateurs de se décentrer de leur propre pratique et de travailler sur d'autres cohérences que la leur. On pourrait parler d'expérience outillée.

Pour préciser ce qui a déjà été dit, les formateurs « dont nous rêvons » connaissent plus que leurs propres choix d'enseignement. Dans notre idée, ils doivent être formés à

1) analyser les pratiques en classe (en relation avec les activités des élèves) ;
2) repérer les diversités (pour pouvoir concevoir des adaptations), connaître les régularités (qui correspondent à des contraintes) ;
3) réfléchir sur les dispositifs de formation ;
4) utiliser les ressources (bibliographiques,...) de manière critique.

Pour cela, ils doivent avoir des connaissances sur les apprentissages en classe et notamment sur ceux des « nouveaux » élèves, sur les mathématiques, sur les pratiques des enseignants, sur les formations, sur le système global et sur les ressources.
Ils doivent avoir une idée des alternatives et de ce qui est « impossible » à un niveau scolaire donné sur un contenu donné, ou en tout cas avoir des moyens pour les trouver.
Ils doivent disposer de mots pour dire les choses de l'enseignement des mathématiques y compris pour traduire leur propre expérience, dont ils peuvent alors se décentrer, et on cherche à ce qu'ils aient tous plus ou moins les mêmes mots pour assurer une continuité des formations.
Mais la complexité du système implique que leurs connaissances doivent être d'une part reliées entre elles et d'autre part critiques (pour s'adapter ou intégrer « correctement », plus tard, de nouvelles recherches par exemple). Les formateurs doivent notamment pouvoir adapter des propositions à des enseignants de styles différents.
Enfin ils peuvent jouer un rôle d'interface entre les chercheurs et les enseignants, pour mettre à profit les résultats des recherches.

Devenir formateur demande ainsi un temps long, une rupture, un changement de posture... Une véritable formation, collective, semble nécessaire.

Propositions pour une formation de formateurs

1) Apports inspirés par la didactique et autre apports.

Plusieurs hypothèses fondatrices sont admises par les chercheurs en didactique qu'il nous faut expliciter : la première serait sans doute « qu'il ne suffit pas de bien savoir les mathématiques pour bien les enseigner », au moins à des élèves jusqu'au lycée, même si c'est éminemment nécessaire... Alors quoi d'autre ?
Une deuxième hypothèse fondatrice tient au fait que nous admettons que, par delà les facteurs affectifs, psychiques, sociaux qui entrent en jeu dans les apprentissages, la prise en compte des activités mathématiques des élèves renseigne déjà beaucoup

sur leurs apprentissages.
L'hypothèse du caractère « régulier » de certaines relations entre enseignement et apprentissage (par delà toutes les diversités individuelles évidentes) est alors admise : nos recherches consistent pour une grande part à explorer ces régularités en trouvant des outils efficaces pour le faire.
Bien entendu ces régularités ont un champ limité. On ne cherche pas de résultats du type « si on enseigne la proportionnalité de telle et telle manière, les élèves apprennent » : la manière d'enseigner ne se réduit à aucune description, même si certaines caractéristiques peuvent être dégagées — les élèves varient trop entre eux et d'une classe à l'autre. Le temps long, dont nous pensons qu'il est fondamental dans les apprentissages, empêche souvent les évaluations longtemps après dont on rêverait. En revanche on peut établir des relations régulières entre des choix d'enseignement dans certains types de classe et des résultats partiels pour un pourcentage important d'élèves; on arrive ainsi à dégager des variables liées aux contenus à proposer aux élèves, à la gestion de la classe et à leurs imbrications. Par delà les résultats qui restent par nature très liés aux contextes précis où ils ont été obtenus, très relatifs, très partiels, ce sont en fait toutes ces variables qui nous semblent fondamentales pour enrichir les formations. Ces variables, chaque enseignant aura à les combiner, avec plus ou moins de succès, pour s'adapter à chaque nouvelle situation (contenu, classe...) — cf. [18]. Précisons-les.

Dans nos travaux, nous étudions ainsi à des niveaux divers les spécificités des savoirs mathématiques enseignés et les modes d'enseignement, en relation avec les apprentissages des élèves (compte tenu de théories générales sur l'apprentissage que nous devons adapter).
Nous avons déjà indiqué certains outils d'analyse des exercices mathématiques dans le paragraphe II. On les complète par des outils d'analyse des déroulements en classe qui permettent de reconstituer les activités mathématiques dans lesquelles les élèves peuvent rentrer : il s'agit de repérer par exemple les formes de travail et les temps des différentes phases, les aides de l'enseignant, qui peuvent être directes ou seulement mettre sur la voie, les évaluations.
Par ailleurs certains chercheurs ont réussi à élaborer des modèles de situations mathématiques à proposer en classe particulièrement propices à faire acquérir divers types de connaissances en jeu [8]. Les analyses de classe ordinaires permettent de comprendre tout ce qui s'oppose à la mise en œuvre de telle ou telle situation et de dégager les variables que l'enseignant doit choisir pour s'adapter à chaque cas. Des recherches plus globales, notamment sur les programmes, leur évolution, leur « économie » servent à mieux mesurer les contraintes générales qui pèsent sur le système.

Cela dit, entendons-nous bien, ce n'est pas une formation en didactique que nous proposons aux formateurs !
Nous choisissons de leur présenter et de leur faire travailler longtemps certains des outils d'analyse mis au point en didactique ; nous exposons aussi certains types d'analyse et certains résultats partiels, avec leurs limites mais nous ne cherchons pas à les faire rentrer dans notre démarche de recherche, ne serait-ce qu'à cause du coût en temps de ces démarches, du « métier » que cela suppose. En revanche, nous nous sommes inspirés très largement de nos résultats sur les pratiques des

enseignants pour mettre au point les modalités de notre formation comme nous allons l'expliquer ci-dessous.

Notons que les candidats au master doivent aussi suivre des options liées à des contenus mathématiques particuliers (modélisation, statistiques) et un enseignement sur des compléments sociologiques transversaux (indépendants des contenus) cf. [5].

2) D'autres choix que nous ne retenons pas.

Des formations de formateurs peuvent être centrées sur les phénomènes psychiques qui occupent obligatoirement une partie du terrain de la classe. C'est ce que propose Blanchard-Laville [6] avec des groupes Balint par exemple.
Nous adoptons, quant à nous, le point de vue de travailler sur ce qui relève du conscient et/ou du préconscient. Autrement dit nous restons dans le rationnel, et nous faisons comme si les pratiques des enseignants étaient affaire de décisions (pré)conscientes. Pour la préparation des séances, ce choix paraît assez raisonnable même si d'autres facteurs peuvent intervenir, par exemple dans les anticipations des enseignants ; pour les déroulements (accompagnements pendant la séance) il est évident que d'autres facteurs interviennent de manière plus importante, justement de l'ordre du psychanalytique, notamment. Nous ne les sous-estimons pas mais ne les prenons pas directement en compte.

Il existe aussi des formations fondées sur d'autres choix, comme les analyses réflexives de pratiques qui ne prennent pas spécifiquement en compte les contenus enseignés, contrairement à ce que nous mettons en œuvre.

On pourrait aussi former les formateurs à un travail sur les pratiques langagières des enseignants, avec ce qu'elles véhiculent comme omissions, sous-entendus, implicites et différences éventuelles entre les élèves. Nous ne faisons qu'amorcer cette piste qui pourrait être sans doute complétée dans un deuxième temps, en relation avec les contenus.

3) Un noyau central et deux types d'activités fondamentales dans notre conception de la formation de formateurs : les analyses de vidéos de séances en classe et les conceptions de scénarios.

– Un noyau central.

Toute notre formation est centrée sur l'analyse des activités mathématiques des élèves en classe telle qu'elles sont provoquées par les choix des enseignants. Ces activités sont en effet un verrou vers les apprentissages des élèves ; ce que les enseignants proposent aux élèves contribue plus ou moins à tourner ce verrou dans le bon sens... Il s'agit de donner aux futurs formateurs des outils pour faire cette analyse en classe, en comprendre les variables et les choix possibles. Charge à eux ensuite d'utiliser des analyses et de transmettre ce qu'ils jugeront utile !

Seulement pour comprendre ces variables et ces choix on doit sortir un instant des classes, pour mieux y revenir ensuite. Un détour est nécessaire du côté des mathématiques : quels sont ces savoirs à enseigner ? Il sont cumulatifs, organisés en réseaux, traversent différents domaines de travail (cadres), ont des degrés de généralisation divers, formalisés dans différents registres, supposent l'acquisition de techniques à leur tour pourvoyeuses de sens... Qu'est-ce qui peut influencer les apprentissages ? On peut citer les dynamiques entre l'exposition des connaissances et le travail à leur sujet avec les durées des différents moments, la place et la nature des commentaires, les interactions entre les élèves, le traitement des erreurs, les évaluations...

Ainsi accrochons-nous à notre noyau central les analyses en classe et des éléments divers qui se répartissent au gré des besoins rencontrés au fur et à mesure, notamment par les études de vidéo.

– Les analyses de vidéos : des analyses des contenus des activités proposées et des déroulements des séances en classe au travail de repérage des variables.

Les analyses de vidéos [4] sont conçues pour faire étudier le couple énoncé mathématique proposé aux élèves — activités des élèves au cours du déroulement en classe. Le mot énoncé est à prendre au sens large de tâche, définie en relation avec les mathématiques : il peut s'agir d'un exercice, ou d'un cours de l'enseignant à écouter, ou d'une situation à aborder avec l'enseignant et la classe.
L'objectif essentiel de ces analyses est de pouvoir étudier ce que les élèves ont à faire en mathématiques en classe et d'en repérer des variables. Mais elles permettent aussi de se poser des questions qui dépassent la séance et sont complétées par d'autres informations.

– Le schéma des activités de formation de formateurs à partir de vidéos.

Chaque participant se filme dans sa classe au premier trimestre et présente une analyse d'un extrait de l'ordre de dix minutes de cette vidéo au second trimestre.
Toutes les séances sont organisées selon le même plan : on laisse un petit temps aux participants pour chercher l'exercice qui sera montré ou réfléchir au cours présenté et en faire une analyse *a priori*, non « corrigée ». On visionne l'extrait. L'enseignant concerné reprend l'analyse, commente le déroulement, reconstitue les activités des élèves, expose son projet et ouvre la discussion sur les analyses et plus généralement sur les alternatives envisageables et les problématiques, c'est-à-dire les questions ouvertes que l'on peut rencontrer à partir de la vidéo. Ces questions n'ont pas de réponse définitive ; différents choix s'expriment et sont approfondis en termes de variables didactiques (cf. IV.1 ci-dessus).

– Des conditions nécessaires à respecter pendant les séances de formation de formateurs.

Ces activités à partir de vidéos nous semblent devoir remplir un certain nombre de conditions nécessaires pour la formation, regroupées ci-dessous en 4 points et qui reprennent ce qui a été exposé plus haut.

1) Un travail des pratiques et pas seulement des apports de connaissances sur les pratiques (respect de la complexité).
Il s'agit d'articuler les apports du terrain et les apports plus théoriques, à la fois comme moyen de formation et comme objectif de formation, comme s'il s'agissait d'outiller l'expérience du terrain.

Dans les analyses de vidéos, c'est ainsi un travail simultané sur les contenus mathématiques enseignés et les déroulements des séances qui est systématiquement organisé.

2) Une prise en compte des contraintes, des marges de manœuvre et de la tendance de ces pratiques à se stabiliser sur le plan individuel, en référence à des cohérences personnelles.

Une des caractéristiques importantes des pratiques des enseignants qui doit intervenir dans leur formation et dans celle des formateurs est la co-existence d'une part de contraintes extérieures aux enseignants, explicites ou plus cachées, qui limitent les marges de manœuvre à l'échelle de chaque individu et d'autre part de styles individuels forts dont le respect est indispensable pour un bon exercice de la profession. Cela se double du fait que les pratiques individuelles sont stables. Cette stabilité s'appuie sur des cohérences individuelles et sur le fait que les pratiques sont, rappelons-le, complexes.

Les vidéos permettent la mise en évidence progressive des contraintes, la réflexion sur les marges de manœuvre et les alternatives, et le travail de repérage des variables. Le travail sur les alternatives, virtuelles, est un bon intermédiaire à nos yeux pour aborder la complexité de cette situation.

3) La prise en compte explicite du fait qu'on forme des adultes, enseignants déjà en exercice : un vocabulaire spécifique, et des moments collectifs très préparés.
Nous proposons que cette mise en jeu du collectif se fasse par l'intermédiaire de « mots pour le dire », pour spécifier l'activité professionnelle. La prise en compte de l'expérience doit de faire grâce à des situations ayant du sens pour les formés, et à des activités réelles où ils peuvent à la fois s'investir et apprendre quelque chose de nouveau. Il est important que ces activités ne se passent pas seulement sur le terrain (analyses de vidéo, résolution de problèmes professionnels, travail sur le mémoire professionnel, accompagnements de néotitulaires...).

Sur les vidéos, des activités réelles et collectives ont lieu. Ces activités sont « proches » de l'expérience des participants (en amont de la formation) et de leurs besoins (en aval de la formation). Par ailleurs, le travail collectif réel est amené par l'importance des travaux pratiques où chacun occupe tour à tour plusieurs places (acteur, spectateur et analyseur), par la mise au point de grilles d'analyse communes avec des mots précis utilisés ensuite par tous, lors des discussions sur l'analyse présentée qui interpelle facilement les participants, mais aussi lorsque sont travaillées les alternatives.

4) La nécessité du temps long.

Enfin nous faisons une dernière hypothèse forte qui nous semble s'imposer compte tenu de tout ce qui précède : la nécessité du temps long, pour toutes les formations. C'est contraire à bien des habitudes actuelles, notamment en formation continue.

La durée est nécessaire en effet à nos yeux pour qu'une certaine rupture puisse s'établir, qui permette au participant de ne pas rapporter ce qu'il travaille seulement à ses propres pratiques et à son expérience mais aussi à de nouvelles connaissances plus larges, suffisamment appropriées pour être adaptées.

– Les conceptions de « scénarios de formations ».

Ce travail est organisé en petits groupes de 4 à 5 participants. Il est préparé par des observations de formations déjà en place, qui permettent de travailler sur l'existant en se posant des questions pertinentes et d'envisager des modifications éventuelles. Les lectures d'articles de la littérature professionnelle alimentent aussi ce travail, source d'idées d'activités. Le scénario de chaque groupe donne lieu à une exposition collective en fin d'année.

Conclusion : quelques questions.

1) Des questions sur les pratiques enseignantes et les recherches.

Les recherches didactiques qui ont donné naissance à ce travail analysent les pratiques d'une certaine manière : les indicateurs retenus permettent ainsi d'analyser les contenus travaillés par les élèves et les déroulements à peu près en temps réel. Mais n'y a-t-il pas d'autres indicateurs à tester que ceux que nous avons introduits pour bien comprendre ce niveau ?
En particulier, ces recherches laissent dans l'ombre beaucoup d'aspects qui interviennent à cette échelle — les facteurs psychiques, les pratiques langagières, les appartenances sociologiques. Elles sont centrées sur la recherche des itinéraires que finalement les enseignants organisent en classe pour leurs élèves, du moins si on fait confiance aux données d'observation recueillies directement ; elles analysent aussi des éléments collectifs cachés dans les pratiques individuelles : contraintes institutionnelles et sociales. Mais un tel découpage est-il légitime, notamment lorsqu'on en infère des conclusions sur les formations ?
Par ailleurs, un des résultats obtenus dans ces recherches est la stabilité des pratiques — au sens où un même enseignant développe des pratiques analogues dans des situations comparables. Cependant un des objectifs des formations est l'évolution de ces pratiques : comment se combinent stabilité et évolution ?

2) Des questions sur l'évaluation des formations.

Cette question est très vaste, peu abordée et plusieurs niveaux s'y mélangent : le niveau des formations, celui des pratiques et celui de leurs effets sur les élèves.
Nous essayons modestement pour l'instant de mettre en place des évaluations sous forme de suivis : par exemple, nous envisageons l'année qui suit une formation de formateurs de travailler avec eux sur des contrôles donnés aux élèves par certains d'entre eux ou par d'autres enseignants, en leur demandant d'analyser eux-mêmes les énoncés du contrôle en relation avec le travail qui a été organisé en classe et à la maison et d'en tirer des conclusions. Cela donne accès à la fois à une certaine évaluation de notre formation, par l'intermédiaire de la mise en fonctionnement de nos outils sur les pratiques et les activités des élèves et aux résultats bruts des élèves...

Références bibliographiques

Les références de [1] à [4] sont des publications de l'I.R.E.M. de Paris VII destinées à la formation des enseignants.

[1] P. Beziaud, D. Dumortier, A. Robert & F. Vandebrouck – Un questionnaire sur l'utilisation du tableau noir en classe de mathématiques (collège et lycée) : « portée, limites, perspectives en formations », (2003).

[2] A. Robert & al. – « Analyses de vidéos, livret d'accompagnement », (2003).

[3] A. Robert – Des analyses d'une séance de classe aux analyses de pratiques : « perspectives en formation », (2004).

[4] ———, – « Scénarios de formation des enseignants de mathématiques du second degré, un zoom sur l'utilisation de vidéo ; un exemple », (2004).

[5] E. Bautier & J.Y. Rochex – *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens, démocratisation ou massifiaction*, Armand Colin, 1998.

[6] C. Blanchard-Laville – « L'analyse clinique des pratiques professionnelles : un espace de transitionnalité », *Éducation permanente* (2004).

[7] J. Bolon – « Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactiques ? », Thèse, université Paris VII, Paris, 1996.

[8] G. Brousseau – *Théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage, 1998.

[9] C. Hache – « L'univers mathématiques proposée par le professeur en classe », *Recherches en didactique des mathématiques* **21** (2001), n° 1-2, p. 81–98.

[10] M. Lattuati & J. Penninckx – *L'enseignement des mathématiques au lycée, un point de vue didactique*, Ellipses, 1999.

[11] J.-J. Maurice & V. Berthon & N. Vigneron – « Les marqueurs de temps : anticipation des enseignants, difficultés effectives des élèves », *Psychologie et Éducation* **42** (2000), p. 79–93.

[12] A. Robert – « Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université », *Recherches en didactique des mathématiques* **18** (1998), n° 2, p. 139–190.

[13] ———, « Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant », *Recherches en didactique des mathématiques* **21** (2001), n° 1-2, p. 57–80.

[14] ———, « De l'idéal didactique aux déroulement réels en classe de mathématiques : le didactiquement correct, un enjeu de la formation (futurs) enseignants (en collège et lycée) », *Didaskalia* **22** (2002), p. 99–116.

[15] ———, « Tâches mathématiques et activités des élèves : une discussion sur le jeu des adaptations individuelles introduites au démarrage des exercices cherchés en classe », *Revue Petit x* **62** (2003), p. 61–71.

[16] A. Robert & N. Pouyanne – « Formateurs d'enseignants du second degré en mathématiques ; éléments pour une formation », Documents pour la formation des enseignants n° 5 I.R.E.M. de paris VII, 2004.

[17] A. Robert & J. Rogalski – « Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices – le double travail de l'enseignat sur les énoncés de la classe », *Revue Petit x* **60** (2002), p. 6–25.

[18] A. Robert & M. Rogalski – « Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de », *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* **2** (2002), n° 4, p. 505–528.

[19] E. Roditi – « Régularité et varaibilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième », *Recherche en didactique des mathématiques* **23**, n° 2, p. 183–216.

[20] F. Vandebrouck – « Utilisation du tableau de gestion de la classe de mathématiques : à la recherche d'invariants dans les pratiques d'enseignants », *Cahier de Didirem* (2002), n° 42, Université Paris VII.

Vous pouvez envoyer vos réactions à l'adresse : `gazette@dma.ens.fr`

COURRIER DES LECTEURS

À propos de l'article[1] de L. Lafforgue

Je relève dans cet article le passage suivant : « *Concrètement, je rêve par exemple qu'en France certains établissements confessionnels pourraient choisir de quitter le régime des « établissements privés sous contrat » et de recouvrer une liberté pleine et entière [...] qui permettrait de refonder un enseignement religieux (lecture approfondie de la Bible en hébreu et en grec, étude de toute la tradition depuis les Pères de l'Église, étude de la tradition juive) et profane (humanités classiques, littérature, philosophie, mathématiques, physique, sciences) sans commune mesure avec celui d'aujourd'hui* ».

Il me paraît intéressant de comparer ces lignes avec l'extrait qui suit d'un texte écrit par Mgr Dupanloup, très fameux évêque d'Orléans, après le vote de la loi Falloux en 1850 : « *Les écoles libres ne sont soumises en rien à l'administration ni à la direction des autorités, mais seulement à une surveillance d'ordre public, strictement définie et rigoureusement limitée [...]. Les écoles normales, si dangereuses, si puissantes pour le mal et qui ont si déplorablement dénaturé le caractère et la mission des instituteurs primaires, disparaissent* ».

Après lecture de ces deux passages, on peut se demander si l'auteur du premier souhaite que l'on en arrive à la situation qui réjouissait si fort l'auteur du second ?

Alain Guichardet
Centre de Mathématiques
L. Schwartz de l'École polytechnique

⋆ ⋆ ⋆

La réponse à la question que pose M. Guichardet devrait paraître assez claire à tous ceux qui ont lu ma tribune libre. Je réagis quand même en faisant quelques remarques :
1) Mon texte dénonce certaines évolutions de notre société et particulièrement de notre système éducatif, mais il n'était agressif vis-à-vis d'aucune personne.
2) Il fait un vibrant éloge de l'école républicaine telle qu'elle a existé jusqu'aux années 60 et à laquelle ma famille doit presque tout comme je l'ai écrit. Il explique pourquoi j'ai rejoint les rangs des défenseurs actifs de l'école républicaine parmi lesquels, par parenthèse, je n'ai encore jamais eu l'occasion de croiser M. Guichardet.

[1] Un texte de Laurent Lafforgue intitulé « De l'école et de ce qui fonde la valeur de la culture et du savoir » a été publié dans la tribune de la *Gazette des Mathématiciens* en juillet 2005.

3) M. Guichardet fait mine de supposer que l'existence d'écoles catholiques non subordonnées à l'État constituerait une menace pour les écoles normales (sans doute parce qu'il pense qu'une institution bonne ne peut exister qu'à la condition d'interdire tout ce qui pourrait lui faire concurrence). Il ignore peut-être que les écoles normales n'existent plus, ayant été abolies (pour être remplacées par les célèbres IUFM) par la loi d'orientation de 1989 préparée par un ministre de l'Éducation nationale éminemment laïque.
4) M. Guichardet reproduit une citation tronquée qui lui permet d'établir une relation de cause à effet entre la liberté des écoles catholiques et la suppression des écoles normales de l'époque. Je ne suis pas sûr que dans le texte complet de Mgr Dupanloup un tel lien existe.
5) Pour ma part, je ne dirais jamais un seul mot contre ceux qui portaient le noble nom d'instituteurs ni contre leurs écoles normales.

En revanche, je pense que ce qu'ils ont incarné a été tellement détruit par l'évolution générale de notre société et par celle de l'éducation nationale que ce ne pourra être reconstruit qu'avec l'aide de certaines forces spirituelles dont je parle. En tout cas, je fais appel à ces forces pour qu'elles contribuent à cette reconstruction. Bien qu'elles se soient longtemps affrontées avec l'ancienne école républicaine, je pense comme Charles Péguy que l'école appartient au même monde qu'elle, le monde qui se définit par la valeur qu'il accorde à la personne humaine et au mot « vérité » comme source de sens, vocation et puissance de libération.

Laurent Lafforgue

⋆ ⋆ ⋆

Citons, comme autres réactions au texte de Laurent Lafforgue, une lettre que M. Maheut a tenu à publier sur le forum de la SMF dès le 28 juillet et qui a suscité, toujours sur le forum, des réponses dont une de Laurent Lafforgue, ainsi qu'un message de M. Pluvinage qui propose comme éclairage complémentaire à la question de la formation des élites en France la lecture de « À chacun son Everest » de Gérard Kuntz, publié initialement dans Repères-Irem, n^o 60 (juillet 2005) et que l'auteur a bien voulu placer aussi sur le site de la SMF (`http://smf.emath./fr/Enseignement/TribuneLibre/`).

LIVRES

Approximation by algebraic numbers

Yann Bugeaud

Cambridge Tracts in Mathematics, **160**, Cambridge University Press, 2004.
290 p. ISBN : 0-521-82329-3. £ 40)

Les nombres réels sont les limites de suites de Cauchy de nombres rationnels. Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est donc par construction dense dans celui $\mathbb{R}$ des nombres réels. Cette propriété peut être précisée de diverses façons. Un nombre réel étant donné, on peut s'intéresser au nombre minimal d'opérations « élémentaires » permettant d'obtenir une qualité d'approximation donnée ; cela conduit à une notion de complexité pour le calcul numérique. La théorie de l'approximation diophantienne repose sur un autre point de vue : on étudie la qualité de l'approximation en fonction de la complexité de l'approximant. Si x est le réel donné et p/q l'approximation rationnelle, on compare $|x-p/q|$ avec $\max\{|p|,|q|\}$. Quand x est fixé il suffit de connaître q : pour avoir une approximation raisonnable on prend pour p l'entier le plus proche de qx (on notera $\|\xi\|$ la distance d'un nombre réel ξ à l'entier le plus proche). Quand il y a un seul paramètre, ici q, cela simplifie bien les choses.

Plusieurs manières d'appréhender une telle situation se présentent. On peut chercher des énoncés valables pour tout nombre réel x, ou au contraire se restreindre à des classes particulières de x (par exemple celle des nombres algébriques irrationnels).

Au début du XXème siècle Émile Borel posa les premières questions sur le comportement diophantien des nombres réels en dehors d'un ensemble de mesure nulle. Par exemple il étudia la croissance des quotients partiels du développement en fraction continue. Il introduisit aussi la notion de nombre *normal* dans une base (ceux dont la suite des chiffres du développement se comporte comme une suite aléatoire, en un sens qu'il faut bien entendu préciser). Il inaugurait ainsi la *théorie métrique* de l'approximation diophantienne, qui a aussitôt été développée notamment par H. Weyl et A.Ya. Khintchine.

Quand une propriété est vraie pour presque tous les nombres réels au sens de la mesure de Lebesgue, on peut encore raffiner l'étude grâce à la mesure de Hausdorff.

Une fois précisée la classe des nombres dont on étudie l'approximation, il y a ici encore plusieurs options concernant les approximants. On peut s'interroger sur l'existence d'une infinité de nombres rationnels approchant les nombres considérés avec une qualité d'approximation contrôlée ; on peut demander en plus que la suite des approximations ne soit pas trop lacunaire ; on peut aussi restreindre, par exemple par des conditions arithmétiques, les nombres rationnels p/q qui doivent approcher x : on peut demander à q d'être premier, ou bien d'être sans facteurs carrés, ou encore d'appartenir à certaines classes de congruences.

Une option différente consiste à prendre, au contraire, des classes de nombres plus larges que les rationnels pour approcher x, par exemple celle des nombres algébriques. L'approximation de nombres réels (ou complexes) par des nombres algébriques est à elle seule l'objet de multiples variantes. On filtre l'ensemble des nombres algébriques par le degré et la « hauteur », la façon dont ces deux paramètres tendent vers l'infini crée de multiples situations. La nécessité d'utiliser deux paramètres complique la question : pour l'approximation rationnelle il n'y en a qu'un, la hauteur.

Parmi les notions de hauteur couramment utilisées, la plus élémentaire est celle qualifiée de « naïve » : pour un nombre algébrique c'est le maximum des valeurs absolues des coefficients du polynôme minimal (ces coefficients sont entiers). Cette hauteur naïve n'est pas la meilleure : on lui préfère de nos jours la *mesure de Mahler* qui possède l'avantage de pouvoir être définie de manière équivalente soit en termes des coefficients du polynôme minimal, soit par la moyenne du logarithme du module de ce polynôme minimal sur le cercle unité (la formule de Jensen permet de faire le lien), soit en faisant intervenir les différentes places du corps de nombres (c'est la *hauteur de Weil*). Quelle que soit la notion de hauteur utilisée, l'essentiel est que les nombres algébriques dont on borne le degré et la hauteur forment un ensemble fini.

L'approximation simultanée de nombres réels est un vaste sujet. Un outil remarquable provenant de la géométrie des nombres, le « principe de transfert », permet par exemple de relier l'étude de la qualité des approximations simultanées des nombres réels $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ par des nombres rationnels de même dénominateur, à savoir l'étude de la suite

$$\max_{1 \le j \le n} \|q\alpha_j\|, \quad (q \ge 1)$$

à celle des combinaisons linéaires données par la suite

$$\max\bigl\{\|q_1\alpha_1 + \cdots + q_n\alpha_n\| \; ; \; 0 < \max_{1 \le j \le n} |q_j| \le q\bigr\}, \quad (q \ge 1).$$

On peut découper le thème de l'approximation simultanée en deux parties, comme le fait V.G. Sprindžuk avec les titres de ses deux chapitres de [13], intitulés respectivement « Approximation of independent quantities » et « Approximation of dependent quantities ». Dans le premier chapitre l'auteur étudie l'approximation rationnelle de points de $\mathbb{R}^n$ en dehors d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, dans le second il se place dans une sous-variété ; un exemple simple est celui d'une courbe $(x, x^2, \dots, x^n)$, ce qui revient à étudier l'approximation polynomiale d'un nombre réel. Certaines variétés, appelées « extrêmales », possèdent la propriété que, pour presque tous les points (au sens de la mesure de Lebesgue), le théorème de Dirichlet sur l'approximation diophantienne ne peut pas être amélioré (c'est le cas de la droite réelle). V.G. Sprindžuk, qui a étudié cette question dans les années 1960 (en même temps que W.M. Schmidt), conjectura que certaines variétés satisfaisant à des hypothèses arithmétiques et géométriques de non dégénérescence sont extrémales. D'importants progrès ont été accomplis depuis les travaux de S.G. Dani dans les années 1980 sur les orbites des flots géodésiques sur des espaces homogènes, suivis par les contributions de G.A. Margulis (résolution d'une conjecture d'Oppenheim), puis de D. Kleinbock (résolution de conjectures de Sprindžuk et Baker dans un travail commun de Kleinbock et Margulis) notamment.

Pour compléter ce panorama on peut encore citer la théorie de l'équirépartition ou de l'équidistribution modulo 1 (voir [6] pour les débuts de la théorie), et aussi la théorie ergodique, dont les liens avec l'approximation diophantienne sont étroits. En liaison avec les travaux de Dani et Margulis on peut enfin mentionner ceux de S. Hersonsky et F. Paulin sur les géodésiques diophantiennes sur des variétés à courbure négative [5].

Toutes les questions qui viennent d'être suggérées, et bien d'autres, font l'objet d'études approfondies qui utilisent souvent des méthodes très élaborées.

Une des origines de la théorie de l'approximation diophantienne remonte aux très anciens calculs approchés du nombre π. Connaître une valeur approchée de ce nombre est indispensable pour de nombreuses applications concrètes, calculer plusieurs milliards de décimales répond à des objectifs de nature différente : l'analyse diophantienne a été élaborée au cours des siècles pour répondre à une curiosité naturelle, le plus souvent sans autre motivation que l'impérieux besoin de savoir. Cependant il se trouve que cette théorie connaît des applications fort diverses. Les problèmes que posent les engrenages sont certainement une autre source des plus anciens travaux sur les approximations diophantiennes. Les approximations rationnelles du nombre $\log_2 3$ interviennent naturellement dans les gammes classiques ; celles du nombre exact de tours que fait la terre sur elle-même quand elle accomplit une révolution complète autour du soleil jouent un rôle essentiel dans l'établissement d'un calendrier. Un autre exemple vient des systèmes dynamiques : les phénomènes de résonance dépendent de la rationalité de certains paramètres ; quand ces mêmes paramètres sont irrationnels mais sont très proches de nombres rationnels de dénominateurs pas trop grands, on observe des comportements physiques proches de la résonance. En astronomie l'étude de la stabilité du système solaire, les questions relatives aux périodes des orbites de Saturne (divisions de Cassini), le problème des N corps font intervenir l'approximation diophantienne. Le rôle des petits dénominateurs dans la théorie des systèmes dynamiques a été mis en évidence par H. Poincaré. Il est intéressant de noter que C.L. Siegel a contribué à l'établissement de résultats profonds à la fois en approximation diophantienne et en mécanique céleste. Des sujets aussi éloignés que les quasi-cristaux ou l'acoustique des salles de concert utilisent encore cette théorie. Pour toutes ces questions on pourra consulter [11], ainsi que le chapitre 7 de [2].

Le nom donné à cette partie de l'arithmétique vient du mathématicien grec Diophante d'Alexandrie, qui, il y a un peu moins de 20 siècles, considérait des problèmes de géométrie dont il donnait une solution. En termes modernes il ramenait ces questions à des équations polynomiales entre plusieurs inconnues et exhibait un point rationnel sur la variété associée. On appelle maintenant « équation diophantienne » une équation polynomiale reliant ces inconnues. Résoudre l'équation de Thue $F(x, y) = k$, où F est un polynôme homogène de degré au moins 3, disons irréductible, et k un entier non nul fixé, revient à étudier les approximations rationnelles des racines du polynôme $F(X, 1)$. Cette notion a été étendue progressivement ; une « équation diophantienne exponentielle » est une équation polynomiale dans laquelle certains exposants sont inconnus. Le théorème de Wiles qui répond au problème de Fermat peut être énoncé comme un résultat sur l'équation diophantienne exponentielle $X^n + Y^n = Z^n$, où les inconnues sont les entiers X, Y, Z et n, avec $n \geq 3$. D'autres équations diophantiennes exponentielles célèbres sont celle de Catalan $X^p - Y^q = 1$, celle de Pillai $X^p - Y^q = k$ et celle de Beal $X^p + Y^q = Z^r$.

La géométrie diophantienne a pour objet, au moins au départ, d'étudier les équations diophantiennes en y adaptant les outils de la géométrie algébrique. L'étude arithmétique des hauteurs y joue un rôle clef. Cette notion de hauteur a été étendue des nombres aux sous-espaces [9], puis aux sous-variétés.

Déterminer si un nombre réel donné x est rationnel ou non est bien entendu un problème diophantien — il s'agit aussi de dire si l'équation $ax = b$ a une solution rationnelle (a, b) autre que $(0, 0)$. Plus généralement, déterminer si un nombre complexe est algébrique ou transcendant est encore un problème diophantien. Les outils permettant de résoudre de telles questions sont principalement ceux qui sont utilisés en approximation diophantienne.

Plusieurs ouvrages ont précédé celui de Yann Bugeaud, à commencer par H. Minkowski (1907), puis J.F. Koksma (1936), J.W.S. Cassels (1957), Th. Schneider (1957), I. Niven (1963), S. Lang (1966), V.G. Sprindžuk (1969), W.M. Schmidt (1972), A. Baker (1975), V.G. Sprindžuk (1979), W.M. Schmidt (1980 et 1991), G. Harman (1998), V. Bernik et M. Dodson (1999) notamment.

Avant de parler de [3], disons quelques mots sur les deux plus récents.

Comme son titre l'indique, le livre de G. Harman [4] concerne exclusivement la théorie métrique, c'est-à-dire l'étude des propriétés arithmétiques des nombres réels ou des éléments de $\mathbb{R}^n$ d'un point de vue global en théorie de la mesure. Comme exemple d'énoncé voici le théorème de Sprindžuk qui répond à une conjecture de Mahler : [12]

> *pour presque tout nombre réel x, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout entier n positif, il existe un nombre $H_0 = H_0(x, \varepsilon, n)$ tel que, pour tout $H \geq H_0$ et pour tout polynôme non nul de degré $\leq n$ et de hauteur naïve $\leq H$, on ait*
>
> $$|P(x)| \geq H^{-n(1+\varepsilon)}.$$

Si on remplace *réel* par *complexe*, le même énoncé est valable avec l'exposant $(n-1)/2 + \varepsilon$ au lieu de $n(1+\varepsilon)$.

Le livre [4] traite des nombres normaux, de la conjecture de Duffin-Schaeffer, de l'équirépartition modulo 1, des propriétés arithmétiques des suites, de la dimension de Hausdorff des ensembles exceptionnels.

Le sujet central du livre de V. Bernik et M. Dodson [2] est l'approximation diophantienne sur des variétés lisses plongées dans l'espace euclidien. Ils développent les méthodes de V.G. Sprindžuk ; ils mentionnent l'approche plus récente dont nous avons parlé qui trouve son origine dans les travaux de S.G. Dani dans les années 1980 mais sans utiliser cette méthode. L'essentiel du livre est consacré aux questions concernant la mesure de Hausdorff de sous-ensembles formés de points ayant un comportement donné pour l'approximation diophantienne.

Il est temps d'en venir à la dernière parution sur ce sujet, à savoir le livre de Y. Bugeaud [3] paru en 2004. Le thème central est celui de l'approximation de nombres réels par des nombres rationnels. Son objectif est donc plus vaste que celui des deux autres ouvrages récents dont nous venons de parler. L'essentiel du livre est consacré aux nombres réels, à la fin sont mentionnés des résultats concernant d'autres corps, celui des nombres complexes, les corps p-adiques, ceux de séries formelles.

Le premier chapitre traite de l'approximation des nombres réels par des nombres rationnels, avec les théorèmes de Dirichlet, Liouville, Khintchine, la conjecture de Duffin-Schaeffer. La remarque suivante aurait mérité de figurer dans le livre : *aucun nombre réel ne se comporte, du point de vue de l'approximation rationnelle, comme presque tous les nombres réels*. Plus précisément, si $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fonctions croissantes f définies sur les entiers positifs à valeurs réelles positives possédant la propriété que pour presque tout x réel, l'inégalité

$$|x - p/q| < 1/f(q)$$

n'a qu'un nombre fini de solutions, alors pour tout x réel il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que l'inégalité

$$|x - p/q| < 1/f(q)$$

ait un nombre infini de solutions. Cela semble (à première vue seulement) un peu paradoxal, mais cela impose d'être prudent si on veut conjecturer, par exemple, que les nombres algébriques se comportent comme presque tous les nombres réels de ce point de vue.

Le second chapitre concerne l'approximation de nombres algébriques avec le théorème de Thue-Siegel-Roth pour l'approximation par des nombres rationnels ; la question de l'effectivité des énoncés est au centre de la discussion, les résultats que l'on obtient par les méthodes de Baker-Feldman et Bombieri sont énoncés. Une démonstration, due à E. Bombieri et J. Mueller, d'un théorème de Wirsing sur l'approximation d'un nombre algébrique par des nombres algébriques de degré plus petit y est reproduite. Un énoncé de H. Davenport et W.M. Schmidt sur l'approximation d'un nombre algébrique par des nombres algébriques de degré plus grand est raffiné grâce au critère d'Eisenstein, puis complété par un résultat nouveau montrant que ce théorème est optimal. On trouve aussi au chapitre 2 des applications à l'irrationalité et à la transcendance. Un traitement détaillé du théorème du sous-espace de Schmidt, formidable généralisation du théorème de Thue-Siegel-Roth dont les applications sont de plus en plus nombreuses ces temps-ci, aurait nécessité plus de place, mais il fait déjà l'objet de monographies [7], [8], [9].

Les chapitres qui suivent portent sur les classifications des nombres transcendants. Les deux premières, dues à K. Mahler et J.F. Koksma, ont fait l'objet de nombreux travaux. Le livre de Th. Schneider [10] (qui a été traduit de l'allemand en français par Pierre Eymard) reste une excellente référence sur ce sujet, même si de nombreux progrès ont été accomplis depuis, dont plusieurs sont dus à l'auteur. Le chapitre 3 présente des résultats profonds de H. Davenport et W.M. Schmidt en 1969 sur l'approximation des puissances d'un nombre réel par des *entiers* algébriques de degré borné, travaux qui ont fait l'objet d'études récentes par D. Roy notamment. L'auteur propose au chapitre 3 une extension, qu'il appelle « main problem », d'une conjecture bien connue due à E. Wirsing relative à l'approximation algébrique des nombres réels.

La conjecture de K. Mahler sur les S-nombres, qui a été résolue par V.G. Sprindžuk comme nous l'avons vu, fait l'objet du chapitre 4, avec le raffinement dû à A. Baker (on pourra aussi consulter le chapitre 9 de [1] pour connaître l'état de ce sujet il y a 30 ans) et les travaux plus récents de V. Bernik. L'approche de Margulis et Kleinbock est citée mais n'est pas développée.

Le chapitre 5 traite de la dimension de Hausdorff des ensembles exceptionnels, avec les travaux de V. Jarník et A.S. Besicovitch complétés par le théorème de A. Baker et W.M. Schmidt. L'auteur traite la situation relative aussi bien à la classification de Mahler qu'à celle de Koksma.

Le sixième chapitre approfondit les énoncés du cinquième. Un des ingrédients principaux est un résultat de V. Beresnevich (1999) disant que les nombres algébriques de degré borné sont aussi bien répartis qu'il est possible de l'espérer. L'auteur prévient que peu de démonstrations complètes des résultats de ce chapitre sont données car elles sont extrêmement techniques. Des travaux de V. Bernik, M. Dodson, H. Dickinson, S.L. Velani et bien d'autres (y compris l'auteur) sont cités.

Les classes T et U de la classification de Mahler font l'objet du chapitre 7, où est fait le point sur les résultats connus en direction du principal problème ouvert du chapitre 3. Rappelons que l'existence de nombres de la classe T dans la classification de Mahler n'a été établie (par W.M. Schmidt) qu'en 1968.

Le chapitre 8 parle d'autres classifications de Sprindžuk et Mahler, de mesures de transcendance et de mesures d'approximation algébrique. On y trouve aussi, entre autres, une référence à la classification de P. Philippon qui introduit une distance locale utilisant de l'analyse non-standard.

Comme nous l'avons dit le chapitre 9 traite d'autres corps avec des valuations archimédiennes ou ultramétriques.

Le dernier chapitre rassemble des conjectures et des questions ouvertes. Certaines sont des conjectures bien connues — à commencer par celle de Littlewood (elle est tellement importante qu'elle est énoncée deux fois dans ce chapitre 10 !) : *pour tout couple* (x, y) *de nombres réels et pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un entier* q *tel que*

$$q \cdot \|qx\| \cdot \|qy\| \leq \varepsilon.$$

L'auteur en a collecté un certain nombre dans la littérature, posées par des spécialistes comme K. Mahler, W.M. Schmidt, P. Erdős,... Il en formule d'autres qui sont nouvelles et dont la résolution constituerait un progrès pour la théorie.

Ce livre contient donc les bases de la théorie qui se trouvent déjà dans plusieurs des autres ouvrages antérieurs, mais en plus il y a beaucoup d'autres informations, soit des références à des résultats très récents, soit des résultats originaux de l'auteur lui-même. Contrairement à ce que laisse penser la jaquette de la couverture, il ne faut pas compter y trouver toutes les démonstrations complètes : celles-ci nécessiteraient beaucoup plus de place. On l'a vu d'ailleurs avec [12] et [7], si on veut donner les détails de la démonstration d'un seul théorème il faut souvent un volume entier. Bugeaud a choisi de décrire les principaux résultats de la théorie de la façon la plus claire possible, en mettant quantité de notes et d'exercices permettant d'aller plus loin. Une grande place est consacrée aux questions relatives aux classifications de nombres transcendants, principalement celles de Mahler et de Koksma. Ce livre contient un grand nombre de références (617) particulièrement à des articles récents.

Les notes, les compléments de fins de chapitres et les exercices apportent énormément d'informations sur les développements les plus récents de la théorie, contribuant à rendre ce livre indispensable pour les spécialistes, extrêmement utile pour tout mathématicien ayant besoin de résultats d'approximation diophantienne, et précieux pour tous ceux qui souhaitent découvrir le sujet, éventuellement pour y apporter de nouvelles contributions originales. L'accent mis sur les problèmes ouverts et les conjectures donne une perspective qui ne se limite pas aux résultats connus mais au contraire anticipe sur ce que devrait être le paysage futur. Les défis à relever ne manquent pas dans ce domaine. L'importance des contributions récentes montre qu'il s'agit d'un sujet en pleine vitalité.

Références

[1] A. Baker – *Transcendental number theory*, Cambridge University Press, London, 1975.

[2] V. I. Bernik & M. M. Dodson – *Metric Diophantine approximation on manifolds*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 137, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[3] Y. Bugeaud – *Approximation by algebraic numbers.*, Cambridge Tracts in Mathematics 160. Cambridge : Cambridge University Press. xv + 274 p., 2004 (English).

[4] G. Harman – *Metric number theory*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 18, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998.

[5] S. Hersonsky & F. Paulin – « Hausdorff dimension of Diophantine geodesics in negatively curved manifolds », *J. Reine Angew. Math.* **539** (2001), p. 29–43.

[6] J. F. Koksma – *Diophantische Approximationen*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[7] W. M. Schmidt – *Approximation to algebraic numbers*, Secrétariat de l'Enseignement Mathématique, Université de Genève, Geneva, 1972, Série des Conférences de l'Union Mathématique Internationale, n° 2, Monographie n° 19 de l'Enseignement Mathématique.

[8] ———, *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 785, Springer, Berlin, 1980.

[9] ———, *Diophantine approximations and Diophantine equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1467, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[10] T. Schneider – *Introduction aux nombres transcendants*, Traduit de l'allemand par P. Eymard, Gauthier-Villars, Paris, 1959.

[11] M. R. Schroeder – *Number theory in science and communication*, Springer Series in Information Sciences, vol. 7, Springer-Verlag, Berlin, 1999, With applications in cryptography, physics, digital information, computing, and self-similarity, Corrected reprint of the third (1997) edition.

[12] V. G. Sprindžuk – *Mahler's problem in metric number theory*, Translated from the Russian by B. Volkmann. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 25, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.

[13] V. G. Sprindžuk – *Metric theory of Diophantine approximations*, V. H. Winston & Sons, Washington, D.C., 1979, Translated from the Russian and edited by Richard A. Silverman, With a foreword by Donald J. Newman, Scripta Series in Mathematics.

Michel Waldschmidt,
Laboratoire de théorie des nombres
Université P. et M. Curie (Paris VI)

The Mandelbrot Set, Theme and Variations
Recueil édité par Tan Lei
Lecture Notes Series, 274, Cambridge University Press, London Mathematical Society, 2000. xx+385 p.
ISBN : 0-521-77476-4. 39 € paperback

Ce recueil regroupe 16 articles de divers auteurs, accompagnés d'une préface et d'une introduction, autour de l'ensemble de Mandelbrot mais pas seulement. Quatre articles sont en français, le reste est en anglais. Plusieurs n'ont jamais été publiés. Le livre intéressera aussi bien le chercheur que l'étudiant connaissant les bases de la dynamique holomorphe en une variable complexe.

L'ensemble de Mandelbrot M est une célèbre icône de ce domaine. Pour le définir brièvement, on introduit la famille de polynômes $f_c(z) = z^2 + c$, où $z, c \in \mathbb{C}$. Soit $A_c(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, f_c^n(z) \longrightarrow \infty\}$ le bassin d'attraction de l'infini, où f_c^n désigne $f_c \circ \cdots \circ f_c$. Soit $K_c = \mathbb{C} \setminus A_c$. On pose alors

$$\mathrm{M} = \big\{c \in \mathbb{C} \,\big|\, K_c \text{ est connexe}\big\}.$$

Le critère $c \in \mathrm{M} \iff 0 \in K_c$ donne une caractérisation de M particulièrement simple et adaptée aux dessins par ordinateur. L'étude de M a beaucoup avancé depuis son introduction, mais remarquons qu'une des principales conjectures, bien que formulée assez tôt, est toujours ouverte plus de 20 ans après.

Conjecture MLC : M est localement connexe.

Avant de décrire le contenu des articles, rappelons qu'un point périodique z d'une application holomorphe est dit *parabolique* quand son multiplicateur est une racine de l'unité ($\iff \exists k > 0$ tel que $f^k(z) = z$ et $(f^k)'(z) = 1$).

L'introduction par Tan Lei donne un très bon résumé du contenu du livre. Les articles y sont regroupés en quatre parties que nous énumérons plus loin. Suit une intéressante liste de techniques utilisées en dynamique complexe, et pour chacune la liste des articles qui la mettent en œuvre.

La préface par J.H. Hubbard raconte comment il a vécu et participé à la renaissance du domaine à la fin des années 1970, le rôle qu'ont joué les ordinateurs, certains mathématiciens, des outils et résultats clés, et quelques cafés parisiens. C'est un plaisir de lire ce compte rendu vivant, de partager l'enthousiasme de son auteur, et constater encore une fois le caractère expérimental de la recherche en mathématiques pures.

Partie I. L'universalité de l'ensemble de Mandelbrot

Dans *The Mandelbrot set is universal* (18 p.), McMullen démontre l'existence de copies arbitrairement petites et arbitrairement peu distordues de M, denses dans le lieu de bifurcation B de n'importe quelle famille analytique de fractions rationnelles, en trouvant une cascade de copies de M aux points de Miziurewicz. Il en déduit que la dimension de Hausdorff de B est maximale.

L'article *Baby Mandelbrot sets are born in Cauliflowers* (18 p.) de Douady, Buff, Devaney et Sentenac, s'intéresse à une autre suite de copies de M, que l'on découvre en observant des agrandissement aux points de rebroussement des copies primitives de M dans M. Elles apparaissent au centre de copies d'ensembles que les auteurs appellent choux-fleurs implosés, qui valent son titre à l'article. Le phénomène est illustré, expliqué et démontré.

Modulation dans l'ensemble de Mandelbrot (30 p.) de Haïssinsky démontre le théorème de modulation de Douady et Hubbard : il y a une copie de M associée à chaque composante hyperbolique de M. La modulation dans le plan des paramètres correspond à une modulation dans le plan dynamique, expliquée dans la deuxième partie. Des conséquences combinatoires en sont tirées.

Partie II. Ensembles de Julia quadratiques[1] et l'ensemble de Mandelbrot

Les articles de cette partie sont regroupés par thème :

– Sur la connexité locale de M

Local connectivity of Julia sets : expository lectures (50 p.) de Milnor démontre 3 résultats de Branner, Douady, Hubbard et Yoccoz. La méthode des puzzles et sa présentation par des tableaux est introduite et appliquée à la preuve de la locale connexité des ensembles de Julia quadratiques non renormalisables. La même méthode est utilisée pour l'étude des polynômes dont les points critiques s'échappent tous, sauf un : soit ils sont renormalisables, soit leur ensemble de Julia est un cantor de mesure nulle. Enfin, la modulation est utilisée pour construire des ensembles de Julia quadratiques infiniment renormalisables et non localement connexes.

Holomorphic motions and Puzzles (following M. Shishikura) (16 p.) de Roesch illustre les techniques de passage du plan dynamique au plan des paramètres en déduisant de l'article précédent la locale connexité de M aux paramètres non renormalisables sans point fixe indifférent.

Local properties of the Mandelbrot set at parabolic points (28 p.) de Tan Lei étudie la locale connexité de M aux racines c_0 des copies primitives. L'implosion parabolique[2] est reformulée en un lemme de transfert du plan dynamique au plan des paramètres au voisinage de c_0. Des résultats analogues pour les copies non primitives, pour les points de Miziurewicz, et enfin des corollaires, sont rapidement donnés en appendice.

Convergence of rational rays in parameter spaces (12 p.) de Petersen et Ryd démontre le théorème de Douady et Hubbard d'aboutissement des rayons externes rationnels de l'ensemble de Mandelbrot, par une méthode qui évite d'utiliser toute la machinerie de l'implosion parabolique.

– Dynamique réelle

Dans *Bounded recurrence of critical points and Jakobson's Theorem* (38 p.), Luzzatto redémontre le théorème de Jakobson, donnant l'existence de nombreuses valeurs de $a \in [2-\varepsilon, 2]$ telles que le polynôme $P_a(x) = x^2 - a : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ a

[1] l'ensemble de Julia d'un polynôme est l'ensemble $J = \partial K$, où K est le complémentaire du bassin de l'infini

[2] voir le dernier article du recueil

une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Il est obtenu comme conséquence d'une condition de récurrence du point critique (demandant que $\prod_{k=1}^{n} \left|P_a^k(0) - 0\right|$ décroisse au plus exponentiellement).

The Herman-Świątek Theorems with applications (16 p.) de Petersen part des inégalités de distorsion du birapport de Świątek et en déduit un théorème d'Herman de conjugaison quasi-symétrique de certains homéomorphismes du cercle. Il rappelle ensuite comment la chirurgie holomorphe de Ghys et al. en déduit, pour tout θ de type constant, que le polynôme $z \mapsto e^{i2\pi\theta}z + z^2$ a un disque de Siegel[3] dont le bord est une courbe de Jordan contenant le point critique et dont l'ensemble de Julia est localement connexe. Enfin, sur une idée d'Herman, il démontre par perturbations l'existence de nombres θ de type *non* constant tels que ces résultats persistent.

– Perturbation de points fixes indifférents

L'article *Perturbation d'une fonction linéarisable* (26 p.) de Jellouli considère une famille $\mathbb{R}$-analytique de fonctions holomorphes $f_\theta(z) = e^{i2\pi\theta}z + \mathcal{O}(z^2)$, ayant pour $\theta = \alpha$ un point fixe linéarisable en 0. L'article donne des outils pour étudier ce qui se passe dans son disque de Siegel, quand on perturbe α par ses réduites p_n/q_n : premièrement un résultat de stabilité des $o(q_n q_{n+1})$ premières itérées de f_n, et deuxièmement, si θ est diophantien, un théorème de linéarisation de f_θ à $\mathcal{O}(|\theta - \alpha|^k)$ près.[4] Il énonce la conjecture suivante : pour $P_\theta(z) = e^{i2\pi\theta}z + z^2$, l'aire des points du disque de Siegel de P_α qui ne sont pas dans le bassin parabolique de P_{p_n/q_n} tend vers 0. Enfin, il démontre que cette conjecture implique

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{mes}(K(P_{\theta_n}) \cap \mathring{K}(P_\theta)) = \operatorname{mes}(\mathring{K}(P_\theta)),$$

où $K(\theta)$ est le complémentaire du bassin de l'infini pour P_θ.[5]

Dans *Indice holomorphe et multiplicateur* (12 p.), Jellouli utilise la formule de l'indice holomorphe pour le multiplicateur $m(\lambda)$ du cycle proche de 0 de période q que l'on obtient quand on perturbe le paramètre λ_0 du polynôme $P_{\lambda_0} = \lambda_0 z + z^2$ avec $\lambda_0 = e^{2i\pi p/q}$. Les première et deuxième dérivées de m sont calculées, en fonction de l'invariant formel A de P_{λ_0}. Des considérations dynamiques permettent alors d'encadrer la partie réelle de A. Une application au multiplicateur au bout des cylindres d'Écalle perturbés est également donnée.

Partie III. Ensemble de Julia des applications rationnelles

An alternative proof of Mañé's theorem on non-expanding Julia sets (16 p.) de Shishikura et Tan Lei. En utilisant les propriétés de la métrique de Poincaré des ouverts de $\mathbb{C}$, on contrôle les branches inverses d'une application rationnelle F quelconque, près des points de l'ensemble de Julia[6] de F qui ne sont ni paraboliques, ni dans l'ensemble d'accumulation des orbites des points critiques récurrents. Cela permet de montrer des propriétés d'expansion de F. Comme application, l'orbite

[3] domaine maximal de linéarisation
[4] avec une conjugaison dépendant de θ
[5] Cette conjecture a été démontrée depuis. C'est l'une des étapes du plan de Douady pour construire un θ tel que $K(\theta)$ soit d'intérieur vide et de mesure de Lebesgue > 0.
[6] défini comme l'ensemble des points qui n'ont pas de voisinage où les itérées de F forment une famille normale ; dans le cas des polynômes, on peut prouver que cette définition équivaut à la précédente

d'un point de Cremer ou le bord d'un disque de Siegel ou d'un anneau de Herman sont toujours contenus dans l'ensemble d'accumulation d'un point critique récurrent.

Geometry and dimension of Julia sets (8 p.) de Yin Y.-C. illustre une application du théorème précédent : l'ensemble de Julia d'une fraction rationnelle dont tous les points critiques sont non récurrents est soit égal à toute la sphère de Riemann, soit poreux[7]. Dans la preuve, les points paraboliques requièrent une attention particulière.

On a theorem of M. Rees for the matings of polynomials (18 p.) de Shishikura. L'accouplement des polynômes construit une fraction rationnelle R à partir de deux polynômes P_1, P_2 de même degré et post-critiquement finis[8] ; $J(R)$ est homéomorphe à l'union disjointe de $K(P_1)$ et $K(P_2)$ où l'on identifie les points de leurs bords en fonction de leur argument externe. L'accouplement n'est pas possible pour toutes les paires de polynômes. Les méthodes de Thurston sont utilisées dans cet article pour donner un critère suffisant (étendant le travail de M. Rees).

Partie IV. Résultats fondateurs

Le théorème d'intégrabilité des structures presques complexes (18 p.) de Douady (d'après des notes de Buff) démontre le théorème de Morrey-Bojarski-Ahlfors-Bers d'intégration des formes de Beltrami (avec paramètre). La preuve se fait dans les espaces L^2 uniquement[9], avec l'aide de la transformation de Fourier.

Bifurcation of parabolic fixed points (40 p.) de Shishikura décrit la théorie de l'implosion parabolique à un pétale, c'est-à-dire ce qui persiste des pétales, des coordonnées de Fatou et des applications de cornes quand on perturbe une application holomorphe $f(z) = z + az^2 + \mathcal{O}(z^3)$ avec $a \neq 0$.

Arnaud Chéritat,
Laboratoire Émile Picard,
Université de Toulouse

[7] et donc sa dimension de Hausdorff est < 2, résultat prouvé auparavant par Urbanski

[8] de tels polynômes ont un ensemble de Julia connexe et localement connexe, et donc tous les rayons externes aboutissent

[9] d'autres preuves font intervenir les espaces L^p